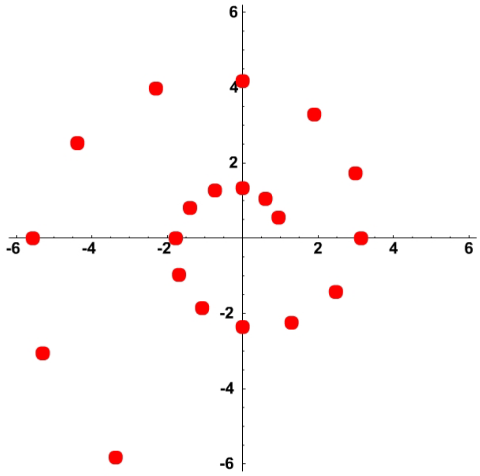
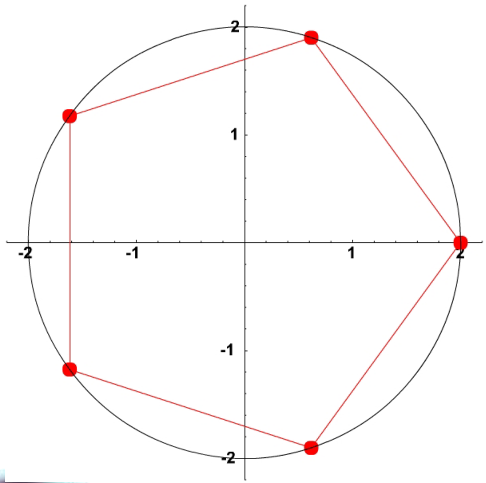
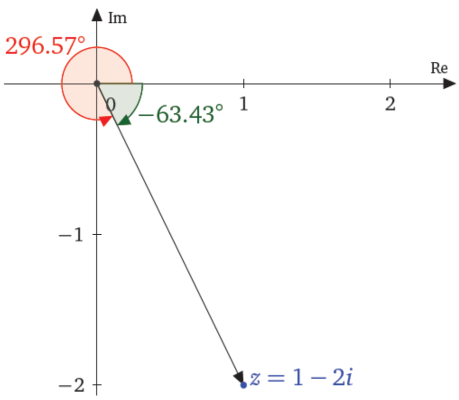




SCT. KNUDS GYMNASIUM

KOMPLEKSE TAL



Opgaver til noterne kan findes her. PDF

Facit til opgaverne kan findes her. PDF

Henrik S. Hansen, version 3.1

Indhold

Tallenes udvikling

(Efterfølgende afsnit er hentet fra)

Jørgen Ebert

KOMPLEKSE TAL

- en historisk og aksiomatisk introduktion -

Tallene er alle tings væsen, sagde Pythagoras. Han mente, at vejen til sjælens frigørelse lå i et studium af de talmæssige forhold, som gør naturen til et harmonisk kosmos. Selv om vi nu til dags - cirka 2500 år senere - nok ikke ville udtrykke os helt på denne måde, må vi indrømme, at tallene spiller en væsentlig rolle for vores forståelse af verden. Vi har opnået så stor fortrolighed med dem, at vi er tilbøjelige til at betragte dem som evige og naturgivne. Men den opfattelse er forkert.

Ideen om tallene er skabt af mennesker, som gennem årtusinder har forbedret regnekunsten. Den mest betydningsfulde drivkraft har været skiftende kulturers forsøg på at forklare naturens forskelligartede fænomener som for eksempel årstidernes rytme og månens bevægelser. Men også rent praktiske gøremål har inspireret. Oldtidsbonden har haft brug for at holde styr på antallet af husdyr, og søfareren behøvede en vis form for navigation.

Alle disse aktiviteter involverede beregninger, som blev mere og mere avancerede i takt med naturvidenskabernes udvikling. Når kravene til tallenes anvendelighed steg, måtte man udvide og forbedre forældede talsystemer. De reelle tal bør derfor betragtes som en kulturel frembringelse, der har været undervejs, siden de første civilisationer opstod.

Historien slutter ikke med de reelle tal. For kun et par hundrede år siden lykkedes det at udvide dem, så vi i dag har en endnu mere anvendelig talstruktur til rådighed - de komplekse tal.

Følgende oversigt fremhæver i stærkt forenklet form nogle af hovedpunkterne i tallenes regnemæssige udvikling frem mod de komplekse tal.

Tallenes udvikling

Lige siden hulemanden hentede mad til familien har tallene spillet en rolle, i den måde vi har eksisteret på. Det har været vigtigt at holde styr på gårdens dyr, lave budgetter, handle og ikke mindst at forstå verden og naturen omkring os.
For de gamle filosoffer, som Pythagoras, har tallene, og den ”magi” som omsluttede dem, altid været et mysterium, som skulle udforskes. Pythagoras sagde engang ”Tallene er alle tings væsen”. Hans store pointe må være, at uanset hvor vi vender os hen, så er tal på en eller anden måde indblandet.
Vi skal nu tage en kort og meget forsimplet rejse igennem tallenes udvikling. Jeg skal prøve at koble en lille historie på undervejs.

De naturlige tal

Den første primitive landmand/hulemand, der skal holde styr på sit dyrehold, har haft brug for at tælle hele dyr ”1 ged, 2 geder osv”.
Disse tal kaldes de naturlige tal og er den mest primitive af de vores talmængder.
$N = \{1, 2, 3, ...\}$.
Efterhånden som samfundet udviklede sig, begyndte man at handle/bytte varer. En ko var måske to geder værd, men hvad nu hvis bonden kun havde én ged men alligevel købte en ko, hvor mange geder skyldte han så væk?
For matematikeren var problemet at $10 + x = 8$ ikke kunne løses ved brug af de naturlige tal.

De hele tal

For at kunne løse alle ligninger af formen $a + x = b$, hvor $a \text{ og } b$ tilhører de naturlige tal $(a, b \in N)$ er det nødvendigt at udvide de naturlige tal til også at omfatte nul og de negative hele tal. Dermed har vi mængden af alle de hele tal:
$Z = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$.
Først i 1600-tallet begyndte negative tal at blive regnet for egentlig tal, og helt frem til starten af 1800-tallet blev det blandt europæiske akademikere diskuteret, hvorvidt negative tal og nul skulle tillades i matematikken.
Nu kunne bonden handle med hele dyr, men hvad nu hvis ham og naboen skulle ”dele” en ko, hvor meget fik de så hver?
For matematikeren var problemet, at $4 \cdot x = 2$ ikke kunne løses ved at benytte tallene fra Z.

De rationale tal

Man kan kun løse alle ligninger af typen $a \cdot x = b$ med $a \neq 0$, såfremt man udvider talmængden til også at omfatte alle brøker hvor tæller og nævner er et tal fra Z. Denne mængde kaldes de rationale tal:
$Q = \left\{\frac{a}{b} | a \in Z \wedge b \in Z \wedge b \neq 0\right\}$, og læses som Q er mængde af de tal som kan skrives som en brøk $\frac{a}{b}$ hvor om der gælder at a tilhører de hele tal og b tilhører de hele tal og b skal være forskellig fra 0.
De rationale tal indeholder ligeledes alle hele tal, da eks. $\frac{4}{1} = 4$. Næsten alle praktiske regneopgaver kan løses uden at forlade de rationale tal, så nu havde den almindelige borger ikke længere så mange problemer i deres indbyrdes ageren.
For matematikeren var der dog stadig problemer. Eks. at $2 = x^2$ ikke havde nogen løsning i de rationaletal, da $\sqrt{2}$ ikke kan skrives som en brøk. Ej heller kan det meget kendte π.

Så der var altså stadig ”huller” i talrækken.

De reelle tal

Indførelsen af de irrationale tal medførte en om sig gribende indflydelse på måden at anskue verden på. Indtil da var man overbevist om, at alt omkring i naturen kunne udtrykkes ved hjælp af simple rationale tal. Et eksempel på hvor stor en omvæltning denne indførelse var, er historien om Hippasus. Han var en del af den Pythagoræiske skole, og her var verden beskrevet ved de ratinale tal. Da han opdagede de irrationale tal, fortæller historien at han kort tid efter omkom til havs.
Med udvidelsen af de irrationale tal har vi nu de reelle tal R. Vores talrække er fuldstændig.
MEN desværre var der stadig problemer for matematikerne, for $x^2 = -1$ kunne ikke lade sig gøre.

De komplekse tal

Det ville lette mange beregninger, hvis det var tilladt at uddrage kvadratroden af -1.
Der er jo ikke ”mere plads” i vores tallinje, så en udvidelse af de reelle tal må tænkes anderledes.
Derfor udvides samtlige reelletal med en imaginær del. Et komplekst tal eks. $z = 2 - 4i$ består af det reelletal 2 (realdelen) og den imaginære del -4.
På denne måde anskues talmængden ikke længere på en tallinje, men i et koordinatsystem.
De komplekse tal betegnes C

Indledning

Hvis vi skal løse andengradsligningen $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ så bruger vi løsningsformlen

(1) $$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Vi plejer at sætte $d = b^2 - 4ac$ og at kalde d for diskriminanten. Hvis d > 0 er der to løsninger, hvis d = 0 er der én løsning, og hvis d < 0 er der så ingen løsning.

Som vi så i ”Intro til kompleksetal.docx”, havde andengradsligningen

(2) $$x^2 + 1 = 0$$

ikke nogen løsning, idet der ikke findes et reelt tal, som ganget med sig selv giver -1. Hvis vi alligevel prøver at bruge den sædvanlige løsningsformel, (1), for andengradsligninger, får vi

$$x = \frac{-0 \pm \sqrt{0^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{\sqrt{-4}}{2} = \frac{2\sqrt{-1}}{2} = \sqrt{-1}$$

Nu prøver vi at godtage $\sqrt{-1}$ som en løsning, selvom vi godt ved, at $\sqrt{-1}$ ikke er et reelt tal. Hvis $\sqrt{-1}$ skal være en løsning, må der gælde

(3) $\left(\sqrt{-1}\right)^2 = -1$

eller m.a.o., at $\sqrt{-1}$ er et tal, som ganget med sig selv giver -1.

I de tilfælde, hvor en andengradsligning ikke har nogen løsning inden for de reelle tal, kan løsningsformlen altid omskrives, så den står på formen

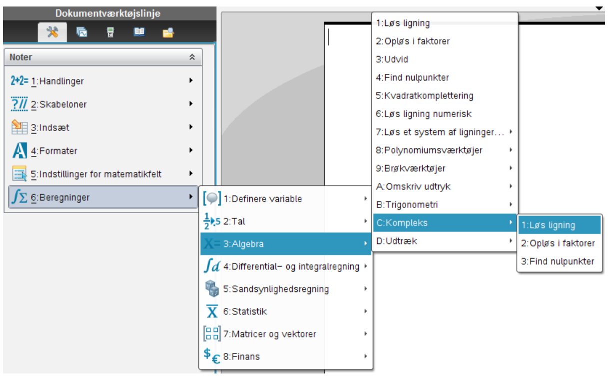
$$x = a_1 + a_2 \cdot \sqrt{-1}, a_1 \wedge a_2 \in R$$

og man kan sagtens regne med tal på formen $a_1 + a_2 \cdot \sqrt{-1}$, når blot man husker at bruge regel (3) samt regnereglerne for de reelle tal. I praksis erstatter vi $\sqrt{-1}$ med i og skriver $a_1 + a_2 \cdot i$

I Nspire benytter vi csolve til at bestemme de komplekse løsninger.

$$csolve(x^2 + 1 = 0, x) \rightarrow x = i \; or \; x = -i$$

Kan også findes i menuen:



Lav opgaver i [hæftet]

Komplekse tal

Definition

Vi vil nu definere, hvad der skal forstås ved et komplekst tal.

Tallet i er givet ved

$$i = \sqrt{-1}$$

Ifølge det foregående afsnit betyder det, at $i^2 = -1$.

De komplekse tal består af mængden af alle tal, der kan skrives på formen

$z = x + y \cdot i, x \wedge y \in R$

De komplekse tal betegnes C og i kaldes den imaginære enhed.

De reelle tal x og y kaldes hhv. realdelen og imaginærdelen af det komplekse tal og betegnes hhv. Re(z) og Im(z). Hvis $x = 0$ kaldes $z = y \cdot i$ et rent imaginært tal. Hvis er $y = 0$ og $z = x$, så er det et reelt tal. Derfor er de reelle tal en delmængde af de komplekse tal.

Hvis $z = x + y \cdot i$ kaldes $\bar{z} = x - y \cdot i$ det komplekst konjugerede tal til z.

Eksempel

$z = 2 + 3i$ er et komplekst tal med realdel 2 og imaginærdel 3.

$\bar{z} = 2 - 3i$ det konjugerede tal til z

$z = 5$ er et reelt tal.

$z = 7i$ er et rent imaginært tal.

Eksempelvis:

Find de komplekse løsninger til $-2x^2 + 4x - 34 = 0$ og angiv realdelen og den imaginære del.

Først finder jeg løsningerne ved $csolve(-2x^2 + 4x - 34 = 0, x) \rightarrow x = 1 + 4i \ or \ x = 1 - 4i$

De komplekse løsninger er altså $z = 1 + 4i$, hvor $Re(z) = 1$ og $Im(z) = 4$, eller $z_2 = 1 - 4i$ hvor $Re(z_2) = 1$ og $Im(z_2) = -4$

Lav opgaver i hæftet

Regning med komplekse tal

Addition, subtraktion, multiplikation og division foregår på samme måde som for reelle tal. Man skal blot huske på, at $i^2 = -1$.

Sætning 1

Lad $z = x_1 + y_1 \cdot i$ og $w = x_2 + y_2 \cdot i$ være to komplekse tal. Så gælder:

- Sum af de to tal: læg realdelene og imaginærdelene sammen hver for sig, dvs.:
  $z + w = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) \cdot i$
- Differens af de to tal: På samme måde som ved en sum regnes på real- og imaginærdele for sig.
  $z - w = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) \cdot i$
- Konstant gange et tal: konstanten ganges på både realdelen og imaginærdelen.
  $k \cdot z = k \cdot x_1 + k \cdot y_1 \cdot i$

Bevis:

Sum, differens og konstant gange et tal føres som øvelser i klassen

Hertil skal det nævnes at to komplekse tal er identiske præcis hvis.

$Re(z) = Re(w)$ og $Im(z) = Im(w)$

Multiplikation og division med komplekse tal, er lidt mere besværligt.

Sætning 2

Lad $z = x_1 + y_1 \cdot i$ og $w = x_2 + y_2 \cdot i$ være to komplekse tal. Så gælder:

- Multiplikation giver et nyt komplekst tal
  $z \cdot w = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) + (x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1) \cdot i$
- Division foretages ved at forlænge med nævnerens komplekst konjugerede og giver et nyt komplekst tal.
  $\frac{z}{w} = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{x_2 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_2}{x_2^2 + y_2^2} i$

Bevis:

Multiplikation (gange):

$z \cdot w = (x_1 + y_1 \cdot i)(x_2 + y_2 \cdot i) = x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot y_2 \cdot i + x_2 \cdot y_1 \cdot i + y_1 \cdot i \cdot y_2 \cdot i =$

$x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 \cdot i^2 + (x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1) \cdot i = x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2 + (x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1) \cdot i$

Hermed vist

Division:

$$\frac{z}{w} = \frac{z \cdot \overline{w}}{w \cdot \overline{w}} = \frac{(x_1 + y_1 \cdot i)(x_2 - y_2 \cdot i)}{(x_2 + y_2 \cdot i)(x_2 - y_2 \cdot i)} = \frac{x_1 \cdot x_2 - x_1 \cdot y_2 \cdot i + x_2 \cdot y_1 \cdot i - y_1 \cdot y_2 \cdot i^2}{x_2^2 - y_2^2 i^2}$$

$$= \frac{x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2 \cdot i^2 + x_2 \cdot y_1 \cdot i - x_1 \cdot y_2 \cdot i}{x_2^2 - y_2^2 i^2}$$

$$= \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + i(x_2 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_2)}{x_2^2 + y_2^2}$$

$$\frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{i(x_2 y_1 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{(x_2 y_1 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2} i$$

Hermed vist

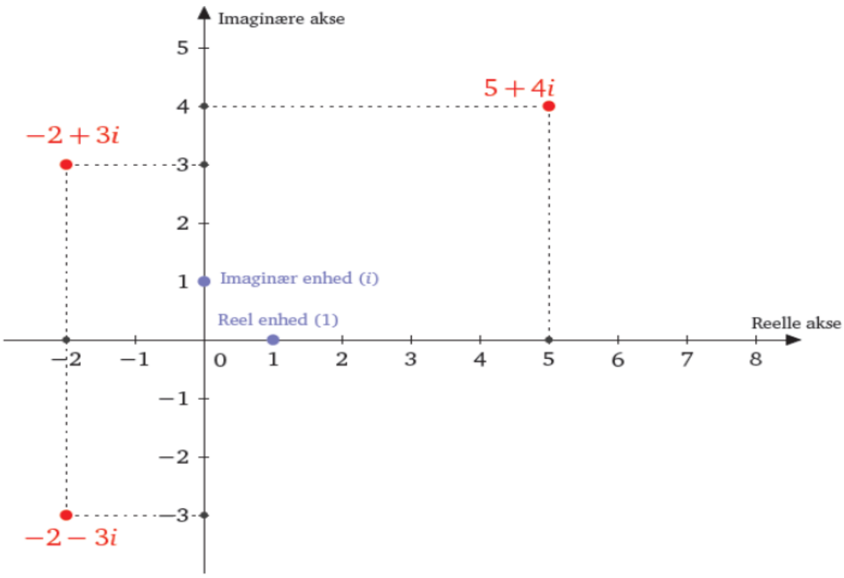
Lav opgaver i [hæftet]

Den komplekse talplan – modulus og argument.

Vi har fra de naturlige tal hele tiden udvidet vores talakse til at indeholde flere og flere tal. Ved de reelle tal var vores tallinje komplet (ingen huller). Vi har endvidere siden 1g været vant til at tegne reelle tal på en tallinje/talakse. På den måde har vi kunnet identificere et punkt på talaksen med et reelt tal – og et reelt tal har vi kunnet tegne som ét punkt på talaksen. Men med udvidelsen af de komplekse tal møder vi et illustrationsproblem med vores nuværende tallinje.

I sidste afsnit indførte vi de komplekse tal og specielt set på den imaginære enhed *i*. Men vi mangler at sige mere præcist hvad *i* ”er”, og kigge på hvordan vi kan angive det i forhold til vores reelle tallinje. Da vi til et hvert reelt tal nu kan koble uendelig mange imaginære tal, så vil det for de fleste give god mening at illustrere dette ved et ”koordinatsystem”.

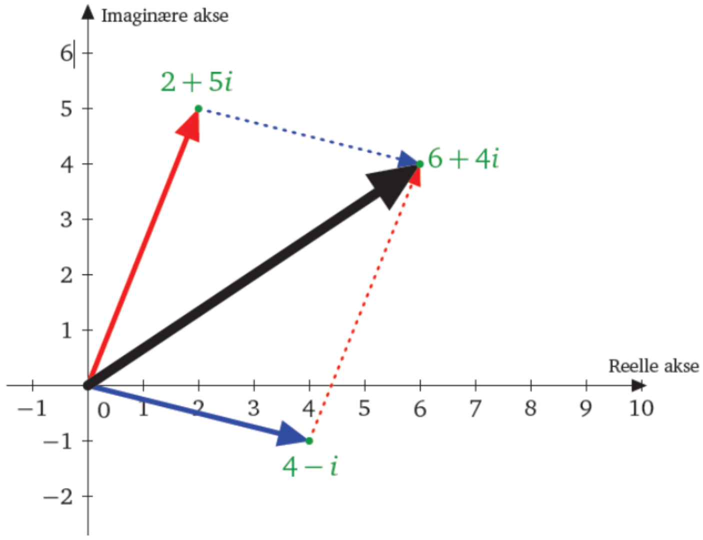
Som vi nu skal se, kan komplekse tal også tegnes som punkter - men nu i et koordinatsystem med to vinkelrette talakser. Dette koordinatsystem kaldes den komplekse talplan. Her afsættes det komplekse tal, lige som at afsætte et punkt. Først går vi ud af den reelle akse og så om af den imaginære. Se figur.



Lav opgaver i [hæftet]

Det er meget let at addere to komplekse tal. I den komplekse plan kan dette illustreres med en enkel tegning.

Figuren viser, at tallenes stedvektorer (stedvektor: pil fra (0, 0) til punktet) lægges i forlængelse af hinanden. Vi kan altså komme fra Origo til vores resultat ved konsekvent at gå den samlede reelle del hen ad første aksen og den samlede imaginære del op/ned ad anden aksen. Nogle vil nok genkende processen fra vektorregning.



Øvelse: Få sidemanden til at opdigte 3 komplekse tal, og bestemme hvordan de skal lægges sammen/trækkes fra hinanden. Find nu svaret ved grafisk at indtegne disse vektorer efter hinanden (som illustreret oven over).

Lav opgaver i [hæftet]

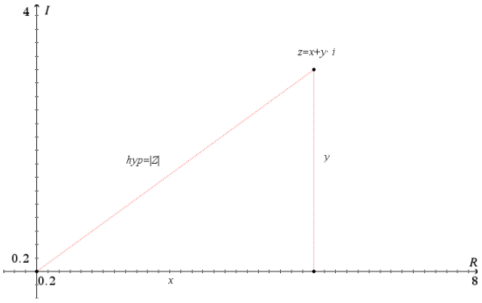
Modulus

Afstanden fra Origo og til punktet kaldes også for modulus.

> Sætning:
> Lad $z = x + yi$ være et komplekst tal, hvor $Re(z) = x$ og $Im(z) = y$. Længden af stedvektoren til z (afstanden fra Origo til punktet) i den komplekse plan kaldes modulus af z og skrives |z|:
>
> $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ eller $|z| = \sqrt{Re(z)^z + Im(z)^2}$

Bevis:

Indtegner vi vores komplekse tal i et komplekst talplan, ser vi at der fremkommer en retvinklet trekant.
Dermed kan vi benytte Pythagoras til at bestemme |z| (modulus til z)



$|z|^2 = x^2 + y^2$

$|z| = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$

Da vi ikke kan have negative længder må $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Eksempelvis:
Bestem modulus til $z = 3 - 5i$

$$|z| = \sqrt{3^2 + (-5)^2} = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34}$$

Altså blev modulus bestemt til $|z| = \sqrt{34}$

I Nspire $|3 - 5 \cdot \boldsymbol{i}| \rightarrow \sqrt{34}$ (iét findes under tegn i værktøjskassen)

> Lav opgaver i [hæftet]

Argument og polærkoordinater

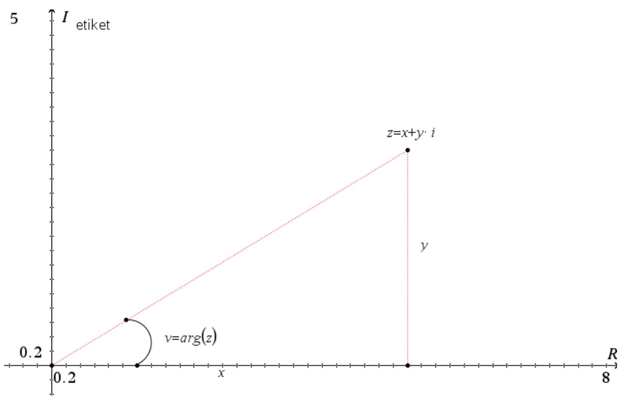
Når vi nu har et komplekst tal angivet som en "linje" også kaldet en vektor fra origo til punktet, og vi kan bestemme længden af denne, så vil der ligeledes kunne bestemmes en vinkel (altså en retning) for vektoren. Som en indledning skal det nævnes, at det normalt er standard at benytte radianer, når der regnes i komplekse tal. Her i noterne benytter vi dog grader.

Sætning:

> Argumentet til et komplekst tal $z = x + y \cdot i$, (placeret i første og anden kvadrant) hvor $Re(z) = x$, $Re(z) \neq 0$ og $Im(z) = y$ kan bestemmes ved
>
> $$\arg(\mathrm{z}) = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

Bevis:

Hvis vi indtegner vores komplekse tal i det komplekse talplan, kan vi se at der fremkommer en retvinklet trekant.



Jvf sætningerne fra geometri noterne, så gælder der

$$\tan(v) = \frac{modstående\ katete}{hosliggende\ katete}$$

Hermed kan vi skrive

$$\tan(\arg(z)) = \frac{y}{x}$$

$$\arg(z) = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

Hermed bevist

Ligger punktet il 3. eller 4. kvadrant, så bliver argumentet $\arg(z) = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) - 180$.

Eksempelvis:

Bestem $\arg(z)$ når $z = 3 + 5i$

$\arg(z) \tan^{-1}\left(\frac{5}{3}\right) = 59.04°$

I Nspire kan vi taste følgende $angle(3 + 5\boldsymbol{i}) \rightarrow 59.04$ resultatet er her i grader. (Husk at **i** skal hentes i tegn-boksen).

Lav opgaver i [hæftet]()

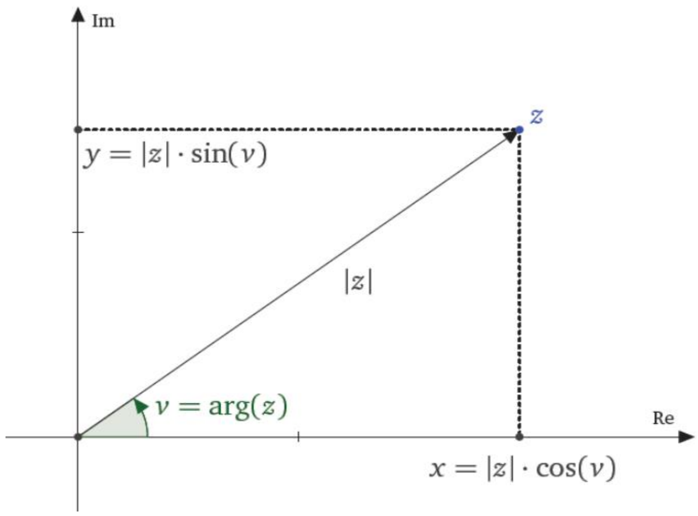
At vi nu kan bestemme modulus og argument for et komplekst tal gør, at vi, sammen med vores viden om retvinklede trekanter og ensvinklede trekanter, kan omskrive tallet til polærform.

Sætning
Et komplekst tal $z = x + yi$ kan skrives på såkaldt <u>polær form</u>:

$z = |z|(cos(v) + sin(v)i)$,

Hvor $|z|$ *er modulus og* v er argumentet arg(z).

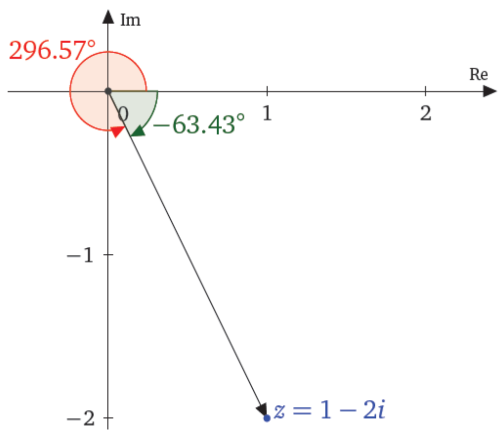
Bevis. For en vinkel v mellem 0° og 90° følger af ensvinklede trekanter og vores viden om sinus og cosinus, at
$\cos(v) = \frac{x}{|z|}$ og $\sin(v) = \frac{y}{|z|}$
Herfra får vi at
$x = |z| \cdot \cos(v)$ og $y = |z| \cdot \sin(v)$



Dette kan nu samles:
$z = x + yi = |z|\cos(v) + |z|\sin(v)i = |z|(\cos(v) + \sin(v)\, i)$
Hermed bevist
Hvis vinklen v er større end 90°, forløber beviset næsten på samme måde,
Vi husker på at $\cos(180 - v) = -\cos(v) = \frac{-x}{|z|}$ og $\sin(180 - v) = \sin(v) = \frac{y}{|z|}$
Herfra får vi at
$x = |z|\cos(v)$ og $y = |z|\sin(v)$

Dette kan nu samles:
$z = x + yi = |z|\cos(v) + |z|\sin(v)i = |z|(\cos(v) + \sin(v)\, i)$
Tilsvarende for de øvrige kvadranter

Hermed bevist.

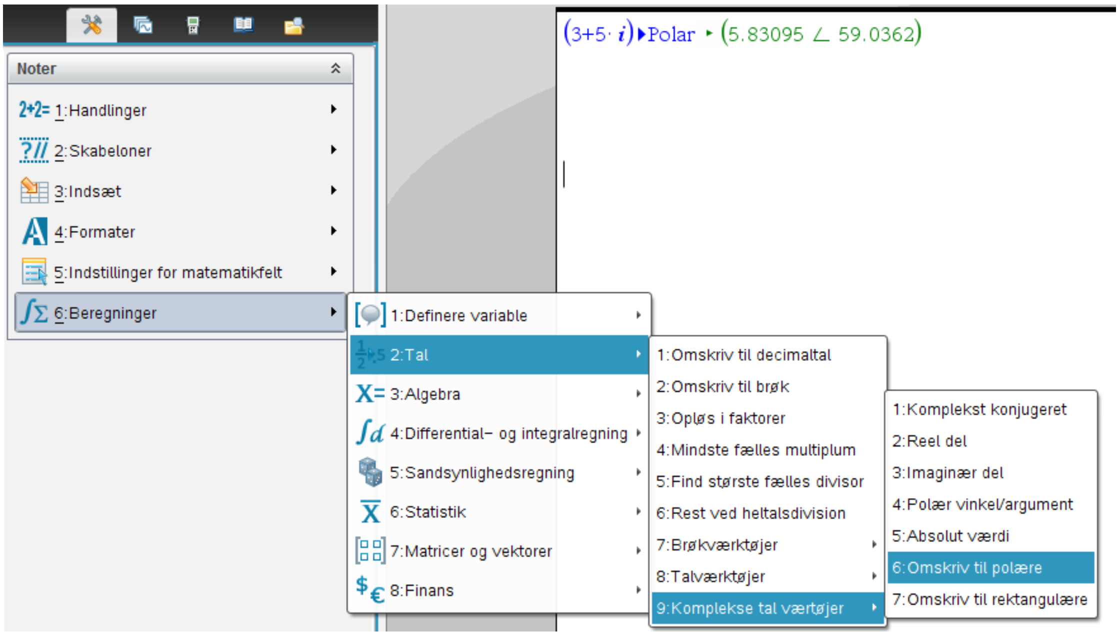


<u>BEMÆRKNING:</u>

Et tals argument er ikke entydigt (som modulus er), da vi kan måle vinklen med og mod uret (positivomløbsregning er mod uret). Derfor kan et tal have uendelig mange argumenter. På tegningen ses to argumenter, men vi kan jo blot løbe yderligere 360° rundt, og så igen, og så…..

Der er tradition for at kalde den værdi af arg(z), der ligger mellem -180° og 180°, for hoved-argumentet af z, hvilket skrives Arg(z). Dermed er $\arg(z) = Arg(z) + p \cdot 360$, hvor $p \in$ Z.
Typisk så regnes $\arg(z)$ i radianer, og der gælder at $radianer = \frac{\pi \cdot 2}{360} \cdot grader = \frac{\pi}{180} \cdot grader$.

Eksempelvis
Omskriv $z = 3 + 5\boldsymbol{i}$
$\arg(z) = 59.04$ jvf. tidligere udregninger.
$|z| = \sqrt{34}$ jvf. tidligere udregninger
Dermed kan jeg opstille følgende $z = \sqrt{34}(\cos(59.04) + \sin(59.04)\, i)$
I Nspire:



Læg mærke til at Nspire blot angiver længde og retning (modulus og argument).

Lav opgaver i [hæftet]

Multiplikation i polære koordinater.

Vores mål er at vise hvordan z^n kan beregnes. Vi starter med en hjælpesætning, også kaldet et lemma.

Sætning

Om produktet af to komplekse tal

$$z = |z|(\cos(a) + \sin(a)\, i), \quad \text{hvor } a = \arg(z)$$
$$w = |w|(\cos(b) + \sin(b)\, i)\,, \quad \text{hvor } b = \arg(w)$$

gælder der at:

$$|z \cdot w| = |z| \cdot |w| \quad \text{og} \quad \arg(z \cdot w) = \arg(z) + \arg(w)$$

dvs. at

$$z \cdot w = |z| \cdot |w|(\cos(a+b) + \sin(a+b)\, i)$$

<u>Bevis:</u>

$$z \cdot w = |z|(\cos(a) + \sin(a)\, i) \cdot |w|(\cos(b) + \sin(b)\, i) =$$
$$|z| \cdot |w|(\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) + \cos(a)\sin(b)\, i + \cos(\mathrm{b})\sin(a) i)$$

Hertil benytter vi at (vil ikke blive bevist her):

$$\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) = \cos(a+b)$$
$$\cos(a)\sin(b) + \cos(\mathrm{b})\sin(a) = \sin(a+b)$$

Dette giver os at:

$$|z| \cdot |w|(\cos(a+b) + \sin(a+b)\, i)$$

Dermed ses at

$$\arg(z \cdot w) = \mathrm{a} + \mathrm{b} = \arg(\mathrm{z}) + \arg(\mathrm{w})$$

og

$$|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$$

Hermed bevist

Sætning
Hvis $z = |z|(\cos(a) + \sin(a)\, i)$ hvor $a = \arg(z)$, så er

$$z^n = |z|^n(\cos(na) + \sin(na)\, i)$$

dvs. at
$|z^n| = |z|^n$ og $\arg(z^n) = n \cdot \arg(z)$

Bevis:
Beviset føres som et induktionsbevis

- n=2: Følger direkte fra sætningen om multiplikation af kompleksetal
- n=k: Vi antager, at sætningen gælder (induktionsantagelse)
- n=k+1: (induktionsskridtet). Direkte fås

$$z^n = z^{k+1} = z^k \cdot z =$$
$$|z|^k(\cos(ka) + \sin(ka)\, i) \cdot |z|(\cos(a) + \sin(a)\, i =$$
$$|z|^{k+1}(\cos(ka)\cos(a) + \cos(ka)\sin(a)\, i + \sin(ka)\, i \cdot cos(a) + \sin(ka)\sin(a)\, i^2) =$$
$$|\mathrm{z}|^{\mathrm{k}+1}(\cos(ka)\cos(a) - \sin(ka)\sin(a) + (\cos(ka)\sin(a) + \sin(ka)\, cos(a))i =$$

Hertil benytter vi at (vil ikke blive bevist her):

$$\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) = \cos(a+b)$$
$$\cos(a)\sin(b) + \cos(\mathrm{b})\sin(a) = \sin(a+b)$$

Dette giver nu

$$|\mathrm{z}|^{\mathrm{k}+1}(\cos(ka + a) + \sin(\mathrm{ka} + \mathrm{a})i) =$$
$$|\mathrm{z}|^{\mathrm{k}+1}(\cos((k+1)a) + \sin((\mathrm{k}+1)\mathrm{a})i) =$$

Da n=k+1

$$|\mathrm{z}|^{\mathrm{n}}(\cos(na) + \sin(\mathrm{na})i)$$

Herfra kan vi se at der må gælde at $|z^n| = |z|^n$ og $\arg(z^n) = n \cdot a = n \cdot \arg(z)$
Hermed bevist

Lad $z_1 = 1 - i$ og $z_2 = -3 + 5i.$ Bestem ${z_1}^7$ og ${z_2}^5$

Division i polære koordinater.

Sætning
Om kvotienten af to komplekse tal

$$z = |z|(\cos(a) + \sin(a)\, i), \text{ hvor } a = \arg(z)$$
$$w = |w|(\cos(b) + \sin(b)\, i), \text{ hvor } b = \arg(w)$$

gælder:

$\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$ og $\arg\left(\frac{z}{w}\right) = \arg(z) - \arg(w)$

dvs. at:

$$\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|}(\cos(a-b) + \sin(a-b)\, i)$$

Bevis:

Da $|w| = |\overline{w}|$ og $w \cdot \overline{w} = |w|^2$, har vi

$$\frac{z}{w} = \frac{z \cdot \overline{w}}{w \cdot \overline{w}} = \frac{z \cdot \overline{w}}{|w|^2} = \frac{|z|(\cos(a) + \sin(a)\, i) \cdot |w|(\cos(b) - \sin(b)\, i)}{|w|^2} =$$

Med vores viden omkring enhedscirklen: $\cos(v) = \cos(-v)$ og $-\sin(v) = \sin(-v)$, fås

$$\frac{|z|(\cos(a) + \sin(a)\, i) \cdot |w|(\cos(-b) + \sin(-b)\, i)}{|w|^2} =$$

$$\frac{|z| \cdot |w|(\cos(a)\cos(-b) + \cos(a)\sin(-b)\, i + \sin(a)\cos(-b)\, i + \sin(a)\sin(-b)\, i^2)}{|w|^2} =$$

$$\frac{|z| \cdot |w|(\cos(a)\cos(-b) - \sin(a)\sin(-b) + (\cos(a)\sin(-b) + \sin(a)\cos(-b))\, i)}{|w|^2} =$$

Hertil benytter vi at (vil ikke blive bevist her):

$$\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) = \cos(a+b)$$
$$\cos(a)\sin(b) + \cos(\mathrm{b})\sin(a) = \sin(a+b)$$

Dette giver nu

$$\frac{|z| \cdot |w|(\cos(a + (-b)) + \sin(a + (-b))\, i)}{|w|^2} = \frac{|z|}{|w|} \cdot (\cos(a-b) + \sin(a-b)\, i)$$

Her af ses at $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$ og $\arg\left(\frac{z}{w}\right) = \mathrm{a} - \mathrm{b} = \arg(z) - \arg(w)$ Hermed bevist.

Lad $z_1 = 2 + 4$ og $z_2 = -2 - 3i$ og $z_3 = 2 + 4i$. Bestem $\frac{z_1}{z_2}$ og $\frac{z_1}{z_3}$ og $\frac{z_2}{z_3}$

Ligninger i den komplekse plan

Ligningen $z^n = w$ og komplekse kvadratrødder

Tidligere i noterne har vi vist at

$$z = |z|(\cos(v) + \sin(v)\, i)$$
$$z^n = |z|^n(\cos(na) + \sin(na)\, i)$$

Nu skal vi se vores potenser af z i relation til rødder. Hvis $z^n = w$, hvor $w = |w|(\cos(v) + \sin(v)\, i)$, vil vi forsøge af finde z.

Sætning
Ligningen $z^n = w$
hvor $z^n = |w|(\cos(a) + \sin(a)\, i)$ har n løsninger

$$z = \sqrt[n]{|w|}\left(\cos\left(\frac{a}{n} + \frac{360° \cdot p}{n}\right) + \sin\left(\frac{a}{n} + \frac{360° \cdot p}{n}\right) i\right)$$

hvor $p = 0{,}1, \dots., n-1$

Bevis:

Løsningerne til ligningen $z^n = w$ er præcis de tal z som opfylder
$|z^n| = |w|$ og $\arg(z^n) = \arg(w) + 360° \cdot p$, hvor p=0,1

Da $|z^n| = |z|^n$, er kravet altså at $|z|^n = |w|$. Da modulus er et ikke negativt tal, har vi:
$|z| = \sqrt[n]{w}$

Da $\arg(z^n) = n \cdot \arg(z)$ jævnfør tidligere sætning om z^n.
Da $\arg(z^n) = \arg(w) = \arg(w) + 360° \cdot p$, jævnfør vores viden om vinkler/argumenter.
Derfor må have at

$$n \cdot \arg(z) = \arg(w) + 360° \cdot p$$

$$\arg(z) = \frac{\arg(w) + 360° \cdot p}{\mathrm{n}} = \frac{\mathrm{a} + 360° \cdot p}{\mathrm{n}} = \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{n}} + \frac{360° \cdot p}{n}$$

Lad nu p løbe fra 0 og op efter. Nu bliver argumenterne

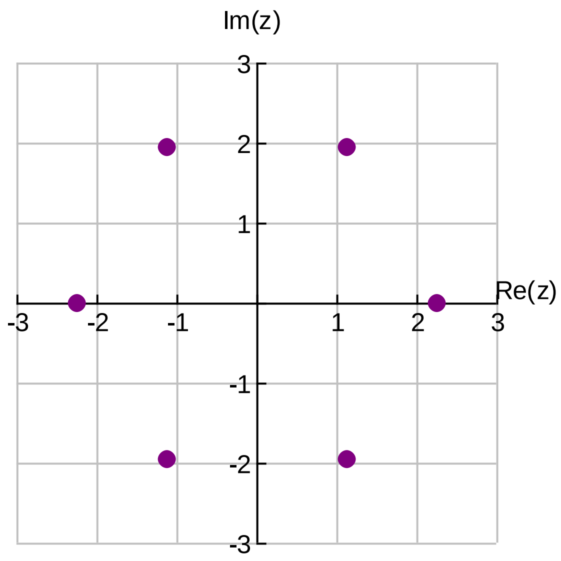
$$\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{n}}, \quad \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{n}} + \frac{360°}{n}, \quad \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{n}} + \frac{360° \cdot 2}{n}, \dots.., \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{n}} + \frac{360° \cdot (n-1)}{n}, \quad \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{n}} + \frac{360° \cdot n}{n} = \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{n}} + 360°$$

heraf fremgår det at der er præcis n forskellige argumenter til z. Dermed
$\arg(z) = \frac{\arg(w)+360° \cdot p}{\mathrm{n}}$ og $p = 0{,}1, \dots., n-1$
Hermed bevist

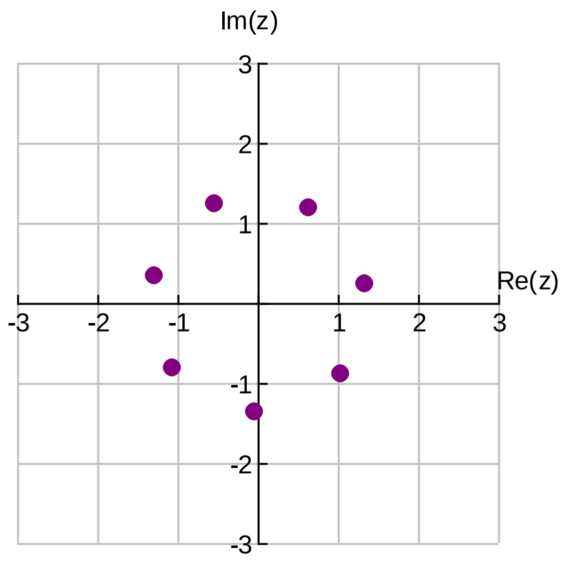
Løs $z^3 = 1$. Løs (fra stud. eksamen 1969) $z^3 = 6.48i$. Tegn løsningerne ind i et komplekst talplan.

I Nspire kan vi blot løse opgaverne med csolve (husk at benytte ***i*** fra mathboksen).

I opgaverne oven over ser det ud til at der dannes to trekanter. Det viser sig, at løsningerne danner en regulær n-kant. Årsagen er selvfølgelig den vinkel som hele tiden ligges til i ovenstående sætning. Modulus af løsningerne er ens. Argumentet til løsningerne er forskellige, men adskiller sig ved $\frac{360°\cdot p}{n}$.



Løsninger til z^6 = 128



Løsninger til z^7 = 2 + 8i

Prøv selv at danne en grafisk løsning af en selvvalgt ligning

Ligningen $z^2 = w$ og komplekse kvadratrødder

Sætning

Ligningen $z^2 = w$

hvor $= |w|(\cos(a) + \sin(a)\,i)$ har n løsninger

$$z = \sqrt{|w|}(\cos\left(\frac{a}{2} + \frac{360°\cdot p}{2}\right) + \sin\left(\frac{a}{2} + \frac{360°\cdot p}{2}\right) i)$$

Løsningerne kan skrives på formen

$$z = \pm\sqrt{|w|}(\cos\left(\frac{v}{2}\right) + \sin\left(\frac{v}{2}\right) i)$$

hvor $p = 0{,}1$

Bevis:

Første del følger direkte af fra sætningen om $z^n = w$.

Anden del kommer af at

$\cos\left(\frac{v}{2}\right) + \frac{360°\cdot 1}{2} = \cos\left(\frac{v}{2}\right) + 180° = -\cos(\frac{v}{2})$ og $\sin + \frac{360°\cdot 1}{2} = \sin\left(\frac{v}{2}\right) + 180° = -\sin(\frac{v}{2})$

og kvadratroden kan vælges til enten + eller – efter behag.

Hermed bevist.

Andengradsligningen

Tidligere har vi arbejdet med andengradsligningen $ax^2 + bx + c = 0$, hvor $a, b, c \in R$.
Vi kunne løse denne ligning hvis diskriminanten $d = b^2 - 4ac \geq 0$.
Vi generalisere nu denne ligning og tillader at koefficienterne kan være komplekse.

Definition
En general andengradsligning har formen

$$az^2 + bz + c = 0 \quad hvor\ a \neq 0$$

hvor både koefficienterne og den ubekendte z kan være komplekse tal.

Sætning
Enhver andengradsligning

$$az^2 + bz + c = 0 \quad hvor\ a \neq 0$$

har altid to løsninger:

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a} \quad hvor\ d = b^2 - 4ac$$

Bevis:
Beviset følger opskriften fra tidligere. Se AB1 s. 44 for yderligere info.

$$az^2 + bz + c = 0$$
$$4a^2z^2 + 4abz + 4ac = 0$$
$$4a^2z^2 + 4abz = -4ac$$
$$4a^2z^2 + 4abz + b^2 = b^2 - 4ac$$
$$4a^2z^2 + 4abz + b^2 = d$$
$$4a^2z^2 + b^2 + 4abz = d$$
$$(2az + b)^2 = d$$
$$2az + b = \pm\sqrt{d}$$
$$2az = -b \pm \sqrt{d}$$
$$z = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a}$$

Hermed kan vi se at diskriminantens værdi er underordnet i de komplekse tal.
Hermed bevist

Løs andengradsligningen $z^2 - 2z - 1 - 3(z - 1)i = 0$