Université Saad Dahleb Blida 1 — Première année LMD TC-ST
Module: Maths 2 — 2022-2023

Série N3: Matrices et Systèmes linéaires

Exercice 1: Soient les matrices suivantes:

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\-2&0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2&-3&2\\0&1&1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}-2&-4\\4&0\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}3&-2\\1&0\\7&-3\end{pmatrix}\text{ et } E=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-2&1&2\\3&-1&-1\end{pmatrix}.$$

1. Calculer, si cela est possible: $A-2C,\ B+C,\ A\times C,\ B\times D,\ D\times E$ et $B\times E$.
2. Calculer les matrices: $(2A+C)^T,\ B^T+D$ et E^2-E+6I_3 où $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.
3. Soit la matrice $G=\begin{pmatrix}2&1&0\\-3&-1&1\\1&0&-1\end{pmatrix}$. Montrer que $G^3=0_3$ où $0_3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.
4. Soit la matrice $F=E^2-E+6I_3$.
   - Calculer $E\times F$ et $F\times E$. Que peut-on conclure?
   - En déduire E^{-1} l'inverse de E.

Exercice 2:

1. Calculer le déterminant de chacune des matrices suivantes:
$$A=\begin{pmatrix}3&-2\\-1&0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-1&-3&1\\0&1&-2\\-2&-1&1\end{pmatrix}\text{ et } C=\begin{pmatrix}-2&3&-1\\-1&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}.$$
2. En déduire $det(B^2)$ et $det(B\times C)$ les déterminants des matrices B^2 et $B\times C$ respectivement.
3. Les matrices $A,\ B$ et C sont inversibles? Justifier votre réponse.
4. En utilisant le déterminant, calculer le rang de chacune des matrices A, B et C.
5. Mettre les matrices B et C sous leurs forme échelonnée.
6. Retrouver $rg(B)$ et $rg(C)$ les rangs des matrices B et C respectivement.

Exercice 3: Soit $A_m=\begin{pmatrix}1&-m&1\\2&3&3\\m&1&m\end{pmatrix}$ une matrice avec $m\in\mathbb{R}$.

1. En utilisant le déterminant, trouver les valeurs de m pour que A_m soit inversible.
2. Vérifier que A_1 est inversible, puis calculer A_1^{-1} par la méthode de cofacteurs.
3. Montrer que $A_0^3-4A_0^2+I_3=0_3$, puis en déduire A_0^{-1} l'inverse de A_0 et $det(A_0^{-1})$.

Exercice 4: Soient $\alpha\in\mathbb{R}$ et B_α une matrice définie par:

$$B_\alpha=\begin{pmatrix}0&-1&3\\-\alpha&0&\alpha\\\alpha&1&-5\alpha\end{pmatrix}$$

1. Mettre la matrice B_α sous leur forme échelonnée, puis en déduire que $|B_\alpha|=\alpha(4\alpha-3)$.
2. Discuter suivant les valeurs de α, le rang de B_α.
3. En utilisant le rang, vérifier que la matrice B_{-1} est inversible.
4. En utilisant la méthode de Gauss-Jordan, montrer que $B_{-1}^{-1}=\dfrac{1}{7}\begin{pmatrix}1&8&1\\-4&3&3\\1&1&1\end{pmatrix}$.

Exercice 5: On considère le système linéaire suivant

$$(S)\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & 2z & = & 3 \\ x & + & 2y & + & z & = & 1 \\ 2x & + & y & + & z & = & 0 \end{array}\right.$$

1. Ecrire (S) sous la forme matricielle: $AX = B$.
2. Résoudre le système homogène (S^h) associé à (S) par l'échelonnement.
3. (S) est de Cramer? Justifier votre réponse.
4. En déduire que A est inversible, puis calculer A^{-1} par l'échelonnement.
5. Résoudre le système (S) par la méthode de l'inverse.
6. Retrouver la solution X^* du système (S) par la méthode des déterminants.

Exercice 6:

Soient $(S_1)\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & = & -1 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & = & 3 \end{array}\right.$ et $(S_2)\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & -1 \\ -3x_1 & + & 3x_2 & - & 3x_3 & = & 3 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 3 \end{array}\right.$ deux systèmes.

1. Calculer $rg(S_1)$ le rang du système (S_1).
2. (S_1) est de cramer? Justifier votre réponse.
3. Résoudre les systèmes (S_1) et (S_2).

Exercice 7:

Soit (S_α) un système linéaire défini par

$$(S_\alpha)\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & -y & + & z & = & 1 \\ 2x & + & -\alpha y & + & \alpha z & = & \alpha+1 \\ \alpha x & + & y & + & 2\alpha z & = & \alpha \end{array}\right. , \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

1. Ecrire le système (S_α) sous une forme matricielle $A_\alpha X = B_\alpha$.
2. Pour quelles valeurs de α, A_α est inversible?
3. Vérifier que A_1 est inversible puis calculer A_1^{-1} l'inverse de A_1 par la méthode de cofacteurs.
4. Résoudre les systèmes (S_1), (S_2) et $(S_{\frac{-1}{2}})$.

Exercice 8: (Examen de rattrapage 2020)

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 et A^3 puis vérifier que: $-A^3 + A^2 + A - I_3 = 0_3$.
2. En utilisant la question 1, montrer que A est inversible puis calculer son inverse A^{-1}.
3. Retrouver A^{-1} par la méthode des cofacteurs.
4. Résoudre le système (S) : $AX = B$ où $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.