Lösungsstrategien für NP-schwere Probleme
Blatt 9

Jakob Rieck
6423721

Konstantin Kobs
6414943

Thomas Maier
6319878

Tom Petersen
6359640

Abgabe zum 27.06.16

Aufgabe 1

a) Im Folgenden werden wir lediglich in Anteilen der Gesamtrechenpower sprechen. So ist beispielsweise $T_1 = \frac{1}{3}$ eine Abkürzung für $T_1 = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{n} t_i$. Die angegebene Bedingung sagt nun aus, dass sich sowohl T_1 als auch T_2 zwischen $\frac{1}{3}$ und $\frac{2}{3}$ aufhalten, denn $T_1 + T_2 = 1$. Zu zeigen ist also, dass wann immer die beiden T außerhalb dieser Schranken sind, eine Möglichkeit besteht, ein t_i aus der stärker belasteten auf die weniger belastete Maschine zu übertragen. Ist dies nicht mehr möglich, so sind beide Maschinen ausgeglichen genug (nach den gewünschten Ungleichungen).
Wir nehmen nun an, dass die erste Maschine eine Auslastung $T_1 \geq \frac{2}{3}$ hat, wodurch die andere Maschine eine Auslastung von $T_2 = 1 - T_1 \leq \frac{1}{3}$ besitzt. Der Beweis für den umgekehrten Fall geht dann analog. Aufgrund der Nicht-Dominanz-Bedingung muss gelten, dass Maschine 1 aus mindestens zwei Prozessen besteht. Ein Umschaufeln der Prozesse kann nur dann ausgeführt werden, wenn $|T_1 - T_2|$ mit diesem Übertragen kleiner wird. Damit dies kleiner wird, kann maximal ein Prozess von Maschine 1 zu Maschine 2 übertragen werden, denn ein umgekehrtes Übertragen würde die absolute Differenz der beiden Maschinen-Auslastungen zunächst steigern, was im gewünschten Ansatz nicht zulässig ist. Damit also eine Übertragung möglich ist, muss mindestens ein Prozess von Maschine 1 kleiner sein als die absolute Differenz der beiden Maschinen, denn nur so kann ein

Sinken der Differenz gewährleistet werden. Wir schauen uns im Folgenden nur den kleinsten Prozess von Maschine an, denn dieser kann im Falle einer möglichen Übertragung auf jeden Fall übertragen werden. Seien nun k Prozesse Maschine zugeordnet. Dann ist der kleinste Prozess dieser Maschine maximal $\frac{1}{k} \cdot T_1$ groß. Der größte kleinste Prozess, der jemals erreicht werden kann, ist wenn $k = 2$ gilt. Der Prozess ist dann maximal $\frac{1}{2} \cdot T_1$ groß, und weil $T_1 \geq \frac{2}{3}$ gilt, muss der kleinste Prozess $t_{1,min}$ zwischen $\frac{1}{6}$ und $\frac{1}{3}$ liegen. Ist k größer als zwei, so hat der kleinste Prozess einen geringeren Minimal-Wert. Wenn wir nun $t_{1,min}$ auf Maschine 2 umschaufeln würden, so hätte nach dem Tauschen Maschine 1 eine Auslastung zwischen $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{2}$. Maschine 2 hat dann eine Auslastung zwischen $\frac{1}{2}$ und $\frac{2}{3}$, da $T_2 = 1 - T_1$ gilt und somit, je größer T_1 ist, T_2 kleiner wird.
Beide Maschinen-Auslastungen erfüllen nun die Ungleichungen, die als Bedingung erfordert waren. Für ein größeres k kann es sein, dass der kleinste Prozess kleiner ist und die Auslastungen noch außerhalb der Grenzen der Ungleichungen. Allerdings gilt dann nach einem Umschaufeln des kleinsten Prozesses weiterhin die Voraussetzung, mit der ein weiteres Umschaufeln ermöglicht wird. Somit landen wir immer in den angestrebten Grenzen. Zu Bemerken ist allerdings noch, dass auch ein Tausch möglich sein kann, selbst wenn beide Maschinen in den Grenzen liegen. Dies ist aber okay, da mit einem Tausch die Grenzen nicht erneut überschritten werden können. $\square$

b) Die absolute Differenz der beiden Auslastungen $|T_1 - T_2|$ wird mit jedem Tausch immer kleiner. Bei der Strategie mit dem größten Prozess, der von der höher ausgelasteten Maschine zur weniger ausgelasteten Maschine übertragen wird, wird immer der Prozess ausgewählt, der so groß wie möglich, aber immer noch kleiner als $|T_1 - T_2|$ ist, da sonst diese Differenz nicht verkleinert werden kann. Wird nun ein Prozess nach der Strategie ausgewählt und übertragen, so wird die absolute Differenz der beiden Auslastungen kleiner als die Größe des übertragenen Prozesses. Da in jedem Schritt die Differenz immer kleiner werden muss, gibt es somit keine Möglichkeit mehr, dass der ausgewählte Prozess erneut ausgewählt wird. $\square$