Chapitre 3 *D Y N A M I Q U E*

D U P O I N T M A T E R I E L

1/INTRODUCTION:

Nous avons appris en cinématique à décrire les mouvements, maintenant nous serons capables de les prévoir.

La dynamique est l'étude de la relation entre le m.v.t d'un corps et les causes qui le produisent : c'est le résultat de l'interaction de ce corps avec le monde qui l'entoure.

2/PRINCIPE D'INERTIE PAR GALILẺE:

- *Un corps est libre et isolé s'il n'y a aucune interaction entre ce corps et les autres objets qui l'entourent. Ce principe d'inertie établit qu'une particule est libre :*

  - si elle se déplace à une vitesse constante ;

  - si elle reste au repos si elle était déjà.

- *Le m.v.t d'un corps doit être étudié par rapport à un observateur libre et isolé → le repère utilisé par cet observateur sera appelé « référentiel d'inertie »*

3/ QUANTITE DE MOUVEMENT :

3.1/ La masse :

- *La masse est une caractéristique du corps, c'est elle qui s'oppose à toute variation (changement) de vitesse → la masse représente l'inertie du corps.*

L'expérience montre que plus la masse d'un objet est grande, et plus il est difficile de modifier sa vitesse.

- *La quantité de m.v.t est définie comme le produit de la masse par sa vitesse :*

$$\boxed{\vec{P} \; = \; m\,\vec{V}} \qquad \vec{P}//\vec{V}$$

Kg.m/s kg m/s

La quantité de m.v.t totale de deux particules de masses m_1 et m_2 et de vitesses $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ est :

$$\boxed{\vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 \; = \; m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2}$$

d'une façon générale :

$$\boxed{\vec{P} \; = \; \sum_{i=1}^{n} \vec{P}_i \; = m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2 + . \; . \; . + m_n\vec{V}_n}$$

3.2/ Conservation de la quantité de mouvement :

La quantité de m.v.t totale d'un système isolé est constante :

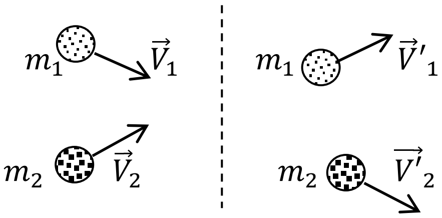
$$\boxed{\vec{P} \; = \vec{P'} \; = C^{ste}}$$

$\vec{P}$ *: quantité de m.v.t totale avant l'interaction*

$\vec{P}'$ *: quantité de m.v.t totale après l'interaction*

Cas de choc entre deux masses :

On considère deux masses m_1 et m_2 et de vitesses $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ en interaction.



$$\vec{P}_1 \; + \; \vec{P}_2 \; = \; \vec{P'}_1 \; + \; \vec{P'}_2$$
$$m_1\vec{V}_1 \; + \; m_2\vec{V}_2 \; = \; m_1\vec{V'}_1 \; + \; m_2\vec{V'}_2$$
$$m_1\vec{V}_1 - m_1\vec{V'}_1 \; = \; m_2\vec{V'}_2 - m_2\vec{V}_2$$
$$m_1 \, \Delta\vec{V}_1 \; = \; -m_2 \, \Delta\vec{V}_2$$

C'est-à-dire : $\boxed{\Delta\vec{P}_1 \; = \; - \, \Delta\vec{P}_2}$

La quantité de m.v.t perdue par l'une des masses est égale à la quantité de m.v.t gagnée par l'autre masse.

Exercice :

Une grenade est lancée horizontalement à une vitesse de 8 m/s explose en trois morceaux égaux. Le premier continu à se déplacé horizontalement à 16 m/s, un autre est projeté vers le haut suivant un angle de 45°, et le dernier suivant le même angle vers le bas. Trouver les vitesses des morceaux 2 et 3.

Rép : $V'_1 = V'_2 = 5.66\, m/s$

4/ LES LOIS DE NEWTON :

4.1/ La force :

Une force est l'expression d'une interaction, on peut la définir comme une grandeur dépendant de la variation de la quantité de m.v.t par rapport au temps.

$$\vec{F} = \frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t} \quad \rightarrow \quad \vec{F} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

alors $\boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}}$ $\vec{F}$ *: la résultante des forces appliquées à un corps*

On remarque que d'autant plus le temps est petit →la force sera importante.

4.2/ Principe d'inertie :

Un corps sur lequel n'agit aucune force ne modifie pas sa quantité de mouvement (v=C^{ste}).

Si $\vec{F} = \vec{0} \quad \rightarrow \quad \vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{0} \quad \rightarrow \quad \vec{P} = C^{ste} \quad \rightarrow \quad \vec{V} = C^{ste}$

4.3/ Principe fondamental de la dynamique :

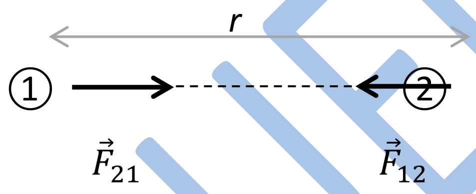
Si une masse se déplace avec une accélération $\vec{\boldsymbol{a}}$*, alors elle sera soumise à une force* $\vec{\boldsymbol{F}} = \sum \vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{ext}} = \boldsymbol{m}\vec{\boldsymbol{a}}$ *.*

$\vec{F}$ *: représente la résultante des forces appliquées à la masse m, elle est donnée par :*

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d(m\vec{V})}{dt} = m\frac{d\vec{V}}{dt} = m\vec{a} \quad \rightarrow \quad \boxed{\vec{\boldsymbol{F}} = \sum \vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{ext}} = \boldsymbol{m}\vec{\boldsymbol{a}}}$$

4.4/Principe de l'action et la réaction :

Soient deux particules situées à une distance « r » l'une de l'autre, la force exercée par la particule ① sur la particule ② est égale et opposée à la force exercée par la particule ② sur la particule ①.



avec :

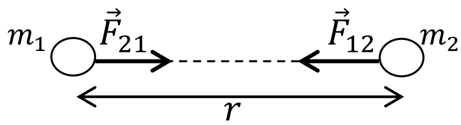
$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12} \qquad \text{et} \qquad |\vec{F}_{21}| = |\vec{F}_{12}|$$

5/ LA LOI DE GRAVITATION UNIVERSELLE :

Newton a étudié en détail le mouvement entre deux masses et il a fini par proposer une expression générale de la force d'attraction s'exerçant entre deux corps, et il a déduit que :

$*$ *Entre deux particules de masses* m_1*et* m_2 *placées à une distance "r" l'une de l'autre s'exerce une force attractive d'intensité :*

$$\boxed{F_{12} = F_{21} = G.\frac{m_1 m_2}{r^2}}$$



avec :

G = 6.67.10^-11^ M.K.S.A (G : constante de gravitation universelle)

m_1 *et* m_2 *: en Kg*

r *: en mètre (m)*

<u>Exercice 1 :</u>

Un astronome observe une planète et un petit satellite naturel qui décrit autour d'elle une orbite circulaire de rayon "$\boldsymbol{r}$" et de période "$\boldsymbol{T}$". Quelle est la masse de la planète ?

Rép : $M = \frac{4.\pi^2.r^3}{T^2.G}$ *avec : G=6.67* 10^{-11}*MKSA*

<u>Exercice 2 :</u>

En appliquant la loi de gravitation universelle ; déterminer l'accélération de la pesanteur $g = ?$

$On\ donne$: $R_{terre} = 6378.Km$, $M_{terre} = 5.977.10^{24}Kg$

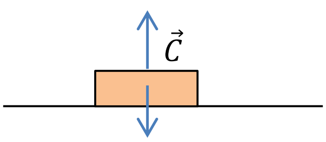
<u>6°/ LES FORCES DE FROTTEMENTS :</u>

<u>6.1/ Coefficient de frottement statique :</u> $(\mu_s = k_s)$

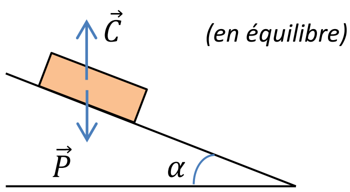
6.1.1/ Pratiquement :

On place une brique sur un plan horizontal et en augmente progressivement l'angle "α" jusqu'à une valeur limite "α_0"qui correspond au début de glissement, alors le coefficient de frottement statique sera donné par :

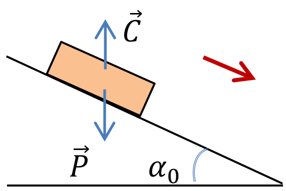
$$\boxed{\mu_s = tg\alpha_0}$$



La brique sur le plan horizontal



on augmente l'angle α

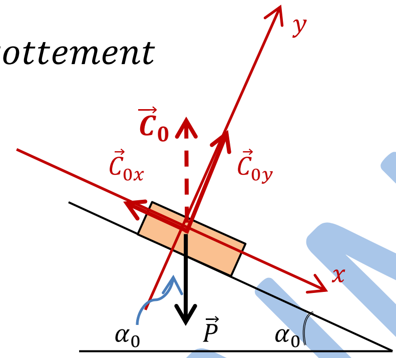


début de glissement

6.1.2/ Théoriquement :

Les forces qui s'exercent sur le corps sont : le poids $\vec{P}$ *et la force de liaison* $\overrightarrow{C_0}$*, tel que :* $\vec{C}_0 = \vec{C}_{0x} + \vec{C}_{0y}$

avec $\begin{cases} \vec{C}_{0y} = \vec{R} \ : \ réaction \\ \vec{C}_{0x} = \vec{F}_f \ : \ force\ de\ frottement \end{cases}$



La brique est immobile :

$$\sum \vec{F}_{/m} = \vec{0}$$

$$\vec{P} + \vec{C}_0 = \vec{0}$$

Proj/$\overrightarrow{Ox}$ *:* $P\ sin\alpha_0 - C_{0x} = 0 \ \rightarrow \ C_{0x} = mg\ sin\alpha_0$ ①

Proj/$\overrightarrow{Oy}$ *:* $-P\ cos\alpha_0 + C_{0y} = 0 \ \rightarrow \ C_{0y} = mg\ cos\alpha_0$ ②

en divisant l'équation ① par l'équation ②on aura : $tg\alpha_0 = \frac{C_{0x}}{C_{0y}}$

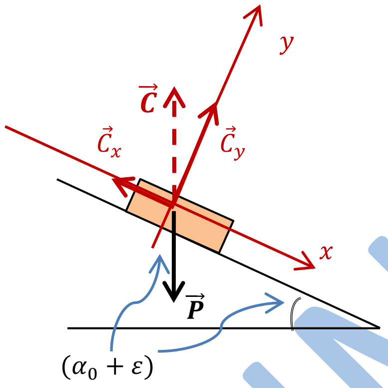
alors nous définissons le coefficient de frottement statique par :

$$\boxed{\mu_s = \frac{C_{0x}}{C_{0y}} = tg\alpha_0}$$

α_0 *: dépend de la nature de surface du corps ainsi que l'état de surface du plan incliné.*

6.2/ Coefficient de frottement dynamique (de glissement): $(\mu_d = k_d = \mu_g)$

Nous poursuivons l'expérience de départ en augmentant l'angle α d'une quantité infinitésimale (très petite) au-delà de α_0, la brique se met à glisser → on aura un m.v.t (= état dynamique)



$$\varepsilon \text{ très faible } \rightarrow \begin{cases} sin(\alpha_0 + \varepsilon) \approx sin\alpha_0 \\ cos(\alpha_0 + \varepsilon) \approx cos\alpha_0 \end{cases}$$

En appliquant la R.F.D on aura :

$$\sum \vec{F}_{/m} = m\vec{a}$$

$$\vec{P} + \vec{C} = m\vec{a}$$

En faisant les projections sur les axes, on aura :

Proj/$\overrightarrow{Ox}$ *:* $\quad P\ sin\alpha_0 - C_x = ma \quad \rightarrow C_x = mg\ sin\alpha_0 - ma < C_{0x}$

Proj/$\overrightarrow{Oy}$ *:* $\quad -P\ cos\alpha_0 + C_y = 0 \quad \rightarrow C_y = mg\ cos\alpha_0 = C_{0y}$

Le coefficient de frottement dynamique sera défini par :

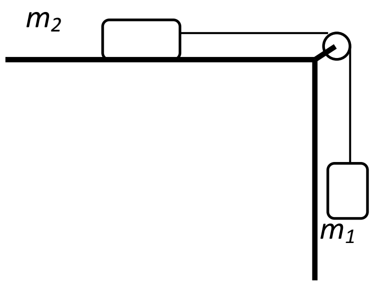
$$\boxed{\mu_d = \frac{C_x}{C_y}}$$

Comme : $C_x < C_{0x}$ *et* $C_y = C_{0y}$

alors : $\mu_d < \mu_s$ *: le coefficient de frottement dynamique est inférieur au coefficient de frottement statique.*

Exercice :

Sur la figure ci-contre, on suppose que les fils sont inextensibles, et la poulie de masse négligeable.



On donne $\mu_d = 0.15\,, \mu_s = 0.2$ *et* $m_2 = 10Kg$

1/ Déterminer la plus petite valeur de m_1 *à partir de laquelle système se met en m.v.t.*

2/ Si $m_1 = 4\ kg$*, déterminer l'accélération du système.*

7/ LES FROTTEMENTS VISQUEUX :

- *Quand un corps se déplace dans un fluide à une vitesse constante* $\vec{V}$*, la force de frottement du fluide est donnée par :*

$$\boxed{\vec{F}_f = -k.\vec{V} = -\beta.\vec{V}}$$

avec $k = \beta = K.\eta$

K*: dépend de la géométrie du corps (ex : pour une sphère* $K = 6.\pi.R$*)*

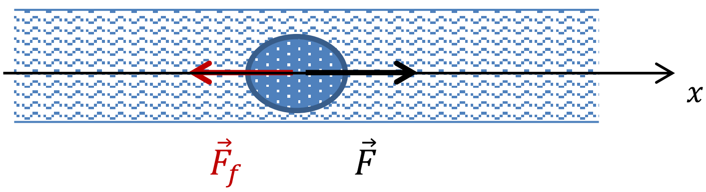
η*: Coefficient de viscosité qui dépend du milieu (du fluide)*

- *La vitesse d'un corps tiré une force* $\vec{F}$ *est donnée par :*

$$\boxed{V(t) = \frac{F}{k}(1 - e^{-\frac{k}{m}t})}$$

Démonstration :

Dans un fluide on tire une boule de masse M avec une force $\vec{F}$*, déterminer et tracer la vitesse de la boule en fonction du temps :*



En appliquant la R.F.D :

$$\sum \vec{F}_{/m} = m\vec{a}$$

$$\vec{F} + \vec{F}_f = m\vec{a} \qquad \text{avec} \qquad \vec{F}_f = -kV\vec{\imath}$$

En projetant sur l'axe horizontal $\overrightarrow{Ox}$ on aura :

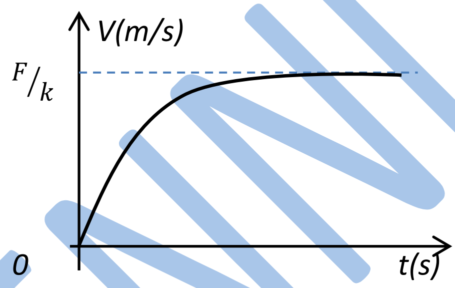
$$F - kV = ma = m\frac{dV}{dt}$$

C'est une équation différentielle du premier ordre qu'on peut facilement la résoudre et déterminer :

$$V(t) = \frac{F}{k}(1 - e^{-\frac{k}{m}t})$$

On a : $\text{à } t = 0 : V = 0$

$$\lim_{t\to\infty} V(t) = {}^{F}/_{k}$$



On peut aisément montrer que la vitesse limite d'un corps tiré par une force $\vec{F}$ dans un fluide est égale à :

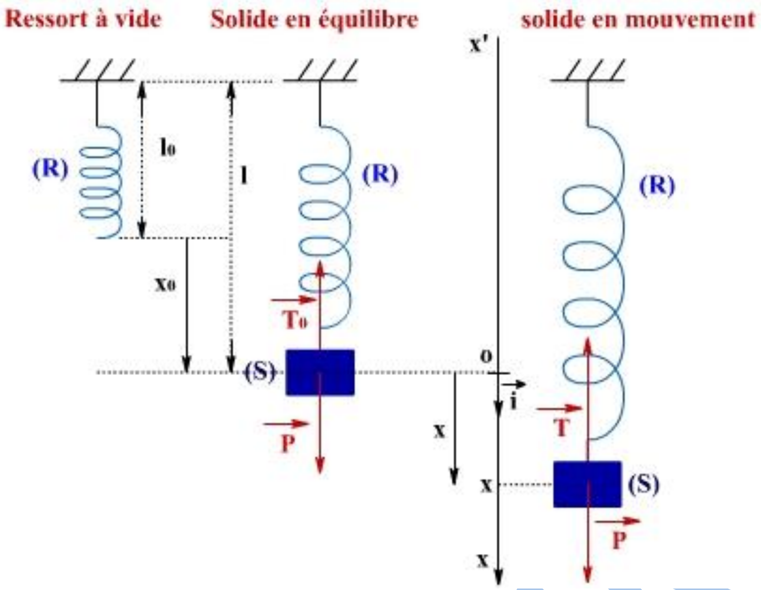
$$\boxed{V_{lim} = {}^{F}/_{k}}$$

8/ FORCES ELASTIQUES :

L'un des mouvements les plus couramment rencontré dans la nature est le m.v.t oscillatoire (ou périodique), le plus important est le m.v.t oscillatoire sinusoïdale (exemple : une masse accrochée à un ressort de constante de raideur K).

- *On accroche un solide de masse **m** à un ressort(R) de constante de raideur **K**, et on mesure l'allongement initiale $\boldsymbol{x_0}$. En utilisant la relation fondamentale de la dynamique, on vous demande de déterminer :*

  - *L'équation horaire du mouvement de la masse m ;*
  - *Déduire sa vitesse et son accélération en fonction du temps.*



- Le 1er dessin montre un ressort libre de longueur initiale l_0.

- Dans le 2ème dessin on accroche la masse m au ressort, à l'équilibre ce dernier s'allonge d'un allongement $x_0 = l - l_0$, en appliquant la relation fondamentale de la dynamique on aura :

$$\sum \vec{F}_{/m} = \vec{0} \qquad \text{(état statique)}$$

$$\vec{P} + \overrightarrow{T_0} = \vec{0} \qquad \text{avec :} \quad \overrightarrow{T_0} = -k(l - l_0)\vec{\imath} = -kx_0\vec{\imath}$$

$$proj_{/\overrightarrow{Ox}} : \quad \boxed{mg - kx_0 = 0}$$

- Dans le 3ème dessin on donne à la masse une amplitude initiale → on aura un m.v.t (état dynamique), en appliquant la relation fondamentale de la dynamique on aura :

$$\sum \vec{F}_{/m} = m\vec{a} \qquad \text{(état dynamique)}$$

$$\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a} \qquad \text{avec :} \quad \vec{T} = \overrightarrow{T_0} + \overrightarrow{T_r}$$

$$\overrightarrow{T_r} = -kx.\vec{\imath} : \text{tension (force) de rappel}$$

$$proj_{/\overrightarrow{Ox}} : \quad mg - kx_0 - kx = ma$$

$$-kx = ma = m\frac{d^2x}{dt^2} = m\ddot{x}$$

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

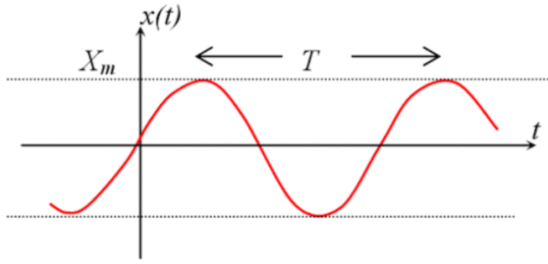
On obtient une équation différentielle du 2ème degrés qui s'écrit généralement sous la forme suivante :

$$\boxed{\ddot{x} + \omega_0 x = 0}$$

avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ $\left(\frac{rad}{s}\right)$: *représente la pulsation propre du système.*

Mathématiquement, cette équation a pour solution une fonction sinusoïdale de la forme :

$$\boxed{x = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)}$$



Où X_m *représente l'amplitude maximale de la masse m, et* φ *la phase à l'origine.*

La vitesse de la masse sera :

$$\boxed{V = \frac{dx}{dt} = -X_m\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)}$$

Son accélération est :

$$\boxed{a = \frac{dV}{dt} = -X_m\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi)}$$

N.B : *Dans ce mouvement sinusoïdale on nomme :*

$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ *: est la période des oscillations (exprimée en seconde).*

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ *: pulsation propre du système (exprimée en rad/s).*

$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$ *: fréquence propre du système (exprimée en Hertz ou bien en* s^{-1}*)*