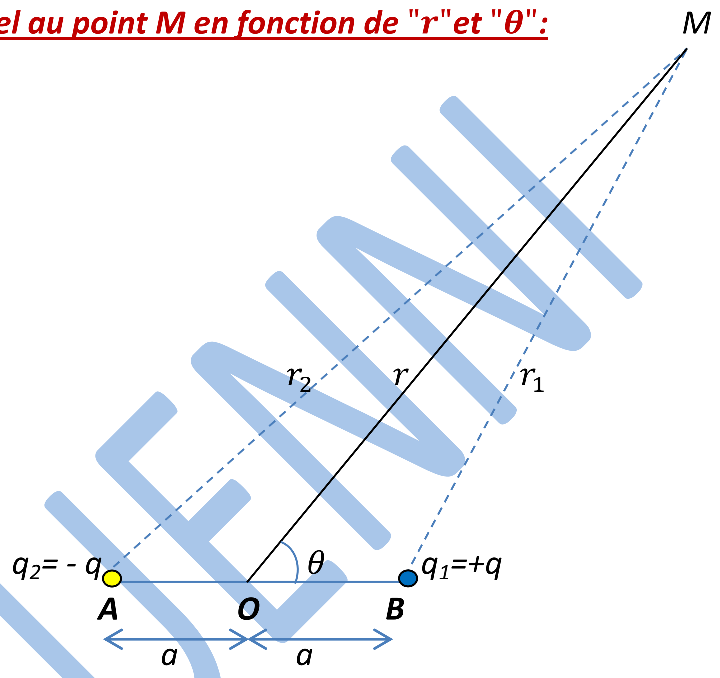
3.4/ Le dipôle électrique :

3.4.1/ Définition :

Le dipôle électrique est un ensemble de deux charges $+q$ et $-q$ maintenues à une distance constante "$2a$". On veut calculer le champ et le potentiel créé par ces deux charges en un point M très éloigné $\left(\left|\overrightarrow{OM}\right| = r >> 2a\right)$.

3.4.2/ Détermination du potentiel au point M en fonction de "r" et "θ":



$$V_M = V_A + V_B = \frac{K(-q)}{r_2} + \frac{Kq}{r_1}$$

$$= K.q\left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right] = K.q\left[\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}\right]$$

Puisque : $\begin{cases} r_1 = r - a\cos\theta \\ r_2 = r + a\cos\theta \end{cases}$

d'où : $\begin{cases} r_2 - r_1 = (r + a\cos\theta) - (r - a\cos\theta) = 2a\cos\theta \\ r_1.r_2 = (r - a\cos\theta).(r + a\cos\theta) = r^2 - a^2\cos^2\theta \approx r^2 \end{cases}$

alors le potentiel V devient :

$$V_M = K.q\left[\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}\right] = K\,\frac{2a.q.\cos\theta}{r^2}$$

Si on pose le moment dipolaire de la molécule $p = 2a.q$ *, alors le potentiel devient:*

$$\boxed{V_M = \frac{K.p.\cos\theta}{r^2}}$$

3.4.3/ Détermination du module du champ $\vec{E}$ au point M en fonction de "r" et "θ":

En connaissant le potentiel V au point M, on peut déduire le champ électrique $\vec{E}$ en utilisant la relation $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$

Nous décomposons la relation $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$ en coordonnées polaires :

$$E_r\vec{u}_r + E_\theta\vec{u}_\theta = -\frac{\partial V}{\partial r}\vec{u}_r - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{u}_\theta$$

C'est-à-dire :
$$\begin{cases} E_r = -\dfrac{\partial V}{\partial r} \\ E_\theta = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V}{\partial \theta} \end{cases}$$

- $E_r = -\dfrac{\partial V}{\partial r} = -K.p.cos\theta.\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{1}{r^2}\right) \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{E_r = \dfrac{2K.p.cos\theta}{r^3}}}$

- $E_\theta = -\dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial V}{\partial \theta}\right) = -\dfrac{1}{r}.\dfrac{K.p}{r^2}.\dfrac{\partial}{\partial \theta}(cos\theta) \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{E_\theta = \dfrac{K.p.sin\theta}{r^3}}}$

Finalement le module du champ $\vec{E}$ sera :

$$E = \sqrt{E_r^2 + E_\theta^2} = \frac{K.p}{r^3}\sqrt{4cos^2\theta + sin^2\theta}$$

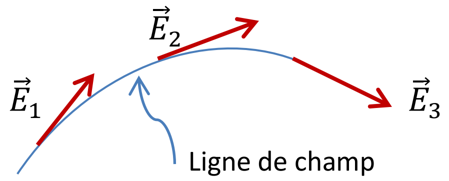
Comme : $sin^2\theta = 1 - cos^2\theta$

$$\Rightarrow \boxed{\boldsymbol{E = \frac{K.p}{r^3}\sqrt{3cos^2\theta + 1}}}$$

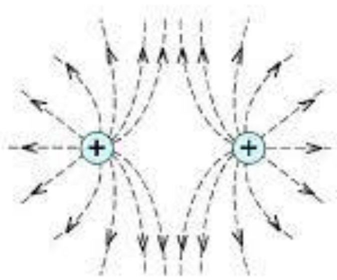
3.5/ Lignes de champ et surfaces équipotentielles :

3.5.1/ Les lignes de champ :

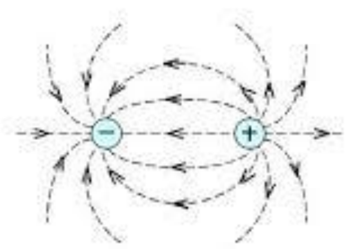
Les lignes de champ sont des courbes orientées tangentes aux vecteurs champs électriques.



Les deux figures ci-dessous montrent les lignes de champ de deux charges ponctuelles de même signe et deux charges ponctuelles de signes opposés:



Lignes de champ de 2 charges de même signe



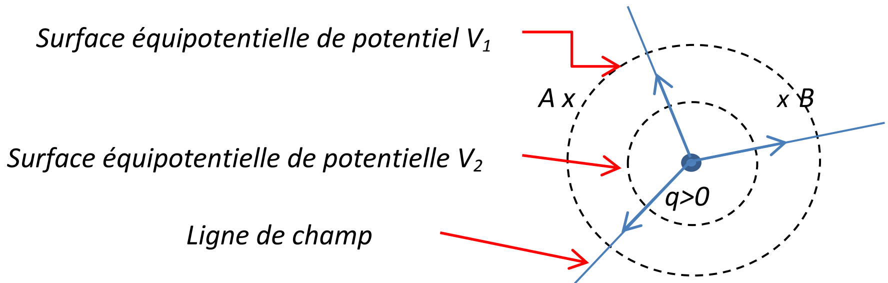
Lignes de champ de 2 charges de signes opposés

3.5.2/ Les surfaces équipotentielles:

Une surface équipotentielle est une surface où le potentiel est identique (le même) en tout point :

$$V = \frac{K.q}{r} \qquad si \quad r = C^{ste} \;\rightarrow\; V = C^{ste} \quad (V_A = V_B)$$

Les points A et B appartiennent à la même surface équipotentielle.



Dans ce dessin, on a $V_A = V_B = V_1 < V_2$

<u>Remarques :</u>

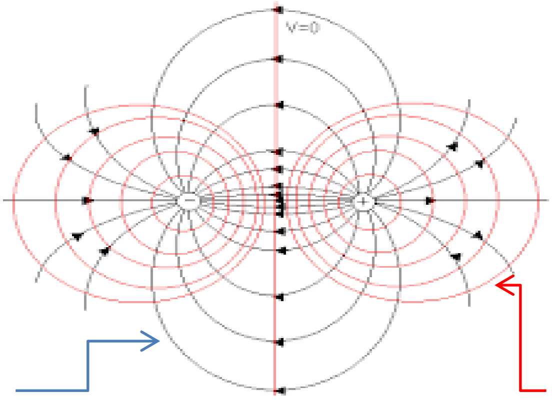
- Les équipotentielles sont perpendiculaires aux lignes de champ.

- Le champ est orienté du potentiel le plus élevé vers le potentiel le moins élevé.

- Dans le cas des conducteurs de différentes formes, les équipotentielles prennent les formes de ces derniers.

<u>3.5.3/ Exemples :</u>

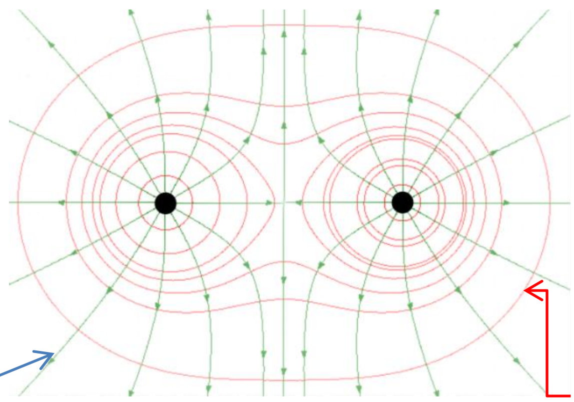
- *Lignes de champ et surfaces équipotentielles de deux charges ponctuelles de signes opposés :*



Lignes de champs

les équipotentielles

- *Lignes de champ et surfaces équipotentielles de deux charges ponctuelles de même signe :*



Lignes de champs

les équipotentielles

3.6/ Travail et énergie :

3.6.1/ Travail de la force électrostatique :

Le travail élémentaire "dW" de la force "$\vec{F}$" lors d'un déplacement élémentaire "dl" de la charge "q" , est donné par :

$$dW = \vec{F}.\vec{dl} = q.\vec{E}.\vec{dl} = -q.dV$$

Le travail total pour faire déplacer la charge d'un point A au point B sera :

$$W_A^B = \int_A^B dW = -q\int_{V_A}^{V_B} dV = -q(V_B - V_A)$$

$$\boxed{W_A^B = q(V_A - V_B)}$$

avec : $V_A - V_B$: est la différence de potentiel (d.d.p) entre A et B.

3.6.2/ Energie potentielle (d'une charge ponctuelle) :

La relation entre le travail et l'énergie potentielle est donnée par : (voir physique1)

$$W_A^B = -\Delta E_p$$

$$-q(V_B - V_A) = -(E_{p_B} - E_{p_A}) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} E_{p_A} = qV_A \\ E_{p_B} = qV_B \end{cases}$$

donc on peut déduire que l'énergie potentielle d'une charge "q" dans un champ de potentiel "V" est données par :

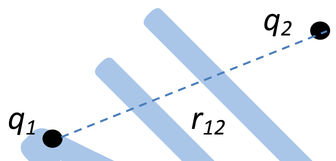
$$\boxed{E_p = q.V}$$

3.6.3/ Energie interne d'un système de charge ponctuelle :

- <u>Energie interne de deux charges ponctuelles :</u>

L'énergie interne de deux charges est définie comme le travail qu'il faut fournir par un opérateur pour rassembler les deux charges, initialement sans interaction (c.à.d rapprocher la charge q_2 d'une position infiniment éloignée à la charge q_1). Cette énergie est donnée par :

$$\boxed{U = \frac{K.q_1.q_2}{r_{12}}}$$

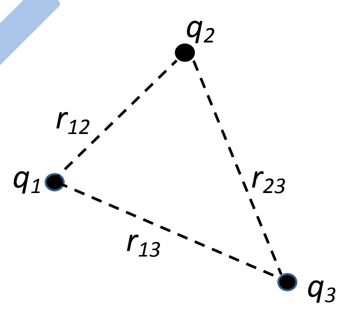


Avec : U est l' énergie interne du système formé par les deux charges q_1 et q_2 et r_{12} est la distance les séparant.

- <u>Energie interne d'un système de 3 ou plusieurs charges ponctuelles :</u>

En prenant un cas de 3 charges ponctuelles q_1, q_2 et q_3 l'énergie interne du système s'écrit :

$$\boxed{U = \frac{K.q_1.q_2}{r_{12}} + \frac{K.q_2.q_3}{r_{23}} + \frac{K.q_1.q_3}{r_{13}}}$$



<u>Attention :</u> les charges seront prises en valeurs algébriques (avec leurs signes)

- D'une façon générale, l'énergie interne d'un système de n charges s'écrit :

$$U = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} . \sum_{j=1}^{n} \frac{K.q_i.q_j}{r_{ij}}\right)_{i \neq j} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i.V_i$$

r_{ij} : distance entre la charge q_i et la charges q_j .

4/ DETERMINATION DU CHAMP ELECTRIQUE "$\vec{E}$" ET DU POTENTIEL "V" DANS LE CAS D'UNE DISTRIBUTION CONTINUE DE CHARGES :

4.1/ Détermination du champ électrique $\overrightarrow{E}$:

Pour déterminer le champ électrique $\vec{E}$ créé par un corps chargé d'une façon continue, on décompose cette distribution continue en un ensemble d'éléments discrets auxquels sont associées des charges élémentaires (dq) et on détermine le champ correspondant $(d\vec{E})$:

4.1.1/ Détermination du champ $\vec{E}$, dans le cas d'une distribution de charge linéique (linéaire) :

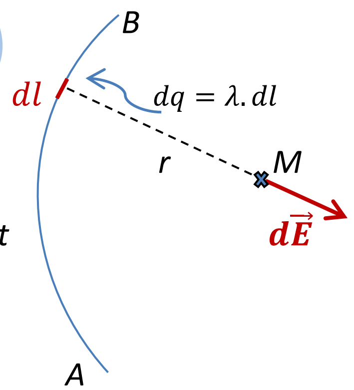
Soit un fil de longueur $AB = L$ qui porte une charge q, de densité linéaire de charge "λ" → la charge totale s'écrit :

$$\boxed{\boldsymbol{q = \lambda . L}}$$

(la charge élémentaire $\boldsymbol{dq = \lambda . dl}$) .

Détermination du champ $\vec{E}$:

Un petit élément du fil de longueur $\boldsymbol{dl}$ contient une petite charge $\boldsymbol{dq}$ qui crée au point M un petit champ $\boldsymbol{d\vec{E}}$ tel que :



$$\boxed{\boldsymbol{d\vec{E} = \frac{K.dq}{r^2}\vec{u} = \frac{K.\lambda.dl}{r^2}\vec{u}}}$$

alors le champ total créé par le fil AB sera :

$$\boxed{\boldsymbol{\vec{E} = \int d\vec{E} = \int \frac{K.\lambda.dl}{r^2}\vec{u}}} \longrightarrow \vec{E}\left|\begin{array}{l} E_x = \int dE_x = \cdots \\ E_y = \int dE_y = \cdots \end{array}\right.$$

4.1.2/ Détermination du champ $\vec{E}$, dans le cas d'une distribution surfacique de charge:

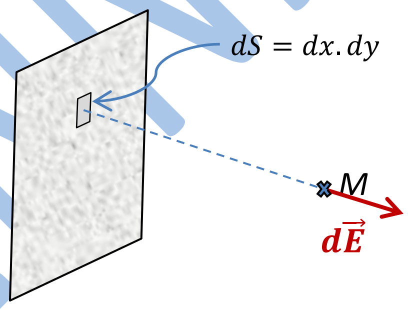
*Soit une plaque de surface **S** chargée avec une densité surfacique de charge "$\boldsymbol{\sigma}$" → la charge totale de cette plaque s'écrit :*

$$\boxed{q = \sigma . S} \qquad \text{(avec la charge élémentaire } \boldsymbol{dq = \sigma . dS}\text{)}$$

Détermination du champ $\vec{E}$ créé par cette plaque :

L'élément de surface dS contient une charge $dq = \sigma dS$

qui crée au point M un champ $d\vec{E}$ donné par :



$$\boxed{d\vec{E} = \frac{K.dq}{r^2}\vec{u} = \frac{K.\sigma.dS}{r^2}\vec{u} = \frac{K.\sigma.dxdy}{r^2}\vec{u}}$$

→ *le champ totale créé par la plaque sera :*

$$\boxed{\vec{E} = \iint d\vec{E} = \iint \frac{K.\sigma.dxdy}{r^2}\vec{u}} \longrightarrow \vec{E}\left|\begin{array}{l} E_x = \iint dE_x = \cdots \\ E_y = \iint dE_y = \cdots \\ E_z = \iint dE_z = \cdots \end{array}\right.$$

Remarque :

En coordonnées cartésiennes $dS = dx.dy$
En coordonnées polaires $dS = r.dr.d\theta$

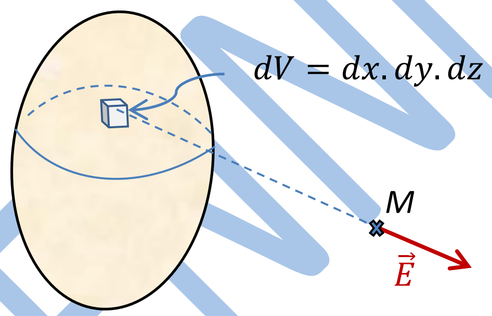
4.1.3/ Détermination du champ $\vec{E}$, dans le cas d'une distribution volumique de charge:

*Soit un corps de volume **V** chargé avec une densité volumique de charge "$\boldsymbol{\rho}$"*
→ *la charge totale de ce volume s'écrit :*

$$\boxed{\boldsymbol{q = \rho . V}} \qquad \textit{(avec la charge élémentaire } \boldsymbol{dq = \rho . dV}\textit{)}$$

<u>*Détermination du champ $\vec{E}$ créé par ce corps :*</u>

L'élément de volume dV, contient une charge $dq = \rho . dV$ qui crée au point M un champ :



$$\boxed{\boldsymbol{d\vec{E} = \frac{K.dq}{r^2}\vec{u} = \frac{K.\rho.dV}{r^2}\vec{u} = \frac{K.\rho.dxdydz}{r^2}\vec{u}}}$$

→ *le champ totale créé par ce volume sera :*

$$\boxed{\boldsymbol{\vec{E} = \iiint d\vec{E} = \iiint \frac{K.\rho.dxdydz}{r^2}\vec{u}}} \longrightarrow \vec{E}\left| \begin{array}{l} E_x = \iiint dE_x = \cdots \\ E_y = \iiint dE_y = \cdots \\ E_z = \iiint dE_z = \cdots \end{array} \right.$$

<u>***Exercice :***</u>

Un fil rectiligne (AB) est chargé uniformément le long de sa longueur d'une densité linéique de charge "λ".

1°) Déterminer le champ élémentaire $d\vec{E}$ en un point quelconque de l'espace.

2°) Déduire le champ total $\vec{E}$:

- *a) en un point M quelconque de l'espace ;*
- *b) en un point M appartenant (∈) à la médiatrice du fil (AB) ;*
- *c) en un point M de l'espace pour un fil infini.*

Rép :

1) $d\vec{E}\left| \begin{array}{l} dE_x = \frac{K.\lambda}{a}.cos\theta\ d\theta \\ dE_y = -\frac{K.\lambda}{a}.sin\theta\ d\theta \end{array} \right.$ *2a)* $\vec{E}\left| \begin{array}{l} E_x = \frac{K.\lambda}{a}.[sin\theta_2 - sin\theta_1] \\ E_y = \frac{K.\lambda}{a}.[cos\theta_2 - cos\theta_1] \end{array} \right.$ *2b)* $\vec{E}\left| \begin{array}{l} E_x = \frac{2K.\lambda}{a}sin\theta \\ E_y = 0 \end{array} \right.$

4.2/ Détermination du potentiel électrique :

Le potentiel électrique "V" est un scalaire, il est défini par :

$$dV = -\vec{E}.\overrightarrow{dl}$$

On peut utiliser deux méthodes pour déterminer ce potentiel électrique :

- *Calcul directe de V : Calculer directement le potentiel dV créé par une charge élémentaire, et déduire le potentiel total*

$$V = \int dV = \cdots$$

- *Calcul indirect de V : Calculer le champ $\vec{E}$ et, déduire le potentiel à partir de $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$ ou bien $dV = -\vec{E}.\overrightarrow{dl}$*