USD Blida 1
Faculté de technologie
Département de TC/ST
1ère année LMD TC/ST

Maths 2
2022/2023
Mr. OUAKID

Série n°4 : Primitives et intégrales

Ex.1 (Intégration par changement de variable)

I. Primitives

① $f_1(x) = \dfrac{x}{2\sqrt{1-x^4}}$

$$I_1 = \int \frac{x}{2\sqrt{1-x^4}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{x}{\sqrt{1-(x^2)^2}}\,dx$$

on pose $t = x^2$ d'où $dt = 2x\,dx$
d'où $x\,dx = \frac{1}{2}\,dt$

Donc
$$I_1 = \frac{1}{2}\int \frac{\frac{1}{2}\,dt}{\sqrt{1-t^2}}$$
$$= \frac{1}{4}\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$
$$= \frac{1}{4}\arcsin(t) + c \quad , \quad c \in \mathbb{R}.$$
$$= \frac{1}{4}\arcsin(x^2) + c \quad , \quad c \in \mathbb{R}.$$

② $I_2 = \int \frac{1}{x\sqrt{\ln^2(x)+1}}\,dx$

On pose $t = \ln x$ d'où $dt = \frac{1}{x}\,dx$

D'où

$$I_2 = \int \frac{1}{\sqrt{\ln^2(x)+1}} \cdot \frac{1}{x}\,dx$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\,dt$$

$$= \operatorname{argsh}(t) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

$$= \operatorname{argsh}(\ln x) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

On a $\operatorname{argsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

③ $I_3 = \int \frac{\cos(x)}{\sqrt{9-\sin^2(x)}}\,dx$

$$= \int \frac{\cos x}{\sqrt{9\left(1-\frac{\sin^2(x)}{9}\right)}}\,dx$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\sin(x)}{3}\right)^2}} \cdot \frac{1}{3} \cdot \cos x \cdot dx$$

On pose $t = \frac{\sin x}{3}$ d'où $dt = \frac{1}{3}\cos x\,dx$

Donc $I_3 = \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$

$$= \arcsin(t) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$= \arcsin\left(\frac{\sin x}{3}\right) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

On a $\arcsin'(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$

ou bien on a $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-t^2}}\,dt = \arcsin\left(\frac{t}{a}\right)$

④ $I_4 = \int \cos^5(x) \sin(x)\, dx$

On pose $t = \cos x$ d'où $dt = -\sin x\, dx$

Alors $I_4 = -\int \cos^5(x).(-\sin x)\, dx$

Multiplier par (-1) à l'intérieur et à l'extérieur de l'intégrale.

$= -\int t^5.\, dt$

$= -\dfrac{t^6}{6} + c \quad , \quad c \in \mathbb{R},$

$= \dfrac{-1}{6}.\cos^6(x) + c \quad , \quad c \in \mathbb{R}.$

⑤ $I_5 = \int x^2.e^{x^3} dx$

On pose $t = e^{x^3}$ d'où $dt = 3x^2.e^{x^3} dx$

D'où $I_5 = \dfrac{1}{3}\int 3.x^2.e^{x^3} dx$

$= \dfrac{1}{3}\int dt$

$= \dfrac{1}{3} t + c \quad , \quad c \in \mathbb{R}$

$= \boxed{\dfrac{1}{3}.e^{x^3} + c} \quad , \quad c \in \mathbb{R}.$

* On peut aussi poser $t = x^3$

P.3

II. Calculer les intégrales suivantes

① $I_1 = \int_1^e \frac{dx}{x + x\ln^2(x)}$

On pose $t = \ln x$ d'où $dt = \frac{1}{x} dx$

~~Donc~~ $\cancel{I_1 =}$ $x = 1 \Rightarrow t = \ln 1 = 0$

$x = e \Rightarrow t = \ln e = 1$

Donc $I_1 = \int_1^e \frac{1}{x(1 + \ln^2(x))} dx = \int_1^e \frac{1}{1 + \ln^2(x)} \cdot \frac{1}{x} dx$

$= \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt$

$= \Big[\arctan(t)\Big]_0^1$

$= \arctan(1) - \arctan(0)$

$= \frac{\pi}{4} - 0 = \boxed{\frac{\pi}{4}}$

② $I_2 = \int_0^1 \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$

On pose $t = \arcsin(x)$ d'où $dt = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

et on a $x = 0 \Rightarrow t = \arsin(0) \Rightarrow t = 0$

$x = 1 \Rightarrow t = \arcsin(1) \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$

Donc $I_2 = \int_0^{\pi/2} t \, . \, dt = \Big[\frac{1}{2} t^2\Big]_0^{\pi/2}$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi^2}{4} - 0 = \boxed{\frac{\pi^2}{8}}$

P4

③ $I_3 = \displaystyle\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} x \cdot \sin(x^2)\, dx$.

On pose $t = x^2$ d'où $dt = 2x\, dx$

et $x = 0 \Rightarrow t = 0$ et $x = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$.

Donc $I_3 = \frac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \sin(x^2) \cdot 2x\, dx$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) \cdot dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\cos(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - (-\cos(0))\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[0 - (-1)\right]$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left[0 + 1\right]$$

$$= \boxed{\frac{1}{2}}.$$

Ex. 2 (Intégration par parties)

I. Primitives

① $I_1 = \int (x^2+3x+1)\, e^{-x}\, dx$

On pose $u(x) = x^2+3x+1$ $\quad v'(x) = e^{-x}$

D'où $u'(x) = 2x+3$ $\quad v(x) = -e^{-x}$

Donc

$$I_1 = (x^2+3x+1)(-e^{-x}) - \int (2x+3).(-e^{-x})\, dx$$

$$= (x^2+3x+1)(-e^{-x}) + \int (2x+3)\, e^{-x}\, dx$$

On utilise encore une fois l'intégration par parties sur $\int (2x+3)\, e^{-x}\, dx$.

On pose $u_1(x) = 2x+3$ $\quad v_1'(x) = e^{-x}$

D'où $u_1'(x) = 2$ $\quad v_1(x) = -e^{-x}$

Donc

$$I_1 = (x^2+3x+1)(-e^{-x}) + (2x+3)(-e^{-x}) - \int 2(-e^{-x})\, dx$$

$$= (x^2+3x+1)(e^{-x}) + (2x+3)(-e^{-x}) + 2\int e^{-x}\, dx$$

$$= (x^2+3x+1)(e^{-x}) + (2x+3)(-e^{-x}) + 2(-e^{-x}) + c, \quad (c \in \mathbb{R}).$$

$$= \left[(x^2+3x+1) + (2x+3) + 2\right](-e^{-x}) + c, \quad (c \in \mathbb{R}).$$

$$= \boxed{(x^2+5x+6)(-e^{-x}) + c}, \quad (c \in \mathbb{R}).$$

$\boxed{\int u.v' = u.v - \int u'v}$

② $I_2 = \int x^3 \ln(x)\, dx$

on pose $u(x) = \ln x$ $\qquad v'(x) = x^3$

d'où $u'(x) = \dfrac{1}{x}$ $\qquad v(x) = \dfrac{x^4}{4}$

Donc

$$I_2 = \ln(x) \cdot \frac{x^4}{4} - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{x^4}{4}\, dx$$

$$= \frac{1}{4} x^4 \ln(x) - \frac{1}{4} \int x^3\, dx$$

$$= \frac{1}{4} x^4 \ln(x) - \frac{1}{4} \cdot \frac{x^4}{4} + C \quad , (C \in \mathbb{R})$$

$$= \boxed{\frac{1}{4} x^4 \left(\ln(x) - \frac{1}{4}\right) + C} \quad , (C \in \mathbb{R})$$

③ $I_3 = \int e^{2x} \cos x\, dx$

on pose $u(x) = e^{2x}$ et $v'(x) = \cos x$

d'où $u'(x) = 2e^{2x}$ $\qquad v(x) = \sin x$

Donc

$$I_3 = e^{2x} \cdot \sin(x) - \int 2 e^{2x} \cdot \sin x\, dx$$

$$= e^{2x} \cdot \sin x - 2 \int e^{2x} \sin x\, dx$$

on fait une $2^{ème}$ intégration par parties :

On pose $u(x) = e^{2x}$ $\qquad v_1'(x) = \sin x$

D'où $u'(x) = 2e^{2x}$ $\qquad v_1(x) = -\cos x$

Donc

$$I_3 = e^{2x} \cdot \sin x - 2\left[e^{2x}(-\cos x) - \int 2 e^{2x} \cdot (-\cos x)\, dx\right]$$

$$= e^{2x} \sin x + 2 e^{2x} \cos x - 4 \underbrace{\int e^{2x} \cos x\, dx}_{I_3}$$

I_3

Donc on trouve

$$I_3 = e^{2x}\sin(x) + 2e^{2x}\cos(x) - 4I_3$$

D'où $\quad 5I_3 = e^{2x}\sin(x) + 2e^{2x}\cos(x)$

Donc $\quad I_3 = \frac{1}{5}e^{2x}\sin(x) + \frac{2}{5}e^{2x}\cos(x) + c \quad (c \in \mathbb{R})$

$$= \boxed{\frac{1}{5}e^{2x}\left(\sin(x) + 2\cos(x)\right) + c} \quad (c \in \mathbb{R})$$

④ $I_4 = \int \operatorname{arctg}(x)\,dx$

on pose $\quad u(x) = \operatorname{arctg}(x) \qquad v'(x) = 1$

D'où $\quad u'(x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad v(x) = x$

Donc

$$I_4 = x\operatorname{arctg}(x) - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx$$

$$= x\operatorname{arctg}(x) - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx$$

$$= x\operatorname{arctg}(x) - \frac{1}{2}\ln(|1+x^2|) + c, \quad (c \in \mathbb{R})$$

$$= x\operatorname{arctg}(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c, \quad (c \in \mathbb{R})$$

$\boxed{\int \frac{f'}{f} = \ln|f|}$

Car $1+x^2>0$ $\forall x \in \mathbb{R}$

II. Intégrales

① $J_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x \, dx$ $\qquad J_1' = \int \arcsin(x) \, dx$

On pose $u(x) = \arcsin x$ $\qquad v'(x) = 1$

d'où $u'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\qquad v(x) = x$

Donc

$$J_1' = x\arcsin(x) - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$$

$$= x\arcsin(x) - \frac{1}{(-2)} \int \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$$

Multiplier et diviser par (−2)

$$= x\arcsin(x) + \frac{1}{2} \int \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$$

on obtient une fonction de la forme $\dfrac{f'}{\sqrt{f}}$.

$$= x\arcsin(x) + \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{1-x^2} + C \quad (C \in \mathbb{R})$$

Et on a $\int \dfrac{f'}{\sqrt{f}} = 2\sqrt{f}$

$$= x\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + C \quad (C \in \mathbb{R}$$

Donc

$$J_1 = \left[x\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} \right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) + \sqrt{1-\frac{1}{4}} \right) - (0+1)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1$$

$$= \boxed{\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1}$$

$$= \frac{\pi + 6\sqrt{3} - 12}{12}$$

② $J_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \sin(x)\, dx$

on pose $u(x) = x$ $\qquad$ $v'(x) = \sin x$

d'où $u'(x) = 1$ $\qquad$ $v(x) = -\cos x$

Donc

$$J_2 = \left[-x \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx$$

$$= \left(-\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + 0.\cos 0\right) + \left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 0 + \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin 0\right)$$

$$= 1$$

③ $J_3 = \int_0^1 (x+1) \cdot e^{2x}\, dx$

on pose $u(x) = x+1$ $\qquad$ $v'(x) = e^{2x}$

d'où $u'(x) = 1$ $\qquad$ $v(x) = \frac{1}{2} e^{2x}$

D'où

$$J_3 = \left[(x+1) \cdot \frac{1}{2} e^{2x}\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 e^{2x}\, dx$$

$$= e^2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} e^{2x}\right]_0^1$$

$$= e^2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} \cdot e^2 - \frac{1}{2}\right)$$

$$= e^2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} e^2 + \frac{1}{4}$$

$$= \boxed{\frac{3}{4} e^2 - \frac{1}{4}}$$

Ex. 3 (Intégration des fonctions rationnelles)

I. Primitives

① $I_1 = \int \frac{x^3}{x^2-4}\,dx$

* Etape 1 : Division Euclidienne.

Degré du numérateur (x^3) est inférieur au degré du dénominateur x^2-4, donc on fait la division Euclidienne suivant les puissances décroissantes de x :

$$\begin{array}{r|l} x^3 & x^2-4 \\ \hline -x^3+4x & x \\ \hline 4x & \end{array}$$

D'où $$\frac{x^3}{x^2-4} = x + \frac{4x}{x^2-4}$$

* Etape 2 : Racines de x^2-4

On a $x^2-4 = x^2-2^2 = (x-2)(x+2)$

Ou bien x^2-4 a deux racines 2 et (-2) Donc x^2-4 $= (x-2)(x-(-2))$ $= (x-2)(x+2)$

* Donc $$\frac{x^3}{x^2-4} = x + \frac{4x}{(x-2)(x+2)}$$

* Etape 3 : Décomposition en éléments simples de $\frac{4x}{(x-2)(x+2)}$

On a $$\frac{4x}{(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}$$

D'où

$$\frac{4x}{(x-2)(x+2)} = \frac{A(x+2)+B(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{(A+B)x+2(A-B)}{(x-2)(x+2)}$$

Par identification on trouve

$$4x = (A+B)x + 2(A-B)$$

D'où
$$\begin{cases} A+B=4 \\ \text{et} \\ 2(A-B)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A+B=2 \\ A=B \end{cases} \Rightarrow \boxed{A=2} \text{ et } \boxed{B=2}$$

Donc
$$\frac{x^3}{x^2-4} = x + \frac{2}{x-2} + \frac{2}{x+2}$$

* Etape 4 : Intégration

$$I_1 = \int \frac{x^3}{x^2-4}\,dx = \int \left(x + \frac{2}{x-2} + \frac{2}{x+2}\right)dx$$

$$= \int x\,dx + 2\int \frac{1}{x-2}\,dx + 2\int \frac{1}{x+2}\,dx$$

$$= \boxed{\frac{x^2}{2} + 2\ln|x-2| + 2\ln|x+2| + C}, \quad C \in \mathbb{R}$$

$\int \frac{1}{x-2}\,dx$ et $\int \frac{1}{x+2}\,dx$ sont de la forme $\int \frac{f'}{f}$ alors que $\int \frac{f'}{f} = \ln|f|$

② $I_2 = \int \frac{x+1}{x(x-2)^2}\,dx$

* Etape 1 :

Pas de division Euclidienne car $\deg(x+1) < \deg(x(x-2)^2)$.

On passe à l'étape 2.

* Etape 2 :

Racines de $x(x-2)^2$ sont 0 et 2, où 2 est un racine double.

$x(x-2)^2$ est déja simplifié.

On passe à l'étape 3.

* Etape 3 : Décomposition

$$\frac{x+1}{x(x-2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2}$$

Pour trouver A, B et C on peut utiliser deux méthodes :

1ère méthode :

$$\frac{x+1}{x(x-2)^2} = \frac{A(x-2)+Bx}{x(x-2)} + \frac{C}{(x-2)^2}$$

$$= \frac{[A(x-2)+Bx](x-2)^2 + C(x(x-2))}{x(x-2)(x-2)^2}$$

$$\frac{x+1}{x(x-2)^2} = \frac{(A+B)x^3 + (-6A-4B+C)x^2 + (12A+4B-2C)x - 8A}{x(x-2)(x-2)^2}$$

Il faut unifier les dénomerateurs

D'où

$$\frac{(x-2)(x+1)}{x(x-2)(x-2)^2} = \frac{(A+B)x^3 + (-6A-4B+C)x^2 + (12A+4B-2C)x - 8A}{x(x-2)(x-2)^2}$$

Multiplier et diviser par $(x-2)$ à gauche

Par identification $\begin{cases} A+B=0 \\ -6A-4B+C=1 \\ 12A+4B-2C=-1 \\ -8A=-2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A=\frac{1}{4}}$ et $\boxed{B=\frac{-1}{4}}$ et $\boxed{C=\frac{3}{2}}$

Donc

$$\frac{x+1}{x(x-2)^2} = \frac{\frac{1}{4}}{x} + \frac{\frac{-1}{4}}{x-2} + \frac{\frac{3}{2}}{(x-2)^2}$$

$2^{ème}$ méthode:

On a $\dfrac{x+1}{x(x-2)^2} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x-2} + \dfrac{C}{(x-2)^2}$ ... (1)

* D'où. $(x-2)^2 \cdot \dfrac{x+1}{x(x-2)^2} = \dfrac{A(x-2)^2}{x} + B(x-2) + C$

Multiplier les deux cotés par $(x-2)^2$

Donc $\dfrac{x+1}{x} = \dfrac{A(x-2)^2}{x} + B(x-2) + C$

Pour $x = 2$ on trouve: $\dfrac{3}{2} = 0 + C$, Donc $\boxed{C = \frac{3}{2}}$

* Dans (1) on remplace par $x = 1$ et $C = \dfrac{3}{2}$:

On utilise $x = 1$ car (1) est vraie pour tout x de $\mathbb{R}^*-\{2\}$, alors vraie pour $x=1$, et $x = 1$ facilite les calculs.

$$2 = A - B + \frac{3}{2} \quad \text{d'où} \quad A - B = \frac{1}{2} \quad \ldots (2)$$

* Dans (1) on remplace par $x = 3$ et $C = \dfrac{3}{2}$:

$$\frac{4}{3} = \frac{A}{3} + B + \frac{3}{2} \quad \text{d'où} \quad A + 3B = \frac{-1}{2} \quad \ldots (3)$$

Donc de (2)−(3) on trouve:

$-4B = 1$ alors $\boxed{B = \frac{-1}{4}}$

Donc On remplace B dans (2): $\boxed{A = \frac{1}{4}}$

Donc

$$\frac{x+1}{x(x-2)^2} = \frac{\frac{1}{4}}{x} + \frac{\frac{-1}{4}}{x-2} + \frac{\frac{3}{2}}{(x-2)^2}$$

* Etape 4 : Intégration

$$I_2 = \int \frac{x+1}{x(x-2)^2}\, dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{1}{x}\, dx - \frac{1}{4}\int \frac{1}{x-2}\, dx + \frac{3}{2}\int \frac{1}{(x-2)^2}\, dx$$

$$= \frac{1}{4}\ln|x| - \frac{1}{4}\ln|x-2| + \frac{3}{2} J.$$

$$J = \int \frac{1}{(x-2)^2}\, dx$$

ou bien $\int \frac{1}{t^n} = \frac{-1}{(n-1)t^{n-1}}$

On pose $t = x-2$ d'où $dt = dx$

$$J = \int \frac{1}{t^2}\, dt = \int t^{-2}\, dt = \frac{t^{-2+1}}{-2+1} + k \quad (k \in \mathbb{R})$$

$$= -\frac{1}{t} + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

$$= \frac{-1}{x-2} + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Donc

$$\boxed{I_2 = \frac{1}{4}\ln|x| - \frac{1}{4}\ln|x-2| - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x-2} + C}, \quad C \in \mathbb{R}$$

③ $I_3 = \int \frac{x+1}{(x^2+1)(x^2+3)}\,dx = \int f_3(x)\,dx$

* Etape 1 et etape 2 :

Pas de division Euclidienne et pas de changement dans l'écriture de $(x^2+1)(x^2+3)$ qui n'admet pas des racines dans $\mathbb{R}$.

* Etape 3 :

f_3 admet une décomposition en éléments simples de deuxième espèce.

$$f_3(x) = \frac{x+1}{(x^2+1)(x^2+3)} = \frac{Mx+N}{x^2+1} + \frac{Px+q}{x^2+3}$$

$$= \frac{Mx^3+3Mx+Nx^2+3N+Px^3+Px+qx^2+q}{(x^2+1)(x^2+3)}$$

$$= \frac{(M+P)x^3+(N+q)x^2+(3M+P)x+(3N+q)}{(x^2+1)(x^2+3)}$$

par identification :

$$\begin{cases} M+P=0 & \cdots (1) \\ N+q=0 & \cdots (2) \\ 3M+P=1 & \cdots (3) \\ 3N+q=1 & \cdots (4) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M=-P \\ N=-q \\ 3M-M=1 \\ 3N-N=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M=\frac{1}{2}, & P=\frac{-1}{2} \\ N=\frac{1}{2}, & q=\frac{-1}{2} \end{cases}$$

Donc $f_3(x) = \dfrac{\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}{x^2+1} + \dfrac{\frac{-1}{2}x-\frac{1}{2}}{x^2+3}$

* Etape 4 :

$$I_3 = \int f_3(x) = \frac{1}{2}\int \frac{x+1}{x^2+1}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{x+1}{x^2+3}\,dx$$

Donc

$$I_3 = \frac{1}{2}\int \frac{x}{x^2+1}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{x}{x^2+3}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+3}\,dx$$

$$\int \frac{1}{x^2+\sqrt{3}^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx + \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}(x) - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2+3}\,dx - \frac{1}{2}\cdot \cancel{\frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)}$$

$$= \boxed{\frac{1}{4}\ln|x^2+1| + \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}(x) - \frac{1}{4}\ln|x^2+3| - \frac{1}{2\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + C}$$

$$\boxed{\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{x}{x}\right)}$$

avec $C \in \mathbb{R}$

(4) $I_4 = \int \frac{4x^2}{x^4-1}\,dx = \int f_4(x)\,dx$

* Etape 1 : Pas de division Euclidienne

* Etape 2 :

$$x^4-1 = (x^2)^2 - 1^2 = (x^2-1)(x^2+1)$$

$$= (x-1)(x+1)(x^2+1)$$

D'où

$$f_4(x) = \frac{4x^2}{x^4-1} = \frac{4x^2}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}$$

* Etape 3 :

$$f_4(x) = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Mx+N}{x^2+1}$$

* Détermination de constantes A, B, M et N :

On a

$$f(x) = \frac{4x^2}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Mx+N}{x^2+1} \quad \cdots \quad (1)$$

* Multiplier les deux cotés de (1) par $(x-1)$:

$$\frac{4x^2}{(x+1)(x^2+1)} = A + \frac{B(x-1)}{x+1} + \frac{(Mx+N)(x-1)}{x^2+1}$$

Pour $x=1$ on a $\frac{4}{2\times 2} = 1 = A + 0 + 0 \Rightarrow \boxed{A=1}$

* Multiplier par $(x+1)$ dans (1) :

$$\frac{4x^2}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A(x+1)}{x-1} + B + \frac{(Mx+N)(x+1)}{(x^2+1)}$$

pour $x=-1$ on a $\frac{4}{(-2)(2)} = 0 + B + 0 \Rightarrow \boxed{B=-1}$

* Remplaçer $A=1$, $B=-1$ et $x=0$ dans (1)

$$\frac{0}{(-1)(1)(1)} = -1 + \frac{-1}{1} + \frac{N}{1} \Rightarrow -2+N=0 \Rightarrow \boxed{N=2}$$

* Remplaçer $A=1$, $B=-1$, $N=2$ et $x=2$ dans (1)

$$\frac{16}{1\times 3\times 5} = 1 + \frac{-1}{3} + \frac{2M+2}{5} \Rightarrow \frac{16}{15} - 1 + \frac{1}{3} = \frac{2M+2}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{16}{15} - \frac{15}{15} + \frac{5}{15} = \frac{2M+2}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{5} = \frac{2M+2}{5} \Rightarrow 2M+2=2$$

$$\Rightarrow \boxed{M=0}$$

Donc

$$f(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x^2+1}$$

* Etape 4 : Intégration

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{1}{x-1}\,dx - \int \frac{1}{x+1}\,dx + 2\int \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

$$= \ln|x-1| - \ln|x+1| + 2\arctan(x) + k \quad , \quad (k \in \mathbb{R})$$

⑮ $I_5 = \int \frac{2x^3+4x^2+x+2}{(x-1)(x^2+x+1)} dx$

: On pose $f(x) = \frac{2x^3+4x^2+x+2}{(x-1)(x^2+x+1)}$

$= \frac{2x^3+4x^2+x+2}{x^3+\cancel{x^2}+\cancel{x}-\cancel{x^2}-\cancel{x}-1}$

$= \frac{2x^3+4x^2+x+2}{x^3-1}$

$= \frac{P(x)}{Q(x)}$

(1) Division Euclidienne

On a $\deg(P) = 3 = \deg(Q)$

$$\begin{array}{r|l} \cancel{2x^3}+4x^2+x+2 & x^3-1 \\ \hline -\cancel{2x^3}+2 & 2 \\ \hline 4x^2+x+4 & \end{array}$$

Donc $f(x) = 2 + \frac{4x^2+x+4}{x^3-1}$

On pose $f(x) = 2 + \frac{R(x)}{Q(x)}$.

(2) Racine d Q :

Q admet une racine $x_1 = 1$

D'où $\boxed{Q(x) = (x-1)(x^2+x+1)}$

(3) Décomposition de f :

$$f(x) = 2 + \frac{4x^2 + x + 4}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

$$= 2 + \frac{A}{x-1} + \frac{Mx+N}{x^2+x+1}$$

$$= 2 + \frac{Ax^2 + Ax + A + Mx^2 - Mx + Nx - N}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

$$= 2 + \frac{(A+M)x^2 + (A-M+N)x + (A-N)}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

Par identification : $\begin{cases} A+M = 4 & \text{--- (1)} \\ A-M+N = 1 & \text{--- (2)} \\ A-N = 4 & \text{--- (3)} \end{cases}$

De (1)+(2) : $2A + N = 5$ --- (4)

De (3)+(4) : $3A = 9$ donc $\boxed{A = 3}$

De (1) : $3 + M = 4$ donc $\boxed{M = 1}$

De (3) : $3 - N = 4$ donc $\boxed{N = (-1)}$

Donc $f(x) = 2 + \dfrac{3}{x-1} + \dfrac{x-1}{x^2+x+1}$

(4) Intégration de f_5:

$$\int f_5(x)\,dx = \int 2\,dx + 3\int \frac{1}{x-1}\,dx + \int \frac{x-1}{x^2+x+1}\,dx$$

$$= 2x + 3\ln|x-1| + J.$$

* Calculons J:

La forme canonique x^2+x+1 est

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(1-\frac{1^2}{4}\right) = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

$P=1$

$q=1$

x^2+px+q

$=\left(x-\frac{p}{2}\right)+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)$

D'où on pose $t = x+\frac{1}{2}$

d'où $dt = dx$ et $\cancel{x} = t-\frac{1}{2}$

Donc $J = \int \frac{x-1}{x^2+x+1}\,dx$

$$= \int \frac{t-\frac{1}{2}-1}{t^2+\frac{3}{4}}\,dx$$

On a

$$\int \frac{1}{t^2+a^2}\,dt = \frac{1}{a}\text{arctg}\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2t}{t^2+\frac{3}{4}}\,dt - \frac{3}{2}\int \frac{1}{t^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|t^2+\frac{3}{4}\right| - \frac{3}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{\sqrt{3}}\,\text{arctg}\left(\frac{2t}{\sqrt{3}}\right) + C \quad (C\in\mathbb{R})$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2+x+1| - \frac{3}{\sqrt{3}}\,\text{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C \quad (C\in\mathbb{R}).$$

Donc

$$I_5 = \int f_5(x)\,dx$$

$$\boxed{= 2x + 3\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x^2+x+1| - \frac{3}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + c}$$
$(c \in \mathbb{R})$

$$I_6 = \int \frac{3x+1}{(x^2-2x+10)^2}\,dx = \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx.$$

(1) Pas de division Euclidienne $\left(\deg(P) < \deg(Q)\right)$

(2) Racine de Q :

Δ pour $x^2-2x+10$ est $\Delta = (-2)^2 - 4\times1\times10 < 0$

Donc $Q(x)$ n'admet aucune racine.

(3) Décomposition de f

$$f(x) = \frac{3x+1}{(x^2-2x+10)^2} = \frac{Mx+N}{x^2-2x+10} + \frac{Kx+L}{(x^2-2x+10)^2}$$

Donc $f(x) = \dfrac{3x+1}{(x^2-2x+10)^2}.$

Forme canonique de $x^2 - 2x + 10$ est

$$\left(x + \frac{-2}{2}\right)^2 + \left(10 - \frac{4}{4}\right) = (x-1)^2 + 9$$

$p = -2$

$q = 10$

On pose $t = x - 1$ d'où $dt = dx$

et $x = t + 1$

et $x^2 - 2x + 10 = t^2 + 9$.

$$I_6 = \int \frac{3x - 1}{(x^2 - 2x + 10)^2} dx$$

$$= \int \frac{3t + 3 - 1}{(t^2 + 9)^2} dt$$

$$I_6 = \int \frac{3t + 2}{(t^2 + 9)^2} dt .$$

$$= \int \frac{3t}{(t^2+9)^2} dt + 2 \int \frac{1}{(t^2+9)^2} dt$$

$$= 3 \cdot \frac{1}{2} \int \frac{2t}{(t^2+9)^2} dt + 2 \int \frac{1}{(t^2+9)^2} dt$$

De type $\int \frac{u'}{(u)^2}$

$= \frac{1}{-2+1} u^{-2+1}$

$$= \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{-1} (t^2+9)^{-1} + 2 J$$

$$= \frac{-3}{2} \cdot \frac{1}{t^2 + 9} + 2 J .$$

23

Calculons J :

$$J = \int \frac{1}{(t^2+9)^2}\,dt = \int \frac{1}{\left[9\left(\frac{t^2}{9}+1\right)\right]^2}\,dt$$

$$= \frac{1}{81}\int \frac{1}{\left[\left(\frac{t}{3}\right)^2+1\right]^2}\,dt$$

On pose $y = \frac{t}{3}$ d'où $dy = \frac{1}{3}\,dt$

Donc $J = \frac{1}{81} \cdot 3 \int \frac{\frac{1}{3}}{\left[\left(\frac{t}{3}\right)^2+1\right]^2}\,dt$

$$= \frac{1}{27}\int \frac{1}{(y^2+1)^2}\,dt$$

$$= \frac{1}{27}\,K$$

Pour calculer K on commence par calculer

$L = \int \frac{1}{y^2+1}\,dy$ par parties

on pose $h = \frac{1}{y^2+1}$ $\quad g' = 1$

d'où $h' = \frac{-2y}{(y^2+1)^2}$ $\quad g = y$

Donc

$$L = \frac{y}{y^2+1} + 2\int \frac{y^2}{(y^2+1)^2}\,dy$$

$$= \frac{y}{y^2+1} + 2\int \frac{y^2+1-1}{(y^2+1)^2}\,dy$$

$$= \frac{y}{y^2+1} + 2\int \frac{y^2+1}{(y^2+1)^2}\,dy - 2\int \frac{1}{(y^2+1)^2}\,dy$$

$$= \frac{y}{y^2+1} + 2\int \frac{1}{y^2+1}\,dy - 2\int \frac{1}{(y^2+1)^2}\,dy$$

$$L = \frac{y}{y^2+1} + 2L - 2K$$

Donc $2K = \frac{y}{y^2+1} + L$

Donc $K = \frac{1}{2}L + \frac{1}{2}\frac{y}{y^2+1} + C \quad (C \in \mathbb{R})$.

mais $L = \int \frac{1}{y^2+1}\,dy = \operatorname{arctg}(y)$

Donc

$$K = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(y) + \frac{1}{2}\frac{y}{y^2+1} + C$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{t}{3}\right) + \frac{1}{2}\frac{\frac{t}{3}}{\frac{t^2}{9}+1} + C$$

$$\boxed{K = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x-1}{3}\right) + \frac{3}{2}\cdot\frac{x-1}{x^2-2x+10} + C}$$

25

Donc $\boxed{I_6 = \frac{-3}{2}\cdot\frac{1}{x^2-2x+10} + \frac{1}{27}\operatorname{arctg}\left(\frac{x-1}{3}\right) + \frac{1}{9}\left(\frac{x-1}{x^2-2x+10}\right) + C}$ $(C \in \mathbb{R})$

2) Calculer les intégrales suivants :

① $J_1 = \int_2^4 \frac{x^4+1}{x(x-1)}\,dx$

On pose $g_1(x) = \frac{x^4+1}{x(x-1)} = \frac{x^4+1}{x^2-x} = \frac{P(x)}{\varphi(x)}$

* Division Euclidienne

On a $\deg(P) > \deg(\varphi)$

d'où

$$\begin{array}{r|l} x^4 + 1 & x^2 - x \\ \cline{2-2} -x^4 + x^3 & x^2 + x + 1 \\ \cline{1-1} x^3 + 1 & \\ -x^3 + x^2 & \\ \cline{1-1} x^2 + 1 & \\ -x^2 + x & \\ \cline{1-1} x + 1 & \end{array}$$

Donc $g(x) = x^2 + x + 1 + \frac{x+1}{x(x-1)}$

$$= E(x) + \frac{R(x)}{\varphi(x)}$$

* Racines de φ :

φ admet deux racines $x_1 = 0$ et $x_2 = 1$

Donc $\varphi(x) = x(x-1)$.

* Décomposition de f :

$$g(x) = x^2 + x + 1 + \frac{x+1}{x(x-1)}$$

$$= x^2 + x + 1 + \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1}$$

$$= x^2 + x + 1 + \frac{Ax - A + Bx}{x(x-1)}$$

$$= x^2 + x + 1 + \frac{(A+B)x - A}{x(x-1)}$$

Par identification on obtient :

$$A + B = 1$$
$$-A = 1$$

Donc $\boxed{A = -1}$ et $\boxed{B = 2}$

Donc $g(x) = x^2 + x + 1 + \frac{-1}{x} + \frac{2}{x-1}$

* L'Intégrale J :

$$J_1 = \int_2^4 g(x)\,dx = \int_2^4 \left(x^2 + x + 1 + \frac{-1}{x} + \frac{2}{x-1}\right) dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x - \ln|x| + 2\ln|x-1|\right]_2^4$$

② $J_2 = \int_2^3 \frac{2x+1}{x^2+x+3}\,dx = \int_2^3 \frac{u'(x)}{u(x)}\,dx$

$= \left[\ln|x^2+x+3|\right]_2^3$

$= \ln|9+3+3| - \ln|4+2+3|$

$= \ln 15 - \ln 9$

$= \ln \frac{15}{9}$

$= \boxed{\ln \frac{5}{3}}$