Geometrie pentru informaticieni

Seminar

Paul A. Blaga

Cuprins

1 Algebră vectorială **7**

2 Produsul scalar al vectorilor **17**

3 Produsul vectorial şi produsul mixt **21**

4 Dreapta în plan **31**

5 Dreapta şi planul în spaţiu **43**

6 Dreapta şi planul în spaţiu (II) **55**

7 Secţiuni conice **67**
7.1 Elipsa 67
7.2 Hiperbola 74
7.3 Parabola 79

8 Cuadrice pe ecuaţia redusă **83**

9 Generarea suprafeţelor **93**

10 Transformări geometrice în plan **107**

11 Transformări geometrice în spaţiu **115**

SEMINARUL 1

Algebră vectorială

Problema 1.1. Se dă un tetraedru $ABCD$. Găsiţi sumele vectorilor (vezi figura 1.1):

1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC}$;

2) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DC}$;

3) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CD}$.

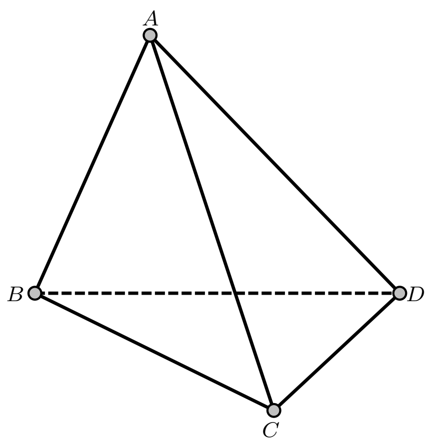

Figura 1.1

Soluţie. 1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC}$;

2) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$;

3) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DA} = 0$.

□

Problema 1.2. Se dă o piramidă cu vârful în S şi baza un paralelogram $ABCD$ ale cărui diagonale se intersectează în punctul O. Să se demonstreze egalitatea vectorială:

$$\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = 4\overrightarrow{SO}.$$

Problema 1.3. Fie $ABCD$ un tetraedru (vezi figura 1.1). Demonstraţi că $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AC}$. Este adevărată această afirmaţie pentru orice patru puncte din spaţiu?

Soluţie. Avem:

$$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC}=\underbrace{\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}}_{=\overrightarrow{AC}}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}.$$

□

Problema 1.4. Punctul O este centrul unui hexagon regulat $ABCDEF$ (vezi figura 1.2). Determinaţi descompunerile vectorilor $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$, în funcţie de vectorii $\mathbf{p}=\overrightarrow{OE}$ şi $\mathbf{q}=\overrightarrow{OF}$.

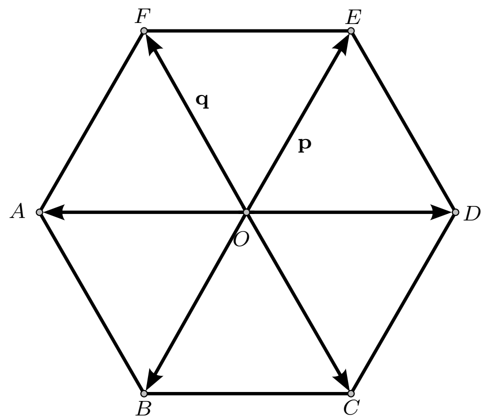

Figura 1.2

Soluţie. Avem, înainte de toate, în mod evident, $\overrightarrow{OB}=-\mathbf{p}$ şi $\overrightarrow{OC}=-\mathbf{q}$. Mai departe, $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{OF}=\mathbf{q}$, iar $\overrightarrow{AF}=\mathbf{p}$, de unde $\overrightarrow{OA}=-\mathbf{p}+\mathbf{q}$. În sfârşit, $\overrightarrow{OD}=-\overrightarrow{OA}=\mathbf{p}-\mathbf{q}$. □

Problema 1.5. Demonstraţi că dacă M, N, P, Q sunt mijloacele laturilor unui patrulater $ABCD$, atunci $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}=0$.

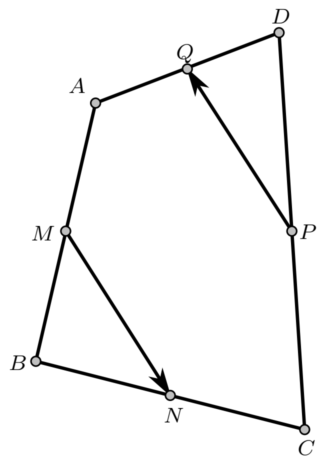

Figura 1.3

Soluţie. Avem:

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$$

Analog,

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{DQ} - \overrightarrow{DP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA},$$

prin urmare,

$$\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} = 0.$$

□

Problema 1.6. Punctele E şi F sunt mijloacele diagonalelor unui patrulater $ABCD$. Demonstraţi că

$$\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}).$$

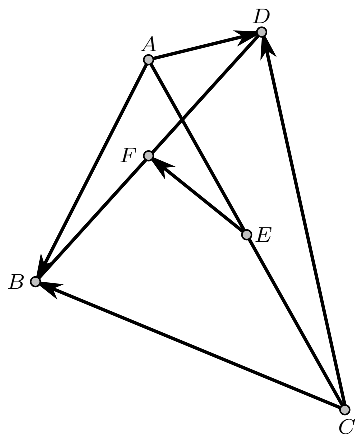

Figura 1.4

Soluţie. Presupunem, pentru fixarea ideilor, că E este mijlocul diagonalei AC, în timp ce F este mijlocul diagonalei BD. Avem, în mod evident, $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AE}$. Mai departe, $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, în timp ce $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$. Avem, aşadar, într-o primă fază, următoarea reprezentare a vectorului $\overrightarrow{EF}$:

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{AC}).$$

Diagonalele admit câte două reprezentări în funcţie de laturi:

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$
$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$$

respectiv

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}$$
$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}.$$

Dacă utilizăm prima reprezentare pentru ambele diagonale, obţinem:

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(-2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}),$$

în timp ce dacă utilizăm cea de-a doua reprezentare, obţinem:

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{DC}) = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}) =$$
$$= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DA}) = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BA}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}).$$

□

Problema 1.7. Fie E şi F mijloacele laturilor AB şi CD ale unui patrulater $ABCD$. Demonstraţi că

$$\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD})$$

şi utilizaţi această proprietate pentru a demonstra teorema liniei mijlocii într-un trapez.

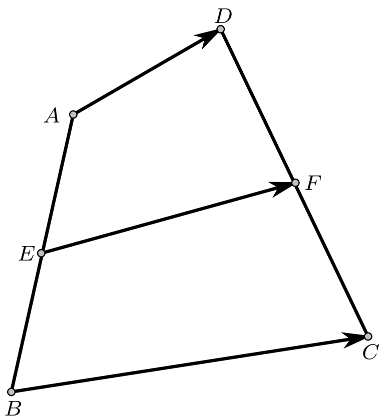

Figura 1.5

Soluţie. Avem:

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{ED} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC}).$$

Pe de altă parte, în mod evident,

$$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} = 0,$$

de unde

$$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AD},$$

expresie care, înlocuită în relaţia găsită mai devreme pentru $\overrightarrow{EF}$, ne dă rezultatul dorit. □

Problema 1.8. Se dă un hexagon regulat $C_1C_2C_3C_4C_5C_6$. Demonstraţi că

$$\overrightarrow{C_1C_2} + \overrightarrow{C_1C_3} + \overrightarrow{C_1C_4} + \overrightarrow{C_1C_5} + \overrightarrow{C_1C_6} = 3\overrightarrow{C_1C_4}.$$

Soluţie. Trebuie să demonstrăm, în fond, că

$$\overrightarrow{C_1C_2} + \overrightarrow{C_1C_3} + \overrightarrow{C_1C_5} + \overrightarrow{C_1C_6} = 2\overrightarrow{C_1C_4}.$$

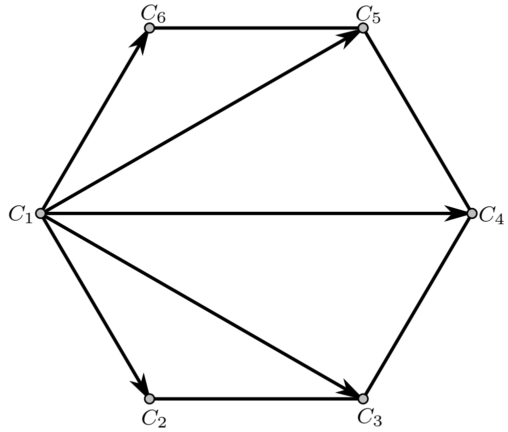

Figura 1.6

Se constată cu uşurinţă că $\overrightarrow{C_1C_2} + \overrightarrow{C_1C_6} = \frac{1}{2}\overrightarrow{C_1C_4}$. Fie acum P mijlocul segmentului C_1C_3 şi Q mijlocul segmentului C_1C_5. Avem, în mod clar:

$$\overrightarrow{C_1P} + \overrightarrow{C_1Q} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{C_1C_3} + \overrightarrow{C_1C_5}\right),$$

dar se vede imediat că

$$\overrightarrow{C_1P} + \overrightarrow{C_1Q} = \frac{3}{4}\overrightarrow{C_1C_4},$$

prin urmare

$$\overrightarrow{C_1C_3} + \overrightarrow{C_1C_5} = \frac{3}{2}\overrightarrow{C_1C_4},$$

de unde

$$\overrightarrow{C_1C_2} + \overrightarrow{C_1C_3} + \overrightarrow{C_1C_5} + \overrightarrow{C_1C_6} = \frac{1}{2}\overrightarrow{C_1C_4} + \frac{3}{2}\overrightarrow{C_1C_4} = 2\overrightarrow{C_1C_4}.$$

□

Problema 1.9. În triunghiul ABC se duce bisectoarea AD a unghiului A. Determinaţi descompunerea vectorului $\overrightarrow{AD}$ în funcţie de vectorii $\mathbf{c} = \overrightarrow{AB}$ şi $\mathbf{b} = \overrightarrow{AC}$.

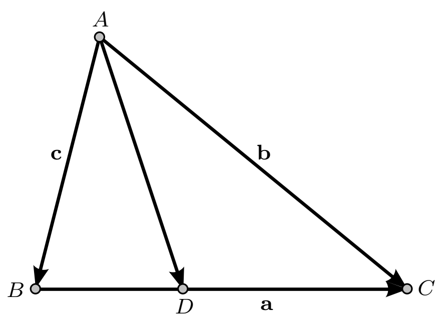

Figura 1.7

Soluţie. Fie $\mathbf{a} = \overrightarrow{BC}$. Vom nota cu a, b, c lungimile celor trei vectori care corespund laturilor triunghiului. Avem, înainte de toate,

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \mathbf{c} + \overrightarrow{BD}.$$

Pentru a determina $\overrightarrow{BD}$, determinăm mai întâi lungimea sa. Din teorema bisectoarei, se obţine imediat că

$$BD = \frac{ac}{b+c},$$

de aceea,

$$\overrightarrow{BD} = \frac{BD}{a}\mathbf{a} = \frac{c}{b+c}\mathbf{a} = \frac{c}{b+c}(\mathbf{b}-\mathbf{c}).$$

Înlocuind în expresia pentru $\overrightarrow{AD}$, se obţine

$$\overrightarrow{AD} = \frac{c}{b+c}\mathbf{b} + \frac{b}{b+c}\mathbf{c}.$$

□

Problema 1.10. Coardele AB şi CD ale unui cerc de centru O se intersectează ortogonal în punctul P. Să se demonstreze relaţia

$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = 2\overrightarrow{PO}.$$

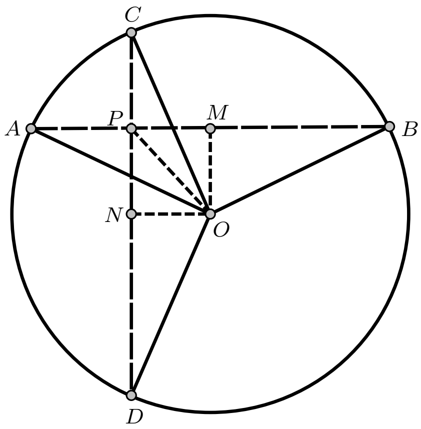

Figura 1.8

Soluţie. Unim punctul O cu punctele A, B, C şi D. În triunghiurile APO, BPO, CPO şi DPO vectorii $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{PC}$ şi $\overrightarrow{PD}$ se pot scrie ca

$$\begin{cases} \overrightarrow{PA} & = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OA}, \\ \overrightarrow{PB} & = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OB}, \\ \overrightarrow{PC} & = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OC}, \\ \overrightarrow{PD} & = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OD} \end{cases}. \tag{1.0.1}$$

Adunând membru cu membru aceste egalităţi vectoriale, obţinem

$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = 4\overrightarrow{PO} + \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right) + \left(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right). \tag{1.0.2}$$

Fie M şi N mijloacele coardelor AB şi CD. În triunghiurile AOB şi COD segmentele OM şi ON sunt mediane, deci vectorii $\overrightarrow{OM}$ şi $\overrightarrow{ON}$ se pot scrie

$$\begin{cases} \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right), \\ \overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right) \end{cases} \iff \begin{cases} 2\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \\ 2\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} \end{cases}. \tag{1.0.3}$$

Înlocuind (1.0.3) în (1.0.2), obţinem

$$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}=4\overrightarrow{PO}+2\left(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}\right). \tag{1.0.4}$$

În dreptunghiul $ONPM$, vectorul $\overrightarrow{OP}$ este egal cu suma vectorilor $\overrightarrow{OM}$ şi $\overrightarrow{ON}$, prin urmare, relaţia (1.0.4) devine

$$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}=4\overrightarrow{PO}+2\overrightarrow{OP}=4\overrightarrow{PO}-2\overrightarrow{PO}=2\overrightarrow{PO}.$$

□

Problema 1.11. Se dă un trapez $ABCD$ în care baza AB este de k ori ($k>1$) mai mare decât baza mică CD. Fie M şi N mijloacele bazelor. Găsiţi descompunerile vectorilor $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{MN}$ şi $\overrightarrow{BC}$ în funcţie de vectorii $\overrightarrow{AB}=\mathbf{a}$ şi $\overrightarrow{AD}=\mathbf{b}$.

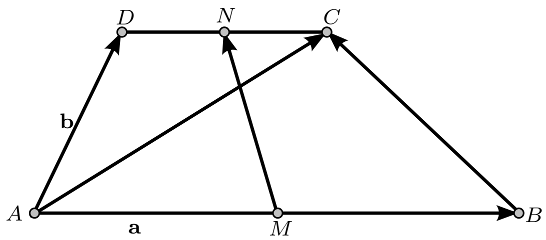

Figura 1.9

Soluţie.

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\mathbf{b}+\frac{1}{k}\mathbf{a},$$

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN}=-\frac{1}{2}\mathbf{a}+\mathbf{b}+\frac{1}{2k}\mathbf{a}=\frac{1-k}{2k}\mathbf{a}+\mathbf{b},$$

$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=-\mathbf{a}+\mathbf{b}+\frac{1}{k}\mathbf{a}=\frac{1-k}{k}\mathbf{a}+\mathbf{b}.$$

□

Problema 1.12. Fie A', B', C' mijloacele laturilor unui triunghi oarecare ABC şi un punct oarecare O în planul triunghiului. Să se demonstreze relaţia

$$\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{OC'}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}.$$

Soluţie. Avem:

$$\overrightarrow{OA'}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right),$$
$$\overrightarrow{OB'}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}\right),$$
$$\overrightarrow{OC'}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right).$$

Însumând relaţiile de mai sus, obţinem formula din enunţ. □

Problema 1.13. În figura 1.11, punctele M, N, P sunt, respectiv, mijloacele laturilor AB, BC, CA ale triunghiului ABC. Să se determine vectorii $\overrightarrow{BP}, \overrightarrow{AN}, \overrightarrow{CM}$ în funcţie de vectorii $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{AC}$.

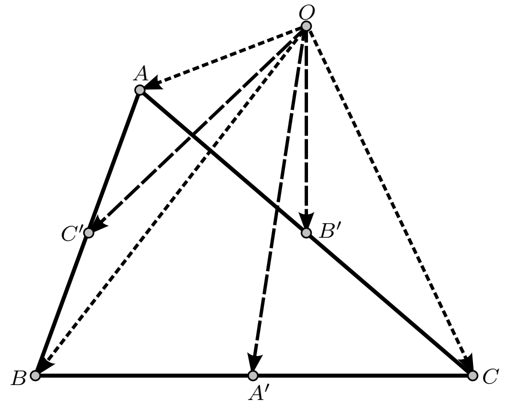

Figura 1.10

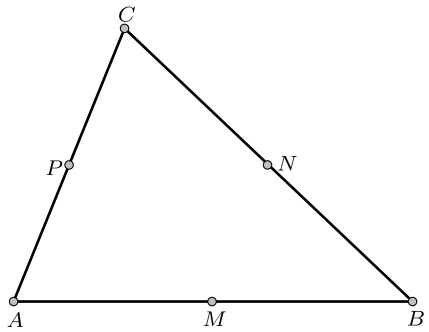

Figura 1.11

Soluţie. Avem

$$\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AP} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$$

Mai departe,

$$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right).$$

În sfârşit,

$$\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}\right) = \frac{1}{2}\left(-\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}.$$

□

Problema 1.14. În figura 1.12 este reprezentat paralelipipedul $ABCDEFGH$. Fie $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{v} = \overrightarrow{AD}$ şi $\mathbf{w} = \overrightarrow{AE}$. Să se exprime vectorii $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{EC}$, $\overrightarrow{HB}$ şi $\overrightarrow{DF}$ în funcţie de vectorii $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ şi $\mathbf{w}$.

Soluţie. Avem

$$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} = \mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}.$$

(Altfel spus, *"diagonala unui paralelogram este egală cu suma laturilor"*).

Mai departe,

$$\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = -\mathbf{w} + \mathbf{u} + \mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v} - \mathbf{w},$$
$$\overrightarrow{HB} = \overrightarrow{HD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} = -\mathbf{w} + \mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} - \mathbf{v} - \mathbf{w},$$
$$\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = -\mathbf{v} + \mathbf{u} + \mathbf{w} = \mathbf{u} - \mathbf{v} + \mathbf{w}.$$

□

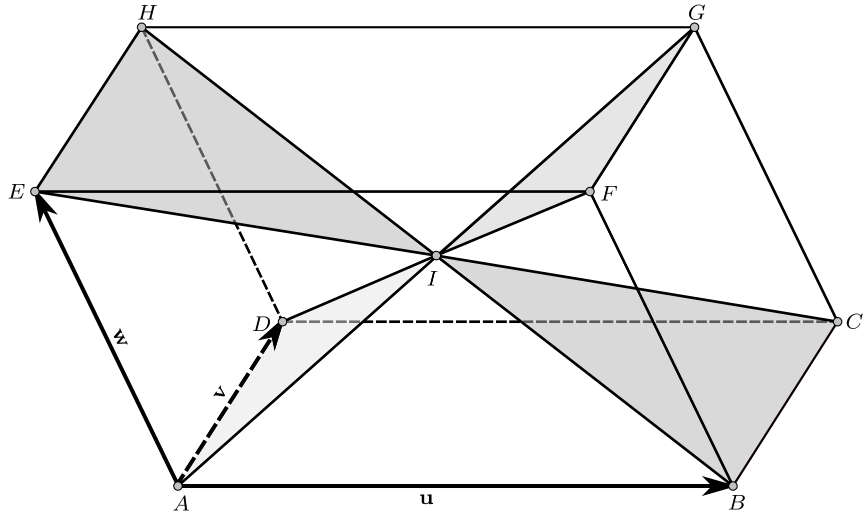

Figura 1.12

Problema 1.15. Să se demonstreze că medianele unui triunghi sunt concurente şi că suma vectorilor care au originile în punctul de intersecţie al medianelor şi extremităţile în vârfurile triunghiului este vectorul nul.

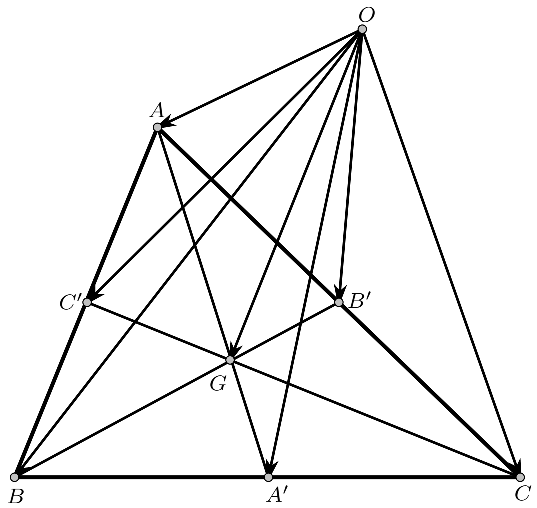

Figura 1.13

Soluţie. Începem prin a demonstra că medianele sunt concurente. Fie ABC triunghiul dat şi A', B', C' mijloacele laturilor BC, CA, respectiv AB. Vom nota cu G punctul de intersecţie a dreptelor AA' şi BB' şi fie O un punct arbitrar din plan, pe care îl alegem ca origine (Vezi figura 1.13). Atunci avem

$$\overrightarrow{OA'} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right),\ \overrightarrow{OB'} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}\right). \tag{1.0.5}$$

Pe de altă parte, punctele A, G, A', respectiv B, G, B' sunt coliniare, deci avem

$$\begin{cases}\overrightarrow{OG} = m\overrightarrow{OA} + (1-m)\overrightarrow{OA'},\\ \overrightarrow{OG} = n\overrightarrow{OB} + (1-n)\overrightarrow{OB'},\end{cases} \tag{1.0.6}$$

unde m şi n sunt două numere reale ce urmează a fi determinate.

Dacă înlocuim valorile vectorilor $\overrightarrow{OA'}$ şi $\overrightarrow{OB'}$ din (1.0.5) în (1.0.6), obţinem

$$\begin{cases} \overrightarrow{OG} = m\overrightarrow{OA} + \dfrac{1-m}{2}\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right), \\ \overrightarrow{OG} = n\overrightarrow{OB} + \dfrac{1-n}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}\right). \end{cases} \tag{1.0.7}$$

Din aceste două egalităţi, obţinem

$$m\overrightarrow{OA} + \frac{1-m}{2}\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right) = n\overrightarrow{OB} + \frac{1-n}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}\right)$$

sau

$$\left(m + \frac{n}{2} - \frac{1}{2}\right)\overrightarrow{OA} + \left(-\frac{m}{2} + n + \frac{1}{2}\right)\overrightarrow{OB} + \left(-\frac{m}{2} + \frac{n}{2}\right)\overrightarrow{OC} = 0. \tag{1.0.8}$$

Cum vectorii $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ şi $\overrightarrow{OC}$ sunt liniar dependenţi, din ecuaţia de mai sus rezultă că

$$m = n = \frac{1}{3}. \tag{1.0.9}$$

Înlocuind valorile lui m şi n din ecuaţia (1.0.9) în ecuaţia (1.0.6), obţinem

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3}. \tag{1.0.10}$$

Expresia vectorului de poziţie $\overrightarrow{OG}$ este independentă de ordinea în care se consideră operaţiile cu vectorii de poziţie ai punctelor A, B, C, prin urmare, cele trei mediane sunt concurente.

Pentru a rezolva cea de-a doua parte a problemei, deducem, mai întâi, din (1.0.10):

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - 3\overrightarrow{OG} = \vec{0} \iff (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OG}) + (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OG}) + (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OG}) = \vec{0}. \tag{1.0.11}$$

În triunghiurile OAG, OBG şi OCG, vectorii $\overrightarrow{GA}$, $\overrightarrow{GB}$, respectiv $\overrightarrow{GC}$ se exprimă prin relaţiile:

$$\overrightarrow{GA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OG},\ \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OG},\ \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OG}. \tag{1.0.12}$$

Dacă înlocuim aceste expresii în relaţia (1.0.11), obţinem

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 0. \tag{1.0.13}$$

Reamintim că relaţia de mai sus înseamnă că cu segmentele (neorientate) GA, GB, GC se poate forma un triunghi. □

SEMINARUL 2

Produsul scalar al vectorilor

Problema 2.1. Determinaţi lungimile diagonalelor unui paralelogram construit pe vectorii $\mathbf{a} = 2\mathbf{m} + \mathbf{n}$ şi $\mathbf{b} = \mathbf{m} - 2\mathbf{n}$, unde $\mathbf{m}$ şi $\mathbf{n}$ sunt vectori de lungime 1 iar $\angle(\mathbf{m}, \mathbf{n}) = 60^\circ$.

Soluţie. Cele două diagonale corespund, de fapt, vectorilor $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ şi $\mathbf{a} - \mathbf{b}$, deci trebuie să determinăm lungimile acestor doi vectori. Avem

$$\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 = (\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 = (3\mathbf{m} - \mathbf{n})^2 = 9\mathbf{m}^2 - 6\mathbf{m} \cdot \mathbf{n} + \mathbf{n}^2.$$

Cum $\mathbf{m}^2 = \mathbf{n}^2 = 1$, în timp ce

$$\mathbf{m} \cdot \mathbf{n} = \|\mathbf{m}\| \cdot \|\mathbf{n}\| \cos \angle(\mathbf{m}, \mathbf{n}) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2},$$

avem $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 = 7$, deci $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\| = \sqrt{7}$. Pe de altă parte,

$$\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|^2 = (\mathbf{a} - \mathbf{b})^2 = (\mathbf{m} + 3\mathbf{n})^2 = \mathbf{m}^2 + 6\mathbf{m} \cdot \mathbf{n} + 9\mathbf{n}^2 = 13,$$

deci $\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| = \sqrt{13}$. □

Problema 2.2. Să se găsească unghiul dintre vectorii $\mathbf{a} = 2\mathbf{m} + 4\mathbf{n}$ şi $\mathbf{b} = \mathbf{m} - \mathbf{n}$, unde $\mathbf{m}$ şi $\mathbf{n}$ sunt vectori unitari, iar $\angle(\mathbf{m}, \mathbf{n}) = 120^\circ$.

Soluţie. Dacă α este unghiul dintre cei doi vectori, atunci

$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\|}.$$

Avem, mai întâi:

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= (2\mathbf{m} + 4\mathbf{n}) \cdot (\mathbf{m} - \mathbf{n}) = 2\mathbf{m}^2 - 2\mathbf{m} \cdot \mathbf{n} + 4\mathbf{m} \cdot \mathbf{n} - 4\mathbf{n}^2 = 2\mathbf{m}^2 + 2\mathbf{m} \cdot \mathbf{n} - 4\mathbf{n}^2 = \\ &= 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos 120^\circ - 4 \cdot 1 = -2 + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -3.\end{aligned}$$

Pe de altă parte,

$$\|\mathbf{a}\|^2 = (2\mathbf{m} + 4\mathbf{n})^2 = 4\mathbf{m}^2 + 16\mathbf{n}^2 + 16\mathbf{m} \cdot \mathbf{n} = 12,$$

deci $\|\mathbf{a}\| = 2\sqrt{3}$, în timp ce

$$\|\mathbf{b}\|^2 = (\mathbf{m} - \mathbf{n})^2 = \mathbf{m}^2 + \mathbf{n}^2 - 2\mathbf{m} \cdot \mathbf{n} = 1,$$

adică $\|\mathbf{b}\| = 1$. Aşadar,

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\|\cdot\|\mathbf{b}\|} = \frac{-3}{2\sqrt{3}\cdot 1} = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

deci unghiul dintre cei doi vectori este de $150°$. □

Problema 2.3. Lungimea ipotenuzei AB a unui triunghi dreptunghic ABC este egală cu c. Calculaţi suma

$$S = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}.$$

Soluţie. Fie $a = BC$ şi $b = AC$. Atunci, din definiţia produsului scalar, avem

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} &= c\cdot b\cdot\cos A,\\ \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} &= c\cdot a\cdot\cos B,\\ \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} &= b\cdot b\cdot\cos C = 0. \end{aligned}$$

Dar $\cos A = b/c$, deci

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = c\cdot b\cdot\cos A = c\cdot b\cdot\frac{b}{c} = b^2,$$

iar $\cos B = a/c$, deci

$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = c\cdot a\cdot\cos B = c\cdot b\cdot\frac{a}{c} = a^2,$$

prin urmare

$$S = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} = b^2 + a^2 = c^2.$$

□

Problema 2.4. Determinaţi unghiul format de diagonalele paralelogramului construit pe vectorii $\mathbf{a}(2,1,0)$ şi $\mathbf{b}(0,-2,1)$.

Soluţie. Diagonalele paralelogramului sunt reprezentate de vectorii $\mathbf{v}_1 = \mathbf{a}+\mathbf{b}$ şi $\mathbf{v}_2 = \mathbf{a}-\mathbf{b}$. Se constată imediat că $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1(2,-1,1)$ şi $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2(2,3,-1)$. De aceea,

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_1\|\cdot\|\mathbf{v}_2\|} = \frac{4-3-1}{\sqrt{4+1+1}\cdot\sqrt{4+9+1}} = 0,$$

prin urmare cele două diagonale sunt perpendiculare (deci paralelogramul este un romb). □

Problema 2.5. Determinaţi numărul real λ astfel încât cosinusul unghiului format de vectorii

$$\mathbf{p} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \lambda\mathbf{k}$$

şi

$$\mathbf{q} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j}$$

să fie egal cu $\frac{5}{12}$.

Soluţie. Fie α unghiul dintre cei doi vectori. Atunci

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{q}}{\|\mathbf{p}\|\cdot\|\mathbf{q}\|} = \frac{5}{\sqrt{5+\lambda^2}\cdot\sqrt{10}} = \frac{5}{12},$$

de unde

$$10(5+\lambda^2) = 144,$$

adică $\lambda^2 = \frac{47}{5}$ sau $\lambda = \pm\sqrt{\frac{47}{5}}$. □

Problema 2.6. Un vector $\mathbf{p}$ este perpendicular pe vectorii $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ şi $\mathbf{b} = 18\mathbf{i} - 22\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$ şi face un unghi obtuz cu axa Oy. Determinaţi componentele lui $\mathbf{p}$, ştiind că $\|\mathbf{p}\| = 14$.

Soluţie. Fie $\mathbf{p} = p_1\mathbf{i} + p_2\mathbf{j} + p_3\mathbf{k}$. Din datele problemei obţinem că

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}\cdot\mathbf{a} &\equiv 3p_1 + 2p_2 + 2p_3 = 0,\\
\mathbf{p}\cdot\mathbf{b} &\equiv 18p_1 - 22p_2 - 5p_3 = 0,\\
\|\mathbf{p}\|^2 &\equiv p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 196,\\
\mathbf{p}\cdot\mathbf{j} &\equiv p_2 < 0.
\end{aligned}$$

Din primele două ecuaţii obţinem imediat că $p_1 = \frac{2}{3}p_2$ şi $p_3 = -2p_2$, de unde, înlocuind în cea de-a treia ecuaţie, obţinem

$$p_2 = \pm\frac{3}{2}.$$

Ultima condiţie impune, acum, ca semnul să fie minus, deci $p_2 = -\frac{3}{2}$, aşadar, în final,

$$\mathbf{p} = -\mathbf{i} - \frac{3}{2}\mathbf{j} + 3\mathbf{j}.$$

□

Problema 2.7. Un vector $\mathbf{p}$ este perpendicular pe vectorii $\mathbf{a}(4,-2,-3)$ şi $\mathbf{b}(0,1,3)$ şi face un unghi ascuţit cu axa Ox. Determinaţi componentele lui $\mathbf{p}$ dacă $\|\mathbf{p}\| = 26$.

Soluţie. Fie $\mathbf{p} = p_1\mathbf{i} + p_2\mathbf{j} + p_3\mathbf{k}$. Din datele problemei obţinem că

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}\cdot\mathbf{a} &\equiv 4p_1 - 2p_2 - 3p_3 = 0,\\
\mathbf{p}\cdot\mathbf{b} &= p_2 + 3p_3 = 0,\\
\|\mathbf{p}\|^2 &\equiv p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 676,\\
\mathbf{p}\cdot\mathbf{j} &\equiv p_1 > 0.
\end{aligned}$$

Sistemul format din primele trei ecuaţii are soluţiile:

$$p_1 = \pm 6,\ p_2 = \pm 24,\ p_3 = \mp 8.$$

Cum, conform cerinţelor problemei, trebuie să avem $p_1 > 0$, trebuie să alegem semnul superior, deci

$$\mathbf{p} = (6, 24, -8).$$

□

SEMINARUL 3

Produsul vectorial şi produsul mixt

Probleme rezolvate

Problema 3.1. Determinaţi $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ dacă $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ şi $\mathbf{b} = 7\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$.

Soluţie. Avem

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & -2 \\ 7 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 22\mathbf{i} - 20\mathbf{j} - 9\mathbf{k}.$$

□

Problema 3.2. Se dau vectorii $\mathbf{a}(3, -1, -2)$ şi $\mathbf{b}(1, 2, -1)$. Să se calculeze:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b},\ (2\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{b},\ (2\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (2\mathbf{a} - \mathbf{b}).$$

Soluţie. Avem

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 5\mathbf{i} + \mathbf{j} + 7\mathbf{k}.$$

Pe de altă parte,

$$(2\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{b} = 2\,(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + \underbrace{\mathbf{b} \times \mathbf{b}}_{=0} = 2\,(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 10\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 14\mathbf{k}.$$

În sfârşit,

$$(2\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (2\mathbf{a} - \mathbf{b}) = 4\underbrace{(\mathbf{a} \times \mathbf{a})}_{=0} - 2(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + 2(\mathbf{b} \times \mathbf{a}) - \underbrace{\mathbf{b} \times \mathbf{b}}_{=0} = -4(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = -20\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 28\mathbf{k}.$$

□

Problema 3.3. Determinaţi distanţele dintre laturile paralele ale paralelogramului construit pe vectorii $\overrightarrow{AB}(6, 0, 2)$ şi $\overrightarrow{AC}(1.5, 2, 1)$.

Soluţie. Fie $ABDC$ paralelogramul, h distanţa dintre laturile AB şi CD şi g distanţa dintre laturile AC şi BD. Atunci

$$h = \frac{\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|}, \quad g = \frac{\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|}{\|\overrightarrow{AC}\|}.$$

Mai departe,

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 6 & 0 & 2 \\ \frac{3}{2} & 2 & 1 \end{vmatrix} = -4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 12\mathbf{k},$$

$$\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\| = \| - 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 12\mathbf{k}\| = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13,$$

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \|6\mathbf{i} + 2\mathbf{k}\| = \sqrt{6^2 + 2^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10},$$

$$\|\overrightarrow{AC}\| = \left\|\frac{3}{2}\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}\right\| = \sqrt{\frac{9}{4} + 4 + 1} = \sqrt{\frac{29}{4}} = \frac{\sqrt{29}}{2}.$$

Prin urmare,

$$h = \frac{\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|} = \frac{13}{2\sqrt{10}} = \frac{13\sqrt{10}}{20},$$

$$g = \frac{\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|}{\|\overrightarrow{AC}\|} = \frac{13}{\frac{\sqrt{29}}{2}} = \frac{26\sqrt{29}}{29}.$$

□

Problema 3.4. Determinaţi vectorul $\mathbf{p}$, ştiind că el este perpendicular pe vectorii $\mathbf{a}(2, 3, -1)$ şi $\mathbf{b}(1, -1, 3)$ şi verifică ecuaţia

$$\mathbf{p} \cdot (2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}) = 51.$$

Soluţie. Vectorul $\mathbf{p}$ îndeplineşte condiţiile:

$$\begin{cases} \mathbf{p} \cdot (2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}) = 0, \\ \mathbf{p} \cdot (\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}) = 0, \\ \mathbf{p} \cdot (2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}) = 51. \end{cases}$$

Dacă $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$, atunci sistemul de mai sus devine

$$\begin{cases} 2p_1 + 3p_2 - p_3 = 0, \\ p_1 - p_2 + 3p_3 = 0, \\ 2p_1 - 3p_2 + 4p_3 = 51. \end{cases}$$

Se obţine atunci că

$$\mathbf{p} = (24, -21, -15).$$

□

Altă soluţie. Faptul că vectorul $\mathbf{p}$ este perpendicular pe vectorii $\mathbf{a}$ şi $\mathbf{b}$ care, după cm se poate observa cu uşurinţă, nu sunt coliniari, înseamnă, de fapt, că vectorul este coliniar cu produsul vectorial al acestor vectori, cu alte cuvinte trebuie să avem

$$\mathbf{p} = \lambda \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}),$$

prin urmare trebuie doar să determinăm scalarul λ. Începem prin a calcula produsul vectorial. Avem:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 8\mathbf{i} - 7\mathbf{j} - 5\mathbf{k}.$$

Aşadar, $\mathbf{p} = \lambda \cdot (8, -7, -5)$. λ se determină acum din ecuaţia

$$\mathbf{p} = \cdot(2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}) \equiv 17\lambda = 51,$$

de unde $\lambda = 3$, deci, aşa cum am obţinut şi mai sus

$$\mathbf{p} = (24, -21, -15).$$

□

Problema 3.5. Se dau punctele $A(1, 2, 0), B(3, 0, -3)$ şi $C(5, 2, 6)$. Să se calculeze aria triunghiului ABC.

Soluţie. Fie $\mathcal{A}$ aria triunghiului ABC. Atunci

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \left\| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right\|.$$

Dar,

$$\overrightarrow{AB} = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}, \quad \overrightarrow{AC} = 4\mathbf{i} + 6\mathbf{k},$$

deci

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -12\mathbf{i} - 24\mathbf{j} + 8\mathbf{k},$$

prin urmare

$$\left\| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right\| = \sqrt{(-12)^2 + (-24)^2 + 8^2} = \sqrt{784} = 28.$$

Aşadar,

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \left\| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right\| = \frac{1}{2} \cdot 28 = 14.$$

□

Problema 3.6. Se dau punctele $A(1, -1, 2), B(5, -6, 2)$ şi $C(1, 3, -1)$. Determinaţi lungimea înălţimii triunghiului ABC, coborâte din vârful B pe latura AC a triunghiului.

Soluţie. Fie $\mathcal{A}$ aria triunghiului ABC. Atunci

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \left\| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right\|.$$

Pe de altă parte, dacă notăm cu h_B înălţimea corespunzătoare vârfului B, avem

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \left\| \overrightarrow{AC} \right\| \cdot h_B,$$

prin urmare,

$$h_B = \frac{\left\| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right\|}{\left\| \overrightarrow{AC} \right\|}.$$

Avem

$$\overrightarrow{AB} = 4\mathbf{i} - 5\mathbf{j}, \quad \overrightarrow{AC} = 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k},$$

deci

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & -5 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 15\mathbf{i} + 12\mathbf{j} + 16\mathbf{k},$$

aşadar

$$\left\| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right\| = \sqrt{15^2 + 12^2 + 16^2} = \sqrt{625} = 25$$

şi

$$\left\| \overrightarrow{AC} \right\| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5.$$

În final, obţinem

$$h_B = \frac{\left\| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right\|}{\left\| \overrightarrow{AC} \right\|} = \frac{25}{5} = 5.$$

□

Problema 3.7. Se dau vectorii $\mathbf{a}(2, -3, 1)$, $\mathbf{b}(-3, 1, 2)$ şi $\mathbf{c}(1, 2, 3)$. Să se calculeze $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$ şi $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$.

Soluţie. Avem

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -7\mathbf{i} - 7\mathbf{j} - 7\mathbf{k},$$

deci

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -7 & -7 & -7 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -7\mathbf{i} + 14\mathbf{j} - 7\mathbf{k}.$$

Pe de altă parte,

$$\mathbf{b} \times \mathbf{c} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -\mathbf{i} + 11\mathbf{j} - 7\mathbf{k},$$

deci

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & 11 & -7 \end{vmatrix} = 10\mathbf{i} + 13\mathbf{j} + 19\mathbf{k}.$$

Se observă imediat că

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} \neq \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}),$$

adică, aşa cum ştiam, *produsul vectorial* nu *este asociativ*. □

Problema 3.8. Fie $ABCD$ un patrulater convex. Demonstraţi că dacă diagonala AC înjumătăţeşte diagonala BD, atunci triunghiurile ACB şi ACD au arii egale.

Soluţie. Facem, mai întâi, următoarele notaţii:

$$\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}, \ \overrightarrow{AC} = \mathbf{b}, \ \overrightarrow{AD} = \mathbf{c}.$$

Conform ipotezei, mijlocul O al diagonalei BD se află pe diagonala AC, adică este chiar punctul de intersecţie al diagonalei. Aceasta înseamnă că $\overrightarrow{AO} \equiv \dfrac{\mathbf{a}+\mathbf{c}}{2}$ este coliniar cu $\mathbf{b}$. Aceasta înseamnă, la rândul său, că există un număr real α astfel încât să avem

$$\frac{\mathbf{a}+\mathbf{c}}{2} = \alpha\mathbf{b}$$

sau

$$\mathbf{a}+\mathbf{c} = 2\alpha\mathbf{b}.$$

Dacă înmulţim vectorial ambii membri ai ecuaţiei de mai sus cu $\mathbf{b}$, obţinem

$$(\mathbf{a}+\mathbf{c})\times\mathbf{b} = 2\alpha\,(\mathbf{b}\times\mathbf{b}) = 0,$$

de unde

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \mathbf{b}\times\mathbf{c}$$

sau

$$\frac{1}{2}\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \frac{1}{2}\mathbf{b}\times\mathbf{c}.$$

Dacă trecem la norme, ecuaţia de mai sus ne conduce la

$$\frac{1}{2}\|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\| = \frac{1}{2}\|\mathbf{b}\times\mathbf{c}\|$$

sau

$$\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right\| = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}\right\|,$$

adică

$$\text{aria}\,ACB = \text{aria}\,ACD.$$

□

Problema 3.9. Fie P şi Q mijloacele laturilor neparalele BC şi AD ale unui trapez $ABCD$. Demonstraţi că triunghiurile APD şi CQB au aceeaşi arie.

Soluţie. Fie $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b}$ şi $\overrightarrow{AD} = \mathbf{d}$. Cum dreapta DC este paralelă cu dreapta AB, rezultă că există un scalar (pozitiv) astfel încât să avem $\overrightarrow{DC} = t\overrightarrow{AB} = t\mathbf{b}$. Prin urmare,

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD} = \mathbf{d} + t\mathbf{b}.$$

Pentru a calcula aria triunghiului APD, trebuie să calculăm şi vectorul $\overrightarrow{AP}$. Se observă imediat că

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{2}\left((1+t)\mathbf{b} + \mathbf{d}\right).$$

Atunci,

$$\overrightarrow{AP}\times\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\left((1+t)\mathbf{b}+\mathbf{d}\right)\times\mathbf{d} = \frac{1}{2}(1+t)(\mathbf{b}\times\mathbf{d}).$$

Prin urmare,

$$\text{Aria}\,\Delta APD = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AP}\times\overrightarrow{AD}\right\| = \frac{1}{4}(1+t)\|\mathbf{b}\times\mathbf{d}\|.$$

Trecem acum la calculul ariei triunghiului CQB. Observăm imediat că

$$\overrightarrow{CQ} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DQ} = -t\mathbf{b} - \frac{1}{2}\mathbf{d},$$

în timp ce
$$\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} = -\mathbf{d} - t\mathbf{b} + \mathbf{b} = (1-t)\mathbf{b} - \mathbf{d}.$$

Prin urmare,
$$\overrightarrow{CQ} \times \overrightarrow{CB} = \left(-t\mathbf{b} - \frac{1}{2}\mathbf{d}\right) \times ((1-t)\mathbf{b} - \mathbf{d}) = t\,(\mathbf{b} \times \mathbf{d}) - \frac{1}{2}(1-t)\,(\mathbf{d} \times \mathbf{b}) = \frac{1}{2}(1+t)(\mathbf{b} \times \mathbf{d}).$$

Aşadar,
$$\text{Aria}\,\Delta CQB = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{CQ} \times \overrightarrow{CB}\right\| = \frac{1}{4}(1+t)\|\mathbf{b} \times \mathbf{d}\| = \text{Aria}\,\Delta APD.$$

□

Problema 3.10. Vectorii $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ şi $\mathbf{c}$ sunt vectorii de poziţie ai vârfurilor unui triunghi ABC relativ la un punct O. Determinaţi aria triunghiului ABC în funcţie de aceşti vectori.

Soluţie. Aria triunghiului ABC este
$$\text{Aria}\,\Delta ABC = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right\|.$$

Dar $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$, iar $\overrightarrow{AC} = \mathbf{c} - \mathbf{a}$, prin urmare
$$\text{Aria}\,\Delta ABC = \frac{1}{2}\|(\mathbf{b}-\mathbf{a}) \times (\mathbf{c}-\mathbf{a})\| = \frac{1}{2}\|\mathbf{b} \times \mathbf{c} - \mathbf{b} \times \mathbf{a} - \mathbf{a} \times \mathbf{c}\| = \frac{1}{2}\|\mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \mathbf{c} + \mathbf{c} \times \mathbf{a}\|.$$

□

Problema 3.11. Stabiliţi dacă tripletul de vectori $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ este drept sau stâng, dacă
$$\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j},\ \mathbf{b} = \mathbf{i} - \mathbf{j},\ \mathbf{c} = \mathbf{k}.$$

Soluţie. Tot ce avem de făcut este să stabilim semnul produsului mixt al celor trei vectori. Avem:
$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2.$$

Cum $-2 < 0$, tripletul este stâng. □

Problema 3.12. Demonstraţi că punctele $A(1,2,-1), B(0,1,5), C(-1,2,1)$ şi $D(2,1,3)$ sunt situate într-un acelaşi plan.

Soluţie. Afirmaţia este echivalentă cu afirmaţia că vectorii $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ şi $\overrightarrow{AD}$ sunt coplanari (adică *liniar dependenţi*) cu condiţia ca produl mixt al acestor trei vectori să fie egal cu zero.

Dar
$$\overrightarrow{AB} = (-1,-1,6),\ \overrightarrow{AC} = (-2,0,2),\ \overrightarrow{AD} = (1,-1,4),$$

deci
$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right) = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

ceea ce înseamnă că cele patru puncte sunt coplanare. □

Problema 3.13. Determinaţi volumul tetraedrului care are vârfurile în punctele $A(2,-1,1), B(5,5,4)$, $C(3,2,-1)$ şi $D(4,1,3)$.

Soluţie. Fie $\mathcal{V}$ volumul tetraedrului. Atunci

$$\mathcal{V} = \pm\frac{1}{6}\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right),$$

unde semnul se alege astfel încât volumul să fie un număr pozitiv. Dar

$$\overrightarrow{AB} = (3,6,3),\ \overrightarrow{AC} = (1,3,-2),\ \overrightarrow{AD} = (2,2,2),$$

deci

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right) = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -18.$$

Aşadar

$$\mathcal{V} = \pm\frac{1}{6}\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right) = \frac{1}{6}\cdot 18 = 3.$$

$\square$

Problema 3.14. Un tetraedru de volum 5 are ca trei dintre vârfuri punctele $A(2,1,-1)$, $B(3,0,1)$ şi $C(2,-1,3)$. Al patrulea vârf, D, este situat pe axa Oy. Determinaţi coordonatele punctului D.

Soluţie. Vârful D va avea coordonatele $(0,a,0)$, unde a este un parametru care urmează a fi determinat. Volumul tetraedrului este

$$\mathcal{V} = \frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)\right|.$$

Avem

$$\overrightarrow{AB} = (1,-1,2),\ \overrightarrow{AC} = (0,-2,4),\ \overrightarrow{AD} = (-2,a-1,1),$$

prin urmare

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \\ -2 & a-1 & 1 \end{vmatrix} = -4a+2.$$

Aşadar,

$$\mathcal{V} = \frac{1}{6}\cdot|4a-2| = \frac{1}{3}\cdot|2a-1|.$$

Cum volumul tetraedrului este 5, pentru a determina parametrul a trebuie să rezolvăm ecuaţia

$$\frac{1}{3}\cdot|2a-1| = 5$$

sau

$$|2a-1| = 15.$$

Dacă modulul este pozitiv, suntem conduşi la ecuaţia

$$2a-1 = 15,$$

de unde obţinem prima soluţie, $a_1 = 8$. Dacă modulul este negativ, găsim ecuaţia

$$2a-1 = -15,$$

care ne conduce la cea de-a doua soluţie, $a_2 = -7$. $\square$

Problema 3.15. Se dau trei vectori $\mathbf{a}(8,4,1)$, $\mathbf{b}(2,2,1)$ şi $\mathbf{c}(1,1,1)$. Să se determine vectorul $\mathbf{d}$, de lungime 1, care formează cu vectorii $\mathbf{a}$ şi $\mathbf{b}$ unghiuri egale, este perpendicular pe vectorul $\mathbf{c}$ şi este orientat în aşa fel încât tripletele de vectori $\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\}$ şi $\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{d}\}$ au aceeaşi orientare (sunt ambele drepte sau ambele stângi).

Soluţie. Presupunem că vectorul $\mathbf{d}$ are componentele (d_1,d_2,d_3). Pentru a determina vectorul $\mathbf{d}$ (prin componentele sale), inventariem, mai întâi, condiţiile pe care trebuie să le verifice aceste componente. Mai întâi, faptul că vectorul $\mathbf{d}$ este unitar înseamnă că

$$d_1^2+d_2^2+d_3^2=1.$$

Mai departe, condiţia ca acest vector să formeze unghiuri egale cu vectorii $\mathbf{a}$ şi $\mathbf{b}$ este (ţinând cont şi de condiţia precedentă):

$$\frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|}\cdot\mathbf{d}=\frac{\mathbf{b}}{\|\mathbf{b}\|}\cdot\mathbf{d}.$$

Dar $\|\mathbf{a}\|=9$, iar $\|\mathbf{b}\|=3$, deci relaţia precedentă ne conduce la

$$\frac{1}{9}\cdot(8d_1+4d_2+d_3)=\frac{1}{3}\cdot(2d_1+2d_2+d_3)$$

sau

$$8d_1+4d_2+d_3=6d_1+6d_2+3d_3$$

sau, în fine,

$$d_1-d_2-d_3=0.$$

În sfârşit, condiţia ca vectorii $\mathbf{c}$ şi $\mathbf{d}$ să fie perpendiculari se traduce prin ecuaţia

$$d_1+d_2+d_3=0.$$

Aşadar, componentele vectorului $\mathbf{d}$ trebuie să verifice sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} d_1^2+d_2^2+d_3^2=1,\\ d_1-d_2-d_3=0,\\ d_1+d_2+d_3=0.\end{cases}$$

Se obţin imediat soluţiile

$$\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\ \left(0,-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Doar una dintre aceste două condiţii este acceptabilă. Pentru a stabili care, trebuie să stabilim, mai întâi cum este orientat tripletul $\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\}$. Avem

$$(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})=\begin{vmatrix}8&4&1\\2&2&1\\1&1&1\end{vmatrix}=4>0,$$

deci reperul este direct şi la fel trebuie să fie şi reperul $\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{d}\}$. Avem

$$(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{d}_1)=\begin{vmatrix}8&4&1\\2&2&1\\0&\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{vmatrix}=-7\sqrt{2},$$

care este negativă, deci nu convine. Pe de altă parte, în mod evident,

$$(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{d}_2)=7\sqrt{2}>0,$$

aşadar vectorul $\mathbf{d}$ pe care îl căutăm este

$$\mathbf{d} = \left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

□

Problema 3.16. Se dau doi vectori $\mathbf{a}(11, 10, 2)$ şi $\mathbf{b}(4, 0, 3)$. Să se găsească un vector unitar $\mathbf{c}$, ortogonal la vectorii $\mathbf{a}$ şi $\mathbf{b}$, astfel încât tripletul de vectori $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ să fie drept.

Soluţie. În mod evident, există doar doi candidaţi, anume

$$\mathbf{c}_1 = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|}$$

şi

$$\mathbf{c}_2 = -\frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|}$$

şi numai unul dintre aceşti doi vectori este soluţia problemei. Avem

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 11 & 20 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 60\mathbf{i} - 25\mathbf{j} - 80\mathbf{k},$$

prin urmare

$$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = 25\sqrt{17}.$$

Aşadar,

$$\mathbf{c}_1 = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|} = \frac{12\sqrt{17}}{65}\mathbf{i} - \frac{\sqrt{17}}{17}\mathbf{j} - \frac{16\sqrt{17}}{65}\mathbf{k}.$$

De aici rezultă că

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}_1) = \begin{vmatrix} 11 & 20 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \\ \frac{12\sqrt{17}}{65} & -\frac{\sqrt{17}}{17} & -\frac{16\sqrt{17}}{65} \end{vmatrix} = \frac{7125\sqrt{17}}{221} > 0,$$

deci vectorul căutat este $\mathbf{c} = \mathbf{c_1}$. □

Probleme propuse

Problema 3.17. Fie ABC un triunghi şi fie E şi F mijloacele laturilor AB, respectiv AC. Prin C se duce o paralelă la AB care întâlneşte BE în P. Demonstraţi că

$$\text{Aria}\,\triangle FEP = \text{Aria}\,\triangle FCE = \frac{1}{2}\triangle ABC.$$

Problema 3.18. Fie $ABCD$ un patrulater convex plan. Demonstraţi că

$$\text{Aria}\,ABCD = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{BD}\right\|.$$

Problema 3.19. Fie $ABCD$ un patrulater convex plan astfel încât

$$\overrightarrow{AB} = \mathbf{b},\ \overrightarrow{AD} = \mathbf{d},\ \overrightarrow{AC} = m\mathbf{b} + p\mathbf{d},$$

unde m şi p sunt două numere reale. Demonstraţi că aria patrulaterului este dată de formula

$$\text{Aria}\,ABCD = \frac{1}{2}|m + p| \cdot \|\mathbf{b} \times \mathbf{d}\|.$$

Problema 3.20. Fie $ABCD$ un patrulater convex plan astfel încât $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{BC} = \mathbf{b}$ şi $\overrightarrow{CD} = \mathbf{c}$, atunci aria patrulaterului este dată de formula

$$\text{Aria}\, ABCD = \frac{1}{2}\|\mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \mathbf{c} - \mathbf{c} \times \mathbf{a}\|.$$

Problema 3.21. Determinaţi ariile triunghiurilor cu vârfurile în punctele de coordonate:

(a) $(0,0,0), (1,2,3)$ şi $(2,-1,4)$;

(b) $(1,0,0), (0,1,0)$ şi $(1,1,1)$;

(c) $(-1,2,3), (2,-1,-1)$ şi $(1,1,-1)$;

(d) $(a,0,0), (0,b,0)$ şi $(0,0,c)$.

Problema 3.22. Determinaţi volumele tetraedrelor cu vârfurile în punctele de coordonate:

(a) $(0,0,0), (1,1,-1), (1,-1,1)$ şi $(-1,1,1)$;

(b) $(-1,0,1), (2,-1,0), (3,2,5)$ şi $(1,2,1)$.

Problema 3.23. Demonstraţi că volumul tetraedrului cu vârfurile în punctele de coordonate (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_2) şi (x_4, y_4, z_4) este egal cu valoarea absolută a numărului

$$\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix}.$$

Problema 3.24. Demonstraţi că volumul tetraedrului ale căror vârfuri au vectorii de poziţie $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ şi $\mathbf{d}$ este dat de formula

$$\text{Vol} = \frac{1}{6}\left|(\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) + (\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{d}) + (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d}) - (\mathbf{a}.\mathbf{b}, \mathbf{c})\right|.$$

Deduceţi, de aici, un criteriu pentru coplanaritatea punctelor cu vectorii de poziţie $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ şi $\mathbf{d}$.

SEMINARUL 4

Dreapta în plan

Probleme rezolvate

Problema 4.1. Scrieţi ecuaţiile parametrice ale unei drepte care:

(i) trece prin $M_0(1,2)$ şi este paralelă cu vectorul $\mathbf{a}(3,-1)$;

(ii) trece prin originea coordonatelor şi este paralelă cu vectorul $\mathbf{b}(3,4)$;

(iii) trece prin $A(1,7)$ şi este paralelă cu axa Oy;

(iv) trece prin punctele $M_1(2,4)$ şi $M_2(2,-5)$.

Soluţie. (i) Se obţin ecuaţiile:

$$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 - t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(ii) Se obţin ecuaţiile:

$$\begin{cases} x = 3t \\ y = 4t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(iii) Vectorul director este, de data aceasta, $\mathbf{j}(0,1)$, deci ecuaţiile sunt

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 7 + t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(iv) Vectorul director este, $\overrightarrow{M_1M_2}(0,-9)$, deci ecuaţiile sunt

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 4 - 9t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

$\square$

Problema 4.2. O dreaptă este dată prin ecuaţiile parametrice $x = 1-4t, y = 2+t$. Determinaţi vectorul director al dreptei.

Soluţie. Se observă imediat că un vector director este $\mathbf{v}(-4, 1)$. □

Problema 4.3. Scrieţi ecuaţia unei drepte care

(i) are coeficientul unghiular $k = -5$ şi trece prin punctul $A(1, -2)$;

(ii) are coeficientul unghiular $k = 8$ şi taie pe axa Oy un segment de lungime 2;

(iii) trece prin punctul $A(-2, 3)$ şi formează cu axa Ox un unghi de 60°;

(iv) trece prin punctul $B(1, 7)$ şi este ortogonală pe vectorul $\mathbf{n}(4, 3)$.

Soluţie. (i) Ecuaţia care se obţine este

$$y + 2 = -5(x - 1)$$

sau

$$5x + y - 3 = 0.$$

(ii) Condiţia din enunţ înseamnă că dreapta trece fie prin punctul $A(0, 2)$, fie prin punctul $B(0, -2)$. În primul caz, obţinem

$$y - 2 = 8x$$

sau

$$8x - y + 2 = 0.$$

În al doilea caz, avem

$$y + 2 = 8x$$

sau

$$8x - y - 2 = 0.$$

Dreptele sunt, în mod evident, paralele.

(iii) Se obţine ecuaţia

$$y - 3 = \operatorname{tg} 60°(x + 2)$$

sau

$$y - 3 = \sqrt{3}(x + 2)$$

sau, încă,

$$\sqrt{3}x - y + 3 + 2\sqrt{3} = 0.$$

□

Problema 4.4. Se dă triunghiul ABC: $A(1, 1), B(-2, 3), C(4, 7)$. Scrieţi ecuaţiile laturilor acestui triunghi, precum şi ecuaţia medianei care trece prin vârful A.

Soluţie.

$$AB : \frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{x - x_A}{x_B - x_A} \iff \frac{y - 1}{3 - 1} = \frac{x - 1}{-2 - 1} \iff \frac{y - 1}{2} = \frac{x - 1}{-3}$$

sau

$$AB : -3y + 3 = 2x - 2$$

sau, încă

$$AB : 2x + 3y - 5 = 0.$$

$$BC : \frac{y - y_B}{y_C - y_B} = \frac{x - x_B}{x_C - x_B} \iff \frac{y - 3}{7 - 3} = \frac{x + 2}{4 + 2} \iff \frac{y - 3}{4} = \frac{x + 2}{6}$$

sau

$$BC:\ 6y-18=4x+8$$

sau, încă

$$BC: 2x-3y+13=0.$$

$$CA:\ \frac{y-y_C}{y_A-y_C}=\frac{x-x_C}{x_A-x_C}\iff\frac{y-7}{1-7}=\frac{x-4}{1-4}\iff\frac{y-7}{-6}=\frac{x-4}{-3}$$

sau

$$CA:\ y-7=2x-8$$

sau, încă

$$CA: 2x-y-1=0.$$

Fie, acum, A' mijlocul laturii BC. Atunci $A'(1,5)$, deci

$$AA':\ \frac{y-y_A}{y_{A'}-y_A}=\frac{x-x_A}{x_{A'}-x_A}\iff\frac{y-1}{3-1}=\frac{x-1}{-2-1}\iff\frac{y-1}{2}=\frac{x-1}{-3}$$

sau

$$AB:\ -3y+3=2x-2$$

sau, încă

$$AB: 2x+3y-5=0.$$

□

Problema 4.5. Scrieţi ecuaţia dreptei care trece prin punctul $A(-2,5)$ şi care taie pe axele de coordonate segmente de lungimi egale.

Soluţie. Ecuaţia dreptei prin tăieturi este

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1=0. \tag{4.0.1}$$

Condiţia problemei este ca $|a|=|b|$. Fie $c=|a|=|b|>0$. Avem patru cazuri posibile:

(i) a şi b sunt ambele strict pozitive. Atunci ecuaţia (4.0.1) se poate scrie

$$x+y-c=0.$$

Din condiţia ca dreapta să treacă prin A, se obţine că $c=3$, deci ecuaţia dreptei este

$$x+y-3=0.$$

(ii) $a>0$ şi $b<0$. Atunci ecuaţia (4.0.1) se poate scrie

$$x-y-c=0.$$

Din condiţia ca dreapta să treacă prin A, se obţine că $c=-7$, deci problema nu are soluţie în acest caz, deoarece noi am presupus că $c>0$.

(iii) $a<0$ şi $b>0$. Atunci ecuaţia (4.0.1) se poate scrie

$$-x+y-c=0.$$

Din condiţia ca dreapta să treacă prin A, se obţine că $c=7$, deci ecuaţia dreptei este

$$-x+y-7=0.$$

(iv) a şi b sunt ambele strict negative. Atunci ecuaţia (4.0.1) se poate scrie

$$-x - y - c = 0.$$

Din condiţia ca dreapta să treacă prin A, se obţine că $c = -3$, deci nici în acest caz problema nu are soluţie.

$\square$

Problema 4.6. Se dau mijloacele $M_1(1,2)$, $M_2(3,4)$, $M_3(5,-1)$ ale laturilor unui triunghi. Determinaţi ecuaţiile laturilor.

Soluţia 1. Notăm cu ABC triunghiul căutat, astfel încât M_1 este mijlocul lui BC, M_2 este mijlocul lui CA, iar M_3 este mijlocul lui AB. Din teorema liniei mijlocii într-un triunghi deducem imediat că:

- vectorul director al dreptei AB este $\overrightarrow{M_1M_2}(2,2)$;
- vectorul director al dreptei BC este $\overrightarrow{M_2M_3}(2,-5)$;
- vectorul director al dreptei CA este $\overrightarrow{M_3M_1}(4,-3)$.

Prin urmare,

- dreapta AB este dreapta care trece prin M_3 şi este paralelă cu $\overrightarrow{M_1M_2}(2,2)$, deci ecuaţia sa este

$$AB: \frac{x-5}{2} = \frac{y+1}{2}$$

sau

$$AB: x - y - 6 = 0.$$

- Dreapta BC este dreapta care trece prin M_1 şi este paralelă cu $\overrightarrow{M_2M_3}(2,-5)$, deci ecuaţia sa este

$$BC: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-5}$$

sau

$$BC: 5x + 2y - 9 = 0.$$

- Dreapta CA este dreapta care trece prin M_2 şi este paralelă cu $\overrightarrow{M_3M_1}(4,-3)$, deci ecuaţia sa este

$$CA: \frac{x-3}{4} = \frac{y-4}{-3}$$

sau

$$CA: 3x + 4y + 25 = 0.$$

$\square$

Soluţia 2. Folosim coordonatele mijloacelor pentru a determina coordonatele vârfurilor, apoi scriem ecuaţiile laturilor ca ecuaţii ale dreptelor care trec prin câte două vârfuri. $\square$

Problema 4.7. Se dă un triunghi cu vârfurile $A(1,5)$, $B(-4,3)$ şi $C(2,9)$. Determinaţi ecuaţia înălţimii dusă din vârful A pe latura BC.

Soluţie. Trebuie, în fapt, să scriem ecuaţia dreptei care trece prin A şi este perpendiculară pe dreapta BC. Începem prin a scrie ecuaţia dreptei BC:

$$BC : \frac{y - y_B}{y_C - y_B} = \frac{x - x_B}{x_C - x_B} \iff \frac{y-3}{6} = \frac{x+4}{6}$$

sau

$$BC : x - y + 7 = 0.$$

Fie d înălţimea care trece prin A. Atunci, pentru ca ea să fie perpendiculară pe BC, trebuie să aibă panta egală cu -1 (deoarece BC are panta egală cu 1), Avem, aşadar,

$$(d) : y - y_A = -(x - x_A) \iff y - 5 = -(x - 1)$$

sau

$$(d) : x + y - 6 = 0.$$

□

Problema 4.8. Determinaţi simetricul punctului $A(10, 10)$ relativ la dreapta $3x + 4y - 20 = 0$.

Soluţie. Ideea soluţiei este următoarea. Fie d dreapta dată. Ducem prin A o dreaptă perpendiculară pe dreapta d, fie ea d_1 şi notăm cu P piciorul perpendicularei. Atunci, dacă A' este simetricul lui A relativ la dreapta d, rezultă că P trebuie să fie mijlocul segmentului AA', aşadar coordonatele lui A' vor fi date de

$$\begin{cases} x_{A'} = 2x_P - x_A, \\ y_{A'} = 2y_P - y_A. \end{cases}$$

SE observă imediat că panta dreptei d este egală cu $-3/4$, ceea ce înseamnă că panta perpendicularei d_1 este $4/3$. Prin urmare, ecuaţia dreptei d_1 este

$$(d_1) : y - 10 = \frac{4}{3}(x - 10)$$

sau

$$(d_1) : 4x - 3y - 10 = 0.$$

Prin urmare, pentru a determina coordonatele punctului P, trebuie să rezolvăm sistemul

$$\begin{cases} 3x + 4y - 20 = 0, \\ 4x - 3y - 10 = 0. \end{cases}$$

Se obţine, imediat, $P(4, 2)$. Prin urmare, obţinem

$$\begin{cases} x_{A'} = 2x_P - x_A = -2, \\ y_{A'} = 2y_P - y_A = -6. \end{cases}$$

□

Problema 4.9. Determinaţi coordonatele centrului cercului circumscris triunghiului de vârfuri $A(1, 2)$, $B(3, -2)$ şi $C(5, 6)$.

Soluţie. Scriem ecuaţiile a două mediatoare şi determinăm punctul lor de intersecţie. Vom stabili ecuaţiile mediatoareloer laturilor BC şi CA. Mijlocul laturii BC este punctul $A'(4, 2)$, în timp ce mijlocul laturii CA este punctul $B'(3, 4)$. Panta laturii BC este

$$k_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{8}{2} = 4,$$

prin urmare, panta mediatoarei OA' este

$$k_{OA'} = -\frac{1}{4}.$$

Aşadar, ecuaţia dreptei OA' este

$$y - 2 = -\frac{1}{4}(x - 4)$$

sau

$$(OA') : x + 4y - 12 = 0.$$

Analog, se obţine uşor că pabta laturii CA este $k_{CA} = 1$, de unde rezultă ecuaţia dreptei OB':

$$(OC') : x + y - 7 = 0.$$

Astfel, coordonatele centrului cercului circumscris triunghiului ABC se obţin rezolvând sistemul

$$\begin{cases} x + 4y - 12 = 0, \\ x + y - 7 = 0. \end{cases}$$

Se obţine uşor $O\left(\frac{16}{3}, \frac{5}{3}\right)$. □

Problema 4.10. Determinaţi unghiurile dreptelor:

1) $y = 2x + 1$ şi $y = -x + 2$;

2) $y = 3x - 4$ şi $x = 3 + t, y = -1 - 2t$;

3) $y = \frac{2}{5}x + 1$ şi $4x + 3y - 12 = 0$;

4) $2x + 3y = 0$ şi $x - y + 5 = 0$;

5) $x - 3y + 2 = 0$ şi $x = 2 - t, y = 3 + 2t$.

Soluţie. Menţionăm, de la bun început că, de fapt, calculul unghiului dintre două drepte este, de regulă ambiguu, pentru că el nu ia în considerare un sens de parcurgere pe fiecare dintre cele drepte, de aceea, calculul ne poate da fie un unghi ascuţit, fie unul obtuz (ceea ce este natural, întrucât două drepte în plan fac, în realitate, două unghiuri, unul ascuţit şi unul obtuz). Utilizând modulul, se poate determina cu uşurinţă unghiul ascuţit.

1) Folosim formula pentru determinarea unghiului folosind pantele. Panta primei drepte este $k_1 = 2$, în timp ce panta celei de-a doua drepte este $k_2 = -1$, deci

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} = 3,$$

deci unghiul (ascuţit) este $\alpha = \operatorname{arctg} 3$.

2) Folosim vectorii directori pentru a determina unghiul. Observăm, imediat, că ecuaţia primei drepte se poate scrie sub forma

$$3x - y - 4 = 0,$$

de unde vectorul director $v_1(1, 3)$. Vectorul director al celei de-a doua drepte se citeşte imediat din ecuaţiile parametrice. El este $v_2(1, -2)$. Aşadar, unghiul dintre drepte este dat de:

$$\cos \alpha = \frac{v_1 \cdot v_2}{\|v_1\| \cdot \|v_2\|} = \frac{-5}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

prin urmare, unghiul (obtuz) ditre cele două drepte este de $135°$ (deci unghiul ascuţit este de $45°$).

3) De data aceasta folosim ecuaţiile generale ale dreptelor. Prima dreaptă se aduce imediat la forma generală şi obţinem

$$2x - 5y + 5 = 0.$$

Astfel,

$$\cos\alpha = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} = \frac{8 - 15}{\sqrt{4 + 25}\sqrt{16 + 9}} = -\frac{7}{5\sqrt{29}}.$$

Deci unghiul (obtuz) format de cele două drepte este $\alpha = \arccos\left(-\frac{7}{5\sqrt{29}}\right)$.

4) De data asta, ambele drepte sunt date direct prin forma generală, deci, aplicând formula de la punctul precedent, obţinem

$$\cos\alpha = \frac{2 - 3}{\sqrt{4 + 9}\sqrt{1 + 1}} = -\frac{1}{\sqrt{26}},$$

aşadar unghiul (obtuz) dintre cele două drepte este $\alpha = \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{26}}\right)$.

5) Utilizăm, acum, vectorii directori ai celor două drepte. Se constată uşor că vectorul director al primei drepte este $\mathbf{v}_1(3, 1)$, în timp ce vectorul director al celei de-a doua drepte este $\mathbf{v}_2(-1, 2)$, deci unghiul lor este dat de

$$\cos\alpha = \frac{-3 + 2}{\sqrt{9 + 1}\sqrt{1 + 4}} = -\frac{1}{5\sqrt{2}}$$

de unde rezultă că unghiul (obtuz) al dreptelor este $\alpha = \arccos\left(-\frac{1}{5\sqrt{2}}\right)$. □

Problema 4.11. Stabiliţi ecuaţia dreptei care trece prin punctul $A(3, 1)$ şi formează cu dreapta $2x + 3y - 1 = 0$ un unghi de $45°$.

Soluţie. O dreaptă oarecare care trece prin $A(3, 1)$ şi care formează un unghi de $45°$ cu dreapta dată nu poate fi verticală, pentru că atunci dreapta dată ar trebui să fie paralelă cu una dintre primele două bisectoare ale axelor, ceea ce, în mod evident, nu este cazul. Prin urmare, putem căuta dreapta sub forma

$$y - 1 = k_2(x - 3).$$

Notăm cu k_1 panta dreptei date. În mod evident, $k_1 = -\frac{2}{3}$. Atunci condiţia din enunţ se poate scrie sub forma

$$1 = \operatorname{tg} 45° = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}\right| = \left|\frac{k_2 + \frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{3}k_2}\right| = \left|\frac{3k_2 + 2}{3 - 2k_2}\right|.$$

Dacă alegem semnul " $+$ ", suntem conduşi la ecuaţia

$$3k_2 + 2 = 3 - 2k_2$$

de unde $k_2 = \frac{1}{5}$. Dacă alegem semnul " $-$ ", suntem conduşi la ecuaţia

$$3k_2 + 2 = -3 + 2k_2,$$

adică avem $k_2 = 5$.

Remarcăm două lucruri. În primul rând, avem voie să înmulţim cu $3 - k_2$, întrucât cele două drepte nu sunt perpendiculare. În al doilea rând, este de notat faptul că cele două pante obţinute corespund la două drepte perpendiculare, ceea ce este normal, deoarece dreptele asociate fac unghiuri de $45°$ cu dreapta dată, de o parte şi de alta a acesteia, deci unghiul dintre ele trebuie să fie de $90°$. Aceasta înseamnă, în fapt, că este suficient să determinăm o valoare a pantei, cealaltă rezultând automat. Desigur, totul este legat de valoarea particulară a unghiului dat, raţionamentul nu funcţionează pentru un unghi oarecare, pentru care trebuie neapărat să rezolvăm ambele ecuaţii.

Revenind la problema nostră, pentru prima pantă obţinem dreapta

$$y-1=-\frac{1}{5}(x-3)$$

sau

$$x+5y-8=0,$$

în timp pentru cea de-a doua pantă, obţinem dreapta

$$y-1=5(x-3)$$

sau

$$5x-y-14=0.$$

□

Problema 4.12. Determinaţi vârfurile şi unghiurile triunghiului care are laturile date de ecuaţiile $x+3y=0$,$x=3$, $x-2y+3=0$.

Soluţie. Notăm cu Δ_1,Δ_2, respectiv Δ_3 cele trei drepte, respectând ordinea din enunţ. Notăm $\{A\}=\Delta_2\cap\Delta_3$, $\{B\}=\Delta_1\cap\Delta_3$, respectiv $\{C\}=\Delta_1\cap\Delta_2$. Se obţine, imediat, rezolvând sistemele corespunzătoare de ecuaţii, $A(3,-1)$, $B\left(-\frac{9}{5},\frac{3}{5}\right)$ şi $C(3,3)$.

Unghiul A este unghiul dintre vectorii $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{AC}$. Dar $\overrightarrow{AB}=\left(-\frac{24}{5},\frac{8}{5}\right)=\frac{8}{5}(-3,1)$, în timp ce $\overrightarrow{AC}=(0,4)=4(0,1)$. Prin urmare,

$$\cos A=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\|\cdot\|\overrightarrow{AC}\|}=\frac{1}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$$

Unghiul B este unghiul dintre vectorii $\overrightarrow{BA}-\equiv-\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{BC}$. Dar $\overrightarrow{BA}=\frac{8}{5}(3,-1)$, în timp ce

$$\overrightarrow{BC}=\left(\frac{24}{5},\frac{12}{5}\right)=\frac{12}{5}(2,1).$$

Astfel,

$$\cos B=\frac{5}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

prin urmare unghiul B este de 45°.

În sfârşit, unghiul C este unghiul dintre vectorii $\overrightarrow{CA}=-\overrightarrow{AC}$ şi $\overrightarrow{CB}=-\overrightarrow{BC}$, deci

$$\cos C=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

□

Problema 4.13. Se consideră triunghiul cu vârfurile $A(1,-2)$, $B(5,4)$ şi $C(-2,0)$. Stabiliţi ecuaţia bisectoarei interioare şi cea a bisectoarei exterioare corespunzătoare unghiului A.

Prima metodă. Bisectoarea interioară a unghiului A este bisectoarea u ghiului format de vectorii $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{AC}$. Avem, înainte de toate $\overrightarrow{AB} = (4,6) = 2(2,3)$, în timp ce $\overrightarrow{AC} = (-3,2)$. Vrem să determinăm vectorul director al bisectoatei. În acest scom considerăm doi vectori de aceeaşi direcţie şi sens cu cei doi vectori şi de aceeaşi lungime. Atunci suma acestor doi vectori va fi un vector director al bisectoarei interioare a unghiului A (paralelogramul construit pe cei doi vectori de aceeaşi lungime va fi un romb, ceea ce înseamnă că diagonalele sale vor fi şi bisectoare). Se observă imediat că vectorul $\mathbf{u} = (2,3)$ are aceeaşi direcţie şi sens cu vectorul $\overrightarrow{AB}$. Modulul său este egal cu $\sqrt{13}$. Se observă imediat că modulul lui $\overrightarrow{AC}$ este, de asemenea, egal cu $\sqrt{13}$. Alegem, deci $\mathbf{v} = (-3,2)$. Asta înseamnă că un vector director al bisectoarei interioare este

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v} = (2,3) + (-3,2) = (-1,5),$$

prin urmare ecuaţia bisectoarei interioare este

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{5}$$

sau

$$5x + y - 3 = 0.$$

Este clar că panta acestei drepte este egală cu -5. Bisectoarea exterioară este perpendiculară pe cea interioară, deci este dreapta care trece prin A şi are panta $1/5$, adică are ecuaţia

$$y + 2 = \frac{1}{5}(x-1)$$

sau

$$x - 5y - 11 = 0.$$

□

A doua metodă. De data aceasta plecăm de la definiţia bisectoarei unui unghi, ca fiind locul geometric al punctelor egal depărtate de laturile unui unghi. Menţionăm, însă, că acest loc geometric este format din două drepte, nu doar una singură (cele două bisctoare ale unghiului). În general, dacă avem două drepte, de ecuaţii generale $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, respectiv $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, atunci ecuaţia bisectoarelor este

$$\frac{|A_1x + B_1y + C_1|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \frac{|A_2x + B_2y + C_2|}{\sqrt{A_2 + B_2^2}}$$

sau

$$\frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \pm\frac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2 + B_2^2}}.$$

Referindu-ne la cazul nostru concret, trebuie, mai întâi, să determinăm ecuaţiile laturilor AB şi AC ale triunghiului. Avem

$$AB : \frac{x-1}{5-1} = \frac{y+2}{4+2} \iff \frac{x-1}{4} = \frac{y+2}{6}$$

sau

$$AB : 3x - 2y - 7 = 0.$$

Ecuaţia dreptei AC se obţine analog:

$$AC : \frac{x-1}{-2-1} = \frac{y+2}{0+2} \iff \frac{x-1}{-3} = \frac{y+2}{2}$$

sau

$$AC : 2x + 3y + 4 = 0.$$

Ecuaţiile bisectoarelor vor fi, prin urmare,

$$\frac{3x-2y-7}{\sqrt{13}}=\pm\frac{2x+3y+4}{\sqrt{13}}$$

sau

$$3x-2y-7=\pm(2x+3y+4).$$

Dacă alegem semnul " $+$ ", obţinem dreapta de ecuaţie

$$x-5y-11=0,$$

în timp ce pentru semnul " $-$ " obţinem dreapta de ecuaţie

$$5x+y-3=0.$$

Mai rămâne de stabilit care dintre dreptele obţinute este bisectoarea interioară şi care este bisectoarea exterioară. Bisectoarea interioară este, fireşte, cea pentru care punctele B şi C se află de părţi diferite faţă de această dreaptă (cu alte cuvinte, bisectoarea interioară care pleacă dintr-un vârf *separă* celelalte două vârfuri ale triunghiului).

Începem cu prima bisectoare obţinută şi notăm cu $P(x,y)\equiv x-5y-11$ mebrul stâng al ecuaţiei acestei drepte. Atunci faptul că B şi C se află de-o parte şi de alta a sa, înseamnă că P, evaluat pe coordonatele lui B şi cele ale lui C, are semne opuse.

Avem $P(5,4)=5-20-11=-26<0$, în timp ce $P(-2,0)=-2-11=-13$, deci obţinem acelaşi semn, prin urmare această bisectoare este cea exterioară şi, în mod implicit, cealaltă este cea interioară. □

Problema 4.14. Determinaţi simetricul punctului $A(10,10)$ relativ la dreapta $3x+4y-20=0$.

Soluţie. Ideea soluţiei este următoarea. Fie d dreapta dată. Ducem prin A o dreaptă perpendiculară pe dreapta d, fie ea d_1 şi notăm cu P piciorul perpendicularei. Atunci, dacă A' este simetricul lui A relativ la dreapta d, rezultă că P trebuie să fie mijlocul segmentului AA', aşadar coordonatele lui A' vor fi date de

$$\begin{cases} x_{A'}=2x_P-x_A,\\ y_{A'}=2y_P-y_A.\end{cases}$$

Se observă imediat că panta dreptei d este egală cu $-3/4$, ceea ce înseamnă că panta perpendicularei d_1 este $4/3$. Prin urmare, ecuaţia dreptei d_1 este

$$(d_1): y-10=\frac{4}{3}(x-10)$$

sau

$$(d_1): 4x-3y-10=0.$$

Prin urmare, pentru a determina coordonatele punctului P, trebuie să rezolvăm sistemul

$$\begin{cases} 3x+4y-20=0,\\ 4x-3y-10=0.\end{cases}$$

Se obţine, imediat, $P(4,2)$. Prin urmare, obţinem

$$\begin{cases} x_{A'}=2x_P-x_A=-2,\\ y_{A'}=2y_P-y_A=-6.\end{cases}$$

□

Probleme propuse

Problema 4.15. Să se stabilească ecuaţia dreptei care trece prin punctul $A(8, 9)$, pentru care lungimea segmentului de pe dreaptă cuprins între dreptele $x - 2y + 5 = 0$ şi $x - 2y = 0$ este egală cu 5.

Problema 4.16. Determinaţi distanţele de la punctele $O(0, 0)$, $A(1, 2)$ şi $B(-5, 7)$ la dreapta $6x + 8y - 15 = 0$.

Problema 4.17. Abaterile unui punct M faţă de dreptele $5x - 12y - 13 = 0$ şi $3x - 4y - 19 = 0$ sunt egale, respectiv, cu -3 şi -5. Determinaţi coordonatele punctului M.

Problema 4.18. Determinaţi distanţele dintre dreptele paralele

1) $x - 2y + 3 = 0$ şi $2x - 4y + 7 = 0$;

2) $3x - 4y + 1 = 0$ şi $x = 1 + 4t, y = 3t$;

3) $x = 2 - t, y = -3 + 2t$ şi $x = 2s, y = 5 - 4s$.

Problema 4.19. Stabiliţi ecuaţia bisectoarei unghiului format de dreptele $x+2y-11 = 0$ şi $3x-6y-5 = 0$, care trece prin punctul $A(1, -3)$.

Problema 4.20. Demonstraţi că figura mărginită de dreptele $x - 3y + 1 = 0$, $x - 3y + 12 = 0$, $3x + y - 1 = 0$ şi $3x + y + 10 = 0$ este un pătrat. Calculaţi-i aria.

Problema 4.21. Stabiliţi ecuaţiile laturilor unui triunghi cunoscând unul dintre vârfuri, $B(2, -1)$,precum şi ecuaţia unei înălţimi: $3x - 4y + 27 = 0$ şi a unei bisectoare: $x + 2y - 5 = 0$, provenind din vârfuri diferite.

Problema 4.22. Se dau ecuaţiile

$$x + 2y - 1 = 0, \quad 5x + 4y - 17 = 0, \quad x - 4y + 11 = 0.$$

Determinaţi ecuaţiile înălţimilor triunghiului, fără a determina coordonatele vârfurilor.

Indicaţie. Scrieţi ecuaţiile fasciculelor de drepte determinate de câte două laturi şi determinaţi parametrii în aşa fel încât dreapta din fascicul să fie perpendiculară pe cea de-a treia latură. $\square$

SEMINARUL 5

Dreapta şi planul în spaţiu

Probleme rezolvate

Problema 5.1. Scrieţi ecuaţiile parametrice ale planului care trece prin:

1) punctul $M_0(1, 0, 2)$ şi este paralel cu vectorii $\mathbf{a}_1(1, 2, 3)$, $\mathbf{a}_2(0, 3, 1)$;

2) punctul $A(1, 2, 1)$ şi este paralel cu vectorii $\mathbf{i}, \mathbf{j}$;

3) punctul $A(1, 7, 1)$ şi este paralel cu planul xOz;

4) punctele $M_1(5, 3, 2)$, $M_2(1, 0, 1)$ şi este paralel cu vectorul $\mathbf{a}(1, 3, -3)$.

5) punctul $A(1, 5, 7)$ şi prin axa Ox;

6) prin originea coordonatelor şi punctele $M_1(1, 0, 1)$, $M_2(-2, -3, 1)$.

Soluţie. 1) Plecăm de la ecuaţia vectorială

$$\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{r}_{M_0} + u\mathbf{a}_1 + v\mathbf{a}_2,$$

adică

$$\mathbf{r}(u, v) = (1, 0, 2) + u(1, 2, 3) + v(0, 3, 1).$$

Obţinem ecuaţiile parametrice proiectând ecuaţia precedentă pe axele de coordonate. Avem:

$$\begin{cases} x &= 1 + u, \\ y &= 2u + 3v, \\ z &= 2 + 3u + v. \end{cases}$$

2) Ecuaţia vectorială este

$$\mathbf{r}(u, v) = (1, 2, 1) + u(1, 0, 0) + v(0, 1, 0),$$

deci ecuaţiile parametrice sunt

$$\begin{cases} x &= u, \\ y &= 2 + v, \\ z &= 1. \end{cases}$$

3) Faptul că planul este paralel cu xOz înseamnă că este paralel cu vectorii **i** şi **k**, deci ecuaţia vectorială este

$$\mathbf{r}(u,v) = (1,7,1) + u(1,0,0) + v(0,0,1),$$

de unde ecuaţiile parametrice

$$\begin{cases} x &= 1+u, \\ y &= 7, \\ z &= 1+v. \end{cases}$$

4) Planul este determinat de punctul M_1 şi este paralel cu vectorii **a** şi $\overrightarrow{M_1M_2}(-4,-3,-1)$. Este clar că cei doi vectori nu sunt coliniari, deci, împreună cu punctul, chiar determină un plan. Ecuaţia vectorială este

$$\mathbf{r}(u,v) = (5,3,2) + u(1,3,-3) + v(-4,-3,-1),$$

deci ecuaţiile parametrice sunt

$$\begin{cases} x &= 5+u-4v, \\ y &= 3+3u-3v, \\ z &= 2-3u-v. \end{cases}$$

5) Planul trece prin axa Ox, deci trece şi prin origine, aşa că poate fi descris ca planul care trece prin origine şi este paralel cu vectorii **i** şi $\overrightarrow{OA}(1,5,7)$. Astfel, ecuaţia vectorială a planului este

$$\mathbf{r}(u,v) = (0,0,0) + u(1,0,0) + v(1,5,7),$$

iar ecuaţiile parametrice sunt

$$\begin{cases} x &= u+v, \\ y &= 5v, \\ z &= 7v. \end{cases}$$

6) Planul trece prin origine şi este paralel cu vectorii $\overrightarrow{OM_1}(1,0,1)$ şi $\overrightarrow{OM_2}(-2,-3,1)$ care, în mod evident, nu sunt coliniari. Ecuaţia vectorială a planului este

$$\mathbf{r}(u,v) = (0,0,0) + u(1,0,1) + v(-2,-3,1),$$

aşadar ecuaţiile parametrice sunt

$$\begin{cases} x &= u-2v, \\ y &= -3v, \\ z &= u+v. \end{cases}$$

□

Problema 5.2. Scrieţi ecuaţia generală a planului plecând de la ecuaţiile sale parametrice:

(a)

$$\begin{cases} x &= 2+3u-4v, \\ y &= 4-v, \\ z &= 2+3u; \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} x = u+v, \\ y = u-v, \\ z = 5+6u-4v. \end{cases}$$

Soluţie. Ceea ce trebuie este să eliminăm cei doi parametrii din cele trei ecuaţii.

(a) Din ultimele două ecuaţii obţinem $v = 4 - y$ şi $v = \dfrac{z-2}{3}$. Dacă înlocuim în prima ecuaţie, rezultă

$$x = 2 + 3(4 - y) + 4\frac{z-2}{3}$$

sau

$$3x = 6 + 36 - 3y + 4z - 8$$

sau, în fine

$$3x + 3y - 4z - 34 = 0.$$

(b) Din primele două ecuaţii obţinem imediat $u = \dfrac{x+y}{2}$ şi $v = \dfrac{x-y}{2}$. Dacă înlocuim în ecuaţia a treia, rezultă

$$z = 5 + 3(x + y) - 2(x - y)$$

sau

$$x + 5y - z + 5 = 0.$$

□

Problema 5.3. Stabiliţi ecuaţiile parametrice ale planului plecând de la ecuaţia sa generală:

(a) $3x - 6y + z = 0$;

(b) $2x - y - z - 3 = 0$.

Soluţie. Ecuaţia generală a planului este o ecuaţie de gradul întâi cu trei necunoscute. Tot ce avem de făcut este să identificăm o necunoscută principală şi, în mod implicit, două necunoscute secundare (care vor juca rolul parametrilor) şi să rezolvăm sistemul. La ambele cazuri putem alege z ca variabilă principală. Obţinem reprezentările parametrice:

(a)

$$\begin{cases} x = u, \\ y = v, \\ z = -3u + 6v; \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} x = u, \\ y = v, \\ z = 2u - v - 3. \end{cases}$$

□

Problema 5.4. Stabiliţi ecuaţia planului care trece prin punctiul $A(3, 5, -7)$ şi care taie pe axele de coordonate segmente de lungime egală.

Soluţie. Utilizăm ecuaţia planului prin tăieturi:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = 0.$$

Condiţia este ca segmentele tăiate de plan pe axe să aibă lungimi egale. Aceasta înseamnă că $|a| = |b| = |c| = \lambda$. Avem mai multe situaţii de considerat:

(i) $a, b, c > 0$. De data aceasta avem $a = b = c = \lambda$, deci ecuaţia planului se poate scrie sub forma

$$x + y + z - \lambda = 0.$$

Dacă punctul A aparţine planului, atunci

$$3 + 5 - 7 - \lambda = 0,$$

adică $\lambda = 1$, deci ecuaţia planului este

$$x + y + z - 1 = 0.$$

(ii) $a, b > 0, c < 0$. Atunci $a = b = -c = \lambda$ şi ecuaţia planului se scrie

$$x + y - z - \lambda = 0.$$

Dacă punctul A aparţine planului, atunci

$$3 + 5 + 7 - \lambda = 0,$$

adică $\lambda = 15$, deci ecuaţia planului este

$$x + y + z - 15 = 0.$$

(iii) $a, c > 0, b < 0$. Atunci $a = -b = c = \lambda$ şi ecuaţia planului se scrie

$$x - y + z - \lambda = 0.$$

Dacă punctul A aparţine planului, atunci

$$3 - 5 - 7 - \lambda = 0,$$

adică $\lambda = -9$, soluţie care nu convine, pentru că λ trebuie să fie pozitiv.

(iv) $b, c > 0, a < 0$. Atunci $-a = b = c = \lambda$ şi ecuaţia planului se scrie

$$-x + y + z - \lambda = 0.$$

Dacă punctul A aparţine planului, atunci

$$-3 + 5 - 7 - \lambda = 0,$$

adică $\lambda = -5$, soluţie care nu convine, pentru că λ trebuie să fie pozitiv.

(v) $a, b < 0, c > 0$. Atunci $-a- = b - c = \lambda$ şi ecuaţia planului se scrie

$$-x - y + z - \lambda = 0.$$

Dacă punctul A aparţine planului, atunci

$$-3 - 5 - 7 - \lambda = 0,$$

adică $\lambda = -15$, soluţie care nu convine, deoarece λ trebuie să fie pozitiv.

(vi) $a, c < 0, b > 0$. Atunci $-a = b = -c = \lambda$ şi ecuaţia planului se scrie

$$-x + y - z - \lambda = 0.$$

Dacă punctul A aparţine planului, atunci

$$-3 + 5 + 7 - \lambda = 0,$$

adică $\lambda = 9$, deci ecuaţia planului este

$$x + y + z - 9 = 0.$$

(vii) $b, c < 0, a > 0$. Atunci $a = -b = -c = \lambda$ şi ecuaţia planului se scrie

$$x - y - z - \lambda = 0.$$

Dacă punctul A aparţine planului, atunci

$$3 - 5 + 7 - \lambda = 0,$$

adică $\lambda = 5$, deci ecuaţia planului este

$$x + y + z - 5 = 0.$$

(viii) $a, b, c < 0$. Atunci $-a = -b = -c = \lambda$ şi ecuaţia planului se scrie

$$x + y + z + \lambda = 0.$$

Dacă punctul A aparţine planului, atunci

$$3 + 5 - 7 + \lambda = 0,$$

adică $\lambda = -1$, soluţie care nu convine, deoarece λ trebuie să fie pozitiv.

□

Problema 5.5. Se dau vârfurile unui tetraedru: $A(2, 1, 0)$, $B(1, 3, 5)$, $C(6, 3, 4)$, $D(0, -7, 8)$. Să se scrie ecuaţia planului care trece prin muchia AB şi prin mijlocul muchiei CD.

Soluţie. Fie M mijlocul muchiei CD. Atunci, evident, coordonatele lui M sunt mediile aritmetice ale coordonatelor lui C şi D, adică $M = M(3, -2, 6)$. Planul căutat este planul determinat de punctele A, B şi M. Dacă vrem ecuaţia generală, ea este dată de

$$\begin{vmatrix} x - x_A & y - y_A & z - z_A \\ x_B - x_A & y_B - y_A & z_B - z_A \\ x_M - x_A & y_M - y_A & z_M - z_A \end{vmatrix} = 0,$$

adică

$$\begin{vmatrix} x - 2 & y - 1 & z \\ -1 & 2 & 5 \\ 1 & -3 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

sau

$$27(x - 2) + 11(y - 1) + z = 0,$$

adică

$$27x + 11y + z - 65 = 0.$$

□

Problema 5.6. Stabiliţi care dintre următoarele plane se intersectează, sunt paralele sau coincid:

(a) $x - y + 3z + 1 = 0$ şi $2x - y + 5z - 2 = 0$;

(b) $2x + 4y + 2z + 4 = 0$ şi $4x + 2y + 4z + 8 = 0$;

(c)

$$\begin{cases} x = u + 2v, \\ y = 1 + v, \\ z = u - v \end{cases}$$

şi

$$\begin{cases} x = 2 + 3u' + v', \\ y = 1 + u' + v', \\ z = 2 - 2v'. \end{cases}$$

Soluţie. (a) Pentru a studia poziţia celor două plane studiem sistemul format din ecuaţiile lor

$$\begin{cases} x - y + 3z + 1 = 0, \\ 2x - y + 5z - 2 = 0. \end{cases}$$

Rangul matricii sistemului este maxim (adică 2), ceea ce înseamnă că sistemul este compatibil, simplu nedeterminat, prin urmare planele se intersectează după o dreaptă.

(b) Este analog punctului precedent şi răspunsul este acelaşi.

(c) Putem deduce ecuaţiile generale ale celor două plane, aplicând, pe urmă, aceiaşi metodă ca la punctele precedente. Preferăm să folosim o altă metodă. Este clar că două plane sunt paralele sau egale dacă şi numai dacă vectorii lor normali sunt coliniari. Vom determina, mai întâi, vectorii normali la cele două plane.

În cazul primului plan, remarcăm imediat că vectorii directori sunt $\mathbf{a}_1(1, 0, 1)$ şi $\mathbf{a}_2(2, 1, -1)$. Atunci un vector normal la suprafaţă este produsul vectorial al acestor doi vectori:

$$\mathbf{n}_1 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k} = (-1, 3, 1).$$

Analog, pentru al doilea plan vectorii directori sunt $\mathbf{b}_1(3, 1, 0)$ şi $\mathbf{b}_2(1, 1, -2)$,. deci vectorul normal va fi vectorul

$$\mathbf{n}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -2\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k} = 2(-1, 3, 1) = 2\mathbf{n}_1,$$

prin urmare, cele două plane sunt paralele sau egale. Pentru a stabili în care situaţie ne aflăm, este suficient să verificăm dacă au un punct comun, pentru că dacă au, atunci toate punctele sunt comune.

Remarcăm imediat că punctul $A(0, 1, 0)$ aparţine primului plan şi verificăm dacă aparţine şi celui de-al doilea. În acest scop, trebuie să verificăm dacă sistemul

$$\begin{cases} 2 + 3u' + v' = 0, \\ 1 + u' + v' = 1, \\ 2 - 2v' = 0. \end{cases}$$

Din ultimele două ecuaţii obţinem imediat că $u' = -1$ şi $v' = 1$. Este uşor de verificat că aceste valori verifică şi prima ecuaţie, deci cele două plane coincid. $\square$

Problema 5.7. Demonstraţi că paralelipipedul care are trei feţe neparalele situate în planele $2x + y - 2z + 6 = 0$, $2x - 2y + z + 8 = 0$ şi $x + 2y + 2z + 10 = 0$ este dreptunghic.

Soluţie. Trebuie să verificăm că cele trei plane sunt, două câte două, perpendiculare. Aceasta revine la a verifica faptul că vectorii lor normali sunt, doi câte doi, perpendiculari.

Vectorii normali la cele trei plane sunt, dupăm se constată cu uşurinţă, $\mathbf{n}_1(2, 1, -2)$, $\mathbf{n}_2(2, -2, 1)$, respectiv $\mathbf{n}_3(1, 2, 2)$. Este uşor de constatat că $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_3 = \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{n}_3 = 0$, deci planele sunt, într-adevăr, perpendiculare. □

Problema 5.8. Determinaţi proiecţia ortogonală a punctului $A(1, 3, 5)$ pe dreapta de intersecţie a planelor $2x + y + z - 1 = 0$ şi $3x + y + 2z - 3 = 0$.

Soluţie. Proiecţia lui A pe dreapta dată se obţine intersectând această dreaptă cu planul care trece prin A şi este perpendicular pe dreaptă. Remarcăm că planul este perpendicular pe dreaptă dacă şi numai dacă vectorul director al dreptei este perpendicular pe plan, adică este vector normal la plan.

Începem prin a determina vectorul director al dreptei. În acest scop, considerăm vectorii normali la cele două plane, $\mathbf{n}_1(2, 1, 1)$ şi $\mathbf{n}_2(3, 1, 2)$. Produsul lor vectorial este un vector director al dreptei, dar este, în acelaşi timp, un vector normal la planul perpendicular pe dreaptă prin punctul dat:

$$\mathbf{n} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k} = (1, -1, -1).$$

Astfel, ecuaţia planului perpendicular pe dreapta dată, care trece prin punctul A este $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_A) = 0$, adică

$$1 \cdot (x - 1) + (-1) \cdot (y - 3) + (-1) \cdot (z - 5) = 0$$

sau

$$x - y - z + 7 = 0.$$

Proiecţia punctului A pe dreaptă este la intersecţia dintre dreaptă şi planul care trece prin A şi este perpendicular pe dreaptă, deci coordonatele sale se obţin rezolvând sistemul de ecuaţii format din ecuaţiile dreptei şi ecuaţia planului:

$$\begin{cases} 2x + y + z - 1 = 0, \\ 3x + y + 2z - 3 = 0, \\ x - y - z + 7 = 0. \end{cases}$$

După efectuarea calculelor, se obţine punctul $A'(-2, 1, 4)$. □

Problema 5.9. Stabiliţi ecuaţia unui plan, ştiind că punctul $A(1, -1, 3)$ este proiecţia ortogonală a originii pe acest plan.

Soluţie. Din enunţul problemei rezultă că vectorul $\mathbf{n} = \overrightarrow{OA}(1, -1, 3)$ este normal la planul căutat. Aşadar, ecuaţia planului este $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_A) = 0$, adică

$$x - 1 - (y + 1) + 3(z - 3) = 0$$

sau

$$x - y + 3z - 11 = 0.$$

□

Problema 5.10. Determinaţi distanţa dintre planele paralele $x - 2y - 2z + 7 = 0$ şi $2x - 4y - 4z + 17 = 0$.

Soluţie. Distanţa dintre două plane paralele este distanţa de la un punct oarecare dintr-unul dintre plane până la celălalt. Notăm cu Π_1 şi Π_2 planele. Se observă imediat că $A(-7,0,0) \in \Pi_1$, deci

$$d\left(\Pi_1,\Pi_2\right) = d\left(A,\Pi_2\right) = \frac{|-14+17|}{\sqrt{4+16+16}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

□

Altă soluţie. Scriem ecuaţiile planelor sub forma normală. Avem

$$\Pi_1 : -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z - \frac{7}{3} = 0,$$

în timp ce

$$\Pi_2 : -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z - \frac{17}{6} = 0.$$

Cum vectorii normal la cele două plane au acelaşi sens, planele sunt situate de aceeaşi parte a originii, deci distanţa dintre ele este modulul diferenţei termenilor liberi, adică

$$d\left(\Pi_1,\Pi_2\right) = \left|\frac{17}{6} - \frac{7}{3}\right| = \frac{1}{2}.$$

□

Problema 5.11. Stabiliţi ecuaţia unui plan care este paralel cu planul $2x-2y-z-6=0$ şi care este situat la distanţă de 7 unităţi de acesta. Este soluţia problemei unică?

Soluţie. Ecuaţiile a două plane paralele pot fi scrise în aşa fel încât să difere doar prin termenul liber. Prin urmare, ecuaţia planului căutat se poatre scrie sub forma

$$2x-2y-z+\lambda=0,$$

unde λ este un parametru real care trebuie determinat. Este uşor de consatat că punctul $A(3,0,0)$ aparţine planului dat, deci condiţia din enunţ se poate scrie

$$\frac{|6+\lambda|}{\sqrt{4+4+1}} = 7$$

sau

$$|6+\lambda| = 21.$$

Rezolvând această ecuaţie, obţinem $\lambda = 15$ sau $\lambda = -27$. Prin urmare, problema are două soluţii:

$$2x-2y-z+15=0$$

şi

$$2x-2y-z-27=0.$$

Aceste două plane sunt situate la distanţa 7 faţă de planul dat, de o parte şi de cealaltă a acestuia. □

Problema 5.12. Stabiliţi ecuaţiile parametrice ale dreptei care trece prin:

1. punctul $M_0(2,0,3)$ şi este paralelă cu vectorul $\mathbf{a}(3,-2,-2)$;
2. punctul $A(1,2,3)$ şi este paralelă cu axa Ox;
3. punctele $M_1(1,2,3)$ şi $M_2(4,4,4)$.

Problema 5.13. Se dau vârfurile $A(1,2,-7), B(2,2,-7), C(3,4,-5)$ ale unui triunghi. Să se scrie ecuaţiile bisectoarei interioare a unghiului A.

Soluţie. Aşa cum am văzut în cazul triunghiurilor plane, ideea este să considerăm doi vectori de aceeaşi lungime, unul având aceeaşi direcţie şi sens cu $\overrightarrow{AB}$ şi celălalt cu aceeaşi direcţie şi sens cu $\overrightarrow{AC}$. Suma celor doi vectori este un vector director al bisectoarei interioare.

Avem $\overrightarrow{AB} = (1,0,0)$, în timp ce $\overrightarrow{AC} = (2,2,2) = 2(1,1,1)$. Atunci vectorul $\mathbf{a} = (\sqrt{3},0,0)$ are aceeaşi direcţie şi sens cu $\overrightarrow{AB}$ şi are modulul $\sqrt{3}$, în timp ce vectorul $\mathbf{b} = (1,1,1)$ are aceeaşi direcţie şi sens cu vectorul $\overrightarrow{AC}$ şi are, de asemenea, modulul egal cu $\sqrt{3}$. Prin urmare, un vector director al bisectoarei interioare este $\mathbf{c} = (1 = \sqrt{3},1,1)$. De aici rezulă că ecuaţiile canonice ale bisectoarei sunt

$$\frac{x-1}{1+\sqrt{3}} = y-2 = z+7.$$

□

Problema 5.14. Stabiliţi ecuaţiile parametrice ale dreptei determinate de planele $x+y+2z-3=0$ şi $x-y+z-1=0$.

Soluţie. Avem nevoie de un vector director al dreptei. Aşa cum am văzut cu altă ocazie, un astfel de vector se poate obţine înmulţind vectorial vectorii normali la cele două plane care determină dreapta. Aceştia sunt, după cum se vede uşor, $\mathbf{n}_1(1,1,2)$ şi $\mathbf{n}_2(1,-1,1)$, aşadar un vector director va fi

$$\mathbf{a} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}.$$

Acum, că am găsit un vecor director, ne mai trebuie un punct de pe dreaptă. Dacă în ecuaţiile dreptei punem $z = 0$, obţinem sistemul

$$\begin{cases} x+y=3, \\ x-y=1. \end{cases}$$

Se obţine imediat $x = 2$ şi $y = 1$. Prin urmare, punctul $A(2,1,0)$ este pe dreaptă, aşa că ecuaţiile sale parametrice sunt

$$\begin{cases} x = 2+3t, \\ y = 1+t, \\ z = -2t. \end{cases}$$

□

Altă soluţie. A scrie ecuaţiile parametrice ale dreptei determinate de două plane înseamnă, de fapt, din punct de vedere algebric, a scrie ecuaţia generală a sistemului de ecuaţii al celor două plane. Sistemul este simplu nedeterminat (altfel planele ar fi paralele sau egale). Tot ce trebuie să facem este să alegem două necunoscute principale şi să le determinăm ăn funcţie de cea de-a treia necunoscută, care joacă rolul parametrului.

In cazul nostru concret, se observă imediat că x şi y pot fi alese ca variabile principale. Punem $z = s$, iar sistemul de ecuaţii devine

$$\begin{cases} x+y=3-2s, \\ x-y=1-s. \end{cases}$$

Dacă adunăm ecuaţiile, obţinem $x = 2-3s/2$, iar dacă le scădem, obţinem $y = 1-s/2$. Astfel, ecuaţiile parametrice se pot scrie sub forma

$$\begin{cases} x = 2 - \dfrac{3}{2}s, \\ y = 1 - \dfrac{1}{2}s, \\ z = s. \end{cases}$$

Remarcăm că în această reprezentare parametrică punctul este acelaşi, dar vectorul director al dreptei este $\dfrac{1}{2}\mathbf{a}$. □

Problema 5.15. Stabiliţi că dreapta $x = 1 - 2t, y = 3t, z = -2 + t$ este paralelă cu dreapta $x = 7 + 4s, y = 5 - 6s, z = 4 - 2s$ şi determinaţi distanţa dintre ele.

Soluţie. Vectorul director al primei drepte este $\mathbf{a}(-2, 3, 1)$, în timp ce vectorul director al celei de-a doua drepte este $\mathbf{b}(4, -6, -2) = -2\mathbf{a}$, prin urmare cele două drepte sunt paralele, pentru că vectorii lor directori sunt coliniari.

Pentru a calcula distanţa dintre cele două drepte, calculăm distanţa de la un punct al primei drepte până la a doua dreaptă. Observăm imediat că $A(1, 0, -2)$ aparţine primei drepte. De asemenea, punctul $B(7, 5, 4)$ aparţine celei de-a doua drepte. Atunci, după cum ştim, formula de calcul a distanţei de la un punct la o dreaptă ne conduce la

$$d(\Delta_1, \Delta_2) \equiv d(B, \Delta_1) = \frac{\|(\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A) \times \mathbf{a}\|}{\|\mathbf{a}\|} = \frac{\|\overrightarrow{AB} \times \mathbf{a}\|}{\|\mathbf{a}\|}.$$

Dar $\overrightarrow{AB} = (6, 5, 6)$, deci

$$\overrightarrow{AB} \times \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 6 & 5 & 6 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (-13, -18, 28),$$

deci

$$\|\overrightarrow{AB} \times \mathbf{a}\| = \sqrt{169 + 324 + 784} = \sqrt{1277},$$

în timp ce $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{14}$, deci

$$d(\Delta_1, \Delta_2) = \sqrt{\frac{1277}{14}}.$$

□

Problema 5.16. Demonstraţi că dreapta $x = -3t, y = 2 + 3t, z = 1$ se intersectează cu dreapta $x = 1 + 5s, y = 1 + 13s, z = 1 + 10s$ şi determinaţi coordonatele punctului de intersecţie.

Soluţie. Trebuie să demonstrăm că există un punct din spaţiu care aparţine ambelor drepte, cu alte cuvinte, există o valoare a parametrului t şi o valoare a parametrului s astfel încât punctul de pe prima dreaptă care corespunde parametrului t coincide u punctul; de pe cea de-a doua dreaptă care corespunde parametrului s. Suntem, astfel, conduşi la sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} -3t = 1 + 5s, \\ 2 + 3t = 1 + 13s, \\ 1 = 1 + 10s. \end{cases}$$

De remarcat că un astfel de sistem (de trei ecuaţii cu doar două necunoscute), nu are, în general soluţie, pentru că două drepte oarecare în spaţiu, de obicei nu se intersecxtează. În acest cas, se obţine imediat că $t = -\dfrac{1}{3}$ şi $s = 0$ reprezintă singura soluţie a sistemului de ecuaţii. Dacă înlocuim $s = 0$, de exemplu, în ecuaţiile celei de-a doua drepte, găsim punctul de intersecţie $A(1, 1, 1)$. □

Problema 5.17. Pentru ce valoare a parametrului m dreapta $x = -1 + 3t, y = 2 + mt, z = -3 - 2t$ nu are puncte comune cu planul $x + 3y + 3z - 2 = 0$?

Soluţie. Dacă dreapta ar afea puncte comune cu planul, atunci aceste puncte ar trebui să verifice atât ecuaţiile dreptei, cât şi ecuaţia planului. Astfel, ele se obţin înlocuind x, y şi z din ecuaţiile parametrice ale dreptei în ecuaţia planului. Obţinem

$$-1 + 3t + 3(2 + mt) + 3(-3 - 2t) - 2 = 0$$

sau, grupând după t,

$$t(3m - 3t) - 6 = 0$$

sau

$$(m - 1)t - 2 = 0.$$

Noi vrem ca această ecuaţie să *nu* aibă soluţie. În mod evident, asta se poate întâmpla doar dacă $m - 1$ (coeficientul lui t) se anulează, prin urmare, valoarea căutată a parametrului este $m = 1$. $\square$

SEMINARUL 6

Dreapta şi planul în spaţiu (II)

Problema 6.1. Pentru ce valori ale parametrilor reali a şi d dreapta

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{-2}$$

este situată în planul $ax + y - 2z + d = 0$?

Soluţie. Dreapta trebuie s ă fie paralelă cu planul şi un punct oaracare al său să aparţină planului. Dreapta este paralelă cu planul dacă vectorul său director $\mathbf{v}(3, 2, -2)$ este perpendicular pe vectorul normal la plan $\mathbf{n}(a, 1, -2)$. Aceasta se întâmplă dacă $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$, adică dacă

$$3a + 2 + 4 = 0,$$

de unde obţinem că $a = -2$. Prin urmare, ecuaţia planului este

$$-2x + y - 2z + d = 0.$$

Remarcăm că punctul $A(2, -1, 3)$ aparţine dreptei. Pentru ca el să aparţină şi planului, coordonatele sale trebuie să verifice ecuaţia planului, adică trebuie să avem

$$-4 - 1 - 6 + d = 0,$$

deci $d = 11$, iar ecuaţia finală a planului este

$$-2x + y - 2z + 11 = 0.$$

□

Problema 6.2. Pentru ce valori ale parametrilor reali a şi c dreapta

$$\begin{cases} 3x - 2y + z + 3 = 0 \\ 4x - 3y + 4z + 1 = 0 \end{cases}$$

este perpendiculară pe planul $ax + 8y + cz + 2 = 0$?

Soluţie. Dreapta este perpendiculară pe plan dacă şi numai dacă vectorul său director este coliniar cu vectorul normal la plan. Aşa cum am făcut şi în cazul altor probleme, determinăm un vector director al dreptei calculând produsul vectorial al vectorilor normali la cele două plane care determină dreapta. Găsim imediat $\mathbf{n}_1(3,-2,1)$ şi $\mathbf{n}_2(4,-3,4)$,

$$\mathbf{v} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & -3 & 4 \end{vmatrix} = (-5,-8,-1).$$

Pe de altă parte, vectorul normal la planul dat este $\mathbf{n}(a,8,c)$. Cei doi vectori sunt coliniari atunci când componentele lor sunt proporţionale, adică

$$\frac{a}{-5} = \frac{8}{-8} = \frac{c}{-1}$$

de unde rezultă că $a = 5$ şi $c = 1$. □

Problema 6.3. Stabiliţi ecuaţia planului care trece prin originea coordonatelor şi prin dreapta $x = 1 + 3t, y = -2 + 4t, z = 5 - 2t$.

Soluţie. Se observă imediat că punctul $A(1,-2,5)$ aparţine dreptei, iar vectorul director al dreptei este $\mathbf{v}(3,4,-2)$. Astfel, planul trece prin origine şi este paralel cu vectorii $\mathbf{v}$ şi $\overrightarrow{OA}(1,-2,5)$, deci ecuaţia sa este

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

sau

$$16x - 17y - 10z = 0.$$

□

Problema 6.4. Stabiliţi ecuaţiile parametrice ale dreptei care trece prin punctul $A(3,-2,-4)$, este paralelă cu planul $3x - 2y - 3z - 7 = 0$ şi intersectează dreapta $x = 2 + 3t, y = -4 - 2t, z = 1 + 2t$.

Problema 6.5. Determinaţi proiecţia ortogonală a punctului $A(2,11,-5)$ pe planul $x + 4y - 2z + 7 = 0$.

Soluţie. Proiecţia este piciorul perpendicularei coborâte din A pe plan sau, altfel spus, punctul de intersecţie dintre această perpendiculară şi plan.

Ecuaţiile dreptei se obţin foarte simplu, pentru că ea este dreapta care trece prin A şi are ca vector director vectorul normal la plan $\mathbf{n}(1,4,-2)$. Astfel, ecuaţiile parametrice ale perpendicularei sunt

$$\begin{cases} x = 2 + t, \\ y = 11 + 4t, \\ z = -5 - 2t. \end{cases}$$

Înlocuind în ecuaţia planului, obţinem

$$2 + t + 4(11 + 4t) - 2(-5 - 2t) + 7 = 0$$

sau

$$21t + 63 = 0,$$

adică $t = -3$. Înlocuind în ecuaţiile dreptei, rezultă $x = -1$, $y = -1$, $z = 1$, adică proiecţia punctului A este punctul $A_1(-1,-1,1)$. □

Problema 6.6. Determinaţi simetricul punctului $P(6,-5,5)$ relativ la planul $2x-3y+z-4=0$.

Soluţie. Ideea soluţiei este să determinăm, mai întâi, ca în problema precedentă, proiecţia P_1 a punctului P pe plan. Atunci simetricul P' al lui P faţă de plan are proprietatea că P_1 este mijlocul segmentului PP', deci coordonatele lui P_1 sunt mediile aritmetice ale coordonatelor analoage ale lui P şi P'.

Vectorul director al dreptei PP_1, care este perpendiculară pe plan şi trece prin punctul P, este vectorul normal la plan, $\mathbf{n}(2,-3,1)$, deci ecuaţiile sale parametrice sunt

$$\begin{cases} x=6+2t,\\ y=-5-3t,\\ z=5+t. \end{cases}$$

Înlocuind aceste relaţii în ecuaţia planului, obţinem

$$2(6+2t)-3(-5-3t)+5+t-4=0$$

sau

$$14t+28=0,$$

deci $t=-2$. Întorcându-ne la ecuaţiile parametrice ale dreptei, obţinem coordonatele lui P_1: $x_1=2$, $y_1=1$, $z_1=3$.

După cum am spus mai sus, P_1 este mijlocul segmentului PP', deci, pentru prima coordonată obţinem

$$x_1=\frac{x_P+x_{P'}}{2},$$

de unde

$$x_{P'}=2x_1-x_P=-2.$$

Analog obţinem

$$y_{P'}=2y_1-y_P=7$$

şi

$$z_{P'}=2z_1-z_P=1.$$

Astfel, simetricul punctului P este punctul $P'(-2,7,1)$. □

Problema 6.7. Determinaţi simetricul punctului $Q(4,-5,4)$ relativ la planul care trece prin dreptele

$$\begin{cases} x+y+z-3=0,\\ x-y+z-1=0 \end{cases}$$

şi

$$\begin{cases} x+z=0,\\ y=0 \end{cases}.$$

Soluţie. Nu este clar dinainte că cele două drepte determină un plan. Asta se întâmplă doar dacă cele două drepte sunt paralele şi distincte sau sunt concurente. Dreptele ar putea să fie egale sau strâmbe în spaţiu.

Este clar imediat că dreptele nu sunt concurente, deoarece sistemul format de ecuaţiile celor două drepte este incompatibil (dacă adunăm ecuaţiile primei drepte, obţinem că $x+z=4$, dar din prima ecuaţie a celei de-a doua avem $x+z=0$). Aşadar, dreptele sunt fie paralele şi distincte, fie strâmbe (necoplanare).

Determinăm vectorii directori ai celor două drepte. Vectorii normali la planele care determină prima dreaptă sunt $\mathbf{n}_{11}(1,1,1)$ şi $\mathbf{n}_{12}(1,-1,1)$, aşadar produsul lor vectorial este

$$\mathbf{n}_{11}\times\mathbf{n}_{12}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}=(2,0,-2).$$

Astfel, pentru prima dreaptă, putem lua ca vector director vectorul $\mathbf{v}_1(1,0,-1)$.

Vectorii normali la planele care determină cea de-a doua dreaptă sunt $\mathbf{n}_{21}=\mathbf{i}+\mathbf{k}$ şi $\mathbf{n}_{22}=\mathbf{j}$. De aceea,

$$\mathbf{n}_{21}\times\mathbf{n}_{22}=(\mathbf{i}+\mathbf{k})\times\mathbf{j}=\mathbf{i}-\mathbf{k}=(1,0,-1)=\mathbf{v}_1.$$

Aşadar, $\mathbf{v}_1$ este vector director şi pentru cea de-a doua dreaptă, ceea ce înseamnă că dreptele sunt paralele. □

Problema 6.8. Verificaţi că dreapta $x=8+5t, y=1+2t, z=6+4t$ se intersectează cu dreapta $x=11+3s, y=2+s, z=4-2s$ şi stabiliţi ecuaţia planului determinat de ele.

Soluţie. Pentru ca cele două drepte să se intersecteze, trebuie să existe un t şi un s astfel încât să fie verificat sistemul

$$\begin{cases}8+5t=11+3s,\\ 1+2t=2+s,\\ 6+4t=4-2s.\end{cases}$$

Estre uşor de verificat că sistemul este compatibil determinat şi are soluţia $t=0, s=-1$, ceea ce ne conduce la punctul de intersecţie $A(8,1,6)$.

O altămodalitate de a stabili că două drepte sunt concurente este să verificăm că cele două drepte nu sunt paralele (vectorii directori ai celor două drepte nu sunt coliniari), dar cei doi vectori directori, impreuna cu vectorul determinat de un punct de pe o dreaptă şi unul de pe cealaltă dreaptă, formează un triplet liniar dependent (adică sunt coplanari). Astfel, fie $\mathbf{v}_1$ şi $\mathbf{v}_2$ vectorii directori, M_1 un punct de pe prima dreaptă şi M_2 un punct de pe a doua dreaptă. Atunci condiţia de coplanaritate se scrie

$$\left(\overrightarrow{M_1M_2},\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2\right)=0$$

sau

$$\begin{vmatrix}x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ l_1 & m_1 & n_1\\ l_2 & m_2 & n_2\end{vmatrix}=0.$$

În cazul nostru concret, $\mathbf{v}_1=(5,2,4)$, $\mathbf{v}_2=(3,1,-2)$. Alegem pe prima dreaptă punctul $M_1(3,-1,2)$ (corespunzător lui $t=-1$), iar pe dreapta a doua punctul $M_2(11,2,4)$ (corespunzător lui $s=0$). Atunci determinantul de mai sus se scrie

$$\begin{vmatrix}8 & 3 & 2\\ 5 & 2 & 4\\ 3 & 1 & -2\end{vmatrix}=-64+66-2=0.$$

De remarcat că dreptele nu sunt paralele, ceea ce înseamnă că ele (f)iind şi coplanare) determină un plan. Ecuaţia planului se poate scrie sub forma ecuaţiei planuului determinat de un punct (să zicem, punctul A) şi doi vectori necoliniari:

$$\begin{vmatrix}x-8 & y-1 & z-6\\ 5 & 2 & 4\\ 3 & 1 & -2\end{vmatrix}=0$$

sau
$$-8(x-8)+22(y-1)-z+6=0$$
sau, în fine,
$$8x-22y+z-48=0.$$
□

Problema 6.9. Determinaţi ecuaţia planului care trece prin punctul $A(1,2,-2)$ şi este perpendicular pe dreapta
$$\frac{x+3}{4}=\frac{y-6}{-6}=\frac{z-3}{2}.$$

Soluţie. Faptul că planul este perpendicular pe dreaptă înseamnă că vectorul normal la plan este chiar vectorul director al dreptei. Aşadar, ecuaţia planului este
$$4(x-1)-6(y-2)+2(z+2)=0$$
sau
$$4x-6y+2z+12=0.$$
□

Problema 6.10. Determinaţi simetricul punctului $P(-3,1,-2)$ relativ la dreapta
$$\begin{cases}4x-3y-13=0,\\ y-2z+5=0\end{cases}.$$

Soluţie. Algoritmul este similar cu cel aplicat în cazul simetriei faţă de un plan. Paşii sunt următorii:

- ducem o perpendiculară pe dreapta dată care trece prin punctul dat;
- punctul de intersecţie a dreptelor de la punctul precedent este *proiecţia* punctului pe dreapta dată;
- ca şi în cazul simetriei faţă de un plan, simetriocul se obţine punând condiţia ca proiecţia să fie mijlocul segmentului determinat de punct şi simetricul său.

Pentru a construi o dreaptă care trece prin P şi este perpendiculară pe dreapta dată, intersectăm două plane: unul care trece prin dreapta dată şi prin punct şi unul care trece prin punct şi este perpendicular pe dreapta dată.

Pentru determinarea primului plan, folosim teoria fascicolelor de plane. Un plan oarecare care trece prin dreaptă este de forma
$$\lambda(4x-3y-13)+\mu(y-2z+5)=0.$$
Dacă punem condiţia ca punctul P să aparţină planului, obţinem
$$(-12-3-13)\lambda+(1+4+5)\mu=0$$
sau
$$-14\lambda+5\mu=0,$$
de unde
$$\mu=\frac{14}{5}\lambda.$$
Unul dintre cei doi parametrii este arbitrar, deci putem pune $\lambda=5$ şi obţinem $\mu=14$. Astfel, ecuaţia primului plan este
$$5(4x-3y-13)+14(y-2z+5)=0$$

sau

$$\pi_1 : 20x - y - 28z + 5 = 0.$$

Aşa cum am spus, al doilea plan trece prin punctul P şi este perpendicular pe dreapta dată, prin urmare vectorul său normal este vectorul director al dreptei. Pentru a determina un astfel de vector director, calculăm produsul vectorial al celor doi vectori normali la planele care definesc dreapta, $\mathbf{n}_1(4, -3, 0)$ şi $\mathbf{n}_2(0, 1, -2)$. Avem:

$$\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (6, 8, 4),$$

deci putem lua ca vector director vectorul $\mathbf{v}(3, 4, 2)$. Acest vector este, în acelaşi timp, vector normal la planul π_2 pe care îl căutăm, deci avem

$$\pi_2 : 3(x + 3) + 4(y - 1) + 2(z + 3) = 0$$

sau

$$\pi_2 : 3x + 4y + 2z + 11 = 0.$$

Astfel, ecuaţiile dreptei care trece prin P şi este perpendiculară pe dreapta dată sunt

$$\Delta : \begin{cases} 20x - y - 28z + 5 = 0, \\ 3x + 4y + 2z + 11 = 0. \end{cases}$$

Pentru a determina proiecţia P_1 a punctului P pe dreapta dată, trebuie să intersectăm această dreaptă cu dreapta Δ, ceea ce înseamnă că coordonatele lui P_1 sunt date de soluţia sistemului

$$\begin{cases} 4x - 3y - 13 = 0, \\ y - 2z + 5 = 0, \\ 20x - y - 28z + 5 = 0, \\ 3x + 4y + 2z + 11 = 0. \end{cases}$$

Se obţine $P_1\left(\frac{17}{29}, -\frac{103}{29}, \frac{21}{29}\right)$.

Cum

$$x_{P_1} = \frac{x_P + x_{P'}}{2},$$

obţinem

$$x_{P'} = 2x_{P_1} - x_P = \frac{34}{29} + 3 = \frac{121}{29}.$$

Analog,

$$y_{P'} = 2y_{P_1} - y_P = -\frac{206}{29} - 1 = -\frac{235}{29}$$

şi

$$z_{P'} = 2z_{P_1} - z_P = \frac{42}{29} + 2 = \frac{100}{29}.$$

Astfel, simetricul lui P faţă de dreapta dată este punctul $P'\left(\frac{121}{29}, -\frac{235}{29}, \frac{100}{29}\right)$. □

Problema 6.11. Stabiliţi ecuaţiile dreptei care trece prin punctul de intersecţie dintre planul $x + y + z - 1 = 0$ şi dreapta $x = t, y = 1, z = -1$, aparţine planului dat şi este perpendiculară pe dreapta dată.

Soluţie. Determinăm, mai întâi, punctul de intersecţie dintre dreaptă şi plan. Dacă înlocuim ecuaţiile parametrice ale dreptei în ecuaţia planului, obţinem

$$t + 1 - 1 - 1 = 0,$$

deci $t = 1$, adică punctul de intersecţie este $A(1, 1, -1)$. Vectorul normal al planului este $\mathbf{n}(1, 1, 1)$, în timp ce vectorul director al dreptei date este, după cum se observă imediat, $\mathbf{v}(1, 0, 0)$. Fie $\mathbf{v}_1(l, m, n)$ vectorul director al dreptei căutate. Pentru ca el să verifice condiţiile din enunţ, trebuie să avem $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n} = 0$ ş $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v} = 0$, deci componentele sale trebuie să verifice sistemul

$$\begin{cases} l = 0 \\ l + m + n = 0. \end{cases}$$

Prin urmare, $\mathbf{v}_1 = (0, m, -m)$. Pentru m putem lua orice valoare reală nenulă, deci putem considera că $\mathbf{v}_1 = (0, 1, -1)$. Cum dreapta trece prin punctul A, ecuaţiile sale (canonice) sunt

$$\frac{x-1}{0} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{-1}.$$

□

Problema 6.12. Determinaţi ecuaţiile perpendicularei comune a dreptelor

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{2}$$

şi $x = -1 + 3t, y = 2 + 2t, z = 1$.

Soluţie. Perpendiculara comună a două drepte se obţine ca intersecţie a două plane: unul care trece prin prima dreaptă şi este perpendicular pe a doua dreaptă şi unul care trece prin a doua dreaptă şi este perpendicular pe prima dreaptă. Vom folosi, pentru scrieirea ecuaţiilor celor două plane formula pentru ecuaţia unui plan care trece printr-un punct dat şi este paralel cu doi vectori daţi. În fiecare caz este vorba despre un punct de pe dreapta respectivă, vectorul său director şi un vector perpendicular pe acea dreaptă. Vectorul perpendicular va fi, în ambele cazuri, acelaşi vector: vectorul director al perpendicularei comune, care este, în fapt, produsul vectorial al vectorilor directori ai celor două drepte.

Vectorul director al primei drepte este $\mathbf{v}_1(3, -2, 2)$, iar un punct de pe prima dreaptă este $M_1(2, -1, 0)$. De asemenea, pentru a doua dreaptă, vectorul director este $\mathbf{v}_2(3, 2, 0)$, iar un punct de pe ea este $M_2(-1, 2, 1)$.

Vectorul director al perpendicularei comune este

$$\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (-4, 6, 12)$$

sau, dacă împărţim cu 2, $\mathbf{v}(-2, 3, 6)$. Prin urmare, primul plan va avea ecuaţia

$$\pi_1 : \begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z \\ 3 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

sau

$$\pi_1 : -18(x-2) - 22(y+1) + 5z = 0$$

sau, încă,

$$\pi_1 : 18x + 22y - 5z - 14 = 0.$$

Al doilea plan va avea ecuaţia

$$\pi_2 : \begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z-1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

sau

$$\pi_2 : 12(x+1) - 18(y-2) + 13(z-1) = 0$$

sau, în fine,

$$\pi_2 : 12x - 18y + 13z + 35 = 0.$$

Astfel, ecuaţiile perpendicularei comune a celor două drepte sunt:

$$\begin{cases} 18x + 22y - 5z - 14 = 0, \\ 12x - 18y + 13z + 35 = 0. \end{cases}$$

□

Problema 6.13. Stabiliţi poziţia relativă a planelor:

a) $\begin{cases} 2x - 5y + 3z - 7 = 0, \\ x + 4y - 2z - 7 = 0, \\ x - 22y + 12z - 9 = 0. \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - 4y + 4z - 7 = 0, \\ x + 3y + 2z - 5 = 0, \\ -3x + 6y - 6z - 5 = 0. \end{cases}$

c) $\begin{cases} -x - y + z - 3 = 0, \\ 2x + y - 3z + 12 = 0, \\ x + 3y + z - 9 = 0. \end{cases}$

Răspunsuri. a) Planele formează o prismă. b) Două plane sunt paralele şi îl taie pe al treilea. c) Planele formează un fascicol. □

Problema 6.14. Stabiliţi dacă dreptele (d_1) şi (d_2) sunt strâmbe şi, în caz afirmativ, scrieţi ecuaţiile perpendicularei comune şi calculaţi lungimea sa.

a) $(d_1) \begin{cases} x - y + z + 1 = 0, \\ 2x - y - z + 2 = 0 \end{cases}$ şi $(d_2) \begin{cases} 3x + y + z = 0, \\ x + y - 2z - 1 = 0. \end{cases}$

b) $(d_1) \begin{cases} 3x - 2y - 1 = 0, \\ y + 3z - 7 = 0 \end{cases}$ şi $(d_2) \begin{cases} 2x - 3y + 6 = 0, \\ x + z - 4 = 0. \end{cases}$

Soluţie. a) Vom aduce mai întîi ecuaţiile celor două drepte la forma canonică. Începem cu prima dreaptă. Vectorii normali la cele două plane care o definesc sunt $\mathbf{n}_{11}(1, -1, 1)$, respectiv $\mathbf{n}_{12}(2, -1, -1)$, deci un vector director al dreptei este

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{n}_{11} \times \mathbf{n}_{12} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (2, 3, 1).$$

Se observă imediat că $M_1(-1,0,0)$ este un punct de pe această dreaptă. Prin urmare, ecuaţiile canonice ale primei drepte sunt

$$(\Delta_1):\ \frac{x+1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{1}$$

Pentru a doua dreaptă, un vector director se calculează înmulţind vectorial vectorii normali $\mathbf{n}_{21}(3,1,1)$ şi $\mathbf{n}_{22}(1,1,-2)$ la planele care formează dreapta:

$$\mathbf{v}_2=\mathbf{n}_{21}\times\mathbf{n}_{22}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 3 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -2\end{vmatrix}=(-3,7,2).$$

Se observă (rezolvând sistemul de ecuaţii) că punctul $M_2(-2,5,1)$ este un punct de pe a doua dreaptă, deci ecuaţiile sale canonice se pot scrie

$$(\Delta_2):\ \frac{x+2}{-3}=\frac{y-5}{7}=\frac{z-1}{2}.$$

După cum ştim, dreptele sunt coplanare dacă şi numai dacă determinantul

$$\delta=\begin{vmatrix}x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ l_1 & m_1 & n_1\\ l_2 & m_2 & n_2\end{vmatrix}$$

se anulează.

În cazul nostru concret,

$$\delta=\begin{vmatrix}-1 & 5 & 1\\ 2 & 3 & 1\\ -3 & 7 & 2\end{vmatrix}=-11\neq 0,$$

deci cele două drepte sunt necoplanare (strâmbe).

Mai departe procedăm ca şi în cazul unei probleme rezolvate mai devreme. Calculăm, mai întâi vectorul director al perpendicularei comune

$$\mathbf{v}=\mathbf{v}_1\times\mathbf{v}_2=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 2 & 3 & 1\\ -3 & 7 & 2\end{vmatrix}=(-1,-7,23).$$

Scriem acum ecuaţia planului care trece prin prima dreaptă şi este perpendicular pe a doua dreaptă

$$\begin{vmatrix}x-x_1 & y-y_1 & z-z_1\\ l_1 & m_1 & n_1\\ l & m & n\end{vmatrix}=0,$$

adică

$$\begin{vmatrix}x+1 & y & z\\ 2 & 3 & 1\\ -1 & -7 & 23\end{vmatrix}=0$$

sau

$$76(x+1)-47y-11z=0$$

sau, în fine,

$$\pi_1:\ 76x-47y-11z+76=0.$$

Analog, ecuaţia celui de-al doilea plan, care trece prin a doua dreaptă şi este perpendicular pe prima dreaptă va avea ecuaţia

$$\begin{vmatrix}x+2 & y-5 & z-1\\ -3 & 7 & 2\\ -1 & -7 & 23\end{vmatrix}=0$$

sau

$$175(x+2)+67(y-5)+28(z-1)=0$$

sau, în fine,

$$\pi_2:\ 175x+67y+28z-13=0.$$

Astfel, ecuaţiile perpendicularei comune sunt

$$\begin{cases}76x-47y-11z+76=0,\\175x+67y+28z-13=0.\end{cases}$$

În fine, lungimea perpendicularei comune (distanţa dintre cele două drepte necoplanare) este

$$d=\frac{|\delta|}{\|\mathbf{v}_1\times\mathbf{v}_2\|}=\frac{11}{\sqrt{1+49+529}}=\frac{11}{\sqrt{579}}.$$

b) Se rezolvă analog cu punctul a). □

Problema 6.15. Determinaţi distanţa de la punctul $P(2,3,-1)$ la dreapta de ecuaţie

$$\frac{x-5}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z+25}{-2}.$$

Soluţie. Punctul $A(5,0,-25)$ aparţine dreptei, iar vectorul $\mathbf{v}(3,2,-2)$. Distanţa de la punct la dreaptă este

$$d=\frac{\|\overrightarrow{AP}\times\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|}$$

Avem $\overrightarrow{AP}=(-3,3,24)$, deci

$$\overrightarrow{AP}\times\mathbf{v}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\-3&3&24\\3&2&-2\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\-1&1&8\\3&2&-2\end{vmatrix}=3(-18,22,5),$$

deci

$$\|\overrightarrow{AP}\times\mathbf{v}\|=3\sqrt{324+484+25}=21\sqrt{17},$$

în timp ce $\|\mathbf{v}\|=\sqrt{17}$, deci

$$d=\frac{21\sqrt{17}}{\sqrt{17}}=21.$$

□

Problema 6.16. Determinaţi ecuaţiile planelor care trec prin punctele $P(0,2,0)$ şi $Q(-1,0,0)$ şi care formează un unghi de 60° cu axa Oz.

Soluţie. Scriem, mai întâi, ecuaţiile canonice ale dreptei QP. Ea va avea vectorul director $\overrightarrow{QP}(2,1)$, deci ecuaţiile sale vor fi

$$\frac{x+1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z}{0},$$

deci ecuaţiile dreptei ca intersecţie de două plane se poate scrie

$$\begin{cases}x-2y+1=0,\\z=0.\end{cases}$$

Vom folosi teoria fascicolelor de plane. Un plan poarecare ce trece prin dreapta QP se poate scrie sub forma

$$\lambda(x - 2y + 1) + \mu z = 0$$

sau

$$\lambda x - 2\lambda y + \mu z + \lambda = 0.$$

Vectorul normal la acest plan este $\mathbf{n}(\lambda, -2\lambda, \mu)$. Planul formează un unghi de 60° cu axa Oz dacă acest vector formează un unghi de 60° cu vectorul $\mathbf{k}$. Avem, prin urmare, relaţia

$$\frac{1}{2} = \frac{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}|}{\|\mathbf{n}\| \cdot \|\mathbf{k}\|} = \frac{|\mu|}{\sqrt{5\lambda^2 + \mu^2}},$$

de unde

$$5\lambda^2 = 3\mu^2,$$

deci

$$\mu = \pm\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}\lambda.$$

Dacă alegem semnul "+" şi alegem $\lambda = \sqrt{3}$, atunci $\mu = \sqrt{5}$ şi obţinem planul

$$\sqrt{3}x - 2\sqrt{3}y + \sqrt{5}z + \sqrt{3} = 0.$$

Dacă alegem semnul "-" şi alegem $\lambda = \sqrt{3}$, atunci $\mu = -\sqrt{5}$ şi obţinem planul

$$\sqrt{3}x - 2\sqrt{3}y - \sqrt{5}z + \sqrt{3} = 0.$$

□

Problema 6.17. Determinaţi distanţa dintre dreptele paralele

$$\frac{x+3}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-8}{-2} \quad \text{şi} \quad \begin{cases} x = -1 + 3t, \\ y = -1 + 2t, \\ z = -2 - 2t. \end{cases}$$

Soluţie. Distanţa dintre două drepte paralele în spaţiu este, ca şi în cazul dreptelor în plan, sistanţa de la un punct oarecare de pe una dintre drepte până la cealaltă dreaptă. Un punct de pe prima dreaptă este $A(-3, -2, 8)$, în timp ce un punct de pe cea de-a doua dreaptă este $B(-1, -1, -2)$. Vectorul director al celor două drepte este $\mathbf{v}(3, 2, -2)$. Astfel, distanţa este dată de

$$d = \frac{\|\overrightarrow{AB} \times \mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|}.$$

Pe de altă parte, $\overrightarrow{AB} = (2, 1, -10)$, deci

$$\overrightarrow{AB} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 1 & -10 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = (18, -26, 1).$$

Astfel

$$d = \sqrt{\frac{1001}{17}}.$$

□

SEMINARUL 7

Secţiuni conice

7.1 Elipsa

Problema 7.1. Stabiliţi ecuaţia unei elipse ale cărei focare se află pe axa Oy şi sunt simetrice faţă de origine în fiecare dintre următoarele situaţii:

1) semiaxele sunt egale, respectiv, cu 5 şi 3;

2) distanţa dintre focare este $2c = 6$, iar axa mare este egală cu 10;

3) axa mare este egală cu 26, iar excentricitatea este $\varepsilon = \frac{12}{13}$.

Soluţie. 1) ecuaţia este

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

2) Avem $c = 3$. Dar $3 = c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25 - b^2}$, de unde rezultâ că $b^2 = 16$, adică $b = 4$. Ecuaţia elipsei va fi, deci,

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

3) Avem $a = 13$,

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \frac{1}{13}\sqrt{169 - b^2} = \frac{12}{13}.$$

De aici deducem imediat că $b = 5$, deci ecuaţia elipsei este

$$\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1.$$

□

Problema 7.2. Scrieţi ecuaţiile tangentelor la elipsa

$$\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{5} = 1$$

care sunt paralele cu dreapta

$$3x + 2y + 7 = 0.$$

Prima soluţie. Scriem ecuaţia tangentei prin dedublare. Fie $M_0(x_0, y_0)$ un punct de pe elipsă. Ecuaţia tangentei în M_0 este

$$\frac{xx_0}{10} + \frac{yy_0}{5} = 1.$$

Tangenta este paralelă cu dreapta dată dacă şi numai dacă vectorii normali la cele două drepte sunt paraleli, adică avem

$$\frac{\frac{x_0}{10}}{3} = \frac{\frac{y_0}{5}}{2}$$

sau

$$x_0 = 3y_0.$$

Pe de altă parte, punctul M_0 este pe elipsă, deci avem

$$\frac{x_0^2}{10} + \frac{y_0^2}{5} = 1.$$

Suntem, astfel, conduşi la sistemul

$$\begin{cases} x_0 = 3y_0, \\ \dfrac{x_0^2}{10} + \dfrac{y_0^2}{5} = 1. \end{cases}$$

Dacă înlocuim prima ecuaţie în a doua, obţinem ecuaţia de gradul al doilea

$$11y_0^2 = 10,$$

ceea ce înseamnă că cele două soluţii ale sistemului sunt coordonatele punctelor (de pe elipsă!) $M_{01}\left(3\sqrt{\frac{10}{11}}, \sqrt{\frac{10}{11}}\right)$ şi $M_{02}\left(-3\sqrt{\frac{10}{11}}, -\sqrt{\frac{10}{11}}\right)$. Dacă înlocuim coordonatele celor două puncte de contact în ecuaţia tangentei prin dedublare, obţinem, după un calcul simplu, ecuaţiile celor două tangente paralele cu dreapta dată:

$$3x + 2y \pm \sqrt{110} = 0.$$

□

Soluţia a doua. Se ştie (vezi cursul) că tangentele la elipsa de semiaxe a şi b, paralele cu o dreaptâ de pantă k au ecuaţiile

$$y = kx \pm \sqrt{a^2k^2 + b^2}.$$

În cazul nostru, în mod evident, panta este $k = -3/2$, semiaxa mare este $a = \sqrt{10}$, iar semiaxa mică este $b = \sqrt{5}$. Prin urmare, ecuaţiile celor două tangente paralele cu dreapta dată vor fi

$$y = -\frac{3}{2}x \pm \sqrt{10 \cdot \frac{9}{4} + 5}$$

sau

$$3x + 2y \pm \sqrt{110} = 0,$$

adică tocmai ecuaţiile pe care le-am obţinut mai sus, prin medoda dedublării. □

Observaţie. Deşi ambele metode utilizate sunt corecte, dacă nu ni se cere să determinăm şi punctele de contact, cea de-a doua medodă este, fireşte, mult mai economică şi o vom folosi întotdeauna pentru rezolvarea unor probleme de acest tip.

Problema 7.3. Scrieţi ecuaţiile tangentelor la elipsa

$$x^2 + 4y^2 = 20$$

care sunt perpendiculare pe dreapta

$$(d) : 2x - 2y - 13 = 0.$$

Soluţie. Ecuaţia canonică a elipsei este, în mod evident,

$$\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1,$$

deci $a^2 = 20$, $b^2 = 5$. Panta dreptei d este egală cu 1. Cum tangentele trebuie să fie perpendiculare pe dreaptă, înseamnă că panta lor trebuie să fie egală cu -1, aşadar ele două tangente vor avea ecuaţiile

$$y = -x \pm \sqrt{20 \cdot 1 + 5}$$

sau

$$x + y \pm 5 = 0.$$

□

Problema 7.4. Scrieţi ecuaţiile tangentelor la elipsa

$$\frac{x^2}{30} + \frac{y^2}{24} = 1$$

care sunt paralele cu dreapta

$$4x - 2y + 23 = 0$$

şi determinaţi distanţa dintre ele.

Soluţie. Avem $a^2 = 30$, $b^2 = 24$. Panta dreptei (care coincide cu panta tangentelor) este egalâ cu 2. Prin urmare, ecuaţiile celor două drepte paralele cu dreapta dată vor fi

$$y = 2x \pm \sqrt{30 \cdot 4 + 24}$$

sau

$$2x - y \pm 12 = 0.$$

Fie, acum, t_1 şi t_2 cele două tangente:

$$t_1 : 2x - y + 12 = 0,$$

$$t_2 : 2x - y - 12 = 0.$$

Avem două posibilităţi de a determina distanţa dintre cele două drepte (paralele!):

- Determinăm un punct M_1 de pe dreapta t_1 şi apoi calculăm distanţa de la acest punct până la dreapta t_2. Dacă, de exemplu, punem, în ecuaţia dreptei t_1, $x = 0$, obţinem $y = 12$, deci găsim punctul $M_1(0, 12)$. Atunci

$$d(M_1, t_2) = \frac{|2 * 0 - 12 - 12|}{\sqrt{4+1}} = \frac{24}{\sqrt{5}}.$$

- Scriem ecuaţiile celor două tangente sun forma normală (Hesse). Atunci termenii liberi (cu semn schimbat) vor reprezenta distanţele de la origine până la tangente, prin urmare, distanţa dintre cele două tangente este suma distanţelor de la origine până la ele, dacă ele nu sunt de aceeaşi parte a originii (adică originea se află între ele) sau modulul diferenţei distanţelor de la origine la tangente, dacă ele se află de aceeaşi parte a originii.

  Avem
$$t_1 : -\frac{2}{\sqrt{5}}x + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{12}{\sqrt{5}} = 0,$$
$$t_2 : \frac{2}{\sqrt{5}}x - \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{12}{\sqrt{5}} = 0.$$

  În mod clar, tangentele nu se află de aceeaşi parte a originii, deci avem
$$d(t_1, t_2) = \frac{12}{\sqrt{5}} + \frac{12}{\sqrt{5}} = \frac{24}{\sqrt{5}}.$$

□

Problema 7.5. Din punctul $A\left(\frac{10}{3}, \frac{5}{3}\right)$ se duc tangente la elipsa
$$\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{5} = 1.$$
Scrieţi ecuaţiile lor.

Soluţie. Un calcul simplu ne arată că A este exterior elipsei, deci punem, într-adevăr, duce *două* tangente din A la elipsă. Constăm, de asemenea, că A nu se află pe o dreaptă verticală care să treacă prinrt-unul dintre capetele axei mari (orizontale) a elipsei, deci nici una dintre tangente nu va fi verticalâ.

Considerăm acum o tangentă la elipsă de pantă k (care urmează a fi determinată). După cum se ştie, o astfel de tangentă va avea ecuaţia
$$y = kx \pm \sqrt{a^2k^2 + b^2}$$
sau, în cazul nostru concret,
$$y - kx = \pm\sqrt{10k^2 + 5}. \tag{7.1.1}$$
Dacă ridicăm la pătrat ecuaţia (7.1.1), obţinem
$$y^2 - 2kxy + k^2x^2 = 10k^2 + 5.$$
Dacă punem condiţia ca tangenta să treacă prin A, ecuaţia de mai sus devine:
$$\frac{25}{9} - 2 \cdot \frac{50}{9}k + \frac{100}{9}k^2 = 10k^2 + 5,$$
ceea ce ne conduce la ecuaţia în k
$$k^2 - 10k - 2 = 0, \tag{7.1.2}$$
ale cărei soluţii sunt
$$k_1 = 5 + 3\sqrt{3} \quad \text{şi} \quad k_2 = 5 - 3\sqrt{3}.$$
Aşadar, ecuaţia primei tangente este
$$y - \frac{5}{3} = (5 + 3\sqrt{3})\left(x - \frac{10}{3}\right),$$
iar ecuaţia celei de-a doua tangente este
$$y - \frac{5}{3} = (5 - 3\sqrt{3})\left(x - \frac{10}{3}\right),$$

□

Problema 7.6. Din punctul $C\,(10,-8)$ se duc tangente la elipsa

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1.$$

Determinaţi ecuaţia coardei care uneşte punctele de contact.

Soluţie. Întrucât, de data aceasta, nu ni se cer ecuaţiile tangentelor ci punctele de contact, procedăm altfel decât în cazul problemei precedente. Remarcăm, şi de data aceasta, că punctul C este situat în afara elipsei şi nu este situat pe una dintre tangentele verticale la aceasta.

Rescriem, mai întâi, ecuaţia elipsei sub forma

$$16x^2+25y^2-400=0.$$

Tangenta într-un punct oarecare $M_0(x_0,y_0)$ al elipsei se scrie sub forma

$$16xx_0+25yy_0-400=0.$$

Cum tangenta trebuie să treacă prin punctul C, coordonatele acestui punct trebuie să verifice ecuaţia tangentei, prin urmare avem

$$160x_0-200y_0-400=0$$

sau

$$4x_0-5y_0-10=0. \tag{7.1.3}$$

Noi vrem să determinâm coordonatele punctului M_0, prin urmare avem nevoie de încă o ecuaţie. Aceasta rezultă din faptul că punctul se află pe elipsă, deci coordonatele sale verifică ecuaţia elipsei. Suntem conduşi, aşadar, la sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases}16x_0^2+25y_0^2-400=0,\\ 4x_0-5y_0-10=0.\end{cases} \tag{7.1.4}$$

Sistemul (7.1.4) este uşor de rzolvat şi ne conduce la soluţiile

$$x_{01,2}=\frac{5}{4}\left(1\pm\sqrt{7}\right) \quad \text{şi} \quad y_{01,2}=-1\pm\sqrt{7}.$$

Aşadar punctele de intersecţie cu elipsa a celor două tangente din C sunt

$$M_1\left(\frac{5}{4}\left(1-\sqrt{7}\right),-1+\sqrt{7}\right) \quad \text{şi} \quad M_2\left(\frac{5}{4}\left(1-\sqrt{7}\right),-1-\sqrt{7}\right).$$

Dreapta determinată de punctele de contact este dreapta M_1M_2:

$$\frac{x-\frac{5}{4}\,(1+\sqrt{7})}{\frac{5}{4}\,(1-\sqrt{7})-\frac{5}{4}\,(1+\sqrt{7})}=\frac{y-(-1+\sqrt{7})}{-1-\sqrt{7}-(-1+\sqrt{7})}$$

sau

$$\frac{x-\frac{5}{4}\,(1+\sqrt{7})}{\frac{5}{2}}=\frac{y-(-1+\sqrt{7})}{2},$$

de unde

$$2x-\frac{5}{2}\left(1+\sqrt{7}\right)=\frac{5}{2}y-\frac{5}{2}\left(-1+\sqrt{7}\right)$$

sau
$$2x - \frac{5}{2}y - 5 = 0$$
sau, în fine,
$$M_1M_2 : 4x - 5y - 10 = 0.$$

□

Problema 7.7. O elipsă trece prin punctul $A(4, -1)$ şi este tangentă dreptei $x+4y-10 = 0$. Determinaţi ecuaţia elipsei, ştiind că axele sale coincid cu axele de coordonate.

Soluţie. Ecuaţia elipsei este
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$
sau
$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2. \tag{7.1.5}$$
Ceea ce trebuie să facem este să determinăm semiaxele (sau, ceea ce este acelaşi lucru, pătratele lor). Avem nevoie, deci, de două ecuaţii. Prima o obţinem din condiţia ca punctul A să aparţină elipsei, adică
$$a^2 + 16b^2 = a^2b^2. \tag{7.1.6}$$
Întrucât dreapta dată este tangentă la elipsă, sistemul de ecuaţii care ne dă punctul de intersecţie dintre dreaptă şi elipsă trebuie să aibă soluţie dublă, deoarece contactul de tangenţă înseamnă că dreapta şi elipsa au două puncte comune confundate. Acest sistem de ecuaţii este
$$\begin{cases} b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2, \\ x + 4y - 10 = 0. \end{cases}$$
Dacă înlocuim pe x din a doua ecuaţie în prima (adică punem în prima ecuaţie $x = -2(2y-5)$), obţinem ecuaţia de gradul doi în y
$$\left(a^2 + 16vb^2\right) y^2 - 80b^2y + b^2(100 - a^2) = 0.$$
Pentru ca sistemul de mai sus să aibă soluţie dublă (mai precis, să furnizeze puncte de contact confundate), discriminantul ecuaţie de gradul doi în y trebuie să se anuleze, adică trebuie să avem
$$\Delta \equiv 4a^2b^2\left(a^2 + 16b^2 - 100\right) = 0.$$
Dar a şi b sunt semiaxele unei elipse, deci trebuie să fie numere reale strict pozitive, aşadar din condiţia de mai sus obţinem ecuaţia în a şi b
$$a^2 + 16b^2 = 100 \tag{7.1.7}$$
Aşadar, pentru a determina semiaxele elipsei care îndeplineşte cerinţele problemei, trebuie să rezolvăm sistemul de ecuaţii următor (pe care îl privim ca fiind un sistem în a^2 şi b^2):
$$\begin{cases} a^2 + 16b^2 = a^2b^2, \\ a^2 + 16b^2 = 100. \end{cases} \tag{7.1.8}$$
Sistemul (7.1.8) este foarte uşor de rezolvat şi ne conduce la soluţiile
$$a^2 = 80,\ b^2 = \frac{5}{4},$$
respectiv
$$a^2 = 20,\ b^2 = 5.$$

Ambele soluţii sunt acceptabile (în sensul că, în ambele situaţii, a^2 şi b^2 sunt numere strict pozitive) şi ne conduc la cele două soluţii ale problemei:

$$\frac{x^2}{80} + \frac{y^2}{\frac{5}{3}} = 1,$$

respectiv

$$\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1.$$

□

Problema 7.8. Determinaţi ecuaţia unei elipse ale cărei axe coincid cu axele de coordonate şi care este tangentă dreptelor $3x - 2y - 20 = 0$ şi $x + 6y - 20 = 0$.

Soluţie. Considerăm elipsa

$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0.$$

Pentru a determina elipsa, trebuie să determmminăm semieaxele lor, a şi b (sau, ceea ce este acelaşi lucru, pătratele lor). Vom stabili mai întâi o condiţie necesară şi suficientă ca o dreaptă dată prin ecuaţia generală

$$Ax + By + C = 0$$

să fie tangentă elipsei. După cum am mai văzut, această condiţie este echivalentă cu condiţia ca sistemul de ecuaţii care determină punctele de contact dintre elipsă şi dreaptă să aibă soluţie dublă. Este vorba despre sistemul

$$\begin{cases} b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0, \\ Ax + By + C = 0. \end{cases} \tag{7.1.9}$$

Să presupunem că, în a doua ecuaţie din sistemul (7.1.9), coeficientul B este nenul. Atunci putem scrie

$$y = -\frac{Ax + C}{B}$$

şin după înlocuirea în prima ecuaţie a sistemului, obţinem ecuaţia de gradul al doilea în x

$$\left(a^2A^2 + b^2B^2\right)x^2 + 2a^2ACx + a^2\left(C^2 - b^2B^2\right) = 0. \tag{7.1.10}$$

Condiţia pe care trebuie să o punem este ca discriminantul acestei ecuaţii de gradul al doilea să se anuleze. Un calcul simplu ne conduce la

$$\Delta = 4a^2b^2B^2\left(a^2A^2 + b^2B^2 - C^2\right). \tag{7.1.11}$$

Din relaţia (7.1.11) rezultă că Δ se anulează dacă şi numai dacă

$$a^2A^2 + b^2B^2 = C^2. \tag{7.1.12}$$

Exact aceeaşi condiţie se obţine şi dacă facem ipoteza că $A \neq 0$.ăţia (7.1.12) celor două drepte din enunţ şi obţinem, pentru a^2 şi b^2 sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} 9a^2 + 4b^2 = 400, \\ a^2 + 36b^2 = 400. \end{cases} \tag{7.1.13}$$

Sistemul (7.1.13) este liniar în a^2 şi b^2 şi rezolvarea lui ne conduce la $a^2 = 40, b^2 = 10$, adică elipsa căutată are ecuaţia

$$\frac{x^2}{40} + \frac{y^2}{10} = 1.$$

□

7.2 Hiperbola

Problema 7.9. Stabiliţi ecuaţia unei hiperbole ale cărei focare sunt situate pe axa Ox, simetric faţă de origine şi care satisface unul dintre următoarele seturi de condiţii suplimentare:

1) axele sunt date de $2a = 10$ şi $2b = 8$;

2) distanţa dintre focare este $2c = 6$, iar excentricitatea este $\varepsilon = \frac{3}{2}$;

3) ecuaţiile asimptotelor sunt
$$y = \pm\frac{4}{3}x,$$
iar distanţa dintre focare este $2c = 20$;

Soluţie. 1) Semiaxele sunt $a = 5$ şi $b = 4$, deci ecuaţia hiperbolei este
$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1.$$

2) Determinăm mai întâi semiaxele. Avem:
$$c = 3 = \sqrt{a^2 + b^2},$$
adicâ $a^2 + b^2 = 9$, iar excentricitatea fiind egală cu $3/2$, avem
$$\frac{3}{2} = \frac{c}{a} = \frac{3}{a},$$
de unde deducem că $a = 2$, prin urmare $b \equiv \sqrt{9 - a^2} = \sqrt{5}$. Aşadar, ecuaţia hiperbolei este
$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1.$$

3) Avem de rezolvat sistemul
$$\begin{cases} \dfrac{b}{a} = \dfrac{4}{3}, \\ \sqrt{a^2 + b^2} = 10. \end{cases}$$
Obţinem imediat că $a = 6, b = 8$, deci ecuaţia hiperbolei este
$$\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1.$$

□

Problema 7.10. Se dă hiperbola $16x^2 - 9y^2 = 144$. Să se determine:

1) semiaxele;

2) focarele;

3) ecuaţiile asimptotelor;

Soluţie. Scriem, mai întâi, hiperbola sub forma canonică. Împărţim cu 144 şi obţinem:
$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1.$$

De aici deducem imediat că:

1) Semiaxele sunt $a = 3$ şi $b = 4$.

2) Semidistanţa focală este $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 5$, deci focarele sunt $F_1(-5, 0)$ şi $F_2(5, 0)$

3) Cele două asimptote sunt date de ecuaţiile

$$y = \pm\frac{4}{3}x.$$

□

Problema 7.11. Calculaţi aria triunghiului format de dreapta

$$9x + 2y - 24 = 0.$$

şi de tangentele la hiperbola

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$$

în punctele de intersecţie cu dreapta.

Soluţie. Punctele de intersecţie dintre hiperbolă şi dreaptă sunt soluţiile sistemului de ecuaţii

$$\begin{cases} 9x^2 - 4y^2 - 36 = 0, \\ 9x + 2y - 24 = 0. \end{cases} \tag{7.2.1}$$

Rezolvând sistemul, obţinem punctele

$$M_1\left(\frac{6+\sqrt{2}}{2}, \frac{-6-9\sqrt{2}}{4}\right) \quad \text{şi} \quad M_2\left(\frac{6-\sqrt{2}}{2}, \frac{-6+9\sqrt{2}}{4}\right).$$

Ecuaţia tangentei în M_1 este

$$t_1 : 9\left(\frac{6+\sqrt{2}}{2}\right)x - 4\left(\frac{-6-9\sqrt{2}}{4}\right)y - 36 = 0$$

sau

$$t_1 : 9\left(6+\sqrt{2}\right)x + 2\left(6+9\sqrt{2}\right)y - 72 = 0,$$

iar ecuaţia tangentei în M_2 este

$$t_2 : 9\left(6-\sqrt{2}\right)x + 2\left(6-9\sqrt{2}\right)y - 72 = 0.$$

De aici rezultă imediat că cel de-al treilea vârf al triunghiului, în care se intersectează cele două tangente, este $M_3\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{4}\right)$.

Prin urmare, aria triunghiului $M_1M_2M_3$ va fi dată de

$$\mathcal{A} = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} \frac{6+\sqrt{2}}{2} & \frac{-6-9\sqrt{2}}{4} & 1 \\ \frac{6-\sqrt{2}}{2} & \frac{-6+9\sqrt{2}}{4} & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{4} & 1 \end{vmatrix} = \pm\frac{1}{128}\begin{vmatrix} 2(6+\sqrt{2}) & -6-9\sqrt{2} & 4 \\ 2(6-\sqrt{2}) & -6+9\sqrt{2} & 4 \\ 6 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 3\sqrt{2}.$$

□

Problema 7.12. Focarele unei hiperbole coincid cu cele ale elipsei

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Stabiliţi ecuaţia hiperbolei, ştiind că excentricitatea ei este egală cu 2.

Soluţie. Parametrul focal al elipsei este $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, deci, în cazul nostru, $c = 4$. Aşadar, focarele elipsei (deci şi ale hiperbolei) sunt $F_1(-2, 0)$ şi $F_2(2, 0)$. Fie a' şi b' semiaxele hiperbolei. După cum se ştie, în cazul hiperbolei, parametrul c este legat de semiaxe prin relaţia $c = \sqrt{a'^2 + b'^2}$, prin urmare avem

$$a'^2 + b'^2 = 16.$$

Excentricitatea hiperbolei fiind egală cu 2, rezultă că avem

$$2 = \frac{c}{a'} = \frac{4}{a'},$$

de unde rezultă că $a' = 2$, ceea ce înseamnă că

$$b' = \sqrt{16 - a'^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}.$$

Prin urmare, ecuaţia hiperbolei este

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1.$$

□

Problema 7.13. Demonstraţi că produsul distanţelor de la orice punct de pe hiperbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

până la asimptote este constant, egal cu $\dfrac{a^2b^2}{a^2 + b^2}$.

Soluţie. Fie $M_0(x_0, y_0)$ un punct oarecare de pe hiperbolă. Cele două asimptote au ecuaţiile

$$as_1 : y = \frac{b}{a}x$$

sau

$$as_1 : bx - ay = 0,$$

respectiv

$$as_2 : bx + ay = 0.$$

Cele două distanţe sunt:

$$d_1 \equiv d\left(M_0, as_1\right) = \frac{|bx_0 - ay_0|}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

respectiv

$$d_2 \equiv d\left(M_0, as_2\right) = \frac{|bx_0 + ay_0|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Prin urmare,

$$d_1 \cdot d_2 = \frac{\left|b^2x_0^2 - a^2y_0^2\right|}{a^2 + b^2}.$$

Dar, cum punctul M_0 este pe hiperbolă, avem

$$b^2x_0^2 - a^2y_0^2 = a^2b^2,$$

de unde rezultă că

$$d_1 \cdot d_2 = \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}.$$

□

Problema 7.14. Demonstraţi că aria paralelogramului format de asimptotele la hiperbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

şi de dreptele duse prin orice punct al hiperbolei, paralele cu asimptotele, este constantă, egală cu $\frac{ab}{2}$.

Soluţie. Fie $A(x_0, y_0)$ un punct de pe hiperbolă. Cele două asimptote au ecuaţiile

$$as_1 : y = \frac{b}{a}x,$$

respectiv

$$as_2 : y = -\frac{b}{a}x.$$

Dreapta care trece prin A şi este paralelă cu as_1 va avea ecuaţia

$$d_1 : y - y_0 = \frac{b}{a}(x - x_0),$$

în timp ce dreapta care trece prin A şi este paralelă cu asimptota a doua are ecuaţia

$$d_2 : y - y_0 = -\frac{b}{a}(x - x_0).$$

Fie $B = as_1 \cap d_2$, $C = as_1 \cap as_2$, $D = as_2 \cap d_1$. Atunci paralelogramul a cărui arie o căutăm este paralelogramul $ABCD$. Aria sa este egală cu de două ori aria triunghiului ABC. Prin urmare, pentru a determina această arie, este suficient să determinăm coordonatele vârfurilor B şi C. C fiind punctul de intersecţie a asimptotelor, el coincide cu originea, deci tot ce mai trebuie să facem este să rezolvăm sistemul

$$\begin{cases} y = \frac{b}{a}x, \\ y - y_0 = -\frac{b}{a}(x - x_0). \end{cases}$$

Obţinem imediat $B\left(\frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{a}{b}y_0\right), \frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}x_0 + y_0\right)\right)$. Conform celor spuse mai sus, aria paralelogramului este dublul ariei triunghiului ABC, adică

$$\mathcal{A} = \left| \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{a}{b}y_0\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}x_0 + y_0\right) & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2ab}\left|b^2x_0^2 - a^2y_0^2\right| = \frac{ab}{2},$$

unde, pentru a scrie ultima egalitate, am folosit faptul că punctul A se află pe hiperbolă, deci coordonatele sale verifică ecuaţia acesteia. □

Problema 7.15. Stabiliţi ecuaţiile tangentelor la hiperbola

$$\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1$$

care sunt perpendiculare pe dreapta

$$4x + 3y - 7 = 0.$$

Soluţie. După cum ştim, tangentele la hiperbolă de pantă k au ecuaţile

$$y = kx \pm \sqrt{a^2k^2 - b^2}.$$

Astfel de tangente există dacă şi numai dacă expresia de sub radical este strict pozitivă:

$$|k| > \frac{b}{a}.$$

În cazul nostru, panta dreptei date este egală cu $-\dfrac{4}{3}$, deci panta tangentei (care e perpendiculară pe dreapta dată!) trebuie să fie

$$k = \frac{3}{4} > \frac{b}{a} \equiv \frac{1}{2}.$$

Aşadar, ecuaţiile tangentelor de pantă k sunt

$$y = \frac{3}{4}x \pm \sqrt{20 \cdot \frac{9}{16} - 5}$$

sau

$$3x - 4y \pm 10 = 0.$$

□

Problema 7.16. Stabiliţi ecuaţiile tangentelor la hiperbola

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{64} = 1$$

care sunt paralele cu dreapta

$$10x - 3y + 9 = 0.$$

Soluţie. Ca în cazul problemei precedente, ecuaţiile acestor tangente sunt

$$y = kx \pm \sqrt{a^2k^2 - b^2},$$

unde, acum, k este chiar panta dreptei date, adică

$$k = \frac{10}{3}.$$

Prin urmare, avem,

$$y = \frac{10}{3}x \pm \sqrt{16 \cdot \frac{100}{9} - 64}$$

sau

$$10x - 3y \pm 32 = 0.$$

□

Problema 7.17. O hiperbolă trece prin punctul $M(\sqrt{6}, 3)$ şi este tangentă dreptei $9x + 2y - 15 = 0$. Stabiliţi ecuaţia hiperbolei, ştiind că axele sale coincid cu axele de coordonate.

Soluţie. Căutăm, mai întâi, condiţia general ă pentru ca o dreaptă de ecuaţie

$$Ax + By + C = 0$$

să fie tangent ă unei hiperbole de ecuaţie

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y}{b^2} = 1.$$

Presupunem, pentru fixarea ideilor, că $B \neq 0$. Atunci

$$y = -\frac{Ax + C}{B}.$$

Dacă înlocuim în ecuaţia elipsei, obţinem ecuaţia de gradul doi în x

$$\left(a^2A^2 - b^2B^2\right)x^2 + 2a^2ACx + a^2\left(b^2B^2 + C^2\right) = 0.$$

Condiţia de tangenţă impune ca discriminantul acestei ecuaţii să fie egal cu zero. Dar

$$\Delta = 4a^2b^2B^2\left(a^2A^2 - b^2B^2 - C^2\right) = 0.$$

Dar a şi B nu se anulează (ele sunt numere strict pozitive), în timp ce B este diferit de zero prin ipoteză. Prin urmare, dreapta este tangentă hiperbolei dacă şi numai dacă avem

$$a^2A^2 - b^2B^2 = C^2.$$

Ecaxt aceeaşi condiţie se obţine şi dacă facem ipoteza că $A \neq 0$.

În cazul nostru concret, condiţia de mai sus devine

$$81a^2 - 4b^2 = 225.$$

Aceasta este prima ecuaţie pentru determinarea pătratelor semiaxelor. A doua se obţine din condiţia ca punctul M să se afle pe hiperbolă, ceea ce ne conduce la

$$9a^2 - 6b^2 + a^2b^2 = 0.$$

Rezolvând sistemul format din cele două ecuaţii, obţinem $a^2 = 10/3$, $b^2 = 45/4$ sau $a^2 = 5$, $b^2 = 45$, de unde rezultă ecuaţiile celor două hiperbole care îndeplinesc condiţiile din enunţul problemei. □

7.3 Parabola

Problema 7.18. Determinaţi ecuaţia unei parabole cu vârful în origine dacă axa parabolei este axa Ox şi parabola trece prin punctul $A(9, 6)$.

Soluţie. Ecuaţia parabolei este de forma $y^2 = 2px$. Sigurul parametru care trebuie determinat este parametrul parabolei, p. Din condiţia ca A să fie pe parabolă, obţinem:

$$36 = 2 \cdot p \cdot 9,$$

de unde rezultă că $p = 2$, deci ecuaţia parabolei este

$$y^2 = 4x.$$

□

Problema 7.19. Să se afle locul geometric al punctelor din care se pot duce tangente perpendiculare la parabola $y^2 = 2px$.

Soluţie. Ecuaţia tangentei de pantă k la parabolă este

$$y = kx + \frac{p}{2k}.$$

Tangenta perpendiculară va avea panta $-1/k$, deci va fi de ecuaţie

$$y = -\frac{1}{k}x - \frac{kp}{2}.$$

Ajungem acum la sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} my = m^2x + \dfrac{p}{2}, \\ -my = x + \frac{m^2p}{2}. \end{cases}$$

Dacă adunăm cele două ecuaţii, obţinem

$$(m^2+1)\left(x + \frac{p}{2}\right) = 0,$$

de unde

$$x = -\frac{p}{2},$$

adică locul geometric este directoarea parabolei. □

Problema 7.20. Să se determine ecuaţia canonică a unei parabole, ştiind că ea este tangentă dreptei $3x - 2y + 4 = 0$ şi determinaţi punctul de tangenţă.

Soluţie. Ecuaţia parabolei este de forma

$$y^2 - 2px = 0.$$

Vom stabili condiţia necesară şi suficientă pentru ca parabola să fie tangentă dreptei

$$Ax + By + C = 0.$$

din ecuaţia parabolei deducem imediat că

$$x = \frac{y^2}{2p}.$$

Dacă înlocuim în ecuaţia dreptei, obţinem

$$A \cdot \frac{y^2}{2p} + By + C = 0$$

sau

$$Ay^2 + 2pBy + 2pC = 0.$$

condiţia de tangenţă este ca discriminantul acestei ecuaţii de gradul al doilea să fie egal cu zero, adică

$$4p^2B^2 - 8ACp = 0$$

sau

$$p^2B^2 - 2ACp = 0.$$

Cum p este parametrul parabolei, el nu se poate anula, deci condiţia de mai sus devine

$$pB^2 - 2AC = 0.$$

Scopul nostru este să determinăm p din condiţia de tangenţă. Dacă $B = 0$, adică dreapta este verticală, atunci fie nu avem soluţii (dacă $C \neq 0$), fie orice parabolă ne furnizează o soluţie, dacă $C = 0$. În acest ultim caz, problema este nedeterminată. Dacă $A = 0$, pe de altă parte, singura soluţie ar fi $p = 0$, care nu este acceptabilă (parabola nu are tangente paralele cu axa de simetrie!). Dacă nici A, nici B, nici C nu se anulează, atunci

$$p = \frac{2AC}{B^2}.$$

În cazul nostru concret, obţinem $p = 6$, deci ecuaţia parabolei este

$$y^2 = 12x.$$

Dacă rezolvăm sistemul de ecuaţii format din ecuaţia parabolei, pe xcare tocmai am determinat-0 şi ecuaţia tangentei, obţinem punctul de contact $M_0\left(\frac{4}{3}, 4\right)$. □

Problema 7.21. Determinaţi ecuaţia canonică a unei parabole, ştiind că tangenta paralelă cu dreapta $5x - 4y - 2 = 0$ trece prin punctul $A(4, 7)$.

Soluţie. panta tangentei este $k = 5/4$. Ecuaţia tangentei de pantă $5/4$ este

$$y = \frac{5}{4}x + \frac{2}{5}p.$$

Dacă impunem condiţia ca A să se afle pe tangentă, obţinem

$$7 = \frac{5}{4} \cdot 4 + \frac{2}{5}p,$$

de unde rezultă imediat că $p = 5$, adică ecuaţia parabolei este

$$y^2 = 10x.$$

□

Problema 7.22. Din punctul $A(5, 9)$ ducem tangente la parabola $y^2 = 5x$. Stabiliţi ecuaţia coardei care uneşte punctele de tangenţă.

Soluţie. După cum ştim, ecuaţia care ne dă pantele tangentelor duse dintr-un punct exterior $M_1(x_1, y_1)$ la parabola de parametru p este

$$2x_1k^2 - 2y_1k + p = 0.$$

În cazul nostru concret, $x_1 = 5, y_1 = 9, p = 5/2$, deci ecuaţia devine

$$10k^2 - 18k + \frac{5}{2} = 0$$

sau

$$20k^2 - 36k + 5 = 0.$$

Discriminantul ecuaţiei este strict pozitiv (ceea ce înseamnă că A este, într-adevăr, exterior parabolei!) şi obţinem

$$k_{1,2} = \frac{9 \pm 2\sqrt{14}}{10}.$$

Pe de altă parte, ecuaţia tangentei într-un punct $M_0(x_0, y_0)$ al parabolei este

$$yy_0 = \frac{5}{2}\left(x + x_0\right),$$

adică panta tangentei este

$$k = \frac{5}{2y_0},$$

de unde

$$y_0 = \frac{5}{2k},$$

în timp ce, punctul fiind pe parabolă,

$$x_0 = \frac{y_0^2}{5} = \frac{5}{4k^2}.$$

Dacă punem $k = k_1$, obţinem

$$x_{01} = \frac{125}{\left(9 + 2\sqrt{14}\right)^2}, \quad y_{01} = \frac{25}{9 + 2\sqrt{14}},$$

în timp ce pentru $k = k_2$, obţinem

$$x_{02} = \frac{125}{\left(9 - 2\sqrt{14}\right)^2}, \quad y_{01} = \frac{25}{9 - 2\sqrt{14}}.$$

Coarda căutată este dreapta $M_{01}M_{02}$. Se obţine uşor pentru ea ecuaţia:

$$5x - 18y + 25 = 0.$$

□

SEMINARUL 8

Cuadrice pe ecuaţia redusă

Problema 8.1. Să se determine punctele de intersecţie ale elipsoidului

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}+\frac{z^2}{4}-1=0$$

cu dreapta

$$x=4+2t,\ y=-6-3t,\ z=-2-2t.$$

Soluţie. Dacă înlocuim ecuaţiile parametrice ale dreptei în ecuaţia elipsoidului, obţinem

$$\frac{4(2+t)^2}{16}+\frac{9(2+t)^2}{12}+\frac{4(1+t)^2}{4}=1$$

sau

$$(2+t)^2+(1+t)^2-1=0,$$

de unde

$$t^2+3t+2=0.$$

Ecuaţia are ca soluţii $t=-2$ şi $t=-1$. Dacă înlocuim în ecuaţiile parametrice ale dreptei, obţinem punctele de intersecţie $M_1(0,0,2)$ şi $M_2(2,-3,0)$. □

Problema 8.2. Să se scrie ecuaţia planului tangent la hiperboloidul cu o pânză

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{1}=1$$

în punctul $M(2,3,1)$. Să se arate că acest plan tangent taie suprafaţa după două drepte reale şi să se calculeze unghiul format de cele două drepte.

Soluţie. Remarcăm, înainte de toate, că punctul M aparţine, într-adevăr, hiperboloidului (coordonatele sale verificând ecuaţia acestuia). Ecuaţia planului tangent se scrie prin dedublare:

$$\frac{2x}{4}+\frac{3y}{9}-\frac{1\cdot z}{1}-1=0$$

sau

$$3x+4y-6z-6=0.$$

□

Problema 8.3. Să se scrie ecuaţiile planelor tangente în punctele de intersecţie ale dreptei $x = y = z$ cu:

a) paraboloidul eliptic $\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{4} = 9z$;

b) paraboloidul hiperbolic $\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{y^2}{4} = 9z$.

Soluţie. a) Determinăm, mai întîi, punctele de intersecţie. Suntem conduşi la ecuaţia

$$\frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{4} = 9x$$

sau

$$x^2 - 12x = 0,$$

ceea ce ne conduce la punctele $M_1(0,0,0)$ şi $M_2(12,12,12)$. Ecuaţiile planbelor tangente se scriu prin dedublare. Pentru M_1 se obţine, evident:

$$\pi_1 : \ z = 0,$$

în timp ce pentru M_2 se obţine

$$\pi_2 : \ \frac{12x}{2} + \frac{12y}{4} = \frac{9}{2}(z + 12)$$

sau

$$\pi_2 : \ 4x + 2y - 3z - 36 = 0.$$

b) Exact ca mai sus, se obţin punctele de intersecţie $M_1(0,0,0)$ şi $M_2(36,36,36)$, deci planele tangente vor fi

$$\pi_1 : \ z = 0,$$

$$\pi_2 : \ \frac{36x}{2} - \frac{36y}{4} = \frac{9}{2}(z + 36)$$

sau

$$4x - 2y - z - 36 = 0.$$

□

Problema 8.4. Să se scrie ecuaţia planelor tangente la:

a) paraboloidul eliptic $\dfrac{x^2}{5} + \dfrac{y^2}{3} = z$;

b) paraboloidul hiperbolic $x^2 - \dfrac{y^2}{4} = z$,

paralele cu planul

$$x - 3y + 2z - 1 = 0.$$

Soluţie. a) Rescriem, mai întâi, ecuaţia paraboloidului, pentru a scăpa de numitori. Se obţine

$$3x^2 + 5y^2 - 15z = 0.$$

Fie $M(x_0, y_0, z_0)$ un punct oarecare al suprafeţei. Ecuaţia planului tangent la această suprafaţă în M se scrie, prin dedublare,

$$3x_0x + 5y_0y - \frac{15}{2}(z + z_0) = 0$$

sau

$$6x_0x + 10y_0y - 15z - 15z_0 = 0.$$

Vectorul normal la acest plan este $\mathbf{n}_1(6x_0, 10y_0, -15)$, în timp ce vectorul normal la planul dat este $\mathbf{n}_0(1, -3, 2)$. Planul tangent la suprafaţă este paralel cu planul dat dacă vectorii normali la celke două plane sunt coliniari, ceea ce înseamnă că există un număr real λ astfel încât $\mathbf{n}_1 = \lambda\mathbf{n}_0$, de unde obţinem

$$\begin{cases} 6x_0 = \lambda, \\ 10y_0 = -3\lambda, \\ -15 = 2\lambda. \end{cases}$$

De aici obţinem imediat că $\lambda = -\dfrac{15}{2}$, $x_0 = -\dfrac{5}{4}$, $y_0 = \dfrac{9}{4}$. Cea de-a treia coordonată, z_0, o determinăm prin condiţia ca punctul M să aparţină suprafeţei (i.e. coordonatele sale trebuie să verifice ecuaţia suprafeţei). Prin urmare,

$$z = \frac{x_0^2}{5} + \frac{y_0^2}{3} = \frac{25}{80} + \frac{81}{48} = 2.$$

Dacă înlocuim x_0, y_0 şi z_0 astfel determinaţi în ecuaţia planului tangent, obţinem

$$x - 3y + 2z + 4 = 0.$$

b) Se procedează analog. Din nou, rescriem ecuaţia suprafeţei sub forma

$$4x^2 - y^2 - 4z = 0.$$

Ecuaţia planului tangent într-un punct oarecare $M(x_0, y_0, z_0)$ al suprafeţei se scrie, prin dedublare, sub forma

$$4x_0x - y_0y - 2(z + z0) = 0$$

sau

$$4x_0x - y_0y - 2z - 2z_0 = 0.$$

Vectorul normal la acest plan este $\mathbf{n}_2(4x_0, -y_0, -2)$. Acest vector trebuie să fie coliniar cu vectorul normal la planul dat, aşadar trebuie să existe un număr real μ astfel încât să avem $\mathbf{n}_2 = \mu\mathbf{n}_0$, prin urmare se obţine sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} 4x_0 = \mu, \\ -y_0 = -3\mu, \\ -2 = 2\mu. \end{cases}$$

De aici, obţinem imediat $\mu = -1$, $x_0 = -\dfrac{1}{4}$, $y_0 = -3$. Coordonata z_0 se obţine din ecuaţia suprafeţei, punând condiţia ca punctul M să se afle pe suprafaţă:

$$z_0 = x_0^2 - \frac{y_0^2}{4} = \frac{1}{16} - \frac{9}{4} = -\frac{35}{16}.$$

Dacă înlocuim în ecuaţia planului tangent, obţinem

$$8x - 24y + 16z - 35 = 0.$$

□

Problema 8.5. Să se determine generatoarele rectilinii ale paraboloidului hiperbolic $4x^2 - 9y^2 = 36z$ care trec prin punctul $P(3\sqrt{2}, 2, 1)$.

Soluţie. Remarcăm, înainte de toate, că punctul P aparţine hiperboloidului (coordonatele sale verifică ecuaţia suprafeţei). Descompunem ecuaţia suprafeţei:

$$(2x + 3y)(2x - 3y) = 36 \cdot z.$$

După cum ştim, avem două familii de generatoare rectilinii:

$$\begin{cases} \lambda(2x + 3y) = 36\mu, \\ \mu(2x - 3y) = \lambda z \end{cases}$$

şi

$$\begin{cases} \alpha(2x - 3y) = 36\beta, \\ \beta(2x + 3y) = \alpha z. \end{cases}$$

Începem cu prima familie. Dacă punem condiţia ca punctul P să aparţină suprafeţei, obţinem

$$\begin{cases} 6(\sqrt{2} + 1)\lambda = 36\mu \\ 6(\sqrt{2} - 1)\mu = \lambda. \end{cases}$$

Din cea de-a doua relaţie, obţinem legătura dintre cei doi parametri. Dacă punem $\mu = 1$ şi înlocuim în ecuaţiile generatoarelor, obţinem

$$\begin{cases} 6(\sqrt{2} - 1)(2x + 3y) = 36, \\ 2x - 3y = 6(\sqrt{2} - 1)z \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} 2(\sqrt{2} - 1)x + 3(\sqrt{2} - 1)y - 6 = 0, \\ 2x - 3y - 6(\sqrt{2} - 1)z = 0. \end{cases}$$

Ne vom ocupa acum de cea de-a doua familie de generatoare. Din nou, punem condiţia ca generatoarea să treacă prin punctul P, obţinem relaţiile

$$\begin{cases} 6(\sqrt{2} - 1)\alpha = 36\beta \\ 6(\sqrt{2} + 1)\beta = \alpha. \end{cases}$$

Din nou, din a doua relaţie obţinem relaţia dintre cei doi parametri şi, dacă punem $\beta = 1$, obţinem că $\alpha = 6(\sqrt{2} + 1)$. Înlocuind în ecuaţiile familiei de generatoare, obţinem

$$\begin{cases} 6(\sqrt{2} + 1)(2x - 3y) = 36, \\ 2x + 3y = 6(\sqrt{2} + 1)z \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} 2(\sqrt{2} + 1)x - 3(\sqrt{2} + 1)y - 6 = 0, \\ 2x + 3y - 6(\sqrt{2} + 1)z = 0. \end{cases}$$

□

Problema 8.6. Să se scrie ecuaţiile generatoarelor rectilinii ale paraboloidului hiperbolic

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = z$$

care sunt paralele cu planul

$$3x + 2y - 4z = 0.$$

Soluţie. Scăpăm, întâi, de numitori. Ecuaţia devine

$$x^2 - 4y^2 = 16z.$$

Descompunem ecuaţia:

$$(x+2y)(x-2y) = 16 \cdot z.$$

Atunci ecuaţiile celor două familii de generatoare rectilinii ale suprafeţei vor fi

$$\begin{cases} \lambda(x+2y) = 16\mu, \\ \mu(x-2y) = \lambda z, \end{cases}$$

respectiv

$$\begin{cases} \alpha(x-2y) = 16\beta, \\ \beta(x+2y) = \alpha z. \end{cases}$$

Începem prin a determina generatoarea din prima familie. Faptul că această generatoare este paralelă cu planul dat înseamnă că vectorul său director este perpendicular pe vectorul normal la planul dat. Ca să obţinem un vector director al dreptei, înmulţim vectorial vectorii normali la cele două plane care determină dreapta, $\mathbf{n}_{11}(1,2,0)$ (am împărţit cu λ) şi $\mathbf{n}_{12}(\mu, -2\mu, -\lambda)$. Avem

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{n}_{11} \times \mathbf{n}_{12} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ \mu & -2\mu & -\lambda \end{vmatrix} = (-2\lambda, \lambda, -4\mu).$$

Pe de altă parte, vectorul normal la planul dat este $\mathbf{n}(3,2,-4)$. Condiţia de paralelism dintre dreaptă şi plan este, prin urmare,

$$0 = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n} = -6\lambda + 2\lambda + 16\mu = -4\lambda + 16\mu,$$

de unde $\lambda = 4\mu$. Dacă punem $\mu = 1$, obţinem $\lambda = 4$, deci ecuaţiile generatoarei căutate devin

$$\begin{cases} x + 2y - 4 = 0, \\ x - 2y - 4z = 0. \end{cases}$$

Trecem acum la generatoarea din cea de-a doua familie. De data asta, vectorii normali la cele două plane care determină generatoarea sunt $\mathbf{n}_{21}(1,-2,0)$ (am împărţit cu α) şi $\mathbf{n}_{22}(\beta, 2\beta, -\alpha)$. Astfel, un vector director al generatoarei va fi

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{n}_{21} \times \mathbf{n}_{22} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -2 & 0 \\ \beta & 2\beta & -\alpha \end{vmatrix} = (2\alpha, \alpha, 4\beta).$$

Prin urmare, condiţia de paralelism între generatoare şi planul dat se poate scrie

$$0 = \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{n} = 6\alpha + 2\alpha - 16\beta = 8\alpha - 16\beta,$$

de unde rezultă că $\alpha = 2\beta$. Dacă punem $\beta = 1$, atunci $\alpha = 2$, iar ecuaţiile generatoarei din cea de-a doua familie se vor scrie:

$$\begin{cases} x - 2y - 8 = 0, \\ x + 2y - 2z = 0. \end{cases}$$

$\square$

Problema 8.7. Să se afle generatoarele rectilinii ale suprafeţei

$$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{4}=1$$

care sunt paralele cu planul

$$x+y+z=0.$$

Soluţie. Suprafaţa este, în mod evident, un hiperboloid cu o pânză. Pentru a uşura calculele, scăpăm, mai întâi, de numitori. Ecuaţia devine

$$x^2+4y^2-9z^2=36.$$

Rescriem această ecuaţie sub forma

$$x^2-9z^2=36-4y^2.$$

Descompunem cei doi membrii în factori de gradul întâi şi obţinem

$$(x+3z)(x-3z)=(6+2y)(6-2y).$$

Astfel, ecuaţiile primei familii de generatoare vor fi

$$\begin{cases}\lambda(x+3z)=\mu(6+2y),\\ \mu(x-3z)=\lambda(6-2y),\end{cases}$$

în timp ce pentru a doua familie de generatoare obţinem ecuaţiile

$$\begin{cases}\alpha(x+3z)=\beta(6-2y),\\ \beta(x-3z)=\alpha(6+2y).\end{cases}$$

Vom determina, mai întâi, generatoarea din prima familie care îndeplineşte condiţiile din enunţ. Începem prin a rescrie sistemul de ecuaţii sub forma

$$\begin{cases}\lambda x-2\mu y+3\lambda z-6\mu=0,\\ \mu x+2\lambda y-3\mu z-6\lambda=0.\end{cases}$$

Vectorii normali la cele două plane care determină generatoarea corespunzătoare parametrilor sunt $\mathbf{n}_{11}(\lambda,-2\mu,3\lambda)$, respectiv $\mathbf{n}_{12}(\mu,2\lambda,-3\mu)$. Un vector director al generatoarei va fi, prin urmare, vectorul

$$\mathbf{v}_1=\mathbf{n}_{11}\times\mathbf{n}_{12}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \lambda & -2\mu & 3\lambda\\ \mu & 2\lambda & -3\mu\end{vmatrix}=\left(6\left(\mu^2-\lambda^2\right),6\lambda\mu,2\left(\mu^2+\lambda^2\right)\right).$$

Pe de altă parte, vectorul normal la planul dat este $\mathbf{n}(1,1,1)$. Astfel, condiţia de paralelism dintre generatoare şi plan se va scrie

$$0=\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{n}=6(\mu^2-\lambda^2)-6\lambda\mu+2(\mu^2+\lambda^2)=8\mu^2+6\lambda\mu-4\lambda^2=2(4\mu^2+3\lambda\mu-2\lambda^2).$$

Trebuie, prin urmare, să rezolvăm ecuaţia

$$4\mu^2+3\lambda\mu-2\lambda^2=0,$$

pentru a determina relaţia dintre λ şi μ. Această ecuaţie, după cum se vede, este o ecuaţie omogenă de gradul al doilea, pe care o vom rezolva cu metoda standard. Anume, împărţim ecuaţia cu λ^2 şi notăm $t=\dfrac{\mu}{\lambda}$. Atunci ecuaţia devine

$$4t^2+3t-2=0.$$

Rădăcinile acestei ecuaţii sunt, după cum remarcăm imediat,

$$t_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{41}}{8}. \tag{*}$$

Putem alege $\lambda = 1$, de unde obţinem $\mu = t_{1,2}$. Aşadar, ecuaţiile generatoarelor din prima familie care sunt paralele cu planul dat sunt

$$\begin{cases} x - 2t_{1,2}y + 3z - 6t_{1,2} = 0, \\ t_{1,2}x + 2y - 3t_{1,2}z - 6 = 0 \end{cases}$$

unde $t_{1,2}$ sunt valorile date de formula (*). Este de remarcat că, datorită gradului înalt de simetrie a hiperboloidului cu o pânză, există *două* generatoare din prima familie care sunt paralele cu planul dat.

Trecem acum la generatoarele din cea de-a doua familie. Rescriem ecuaţiile lor sub forma

$$\begin{cases} \alpha x + 2\beta y + 3\alpha z - 6\beta = 0, \\ \beta x - 2\alpha y - 3\beta z - 6\alpha = 0. \end{cases}$$

Vectorii normali la cele două plane care determină generatoarea sunt $\mathbf{n}_{21}\,(\alpha, 2\beta, 3\alpha)$, respectiv $\mathbf{n_{22}}(\beta, -2\alpha, -3\beta)$, prin urmare un vector director al generatoarei este

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{n}_{21} \times \mathbf{n}_{22} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \alpha & 2\beta & 3\alpha \\ \beta & -2\alpha & -3\beta \end{vmatrix} = \left(6\left(\alpha^2 - \beta^2\right), 6\alpha\beta, -2\left(\alpha^2 + \beta^2\right)\right).$$

Ca şi în cazul celeilalte familii de generatoare, şi aici condiţia de paralelism dintre dreaptă şi plan se va scrie sub forma

$$0 = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n}_1 = 2\left(2\alpha^2 + 3\alpha\beta - 4\beta^2\right).$$

Avem, astfel, de data aceasta, ecuaţia omogenă

$$2\alpha^2 + 3\alpha\beta - 4\beta^2 = 0,$$

care, după ce punem $s = \dfrac{\alpha}{\beta}$, ne conduce la ecuaţia de gradul al doilea

$$2s^2 + 3s - 4 = 0,$$

cu soluţiile

$$s_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{41}}{4}. \tag{**}$$

Dacă punem $\beta = 1$, obţinem $\alpha = s_{1,2}$. Aşadar, ecuaţiile generatoarelor din cea de-a doua familie care sunt paralele cu planul dat sunt

$$\begin{cases} s_{1,2}x + 2y + 3s_{1,2}z - 6 = 0, \\ x - 2s_{1,2}y - 3z - 6s_{1,2} = 0, \end{cases}$$

unde numerele $s_{1,2}$ sunt date de formula (**). Şi aici sunt, desigur, două generatoare paralele cu planul dat. □

Problema 8.8. Să se găsească un punct al elipsoidului

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0, \quad a > b > c > 0.$$

astfel încât planul tangent în acest punct să taie segmente de lungime egală pe axele de coordonate.

Soluţie. Ecuaţia planului tangent într-un punct oarecare al elipsoidului este

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}+\frac{zz_0}{c^2}-1=0,$$

prin urmare ecuaţia planului tangent prin tăieturi se va scrie

$$\frac{x}{\frac{a^2}{x_0}}+\frac{y}{\frac{b^2}{y_0}}+\frac{z}{\frac{c^2}{z_0}}-1=0.$$

Astfel, tăieturile planului pe axe sunt $\dfrac{a^2}{x_0}$, $\dfrac{b^2}{y_0}$ şi $\dfrac{c^2}{z_0}$.

Cerinţa problemei este ca tăieturile să aibă aceeaşi lungime, prin urmare coordonatele punctului de tangenţă sunt soluţiile sistemului de ecuaţii

$$\begin{cases}\dfrac{a^2}{|x_0|}=\dfrac{b^2}{|y_0|}=\dfrac{c^2}{|z_0|},\\ \dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}+\dfrac{z_0^2}{c^2}-1=0.\end{cases}$$

Ne vom ocupa exclusiv de cazul în care toate coordonatele sunt strict pozitive. Restul soluţiilor se obţin în acelaşi mod (în fapt, ele sunt simetricele acestei soluţii relativ la axele de coordonate, planele de coordonate şi originea coordonatelor).

În această situaţie, primele două ecuaţii se pot scrie sub forma

$$y_0=\frac{b^2}{a^2}x_0,$$

respectiv

$$z_0=\frac{c^2}{a^2}x_0.$$

Dacă înlocuim în cea de-a treia ecuaţie, găsim:

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{b^2x_0^2}{a^4}+\frac{c^2x_0^2}{a^4}=1,$$

ceea ce ne conduce la soluţia

$$x_0=\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\quad y_0=\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\quad z_0=\frac{c^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

□

Problema 8.9. Să se găsească punctele de pe elipsoidul

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0,\quad a>b>c>0.$$

în care normalele intersectează axa Oz.

Problema 8.10. Ce condiţii trebuie să îndeplinească semiaxele unui elipsoid astfel încât normalele sale să treacă prin centrul său?

Problema 8.11. Să se găsească locul geometric al punctelor de pe cuadrica

$$y^2-z^2=2x$$

prin care trec generatoare rectilinii perpendiculare.

Problema 8.12. Să se găsească ecuaţia proiecţiei pe planul xOy a curbei de intresecţie a elipsoidului

$$\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} - 1 = 0$$

cu planul

$$x + y + z - 1 = 0.$$

Problema 8.13. Să se găsească locul geometric al punctelor M de pe suprafaţa $x^2 - y^2 = z$ pentru care normala în M la suprafaţă formează un unghi constant cu axa Oz. Să se arate că proiecţia acestui loc geometric pe planul xOy este un cerc a cărui ecuaţie se cere.

Problema 8.14. Să se determine ecuaţia hiperboloidului cu o pânză care are ca axe de simetrie axele de coordonate, este tangent la planul

$$6x - 3y + 2z - 6 = 0$$

şi pentru care dreapta

$$\begin{cases} 4x - z - 5 = 0, \\ 6x + 5z + 9 = 0 \end{cases}$$

este o generatoare rectilinie.

Problema 8.15. Să se scrie ecuaţia normalei în punctul $P(-2, 2, -1)$ la cuadrica

$$\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2} + 1 = 0.$$

Să se determine coordonatele punctului în care normala înţeapă a doua oară suprafaţa.

Problema 8.16. Să se determine planele care conţin dreapta

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{0}$$

şi sunt tangente la hiperboloidul cu două pânze

$$x^2 + 2y^2 - z^2 + 1 = 0.$$

Problema 8.17. Să se afle distanţa cea mai scurtă dintre paraboloidul eliptic

$$\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = z$$

şi planul

$$x - y - 2z = 0.$$

Problema 8.18. Să se arate că dreapta

$$\frac{x-2}{0} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-6}{2}$$

este tangentă elipsoidului

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} - 1 = 0$$

şi să se determine coordonatele punctului de tangenţă.

SEMINARUL 9

Generarea suprafeţelor

Problema 9.1. Să se determine ecuaţia suprafeţei conice cu vârful în punctul $(0,0,h)$ şi ale cărui generatoare se sprijină pe lemniscata

$$(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2), \quad z=0.$$

Soluţie. Ecuaţiile vârfului suprafeţei sunt

$$(V):\begin{cases} x=0,\\ y=0,\\ z-h=0.\end{cases}$$

Aşadar, ecuaţiile generatoarelor pot fi scrise sub forma

$$(G_{\lambda,\mu}):\begin{cases} y=\lambda x,\\ z-h=\mu x.\end{cases}$$

Prin urmare, condiţia ca generatoarele să intersecteze curba directoare este echivalentă cu condiţia ca sistemul

$$\begin{cases} y=\lambda x,\\ z-h=\mu x,\\ z=0,\\ (x^2+y^2)^2-a^2(x^2-y^2)=0\end{cases}$$

să fie compatibil. Din primele trei ecuaţii, obţinem imediat că

$$x=-\frac{h}{\mu},\ y=-\frac{\lambda h}{\mu},\ z=0.$$

Dacă înlocuim în ecuaţia a patra, rezultă

$$\left(\frac{h^2}{\mu^2}+\frac{\lambda^2h^2}{\mu^2}\right)^2-a^2\left(\frac{h^2}{\mu^2}-\frac{\lambda^2h^2}{\mu^2}\right)=0$$

sau

$$h^2\left(1+\lambda^2\right)^2-a^2\mu^2(1-\lambda^2)=0.$$

Dar $\lambda = \dfrac{y}{x}$ şi $\mu = \dfrac{z-h}{x}$. Dacă înlocuim în ecuaţia de mai sus, obţinem

$$\left(1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right)^2 - a^2\left(\frac{z-h}{x}\right)^2\left(1-\left(\frac{y}{x}\right)^2\right) = 0$$

sau

$$(x^2+y^2)^2 - a^2(z-h)^2(x^2-y^2) = 0.$$

Aceasta este ecuaţia suprafeţei conice căutate. □

Problema 9.2. Să se afle ecuaţia suprafeţei conice cu vârful în punctul $(0,0,-h)$ ale cărui generatoare sunt tangente la paraboloidul

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z.$$

Soluţie. Vârful conului este dat, în mod evident, de ecuaţiile

$$(V)\begin{cases} x = 0,\\ y = 0,\\ z + h = 0,\end{cases}$$

ceea ce înseamnă că generatoarele se pot scrie

$$(G_{\mu,\nu})\begin{cases} y = \lambda x,\\ z + h = \mu x.\end{cases}$$

Condiţia de compatibilitate, de data aceasta, înseamnă că sistemul de ecuaţii forma din ecuaţia suprafeţei şi ecuaţiile generatoarelor are soluţie unică. Acest sistem se poate scrie sub forma

$$\begin{cases} b^2x^2 + a^2y^2 - 2a^2b^2z = 0,\\ y = \lambda x,\\ z + h = \mu x.\end{cases}$$

Dacă înlocuim y şi z în funcţie de x din ultimele două ecuaţii în prima, obţinem ecuaţia de gradul al doilea

$$b^2x^2 + \lambda^2a^2x^2 - 2a^2b^2(\mu x - h) = 0$$

sau

$$(b^2 + \lambda^2a^2)x^2 - 2a^2b^2\mu^2x + 2a^2b^2h = 0.$$

Condiţia ca această ecuaţie să aibă o singură rădăcină (de fapt, o rădăcină dublă) este echivalentă cu condiţia ca discriminantul ecuaţie să se anuleze, adică trebuie să avem

$$4a^4b^4\mu^4 - 8a^2b^2h(b^2 + \lambda^2a^2) = 0$$

sau

$$a^2b^2\mu^4 - 2h(b^2 + \lambda^2a^2) = 0.$$

Aceasta este condiţia de compatibilitate. Dacă înlocuim în ea λ şi μ din ecuaţiile generatoarelor, obţinem

$$a^2b^2\left(\frac{z+h}{x}\right)^4 - 2h\left(b^2 + a^2\left(\frac{y}{x}\right)^2\right) = 0$$

sau

$$a^2b^2(z+h)^4 - 2a^2b^2x^2(b^2x^2 + a^2y^2) = 0.$$

Aceasta este ecuaţia suprafeţei conice căutate. □

Problema 9.3. Să se afle ecuaţia conului cu vârful în $V(1,1,1)$ şi având curbă directoare elipsa de ecuaţii

$$y^2 + z^2 = 1, \quad x + y + z = 1.$$

Soluţie. Ecuaţiile vârfului suprafeţei conice sunt:

$$(V) \begin{cases} x - 1 = 0, \\ y - 1 = 0, \\ z - 1 = 0, \end{cases}$$

prin urmare ecuaţiile generatoarelor se pot scrie

$$(G_{\mu,\nu}) \begin{cases} y - 1 = \lambda(x - 1), \\ z - 1 = \mu(x - 1). \end{cases}$$

Condiţia ca suprafaţa să întâlnească generatoarele este aceea ca sistemul de patru ecuaţii format din ecuaţiile generatoarelor şi ecuaţiile curbei directoare să fie compatibil. Selectăm mai, întâi, sistemul de trei ecuaţii format din ecuaţiile generatoarelor şi cea mai simplă dintre ecuaţiile curbei directoare:

$$\begin{cases} y - 1 = \lambda(x - 1), \\ z - 1 = \mu(x - 1), \\ x + y + z = 1. \end{cases}$$

Dacă înlocuim y şi z din primele două ecuaţii în cea de-a treia ecuaţie, obţinem

$$x + 1 + \lambda(x - 1) + 1 + \mu(x - 1) = 1$$

sau

$$(1 + \lambda + \mu)x = -1 + \lambda + \mu,$$

de unde

$$x = \frac{-1 + \lambda + \mu}{1 + \lambda + \mu}.$$

De aici obţinem că

$$x - 1 = \frac{-1 + \lambda + \mu}{1 + \lambda + \mu} - 1 = -\frac{2}{1 + \lambda + \mu}.$$

Aşadar,

$$y = -\frac{2\lambda}{1 + \lambda + \mu}$$

şi

$$z = -\frac{2\mu}{1 + \lambda + \mu}.$$

Condiţia de compatibilitate se găseşte înlocuind valorile lui y şi z astfel găsite în ecuaţia rămasăă, adică cealaltă ecuaţie a curbei directoare (ecuaţia de gradul al doilea). Obţinem

$$\frac{4(\lambda^2 + \mu^2)}{(1 + \lambda + \mu)^2} = 1$$

sau

$$4(\lambda^2 + \mu^2) - (1 + \lambda + \mu)^2 = 0.$$

Ecuaţia suprafeţei conice căutate se obţine înlocuind λ şi μ din ecuaţiile generatoarelor în condiţia de compatibilitate. Obţinem, astfel,

$$4\left(\left(\frac{y-1}{x-1}\right)^2+\left(\frac{z-1}{x-1}\right)^2\right)-\left(1+\frac{y-1}{x-1}+\frac{z-1}{x-1}\right)^2=0$$

sau

$$4\left((x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2\right)-(x+y+z-3)^2=0.$$

□

Problema 9.4. Să se afle ecuaţia suprafeţei conice cu vârful în punctul $A(0,-a,0)$ ş având curba directoare $x^2=2py,\ z=h.$

Soluţie. Începem, ca de obicei, cu ecuaţiile vârfului:

$$(V)\begin{cases} x=0,\\ y+a=0,\\ z=0,\end{cases}$$

care ne conduc la ecuaţiile generatoarelor,

$$(G_{\lambda,\mu})\begin{cases} y+a=\lambda x,\\ z=\mu x.\end{cases}$$

Pentru a determina condiţia de intersecţţie dintre generatoare şi curba dată, începem prin a rezolva sistemul de ecuaţii format din ecuaţiile generatoarelor şi cea de-a doua ecuaţie a curbei directoare:

$$\begin{cases} y+a=\lambda x,\\ z=\mu x,\\ z=h.\end{cases}$$

Obţinem imediat că

$$x=\frac{h}{\mu},$$

în timp ce

$$y=\lambda x-a=\frac{\lambda h}{\mu}-a=\frac{h\lambda-a\mu}{\mu}.$$

Dacă înlocuim acum aceste valori în prima ecuaţie a curbei directoare, obţinem condiţia de compatibilitate

$$\frac{h^2}{\mu^2}-\frac{2p(h\lambda-a\mu)}{\mu}=0$$

sau

$$2pa\mu^2-2ph\mu\lambda+h^2=0.$$

Dacă înlocuim, în condiţia de compatibilitate de mai sus, parametrii din ecuaţiile generatoarelor, obţinem

$$2pa\left(\frac{z}{x}\right)^2-2ph\frac{z}{x}\cdot\frac{y+a}{x}+h^2=0$$

sau

$$2paz^2-2phz(y+a)+h^2x^2=0,$$

care este ecuaţia suprafeţei conice căutate. □

Problema 9.5. Se dau trei drepte paralele:

$$x = y = z, \; x + 1 = y = z - 1, \; x - 1 = y + 1 = z - 2.$$

Să se scrie ecuaţia cilindrului circular care conţine aceste drepte.

Problema 9.6. Să se scrie ecuaţia cilindrului circumscris sferei $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, ştiind că generatoarele sale fac unghiuri egale cu cele trei axe de coordonate.

Soluţie. În mod evident, o directoare a acestei suprefeţe este dreapta

$$(\Delta) : \; x = y = z,$$

care se poate scrie şi sub forma

$$(\Delta) : \begin{cases} x - y = 0, \\ x - z = 0. \end{cases}$$

Astfel, ecuaţiile generatoarelor se pot scrie sub forma

$$(G_{\mu,\nu}) : \begin{cases} x - y = \lambda, \\ x - z = \mu. \end{cases}$$

Pentru a determina condiţia de compatibilitate, punem condiţia ca generatoarele să fie tangente sferei. Din ecuaţiile generatoarelor scoatem pe y şi z în funcţie de x şi înlocuim în ecuaţia sferei. Avem

$$x^2 + (x - \lambda)^2 + (x - \mu)^2 = 1$$

sau

$$3x^2 - 2(\lambda + \mu)x + \lambda^2 + \mu^2 - 1 = 0.$$

Condiţia de tangenţă se traduce prin condiţia ca această ecuaţie să aibă discriminantul egal cu zeo, adică

$$4(\lambda + \mu)^2 - 12(\lambda^2 + \mu^2 - 1) = 0$$

sau

$$2\lambda^2 + 2\mu^2 - 2\lambda\mu - 3 = 0.$$

O altă modalitate de a determina condiţia de compatibilitate este să impunem ca distanţa de la centrul sferei la generatoare să fie egală cu raza sferei (adică cu 1).

Centrul sferei este $O(0, 0, 0)$, iar un punct de pe generatoare este, de exemplu, $M(0, -\lambda, -\mu)$. Un vector director al oricărei generatoare este $\mathbf{v}(1, 1, 1)$, deci condiţia de ompatibilitate se traduce prin condiţia

$$\frac{\|\mathbf{r}_M \times \mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} = 1.$$

Dar

$$\mathbf{r}_M \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & -\lambda & -\mu \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (\mu - \lambda, -\mu, \lambda),$$

deci

$$\|\mathbf{r}_M \times \mathbf{v}\| = \sqrt{2\lambda^2 + 2\mu^2 - 2\lambda\mu},$$

în timp ce $\|\mathbf{v} = \sqrt{3}$. Condiţia de compatibilitate se va scrie, deci

$$\frac{\sqrt{2\lambda^2 + 2\mu^2 - 2\lambda\mu}}{\sqrt{3}} = 1,$$

condiţie care, după ridicarea la pătrat, ne conduce exact la condiţia stabilită mai sus.

Ne întoarcem acum la determinarea ecuaţiei suprafeţei cilindrice. În acest scop, înlocuim în condiţia de compatibilitate λ şi μ sin ecuaţiile generatoarelor. Obţinem

$$2(x-y)^2+2(x-z)^2-2(x-y)(x-z)-3=0$$

sau

$$2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2xz-2yz-3=0.$$

□

Problema 9.7. Să se afle ecuaţia suprafeţei cilindrice având generatoarele paralele cu dreapta

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$$

şi curbă directoare parabola $y^2=4x$, $z=0$.

Soluţie. Ecuaţia directoarei se mai poate scrie sub forma

$$(\Delta):\begin{cases}2x-y=0,\\3x-z=0,\end{cases}$$

deci ecuaţiile generatoarelor se pot scrie

$$(G_{\mu,\nu}):\begin{cases}2x-y=\lambda,\\3x-z=\mu.\end{cases}$$

Pentru a determina condiţia de compatibilitate, rezolvăm, mai întâi, sistemul de ecuaţie format din ecuaţiile generatoarelor şi cea de-a doua ecuaţie a curbei directoare:

$$\begin{cases}2x-y=\lambda,\\3x-z=\mu,\\z=0.\end{cases}$$

Se obţine, imediat, $z=0$, $x=\dfrac{\mu}{3}$ şi

$$y=2x-\lambda=\frac{2\mu}{3}-\lambda=\frac{2\mu-3\lambda}{3}.$$

Dacă înlocuim în ecuaţia rămasă, obţinem

$$\frac{(2\mu-3\lambda)^2}{9}=\frac{4\mu}{3}$$

sau

$$(2\mu-3\lambda)^2-12\mu=0.$$

Dacă, acum, înlocuim cei doi parametrii din ecuaţiile generatoarelor, rezultă ecuaţia suprafeţei cilindrice,

$$(6x-2z-6x+3y)^2-12(3x-z)=0$$

sau

$$(3y-2z)^2-36x+12z=0.$$

□

Problema 9.8. Să se afle ecuaţia suprafeţei conoide generate de o dreaptă care rămâne paralelă cu planul $x + z = 0$, se sprijină pe axa Ox şi pe cercul $x^2 + y^2 = 1, z = 0$.

Soluţie. Ecuaţiile axei Ox sunt

$$\begin{cases} y = 0, \\ z = 0, \end{cases}$$

deci ecuaţiile generatoarelor (drepte care trec prin Ox şi sunt paralele cu planul dat) vor fi

$$\begin{cases} y = \lambda z, \\ x + z = \mu. \end{cases}$$

Pentru a determina condiţia de compatibilitate, rezolvăm, mai întâi, sistemul

$$\begin{cases} y = \lambda z, \\ x + z = \mu, \\ z = 0, \end{cases}$$

format din ecuaţiile generatoarelor şi cea mai simplă dintre ecuaţiile curbei directoare.

Obţinem imediat $x = \mu$, $y = z = 0$, deci, după înlocuirea în cealaltă ecuaţie a curbei directoare, condiţia de compatibilitate devine

$$\mu^2 = 1.$$

Astfel, după ce înlocuim parametri idin ecuaţiile generatoarelor, ecuaţia suprafeţei conoide va fi

$$(x + z)^2 = 1$$

sau

$$x + z = \pm 1,$$

adică suprafaţa se reduce la o reuniune de două plane paralele. □

Problema 9.9. Să se afle ecuaţia suprafeţei de rotaţie obţinute prin rotirea dreptei $x - y = a, z = 0$ în jurul dreptei $x = y = z$.

Soluţie. Generatoarele suprafeţei de rotaţie sunt o familie de cercuri, care, la rândul lor, se obţin ca intersecţii dintre sfere de rază variabilă cu centrul pe axa de rotaţie şi plane variabile, perpendiculare pe axa de rotaţie. În cazul nostru, axa de rotaţie trece prin origine, deci putem considera sfere cu centrul în origine. Astfel, generatoarele se pot scrie

$$(G_{\mu,\nu}) \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = \lambda^2, \\ x + y + z = \mu. \end{cases}$$

Pentru a găsi condiţia de compatibilitate, rezolvăm, mai întâi, sistemul de ecuaţii format din ecuaţiile curbei directoare şi ecuaţia planului perpendicular pe axa de rotaţie, adică sistemul

$$\begin{cases} x - y = a, \\ z = 0, \\ x + y + z = \mu. \end{cases}$$

Obţinem imediat că $x = \dfrac{\mu + a}{2}, y = \dfrac{\mu - a}{2}, z = 0$. Dacă înlocuim în ecuaţia sferei, obţem

$$\left(\frac{\mu + a}{2}\right)^2 + \left(\frac{\mu - a}{2}\right)^2 = \lambda^2$$

sau
$$\mu^2 - 2\lambda^2 + a^2 = 0.$$

Aceasta este condiţia de compatibilitate pe care o căutam. Pentru a găsi ecuaţia suprefeţei de rotaţie, înlocuim în condiţia de compatibilitate λ şi μ daţi de ecuaţiile generatoarelor. Această ecuaţie se va scrie, prin urmare, sub forma

$$(x+y+z)^2 - 2(x^2+y^2+z^2) + a^2 = 0$$

sau
$$x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz - a^2 = 0.$$

□

Problema 9.10. Să se scrie ecuaţia conului cu vârful în origine şi a cărui directoare este curba definită de ecuaţiile
$$x = 1,\ y^2 + z^2 - 2z = 0.$$

Problema 9.11. Să se scrie ecuaţia conului cu vârful în origine care are trei generatoare coincizând cu axele de coordonate.

Problema 9.12. Să se scrie ecuaţia conului de rotaţie în jurul axei $y = 1,\ x = 2 + pz - p^2$, ştiind că acest con are generatoarea $y = 1, z = p$. Să se determine p, ştiind că acest con trece prin origine.

Problema 9.13. Să se afle ecuaţia suprafeţei generate prin rotirea curbei $y = \sin x,\ z = 0$ în jurul axei Ox.

Problema 9.14. Să se afle ecuaţia suprafeţei conoide generate de o dreaptă care rămâne paralelă cu planul xOy, se sprijină pe axa Oz şi este tangentă sferei

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2Rx = 0.$$

Problema 9.15. Să se afle ecuaţia suprafeţei generate de curba $z = e^{-x^2}, y = 0$ prin rotire în jurul axei Oz.

Problema 9.16. Să se afle ecuaţia conului cu vârful $V(0, -a, 0)$, având drept curbă directoare cercul

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, y + z = a.$$

Problema 9.17. Să se afle ecuaţia suprafeţei de rotaţie obţinute prin rotirea curbei $x^2 + y^2 = z^3, y = 0$ în jurul axei Oz.

Soluţie. Ecuaţiile cercurilor generatoare sunt

$$(G_{\mu,\nu}) : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = \lambda^2, \\ z = \mu. \end{cases}$$

Dacă adăugăm acestui sistem a doua ecuaţie a curbei directoare, obţinem sistemul

$$x^2 + y^2 + z^2 = \lambda^2, z = \mu, y = 0.$$

Din acest sistem, avem imediat $x^2 = \lambda^2 - \mu^2$, $y = 0$ şi $z = \mu$. După înlocuirea în prima ecuaţie a curbei directoare, pbţinem condiţia de compatibilitate sub forma

$$\lambda^2 - \mu^2 = \mu^3.$$

După substituirea lui λ şi μ din ecuaţiile generatoarelor, obţinem ecuaţia suprafeţei de rotaţie:

$$x^2 + y^2 + z^2 - z^2 = z^3$$

sau

$$x^2 + y^2 = z^3.$$

Remarcăm că rezultatul obţinut ne spune că, de fapt, curba directoare este, în realitate, un gerc generator al suprafeţei de rotaţie. □

Problema 9.18. Să se afle locul geometric al punctelor care se află la o distanţă egală cu 1 de dreapta $x = y = z$.

Problema 9.19. Să se afle ecuaţia conoidului generat de o dreaptă care rămâne paralelă cu planul $z = 0$ şi se sprijină pe dreapta $x = 0, y = a$ şi pe parabola $z^2 - 2px = 0,\ y = 0$.

Soluţie. Ecuaţiile generatoarelor conoidului sunt

$$(G_{\mu,\nu}) : \begin{cases} y - a = \lambda x, \\ z = \mu. \end{cases}$$

Rezolvăm acum sistemul format din ecuaţiile generatoarelor şi cea de-a doua ecuaţie a curbei directoare:

$$\begin{cases} y - a = \lambda x, \\ z = \mu, \\ y = 0. \end{cases}$$

Soluţia este, după cum ne putem convinge imediat, $x = -\dfrac{a}{\lambda}$, $y = 0$ şi $z = \mu$. Dacă înlocuim în prima ecuaţie a curbei directoare, obţinem

$$\mu^2 + 2p\frac{a}{\lambda} = 0$$

sau

$$\lambda\mu^2 + 2pa = 0.$$

Aceasta este condiţia de compatibilitate. Nu mai avem altceva de făcut decât să înlocuim în ea λ şi μ din ecuaţiile generatoarelor. După înlocuire, se obţine

$$\frac{y-a}{x}z^2 + 2pa = 0$$

sau

$$(y - a)z^2 + 2pax = 0.$$

□

Problema 9.20. Să se afle ecuaţia cilindrului de rotaţie de rază R a cărui axă de rotaţie este dreapta

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3}.$$

Problema 9.21. O dreaptă se mişcă sprijinindu-se pe axa Ox şi pe cercul $x = b, y^2 + z^2 = a^2$, rămânând paralelă cu planul $x + y + z = 0$. Să se scrie ecuaţia suprafeţei generate.

Problema 9.22. Se consideră sfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2.$$

Se taie cu planul

$$x + y + z = a.$$

Se cere:

1) să se determine raza cercului de secţiune a sferei cu planul;

2) să se scrie ecuaţia cilindrului ale cărui generatoare sunt paralele cu direcţia de parametri directori $(1, 1, 1)$ şi care se sprijină pe cercul menţionat la punctul precedent.

Problema 9.23. Un disc circular de rază $r = 1$ şi cu centrul în punctul $C(1, 0, 2)$ este paralel cu planul yOz. Pe axa Oz se află un punct luminos, astfel încât umbra aruncată de disc pe planul xOy are forma unei parabole. Să se afle ecuaţia parabolei.

Problema 9.24. Se dau dreapta de ecuaţii $x = 0,\ y + z = a$ şi cercul de ecuaţii $y = 0, x^2 + z^2 = a^2$. Să se scrie ecuaţia conoidului ale cărui generatoare se sprijină pe dreaptă şi cerc şi rămân paralele cu planul $z = 0$.

Problema 9.25. Să se scrie ecuaţia conoidului generat de o dreaptă care rămâne paralelă cu planul xOy, se sprijină pe axa Oz şi care este tangentă conului $(x - 1)^2 + y^2 = z^2$.

Problema 9.26. Stabiliţi ecuaţia unei suprafeţe cilindrice care are ca şi curbă directoare curba

$$(C) : \begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ z = 0, \end{cases}$$

iar generatoarele sunt paralele cu dreapta

$$\frac{x}{5} = \frac{y}{3} = \frac{z}{2}.$$

Problema 9.27. Stabiliţi ecuaţia unei suprafeţe cilindrice care are ca şi curbă directoare curba

$$(C) : \begin{cases} (x - 1)^2 + (y + 3)^2 + (z - 2)^2 = 25, \\ x + y - z + 2 = 0, \end{cases}$$

iar generatoarele sunt paralele cu axa Ox.

Problema 9.28. Stabiliţi ecuaţia unei suprafeţe cilindrice care are ca şi curbă directoare curba

$$(C) : \begin{cases} (x - 1)^2 + (y + 3)^2 + (z - 2)^2 = 25, \\ x + y - z + 2 = 0, \end{cases}$$

iar generatoarele sunt paralele cu dreapta

$$\begin{cases} x - y = 0, \\ z - c = 0, \end{cases}$$

unde c este o constantă.

Problema 9.29. Curba directoare a unei suprafeţe cilindrice este

$$(C) : \begin{cases} x = y^2 + z^2, \\ x = 2z, \end{cases}$$

iar generatoarele sunt perpendiculare pe planul curbei directoare. Stabiliţi ecuaţia suprafeţei cilindrice.

Problema 9.30. Să se scrie ecuaţia suprafeţei cilindrice care are drept curbă directoare elipsa

$$\begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 1 = 0, \\ z = 0, \end{cases}$$

iar generatoarele sunt paralele cu dreapta

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}.$$

Problema 9.31. Să se scrie ecuaţia suprafeţei cilindrice care are drept curbă directoare hiperbola

$$\begin{cases} \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} - 1 = 0, \\ z = 0, \end{cases}$$

iar generatoarele sunt paralele cu dreapta

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}.$$

Problema 9.32. Să se scrie ecuaţia suprafeţei cilindrice care are drept curbă directoare parabola

$$\begin{cases} z^2 - x = 0, \\ y = 0, \end{cases}$$

iar generatoarele sunt paralele cu dreapta

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}.$$

Problema 9.33. Să se determine ecuaţia suprafeţei cilindrice ale cărei generatoare sunt paralele cu dreapta

$$x = -2y = z,$$

iar curba directoare este dată de ecuaţiile

$$\begin{cases} x + y + z = 0, \\ 4y^2 - 2z^2 + x - 8y - 8z - 2 = 0. \end{cases}$$

Problema 9.34. Să se determine ecuaţia suprafeţei conice cu vârful în originea axelor şi a cărei curbă directoare este curba

$$\begin{cases} y^2 - x = 0, \\ 4x + 3y + 2z - 1 = 0. \end{cases}$$

Problema 9.35. Să se determine ecuaţia suprafeţei conice cu vârful $V(0, -1, 4)$ şi a cărei curbă directoare este cercul

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 6y - 1 = 0, \\ z = 0. \end{cases}$$

Problema 9.36. Să se scrie ecuaţia suprafeţei conice cu vârful în punctul de intersecţie a planelor

$$\begin{cases} x + 3z - 10 = 0, \\ y - 2 = 0, \\ x - z + 2 = 0 \end{cases}$$

şi cu curba directoare

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 3z^2 + 6xz - 4 = 0, \\ 5x + y - 3z = 0. \end{cases}$$

Problema 9.37. Să se determine ecuaţia suprafeţei conice cu vârful $V(0, -a, 0)$ şi a cărei curbă directoare este cercul

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4, \\ y + z = 2. \end{cases}$$

Problema 9.38. Să se determine ecuaţia suprafeţei conice cu vârful $V(0, b, 0)$ şi a cărei curbă directoare este hiperbola

$$\begin{cases} \dfrac{z^2}{c^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = 1, \\ y = 0. \end{cases}$$

Problema 9.39. Să se determine ecuaţia suprafeţei conice cu vârful $V(4, 0, -3)$ şi a cărei curbă directoare este elipsa

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{25} + \dfrac{z^2}{9} = 1, \\ x = 0. \end{cases}$$

Problema 9.40. Să se determine ecuaţia suprafeţei conice cu vârful $V(-3, 0, 0)$ şi a cărei curbă directoare este curba

$$\begin{cases} 3x^2 + 6y^2 - z = 0, \\ x + y + z = 0. \end{cases}$$

Problema 9.41. Să se determine ecuaţia suprafeţei conice cu vârful $V(2, 2, 2)$ şi a cărei curbă directoare este curba

$$\begin{cases} y^2 - 4x + 1 = 0, \\ z + 1 = 0. \end{cases}$$

Problema 9.42. Să se determine ecuaţia suprafeţei conoide generată de o dreaptă care se sprijină pe axa Oz, este paralelă cu planul xOy şi întâlneşte cercul

$$\begin{cases} y^2 + z^2 = a^2, \\ x = b. \end{cases}$$

Problema 9.43. Să se determine ecuaţia suprafeţei conoide generată de o dreaptă care se sprijină pe dreapta

$$\begin{cases} x = 2, \\ y = 0, \end{cases}$$

este paralelă cu planul xOy şi întâlneşte hiperbola

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{z^2}{9} = 1, \\ y = 2. \end{cases}$$

Problema 9.44. Să se determine ecuaţia suprafeţei conoide generată de o dreaptă care se sprijină pe axa Ox, este paralelă cu planul yOz şi întâlneşte curba

$$\begin{cases} z^2 - 2x = 0, \\ 9y^2 - 16xz = 0. \end{cases}$$

Problema 9.45. Să se determine ecuaţia suprafeţei conoide generată de o dreaptă care se sprijină pe dreptele

$$(D_1) : \begin{cases} 2x + z - 4 = 0, \\ 3y - 2z - 2 = 0, \end{cases}$$

$$(D_2) : \begin{cases} x - 2z = 0, \\ 2y - 3z + 4 = 0, \end{cases}$$

rămânând paralelă cu planul

$$(P) : \ x + 3y - z + 11 = 0.$$

Problema 9.46. Să se scrie ecuaţia suprafeţei conoide generată de o dreaptă care întâlneşte dreapta

$$x = y = z,$$

curba

$$\begin{cases} x^4 + y^4 - a^4 = 0, \\ z = 0 \end{cases}$$

şi este paralelă cu planul $x + y + z - 1 = 0$.

Problema 9.47. Să se scrie ecuaţia unei suprafeţe conoide generată de o dreaptă care se mişcă paralel cu planul xOy, se sprijină pe axa Oz şi intersectează parabola

$$\begin{cases} z = ax^2 + bx + c, \\ y = p. \end{cases}$$

Problema 9.48. Să se determine ecuaţia suprafeţei de rotaţie generate de hiperbola

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} - 1 = 0, \\ x = 0, \end{cases}$$

care se roteşte în jurul axei Oy.

Problema 9.49. Să se determine ecuaţia suprafeţei de rotaţie generate de curba

$$\begin{cases} x^3 - x^2 - y^2 = 0, \\ z = 0, \end{cases}$$

care se roteşte în jurul axei Ox.

Problema 9.50. Să se determine ecuaţia suprafeţei de rotaţie generate de cercul

$$\begin{cases} (y - a)^2 + z^2 - r^2 = 0, \\ x = 0, \end{cases}$$

care se roteşte în jurul axei Oz.

Problema 9.51. Să se determine ecuaţia suprafeţei de rotaţie generate de curba

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2z = 0, \\ x - 2y = 0, \end{cases}$$

care se roteşte în jurul dreptei $x = y = z$.

Problema 9.52. Să se determine ecuaţia suprafeţei ce se obţine prin rotirea dreptei

$$\begin{cases} x + z = 2, \\ y = 0 \end{cases}$$

în jurul dreptei

$$\begin{cases} x = 2, \\ y = 2. \end{cases}$$

Problema 9.53. Să se determine ecuaţia suprafeţei ce se obţine prin rotirea dreptei

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$$

în jurul dreptei

$$\frac{x}{4} = \frac{y}{5} = \frac{z}{6}.$$

SEMINARUL 10

Transformări geometrice în plan

În lista de probleme de mai jos, triunghiul ABC are vârfurile $A(1,1)$, $B(4,1)$, $C(2,3)$. Reprezentaţi, de fiecare dată, pe aceeaşi figură, triunghiul iniţial şi imaginea sa.

Problema 10.1. Determinaţi imaginea triunghiului ABC printr-o rotaţie de unghi 30° în jurul punctului $Q(2,2)$, urmată de o translaţie de vector $(1,2)$. Aplicaţi apoi transformările în ordine inversă.

Soluţie. Matricea de rotaţie se scrie, în forma generală, ca

$$\mathrm{Rot}(Q,\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & q_1(1-\cos\theta)+q_2\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta & -q_1\sin\theta+q_2(1-\cos\theta)\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

În cazul nostru concret,

$$\mathrm{Rot}(Q,\theta)=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 3-\sqrt{3}\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 1-\sqrt{3}\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Matricea translaţiei, în schimb, este

$$\mathrm{Trans}(1,2)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Începem cu prima transformare, în care se efectuează mai întâi rotaţia, urmată de translaţie. Aşadar, matricea primei transformări este

$$T_1=\mathrm{Trans}(1,2)\cdot\mathrm{Rot}\left((2,2),30^\circ\right)=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 4-\sqrt{3}\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 3-\sqrt{3}\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

În consecinţă, imaginea triunghiului este dată de

$$
\begin{bmatrix} A' & B' & C' \end{bmatrix} = T1 \cdot \begin{bmatrix} A & B & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 4-\sqrt{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 3-\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} =
$$

$$
= \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{7}{2} & \sqrt{3}+\frac{7}{2} & \frac{5}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{7}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}+5 & \frac{\sqrt{3}}{2}+4 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},
$$

deci coordonatele carteziene ale vârfurilor triunghiului $A'B'C'$ sunt $A'\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{7}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{7}{2}\right)$, $B'\left(\sqrt{3}+\frac{7}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}+\right.$ $C'\left(\frac{5}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}+4\right)$. (Vezi figura 10.1) Inversăm, acum, ordinea celor două transformări. Transformarea

Figura 10.1: Rotaţie, urmată de translaţie

care se obţine este

$$
T_2 = \mathrm{Rot}((2,2),30^\circ)\cdot \mathrm{Trans}(1,2) = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}+2 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.
$$

Prin urmare, imaginea triunghiului este dată de

$$
\begin{bmatrix} A' & B' & C' \end{bmatrix} = T2 \cdot \begin{bmatrix} A & B & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}+2 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} =
$$

$$
= \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2}+2 & \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{7}{2} & \frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{5}{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},
$$

ceea ce înseamnă că punctele triunghiului imagine au coordonatele carteziene $A'\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}+2\right)$, $B'\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{7}{2}\right.$ $C'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{5}{2}\right)$. (Vezi figura 10.2) □

Problema 10.2. Determinaţi imaginea triunghiului ABC printr-o scalare uniformă de factor de scală 2 relativ la punctul $Q(2,2)$.

Figura 10.2: Translaţie urmată de rotaţie

Soluţie. Matricea scalării uniforme de factor de scală s, relativ la punctul Q se scrie

$$\text{Scale}(Q, s) = \begin{bmatrix} s \cdot I_2 & (1-s)Q \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

sau, explicit,

$$\text{Scale}(Q, s) = \begin{bmatrix} s & 0 & (1-s)q_1 \\ 0 & s & (1-s)q_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

În cazul nostru concret, obţinem

$$\text{Scale}((2,2), 2) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

prin urmare, imaginea triunghiului ABC va fi dată de

$$\begin{bmatrix} A' & B' & C' \end{bmatrix} = \text{Scale}((2,2),2) \cdot \begin{bmatrix} A & B & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

adică imaginile vârfurilor sunt punctele $A'(0,0)$, $B'(6,0)$, $C'(2,4)$. (Vezi figura 10.3.) □

Figura 10.3: Scalare uniformă

Problema 10.3. Determinaţi imaginea triunghiului ABC printr-o scalare simplă neuniformă, de factori de scală $(2,1)$, relativ la punctul $Q(2,2)$.

Soluţie. Matricea unei scalări neuniforme de factori de scală s_x şi s_y, relativ la punctul Q este

$$\text{Scale}(Q, s_x.s_y) = \begin{bmatrix} s_x(\mathbf{i} \otimes \mathbf{i}) + s_y(\mathbf{j} \otimes \mathbf{j}) & (I_2 - s_x(\mathbf{i} \otimes \mathbf{i}) - s_y(\mathbf{j} \otimes \mathbf{j}) \cdot Q \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

sau, explicit

$$\text{Scale}(Q, s_x, s_y) = \begin{pmatrix} s_x & 0 & (1-s_x)q_1 \\ 0 & s_y & (1-s_y)q_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

În cazul nostru concret, avem

$$\text{Scale}((2,2), 2, 1) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

deci imaginea triunghiului prin scalare este dată de

$$\begin{bmatrix} A' & B' & C' \end{bmatrix} = \text{Scale}((2,2),2,1) \cdot \begin{bmatrix} A & B & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

deci coordonatele carteziene ale imaginilor vârfului triunghiului ABC vor fi $A'(0,1)$, $B'(6,1)$, $C'(2,3)$. (Vezi figura 10.4.) □

Figura 10.4: Scalare neuniformă

Problema 10.4. Determinaţi imaginea triunghiului ABC printr-o forfecare de unghi $45°$, relativ la punctul $Q(2,2)$, în direcţia vectorului $\mathbf{v}(2,1)$.

Soluţie. Matricea omogenă a forfecării de versor $\mathbf{w}$ şi unghi θ, relativ la punctul Q este

$$\mathrm{Shear}(Q,\mathbf{w},\theta)=\begin{pmatrix} I_2+\operatorname{tg}\theta\left(\mathbf{w}^\perp\otimes\mathbf{w}\right) & -\operatorname{tg}\theta\left(\mathbf{w}^\perp\otimes\mathbf{w}\right)\cdot Q\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Preferăm să utilizăm această formulă în locul formei extinse. Remarcăm, înainte de toate, că vectorul $\mathbf{w}$ din definiţia forfecării este un versor, adică un vector de lungime 1, prin urmare trebuie să înlocuim vectorul $\mathbf{v}$ din enunţ cu versorul său,

$$\mathbf{w}=\left(\frac{2}{\sqrt5},\frac{1}{\sqrt5}\right).$$

Calculăm, acum, produsul tensorial:

$$\mathbf{w}^\perp\otimes\mathbf{w}=\begin{bmatrix}w_1\\w_2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-w_2 & w_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-w_1w_2 & w_1^2\\ -w_2^2 & w_1w_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac25 & \frac25\\ -\frac15 & \frac25\end{bmatrix},$$

prin urmare

$$I_2+\operatorname{tg}\theta\left(\mathbf{w}^\perp\otimes\mathbf{w}\right)=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-\frac25 & \frac25\\ -\frac15 & \frac25\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac35 & \frac25\\ -\frac15 & \frac75\end{bmatrix},$$

în timp ce

$$-\operatorname{tg}\theta\left(\mathbf{w}^\perp\otimes\mathbf{w}\right)\cdot Q=\begin{bmatrix}\frac25 & -\frac25\\ \frac15 & -\frac25\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\-\frac25\end{bmatrix}.$$

Prin urmare, matricea extinsă a transformării este, în cazul nostru concret,

$$\mathrm{Shear}(Q,\mathbf{w},\theta)=\begin{bmatrix}\frac35 & \frac25 & 0\\ -\frac15 & \frac75 & -\frac25\\ 0&0&1\end{bmatrix}.$$

Imaginea triunghiului ABC prin forfecare este dată de

$$\begin{bmatrix}A' & B' & C'\end{bmatrix}=\mathrm{Shear}(Q,\mathbf{w},\theta)\cdot\begin{bmatrix}A & B & C\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac35 & \frac25 & 0\\ -\frac15 & \frac75 & -\frac25\\ 0&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&4&2\\1&1&3\\1&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & \frac{14}{5} & \frac{12}{5}\\ \frac85 & 1 & \frac{21}{5}\\ 1&1&1\end{bmatrix},$$

ceea ce înseamnă că imaginile vârfurilor triunghiului dat au coordonatele carteziene $A'\left(1,\frac85\right)$, $B'\left(\frac{14}{5},1\right)$, $C'\left(\frac{12}{5},\frac{21}{5}\right)$. (Vezi figura 10.5.) □

Figura 10.5: Forfecare

Problema 10.5. Aplicaţi forfecarea de la problema precedentă pătratului $ABCD$, cu $A(0,0)$, $B(3,0)$, $C(3,3)$ şi $D(0,3)$.

Soluţie. Am văzut deja care este matricea transformării, deci coordonatele omogene ale vârfurilor imaginii pătratului $ABCD$ sunt date de

$$\begin{bmatrix} A' & B' & C' & D' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ -\frac{1}{5} & \frac{7}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{9}{5} & 3 & \frac{6}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 4 & \frac{23}{5} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

deci imaginea pătratului dat va avea vârfurile $A'\left(0, \frac{2}{5}\right)$, $B'\left(\frac{9}{5}, -\frac{1}{5}\right)$, $C'(3,4)$ şi $D'\left(\frac{6}{5}, \frac{23}{5}\right)$. (Vezi figura 10.6.) □

Figura 10.6: Forfecare

Problema 10.6. Determinaţi imaginea pătratului de la problema precedentă prin forfecarea de vector $\mathbf{v}(1,1)$, de unghi 60°, relativ la origine.

Soluţie. Versorul vectorului $\mathbf{v}$ este

$$\mathbf{w} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

deci, după cum am văzut mai sus,

$$\mathbf{w}^{\perp} \otimes \mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -w_2 & w_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -w_1 w_2 & w_1^2 \\ -w_2^2 & w_1 w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

deci, după cum se constată uşor, matricea transformării este

$$\operatorname{Shear}(Q, \mathbf{w}, \theta) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Prin urmare, imaginea pătratului este dată de

$$\begin{bmatrix} A' & B' & C' & D' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 - \frac{3\sqrt{3}}{2} & 3 & \frac{3\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{3\sqrt{3}}{2} & 3 & 3 + \frac{3\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix},$$

aşadar vârfurile imaginii pătratului sunt $A'(0,0)$, $B'\left(3 - \frac{3\sqrt{3}}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$, $C'(3,3)$, $D'\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, 3 + \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.
(Vezi figura 10.7.) □

Figura 10.7: Forfecare

Problema 10.7. Determinaţi imaginea triunghiului ABC prin reflexia relativ la dreapta $2x+3y-5=0$.

Soluţie. Matricea omogenă a unei reflexii faţă de dreapta care trece prin Q şi are versorul director $\mathbf{w}$ este

$$\operatorname{Mirror}(Q,\mathbf{w}) = \begin{bmatrix} I_2 - 2\left(\mathbf{w}^\perp \otimes \mathbf{w}^\perp\right) & 2\left(\mathbf{w}^\perp \otimes \mathbf{w}^\perp\right)\cdot Q \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

În cazul nostru, un vector director al dreptei este $\mathbf{v}(3,-2)$, deci un versor director este

$$\mathbf{w} = \left(\frac{3}{\sqrt{13}}, -\frac{2}{\sqrt{13}}\right),$$

prin urmare

$$\mathbf{w}^\perp \otimes \mathbf{w}^\perp = \begin{bmatrix} -w_2 \\ w_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -w_2 & w_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_2^2 & -w_1w_2 \\ -w_1w_2 & w_1^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{13} & \frac{6}{13} \\ \frac{6}{13} & \frac{9}{13} \end{bmatrix}.$$

În consecinţă,

$$I_2 - 2\left(\mathbf{w}^\perp \otimes \mathbf{w}^\perp\right) = \begin{bmatrix} \frac{5}{13} & -\frac{12}{13} \\ -\frac{12}{13} & -\frac{5}{13} \end{bmatrix}.$$

Un punct de pe dreaptă este $Q(1,1)$, prin urmare avem

$$2\left(\mathbf{w}^\perp \otimes \mathbf{w}^\perp\right)\cdot Q = \begin{bmatrix} \frac{8}{13} & \frac{12}{13} \\ \frac{12}{13} & \frac{18}{13} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{20}{13} \\ \frac{30}{13} \end{bmatrix}.$$

În consecinţă, matricea reflexiei este

$$\operatorname{Mirror}(Q,\mathbf{w}) = \begin{bmatrix} \frac{5}{13} & -\frac{12}{13} & \frac{20}{13} \\ -\frac{12}{13} & -\frac{5}{13} & \frac{30}{13} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Imaginea triunghiului ABC va fi dată de

$$\begin{bmatrix} A' & B' & C' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{13} & -\frac{12}{13} & \frac{20}{13} \\ -\frac{12}{13} & -\frac{5}{13} & \frac{30}{13} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{28}{13} & -\frac{6}{13} \\ 1 & -\frac{23}{13} & -\frac{9}{13} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(Vezi figura 10.8.)

Figura 10.8: Reflexie

□

Problema 10.8. Determinaţi imaginea triunghiului ABC prin reflexia relativ la dreapta AB.

Soluţie. Scriem, mai întâi, ecuaţia dreptei AB: $y = 1$. Vectorul director al dreptei este $\mathbf{w} = \mathbf{i}$. După cum am văzut la o problemă precedentă, matricea omogenă a reflexiei (în forma bloc) va fi

$$\mathrm{Mirror}(A, \mathbf{i}) = \begin{bmatrix} I_2 - 2\left(\mathbf{i}^\perp \otimes \mathbf{i}^\perp\right) & 2\left(\mathbf{i}^\perp \otimes \mathbf{i}^\perp\right) \cdot A \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dar

$$\mathbf{i}^\perp = (0, 1),$$

deci

$$\mathbf{i}^\perp \otimes \mathbf{i}^\perp = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

aşadar

$$I_2 - 2\left(\mathbf{i}^\perp \otimes \mathbf{i}^\perp\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

în timp ce

$$2\left(\mathbf{i}^\perp \otimes \mathbf{i}^\perp\right) \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

În concluzie, matricea reflexiei este

$$\mathrm{Mirror}(A, \mathbf{i}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

De aceea, imaginea triunghiului prin reflexia faţă de dreapta AB este dată de

$$\begin{bmatrix} A' & B' & C' \end{bmatrix} = \mathrm{Mirror}(A, \mathbf{i}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

□

Problema 10.9. Determinaţi imaginea triunghiului ABC prin reflexia relativ la dreapta BC, urmată de o forfecare, de unghi $60°$, relativ la punctul A, în direcţia vectorului $\mathbf{v}(1, 1)$.

Problema 10.10. Determinaţi imaginea triunghiului ABC prin rotaţia cu $90°$ în jurul punctului C, urmată de reflexia relativ la dreapta AB.

Figura 10.9: Rotaţie urmată de reflexie

Soluţie. □

Problema 10.11. Determinaţi imaginea triunghiului ABC prin scalarea simplă neuniformă de factori $(1, 2)$ relativ la punctul B, urmată de o rotaţie de $30°$ în jurul punctului $Q(1, 1)$.

Problema 10.12. Aplicaţi o rotaţie de unghi $45°$ triunghiului ABC, cu $A(0, 0)$, $B(1, 1)$, $C(5, 2)$:

(a) în jurul originii;

(b) în jurul punctului $P(-1, -1)$.

Problema 10.13. Măriţi de două ori dimensiunile triunghiului ABC, cu $A(0,0)$, $B(1,1)$, $C(5,2)$, astfel încât punctul $C(5,2)$ să rămână fix.

Problema 10.14. Reflectaţi rombul de vârfuri $A(-1,0)$, $B(0,-2)$, $C(1,0)$ şi $D(0,2)$ faşă de:

(a) dreapta orizontală $y = 2$;

(b) dreapta verticală $x = 2$;

(c) dreapta $y = x + 2$.

Problema 10.15. Demonstraţi că ordinea în care se fac transformările este importantă aplicând triunghiului de vârfuri $A(1,0)$, $B(0,1)$, $C(1,1)$:

(a) o rotaţie de unghi 45° în jurul originii, urmată de o translaţie de vector $(1,0)$;

(b) o translaţie de vector $(1,0)$, urmată de o rotaţie de unghi 45° în jurul originii.

Problema 10.16. Determinaţi matricea unei transformări care constă dintr-o reflexie faţă de dreapta $y = x$, urmată de o reflexie faţă de dreapta $y = \sqrt{3}x$.

Problema 10.17. Determinaţi imaginea dreptunghiului de vârfuri $A(0,0)$, $B(2,0)$, $C(2,1)$ şi $D(0,1)$ prin forfecarea relativ la origine în direcţia axei Ox, de raport 3.

Problema 10.18. Determinaţi imaginea dreptunghiului de vârfuri $A(0,0)$, $B(2,0)$, $C(2,1)$ şi $D(0,1)$ prin forfecarea relativ la origine în direcţia axei Oy, de raport 2.

Problema 10.19. Determinaţi imaginea dreptunghiului de vârfuri $A(0,0)$, $B(2,0)$, $C(2,1)$ şi $D(0,1)$ prin forfecarea relativ la origine în direcţia versorului $\mathbf{v}(3/5, 4/5)$, de raport 2.

SEMINARUL 11

Transformări geometrice în spaţiu

Problema 11.1. Determinaţi matricea unei rotaţii de unghi $\pi/6$, în jurul axei Oy, urmate de translaţia $T(1,-1,2)$.

Soluţie. Matricea unei rotaţii de unghi $\pi/6$ în jurul axei Oy este

$$Rot_y\left(\frac{\pi}{6}\right)=\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{6} & 0 & \sin\frac{\pi}{6} & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ -\sin\frac{\pi}{6} & 0 & \cos\frac{\pi}{6} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

în timp ce matricea unei translaţii de vector $(1,-1,2)$ este

$$T(1,-1,2)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Prin urmare, matricea de transformare este, în cazul nostru,

$$M=T(1,-1,2)\cdot Rot_y\left(\frac{\pi}{6}\right)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

□

Problema 11.2. Determinaţi matricea rotaţiei de unghi $\pi/4$ în jurul dreptei determinate de punctele $P(2,1,5)$ şi $Q(4,7,2)$.

Soluţie. Reamintim că strategia pentru determinarea matricii de rotaţie de unghi θ în jurul unei axe oarecare, care trece prin punctele $P(p_1,p_2,p_3)$ şi $Q(q_1,q_2,q_3)$ constă în următorii paşi:

(i) Se determină mai întâi vectorul director al axei, $\overrightarrow{PQ}$ şi versorul asociat acestei axe, $\overrightarrow{R}(r_1,r_2,r_3)$.

(ii) Aplicăm translaţia $T(-p_1, -p_2, -p_3)$ care duce punctul P în origine, deci imaginea axei prin această translaţie este o dreaptă care trece prin origine. Dacă axa este paralelă cu una dintre axele de coordonate, atunci aproape am terminat. De exemplu, dacă axa este paralelă cu Ox (adică dacă $r_1 = \pm 1$, în timp ce $r_2 = r_3 = 0$), atunci matricea de transformare este

$$M = T(p_1, p_2, p_3) \cdot Rot_x(\theta) \cdot T(-p_1, -p_2, -p_3).$$

(iii) Presupunem că r_2 şi r_3 nu se anulează simultan. Facem o rotaţie de unghi θ_x în jurul axei Ox astfel încât axa de rotaţie originală să ajungă în planul xOy. Funcţiile trigonometrice ale unghiului θ_x sunt date de

$$\sin\theta_x = \frac{r_2}{\sqrt{r_2^2 + r_3^2}}, \quad \cos\theta_x = \frac{r_3}{\sqrt{r_2^2 + r_3^2}}.$$

(iv) Aplicăm o rotaţie de unghi $-\theta_y$ în jurul axei Oy, în aşa fel încât axa de rotaţie să se suprapună peste axa Oz. Funcţiile trigonometrice ale unghiului θ_y sunt

$$\sin\theta_y = r_1, \quad \cos\theta_y = \sqrt{r_2^2 + r_3^2}.$$

(v) Aplicăm o rotaţie de unghi θ în jurul axei Oz.

(vi) Aplicăm inversele transformărilor de la punctele (ii) – (iv), în ordine inversă.

Recapitulând, matricea rotaţiei de unghi θ în jurul axei date se poate scrie ca:

$$Rot(\theta) = T(p_1, p_2, p_3) \cdot Rot_x(-\theta_x) \cdot Rot_y(\theta_y) \cdot Rot_z(\theta) \cdot Rot_y(-\theta_y) \cdot Rot_x(\theta_x) \cdot T(-p_1, -p_2, -p_3)$$

Aplicăm acum acest algoritm la cazul nostru concret.
Începem prin a determina vectorul director al axei, adică

$$\overrightarrow{PQ} = (4, 7, 2) - (2, 1, 5) = (2, 6, -3).$$

Versorul asociat acestui vector este

$$\overrightarrow{R} = \frac{\overrightarrow{PQ}}{\left\|\overrightarrow{PQ}\right\|} = \frac{1}{7}(2, 7, -3) = \left(\frac{2}{7}, \frac{6}{7}, -\frac{3}{7}\right).$$

Calculăm acum funcţiile trigonometrice ale unghiurilor θ_x şi θ_y. Avem:

$$\sin\theta_x = \frac{r_2}{\sqrt{r_2^2 + r_3^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \cos\theta_x = \frac{r_3}{\sqrt{r_2^2 + r_3^2}} = -\frac{1}{\sqrt{5}},$$
$$\sin\theta_y = r_1 = \frac{2}{7}, \quad \cos\theta_y = \sqrt{r_2^2 + r_3^2} = \frac{3}{7}\sqrt{5}.$$

Avem acum tot ce ne trebuie ca să scriem explicit cele şapte matrici care intră in descompunerea matricii de rotaţie căutate.

$$T(-2, -1, -5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Rot_x(\theta_x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$Rot_y(-\theta_y) = \begin{pmatrix} \frac{3}{7}\sqrt{5} & 0 & -\frac{2}{7} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{7} & 0 & \frac{3}{7}\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Rot_z\left(\frac{\pi}{4}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$Rot_y(\theta_y) = \begin{pmatrix} \frac{3}{7}\sqrt{5} & 0 & \frac{2}{7} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{7} & 0 & \frac{3}{7}\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Rot_x(-\theta_x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$T(2,1,5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aşadar, matricea de rotaţie căutată se poate scrie:

$$M = Rot(\pi/4) = T(2,1,5) \cdot Rot_x(-\theta_x) \cdot Rot_y(\theta_y) \cdot Rot_z(\pi/4) \cdot Rot_y(-\theta_y) \cdot Rot_x(\theta_x) \cdot T(-2,-1,-5) =$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{M_1} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{3}{7}\sqrt{5} & 0 & \frac{2}{7} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{7} & 0 & \frac{3}{7}\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{M_2} \times$$

$$\times \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{3}{7}\sqrt{5} & 0 & -\frac{2}{7} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{7} & 0 & \frac{3}{7}\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{M_3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \underbrace{\overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 1 \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}^{M_1} \cdot \overbrace{\begin{pmatrix} \frac{3}{14}\sqrt{10} & -\frac{3}{14}\sqrt{10} & \frac{2}{7} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{7} & \frac{\sqrt{2}}{7} & \frac{3}{7}\sqrt{5} & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}^{M_2}}_{M_4} \times$$

$$\times \underbrace{\overbrace{\begin{pmatrix} \frac{3}{7}\sqrt{5} & -\frac{4}{7\sqrt{5}} & \frac{2}{7\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{2}{7} & \frac{6}{7} & -\frac{3}{7} & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}^{M_3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{M_5} =$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 3/14\,\sqrt{5}\sqrt{2} & -3/14\,\sqrt{5}\sqrt{2} & 2/7 & 2 \\ -\frac{11}{70}\,\sqrt{5}\sqrt{2} & -\frac{3}{70}\,\sqrt{5}\sqrt{2} & 6/7 & 1+2\,\sqrt{5} \\ -\frac{6}{35}\,\sqrt{5}\sqrt{2} & -\frac{8}{35}\,\sqrt{5}\sqrt{2} & -3/7 & 5-\sqrt{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{M_4} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 3/7\,\sqrt{5} & -\frac{4}{35}\,\sqrt{5} & \frac{2}{35}\,\sqrt{5} & -\frac{36}{35}\,\sqrt{5} \\ 0 & -1/5\,\sqrt{5} & -2/5\,\sqrt{5} & \frac{11}{5}\,\sqrt{5} \\ 2/7 & 6/7 & -3/7 & \frac{40}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{M_5} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{45}{98}\,\sqrt{2}+\frac{4}{49} & \frac{9}{98}\,\sqrt{2}+\frac{12}{49} & \frac{24}{49}\,\sqrt{2}-\frac{6}{49} & -\frac{339}{98}\,\sqrt{2}+\frac{178}{49} \\ -\frac{33}{98}\,\sqrt{2}+\frac{12}{49} & \frac{13}{98}\,\sqrt{2}+\frac{36}{49} & \frac{2}{49}\,\sqrt{2}-\frac{18}{49} & \frac{33}{98}\,\sqrt{2}+\frac{289}{49}+2\,\sqrt{5} \\ -\frac{18}{49}\,\sqrt{2}-\frac{6}{49} & \frac{16}{49}\,\sqrt{2}-\frac{18}{49} & \frac{20}{49}\,\sqrt{2}+\frac{9}{49} & -\frac{80}{49}\,\sqrt{2}+\frac{125}{49}-\sqrt{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

□

Problema 11.3. Determinaţi matricea unei rotaţii de unghi $5\pi/6$ relativ la dreapta care trece prin punctele $P(2,1,2)$ şi $Q(8,3,5)$.

Problema 11.4. Determinaţi matricea reflexiei faţa de planul $2x - y + 2z - 2 = 0$.

Soluţie. Formula pentru transformare este

$$M = T(p_1, p_2, p_3) Rot_x(-\theta_x) Rot_y(\theta_y) R_{xy} Rot_y(-\theta_y) Rot_x(\theta_x) T(-p_1, -p_2, -p_3),$$

unde unghiurile θ_x, θ_y se determină cu aceleaşi formule ca şi în cazul rotaţiei în spaţiu, iar (p_1, p_2, p_3) sunt coordonatele unui punct din planul dat. În cazul nostru concret, se poate alege punctul $(1,0,0)$. După efectuarea calculelor, se obţine matricea:

$$\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 4 & -8 & 8 \\ 4 & 7 & 4 & -4 \\ -8 & 4 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

□

Problema 11.5. Piramida definită de punctele $A(0,0,0)$, $B(1,0,0)$, $C(0,1,0)$ şi $D(0,0,1)$ este rotită cu 45° în jurul dreptei de vector director $\mathbf{v}(0,1,1)$ şi care trece prin punctul $C(0,1,0)$. Determinaţi coordonatele vârfurilor figurii rotite.

Problema 11.6. Determinaţi matricea unei reflexii faţă de planul de vector normal $\mathbf{n}(1,1,1)$ şi care trece prin origine.

Problema 11.7. Un poliedru este definit de matricea vârfurilor, în coordonate omogene:

$$[P] = \begin{bmatrix} -10 & -10 & -8.5 & 10 & 10 & -10 & -10 & -8.5 & 10 & 10 \\ -3 & 1 & 3 & 3 & -3 & -3 & 1 & 3 & 3 & -3 \\ -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rotiţi poliedrul faţă de origine astfel încât planul definit de punctele P_1, P_5, P_{10} şi P_6 să devină paralel cu planul xOy.

Problema 11.8. Rotiţi punctul $P(1,-1,-1)$ cu 45° în jurul dreptei determinate de punctele $A(1,2,1)$ şi $B(2,1,4)$.