CHAPITRE 4: Systèmes D'équations Linéaires

1 Définitions et Appellations:

1.1 Définitions:

Définition 1: Un système linéaire de m équations à n inconnues est un ensemble d'équations de la forme:

$$(S)\left\{\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ . \\ . \\ . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right.$$

où les coefficients a_{ij}, $i = 1, 2, ..., m$, $j = 1, 2, ..., n$ et b_i, $i = 1, 2, ..., m$ sont des réels donnés.
Les a_{ij} sont des coefficients du premier membre et les b_i sont des coefficients du second membre ou termes constants.
Les variables x_i, $i = 1, 2, ..., n$ sont les inconnues du système.

Exemple:

$$(S)\left\{\begin{array}{l} x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 \ - x_3 \quad = -1 \\ x_1 \qquad + 3x_3 + x_4 = 3 \end{array}\right.$$

(S) est un système de 3 équations à 4 inconnues x_1, x_2, x_3 et x_4
$a_{11} = 1$, $a_{22} = 2$, $a_{34} = 1$, $b_1 = 1$, $b_2 = -1$ et $b_3 = 3$.

Définition 2: Une solution du système (S) est la donnée de n réels, $x_1, x_2, ..., x_n$ qui vérifie chacune des m équations.
On note par S l'ensemble des solutions du système.

Exemple:

$(\frac{5}{3}, \frac{4}{3})$ est solution du système $\left\{\begin{array}{l} x + y = 3 \\ 2x - y = 2 \end{array}\right.$
En effet, pour $x = \frac{5}{3}$ et $y = \frac{4}{3}$, on a $\frac{5}{3} + \frac{4}{3} = \frac{9}{3} = 3$
et $2(\frac{5}{3}) - \frac{4}{3} = \frac{10-4}{3} = 2$
donc les deux équations du système sont vérifiées.
Par contre $(1, 2)$ n'est pas solution du système (S) car pour $x = 1$ et $y = 2$ la $2^{ème}$ équation n'est pas vérifiée.
L'ensemble des solutions de (S) est: $S = \{(\frac{5}{3}, \frac{4}{3})\}$.

Définition 3: Un système linéaire est dit *compatible* s'il admet au moins une solution $(i.e : S \neq \emptyset)$ sinon, on dit qu'il est *incompatible* ou *impossible* $(i.e : S = \emptyset)$.

Exemples:

$(S_1)\left\{\begin{array}{c} x+2y=1 \\ 0=2 \end{array}\right.$ est un système incompatible,

L'ensemble des solutions: $S=\emptyset$.

$(S_2)\left\{\begin{array}{l} 2x_1+3x_2+x_3=1 \\ x_1+x_2\ +x_3=2 \\ 4x_1+x_2+x_3=3 \end{array}\right.$ est un système compatible

L'ensemble des solutions $S=\{(\frac{1}{3},\frac{-2}{3},\frac{7}{3})\}$.

$(S_3)\left\{\begin{array}{l} x+z=-1 \\ y-2z=2 \end{array}\right.$ est un système compatible.

$(-1,2,0)$ est une solution du système (elle n'est pas unique)

$(-6,12,5)$ est aussi solution de (S_3)

L'ensemble des solutions de (S_3) est: $S=\{(-1-z,2+2z,z),\ z\in\mathbb{R}\}$

Définition 4:

1/ On dit qu'un système linéaire est *homogène* si et seulement si $b_1=b_2=...=b_n=0$.

2/ Le *système homogène associé à* (S) est le système (S_h) tel que:

$$(S_h)\left\{\begin{array}{c} a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n=0 \\ . \\ . \\ . \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+...+a_{mn}x_n=0 \end{array}\right.$$

(S_h) est le système (S) en remplaçant les b_i, $i=1,2,...,m$ par 0.

Exemple:

$(S)\left\{\begin{array}{c} 5x+2y=4 \\ -x+3y=-11 \end{array}\right.$

Le système homogène assicié à (S) est

$(S_h)\left\{\begin{array}{c} 5x+2y=0 \\ -x+3y=0 \end{array}\right.$

Définition 5:

Deux systèmes à n inconnues sont *équivalents* si et seulement si leurs ensembles de solutions sont les mêmes.

2 Forme matricielle d'un système linéaire:

Le système linéaire (S) peut être sous la forme matricielle $AX=B$

où $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & . & a_{mn} \end{pmatrix}$ est la matrice associée au système

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$$ est la matrice colonne des inconnues

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b2 \\ . \\ . \\ . \\ b_m \end{pmatrix}$$ est la matrice colonne des termes constants ou bien le second membre du système.

Exemple: Mettre le système suivant sous la forme matricielle:

$$(S) \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 \qquad = -1 \\ x_1 \qquad + 3x_3 + x_4 = 3 \end{cases}$$

(S) s'écrit sous la forme matricielle $AX = B$ où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Définition: Le *rang* d'un système linéaire (S) est le rang de la matrice A associée à (S) ($i.e: \ rg(S) = rg(A)$)

Exemple: Déterminer le rang du système

$$(S) \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 \qquad = -1 \\ x_1 \qquad + 3x_3 + x_4 = 3 \end{cases}$$

On détermine le rang de la matrice associée à (S).

On a $(S) : AX = B$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \underset{L_3 \longleftarrow L_3 - L_1}{\overset{L_2 \longleftarrow L_2 - L_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{L_3 \longleftarrow L_3 - \frac{1}{3} L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & \frac{8}{3} & \frac{-1}{3} \end{pmatrix}$$

Donc $rg(A) = 3$ (le nombre de lignes non nulles aprés échelonnement de A).

d'où $rg(S) = 3$.

3 Système de Cramer:

3.1 Définition:

Un système linéaire est dit de *Cramer* si:

- C'est un système de n équations à n inconnues et il admet une solution unique.

Théorème: Soit le système linéaire $(S) : AX = B$
où $A \in M_n(\mathbb{R})$, $B \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ et $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$
Les propositions suivantes sont équivalentes:
1/ Le système (S) est de cramer.
2/ Le système homogène associé à (S) n'admet que le vecteur nul comme solution.
2/ Le système (S) admet une solution unique.
3/ La matrice A est inversible.
4/ $rg(A) = rg(S) = n$.
5/ $\det(A) \neq 0$.

3.2 Méthodes de résolution d'un système de Cramer:

Soit un système $(S) : AX = B$, un système de cramer écrit sous sa forme matricielle.
Résoudre le système (S) revient à résoudre l'équation $AX = B$.
(Donc déterminer l'unique solution X^* de l'équation $AX = B$)

3.2.1 Méthode en utilisant l'inverse de A :

(S) est un système de cramer, donc la matrice A est inversible.
On a $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$, où A^{-1} est la matrice inverse de A.
On a $AX = B....(*)$
En multipliant à gauche les deux membres de l'équation $(*)$, on obtient:

$$\begin{aligned} A^{-1}(AX) = A^{-1}B &\iff (A^{-1}A)X = A^{-1}B \text{ (car (.) est associative)} \\ &\iff I_nX = A^{-1}B \text{ (car } A^{-1}A = I_n) \\ &\iff X = A^{-1}B \text{ (car } I_n \text{ est l'élément neutre)} \end{aligned}$$

Donc l'unique solution du système (S) est $X^* = A^{-1}B$.

Exemple: Résoudre le système suivant en utilisant la matrice inverse.

$$(S) \begin{cases} x - 2y + 3z = 5 \\ 2x - 4y + z = 5 \\ 3x - 5y + 2z = 8 \end{cases}$$

Forme matricielle du système (S) :

$$(S) : AX = B \text{ où } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Le système (S) est-il de cramer?
Calculons le déterminant de A suivant la $1^{ère}$ colonne

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\det A = (-8+5) - 2(-4+15) + 3(-2+12)$$
$$= -3 - 2(11) + 3(10) = 5$$

$\det A = 5 \neq 0$ donc (S) est un système de cramer, il admet donc une unique solution $X^* = \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{pmatrix}$

On a $\det A \neq 0$ donc A est inversible (A^{-1} existe)
$AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$.

Déterminons la matrice A^{-1}.

$A^{-1} = \frac{1}{\det A} {}^t(ComA)$

$$ComA = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$$

avec $c_{11} = + \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = -3$, $c_{12} = - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1$,
$c_{13} = + \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = 2$, $c_{21} = - \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = -11$,
$c_{22} = + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -7$, $c_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -1$
$c_{31} = + \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = 10$, $c_{32} = - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5$, $c_{33} = + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 0$

donc $ComA = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 \\ -11 & -7 & -1 \\ 10 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

donc ${}^t(ComA) = \begin{pmatrix} -3 & -11 & 10 \\ -1 & -7 & 5 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

alors $A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 & -11 & 10 \\ -1 & -7 & 5 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-3}{5} & \frac{-11}{5} & 2 \\ \frac{-1}{5} & \frac{-7}{5} & 1 \\ \frac{2}{5} & \frac{-1}{5} & 0 \end{pmatrix}$

D'où $X^* = A^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{-3}{5} & \frac{-11}{5} & 2 \\ \frac{-1}{5} & \frac{-7}{5} & 1 \\ \frac{2}{5} & \frac{-1}{5} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

alors l'ensemble des solutions $S = \{(2,0,1)\}$.

3.2.2 Méthode des déterminants:

Soit le système de cramer:

$$(S)\left\{\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ . \\ . \\ . \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{array}\right.$$

(S) s'écrit sous la forme matricielle $AX = B$.

Le système (S) admet une solution unique $X^* = \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{pmatrix}$

définie par:

$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}$, $i = 1, 2, ..., n$ (La *Formule de cramer)*

où A_i est la matrice obtenue à partir de A, en remplaçant sa $i^{ème}$ colonne par le vecteur B.

Exemple: Résoudre le système précédent en utilisant la méthode des déterminants.

$$(S)\left\{\begin{array}{c} x - 2y + 3z = 5 \\ 2x - 4y + z = 5 \\ 3x - 5y + 2z = 8 \end{array}\right.$$

$(S) : AX = B$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$

Le système (S) est de cramer (déjà fait) donc l'unique solution du système est définie par:

$x = \frac{\det A_1}{\det A}$, $y = \frac{\det A_2}{\det A}$ et $z = \frac{\det A_3}{\det A}$ où

$A_1 = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 5 & -4 & 1 \\ 8 & -5 & 2 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 8 & 2 \end{pmatrix}$ et

$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 2 & -4 & 5 \\ 3 & -5 & 8 \end{pmatrix}$

A_1, A_2 et A_3 sont les matrices obtenue à partir de A, en remplaçant sa $1^{ème}$, $2^{ème}$ et $3^{ème}$ colonne réspectivement par le vecteur B.

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 5 & -4 & 1 \\ 8 & -5 & 2 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} + 8\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}$$

suivant la $1^{ère}$ colonne

$\det A_1 = 5(-8 + 5) - 5(-4 + 15) + 8(-2 + 12)$

$\det A_1 = 5(-3) - 5(11) + 8(10) = 10$

donc $x = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{10}{5} = 2 \Longrightarrow x = 2$

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 8 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}$$

suivant la $1^{ère}$ colonne

$\det A_2 = (10-8) - 2(10-24) + 3(5-15)$

$\det A_2 = 2 - 2(-14) + 3(-10) = 0$

donc $y = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{0}{5} = 0 \Longrightarrow y = 0$

$$\det A_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 2 & -4 & 5 \\ 3 & -5 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 5 \\ -5 & 8 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -5 & 8 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -4 & 5 \end{vmatrix}$$

suivant la $1^{ère}$ colonne

$\det A_3 = (-32+25) - 2(-16+25) + 3(-10+20)$

$\det A_3 = -7 - 2(9) + 3(10) = 5$

donc $z = \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{5}{5} = 1 \Longrightarrow z = 1$

d'où $X^* = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3.2.3 Méthode de Gauss (Echelonnement):

Soit le système (S) écrit sous la forme matricielle

$(S) : AX = B$

La méthode de Gauss consiste à:

1/ Former la matrice $(A\,|B)$. (elle possède n lignes et $(n+1)$ colonnes)

2/ Transformer la matrice $(A\,|B)$ en $(\tilde{A}\,\big|\tilde{B})$ où $\tilde{A}$ est la matrice échelonnée de la matrice A (en appliquant une suite d'opérations élémentaires sur les lignes de A et B).

3/ Former le système linéaire $(S^{'}) : \tilde{A}X = \tilde{B}$.

4/ Résoudre le système $(S^{'})$.

(S) et $(S^{'})$ sont équivalents (ont le même ensemble de solutions).

Exemple: Résoudre le système (S) en utilisant la méthode de Gauss.

$$(S)\begin{cases} x - 2y + 3z = 5 \\ 2x - 4y + z = 5 \\ 3x - 5y + 2z = 8 \end{cases}$$

$$(S) : AX = B \text{ où } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$(A\,|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 2 & -4 & 1 & 5 \\ 3 & -5 & 2 & 8 \end{array}\right) \underset{L_3 \longleftarrow L_3 - 3L_1}{\overset{L_2 \longleftarrow L_2 - 2L_1}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \\ 0 & 1 & -7 & -7 \end{array}\right)$$

$$\overset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{array}\right) = (\tilde{A}|\tilde{B})$$

où $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ et $\tilde{B} = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ -5 \end{pmatrix}$

Résoudre le système $(S) : AX = B$ revient à résoudre le système $(S^{'}) : \tilde{A}X = \tilde{B}$.

Résolvons le système $(S^{'}) : \tilde{A}X = \tilde{B}$

$$\tilde{A}X = \tilde{B} \Longleftrightarrow (S \begin{cases} x - 2y + 3z = 5....(1) \\ \quad y - 7z = -7.....(2) \\ \qquad -5z = -5.......(3) \end{cases}$$

de l'équation (3) : $-5z = -5 \Longrightarrow z = 1$

On remplace la valeur de z dans l'équation (2), on trouve:

$y - 7(1) = -7 \Longrightarrow y = -7 + 7 = 0$ donc $y = 0$

Dans l'équation (1) on pose $y = 0$ et $z = 1$, on obtient:

$x - 2(0) + 3(1) = 5 \Longrightarrow x = 5 - 3 + 0 = 2$ donc $x = 2$.

d'où $X^* = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Remarque: (Cas général)

Soit (S) un système linéaire écrit sous la forme matricielle

$(S) : AX = B$ avec $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$, $X \in M_{p,1}(\mathbb{R})$ et $B \in M_{n,1}(\mathbb{R})$

On résoud ce type de système par la méthode de Gauss.

Exemples: Résoudre les systèmes d'équations linéaires suivants:

1/ $(S_1) \begin{cases} x + 2y - z = 4 \\ 2x - y + 3z = 3 \\ 3x + y + 2z = 7 \end{cases}$

Le système (S_1) s'écrit sous la forme matricielle $A_1X = B_1$

où $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$

- (S_1) est-il de cramer?

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= (-2 - 3) - 2(4 + 1) + 3(6 - 1)$$

$$\det A_1 = -5 - 10 + 15 = 0$$

On a $\det A_1 = 0$ donc le système (S_1) n'est pas de cramer, on va le résoudre par la méthode de Gauss (Les deux autres méthodes: des déterminants et la matrice inverse ne sont pas valables pour ce type de système).

La méthode de Gauss:

$$(A_1\,|B_1) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 7 \end{array}\right) \underset{L_3 \longleftarrow L_3 - 3L_1}{\overset{L_2 \longleftarrow L_2 - 2L_1}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \end{array}\right)$$

$$\overset{L_3 \leftrightarrow L_3 - L_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = (\tilde{A}_1 \,\big|\tilde{B}_1)$$

où $\tilde{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\tilde{B}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$

Résoudre le système $(S_1) : A_1X = B_1$ revient à résoudre le système $(S_1^{'}) : \tilde{A}_1X = \tilde{B}_1$.

$$\tilde{A}_1X = \tilde{B}_1 \Longleftrightarrow \begin{cases} x - 2y + 3z = 5....(1) \\ -5y + 5z = -5.....(2) \\ 0 = 0.......(3) \end{cases}$$

Le système $(S_1^{'})$ de 2 équations à 3 inconnues, il admet donc une infinité de solutions

De l'équation (2): $-5y + 5z = -5 \Longrightarrow -5y = -5 - 5z$

$\Longrightarrow y = \frac{-1}{5}(-5 - 5z) = 1 + z$

On remplace dans (1) on obtient:

$x - 2y + 3z = 5 \Longrightarrow x = 5 + 2y - 3z$

donc $x = 5 + 2(1 + z) - 3z = 5 + 2 + 2z - 3z = 7 - z$

d'où l'ensemble des solutions $\{(7 - z, 1 + z, z),\ z \in \mathbb{R}\}$

(ou bien, de (2), $z = \frac{1}{5}(-5 + 5y) = -1 + y$, on remplace dans (1) :
$x = 8 - y$, d'où l'ensemble des solutions $\{(8 - y, y, -1 + y),\ y \in \mathbb{R}\}$)

Donc l'ensemble des solutions de (S_1) est $S = \{(7 - z, 1 + z, z),\ z \in \mathbb{R}\}$.

2/ $(S_2) \begin{cases} x - y \quad\quad + t = 2 \\ x - 3y - z + 4t = 2 \\ x + y + z - 2t = 1 \end{cases}$

Remarque: Le système (S_2) n'est pas de cramer (puisque le nombre d'équations $\neq$ nombre d'inconnues)

(S_2) s'écrit sous la forme matricielle: $A_2X = B_2$

où $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ et $B_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

On résoud le système par la méthode de Gauss:

$$(A_2\,|B_2) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \underset{L_3 \longleftarrow L_3 - L_1}{\overset{L_2 \longleftarrow L_2 - L_1}{\sim}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -3 & -1 \end{array}\right)$$

$$\overset{L_3 \leftrightarrow L_3 + L_2}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) = (\tilde{A}_2 \,\big|\tilde{B}_2)$$

Où $\tilde{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\tilde{B}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Résoudre le système $(S_2) : A_2X = B_2$ revient à résoudre le système $(S_2^{'}) : \tilde{A}_2X = \tilde{B}_2$.

$$\tilde{A}_2X = \tilde{B}_2 \Longleftrightarrow (\left\{ \begin{array}{r} x - y \qquad + t = 2....(1) \\ -\,2\;y - z + 3t = 0....(2) \\ 0 = -1..(3) \end{array} \right.$$

C'est un système impossible (d'aprés l'équation (3)), donc le système (S_2) est impossible

alors l'ensemnle des solutions du système (S_2) est $S = \emptyset$.

3/ $(S_3) \left\{ \begin{array}{c} x + 3y + 3z = 1 \\ -2x - 3y - 2z = 1 \\ 3x + 3y + z = 3 \end{array} \right.$

La forme matricielle de (S_3): $A_3X = B_3$

avec $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -2 & -3 & -2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\det A_3 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -2 & -3 & -2 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$, donc (S_3) n'est pas de cramer soit il admet une infinité de solutions, soit il n'admet aucune solution.

On résoud ce système par la méthode de Gauss.

$$(A_3\,|B_3) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & -2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right) \underset{L_3 \longleftarrow L_3 - 3L_1}{\overset{L_2 \longleftarrow L_2 + 2L_1}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & -6 & -8 & 0 \end{array}\right)$$

$$\overset{L_3 \leftrightarrow L_3 + 2L_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right) = (\tilde{A}_3 \,\Big|\tilde{B}_3)$$

où $\tilde{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\tilde{B}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$

Résoudre le système $(S_3) : A_3X = B_3$ revient à résoudre le système $(S_3^{'}) : \tilde{A}_3X = \tilde{B}_3$.

$$\tilde{A}_3X = \tilde{B}_3 \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x + 3y + 3z = 1....(1) \\ 3y + 4z = 3.....(2) \\ 0 = 6.......(3) \end{array} \right.$$

C'est un système impossible (d'aprés l'équation (3)), donc le système (S_3) est impossible

alors l'ensemnle des solutions $S = \emptyset$.