USD. Blida 1
Faculté de Technologie
Département de TC/ST
$1^{ère}$ année LMD TC/ST

Maths 2
2022/2023
Mr. OUAKID A.

Serie n°3 : Matrices

Ex. 1

Soient les matrices suivantes

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}$

et $E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

1) Calculer si possible :

A - 2C :

On a $2C = 2\begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -8 \\ 8 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$,

$\boxed{\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices à 2 lignes et 2 colonnes$}$

et on a $A \in \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.

D'où $A - 2C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 & -8 \\ 8 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-(-4) & 2-(-8) \\ -2-8 & 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ -10 & 0 \end{pmatrix}$

B + C :

$B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ et $C \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$.

D'où B + C n'est pas définie

A x C :

$A \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ et $C \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$.

Le nombre des colonnes de A égal au nombre de lignes de C, d'où la multiplication A x C est possible, avec $A \times C \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$

$A \times C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times(-2)+2\times 4 & 1\times(-4)+2\times 0 \\ (-2)\times(-2)+0\times 4 & (-2)\times(-4)+0\times 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$

B×D:

$B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ et $C \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$

$B \times C$ n'est pas définie car le nombre de colonnes de B est 3, est n'egal pas au nombre de lignes de C qui est 2.

D×E:

$D \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $E \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$

$D \times E$ n'est pas possible. (Mais $E \times D$ est possible)

A vous pour confirmer que $E \times D$ est definie!

B×E:

$B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ et $E \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$

$B \times E$ est possible et $B \times E \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$.

On peut utiliser la méthode suivante pour calculer $B \times E$:

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} (2\times1)+(-3)\times(-2)+2\times3 & & \\ & & \end{pmatrix} \end{array}$$

Dans chaque intersection on trouve le resultat du produit d'une ligne de B avec une colonne de E.

$$B \times E = \begin{pmatrix} 14 & -3 & -10 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Calculer :

$(2A+C)^T$:

$$2A+C = 2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

D'où $(2A+C)^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$B^T + D$:

On a $B^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ On écrit les lignes de B comme colonne de B^T.

$B^T \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$.

D'où $B^T + D$ est possible. (car B^T et D sont de même ensemble)

$$B^T + D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \\ 7 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \\ 9 & -2 \end{pmatrix}$$

$E^2 - E + 6I_3$:

$$E^2 = E \times E = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad 6I_3 = 6\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

D'où

$$E^2 - E + 6I_3 = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

3. Soit la matrice $G = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ G est dite nilpotente d'indice de nilpotence égal à 3

Montrer que $G^3 = 0_3$.

On calcule G^2 : $G^2 = G.G = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

D'où $G^3 = G^2 . G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Donc $G^3 = 0_3$

$\boxed{3}$

2. Calculer:

$(2A+C)^T$:

$$2A+C = 2\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2 & -4\\ 4 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 4\\ -4 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2 & -4\\ 4 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

D'où $(2A+C)^T = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

$B^T + D$:

On a $B^T = \begin{pmatrix}2 & 0\\ -3 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ ← On écrit les lignes de B comme colonne de B^T.

$B^T \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$.

D'où $B^T + D$ est possible. (car B^T et D sont de même ensemble)

$$B^T + D = \begin{pmatrix}2 & 0\\ -3 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3 & -2\\ 1 & 0\\ 7 & -3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5 & -2\\ -2 & 1\\ 9 & -2\end{pmatrix}$$

$E^2 - E + 6I_3$:

$$E^2 = E \times E = \begin{pmatrix}-4 & 3 & 2\\ 2 & -3 & 2\\ 2 & 3 & -4\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad 6I_3 = 6\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6 & 0 & 0\\ 0 & 6 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix}$$

D'où

$$E^2 - E + 6I_3 = \begin{pmatrix}-4 & 3 & 2\\ 2 & -3 & 2\\ 2 & 3 & -4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ -2 & 1 & 2\\ 3 & -1 & -1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}6 & 0 & 0\\ 0 & 6 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 2 & 0\\ -1 & 4 & 3\end{pmatrix}$$

3. Soit la matrice $G = \begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ -3 & -1 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$ ← G est dite nilpotente d'indice de nilpotence égal à 3

Montrer que $G^3 = 0_3$.

On calcule G^2: $G^2 = G.G = \begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ -3 & -1 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ -3 & -1 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -2 & -2 & -2\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$

D'où $G^3 = G^2 . G = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -2 & -2 & -2\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ -3 & -1 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ Donc $G^3 = 0_3$

$\boxed{3}$

4. Soit la matrice $F = E^2 - E + 6I_3$:

* Calculer $E \times F$ et $F \times E$:

$$E \times F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$F \times E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

* Que peut-on conclure ?

On a $E \times F = 6I_3$ d'où $E \times \left(\frac{1}{6}F\right) = I_3$

et on a $F \times E = 6I_3$ d'où $\left(\frac{1}{6}F\right) \times E = I_3$

On peut conclure que E est inversible.

* L'inverse E^{-1} de E est $E^{-1} = \frac{1}{6}F$:

$$E^{-1} = \frac{1}{6}F = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Ex. 2

Ex. 2

1) Le déterminant

- $\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 3\times 0 - (-1)\times(-2) = -2$

- $\det(B) = |B| = \begin{vmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 0\cdot\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + (-2)\cdot\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$

On develope suivant la Colonne 1 (C_1)

$= -(1-2) + (-2)\cdot(6-1)$

$= 1 - 10$

$= \boxed{-9}$

- $\det(C) = |C| = \begin{vmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -(-1)\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 0$

$= (3-1) + (-2)$

$= 2 - 2$

$= 0$

2) En déduire :

- $\det(B^2) = \det(B)\cdot\det(B) = (-9)\cdot(-9) = 81$
- $\det(B\times C) = \det(B)\times\det(C) = (-9)\cdot 0 = 0$

3) $\det(A) = -2 \neq 0$ d'où A est inversible

$\det(B) = -9 \neq 0$ d'où B est inversible

$\det(C) = 0$ d'où C n'est pas inversible

4) Rang :

rang $(A) = 2$ (car $\det(A) = 2$ est le le déterminant de plus ordre qui est extrait de A)

5

~~Rang~~ . $rg(B) = 3$

. $rg(C) \neq 3$ car $\det(C) = 0$

D'où $rg(C) = 2$ ou $rg(C) = 1$

On a $\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2-(-3) = 1$ est un déterminant d'ordre 2 qui peut être extrait de C et qui n'est pas nul.

Donc $rg(C) = 2$.

5) Échelonnement :

* $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix}$

. On a un pivot à la première ligne (L_1) qui est $a_{1,1} = 3$

. $L_2 \leftarrow L_2 + \frac{1}{3} L_1$ $\quad A \sim \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$, A est échelonnée

* $B = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ \boxed{-2} & -1 & 1 \end{pmatrix}$

. On a deux pivots : $a_{1,1} = -1$ à la 1ère ligne.
$a_{2,2} = 1$ à la 2ème ligne.

On choisit $a_{1,1}$ pour que $a_{3,1}$ soit 0. d'où $L_3 \leftarrow L_3 - \frac{a_{3,1}}{\text{Pivot}} L_1$.

$a_{3,1}$

$L_3 \leftarrow L_3 - \frac{(-2)}{-1} L_1$

$L_3 \leftarrow L_3 - \frac{a_{3,1}}{\text{Pivot}} L_1$

. $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$ $\quad B \sim \begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & \boxed{5} & -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{ccc} -2 & -1 & 1 \\ 2 & 6 & -2 \\ \hline 0 & 5 & -1 \end{array}$$

. Dans cette étape on choisit $a_{2,2}$ comme pivot pour que $a_{3,2}$ soit 0.

$L_3 \leftarrow L_3 - \frac{a_{3,2}}{\text{Pivot}} L_2$ d'où $L_3 \leftarrow L_3 - \frac{5}{1} L_2$ d'où $L_3 \leftarrow L_3 - 5L_2$

$$\begin{array}{ccc} 0 & 5 & -1 \\ 0 & -5 & 10 \\ \hline 0 & 0 & 9 \end{array}$$

$B \sim \begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ B est échelonnée.

6

$* \; C = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{2} L_1$ $\qquad C \sim \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 0 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{ccc} -1 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{-3}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline 0 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

$L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$ $\qquad C \sim \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 0 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ c'est échelonnée.

$$\begin{array}{ccc} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}$$

6) $rg(B) = 3$ car le nombre de lignes non nulles après l'échelonnement de B est 3

$rg(C) = 2$. car C à 2 lignes non nulles après l'échelonnement.

Ex. 3

$$A_m = \begin{pmatrix} 1 & -m & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ m & 1 & m \end{pmatrix} \qquad m \in \mathbb{R}.$$

1. Valeurs de m pour que A_m soit inversible :

$$\boxed{A_m \text{ est inversible} \Leftrightarrow \det(A_m) \neq 0}$$

On a $\det(A_m) = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & m \end{vmatrix} + m \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ m & m \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ m & 1 \end{vmatrix}$

$$= (3m-3) + m(2m-3m) + (2-3m)$$
$$= \cancel{3m} - 3 + m(-m) + 2 - \cancel{3m}$$
$$= -m^2 - 1$$
$$= -(m^2+1)$$

$-(m^2+1) = 0 \Rightarrow m^2+1 = 0 \Rightarrow m^2 = -1$ impossible.

D'où $\forall m \in \mathbb{R} \quad \det(A_m) \neq 0$

Donc A_m est inversible pour tout $m \in \mathbb{R}$.

2.

* A_1 est inversible car $\det(A_1) = -1^2 - 1 = -2 \neq 0$
* L'inverse de A :

$$A_1^{-1} = \frac{1}{\det(A_1)} \cdot {}^t\mathrm{com}(A_1) \qquad \text{et on} \quad A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{com}(A_1) = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -6 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{Donc } \cancel{A_1^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -6 & -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}}}$$

8

D'où $\quad {}^t com(A_1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -6 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

Donc $\quad A_1^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 0 & 2 & -6 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{-5}{2} \end{pmatrix}$

3. * Montrer que $A_0^3 - 4A_0^2 + I_3 = 0_3$.

$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_0^3 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 32 & 47 & 44 \\ 8 & 12 & 11 \end{pmatrix} \qquad A_0^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 8 & 12 & 11 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

D'où $\quad A_0^3 - 4A_0^2 + I_3 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 32 & 47 & 44 \\ 8 & 12 & 11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 32 & 48 & 44 \\ 8 & 12 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Donc $\quad A_0^3 - 4A_0^2 + I_3 = 0_3$

* En déduire A_0^{-1}:

On a $\quad A_0^3 - 4A_0^2 + I_3 = 0 \Rightarrow A_0^3 - 4A_0^2 = -I_3$

$\Rightarrow -A_0^3 + 4A_0^2 = I_3$

$\Rightarrow A_0\left(-A_0^2 + 4A_0\right) = I_3$

Et $\quad \left(-A_0^2 + 4A_0\right)A_0 = I_3$

Donc A_0 est inversible et $A_0^{-1} = -A_0^2 + 4A_0$

$A_0^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -8 & -12 & -11 \\ -2 & -3 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 8 & 12 & 12 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

* $\det(A_0^{-1}) = \frac{1}{\det(A_0)} = \frac{1}{-1\cdot(3-2)} = \frac{1}{-(+1)} = \boxed{-1}$

Ex. 4

$\alpha \in \mathbb{R}$ et $B_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ -\alpha & 0 & \alpha \\ \alpha & 1 & -5\alpha \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} \dots L_1 \text{ (ligne 1)} \\ \dots L_2 \text{ (ligne 2)} \\ \dots L_3 \text{ (ligne 3)} \end{matrix}$

1) Mettre B_α sous la forme échelonnée

$L_1 \leftrightarrow L_2$ $\quad B_\alpha \sim \begin{pmatrix} -\alpha & 0 & \alpha \\ 0 & -1 & 3 \\ \alpha & 1 & -5\alpha \end{pmatrix}$

1ère étape : Permuter les lignes L_1 et L_2

$L_3 \leftarrow L_3 + L_1$ $\quad B_\alpha \sim \begin{pmatrix} -\alpha & 0 & \alpha \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -4\alpha \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{rrrl} & \alpha & 1 & -5\alpha \dots L_3 \\ + & -\alpha & 0 & \alpha \dots L_1 \\ \hline & 0 & 1 & -4\alpha \quad L_3+L_1 \end{array}$$

2ème étape : On change la ligne L_3 complètement par une autre ligne qui est L_3+L_1

$L_3 \leftarrow L_3 + L_2$

$$\begin{array}{rrrl} & 0 & 1 & -4\alpha \dots L_3 \\ + & 0 & -1 & 3 \dots L_2 \\ \hline & 0 & 0 & -4\alpha+3 \end{array}$$

$B_\alpha \sim \begin{pmatrix} -\alpha & 0 & \alpha \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -4\alpha+3 \end{pmatrix}$

3ème étape : On change la ligne L_3 par L_3+L_2

Donc B_α est échelonnée et $\tilde{B}_\alpha = \begin{pmatrix} -\alpha & 0 & \alpha \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -4\alpha+3 \end{pmatrix}$

* En déduire que $|B_\alpha| = \alpha(4\alpha-3)$

. D'après les propriétés du déterminant on a :

(a) Le déterminant d'une matrice triangulaire égal au produit de ses éléments diagonaux.

Une matrice triangulaire de $M_3(\mathbb{R})$ est de la forme $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$ supérieure ou $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & f \end{pmatrix}$ inférieure.

(b) Si on permute deux lignes (comme on a fait dans la 1ère étape de l'échelonnement) le déterminant change de signe.

D'où $B_\alpha = -\left((-\alpha)\times(-1)\times(-4\alpha+3)\right) = \left(\alpha\,(-4\alpha+3)\right) = \boxed{\alpha(4\alpha-3)}$

10

2) Discuter selon les valeurs de α, le rang de B_α.

> Le rang d'une matrice est le nombre des lignes non nuls de sa forme échelonnée

On a $\tilde{B}_\alpha = \begin{pmatrix} -\alpha & 0 & \alpha \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -4\alpha+3 \end{pmatrix}$ est la forme échelonnée de B_α

- Si $\alpha = 0$ alors $\tilde{B}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ .... ligne nul. ... ligne non nul. ... ligne non nul.

  D'où $\boxed{rg(B_0) = 2}$

- Si $-4\alpha+3=0$ alors $\alpha = \frac{3}{4}$ et $\tilde{B}_{\frac{3}{4}} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

  D'où $\boxed{rg\left(B_{\frac{3}{4}}\right) = 2}$

- Si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, \frac{3}{4}\}$ alors $\boxed{rg(B_\alpha) = 3}$.

> On trouve deux (2) lignes non nuls dans $\tilde{B}_0$ et $\tilde{B}_{\frac{3}{4}}$

3) En utilisant le rang, verifier que B_{-1} est inversible:

D'aprés la question 2, $(-1) \in \mathbb{R} \setminus \{0, \frac{3}{4}\}$,

d'où B_{-1} est inversible (car $rg(B_{-1}) = 3$ et $B_{-1} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$)

4) B_{-1}^{-1} en utilisant la méthode de Gauss-Jordan:

$$(B_{-1} | I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$L_2 \leftrightarrow L_1$ $$(B_{-1} | I_3) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$L_3 \leftarrow L_3 + L_1$ $$(B_{-1} | I_3) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \quad (B_{-1} | I_3) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$

$L_2 \leftarrow \frac{1}{-1} L_2$ et $L_3 \leftarrow \frac{1}{7} L_3 \quad (B_{-1} | I_3) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{array}\right)$

$-\frac{7}{7} + \frac{3}{7} = \frac{-4}{7}$

$L_2 \leftarrow L_2 + 3L_3$

$$\begin{array}{cccc|ccc} & 0 & 1 & -3 & -1 & 0 & 0 \\ + & 0 & 0 & 3 & \frac{3}{7} & \frac{3}{7} & \frac{3}{7} \\ \hline & 0 & 1 & 0 & \frac{-4}{7} & \frac{3}{7} & \frac{3}{7} \end{array}$$

$(B_{-1} | I_3) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-4}{7} & \frac{3}{7} & \frac{3}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{array}\right)$

$\frac{7}{7} + \frac{1}{7} = \frac{8}{7}$

$L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \quad (B_{-1} | I_3) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{7} & \frac{8}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{7} & \frac{3}{7} & \frac{3}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{array}\right)$

D'où $(B_{-1} | I_3) \sim (I_3 | B_{-1}^{-1})$

Donc $B_{-1}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{8}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{-4}{7} & \frac{3}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 1 & 8 & 1 \\ -4 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

Ex. 5

$$(S)\begin{cases} x+y+2z=3\\ x+2y+z=1\\ 2x+y+z=0\end{cases}$$

1) Forme matricielle de (S) : $A.X=B$.

$$(S):\ \underbrace{\begin{pmatrix}1&1&2\\1&2&1\\2&1&1\end{pmatrix}}_{A}.\underbrace{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}}_{X}=\underbrace{\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}}_{B}$$

2) Par l'échelonnement, Resoudre (S_h) associé à (S) :

On a (S_h) : $\begin{cases} x+y+2z=0\\ x+2y+z=0\\ 2x+y+z=0.\end{cases}$

(S_h) est obtenue de (S) en remplaçant $B=\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}$ par $0_{3,1}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

Et on a la matrice augmentée de (S_h) est

$$(A|0_{3,1})=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&2&0\\1&2&1&0\\2&1&1&0\end{array}\right)$$

1ère étape : Forme la matrice augmentée $(A|0_{3,1})$

$0_{3,1}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ 3 lignes et 1 colonne

$L_2\leftarrow L_2-L_1$ $\quad(A|0_{3,1})\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&2&0\\0&1&-1&0\\2&1&1&0\end{array}\right)$

$L_3\leftarrow L_3-2L_1$ $\quad(A|0_{3,1})\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&2&0\\0&1&-1&0\\0&-1&-3&0\end{array}\right)$

$L_3\leftarrow L_3+L_2$ $\quad(A|0_{3,1})\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&2&0\\0&1&-1&0\\0&0&-4&0\end{array}\right)$

2ème étape : Ecrire $(A|0_{3,1})$ sous la forme échelonnée

Donc $(A|0_{3,1})$ est échelonnée et $(\tilde{A}|0_{3,1})=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&2&0\\0&1&-1&0\\0&0&-4&0\end{array}\right)$

Donc on a (S'_h) : $\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ y - z = 0 \\ -4z = 0 \end{cases}$

$3^{ème}$ étape :

Ecrire le système (S'_h) : $\tilde{A}.X = 0_{3,1}$

On a obtenue ce système (S'_h) de : $\tilde{A}.X = 0_{3,1}$

Et on a (S'_h) est (S_h) sont équivalent, alors ils ont les mêmes solutions.

. D'après la $3^{ème}$ équation : $-4z = 0 \Rightarrow \boxed{z = 0}$

. D'après la $2^{ème}$ équation et sachant que $z = 0$:

$$y - z = 0 \Rightarrow y - 0 = 0 \Rightarrow \boxed{y = 0}$$

. D'après la $1^{ère}$ équation et $y = 0$ et $z = 0$:

$$x + 2y + z = 0 \Rightarrow x + 2\times 0 + 0 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0}$$

Donc (S_h) admet une solution unique

$$S = \{(0,0,0)\}.$$

$4^{ème}$ étape :

Resolue le système (S'_h), qui a les mêmes solutions comme (S_h).

3) (S) est de Cramer ?

Oui, (S) est de Cramer ; car (S_h) admet la solution nulle $(0,0,0)$ comme solution unique.

4) En déduire que A est inversible ?

* Comme (S_h) associé à (S) n'admet que la solution nulle $(0,0,0)$, alors (S) est de Cramer.

D'où A est inversible.

* Calculer A^{-1} par l'échelonnement

On a $(A|I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ $\quad (A|I_3) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$ $\quad (A|I_3) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$L_3 \leftarrow L_3 + L_2$ $\quad (A|I_3) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right)$

$L_3 \leftarrow \frac{1}{-4} L_3$ $\quad (A|I_3) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} \end{array}\right)$

$\frac{-1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{-2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{-1}{4}$

$L_2 \leftarrow L_2 + L_3$ $\quad (A|I_3) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{-1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} \end{array}\right)$

$\boxed{P_{15}}$

$L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3$ $\quad (A|I_3) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{-1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} \end{array}\right)$

$$\begin{array}{rccc|ccc l} + & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & \ldots L_1 \\ & 0 & 0 & -2 & \frac{-3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \ldots -2L_3 \\ \hline & 1 & 1 & 0 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \end{array}$$

$L_1 \leftarrow L_1 - L_2$ $\quad (A|I_3) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{-1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} \end{array}\right) = (I_3 | A^{-1})$

Donc $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{-1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{-1}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

5) Résoudre (S) par la méthode de l'inverse :

(S) est de Cramer, d'où il admet une, et une seule solution : $X^* = A^{-1} \cdot B$

On a $X^* = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -3-1+0 \\ -3+3+0 \\ 9-1+0 \end{pmatrix}$

D'où $X^* = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

On peut confirmer que cette solution est correcte, en remplaçant $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ dans (S)

Donc $S = \{(-1, 0, 2)\}$.

6) Retrouver la Solution X^* du (S) par déterminants :

$$x = \frac{\det \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}{\det(A)}$$

On remplace la colonne $c_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ dans A par $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$= \frac{3.(2-1) - (1-2) + 0}{(2-1) - (1-2) + 2.(1-4)}$$

$$= \frac{3 - (-1)}{1 - (-1) + 2.(-3)} = \frac{4}{-4} = \boxed{-1}$$

$$y = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{\det(A)} = \frac{0}{-4} = \boxed{0} \qquad z = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}}{\det(A)} = \frac{-8}{-4} = \boxed{2}$$

Donc $S = \{(-1, 0, 2)\}$.

Ex. 6

$(S_1)\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 3 \end{cases}$ $(S_2)\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = -1 \\ -3x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$

1) Calculer $rg(S_1)$:

On a $rg(S_1) = rg(A_1)$ avec A_1 la matrice associée a (S_1).

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det(A_1) = 1.(-8-2) - 2.(-4-1) + 2.(-2+2)$$
$$= -10 + 10 + 0$$
$$= 0$$

D'où $rg(A_1) \neq 3$ d'où $rg(A_1) \leq 2$.

On a $\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 4 = 6 \neq 0$ est un déterminant mineur non nul d'ordre 2 extrait de A_1.

Donc $rg(A_1) = 2$ Donc $\boxed{rg(S_1) = 2}$

2) (S_1) est de Cramer ?

Non, (S_1) n'est pas de Cramer, car $rg(S_1) = 2 \neq 3$.
et (S_1) est un système de 3 équations à 3 inconnues

6) Résoudre les systèmes (S_1) et (S_2)

* Le système (S_1):

(S_1) n'est pas Cramer, d'où on le résout par la méthode de l'échelonnement (de Gauss).

- La forme matricielle de (S_1) est:

$$(S_1): A_1 \cdot X = B_1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- La matrice augmentée de (S_1) est

$$(A_1|B_1) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{array}\right)$$

- L'échelonnement de $(A_1|B_1)$

$$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \qquad (A_1|B_1) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{array}\right) \dots L_2$$

On peut arrêter ici, car on peut remplacer A_1 par la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ et B_1 par $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$ dans le système (S_1). Alors on trouve $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 0 = -3 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 3. \end{cases}$

Selon la deuxième équation : $0 = -3$ est impossible. Donc le système (S_1) n'admet aucune solution.

On peut aussi compléter l'échelonnement comme suivant :

P18

- (S_2) n'est pas de Cramer, on ~~peut~~ le resolut par la méthode de l'échelonnement.

- La matrice augmentée de (S_2) est :

$$(A_2|B_2) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -3 & 3 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

- L'échelonnement de $(A_2|B_2)$:

$L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1$ $\quad (A_2|B_2) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right)$ ... L_2

On peut arreter ici, car on remarque de la $2^{\text{ème}}$ ligne L_2 que (S_2) admet une infinité de solutions

$L_2 \leftrightarrow L_3$ $\quad (A_2|B_2) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ $\quad (A_2|B_2) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = (\tilde{A}_2|\tilde{B}_2)$

- On écrit le systeme $(S_2') : \tilde{A}_2 \cdot X = \tilde{B}_2$

$$(S_2') \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = -1 \\ 2x_2 - 2x_3 = 4 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

D'où $$(S_2') \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = -1 & \dots (1) \\ x_2 - x_3 = 2 & \dots (2) \end{cases}$$

De l'addition $(1)+(2)$ on trouve : $\boxed{x_1 = 1}$

De l'équation (2) on trouve : $x_2 = x_3 + 2$

Comme (S_2') et (S_2) sont équivalents

Donc (S_2) admet une infinité de solutions $S = \{(1, x_3 + 2, x_3), x_3 \in \mathbb{R}\}$

$L_2 \leftrightarrow L_3 \quad (A_1|B_1) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$

$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \quad (A_1|B_1) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$

Donc $(A_1|B_1)$ est echelonnée et $(\tilde{A}_1|\tilde{B}_1) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$

- On écrit le systeme (S_1'): $\tilde{A}_1 \cdot X = \tilde{B}_1$:

$$(S_1')\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ 0 = -3 \end{cases}$$

D'aprés la traisième ~~é~~ équation: $0=-3$ est impossible.

Donc (S_1') n'admet aucune solution.

On conclut que (S_1) aussi n'admet aucune solution.

* Le systeme (S_2):

- La forme matricielle de (S_2) est

$$A_2 \cdot X = B_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- $\det(A_2) = 1\cdot(-3+3) + 1\cdot(3+3) + 1\cdot(-3-3)$
$= 0 + 6 - 6$
$= 0$

Donc A_2 n'est pas inversible est (S_2) n'est pas de Cramer.

P20

Ex. 7

$$(S_\alpha)\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2 - \alpha y + \alpha z = \alpha + 1 \\ \alpha x + y + 2\alpha z = \alpha \end{cases}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

1) Forme matricielle $A_\alpha \cdot X = B_\alpha$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -\alpha & \alpha \\ \alpha & 1 & 2\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha+1 \\ \alpha \end{pmatrix}$$

2) Valeurs de α pour que A_α soit inversible :

$$\boxed{A_\alpha \text{ est inversible} \Leftrightarrow \det(A_\alpha) \neq 0}$$

$$\det(A_\alpha) = 1.(-2\alpha^2 - \alpha) + 1.(4\alpha - \alpha^2) + 1.(2 + \alpha^2)$$

$$= -2\alpha^2 - \alpha + 4\alpha \cancel{- \alpha^2} + 2 \cancel{+ \alpha^2}$$

$$= -2\alpha^2 + 3\alpha + 2$$

$$\det(A_\alpha) = 0 \Leftrightarrow -2\alpha^2 + 3\alpha + 2 = 0$$

$$\Delta = 9 - 4(-2)\times(2) = 9 + 16 = 25$$

$$\alpha_1 = \frac{-3+5}{2\times(-2)} = \frac{2}{-4} = \frac{-1}{2} \qquad \alpha_2 = \frac{-3-5}{-4} = \frac{-8}{-4} = 2$$

Donc $\det(A_\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{-1}{2} \vee \alpha = 2$.

On conclut que A_α est inversible ssi $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{-1}{2}, 2\right\}$.

$\boxed{P21}$

3) * Vérifier que A_1 est inversible.

On a $1 \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{-1}{2}, 2\}$ d'où A_1 est inversible d'apres la question 2.

* Calculer A_1^{-1} par la méthode des cofacteurs:

On a $A_1^{-1} = \dfrac{1}{\det(A_1)} \cdot {}^t(\text{com}(A_1))$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

. Selon la question 2 on a:

$$\begin{aligned} \det(A_1) &= -2 \times (1)^2 + 3 \times 1 + 2 \\ &= -2 + 3 + 2 \\ &= 3 \end{aligned}$$

. Comatrice de (A_1):

$$\text{com}(A_1) = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

D'où ${}^t(\text{com}(A_1)) = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

P22

Donc $\boxed{A_1^{-1} = \dfrac{1}{3} \begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}}$

4) Résoudre les systèmes (S_1), (S_2) et $(S_{\frac{-1}{2}})$:

* Pour (S_1):

On a (S_1) est de Cramer car on a trouver dans la répence de question 3 que A_1 est inversible.

D'où $X^* = A_1^{-1} \cdot B_1$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+2+0 \\ -1+\frac{2}{3}+\frac{1}{3} \\ 1-\frac{4}{3}+\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc $S = \{(1,0,0)\}$.

* Pour (S_2):

D'après la réponce de question 2, (S_2) n'est pas de Cramer.
On le résolut par la méthode de l'échelonnement.

- La matrice augmentée de (S_2) est

$$(A_2|B_2) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \end{array}\right)$$

- L'échelonnement de $(A_2|B_2)$:

$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ $\quad (A_2|B_2) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \end{array}\right)$

- D'où on peut former un systeme (S_2'), équivalent à (S_2), qui est

$$(S_2') \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 0 = 1 \\ 2x - y + 4z = 2 \end{cases}$$

D'apres la $2^{ème}$ équation: $0 = 1$! on conclut que (S_2') et aussi (S_2) n'admet aucune solution.

P23

* pour $(S_{\frac{-1}{2}})$:

Selon la réponce de la question 2, $(S_{\frac{-1}{2}})$ n'est pas de Cramer, alors on le résolut par la méthode de l'échelonnement.

- La matrice augmentée de $(S_{\frac{-1}{2}})$ est

$$(A_{\frac{-1}{2}}|B_{\frac{-1}{2}}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} & 1 & -1 & \frac{-1}{2} \end{array}\right)$$

- L'échelonnement de $(A_{\frac{-1}{2}}|B_{\frac{-1}{2}})$

$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ $\quad (A_{\frac{-1}{2}}|B_{\frac{-1}{2}}) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{-5}{2} & \frac{-3}{2} \\ \frac{-1}{2} & 1 & -1 & \frac{-1}{2} \end{array}\right)$

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ -2 & 2 & -2 & -2 \\ \hline 0 & \frac{5}{2} & \frac{-5}{2} & \frac{-3}{2} \end{array}$$

$L_3 \leftarrow L_3 + \frac{1}{2}L_1$ $\quad (A_{\frac{-1}{2}}|B_{\frac{-1}{2}}) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{-5}{2} & \frac{-3}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \end{array}\right)$

$$\begin{array}{ccc|c} \frac{-1}{2} & 1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ +\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \end{array}$$

$L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{5}L_2$ $\quad (A_{\frac{-1}{2}}|B_{\frac{-1}{2}}) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{-3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{10} \end{array}\right) = (\tilde{A}_{\frac{-1}{2}}|\tilde{B}_{\frac{-1}{2}})$

$$\begin{array}{ccc|c} 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{10} \\ \hline 0 & 0 & 0 & \frac{3}{10} \end{array}$$

- On écrit le système $(S'_{\frac{-1}{2}})$: $\tilde{A}_{\frac{-1}{2}} \cdot X = \tilde{B}_{\frac{-1}{2}}$

$$(S'_{\frac{-1}{2}}) \begin{cases} x - y + z = 1 \\ \frac{5}{2}y - \frac{5}{2}z = \frac{-3}{2} \\ 0 = \frac{3}{10} \end{cases}$$

et d'après la 3ème équation: $0 = \frac{3}{10}$!, on conclut que $(S_{\frac{-1}{2}})$ n'admet aucune solution.

P24

Ex. 8 (Rattrapage 2020)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

1) * Calculer A^2 et A^3 :

- $A^2 = A.A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 8 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & -4 & -3 \end{pmatrix}$

- $A^3 = A^2 . A = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 8 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & -4 & -3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 10 & 14 \\ 2 & 5 & 8 \\ -2 & -4 & -7 \end{pmatrix}$

* Vérifier que $-A^3 + A^2 + A - I_3 = 0_3$.

$$-A^3 + A^2 + A - I_3 = \begin{pmatrix} -3 & -10 & -14 \\ -2 & -5 & -8 \\ 2 & 4 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 8 & 8 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & -4 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3.$$

2) Montrer que A est inversible.

On a $-A^3 + A^2 + A - I_3 = 0_3$ d'où $-A^3 + A^2 + A = I_3$

d'où $A.(-A^2 + A + I_3) = I_3$ et $(-A^2 + A + I_3).A = I_3$

Donc il existe une matrice $B = -A^2 + A + I_3$ telle que :

$A.B = B.A = I_3$

Donc A est inversible et $A^{-1} = B = -A^2 + A + I_3$.

P25

* L'inverse A^{-1} :

$$A^{-1} = -A^2 + A + I_3 = \begin{pmatrix} -1 & -8 & -8 \\ 0 & -5 & -4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -6 & -2 \\ 2 & -3 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

3) Retrouver A^{-1} par la méthode des cofacteurs

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot {}^t(\mathrm{com}(A))$$

- On a $\det(A) = -2(8-6) - 3(3-4) = (-2)(2) - 3.(-1) = \boxed{-1}$

- Et on a $\mathrm{com}(A) = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 2 \\ 6 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

D'où $^t(\mathrm{com}(A)) = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 2 \\ -2 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$

- Donc $A^{-1} = \dfrac{1}{-1} \begin{pmatrix} -3 & 6 & 2 \\ -2 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -3 & 6 & 2 \\ -2 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -2 \\ 2 & -3 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

4) Resoudre le système (S) : $A.X = B$ où $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

On a trouver que A est inversible, d'où (S) est de Cramer, donc il admet une solution unique :

$$X^* = A^{-1}.B = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -2 \\ 2 & -3 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-12+2 \\ 2-6+0 \\ -2+8-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Donc $S = \{(-7, -4, 5)\}$.