CHAPITRE 3: Matrices et Déterminants

1 Les matrices:

1.1 Définitions et Opérations:

1.1.1 Définitions:

- Une matrice A de type (m,n) est un tableau à m lignes et n colonnes notée $(a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}$

$$A=(a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}=\begin{pmatrix} a_{11} & . & . & a_{1j} & . & . & a_{1n}\\ a_{21} & . & . & a_{2j} & . & . & a_{2n}\\ . & . & . & . & . & . & .\\ . & . & . & . & . & . & .\\ a_{i1} & . & . & a_{ij} & . & . & a_{in}\\ . & . & . & . & . & . & .\\ a_{m1} & . & . & a_{mj} & . & . & a_{mn}\end{pmatrix}$$

- Les nombres qui composent la matrice A sont appelés **les éléments** ou **les coefficients** de la matrice A.
- a_{ij} est l'élément de la matrice A qui se trouve à l'intersection de la $i^{ème}$ ligne et la $j^{ème}$ colonne.

Notation: L'ensemble des matrices de type (m,n) à coefficients réels est noté par: $M_{m,n}(\mathbb{R})$

Exemples:

1/ $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \frac{3}{4}\\ -1 & 0 & \sqrt{2}\end{pmatrix}\in M_{2,3}(\mathbb{R}),\ \ A=(a_{ij})_{\substack{1\le i\le 2\\ 1\le j\le 3}},$

$a_{21}=-1, a_{22}=0$ et $a_{23}=\sqrt{2}$

2/ $B=\begin{pmatrix} 2 & 3\\ -2 & 3\end{pmatrix}\in M_{2,2}(\mathbb{R}),\ \ A=(a_{ij})_{\substack{1\le i\le 2\\ 1\le j\le 2}}$

$b_{11}=2$, $b_{12}=3$, $b_{21}=-2$ et $b_{22}=3$

1.1.2 Matrices particulières:

Matrice ligne: c'est une matrice qui contient une seule ligne $(m=1)$.

Exemple:

$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1\end{pmatrix}\in M_{1,3}(\mathbb{R})$

Matrice colonne: c'est une matrice qui contient une seule colonne ($n = 1$).

Exemple:

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in M_{2,1}(\mathbb{R})$$

Matrice nulle: c'est une matrice dont tous ses éléments sont nuls.

Exemple:

$$A = 0_{2,3} = 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{R}),\ B = 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R})$$

Matrice carrée: c'est une matrice qui a le même nombre de lignes et de colonnes ($m = n$). On dit que c'est une matrice d'ordre n.

Exemple:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R}),\ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix} \in M_{3,3}(\mathbb{R})$$

Notation: On note par $M_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{R}$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & . & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- Les éléments $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ forment la diagonale principale de la matrice A. $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ sont appelés éléments diagonaux de la matrice A.

Matrice diagonale : c'est une matrice carrée, dont tous ses éléments sont nuls sauf les éléments diagonaux.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & a_{22} & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Exemple:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Matrice identité : c'est une matrice diagonale, dont les éléments diagonaux sont égaux à 1.

On note I_n la matrice identité d'ordre n .

Exemple:

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrice triangulaire inférieure : c'est une matrice carrée de la forme:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & . & . & . & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & .0 \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & . & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Exemple:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrice triangulaire supérieure : c'est une matrice carrée de la forme:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Exemple:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1.1.3 Transposée d'une matrice:

La matrice transposée de A notée ${}^tA$, est la matrice obtenue en écrivant les lignes de A en colonnes.

Si $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ alors ${}^tA \in M_{n,m}(\mathbb{R})$.

Exemples:
Déterminer les transposées des matrices suivantes:

1/ $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

On a $A \in M_{3,2}(\mathbb{R})$ alors ${}^tA \in M_{2,3}(\mathbb{R})$.

donc ${}^tA = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

2/ $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$. $B \in M_2(\mathbb{R})$ alors ${}^tB \in M_2(\mathbb{R})$.

donc ${}^tB = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

3/ $C = (0, 0, 0)$. $C \in M_{1,3}(\mathbb{R})$ alors ${}^tC \in M_{3,1}(\mathbb{R})$

${}^tC = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Propriétés: Soient $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, $B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ et $C \in M_{n,p}(\mathbb{R})$, et soit $\lambda \in \mathbb{R}$:

1/ ${}^t({}^tA) = A$
2/ ${}^t(A + B) = {}^tA +^t B$
3/ ${}^t(\lambda A) = \lambda.{}^tA$
4/ ${}^t(AC) = {}^tC^tA$

Exercice: Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

-Vérifier que ${}^t(A + B) = {}^tA +^t B$.

1.1.4 Les opérations sur les matrices:

Egalité de deux matrices: Deux matrices A et B sont égales, et on note $A = B$ si:

- Elles ont même nombre de lignes.
- Elles ont même nombre de colonnes.
- Les coefficients à la même position sont égaux.

$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$, $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$

$A = B$ signifie $a_{ij} = b_{ij}$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$

Exemple 1:

Les matrices $\begin{pmatrix} 1+2 & 5 \\ 3 & 4-7 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 & 2+3 \\ 3 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont égales.

Exemple 2:
On a $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exemple 3: Soient les matrices:
$A = \begin{pmatrix} x-y & z+2t \\ x+y & 2z-t \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$
-Déterminer les réels x, y, z et t pour que $A = B$.

$$A = B \Leftrightarrow \begin{cases} x-y = 1 ...(1) \\ x+y = 5...(2) \\ z+2t = 9..(3) \\ 2z-t = -2..(4) \end{cases}$$

De (1) et (2), on obtient $x = 3$ et $y = 2$
De (3) et (4), on trouve $z = 1$ et $t = 4$
d'où $A = B \Longleftrightarrow (x, y, z, t) = (3, 2, 1, 4)$

La somme de deux matrices: Soient A et B deux matrices de même type (m, n). La somme $A + B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$.
Si $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq n}}$ et $B = (b_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq n}}$ alors $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq n}}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & . & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & . & . & . & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & . & . & . & b_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ b_{m1} & b_{m2} & . & . & . & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & . & . & . & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & . & . & . & a_{2n}+b_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & . & . & . & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

Exemple:

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 & -5+0 \\ 2-1 & 3+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$$

Propriétés: Soient $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, $B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ et $C \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ et soit $0 \in M_{m,n}(\mathbb{R})$
1/ $(A + B) + C = A + (B + C)$ ((+) est associative)
2/ $A + B = B + A$ ((+) est commutative)
3/ $A + 0 = 0 + A = A$ (l'élément neutre)

La multiplication par un scalaire: Soient $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

La matrice $(\lambda A) \in M_{m,n}(\mathbb{R})$

Si $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$ alors $\lambda A = (\lambda a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$

$$\lambda A = \lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & . & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & . & . & . & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & . & . & . & \lambda a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & . & . & . & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

Exemple: Déterminer la matrice $3A$ et $-\frac{1}{2}A$, si $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$

$$3A = \begin{pmatrix} 3.1 & 3.(-1) \\ 3.2 & 3.3 \\ 3.2 & 3.(-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 6 & 9 \\ 6 & -12 \end{pmatrix}$$

$$-\frac{1}{2}A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}.1 & -\frac{1}{2}.(-1) \\ -\frac{1}{2}.2 & -\frac{1}{2}.3 \\ -\frac{1}{2}.2 & -\frac{1}{2}.(-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{3}{2} \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Propriétés: Soient $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, $B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ et $\alpha, \lambda \in \mathbb{R}$

1/ $(-A) + A = A + (-A) = 0$

2/ $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$

3/ $(\alpha + \lambda)A = \alpha A + \lambda A$

4/ $(\alpha\lambda)A = \alpha(\lambda A)$

5/ $1A = A$

Produit de deux matrices: Soient $A \in M_{m,p}(\mathbb{R})$ et $B \in M_{p,n}(\mathbb{R})$

tel que $A = (a_{ik})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le k \le p}}$ et $B = (b_{kj})_{\substack{1 \le k \le p \\ 1 \le j \le n}}$

La matrice produit $C = AB \in M_{m,n}(\mathbb{R})$

$$C = AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2p} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{i1} & a_{i2} & . & . & . & a_{ip} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & . & a_{mp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & . & b_{1j} & . & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & . & b_{2j} & . & b_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ b_{p1} & b_{p2} & . & b_{pj} & . & b_{pn} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & . & . & . & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & . & . & . & c_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & c_{ij} & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ c_{m1} & c_{m2} & . & . & . & c_{mn} \end{pmatrix}$$

avec $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + ...a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{k=p} a_{ik}b_{kj}$,
$i = 1, 2, ...m,\ j = 1, 2, ..., n$

Attention: Le produit AB n'est défini que si le nombre de colonnes de la matrice A est égal au nombre de lignes de la matrice B.

Exemple: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ -3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

On peut effectuer les produits BA, CB, AC et CA. Les produits AB et BC sont impossibles.
Calculons AC et CA

$$AC = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1\times 1 + 2\times 0 & 1\times 2 + 2\times 1 & 1\times(-1) + 2\times 2 \\ 3\times 1 + (-4)\times 0 & 3\times 2 + (-4)\times 1 & 3\times(-1) + (-4)\times 2 \\ 2\times 1 + 0\times 0 & 2\times 2 + 0\times 1 & 2\times(-1) + 0\times 2 \end{pmatrix}$$

$$AC = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & -11 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

et $CA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}$

On voit que le produit des matrices n'est pas toujours possible, et l'orsque l'on peut effectuer le produit à gauche et à droite, les deux matrices obtenues ne sont pas toujours égales.

Remarque: Le produit des matrices n'est pas commutative ($AB \neq BA$)

Propriétés: Soient $A \in M_{m,p}(\mathbb{R})$, $B \in M_{p,r}(\mathbb{R})$, $C \in M_{r,n}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$
1/ $(AB)C = A(BC)$ (associativité)
2/ $AI_p = I_mA = A$ (l'élément neutre)
3/ Si $D \in M_{p,r}(\mathbb{R})$: $A(B + D) = AB + AD$ (distributivité à gauche)
4/ Si $E \in M_{r,s}(\mathbb{R})$: $(B + D)E = BE + DE$ (distributivité à droite)
5/ $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$

1.1.5 Puissances d'une matrice:

Soit A une matrice carrée d'ordre n et soit $k \in \mathbb{N}$.
La puissance $k^{éme}$ de A est définie par:

$$A^0 = I,$$
$$A^k = A^{k-1}.A = \underbrace{A.A.....A}_{k\ fois}, \quad k \geq 1$$

Exemples:

1/ Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & -4 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

alors $A^2 = AA = \begin{pmatrix} 6 & -10 & 14 \\ 2 & -4 & 6 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

et $A^3 = A^2A = AA^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I_3$

2/ $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$A^2 = \begin{pmatrix} (-2)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 3^2 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} (-2)^3 & 0 & 0 \\ 0 & 2^3 & 0 \\ 0 & 0 & 3^3 \end{pmatrix}$

On déduit par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$

Propriérés: Soient $A \in M_n(\mathbb{R})$, $k \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{N}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:

1/ $A^kA^l = A^{k+l}$

2/ $(A^k)^l = A^{kl}$

3/ $(\lambda A)^k = \lambda^k A^k$