UNIVERSITE SAAD DAHLAB BLIDA1

DEPARTEMENT DE TRONC COMMUN ANNEE 2022-2023

SERIE N° 4

TRAVAIL ET ENERGIE

Exercice N°1:

Un point matériel de masse **M**, se déplace dans un plan **(z=0)** sous l'action d'une force :

$$\vec{F} = (x - ay)\vec{\imath} + (3y - 2x)\vec{\jmath}$$

1. Calculer le travail nécessaire pour déplacer le point matériel suivant la droite joignant le point **O(0,0)** à **A(2,4)** en fonction du paramètre **a**.
2. Même question suivant le trajet $O\acute{A}A$, $\acute{A}$ **étant la projection de A sur (OX).**
3. Pour quelle valeur de **a**, $\vec{F}$ dérive d'un potentiel $E_p(x, y)$?
4. Déterminer l'expression de cette énergie potentielle $E_p(x, y)$.

Exercice N°2:

Soit la force définie par : $\vec{F} = (3x^2 + 2a^2y^2)\vec{\imath} + 2a.x.y.\vec{\jmath}$,

Où **a** est un paramètre réel différent de zéro.

1. Déterminer les valeurs de **a** pour lesquelles la force $\vec{F}$ dérive d'un potentiel.
2. Déduire l'expression de ce potentiel $E_p(x, y)$l
3. Pour **a=0.5,** calculer le travail de $\vec{F}$ si le point d'application se déplace du point **A(1,0)** au point **B(2,1)**, le long de deux chemins différents :

   a) Suivant la ligne **ABC** avec **C(1,1)**.

   b) Le long de la droite qui joint les deux points **A** et **B**. $\vec{F}$ est-elle conservative ?

Exercice N°3:

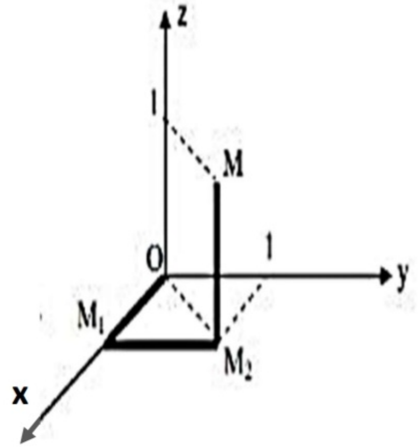
Calculer le travail de la force : $\vec{F} = (x^2 + y^2)\vec{\imath} + x.z.\vec{\jmath} + x.y.\vec{k}$

Dont le point d'application se déplace de l'origine **O** au point **M(1,1,1)**, le long de deux chemins différents :

A. Suivant la ligne brisée **OM_1M_2M** avec **$M_1(1,0,0)$** et **$M_2(1,1,0)$**.

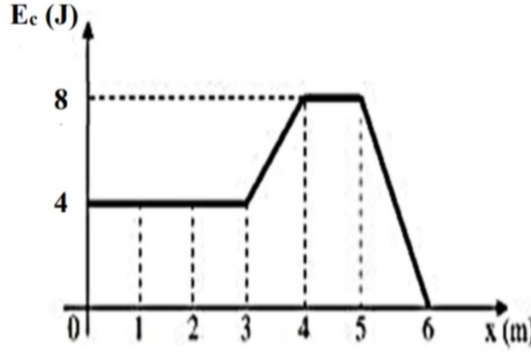
B. Le long de la courbe **(C)** dont les équations paramétriques sont : **x=t** ; **y=t²** et **z=t.**

- $\vec{F}$ est-elle conservative ?



Exercice N°4:

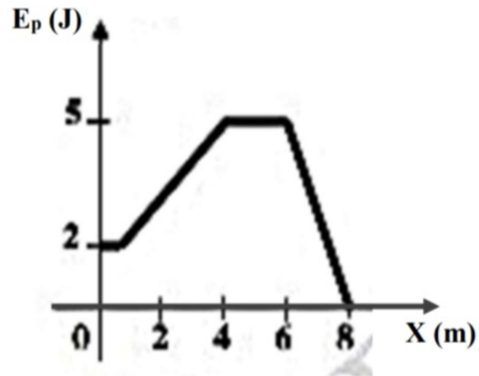
Un corps de masse **m=1kg**, initialement en **O**, se déplace sur l'axe Ox sous l'effet d'une force conservative $\overrightarrow{F}$. La figure ci-contre, illustre la variation de l'énergie cinétique **Ec** du corps en fonction de **x**. Si l'énergie totale initiale en **O** est E_{T0}**=100J** :



1. Calculer l'énergie potentielle initiale du corps.
2. Calculer le travail effectué par la force $\vec{F}$ entre **x=0m** et **x=6m**.
3. Tracer les graphes représentants $E_p(x)$ et $E_T(x)$.
4. Tracer le graphe représentant **F(x)**, puis retrouver la valeur du travail de $\vec{F}$ entre **x=0m** et **x=6m**.

Exercice N°5:

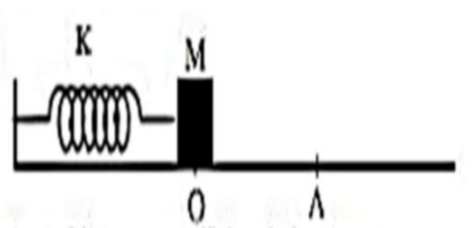
Un corps de masse **M=1kg** se déplace sur l'axe OX à partir de l'origine **O**, avec une vitesse initiale V_0**=6m/s**. la figure ci-contre donne la variation de l'énergie potentielle E_p du corps en fonction de **x**. On suppose que le mouvement s'effectue sous l'action d'une force conservative $\overrightarrow{F}$.



1. Calculer l'énergie totale du corps.
2. Calculer le travail W effectué par $\vec{F}$ pour le déplacement : **x=0m** à **x=8m**.
3. Tracer le graphe de la variation de **F** en fonction de **x**. puis retrouver la valeur de W.

Exercice N°6:

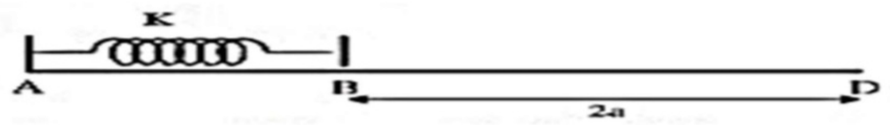
Un cube de masse **M**, est relié à un ressort de raideur **K** et peut glisser sur un plan horizontal. On l'écarte de **OA=a** de sa position d'équilibre **O**.



1. Déterminer le travail de la force de rappel lorsque **M** revient de **A** vers **O**. Quelle est la vitesse de **M** en **O**.
2. On suppose que le glissement de **M** sur le plan se fait avec un coefficient de frottement **μ**, quelle est la nouvelle vitesse de **M** en **O**.

Exercice N°7:

Dans un dispositif de la figure ci-dessous, un ressort de raideur **K=100N/m** est fixé horizontalement au point **A** de la piste **ABD**. L'extrémité libre du ressort non étiré **B** se trouve à une distance **2a** du point **D** de la piste. (**a=1m**)

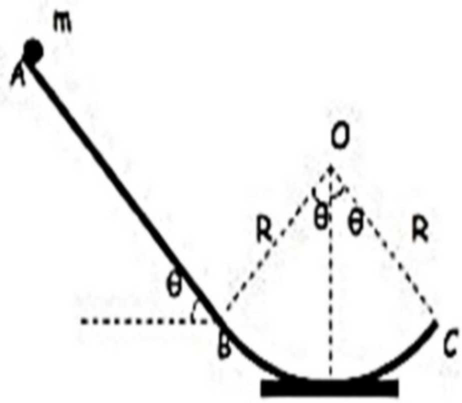


On place un cube de masse **m=0.2kg** contre l'extrémité **B** du ressort (sans le fixé) puis on comprime le système (ressort, cube) avant d'abandonner le cube sans vitesse initiale.

1. Sachant que les coefficients de frottement statique et dynamique entre le cube et la piste **ABD** sont **μs=0.5** et **μd=0.2**. calculer la compression maximale **Xmax** du ressort qui laisse le cube au repos après avoir été abandonné.
2. Déterminer pour une compression de **x** de **10cm**, la vitesse du cube au point **C** milieu de **BD**, (**BC=CD=a**).
3. Calculer la déformation **X2** nécessaire pour que le cube arrive en **D** avec une vitesse nulle.

Exercice N°8: (Devoir de maison)

Un tremplin est constitué d'un plan incliné **AB** de longueur **L** faisant un angle **θ** avec l'horizontale, complété par un arc de cercle de rayon **R**, symétrique par rapport à la verticale, figure ci-contre. Le point le plus bas est en contact avec le sol. Un corps de masse **m** part du haut du tremplin en **A** sans vitesse initiale et glisse sans frottement.



1. Calculer les vitesses du corps, aux points **B** et **C** du tremplin. Conclusion.
2. Montrer que dès que le corps quitte le tremplin la composante horizontale de sa vitesse est constante. Que vaut cette vitesse ?
3. Déterminer l'équation de la trajectoire du corps et déduire la hauteur maximale atteinte.

Serie N° 4

Exo 1 : $\vec{F} \begin{vmatrix} F_x = x - ay \\ F_y = 3y - 2x \end{vmatrix} \quad \vec{dl} \begin{vmatrix} dx \\ dy \end{vmatrix}$

$\cdot W_O^A = \int \vec{F}\,\vec{dl} = \int_O^A F_x\,dx + F_y\,dy$

$= \int (x - a\underbrace{y}_{2x})\,dx + \int (3\underbrace{y}_{2x} - 2x)\,\underbrace{dy}_{2dx}$

$= \int_0^2 (x - 2ax)\,dx + (6x - 2x).2dx$

$\boxed{W_O^A} = \int_0^2 (9x - 2ax)\,dx = \left[\frac{9x^2}{2} - ax^2\right]_0^2 = \frac{9\times 4}{2} - 4a = \boxed{18 - 4a}$

. la droite (OA) : $\boxed{y = ax = 2x} \rightarrow \cancel{\frac{dy}{dx}} = 2$

$\hookrightarrow \frac{dy}{dx} = 2 \rightarrow \boxed{dy = 2dx}$

. du p^t O → A : x varie 0 → 2

$W_0^{A'} = ?$ $\quad W_0^{A'} = \int_0^{A'} (x - ay)\,dx + \int_0^{A'} (3y - 2x)\,dy$ $\quad$ de $O \longrightarrow A'$:

$y = 0 \longrightarrow dy = 0$

x varie de $0 \longrightarrow 2$

$$\boxed{W_0^{A'} = \int_0^2 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big]_0^2 = 2\,J}$$

$\cdot\ W_{A'}^{A} = ?$ $\quad W_{A'}^{A} = \int_{A'}^{A} (x - ay)\,dx + \int (3y - 2x)\,dy$ $\quad$ de $A' \longrightarrow A$

y varie de $0 \longrightarrow 4$

$x = 2 \longrightarrow dx = 0$

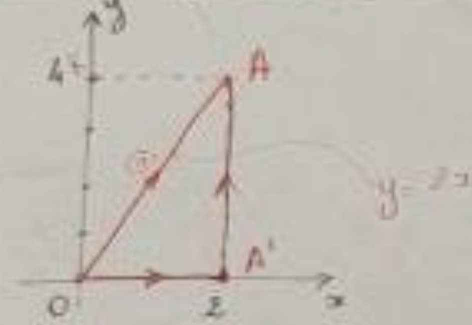
$$W_{A'}^{A} = \int_0^4 (3y - 4)\,dy = \frac{3}{2}y^2 - 4y\Big]_0^4$$

$$\boxed{W_{A'}^{A} = \frac{3\times 16}{2} - 4\times 4 = 24 - 16 = 8\,J}$$

$$W_0^{A'A} = W_0^{A'} + W_{A'}^{A} = \boxed{2 + 8 = 10\,J}$$

Serie N°: 4

Exo 1: $\vec{F}\begin{cases}F_x = x - ay\\ F_y = 3y - 2x\end{cases}$ $\quad d\vec{l}\begin{cases}dx\\ dy\end{cases}$



. $W_0^{A'} = ?$

3) Pour quelle valeur de "a" $\vec{F}$ derive d'un potentiel:

1ère méthode.

$\vec{F}$ derive d'un potentiel ($\vec{F} = -\vec{grad}E_p$) $\Leftrightarrow$ W ne depend pas du chemin suivi

$$W_0^{A} = W_0^{A'A}$$

$$18 - 4a = 10$$

$$18 - 10 = 4a \rightarrow \boxed{a = 2}$$

$\boxed{W_0^{A'A} = \ldots}$

2ème méthode

. Si $\vec{F}$ derive d'un potentiel $\Leftrightarrow \vec{Rot}\,\vec{F} = \vec{0}$

$$\vec{Rot}\,\vec{F} = \vec{\nabla}\wedge\vec{F} = \begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z\\ (x-ay) & (3y-2x) & 0\end{vmatrix} = \left[\frac{\partial 0}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial z}(y-2x)\right]\vec{i} - \left[\frac{\partial 0}{\partial x} - \frac{\partial(x-ay)}{\partial z}\right]\vec{j} + \left[\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}(3y-2x)}_{-2} - \frac{\partial}{\partial y}(x \ldots\right.$$

$0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -2 - (-\ldots$

Exo 1 soit $\vec{F} \begin{cases} F_x = (x - ay) \\ F_y = (3y - 2x) \end{cases}$

1) Pour quelle valeur [illegible] $\vec{F}$ dérive d'un potentiel.

1ère méthode : le travail ne dépend pas du chemin suivi $W_1^A = W_2^{AB} \rightarrow \boxed{a = 2}$

2ème méthode : $\vec{Rot}\,\vec{F} = \vec{0} = \vec{\nabla} \wedge \vec{F} \rightarrow \boxed{a = 2}$

4) $E_p(x,y) = ?$ $\vec{F} \begin{cases} F_x = x - 2y \\ F_y = 3y - 2x \end{cases}$

$(2x)$

$\vec{F} = -\vec{grad}\,E_p$: $F_x \vec{i} + F_y \vec{j} = -\frac{\partial E_p}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial E_p}{\partial y}\vec{j}$

$\begin{cases} F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x} \; (1) \\ F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y} \; (2) \end{cases}$ $\rightarrow \partial E_p = -F_x \partial x \rightarrow dE_p = -F_x dx$

$-\int dE_p = \int (x - 2y)\,dx$

$E_p = -\frac{x^2}{2} + 2yx + C$; (3) $C = C(y)$

$(2) \rightarrow \overbrace{3y - 2x}^{F_y} = -\frac{\partial}{\partial y}\left[-\frac{x^2}{2} + 2yx + C\right]$

$3y - 2x = -\left[0 + 2x + C'(y)\right]$

$3y - 2x = -2x - C'(y)$

$C'(y) = -3y \rightarrow C(y) = -\frac{3}{2}y^2 \rightarrow \boxed{E_p = -\frac{x^2}{2} + 2yx - \frac{3}{2}y^2}$

Exo :

$\vec{F} \begin{cases} F_x = 3x^3 + 2a^2y^2 \\ F_y = 2axy \end{cases}$ $a \neq 0$

$a = ? \Rightarrow \vec{\mathrm{rot}}\,\vec{F} = \vec{0}$

1) si $\vec{F}$ dérive d'un potentiel

$$\vec{\mathrm{Rot}}\,\vec{F} = \vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \vec{0}$$

$$= \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\vec{i} - \left(\frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial z}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\vec{k} = \vec{0}$$

$$0\vec{i} + 0\vec{j} + (2ay - 4a^2y)\vec{k} = \vec{0}$$

$$\underbrace{2ay}_{\neq 0}\underbrace{(1-2a)}_{=0} = 0 \rightarrow \boxed{a = \frac{1}{2} = 0{,}5}$$

2) $E_p(x,y) = ?$ si $\vec{F} \begin{cases} F_x = 3x^2 + \frac{y^2}{2} \\ F_y = xy \end{cases}$ $\vec{F} = -\vec{\nabla}E_p$ $\begin{cases} F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x} & (1) \\ F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y} & (2) \end{cases}$

(1) $F_x = 3x^2 + \frac{y^2}{2} = -\frac{\partial E_p}{\partial x}$

$\hookrightarrow \int dE_p = \int\left(-3x^2 - \frac{y^2}{2}\right)dx \rightarrow \boxed{E_p = -x^3 - \frac{y^2}{2}x + C}$ avec $C = C(y)$

(2) $F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y}$

$xy = -\frac{\partial}{\partial y}\left[-x^3 - \frac{y^2}{2}x + C\right]$

$xy = -[0 - yx + C']$

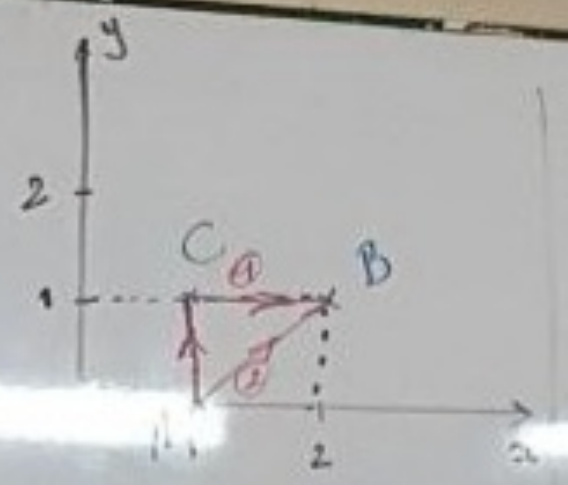
$xy = yx + C' \rightarrow C' = 0$

$\rightarrow C = C = C^{te}$

$\boxed{E_p = -x^3 - \frac{y^2}{2}x + C}$

Exo : $E_p(x,y) = -x^3 - \frac{y^2}{2}x + C$

$\vec{F}$ dérive d'1 potentiel $\Leftrightarrow$ $W_A^B = W_A^{CB}$



$\cdot\ W_A^B = -\Delta E_p = -\overbrace{[\qquad]}^{\Delta E_p}$

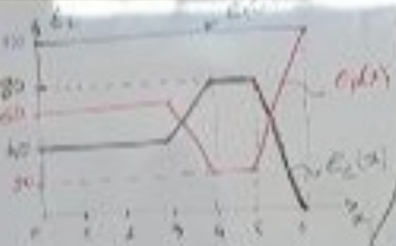
$B\left|\begin{matrix}2\\1\end{matrix}\right. \quad A\left|\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right.$

$W_A^B = -\left[E_{p_B}(2,1) - E_{p_A}(1,0)\right]$

$= -\left[\left(-2^3 - \frac{2}{2}\cancel{C}\right) - \left(-1 - 0 + \cancel{C}\right)\right] = \boxed{8\,J}$

$-9 \quad +1$

$W_A^B = W_A^{CB} = 8\,J$



$E_{T_0} = 100\,J$

($\vec{F}$ conservative)

1) $E_{P_0} = ?$

$\vec{F}$ conservative $\Leftrightarrow E_T = C^{te}$

$\boxed{E_T = E_{T_0} = 100\,J}$

$\boxed{E_T = E_c + E_p}$ au pt $x=0$ $E_{T_0} = E_{c_0} + E_{p_0}$

$\boxed{E_{P_0} = E_{T_0} - E_{c_0} = 100 - 40 = 60\,J}$

2) $W_{x=0}^{x=6} = W_0^6 = \Delta E_c\Big|_{x=0}^{x=6}$

$\boxed{W_0^6 = E_c(x=6) - E_c(x=0) = 0 - 40 = -40\,J}$

b) Tracer $F(x)$. $\vec{F} = -\vec{\mathrm{grad}}\,E_p$

$F_x\vec{i} = -\frac{\partial E_p}{\partial x}\vec{i} = -\frac{dE_p}{dx}\vec{i}$

$F_x = -\frac{dE_p}{dx} = -$ la pente $= -\mathrm{tg}\,\alpha$

$x \in [0, 3]$ $\mathrm{tg}\,\alpha = 0 \rightarrow \boxed{F_x = 0}$

$x \in [3, 4]$. $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{20 - 60}{4 - 3} = -40 \rightarrow \boxed{F_x = 40\,N}$

$x \in [4, 5]$: $\mathrm{tg}\,\alpha = 0 \longrightarrow \boxed{F_x = 0}$

$x \in [5, 6]$ $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{100 - 20}{6 - 5} = 80\,N \rightarrow \boxed{F_x = -80\,N}$

$W_0^6 = ?$ $\boxed{W_0^6 = \int \vec{F}\,d\vec{x} = \int_{x=0}^{6} F(x)\,dx = \sum \text{surfaces} = 40 - 80 = -40\,J}$