CHAPITRE 4: **Fonctions réelles à une variable réelle**

Cours 1

Généralités

1. Définitions :

1. Soient E et F deux ensembles de $\mathbb{R}$ et f une relation de E vers F.
   On dit que f est une *fonction* de E vers F si : tout élément x de E, x est en relation avec au plus un élément y de F ; cet élément lorsqu'il existe sera noté $f(x)$.
   On note : $f : E \to F$ ou $E \xrightarrow{f} F$
   $x \mapsto f(x)$

2. Soit $f : E \to F$ une fonction.
   L'ensemble des x de E pour lesquels $f(x)$ existe, s'appelle *ensemble de définition* ou *domaine de définition* et se note $Def(f)$ ou D_f ($D_f \subseteq E$).
   $$D_f = \{x \in E / \exists y \in F : y = f(x)\}$$
   $f(x)$ s'appelle *image* de x par f.
   x s'appelle *antécédent* de y par f.

Exemple :

Déterminer le domaine de définition D_f des fonctions suivantes :

1. $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$

$$x \to f(x) = \frac{x+1}{2x-1}$$

$D_f = \{x \in \mathrm{R} / f(x) \quad existe\}$

$D_f = \{x \in \mathrm{R} / 2x - 1 \neq 0\}$

$2x - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq \dfrac{1}{2}$

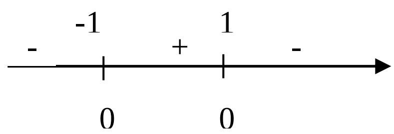
Donc $D_f = \mathrm{R} - \left\{\dfrac{1}{2}\right\} = \left]-\infty, \dfrac{1}{2}\right[\cup \left]\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$

2. $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$

$$x \to f(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

$D_f = \{x \in \mathrm{R} / 1 - x^2 \geq 0\}$

$1 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x \in [-1, 1]$ car le signe de $(1 - x^2)$ est



Donc $D_f = [-1, 1]$

3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \to f(x) = \frac{2-x}{\sqrt{1-3x}}$$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / 1-3x > 0\}$

$1-3x > 0 \Rightarrow -3x > -1$

$\Rightarrow x < \frac{1}{3}$

Donc $D_f = \left]-\infty, \frac{1}{3}\right[$.

4. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \to f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$$

$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} / 1+x \neq 0 \wedge \frac{1-x}{1+x} > 0\right\}$

$1+x \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$

$\frac{1-x}{1+x} > 0 \Rightarrow x \in]-1,1[$ car le signe de $\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$ est le signe de $[(1-x)(1+x)]$

		-1		1	
	-	0	+	0	-

Donc $D_f =]-1,1[$.

5. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \to f(x) = \frac{2e^x}{1+e^{-x}}$$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / 1+e^{-x} \neq 0\}$

$1+e^{-x} = 0 \Rightarrow e^{-x} = -1$ impossible car $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} > 0$.

Donc $D_f = \mathbb{R}$

6. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \to f(x) = \sqrt{-\sqrt{x}}$$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 0 \wedge -\sqrt{x} \geq 0\}$

On a $\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x} \geq 0$

Donc : $-\sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow x = 0$

Alors $D_f = \{0\}$.

7. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \to f(x) = \sqrt{x - \sqrt{x}}$$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 0 \wedge x - \sqrt{x} \geq 0\}$

$$x \geq 0 \wedge x - \sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow x \geq 0 \wedge x \geq \sqrt{x}$$
$$\Rightarrow x \geq 0 \wedge x^2 \geq x$$
$$\Rightarrow x \geq 0 \wedge x^2 - x \geq 0$$

		0		1	
	+	0	-	0	+

Donc $D_f = [1, +\infty[\cup \{0\}$.

2. Appellations :

1. le graphe (C_f) d'une fonction $f : E \rightarrow F$ est une partie de produit $E \times F$, définie par $C_f = \{(x, f(x)) / x \in E, f(x) \in F\}$.
2. L'ensemble des fonctions de E vers F sera noté $\mathscr{F}(E, F)$.

Remarque :

Soit $f : E \rightarrow F$ une fonction.

Si $D_f = E$ alors f est une application.

(toute application est une fonction mais la réciproque n'est pas vraie).

Exemple :

$f : \mathrm{R} \rightarrow \mathrm{R}$

$x \rightarrow f(x) = \dfrac{1}{x}$

f est une fonction mais elle n'est pas une application.

$g : \mathrm{R} - \{1\} \rightarrow \mathrm{R}$

$x \rightarrow g(x) = \dfrac{1}{x}$

g est une fonction et elle est aussi une application.

3. Opérations sur les fonctions :

Soient f et g deux fonctions définies sur D_f et D_g respectivement, et $\lambda \in \mathrm{R}$.

1. la *somme* de f et g, notée par $f + g$ est définie sur $D_f \cap D_g$ par :
$\forall x \in (D_f \cap D_g),\ (f + g)(x) = f(x) + g(x)$.

2. la *produit* de f et g, notée par $f.g$ est définie sur $D_f \cap D_g$ par :
$\forall x \in (D_f \cap D_g),\ (f.g)(x) = f(x).g(x)$.

3. Soit $D = \{x \in D_g \, / \, g(x) \neq 0\}$,
La fonction $\dfrac{f}{g}$ est définie sur $D_f \cap D$ par : $\forall x \in (D_f \cap D),\ \left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

4. Le *produit* de f *par un scalaire* λ est définie sur D_f par :
$\forall x \in D_f$, $(\lambda.f)(x) = \lambda f(x)$.

4. Composition de f et g :

La composée de f et g est la fonction ($g \circ f$) définie sur $D_{g\circ f} = \{x \in D_f \ / \ f(x) \in D_g\}$ par : $\forall x \in D_{g\circ f}$: $g \circ f(x) = g(f(x))$.

Exemples :

1. $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ $\qquad g(x) = \sin x$

Déterminer $g \circ f$ et $f \circ g$.

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / 1-x^2 \geq 0\} = [-1,1]$

$D_g = \mathbb{R}$

a. $D_{g\circ f} = \{x \in D_f \ / \ f(x) \in D_g\}$

$x \in D_f \Rightarrow x \in [-1,1]$

$f(x) \in D_g \Rightarrow \sqrt{1-x^2} \in \mathbb{R}$ vraie $\forall x \in [-1,1]$.

Donc $D_{g\circ f} = [-1,1]$

Soit $x \in [-1,1]$:

$$\begin{aligned} g \circ f(x) &= g(f(x)) \\ &= g\left(\sqrt{1-x^2}\right) \\ &= \sin\left(\sqrt{1-x^2}\right) \end{aligned}$$

b. $D_{f\circ g} = \{x \in D_g \ / \ g(x) \in D_f\}$

$x \in D_g \Rightarrow x \in \mathbb{R}$

$g(x) \in D_f \Rightarrow \sin x \in [-1,1]$ vraie $\forall x \in \mathbb{R}$.

$D_{f\circ g} = \mathbb{R}$

Soit $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f \circ g(x) &= f(g(x)) \\ &= f(\sin x) \\ &= \sqrt{1-\sin^2 x} \\ &= \sqrt{\cos^2 x} \\ &= |\cos x| \end{aligned}$$

2. $f(x) = \sqrt{x}$ $\quad$ et $\quad g(x) = \ln(1-x)$

Déterminer $g \circ f$ et $f \circ g$.

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 0\} = [0,+\infty[$

$D_g = \{x \in \mathbb{R} / 1 - x > 0\} =]-\infty,1[$

a. $D_{g\circ f} = \{x \in D_f \ / \ f(x) \in D_g\}$

$x \in D_f \Rightarrow x \in [0,+\infty[$

$f(x) \in D_g \Rightarrow \sqrt{x} \in]-\infty,1[\quad \text{et} \quad x \in [0,+\infty[$

$\Rightarrow \sqrt{x} < 1 \quad \text{et} \quad x \in [0,+\infty[$

$\Rightarrow x < 1 \quad \text{et} \quad x \in [0,+\infty[$

$\Rightarrow x \in [0,1[$

Donc $D_{g\circ f} = [0,1[$

Soit $x \in [0,1[$:

$$\begin{aligned} g \circ f(x) &= g(f(x)) \\ &= g(\sqrt{x}) \\ &= \ln(1-\sqrt{x}) \end{aligned}$$

b. $D_{f\circ g} = \{x \in D_g \ / \ g(x) \in D_f\}$

$x \in D_g \Rightarrow x \in]-\infty,1[$

$g(x) \in D_f \Rightarrow \ln(1-x) \in [0,+\infty[\ \text{et} \ x \in]-\infty,1[$

$\Rightarrow \ln(1-x) \geq 0 \quad \text{et} \quad x \in]-\infty,1[$

$\Rightarrow 1-x \geq 1 \quad \text{et} \quad x \in]-\infty,1[$

$\Rightarrow -x \geq 0 \quad \text{et} \quad x \in]-\infty,1[$

$\Rightarrow x \leq 0 \quad \text{et} \quad x \in]-\infty,1[$

$\Rightarrow x \in]-\infty,0]$

Soit $x \in]-\infty,0]$:

$$\begin{aligned} f \circ g(x) &= f(g(x)) \\ &= f(\ln(1-x)) \\ &= \sqrt{\ln(1-x)} \end{aligned}$$

5. **Fonctions bornées :**

Soit f une fonction définie sur D_f à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On dit que :

1. f est *majorée* $\Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R}; \forall x \in D_f : f(x) \leq M$.

Exemple :

$f(x) = 3 - 2x^2$

Montrer que f est majorée par 3

On a $\forall x \in \mathbb{R} : \ x^2 \geq 0$

$x^2 \geq 0 \Rightarrow -2x^2 \leq 0$

$\Rightarrow 3 - 2x^2 \leq 3$

$\Rightarrow f(x) \leq 3$

Donc $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) \leq 3$

D'où f est majorée par 3

2. f est *minorée* $\Leftrightarrow \exists m \in \mathrm{R}; \forall x \in D_f : f(x) \geq m$

Exemple :

$f(x) = 1 + |x| \qquad D_f = \mathrm{R}$

Montrer que f est minorée par 3

On a $\forall x \in \mathrm{R} : \; |x| \geq 0$

$|x| \geq 0 \Rightarrow 1 + |x| \geq 1$

$\Rightarrow f(x) \geq 1$

Donc $\forall x \in \mathrm{R} : \; f(x) \geq 1$

D'où f est minorée par 3

3. f est *bornée* $\Leftrightarrow$ f est majorée et minorée.

$\Leftrightarrow \exists m, M \in \mathrm{R}; \forall x \in D_f : m \leq f(x) \leq M$

$\Leftrightarrow \exists k \in \mathrm{R}_+^*; \forall x \in D_f : |f(x)| \leq k$

Exemple :

$\sin x$ est bornée par 1.

$\forall x \in \mathrm{R} : -1 \leq \sin x \leq 1$

Donc $\forall x \in \mathrm{R} : |\sin x| \leq 1$

6. La parité et la périodicité :

6.1. Parité :

Soit f une fonction définie sur D_f à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. f est *paire* $\Leftrightarrow \forall x \in D_f, (-x) \in D_f : f(-x) = f(x)$

Exemples :

x^2, $|x|$, $\cos x$ sont paires.

2. f est *impaire* $\Leftrightarrow \forall x \in D_f, (-x) \in D_f : f(-x) = -f(x)$

Exemples :

$\sin x$, x^3 sont impaires.

Remarque :

La fonction $(\sin x + \cos x)$ n'est ni paire ni impaire.

Exemple :

Etudier la parité des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$

$D_f = \left\{ x \in \mathrm{R} / 1 + x \neq 0 \wedge \dfrac{1-x}{1+x} > 0 \right\}$

$D_f = \left]-1,1\right[$

$\forall x \in \left]-1,1\right[, (-x) \in \left]-1,1\right[$:

$$f(-x)=\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=\ln(1+x)-\ln(1-x)=-[\ln(1-x)-\ln(1+x)]=-\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)=-f(x)$$

Donc f est impaire.

2. $f(x)=\dfrac{e^x}{1+e^{2x}}$

$D_f=\{x\in \mathrm{R}/1+e^{2x}\neq 0\}$

$1+e^{2x}=0\Rightarrow e^{2x}=-1$ impossible car $\forall x\in \mathrm{R},\ e^x>0$

Donc $1+e^{2x}\neq 0\ \forall x\in \mathrm{R}$, alors $D_f=\mathrm{R}$

$\forall x\in \mathrm{R},(-x)\in \mathrm{R}$

$$f(-x)=\frac{e^{-x}}{1+e^{-2x}}=\frac{\frac{1}{e^x}}{1+\frac{1}{e^{2x}}}=\frac{\frac{1}{e^x}}{\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}}}=\frac{e^x}{1+e^{2x}}=f(x)$$

Donc f est paire.

3. $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$

$D_f=\{x\in \mathrm{R}/1+x^2\neq 0\}$

$1+x^2=0\Rightarrow x^2=-1$ impossible car $\forall x\in \mathrm{R},\ x^2\geq 0$

Alors $D_f=\mathrm{R}$.

$\forall x\in \mathrm{R},(-x)\in \mathrm{R}$

$$f(-x)=\frac{-x}{1+(-x)^2}=-\frac{x}{1+x^2}=-f(x)$$

Donc f est impaire.

4. $f(x)=\ln\left(\dfrac{x}{1+x}\right)$

$D_f=\left\{x\in \mathrm{R}/1+x\neq 0\wedge \dfrac{x}{1+x}>0\right\}$

$1+x\neq 0\Rightarrow x\neq -1$

$\dfrac{x}{1+x}>0\Rightarrow x\in\,]-\infty,-1[\,\cup\,]0,+\infty[$

$D_f=\,]-\infty,-1[\,\cup\,]0,+\infty[$

On ne peut pas étudier la parité de f car pour $x=\dfrac{1}{2}\in D_f$ on a $-x=-\dfrac{1}{2}\notin D_f$.

Remarques :

1. Si la fonction est paire ou impaire, son domaine de définition d'étude est réduit de moitié.
2. Dans la définition de la parité, on suppose que D_f admet 0 pour centre de symétrie.
3. Le graphe d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe (OY).
4. Le graphe d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine.

6.2. Périodicité :

Soit f une fonction définie sur $D_f \subseteq \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et T un réel strictement positif.

On dit que f est *périodique* de période T ou T est une période de f, si :

$\forall x \in D_f, (x+T) \in D_f : f(x+T) = f(x)$

(f est T*-périodique*)

Exemples :

$\sin x$, $\cos x$ sont périodiques de période 2π.

tgx est $\pi-$périodique.

Remarques :

1. Si f est T-périodique alors : $\forall x \in D_f, \forall n \in \mathbb{Z}, (x+nT) \in D_f : f(x+nT) = f(x)$

Exemple :

$\sin x$ est $2\pi-$périodique

$\forall x \in \mathbb{R},\ \sin(x+2\pi) = \sin x$

$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall k \in \mathbb{Z} :\ \sin(x+2k\pi) = \sin x$

2. *La période fondamentale* est le plus petit élément strictement positif ($T > 0$).

Exemple :

1. La période fondamentale de $\sin x$ est 2π.

2. Montrer que f est périodique et calculer la période fondamentale.

1. $f(x) = \cos\left(\dfrac{x}{3}\right)$ $\qquad D_f = \mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}, (x+T) \in \mathbb{R}$

$$f(x+T) = f(x) \Rightarrow \cos\left(\frac{x+T}{3}\right) = \cos\left(\frac{x}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{x+T}{3} = \frac{x}{3} + 2k\pi \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \frac{T}{3} = 2k\pi \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow T = 6k\pi \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}$$

Donc f est périodique.

La période fondamentale $T > 0$: pour $k = 1$ donc $T = 6\pi$.

2. $f(x) = \sin\left(\dfrac{x}{2}\right) + \cos\left(\dfrac{x}{3}\right)$ $\qquad D_f = \mathbb{R}$

$\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)$ est périodique de période 4π.

$\cos\left(\dfrac{x}{3}\right)$ est périodique de période 6π.

Donc f est périodique de période $12\pi = PPCM(4\pi, 6\pi)$

3. $f(x)=x-E(x)$ $\qquad D_f=\mathbb{R}$

$\forall x\in\mathbb{R},(x+T)\in\mathbb{R}$

$f(x+T)=f(x)\Rightarrow x+T-E(x+T)=x-E(x)$

$\Rightarrow T=E(x+T)-E(x)$

On a $E(x+T)\in\mathbb{Z}$ et $E(x)\in\mathbb{Z}$ donc $T\in\mathbb{Z}$

Donc f est périodique.

La période fondamentale $T>0$ et $T\in\mathbb{Z}$ donc $T=1$.

7. La monotonie :

Soit f une fonction définie sur $D_f\subseteq\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. f est croissante sur D_f si : $\forall x,x'\in D_f\ :\ x<x'\Rightarrow f(x)\leq f(x')$

2. f est décroissante sur D_f si : $\forall x,x'\in D_f\ :\ x<x'\Rightarrow f(x)\geq f(x')$

3. f est strictement croissante sur D_f si : $\forall x,x'\in D_f\ :\ x<x'\Rightarrow f(x)<f(x')$

4. f est strictement décroissante sur D_f si : $\forall x,x'\in D_f\ :\ x<x'\Rightarrow f(x)>f(x')$

5. f est dite monotone si elle est croissante ou décroissante.

6. f est dite strictement monotone si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.

Exemple :

Etudier la monotonie des fonctions suivantes :

1. $f(x)=3x-4$ $\qquad D_f=\mathbb{R}$

Soient $x,x'\in\mathbb{R}$ tels que $x<x'$

$$x<x'\Rightarrow 3x<3x'$$
$$\Rightarrow 3x-4<3x'-4$$
$$\Rightarrow f(x)<f(x')$$

Donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

2. $f(x)=\sqrt{3-x}$ $\qquad D_f=\left]-\infty,3\right]$

Soient $x,x'\in\left]-\infty,3\right]$ tels que $x<x'$ ($x-x'<0$)

$$f(x)-f(x')=\sqrt{3-x}-\sqrt{3-x'}=\frac{\left(\sqrt{3-x}-\sqrt{3-x'}\right)\left(\sqrt{3-x}+\sqrt{3-x'}\right)}{\sqrt{3-x}+\sqrt{3-x'}}$$
$$=\frac{(3-x)(3-x')}{\sqrt{3-x}+\sqrt{3-x'}}$$
$$=\frac{x'-x}{\sqrt{3-x}+\sqrt{3-x'}}>0$$

Alors $f(x)>f(x')$

Donc f est strictement décroissante sur $\left]-\infty,3\right]$.

Remarques :

Soit f une fonction définie sur $D_f\subseteq\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Si f est paire ou impaire alors notons :

$$D_f^+=\{x\in D_f\ /\ x\geq 0\}\quad\text{et}\quad D_f^-=\{x\in D_f\ /\ x\leq 0\}$$

1. Si f est paire et croissante (resp. décroissante) sur D_f^+ alors f est décroissante (resp. croissante) sur D_f^-.

2. Si f est impaire et croissante (resp. décroissante) sur D_f^+ alors f est croissante (resp. décroissante) sur D_f^-.

Exemples :

1. $f(x)=2x^2-1 \qquad D_f=\mathbb{R}$.

f est paire.

Soient $x,x'\in\mathbb{R}_+$ tels que $x<x'$ ($x-x'<0$)

$f(x)-f(x')=(2x^2-1)-(2x'^2-1)=2(x^2-x'^2)=2(x-x')(x+x')<0$ car $x-x'<0$ et $x+x'>0$

Donc $f(x)<f(x')$ d'où f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ alors f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$

2. $f(x)=\dfrac{2}{x} \qquad D_f=\mathbb{R}^*$

f est impaire.

Soient $x,x'\in\mathbb{R}_+^*$ tels que $x<x'$ ($x-x'<0$)

$f(x)-f(x')=\dfrac{2}{x}-\dfrac{2}{x'}=\dfrac{2x'-2x}{x.x'}=\dfrac{2(x'-x)}{x.x'}>0$ car $x'-x>0$ et $x.x'>0$

Donc $f(x)>f(x')$ d'où f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$ alors f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$.

Propriétés :

1. Soient f et g deux fonctions définies sur $I\subseteq\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, et $\lambda\in\mathbb{R}$.

a. Si f est croissante et $\lambda>0$ (resp. $\lambda<0$) alors ($\lambda.f$) est croissante (resp. décroissante).

b. Si f et g sont croissantes (resp. décroissantes) alors $(f+g)$ est croissante(resp. décroissante). En outre, si l'une d'elles est strictement croissante (resp. strictement décroissante), $(f+g)$ est strictement croissante (resp. strictement décroissante).

c. Si f et g sont positives et croissantes (resp. décroissantes) alors $(f.g)$ est croissante (resp. décroissante).

2. Soit f une fonction définie sur $I\subseteq\mathbb{R}$, et g une fonction définie sur J où $f(I)\subseteq J$.

a. Si f et g sont monotones, il en est de même pour $(f\circ g)$

b. Si f et g strictement sont monotones, il en est de même pour $(f\circ g)$

c. La fonction $(f\circ g)$ est croissante, si f et g sont toutes deux croissantes ou toutes décroissantes.

d. La fonction $(f\circ g)$ est décroissante, l'une des fonctions f et g est croissante et l'autre décroissante.