Lösungsstrategien für NP-schwere Probleme
Aufgabenblatt 02

Jakob Rieck
6423721

Konstantin Kobs
6414943

Thomas Maier
6319878

Tom Petersen
6359640

Abgabe zum 25.04.16

Aufgabe 1

a) Ist NP-vollständig.

b) Zu jedem Prozess P_i betrachte man die Menge Res_i welche alle Ressourcen beinhaltet, die P_i benötigt um aktiv zu werden. Nun sucht man sich ein i und ein j, für das gilt $i \neq j$ und $Res_i \cap Res_j = \emptyset$. Dies ist in polynomieller Laufzeit möglich. Hat man ein solches i und j gefunden, so hat man auch zwei Prozesse (P_i und P_j) gefunden, die gleichzeitig aktiviert werden können.

c) Dieser Spezialfall kann auf ein Flussnetzwerk abgebildet werden. Wird ein Fluss der Größe k entdeckt, gibt es auch k Prozesse, die gleichzeitig gestartet werden können. Als Knoten betrachten wir die Prozesse, Personen und Ausrüstungsgegenstände. Zusätzlich haben wir eine Quelle s und eine Senke t. Jede Person hat eine Kante zur Senke und jedes Ausrüstungsgegenstand hat eine Kante zur Quelle. Zusätzlich hat jeder Prozess je eine Kante zu der Person und eine zu dem Ausrüstungsgegenstand, welche benötigt werden damit dieser aktiviert wird. Alle Kanten haben eine Kapazitätsbeschränkung von 1. So kann verhindert werden, dass ein Fluss von zwei Ausrüstungsgegenständen in einen Prozess fließt oder von einem Prozess in zwei Personen. Jeder Pfad von s nach t fließt durch genau einen Ausrüstungsgegenstand, einen Prozess und eine Person. Jeder dieser

Pfade erhöht den Fluss um 1. Bei einem Fluss von k gibt es also k Prozesse die gleichzeitig aktiv sein können. Hierbei handelt es sich um alle Prozesse durch die der Fluss fließt.

d)

Aufgabe 2

a) Zunächst zeigen wir, dass das Problem in NP liegt. Gegeben eine Lösung des Problems lässt sich verifizieren, indem wir für jedes Element aus S überprüfen, in welchen Teilmengen es liegt. Sind wir alle Elemente aus S_1 durch gegangen und konnten damit noch nicht eine Teilmenge komplett 'abhaken', so ist die Lösung eine korrekte Lösung.

Gegeben sei eine $3-SAT$ Formel F. Wir werden nun diese Formel in ein $SET-SPLITTING$ Problem überführen. Die Idee ist dabei die folgende: Jedes Element der Klasse S_1 wird auf true (bzw. false) und jedes Element der Klasse S_2 wird auf false (bzw. true) gesetzt, damit das $3-SAT$ Problem gelöst werden kann.

Für jede in F vorkommende Variable x_i, werden x_i und $\bar{x_i}$ als Element der Menge S und die Menge $\{x_i, \bar{x_i}\}$ der Menge C hinzugefügt. Somit soll verhindert werden, dass x_i und $\bar{x_i}$ beide in der gleichen Klasse landen und somit als true interpretiert werden können. Neben den Literalen von F, wird noch ein weiteres Element f der Menge S hinzugefügt. Dieses Element liegt in der Klasse, welche auch die Literale von F enthält, die als false interpretiert werden.

Nun bildet jede Klausel mit ihren drei Literalen und dem Element f je eine 4-elementige Teilmenge, welche der Menge C hinzugefügt wird.

Sei F nun erfüllbar, dann gehören die Literale aus F, welche true sind, zu der Klasse S_1 und die Literale aus F, welche false sind, der Klasse S_2. S_2 enthält zusätzlich noch das Element f.

Wenn eine Klausel in F existiert, dessen Literale alle true sind, würde es ohne das Element f eine Teilmenge geben, die vollständig in S_1 liegen würde. Damit dies verhindert wird, wurde das Element f eingeführt.

Umgekehrt gilt, Wenn wir eine Zerlegung von S in zwei Klassen gefunden haben, definieren wir die Elemente der Klasse, welche das Element f beinhaltet als false und die Elemente der anderen Klasse entsprechend als true.

b) Das Problem liegt in NP. Ein Zertifikat wären die beiden Klassen S_2 und S_2. Die Zahlen werden dann jeweils aufaddiert und verglichen. Das ist in polynomieller Zeit möglich.

Nun reduzieren wir $SUBSET - SUM$ auf dieses Problem.