Ex. 4

Calculer les intégrales:

1) $I_1 = \int \frac{\cos(x)}{\sin^2(x) - 3\sin(x) + 2} dx$

$= \int f(x)\, dx$

On a $f(\pi - x) = \frac{\cos(\pi - x)}{\sin^2(\pi-x) - 3\sin(\pi - x) + 2}$

$= \frac{-\cos(x)}{\sin^2(x) - 3\sin(x) + 2}$

$= -f(x)$

$\boxed{\begin{array}{l} \cos(\pi - x) \\ = -\cos x \\ \sin(\pi - x) \\ = \sin x \end{array}}$

D'où

On pose $t = \sin x$

d'où $dt = \cos x\, dx$

$I_1 = \int \frac{\cos(x)\, dx}{\sin^2(x) - 3\sin(x) + 2}$

$= \int \frac{dt}{t^2 - 3t + 2}$

D'où I_1 devient ~~une~~ ~~f~~ intégrale d'une fonction rationnelle.

29

$$I_1 = \int \frac{1}{t^2 - 3t + 2}\, dt = \int \frac{P(t)}{Q(t)}\, dt$$

* Division Euclidienne.

$deg(P) < deg(Q)$, pas de division Euclidienne

* Racines de Q :

$$Q(t) = t^2 - 3t + 2$$

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 9 - 8 = 1 > 0.$$

$$t_1 = \frac{3 + \sqrt{1}}{2} = \frac{4}{2} = \boxed{2} \quad t_2 = \frac{3 - 1}{2} = \boxed{1}$$

Donc $Q(t) = (t - 1)(t - 2)$

* Décomposition de $\frac{P(t)}{Q(t)}$.

$$\frac{1}{t^2 - 3t + 2} = \frac{A}{t - 1} + \frac{B}{t - 2}$$

$$= \frac{At - 2A + Bt - B}{(t - 1)(t - 2)}$$

$$= \frac{(A + B)t + (-2A - B)}{(t - 1)(t - 1)}$$

Donc $\begin{cases} A + B = 0 \\ -2A - B = 1 \end{cases} \Rightarrow -A = 1$

$\Rightarrow \boxed{A = -1}$ et $\boxed{B = 1}$

Donc

$$\frac{1}{t^2-3t+2} = \frac{-1}{t-1} + \frac{1}{t-2}.$$

* Intégration:

$$I_1 = \int \frac{P(t)}{Q(t)}\,dt = \int \left(\frac{-1}{t-1} + \frac{1}{t-2}\right) dt$$

$$= -\ln|t-1| + \ln|t-2| + k \quad (k \in \mathbb{R})$$

$$\boxed{I_1 = -\ln|\sin(x)-1| + \ln|\sin(x)-2| + k \ (k \in \mathbb{R})}$$

$$I_2 = \int \frac{tg(x)}{1+\cos(x)}\,dx$$

$$= \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)\,(1+\cos(x))}\,dx$$

$$= \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)+\cos^2(x)}\,dx = \int f_2(x)\,dx$$

On a $\quad f_2(-x) = \dfrac{\sin(-x)}{\cos(-x)+\cos^2(-x)}$

$$= \frac{-\sin(x)}{\cos(x)+\cos^2(x)} = -f(x)$$

31

D'où

On pose $t = \cos x$ $\qquad dt = -\sin x \, dx$

$$I_2 = -\int \frac{-\sin x}{\cos(x) + \cos^2(x)} dx$$

$$= -\int \frac{dt}{t + t^2}$$

$$= -\int \frac{1}{t(1+t)} dt$$

* $\dfrac{1}{t(1+t)} = \dfrac{A}{t} + \dfrac{B}{1+t} = \dfrac{1}{t} + \dfrac{-1}{1+t}$

$$I_2 = -\int \frac{1}{t} dt + \int \frac{1}{1+t} dt$$

$$= -\ln|t| + \ln|1+t| + K \quad (k \in \mathbb{R})$$

$$= -\ln|\cos x| + \ln|1+\cos x| + K \quad K \in \mathbb{R}.$$

*** Les autres intégrales ont été fait au cours.

Exemples

① Ex. 5 (Série N°4)

· Soit le polynôme $Q(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 2$

1) Vérifier que 1 est une racine de Q

$Q(1) = 1 - 3 + 4 - 2 = 5 - 5 = 0$

Donc 1 est une racine de Q, et on a $Q(x) = (x-1)(x^2 - 2x + 2)$

2) Décomposer la fraction $f(x) = \dfrac{x^3 + x^2 - 3x + 3}{x^3 - 3x^2 + 4x - 2} = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$

① On a $\deg(P) = \deg(Q)$

On fait la division Euclidienne.

$$
\begin{array}{r|l}
\cancel{x^3} + x^2 - 3x + 3 & x^3 - 3x^2 + 4x - 2 \\
\cline{2-2}
\cancel{-x^3} + 3x^2 - 4x + 2 & 1 \\
\hline
4x^2 - 7x + 5 &
\end{array}
$$

D'où $f(x) = 1 + \dfrac{4x^2 - 7x + 5}{x^3 - 3x^2 + 4x - 2} = E(x) + \dfrac{R(x)}{Q(x)}$

avec $\deg(P) < \deg(Q)$

$\cancel{= 1 + \dfrac{4x^2 - 7x + 5}{(x-1)(x^2 - 2x + 1)}}$

$\cancel{= E(x) + \dfrac{R(x)}{Q(x)}}$

P(33) au TD

② Racines de $\varphi(x)$

$$\varphi(x) = (x-1)(x^2-2x+2)$$

Car on a déja trouvé 1 est une racine de φ.

Et pour (x^2-2x+2) on a $\Delta = (-2)^2 - 4\times 1\times 2 = -4 < 0$

Donc la seule racine de φ est 1.

Car si 1 est une racine de φ alors $\varphi(x) = (x-1)(ax^2+b$ [...] et on trouve a, b et c par identification ou bien par division Euclid[...] de $\varphi(x)$ sur $(x$ [...] on trouve x^2-2x+2

③ Décomposition de f

On a $f(x) = 1 + \dfrac{4x^2-7x+5}{(x-1)(x^2-2x+2)}$

D'où $f(x) = 1 + \dfrac{R(x)}{\varphi(x)}$ avec $\deg(R) < \deg(\varphi)$

On a

$$\frac{R(x)}{\varphi(x)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Mx+N}{x^2-2x+2}$$

$$= \frac{Ax^2-2Ax+2A+Mx^2+Nx-Mx-N}{(x-1)(x^2-2x+2)}$$

$$= \frac{(A+M)x^2+(-2A+N-M)x+(2A-N)}{(x-1)(x^2-2x+2)}$$

Par identification

$$\begin{cases} A+M = 4 & \cdots (1) \\ -2A+N-M = -7 & \cdots (2) \\ 2A-N = 5 & \cdots (3) \end{cases}$$

de (2)+(3) on trouve $-M = -2$ d'où $\boxed{M=2}$

De (1) on trouve $\boxed{A=2}$ alors $\boxed{N=-1}$

34

Per

Donc

$$f(x) = 1 + \frac{2}{x-1} + \frac{2x-1}{x^2-2x+2}$$

3) Calculer $I = \int f(x)\, dx$

$$I = \int f(x)\, dx$$

$$= \int 1\, dx + 2\int \frac{1}{x-1}\, dx + \int \frac{2x-1}{x^2-2x+2}\, dx$$

$$= x + 2\ln|x-1| + J$$

$$J = \int \frac{2x-1}{x^2-2x+2}\, dx$$

La forme canonique de x^2-2x+2 est

$$\left(x+\frac{-2}{2}\right)^2 - \frac{-4}{4} = (x-1)^2+1$$

On pose $t = x-1$

d'où $dt = dx$ et $x = t+1$

Donc $J = \int \frac{2(t+1)-1}{t^2-1}\, dt = \int \frac{2t}{t^2-1} \cancel{dt} + \int \frac{1}{t^2+1}\, dt$

$= \ln|t^2-1| + \arctan(t) + C, \quad C \in \mathbb{R}$

$= \ln|(x-1)^2-1| + \arctan(x-1) + C, \quad C \in \mathbb{R}$

Donc

$$\int f(x)\, dx = x + 2\ln|x-1| + \ln|x^2-2x+2| + \operatorname{actan}(x-1) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$\boxed{P_{22}}$

Forme canonique

ax^2+bx+c

$= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$

Ex. 6 :

1) Calculer $I+J$ et $I-J$ puis I et J :

$$I+J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x + \sin(x)}{\sin x + \cos(x)}\, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \, dx$$

$$= \left[x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{2} - 0$$

$$= \boxed{\frac{\pi}{2}}$$

$$I-J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x) - \sin(x)}{\sin(x) + \cos(x)}\, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{u'(x)}{u(x)}\, dx$$

$$= \left[\ln|u(x)|\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left[\ln|\sin x + \cos x|\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

36

$$= \ln\left|\sin\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2}\right| - \ln|\sin 0 + \cos 0| = \ln(1) - \ln(1) = \boxed{0}$$

On a $\begin{cases} I+J = \frac{\pi}{2} \\ I-J = 0 \end{cases} \Rightarrow 2I = \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow \boxed{I = \frac{\pi}{4}}$$

Donc $\boxed{J = \frac{\pi}{4}}$

2) Déduire $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}+t}$

On pose $t = \sin x$ dans l'intégrale I.

d'où $dt = \cos x \, dx$

et on $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ ~~$\Rightarrow \sin(x) = \sqrt{1-\cos^2(x)}$~~

D'où

$$\cos(x) = \sqrt{1-\sin^2(x)} = \sqrt{1-t^2}$$

Donc

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}+t} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x \, dx}{\cos x + \sin x} = I = \boxed{\frac{\pi}{4}}$$