Problemi di Meccanica Noti

Tommaso Pedroni

27 marzo 2024

Indice

1 Statica **2**
1.1 Fune appesa 2.1 2
1.2 Fune attorno a un polo p.26 2
1.3 Catenaria 2.8 2
1.4 Balancing the stick 2.16 3

1 Statica

1.1 Fune appesa 2.1

La fune è appesa dall'alto e penzola verso il basso sotto l'effetto della forza di gravità. La fune ha lunghezza L e densità lineare ρ. Per trovare la tensione, basta prendere un frammento di corda dl, tale frammento è sotto l'effetto di tre forze: la forza peso $dl\rho g$, la tensione nel punto l $T(l)$ e la tensione nella punto finale $T(l+dl)$. Ogni frammento è in equilibrio.

$$\begin{aligned} dl\rho g + T(l+dl) &= T(l) \\ T(l+dl) - T(l) &= -dl\rho g \\ T'(l) &= -\rho g \\ T(l) &= -l\rho g \end{aligned} \tag{1}$$

1.2 Fune attorno a un polo p.26

Una fune è tesa lungo a uno spicchio di circonferenza di angolo θ, si applica una tensione T_0 a un estremo. L'altra parte è attaccata a un oggetto pesante inamovibile, come una barca. Pongo il coefficiente di attrito statico μ, calcolare la massima forza che si esercita sulla barca.
Poniamo un angolo $d\theta$, la fune su questo arco ha una tensione T e la reazione vincolare di $N_{d\theta}$. Questa forza bilancia le componenti interne della tensione $T \sin d\theta/2$. Per angoli piccoli possiamo dire che $N_{d\theta} = Td\theta$. La forza di attrito agisce tangenzialmente alla fune grazie a questa componente normale.

$$\begin{aligned} T(\theta + d\theta) &\leq T(\theta) + \mu T d\theta \\ dT &\leq \mu T d\theta \\ \ln T &\leq \mu\theta + C \\ T &\leq T_0 e^{\mu\theta} \end{aligned} \tag{2}$$

1.3 Catenaria 2.8

Considero il tratto ds come un punto materiale. Chiamo il punto della catenaria in s $P(s)$, dove s è l'arco della catenaria. La forza peso in ogni tratto è $ds\rho g$ chiamo $\rho g = F$ quindi per ogni punto si ha. Sappiamo che $T(0) = f_A, T(l) = f_b$

$$\begin{aligned} Fds + T(s+ds) - T(s) &= 0 \\ Fds + dT &= 0 \\ -\frac{dT}{ds} &= F \end{aligned} \tag{3}$$

Ora, $T(s)$ è di direzione tangente alla curva, quindi rispetto alle coordinate cartesiane, è in direzione $(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds})$

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{ds}\left(T(s)\dfrac{dx}{ds}\right) = 0 \\ \\ \dfrac{d}{ds}\left(T(s)\dfrac{dy}{ds}\right) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} T(s)\dfrac{dx}{ds} = \phi \\ \\ T(s)\dfrac{dy}{ds} = F \end{cases} \tag{4}$$

Sostituendo

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{F}{\phi} \tag{5}$$

Un segmento $ds = dx\sqrt{1+y'^2}$ e $\alpha = \rho g/\phi$

$$\frac{dy'}{\sqrt{1+y'^2}} = \alpha dx \tag{6}$$

Risolvendo per per y' e integrando risulta

$$y(x) = \frac{1}{\alpha}\cosh(\alpha x) \tag{7}$$

1.4 Balancing the stick 2.16

Un bastone semi-infinito ha la proprietà che in qualsiasi punto venga tagliato il resto del bastone riesce a stare in equilibrio se posto un cuneo a una distanza l da dove viene tagliato. Definiamo $\rho(x)$ la densità lineare della sbarra nel punto x e $M(x)$ la massa della stessa fino ad x. Avremo quindi $M(0) = 0$ $M(+\infty) = M$ $\rho(x) = \frac{dM(x)}{dx}$ A questo punto calcoliamo il centro di massa, che deve coincidere con l.

$$\begin{aligned} l &= \frac{\int_0^{+\infty} \rho(x)x\,dx}{\int_0^{+\infty} \rho(x)\,dx} \\ &= \frac{\int_0^{+\infty} \rho(x)x\,dx}{M} \end{aligned} \tag{8}$$

Ciò deve diventare $l + d$, quando taglio di d la sbarra

$$\begin{aligned} l + d &= \frac{\int_0^{+\infty} \rho(x)x\,dx - \int_0^{d} \rho(x)x\,dx}{\int_0^{+\infty} \rho(x)\,dx - \int_0^{d} \rho(x)\,dx} \\ &= \frac{Ml - \int_0^{d} \rho(x)x\,dx}{M - \int_0^{d} \rho(x)\,dx} \end{aligned} \tag{9}$$

Ora possiamo moltiplicare e applicare gli integrali per parti sull'integrando $\rho(x)x$, ricordando che $\rho(x)$ è la derivata della funzione $M(x)$

$$\begin{aligned}
(M - M(d))(l + d) &= Ml - (|M(x)x|_0^d - \int_0^d M(x)\,dx) \\
Ml + Md - M(d)l - M(d)d &= Ml - M(d)d + \int_0^d M(x)\,dx \\
Md - M(d)l &= \int_0^d M(x)\,dx
\end{aligned} \tag{10}$$

L'ultima è un equazione differenziale, con soluzione

$$M(d) = M(1 - e^{-d/l}) \tag{11}$$

Derivando, e cambiando la variabile con x si trova l'espressione della densità

$$\rho(x) = \frac{M}{l} e^{-x/l} \tag{12}$$