

Quanten Algorithmen zum Lösen linearer Gleichungssysteme

tomtuamnuq

FernUniversität in Hagen

25.09.2020

Inhalt

1 Quantenalgorithmen

- Quantencomputer
- Quantenschaltungen
- Qiskit Framework

2 HHL Algorithmus

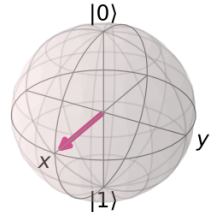
- Lösen linearer Gleichungssysteme
- Entwurf der Quantenschaltung
- Implementierung in Qiskit
- Tests mit dem IBMQRome

Aufbau und Funktionsweise

- Qubits, Gatter und Observablen
- Nutzen quantenmechanische Phänomene:
 - Superposition
 - Verschränkung
- praktisches Hindernis Dekohärenz
- Quantenschaltungen implementieren Algorithmen als Folge von Quantengattern

Quantenschaltungen - Qubits

- klassisches Bit entweder $|0\rangle$ oder $|1\rangle$
- Qubit Linearkombination
$$|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle = (\alpha \ \beta)^T \in \mathbb{C}^2$$
- Zusammenfassung in Quantenregistern



Zustand $|+\rangle$

Quantenschaltungen - Observablen

Hermite'sche Matrizen

Eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ heißt Hermite'sch, falls A gleich seinem komplex konjugiert, transponierten A^\dagger .

- Repräsentieren Observablen
- Messgrößen eines quantenmechanischen Systems
- Pauli Matrix $Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
- Erwartungswert $\langle Z \rangle_\psi = \langle \psi | Z \psi \rangle \in \mathbb{R}$
- irreversible Zustandsänderung

Quantenschaltungen - Quantengatter

Unitäre Matrizen

Eine Matrix $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$ heißt unitär, wenn U invertierbar ist, und wenn $U^{-1} = U^\dagger$.

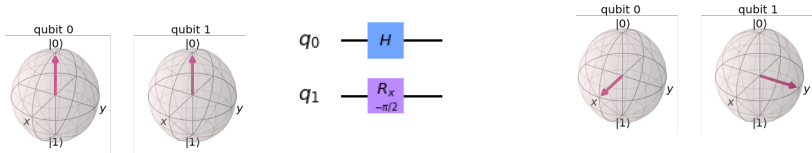
- Repräsentieren Quantengatter
- Implementieren reversible Logik
- Hadamard-Gatter $H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$
- Superpositionserzeugung $H|0\rangle = |+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}^T$

Entwicklung von Quantenalgorithmen

Qiskit:

- Open-Source Framework in Python
- Pakete Terra, Aer, Ignis und Aqua
- universelle Menge von Quantengattern

Beispielschaltung:

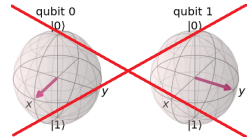
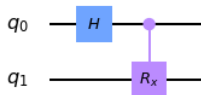
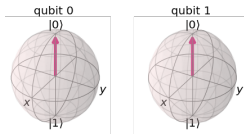


Entwicklung von Quantenalgorithmen

Qiskit:

- Open-Source Framework in Python
- Pakete Terra, Aer, Ignis und Aqua
- universelle Menge von Quantengattern

Beispielschaltung:

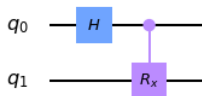
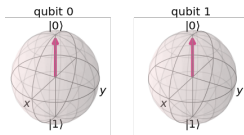


Entwicklung von Quantenalgorithmen

Qiskit:

- Open-Source Framework in Python
- Pakete Terra, Aer, Ignis und Aqua
- universelle Menge von Quantengattern

Beispielschaltung:



$$|q_0 q_1\rangle = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}$$

Der HHL Algorithmus

Lösen linearer Gleichungssysteme

Theorem (Spektralsatz)

Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ Hermite'sch. Dann gibt es eine unitäre Matrix U , sodass $AU = U\Lambda$ mit einer Diagonalmatrix $\Lambda \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

- Spalten von U Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von A
- Λ besteht aus den Eigenwerten (EW) von A
- $A^{-1} = U^\dagger \Lambda^{-1} U$ ist Inverse von A
- Lösen von $Ax = b$ durch $x = U^\dagger \Lambda^{-1} Ub$

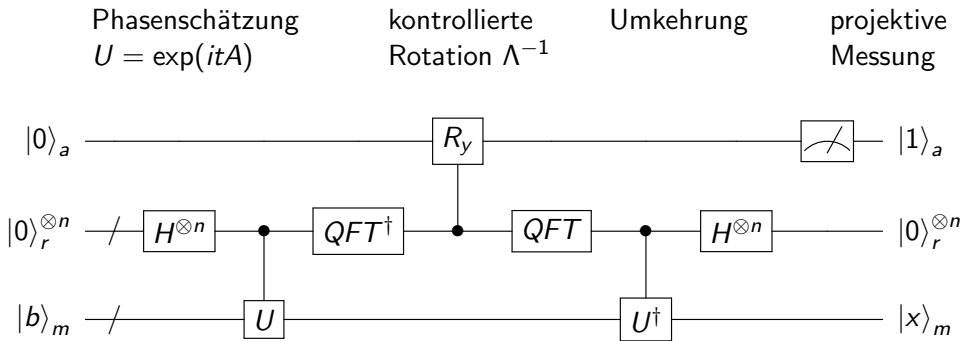
Entwurf der Quantenschaltung

- Werk von Aram Harrow, Avinatan Hassidim und Seth Lloyd aus 2009
- Schätzung von Eigenschaften der Lösung in $\mathcal{O}(\log(n))$

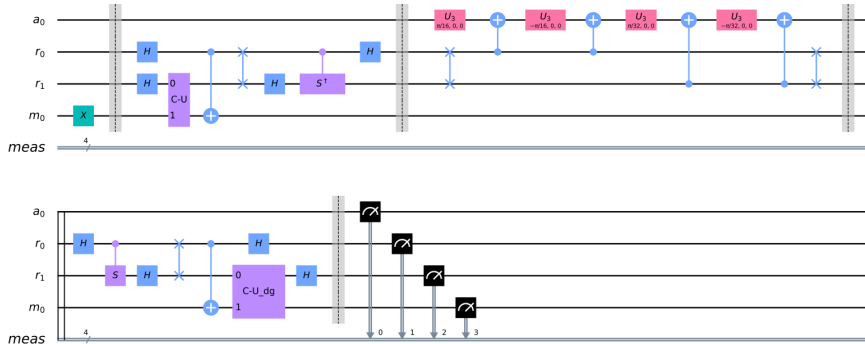
Ablauf des Algorithmus:

- 1 Präparieren des Anfangszustands $|b\rangle$
- 2 Quantenphasenschätzung der EW von A
- 3 EW-abhängige Manipulation eines zusätzlichen Qubits
- 4 Umkehrung der Quantenphasenschätzung
- 5 Messung

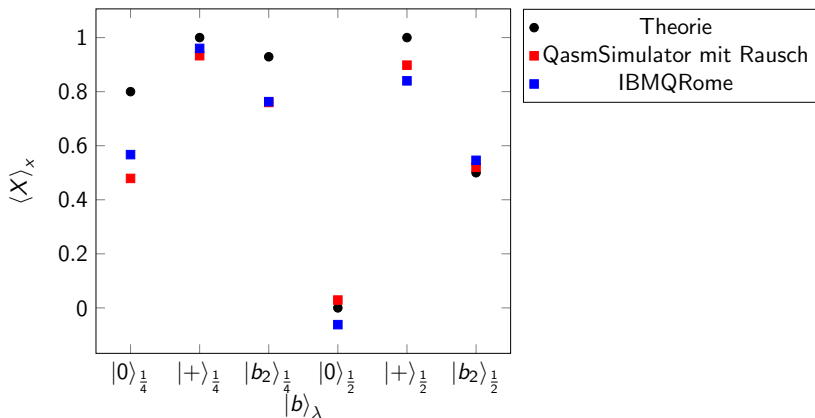
Schaltplan zum Algorithmus



Quantenschaltung für eine 2x2 Matrix



gemessene Erwartungswerte für verschiedene Anfangszustände



Vorführung Jupyter Notebook