色彩科學導論與應用

程式設計練習

組合數字系統

授課教師：王宗銘

2021/02/22

1.問題背景說明

欲由 n 個物件，選取 k 個，有C_k^n種選法。例如 n=5, k=3, $C_3^5 = 10$，代表由 5 個物件，取 3 個，有 10 種選法。我們將n個物件以 0, 1, …, (n-1)索引(Index)代表。第 1 個物件索引為 0，第 2 個物件索引為 1，依此類推，第 n 個物件索引為(n-1)。我們以**索引序列** element($e_0, e_1, \ldots, e_{k-1}$)代表選取的 k 個物件之索引值。例如 element(1, 3, 4)代表選取物件之索引值分別為e_0=1、e_1=3、e_2=4，物件為第 2、4、5 個。

何謂組合數字系統 ? 組合數字系統是一種計數系統。我們已知給定(n, k)，利用組合公式可算出C_k^n之數值，故$[0, C_k^n - 1]$可代表數線上的一個封閉範圍。據此，對任意一個正整數 m，若其位於此範圍內，$0 \leq \mathrm{m} \leq (C_k^n - 1)$，組合系統以式(1)將m對應到唯一的表示方式，其中$\mathrm{n} > s_k > s_{k-1} > \cdots > s_1 \geq 0$。我們以 cobidic($s_k, s_{k-1}, \ldots, s_1$)代表數字m的**組合序列**(combinadics)。在組合數字系統中，若$\mathrm{n} < \mathrm{k}$，則我們定義$C_k^n = 0$。例如C_3^2 =0，C_1^0 =0。舉例而言，給定$(\mathrm{n}, \mathrm{k}, \mathrm{m}) = (5, 3, 4)$，則由於$C_3^4 + C_2^1 + C_1^0 = 4 + 0 + 0 = 4$，故$\mathrm{m} = 4$的組合序列為 cobidic(4, 1, 0)。表 1 列出(5, 3, m)的組合序列與對應的索引序列(element)。我們後續會詳加說明索引序列。

$$\mathrm{m} = C_k^{s_k} + C_{k-1}^{s_{k-1}} + \cdots + C_1^{s_1} \qquad (1)$$

表 1、C_3^5之組合序列與索引序列之關係

m	expression	cobidic	element	0	1	2	3	4
0	$C_3^2+C_2^1+C_1^0$	(2, 1, 0)	(0, 1, 2)					
1	$C_3^3+C_2^1+C_1^0$	(3, 1, 0)	(0, 1, 3)					
2	$C_3^3+C_2^2+C_1^0$	(3, 2, 0)	(0, 1, 4)					
3	$C_3^3+C_2^2+C_1^1$	(3, 2, 1)	(0, 2, 3)					
4	$C_3^4+C_2^1+C_1^0$	(4, 1, 0)	(0, 2, 4)					
5	$C_3^4+C_2^2+C_1^0$	(4, 2, 0)	(0, 3, 4)					
6	$C_3^4+C_2^2+C_1^1$	(4, 2, 1)	(1, 2, 3)					
7	$C_3^4+C_2^3+C_1^0$	(4, 3, 0)	(1, 2, 4)					
8	$C_3^4+C_2^3+C_1^1$	(4, 3, 1)	(1, 3, 4)					
9	$C_3^4+C_2^3+C_1^2$	(4, 3, 2)	(2, 3, 4)					

承上所述，n 個物件選取 k 個之情況中，我們希望 m 的組合序列與選取的物件能有字典順序(lexicographic order)表示。以表 1 來說明之。例如：

(1). m=0，組合序列為 cobidic(2, 1, 0)，此時我們由最小索引起始 0 開始，選取索引序列 element(0, 1, 2)，代表我們選了第 1、2、3 個物件，如表 1 最右欄之顏色區塊所示。

(2). m=1，組合序列為 cobidic(3, 1, 0)，我們選取 element(0, 1, 3)，意即第 1、2、4 個物件。以此類推到 m＝2, 3, 4。

(3). 當 m=5，組合序列為 cobidic(4, 2, 0)，我們選取 element(0, 3, 4)，意即第 1、4、5 個物件。

(4). 當 m=6 時，組合序列為 cobidic(4, 2, 1)，但索引起始最小 0 已無法有其他可供選擇，故我們由次小的索引 1 開始，選取 element(1, 2, 3)，意即第 2、3、4 個物件。由表 1 的最右欄，我們可以看出選取是依據字典順序，由索引 0 開始，若相同，則選索引 1，若又相同，則選索引 2。依此類推，此即為字典順序。

2. 問題

2.1 組合序列

給定(n, k, m)，請寫一個程式 program_1，可求出**組合序列** cobidic($s_k, s_{k-1}, \ldots, s_1$)。

1. 注意事項：

(1) 由於給定(n, k, m)，故組合序列 cobidic(s_k, s_{k-1}, …, s_1)有 k 個元素，其下標由 k 遞減到 1。

(2) 組合序列必須滿足 $n > s_k > s_{k-1} > \cdots > s_1 \geq \mathbf{0}$。注意$s_1$之數值可以為 0。

2. 方法：

我們可利用貪婪演算法一(Greedy Algorithm)，求出**組合序列** cobidic(s_k, s_{k-1}, …, s_1)。

貪婪演算法一：求出**組合序列**

輸入：(n, k, m)

輸出：cobidic(s_k, s_{k-1}, …, s_1)

Step 1: Let 餘數 R=m。Then, 變數 i 由 i=n-1，n-2, …, (k-1)遞減順序，找出滿足 $C_k^i \leq R$且C_k^i最接近 R 之 i，let $s_k = i$。

Step 2: 此時s_k已知，故計算剩餘之餘數 R=m-$C_k^{s_k}$。Then, 變數 i 由 i=($s_k -$ 1), ($s_k - 2$), …, (k-2)遞減順序，找出滿足$C_{k-1}^i \leq R$且C_{k-1}^i最接近 R 之變數 i，令s_{k-1} =i。

Step 3: 此時s_{k-1}已知，故計算剩餘之餘 R=R-$C_{k-1}^{s_{k-1}}$。Then, 變數 i 由 i=($s_{k-1} -$ 1), ($s_{k-1} - 2$), …, (k-3)遞減順序，找出滿足$C_{k-2}^i \leq R$且C_{k-2}^i最接近 R 之變數 i，令s_{k-2} =i。

依此類推，經過 k 個 steps，我們可以找到s_1。

…

Step (k+1): 當 R=R-$C_1^{s_1}=0$時，我們終止演算法。

輸出**組合序列** cobidic(s_k, s_{k-1}, …, s_1)。

3. 演算法一範例：

給定(n, k, m)=(5, 3, 6)

Step 1: R=6. i=4, 3, 2。C_3^4、C_3^3、C_3^2中，C_3^4＝4 ≤6 且最接近 R=6，let s_3=4。

Step 2: R=6-C_3^4=2. i=3, 2, 1。C_2^3、C_2^2、C_2^1中，C_2^2＝1 ≤2 且最接近 R=2，let s_2=2。

Step 3: R=2-C_2^2=1. i=2, 1, 0。C_1^2、C_1^1、C_1^0中，C_1^1＝1 ≤1 且最接近 R=1，let s_1=1。

Step 4: R=1-C_1^1=0 我們終止計算。

輸出**組合序列** cobidic(s_3, s_2, s_1)= cobidic (4, 2, 1)。

4. 程式輸出與數入範例

輸入

5 3 6

輸出

4 2 1

2.2 索引序列(Element)

我們已說明 n 個物件選取 k 個，有C_k^n種選法與組合序列之關係。由 n 個物件選取 k 個時，我們除了求出正整數 m 的組合序列外，選取的物件與之有字典順序外，也希望能瞭解被選取的物件為何，這就需要藉助索引序列。我們以範例討論之。

給定(n, k, m)=(5, 3, 6)，參照表 2，由於 m=6，我們可根據貪婪演算法一求出組合序列 cobidic(4, 2, 0)。但我們希望也能求出其索引序列 element(1, 2, 3)，意即

選取為第 2、3、4 個物件。

由表 2，我們觀察 m=6 與 d=3 相加得到之數值為C_3^5-1=9。同理，m=4 與 d=5 相加也是 9。我們稱 d 為 m 的雙數(Dual Number)。若給定(n, k, **d**)=(5, 3, 3)，則由貪婪演算法一可求出組合序列為 cobidic(3, 2, 1)，如表 2 所示。接著，如果以(n-1)=4 減去上述組合序列內的每個元素 3, 2, 1，則可得到 4-3=**1**, 4-2=**2**, 4-1=**3**，恰巧是 m=6 的索引序列 element(1, 2, 3)。

再舉另個範例，欲求 m=4 的索引序列 element(0, 2, 4)。我們可以使用以下三個步驟來完成。**首先**，求出 m=4 的**雙數 d**，根據 m+d=C_3^5-1之關係，我們可得 d=C_3^5-1-m=10-1-4=5。**接著**，我們利用貪婪演算法一求出雙數 d=5 之的組合序列 cobidic(4, 2, 0)。**最後**，我們以 n-1=4 減去每個元素，即可得到 m=4 的索引序列 element(0, 2, 4)。

表 2、C_3^5之在組合系統 m 與其對應的雙數 d

m	expression	cobidic	element	0	1	2	3	4
0	$C_3^2+C_2^1+C_1^0$	(2, 1, 0)	(0, 1, 2)					
1	$C_3^3+C_2^1+C_1^0$	(3, 1, 0)	(0, 1, 3)					
2	$C_3^3+C_2^2+C_1^0$	(3, 2, 0)	(0, 1, 4)					
3	$C_3^3+C_2^2+C_1^1$	(3, 2, 1)	(0, 2, 3)					
4	$C_3^4+C_2^1+C_1^0$	(4, 1, 0)	(0, 2, 4)					
5	$C_3^4+C_2^2+C_1^0$	(4, 2, 0)	(0, 3, 4)					
6	$C_3^4+C_2^2+C_1^1$	(4, 2, 1)	(1, 2, 3)					
7	$C_3^4+C_2^3+C_1^0$	(4, 3, 0)	(1, 2, 4)					
8	$C_3^4+C_2^3+C_1^1$	(4, 3, 1)	(1, 3, 4)					
9	$C_3^4+C_2^3+C_1^2$	(4, 3, 2)	(2, 3, 4)					

根據上述說明，給定(n, k, m)，請寫一個程式 program_2，求出**索引序列** element(e_0, e_1, …, e_{k-1})。

1. 注意事項：

由於給定(n, k, m)，故索引序列 element(e_0, e_1, …, e_{k-1})也有 k 個，但下標由 0

增加到 k-1，且索引序列必須滿足$e_0 < e_1 < \cdots < e_{k-1} < \mathrm{n}$。

2. 方法：

我們可利用原有的組合序列演算法、考慮 m 的雙數 d，利用減法來求**索引序列。**

演算法二：**索引序列**

輸入：(n, k, m)

輸出：element(e_0, e_1, …, e_{k-1})

Step 1: 求出 m 的雙數 d=$C_k^n - 1 - m$。

Step 2: 使用貪婪演算法一來求出 d 的**組合序列** cobidic(s_k, s_{k-1}, …, s_1)。

Step 3: 將 n-1 減去每個組合序列內之元，即可得索引序列，意即 element(e_0, e_1, …, e_{k-1})=(n-1, n-1, …, n-1)-($s_k, s_{k-1}, \dots, s_1$)。

3. 演算法二範例：

給定(n, k, m)=(5, 3, 7)

Step 1: m=7，d=$C_3^5 - 1 - m = 2$。

Step 2: 使用貪婪演算法一，並帶入參數(n, k, d)=(5, 3, 2)，求出**組合序列** cobidic(s_k, s_{k-1}, …, s_1)=(3, 2, 0)。

Step 3: 將 5-1＝4 減去每個組合序列元素，即得 element(e_0, e_1, e_2)=(5-1, 5-1, 5-1)- (3, 2, 0)=(1, 2, 4)。

4. 程式輸出與數出

輸入數值範圍：

$1 \le \mathrm{n} \le 81$

$1 \le \mathrm{k} \le \mathrm{n}$

$0 \le \mathrm{m} \le C_k^n - 1$

輸入與輸出

Case 1

5 3 7

1 2 4

Case 2

5 3 1

0 1 3