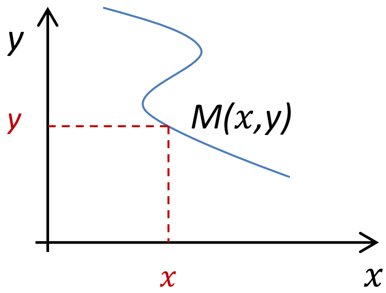
4/ ETUDE DU M.V.T EN COORDONNEES POLAIRES ET CYLINDRIQUES:

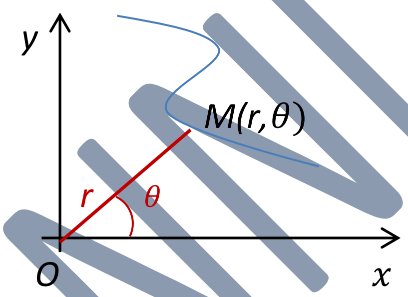
4.1/ Mv.t en coordonnées polaires

4.1.1/ Définition :

En coordonnées polaires, un point M est repéré par le rayon r=r(t) : variable et l'angle $\theta = \theta(t)$: variable.

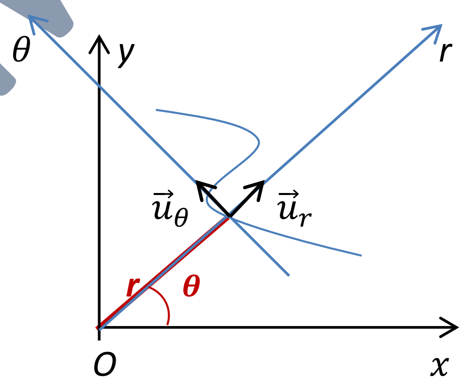


Coordonnées cartésiennes



coordonnées polaires OM=r

- *L'axe radial : c'est l'axe qui passe par l'origine du repère O et la position du mobile M, l'axe radial est défini par son vecteur unitaire $\vec{u}_r$.*
- *L'axe transversal (angulaire) : c'est l'axe qui est perpendiculaire à l'axe radial, cet axe transversal est défini par son vecteur unitaire $\vec{u}_\theta$, tel que : l'angle$(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta) = 90°$.*



4.1.2/ Détermination des vecteurs $\frac{d\vec{u}_r}{dt}$ et $\frac{d\vec{u}_\theta}{dt}$:

On sait que : $|\vec{u}_r| = |\vec{u}_\theta| = 1$

En faisant les projections des vecteurs unitaires sur les axes $\overrightarrow{Ox}$ *et* $\overrightarrow{Oy}$*, on aura :*

- $\vec{u}_r = |\vec{u}_r| cos\theta\, \vec{\imath} + |\vec{u}_r| sin\theta \vec{\jmath} = cos\theta\, \vec{\imath} + sin\theta \vec{\jmath}$
- $\vec{u}_\theta = -|\vec{u}_\theta| sin\theta\, \vec{\imath} + |\vec{u}_\theta| cos\theta \vec{\jmath} = -sin\theta\, \vec{\imath} + cos\theta \vec{\jmath}$

En dérivant les deux vecteurs unitaires par rapport au temps, on aura :

- $\frac{d\vec{u}_r}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}\, sin\theta\, \vec{\imath} + \frac{d\theta}{dt} cos\theta\, \vec{\jmath} = \frac{d\theta}{dt}\, \vec{u}_\theta$
- $\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}\, cos\theta\, \vec{\imath} - \frac{d\theta}{dt} sin\theta\, \vec{\jmath} = -\frac{d\theta}{dt}\, \vec{u}_r$

4.1.3/ Détermination des vecteurs position, vitesse et accélération :

- ***Le vecteur position*** $\overrightarrow{OM}$***:***

  Le mobile M est repéré par le rayon r et l'angle θ*, ou bien par le rayon r et le vecteur unitaire* $\vec{u}_r$ *, donc on peut écrire :*

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = r.\vec{u}_r = r(t).\vec{u}_r}$$

- ***Le vecteur vitesse*** $\vec{V}$ ***:***

  En coordonnées polaires le vecteur vitesse s'écrit : $\vec{V} = V_r\vec{u}_r + V_\theta\vec{u}_\theta$.
  On doit déterminer $V_r = ?$ *et* $V_\theta = ?$

$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d}{dt}(r.\vec{u}_r) = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta$$

$$\rightarrow \boxed{\vec{V}\left|\begin{aligned} V_r &= \frac{dr}{dt} = \dot{r} \\ V_\theta &= r\frac{d\theta}{dt} = r\dot{\theta} \end{aligned}\right.} \rightarrow \quad |\vec{V}| = \sqrt{V_r^2 + V_\theta^2} \quad (m/s)$$

- ***<u>Le vecteur acceleration $\vec{a}$:</u>***

  En coordonnées polaires le vecteur accélération s'écrit :

  $\vec{a} = a_r\vec{u}_r + a_\theta\vec{u}_\theta$, *on doit déterminer* $a_r = ?$ *et* $a_\theta = ?$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta\right) =$$

$$\vec{a} = \left(\ddot{r}\vec{u}_r + \dot{r}\frac{d\vec{u}_r}{dt}\right) + \left(\dot{r}\dot{\theta}\vec{u}_\theta + r\ddot{\theta}\vec{u}_\theta + r\dot{\theta}\frac{d\vec{u}_\theta}{dt}\right)$$

En remplaçant :

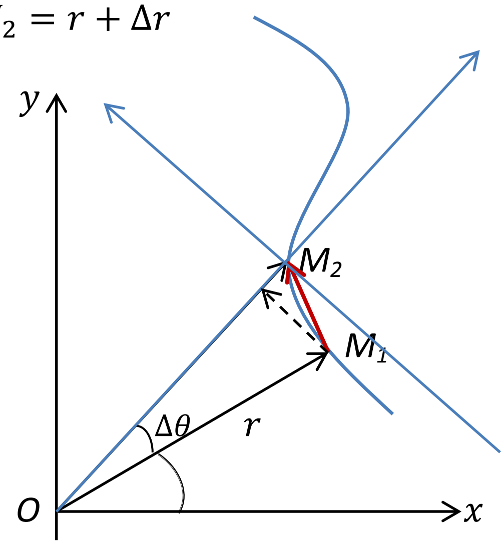
$$\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\,\vec{u}_\theta \quad \textit{et} \quad \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}\,\vec{u}_r \quad \textit{on aura :}$$

$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\vec{u}_r + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\vec{u}_\theta$$

$$\rightarrow \boxed{\vec{a}\left|\begin{aligned} a_r &= \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ a_\theta &= r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \end{aligned}\right.} \rightarrow \quad |\vec{a}| = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2} \quad (m/s^2)$$

- ***<u>Le vecteur déplacement $\overrightarrow{M_1M_2}$:</u>***

  A l'instant t_1 le vecteur position est $\overrightarrow{OM_1}$ *tel que* $OM_1 = r$ *et à l'instant t_2 le vecteur position sera* $\overrightarrow{OM_2}$ *tel que* $OM_2 = r + \Delta r$



Le vecteur déplacement s'écrit :

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{M_1P} + \overrightarrow{PM_2}$$

Sachant que :

$$\overrightarrow{M_1P} = (r\Delta\theta)\overrightarrow{u_\theta} \quad \textit{et} \quad \overrightarrow{PM_2} = (\Delta r)\overrightarrow{u_r}$$

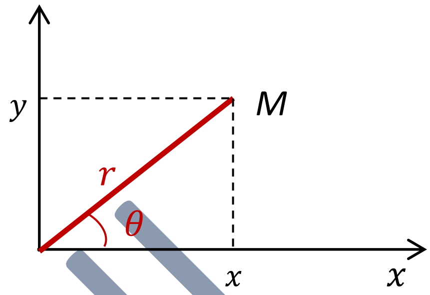
Alors :

$$\boxed{\overrightarrow{M_1M_2} = (r\Delta\theta)\overrightarrow{u_\theta} + (\Delta r)\overrightarrow{u_r}}$$

4.1.4/ passage des coordonnées polaires en coordonnées cartésiennes et inversement :

- *Si un point M est repéré par les coordonnées polaires r et* θ, alors les coordonnées cartésiennes de M s'écrivent :

$$r \text{ et } \theta \text{ connus } \rightarrow M \left| \begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{array} \right.$$



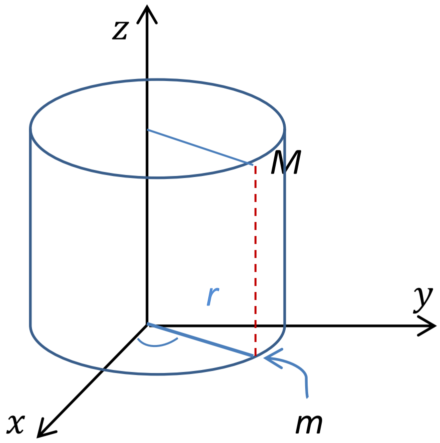
- *Si un point M repéré par les coordonnées* cartésiennes, alors les coordonnées *polaires r et* θ de M s'écrivent :

$$x \text{ et } y \text{ connues } \rightarrow M \left| \begin{array}{l} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ tg\theta = \frac{y}{x} \end{array} \right.$$

4.2/ Etude du m.v.t en coordonnées cylindrique :

Le point M est repéré par sa coordonnée algébrique « z » et les coordonnées polaires du point « m » qui représente la projection de M sur le planxOy.

$$\overrightarrow{OM} = \left| \begin{array}{l} r(t) \\ \theta(t) \\ z(t) \end{array} \right. \qquad \overrightarrow{Om} = \vec{r}$$



Vecteur position : $\boxed{\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{u_r} + z\vec{k}}$

Vecteur vitesse :

$$\vec{V} \left| \begin{array}{l} V_r = \dot{r} \\ V_\theta = r\dot{\theta} \\ V_z = \dot{z} \end{array} \right. \qquad \boxed{\vec{V} = \dot{r}\,\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} + \dot{z}\,\vec{k}}$$

Vecteur accélération :

$$\vec{a} \left| \begin{array}{l} a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \\ a_z = \ddot{z} \end{array} \right. \qquad \boxed{\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\overrightarrow{u_r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\overrightarrow{u_\theta} + \ddot{z}\,\vec{k}}$$