Lösungsstrategien für NP-schwere Probleme
Blatt 10

Jakob Rieck
6423721

Konstantin Kobs
6414943

Thomas Maier
6319878

Tom Petersen
6359640

Abgabe zum 04.07.16

Aufgabe 1

Bei der Zufallsgröße handelt es sich um zwei voneinander unabhängige Zufallsverteilungen. Zum einen werden in die Zufallsgröße X alle Stimmen der Leute gezählt, die für D stimmen wollten und es auch taten. Dies geschieht mit Wahrscheinlichkeit $\frac{99}{100}$ bei allen 80000 D-Fans. Zum anderen beinhaltet X aber auch die Stimmen der Leute, die R wählen wollten, allerdings aufgrund der schlecht designten Wahlzettel D wählten. Dies geschieht mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{100}$ für die gegebenen 20000 R-Fans.

Beide Wahrscheinlichkeitsverteilungen sind Binomialverteilungen, die zum einen ein $n = 80000$ und zum anderen ein $n = 20000$ sowie die oben genannten Wahrscheinlichkeiten $p = \frac{99}{100}$ sowie $p = \frac{1}{100}$ besitzen. Die Zufallsgröße X wird nun beschrieben als

$$X = Binom(80000, \frac{99}{100}) + Binom(20000, \frac{1}{100})$$

Somit ist der Erwartungswert von X

$$E[X] = E[Binom(80000, \frac{99}{100}) + Binom(20000, \frac{1}{100})]$$

Wegen der Linearität des Erwartungswertes gilt dann

$$E[X] = E[Binom(80000, \frac{99}{100})] + E[Binom(20000, \frac{1}{100})]$$

Für Binomialverteilungen ist der Erwartungswert leicht zu berechnen $(n \cdot p)$, weshalb der Erwartungswert folgendes ist:

$$E[X] = 80000 \cdot \frac{99}{100} + 20000 \cdot \frac{1}{100} = 79400$$

Aufgabe 2

a) Wenn ein Prozess einen Wert von 1 wählt, und gleichzeitig alle verbundenen Prozesse den Wert 0 haben, so kann der Prozess in die Menge S aufgenommen werden. In der Menge S befinden sich am Ende also nur Prozesse, die nicht im Konflikt zu ihren möglichen Konflikt-Partnern stehen, da alle diese nicht in die Menge aufgenommen wurden. $\square$
Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Prozess P den Wert 1 wählt, liegt bei $\frac{1}{2}$. Dieselbe Wahrscheinlichkeit hat auch jeder andere Prozess, der mit P verbunden ist. Die Wahrscheinlichkeit, dass nun P den Wert 1 hat **und** die d mit ihm verbundenen Prozesse den Wert 0 liegt bei $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}^d$, da die beiden Ereignisse unabhängig voneinander und identisch verteilt sind (iid). Da dies nun die Wahrscheinlichkeit für ein Element ist, und es immer nur zwei Zustände gibt (in Set S oder nicht), handelt es sich hier um eine Binomialverteilung, deren Erwartungswert wir dann einfach mit

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}^d \cdot n = \frac{1}{2}^{d+1} \cdot n$$

beschreiben können.

b) Die Wahrscheinlichkeitsberechnung ist hier ähnlich, nur etwas allgemeiner. Die Wahrscheinlichkeit für den Wert 1 ist p und dass die in Konflikt stehenden Prozesse jeweils 0 sind, hat die Wahrscheinlichkeit $1 - p$. Für die Gesamtwahrscheinlichkeit ergibt sich dann $p \cdot (1-p)^d$, sodass sich auch hier eine Binomialverteilung ergibt mit dem Erwartungswert

$$p \cdot (1-p)^d \cdot n$$

Nun ist das p zu finden, welches diesen Erwartungswert maximiert. Dazu suchen wir die Extremstellen bezüglich p und leiten dazu ab und setzen gleich Null. Wir erhalten

$$-n(1-p)^{d-1}(d \cdot p + p - 1) = 0$$

Wir wissen, dass n ungleich Null ist, sodass wir durch $-n$ teilen können:

$$(1-p)^{d-1}(d \cdot p + p - 1) = 0$$

Damit diese Gleichung Null ist, gilt $(1-p)^{d-1} = 0$ oder $d \cdot p + p - 1 = 0 = (d+1) \cdot p - 1$. Für die erste Gleichung erhalten wir $p = 1$ und für die zweite Gleichung erhalten wir $p = \frac{1}{d+1}$. $p = 1$ ist aber ein Minimum, da der Erwartungswert für dieses p Null wäre.
$p = \frac{1}{d+1}$ ist somit das p, welches den Erwartungswert maximiert. Für den Erwartungswert mit diesem p erhalten wir dann

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{d+1} \cdot \left(1 - \frac{1}{d+1}\right)^d \cdot n \\ &= \frac{1}{d+1} \cdot \left(\frac{d}{d+1}\right)^d \cdot n \\ &= \frac{1}{d+1} \cdot \frac{d^d}{(d+1)^d} \cdot n \\ &= \frac{d^d}{(d+1)^{d+1}} \cdot n \end{aligned}$$