

# Lösungsstrategien für NP-schwere Probleme

## Blatt 6

Jakob Rieck  
6423721

Konstantin Kobs  
6414943

Thomas Maier  
6319878

Tom Petersen  
6359640

Abgabe zum 23.05.16

### Aufgabe 1

- a) Ein Beispiel, an dem leicht zu sehen ist, dass es sich bei dem beschriebenen Algorithmus um keinen 2-Approximationsalgorithmus handelt, ist das folgende:

Es seien  $A = \{a_1, a_2\}$  mit  $a_1 = 1, a_2 = 3$  und  $B = 3$ . Offensichtlich ist die optimale Lösung  $S = \{a_2\}$  mit der totalen Summe 3. Der Algorithmus in der vorgegebenen Form würde jedoch im ersten Schritt  $a_1$  zu  $S$  hinzufügen und dieses - da  $a_2$  nicht mehr hinzugenommen werden darf - als Lösung zurückliefern.

Für einen 2-Approximationsalgorithmus müsste jedoch  $\frac{L^*}{L} \leq 2$  gelten (da es sich um ein Maximierungsproblem handelt). Hier ergibt sich jedoch  $\frac{L^*}{L} = \frac{3}{1} > 2$ . Damit handelt es sich bei dem Algorithmus um keinen 2-Approximationsalgorithmus.

- b) Der Algorithmus sortiert im ersten Schritt die Menge  $A$  der Größe nach (Laufzeit in der Praxis  $\mathcal{O}(n \log n)$ ). Anschließend wird der Algorithmus aus Teilaufgabe a) auf die sortierte Folge angewendet (Laufzeit  $\mathcal{O}(n)$ ).

Im Folgenden soll nun gezeigt werden, dass es sich bei dem Verfahren um einen 2-Approximationsalgorithmus handelt.

Anfangselemente der sortierten Folge für die  $a_i > B$  gilt, können ver-

nachlässigt werden, da sie in keinem Fall in der gesuchten Menge  $S$  auftreten können.

Betrachtet wird nun das erste zu  $S$  hinzugenommene Element  $a_b$ .

Falls  $a_b \geq \frac{B}{2}$  gilt, so handelt es sich auf jeden Fall um einen 2-Approximationsalgorithmus, da  $\frac{L^*}{L} = \frac{B}{L} \leq \frac{B}{\frac{B}{2}} = 2$ .

Anderenfalls gilt  $a_b < \frac{B}{2}$ . Dann kann in der Folge kein  $a_j$  mit  $\frac{B}{2} < a_j \leq B$  existieren, da es ansonsten bereits vorher in  $S$  aufgenommen worden wäre.

Anschließend können nun weitere Elemente  $a_k$  in  $S$  aufgenommen werden, wegen  $a_k \leq a_b < \frac{B}{2}$ . Wenn  $T$  irgendwann den Wert  $\frac{B}{2}$  überschreitet, so liegt wegen  $\frac{L^*}{L} = \frac{B}{L} \leq \frac{B}{\frac{B}{2}} = 2$  ein 2-Approximationsalgorithmus vor.

Findet dieses überschreiten nicht statt, so können alle Elemente aus  $A$  in  $S$  aufgenommen werden und die Lösung ist sogar optimal.

Insgesamt handelt es sich bei dem Verfahren also um einen 2-Approximationsalgorithmus.

## Aufgabe 2