

# Lagrangovy body soustavy Země-Měsíc

Tomáš Vítek

30. ledna 2023

## 1 Úvod a formulace

V této práci jsem se snažil posoudit stabilitu jednotlivých Lagrangových bodů (L1 až L5) pomocí numerické simulace trajektorií těles v jejich blízkosti. Simulaci jsem dle zadání prováděl v neinerciální vztažné soustavě, spjaté se systémem Země-Měsíc, obě tělesa tedy v této soustavě zůstávala v klidu. Simulaci jsem také pro jednoduchost prováděl pouze ve 2D, v rovině dané oběhem Měsíce kolem Země.

Pro takovýto neinerciální systém lze pro tělesa o zanedbatelné hmotnosti (takže nebudou ovlivňovat polohu Země a Měsíce) odvodit pohybové rovnice, které byly součástí zadání, tj.

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} &= -G \left[ \frac{M(x + \mu D)}{r_1^3} + \frac{m(x - \mu^* D)}{r_2^3} \right] + \Omega^2 x + 2\Omega \frac{dy}{dt} \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -G \left[ \frac{My}{r_1^3} + \frac{my}{r_2^3} \right] + \Omega^2 y + 2\Omega \frac{dx}{dt}\end{aligned}$$

kde  $G$  je gravitační konstanta,  $M$  je hmotnost Země,  $m$  hmotnost Měsíce,  $D$  vzdálenost Měsíce od středu soustavy a  $d$  vzdálenost Země od středu soustavy (střed soustavy je definovaný jako těžiště systému).  $\Omega$  je konstanta daná úhlovou rychlostí oběhu Měsíce. Konstanty  $\mu$  a  $\mu^*$  jsou definovány vztahy

$$\begin{aligned}\mu &= \frac{m}{m + M} \\ \mu^* &= \frac{M}{m + M}\end{aligned}$$

Hodnoty všech použitých konstant jsou uvedeny v tabulce 1

## 2 Popis numerického řešení

Pro numerické řešení zadané soustavy diferenciálních rovnic jsem zvolil metodu Runge-Kutta 4. řádu. Její odvození je však zbytečně zdlouhavé a technicky náročné, proto zde uvedu jen odvození Runge-Kutty 2. řádu, které je založeno na stejném principu.

Konstanta	Hodnota
$G$ [ $\text{m}^3 \cdot \text{kg}$ ]	$6.67259 \cdot 10^{-11}$
$M$ [kg]	$5.974 \cdot 10^{24}$
$m$ [kg]	$7.348 \cdot 10^{22}$
$D$ [m]	$3.844 \cdot 10^8$
$d$ [m]	$4.669 \cdot 10^6$
$\Omega$ [ $\text{s}^{-1}$ ]	$2.661 \cdot 10^{-6}$
$R_E$ [m]	$6378 \cdot 10^3$
$R_M$ [m]	$1737 \cdot 10^3$

Tabulka 1: Seznam v simulaci použitých konstant a jejich hodnot.

## 2.1 Odvození metody Runge-Kutta 2

Runge-Kutta je v podstatě zdokonalenou verzí Eulerovy metody řešení diferenciálních rovnic, pro demonstraci principu fungování tedy použijí ji. Vycházíme z předpokladu, že řešíme problém, u nějž známe počáteční podmínky a funkci, která popisuje derivaci jednotlivých veličin, tj.

$$\frac{dy}{dt} = f(y(t), t)$$

kde  $y(t)$  je hledaná funkce.

Eulerova metoda funguje tak, že pro daný stav systému  $y$  předpokládá, že derivace  $y$  se na zvoleném (dostatečně malém) časovém kroku  $h$  příliš nezmění a můžeme ji přibližně považovat za konstantní. Díky tomu pak lze vyjádřit stav systému v následujícím časovém kroku jako

$$y(t_0 + h) = y(t_0) + h \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t_0} = y(t_0) + hf(y(t_0), t)$$

Lze si přitom povšimnout, že se v podstatě jedná o Taylorův rozvoj  $y$  prvního řádu v čase  $t_0$ .

Metoda Runge-Kutta 2. řádu funguje podobně, ovšem pokouší se zohlednit chování derivace funkce v průběhu časového kroku. Po výpočtu hodnoty derivace ( $f$ ) v původním stavu systému (označme  $k_1$ ) tedy proběhne ještě výpočet derivace v nějakém čase  $t_0 + \alpha h$ , kde  $\alpha \in [0, 1]$  (označme tuto derivaci  $k_2$ ).

Vzhledem k tomu, že ale neznáme stav systému v daném bodě, musíme ho dopočítat Eulerovou metodou na základě původní derivace, tedy bude platit

$$\begin{aligned} k_1 &= f(y(t_0), t_0) \\ k_2 &= f(y(t_0 + \alpha h), t_0 + \alpha h) \approx f(y(t_0) + \beta h k_1, t_0 + \alpha h) \end{aligned}$$

kde  $\alpha, \beta$  jsou nějaké neznámé konstanty.

Stav systému po uplynutí časového kroku  $h$  tedy můžeme vyjádřit pomocí obou derivací jako

$$y(t_0 + h) = y(t_0) + h(ak_1 + bk_2) = y(t_0) + h[af(y(t_0), t_0) + bf(y(t_0) + \beta h k_1, t_0 + \alpha h)]$$

V následujících částech budu pro přehlednost značit  $f \equiv f(y(t_0), t_0)$ , případně parciální derivace  $f$  v tomto bodě jako  $f_y, f_t$ . Funkci nyní rozvíjíme pro  $f$  do Taylorovy řady:

$$y(t_0 + h) = y(t_0) + h[af + b(f + f_y \beta h k_1 + f_t \alpha h + \dots)]$$

Po dosazení za  $k_1$  a drobné úpravě dostáváme

$$y(t_0 + h) \approx y(t_0) + hf(a + b) + h^2(ff_y b \beta + f_t b \alpha) + \dots$$

Je nutné podotknout, že zde se jedná jen o přibližně řešení,  $k_2$  totiž známe pouze přibližně.

Nyní rozvineme přesné (neznámé) řešení  $y$  to Taylorovy řady:

$$y(t + h) = y(t_0) + hy'|_{t_0} + \frac{h^2}{2}y''|_{t_0} + \dots = y(t_0) + hf + \frac{h^2}{2}(f_y f + f_t) + \dots$$

V posledním kroku úpravy jsme využili faktu, že

$$\frac{df(y, t)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

přičemž ale víme, že  $\frac{dy}{dt} = f$ .

Porovnáním obou dvou vyjádření  $y(t_0 + h)$  dostáváme pro jednotlivé konstanty podmínky

$$\begin{aligned} a + b &= 1 \\ b\alpha &= \frac{1}{2} \\ b\beta &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

což nám ponechává jeden stupeň volnosti. Zvolíme-li si pro jednoduchost  $a = 0$ , dostáváme

$$b = 1$$

$$\alpha = \frac{1}{2} = \beta$$

Pro výpočet tedy dostáváme  $y$  ve tvaru

$$y(t_0 + h) \approx y(t_0) + hk_2 = y(t_0) + hf\left(y(t_0) + \frac{h}{2}f(y(t_0), t_0), t_0 + \frac{h}{2}\right)$$

## 2.2 Runge-Kutta 4. řádu

V případě Runge-Kutty 4. řádu se postupuje podobně, jako v 2. řádu, ovšem derivace se tentokrát počítají ve čtyřech částech časového kroku. Spočteme je jako

$$k_1 = f(y(t_0), t_0)$$

$$k_2 = f\left(y(t_0) + k_1 \frac{h}{2}, t_0 + \frac{h}{2}\right)$$

$$k_3 = f\left(y(t_0) + k_2 \frac{h}{2}, t_0 + \frac{h}{2}\right)$$

$$k_4 = f(y(t_0) + k_3 h, t_0 + h)$$

Při dosazení do rovnice pro následující stav systému je pak použijeme takto:

$$y(t_0 + h) \approx y(t_0) + \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6}h$$

## 2.3 Aplikace metody na úlohu

V našem případě simulace testovacích tělísek je potřeba rozšířit metodu z řešení jedné diferenciální rovnice na řešení jejich soustavy. To je naštěstí jednoduché, stačí  $y$  považovat za vektor a  $f$  za vektorovou funkci. Jednotlivé elementy takového vektoru pak budou reprezentovat jednotlivé diferenciální rovnice a můžeme s nimi počítat úplně stejně.

Dalším problémem je, že v zadaných rovnicích máme druhé derivace a ne ty první. Ty lze ale převést na problém prvních derivací zavedením pomocných proměnných  $v_x = \dot{x}$  a  $v_y = \dot{y}$ . Pomocí výše popsané metody tak můžeme ze stavu systému v daném bodě spočítat  $v_x$  a  $v_y$  a z aktuálních rychlostí těles (které jsou tím pádem součástí našeho stavu systému) stejným způsobem dopočítat jejich polohy.

Systém se tedy rozpadne do  $4N$  diferenciálních rovnic (kde  $N$  je množství těles), které už umíme řešit.

## 3 Implementace řešení

Všechny použitý kód je dostupný na githubu zde: <https://github.com/tomvitek/lagrange-sim>. Lze ho rozdělit na dvě hlavní části - výpočetní a analytickou. Výpočetní je napsaná v C++, protože jsem si ho chtěl zopakovat a bál jsem se, že by python byl pro náročnější simulace příliš pomalý (zvlášť když bych v něm numerickou metodu implementoval přímo).

Část renderující grafy je pak už napsaná v pythonu, v repozitáři ve složce `analysis`.

Výpočetní část se skládá ze dvou hlavních programů - `lagrange-rings` a `lagrange-span`. Vzájemně se však liší jen minimálně a nejspíš by v budoucnu šly sloučit do jednoho. První z nich slouží na simulaci pohybu těles po celém obvodu systému Země-Měsíc, ten druhý počáteční polohy těles generuje jen v okolí nějakého bodu. Oba programy přijímají řadu parametrů, které jsou popsány ve zdrojových kódech, při změně např. počtu těles tedy stačí změnit argument v terminálu.

Simulace probíhá pomocí postupu popsaného výše (Runge-Kutta 4), pouze jsou navíc přidány elementární kolize - když se nějaké těleso v nějakém časovém kroku k Zemi nebo Měsíci přiblíží víc, než je jejich poloměr, těleso je v následujících krocích vymazáno (hodnota pozice a rychlosti nastavena na NaN).

Data ze simulace jsou průběžně ukládána do csv souboru, ze kterého jsou poté čtena skriptem v pythonu v průběhu analýzy.

## 4 Výsledky

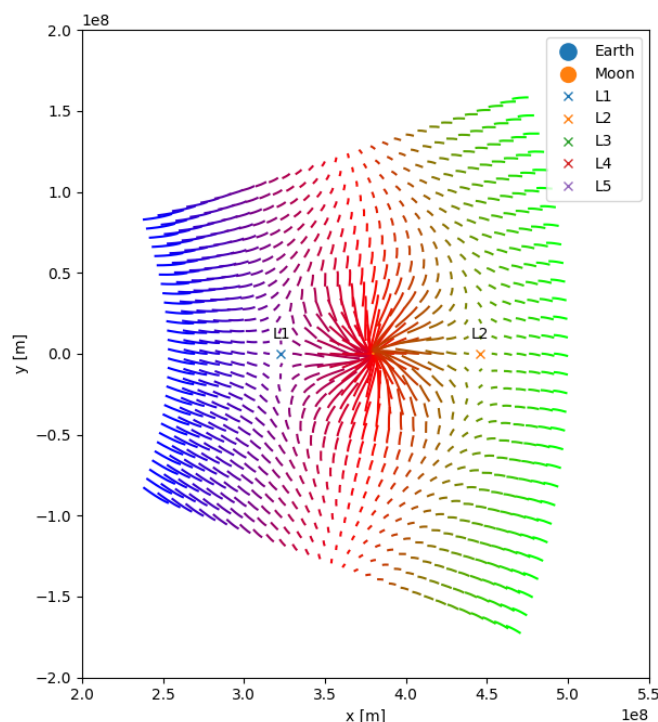
Níže uvádím některé výsledky získané pro jednotlivé Lagrangovy body. Protože ale do pdf nelze rozumně vložit video, přidávám zde také odkaz na složku, ve které jsou animace všech použitých simulací. Ke každé simulaci připadá i video s přívěskem `_comp` ve jméně, které obsahuje srovnání tří různých časových kroků (vždy 10s, 100s a 1000s) pro danou simulaci. Ty by měly sloužit k ověření toho, že použitý časový krok byl dostatečný. Samotné výsledky jsem pak vždy bral ze simulace s nejmenším časovým krokem (tedy 10s).

Všechna videa by měla být dostupná v této složce: [https://drive.google.com/drive/folders/1fos3M97N6Zq4poEnZLs2Z5JMqUt60TC?usp=share\\_link](https://drive.google.com/drive/folders/1fos3M97N6Zq4poEnZLs2Z5JMqUt60TC?usp=share_link).

### 4.1 Lagrangovy body L1 a L2

Stabilitu v Lagrangových bodech L1 a L2 jsem se pokusil zjistit tak, že jsem v jejich okolí rozmístil tělesa, které měly v zvolené neinerciální soustavě Země-Měsíc nulovou rychlost. Trajektorie částic z krátké simulace ( $10^5$  s) na obrázku 2 ukazují, že se tělesa opravdu hýbala nejméně v bodech L1 a L2. Zároveň jde ale vidět, že zejména v radiálním směru je tato pozice nestabilní - všechna tělesa mají tendenci uhýbat směrem k Zemi nebo naopak od ní.

Ve složce s videi je i delší simulace tohoto systému, ve které je vidět, že dlouhodobě se v těchto bodech nic neudrží.

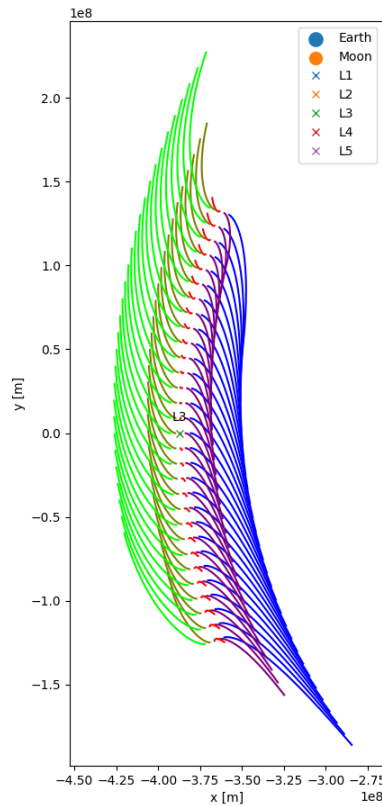


Obrázek 1: Trajektorie těles při krátké ( $10^5$  s) simulaci v okolí bodů L1 a L2.

### 4.2 Lagrangův bod L3

O trochu lépe je na tom se stabilitou bod L3, jak jde vidět na obrázku 2. Tělesa se správnou vzdáleností od Země se v něm mají docela tendenci držet, i když je to postupně táhne pryč. Na obrázku jde vidět, že tato stabilita je však velmi výrazně citlivá na vzdálenost od Země a s větší i menší než správnou vzdáleností tělesa rychle bod opouští.

Ve složce s videi je opět i delší simulace tohoto systému, ve které jde vidět, že většina těles z tohoto bodu úplně uteče.



Obrázek 2: Trajektorie těles při krátké ( $10^6$  s) simulaci v okolí bodu L3.

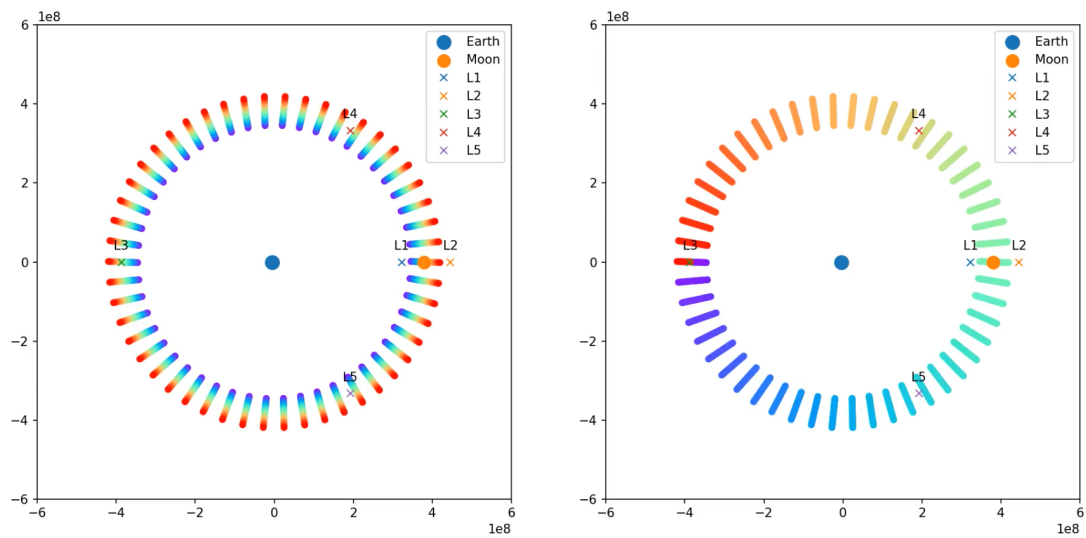
### 4.3 Lagrangovy body L4 a L5

Stabilitu bodů L4 a L5 jsem posuzoval rozmístěním těles po celém obvodu systému. Jejich obvodovou rychlost jsem přitom nevolil vůči neinerciální soustavě vždy nulovou, ale takovou, aby se tělesa za předpokladu radiálního pole pohybovaly po kružnici (ve směru oběhu jsem tedy přičítal nebo odčítal korekci v závislosti na vzdálenosti od středu systému).

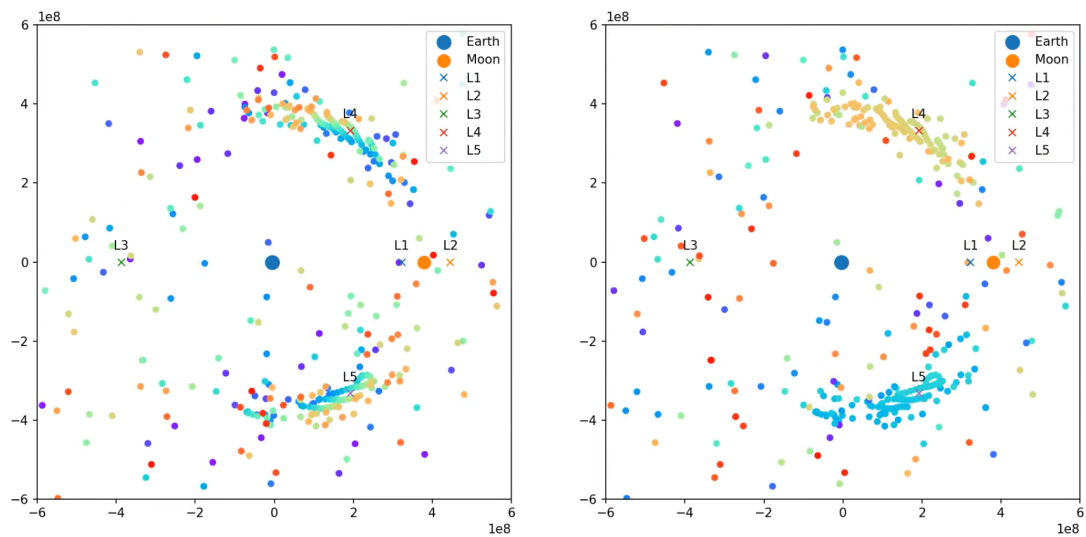
Počáteční stav simulace a stav po třech letech je vidět na obrázcích 3 a 4. Jak si lze všimnout, zatímco v lagrangových bodech L4 a L5 se vytvořily shluky částic, v ostatních k ničemu takovému nedochází. Jedině body L4 a L5 jsou tedy pro sondu stabilní i bez přidavných korekcí motorem.

Zajímavé ale je, že se zdá, že oba body v sobě "chyťají" jen tělesa, která už v nich nebo v jejich blízkosti na začátku simulace byla a neuchytí se v nich žádné jiné těleso (to jde vidět hlavně z pravého obrázku - oba Lagrangovy body mají v sobě jen tělesa velmi podobné barvy). To by však mohlo být i špatnou volbou počátečního rozmístění a rychlostí těles, na přesnější průzkum bych musel obojí víc randomizovat.

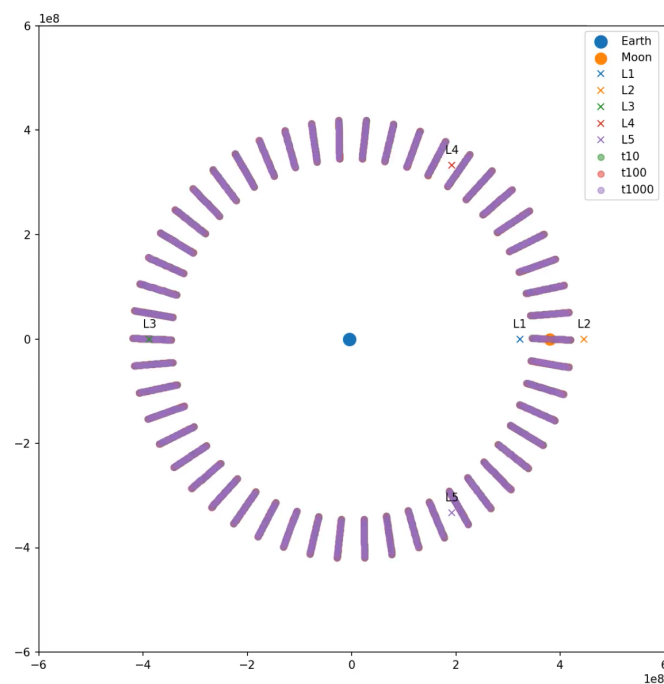
Při porovnání různých časových kroků na obrázcích 5 a 6 jde vidět, že po třech letech simulace už většina těles prolétla okolo Země nebo Měsíce a výsledky pro různé časové kroky se tak výrazně liší. Pro nás je však důležité, že v Lagrangových bodech L4 a L5 toto neplatí, tzn. ve všech třech časových krocích polohy vychází přibližně stejně. Výsledkům v těchto bodech tedy nejspíš lze věřit.



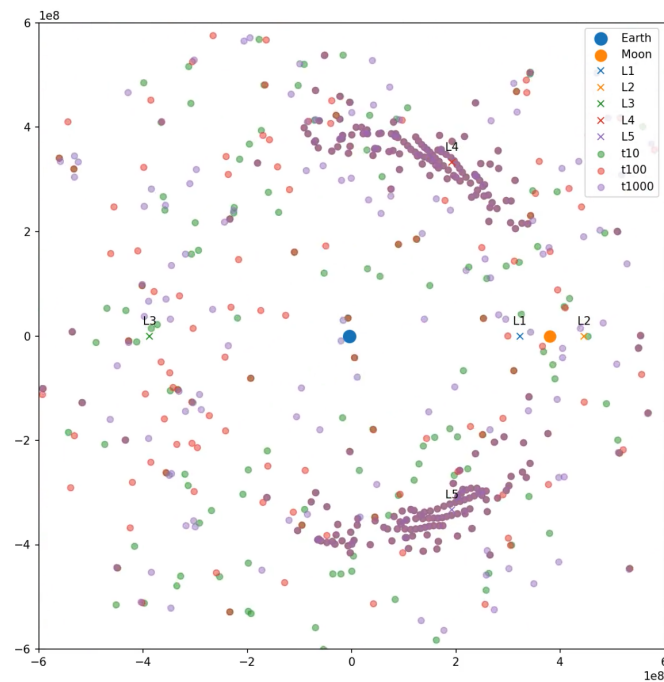
Obrázek 3: Simulace stability L4 a L5 v nulovém čase.



Obrázek 4: Simulace stability L4 a L5 po třech letech.



Obrázek 5: Simulace stability L4 a L5 v nulovém čase - porovnání časových kroků 10s, 100s a 1000s.



Obrázek 6: Simulace stability L4 a L5 po třech letech - porovnání časových kroků 10s, 100s a 1000s.