UNIVERSITE SAAD DAHLAB DE BLIDA 2021/2022

Département : TCT S.T

Module : Physique 2

SERIE D'EXERCICE N°1

INTERACTION ELECTRIQUE ET ELECTROSTATIQUE

I- LOI DE COULOMB :

Exercice 1 :

On place aux quatre sommets d'un carré ABCD de 10 cm d'arête, deux protons (A et B) et deux électrons (C et D), sachant que $e = 1{,}6.10^{-19}$ C.

- Déterminer la valeur du module de la force F s'exerçant sur l'électron placé en D.

Exercice 2 :

Deux charges ponctuelles positives de même valeurs q sont situées en deux points A et B distants de 2a .Une troisième charge ponctuelle négative (-q) est placée en un point M situé sur la médiatrice du segment qui joint les points A et B.

1) Représenter sur un schéma la force électrique au point M.
2) Déterminer son expression littérale.
3) Pour quelle distance de M par rapport au milieu de AB, cette force est maximale.

II- CALCUL DIRECT DU CHAMP ET DU POTENTIEL :

A/DISTRIBUTION DISCONTINUE DE CHARGES :

Exercice 3 :

Deux charges q et q' sont placées en deux points A et B, distants de 2l, avec q'=3q déterminer le champ électrique :

1. En un point M situé au milieu de AB
2. En un point N situé sur la droite AB à l'extérieure du côté de B à une distance 3l.
3. Montrer qu'il existe entre A et B un point O ou le champ est nul.

Exercice 4 :

Deux charges ponctuelles q et –q sont placées en deux points A et B distants de 2a. On considère les points : P(milieu de AB), M(sur la médiatrice de AB) et N(sur la droite (AB) à l'extérieur, du côté de B). Trouver l'expression du champ électrique E(x) produit par l'ensemble des deux charges, en précisant direction et sens, aux points :

a) M tel que (PM=x).
b) N tel que (PN=x).
c) Que devient $E_M(x)$ et $E_N(x)$ lorsque $x >> a$

B/DISTRIBUTION CONTINUE DE CHARGES :

Exercice 5 :

Une baguette de longueur L courbée en un demi-cercle de rayon R et de centre O porte une charge +q répartie uniformément sur sa longueur.

1. Déterminer le champ électrique E créé par cette répartition au centre O.

2. Que devient l'expression de E si on place en face du premier demi-cercle, une deuxième baguette courbée de même rayon R et de même centre O que la première mais portant une charge –q répartie uniformément sur sa longueur.

Exercice 6 :

Une couronne circulaire limitée par deux cercles concentriques de rayon a et R ($a<R$) porte une charge +q uniformément répartie sur la surface (entre a et R).

a) Déterminer l'expression du champ E produit par cette répartition en un point M situé sur l'axe OZ de la couronne (OM=z).

b) Que devient l'expression de E dans les trois cas suivants :
   1. $a=0$
   2. $a \neq 0$ et $R \to \infty$.
   3. $a = 0$ et $R \to \infty$.

c) Tracer E(z) dans chacun des trois cas précédent.

III- THEOREME DE GAUSS :

Exercice 7 :

Une sphère de centre O et de rayon R, possède une cavité de rayon a, une charge q est repartie uniformément sur le volume limité par les deux rayons a et R.

1. Calculer et tracer E(r) dans tout l'espace.
2. Calculer et tracer V(r) dans tout l'espace.

Exercice 8 :

Une sphère de centre O et de rayon R, est chargée en volume avec une densité ρ (r) à symétrie sphérique, donnée par la relation $\rho(r) = \rho_0\left[1 - \frac{r}{R}\right]$ ou ρ_0 est une constante.

1. Déterminer le champ électrique E à travers tout l'espace.
2. Pour quelle distance r_m ce champ est maximum.

Exercice 9 :

Deux plans infinis chargés uniformément en surface et de densité respectives σ_1 et σ_2 positives, sont disposés parallèlement et distants de a. Déterminer E dans tout l'espace. En déduire le potentiel V

a) Déterminer le champ électrique à travers tout l'espace.

b) Déterminer le potentiel électrique à travers tout l'espace.

c) En prenant comme référence le potentiel de l'un des deux plans et si $\sigma_1=+\sigma$ et $\sigma_2=-\sigma$. Tracer E et V.

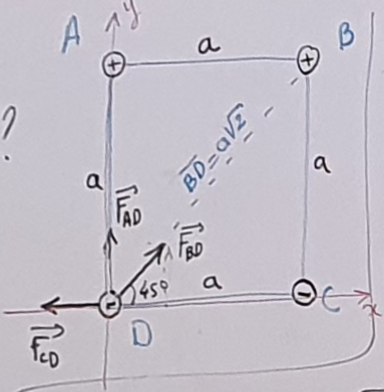
Ex $= 0{,}1\,m$

$\Rightarrow q_B = q = +1{,}6.10^{-19}\,C \quad (=+e)$

$q_C = q_D = -q = -1{,}6.10^{-19}\,C \quad (=-e)$

$\vec{F}_D = ?$

$$\boxed{\vec{F}_D = \sum \vec{F}_i = \vec{F}_{AD} + \vec{F}_{BD} + \vec{F}_{CD}} \quad (*)$$



Les modules:

- $\vec{F}_{AD} = \dfrac{K\,|q_A \cdot q_D|}{\overline{AD}^2} = \boxed{\dfrac{Kq^2}{a^2}}$
- $\vec{F}_{BD} = \dfrac{K\,|q_B \cdot q_D|}{\overline{BD}^2} = \dfrac{K \cdot q^2}{(a\sqrt{2})^2} = \boxed{\dfrac{Kq^2}{2a^2}}$
- $\vec{F}_{CD} = \dfrac{K\,|q_C \cdot q_D|}{\overline{CD}^2} = \boxed{\dfrac{Kq^2}{a^2}}$

Les projections:

Proj $(*)/\vec{Ox}$: $F_{Dx} = 0 + F_{BD} \cdot \cos 45° - F_{CD} = \dfrac{Kq^2}{2a^2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{Kq^2}{a^2} = \dfrac{Kq^2}{a^2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4} - 1\right) = -0{,}64\,\dfrac{Kq^2}{a^2}$

Proj $(*)/\vec{Oy}$: $F_{Dy} = F_{AD} + F_{BD} \cdot \sin 45° + 0 = \dfrac{Kq^2}{a^2} + \dfrac{Kq^2}{2a^2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{Kq^2}{a^2}\left(1 + \dfrac{\sqrt{2}}{4}\right) = 1{,}35\,\dfrac{Kq^2}{a^2}$

$$\Rightarrow \vec{F}_D \begin{cases} F_{Dx} = -0{,}64\,\dfrac{Kq^2}{a^2} \\ F_{Dy} = 1{,}35\,\dfrac{Kq^2}{a^2} \end{cases}$$

$$\boxed{|\vec{F}_D| = \frac{Kq^2}{a^2}\sqrt{(-0{,}64)^2 + 1{,}35^2} = 1{,}5\,\frac{Kq^2}{a^2}\ N}$$

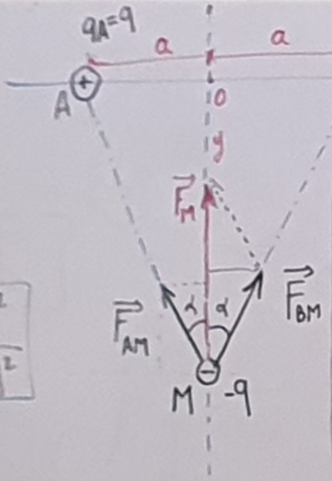
A.N: $K = 9.10^9$

$q = 1{,}6.10^{-19}$

$a = 0{,}1\,m$

Exo2: $\overline{AB} = 2a$ $\quad \overline{OM} = y$

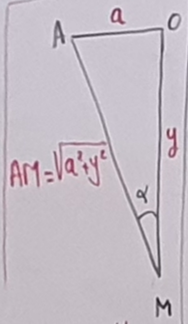
$$\boxed{\vec{F}_M = \vec{F}_{AM} + \vec{F}_{BM}} \quad (*)$$



Les modules:

• $F_{AM} = \frac{K|q_A q_M|}{\overline{AM}^2} = \frac{Kq^2}{(\sqrt{a^2+y^2})^2} = \boxed{\frac{Kq^2}{a^2+y^2}}$

• $F_{BM} = \frac{K|q_B q_M|}{\overline{BM}^2} = \frac{Kq^2}{a^2+y^2}$



$\cos\alpha = \frac{y}{\sqrt{a^2+y^2}}$

Les projections:

Proj(*)/$\vec{Ox}$: $F_{Mx} = -F_{AM}\sin\alpha + \overset{= F_{AM}}{F_{BM}}\sin\alpha = 0$

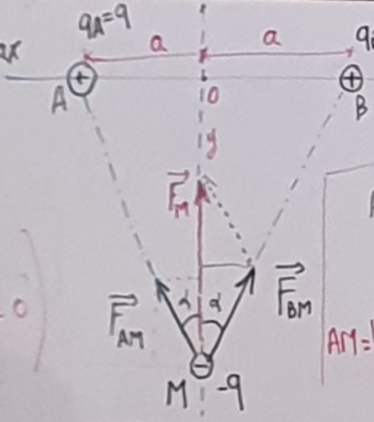
Proj(*)/$\vec{Oy}$: $F_{My} = +F_{AM}\cdot\cos\alpha + \underset{= F_{AM}}{F_{BM}}\cdot\cos\alpha = 2F_{AM}\cdot\cos\alpha = 2\frac{Kq^2}{a^2+y^2}\cdot\frac{y}{\sqrt{a^2+y^2}}$

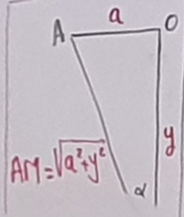
$$F_{My} = 2Kq^2\frac{y}{(a^2+y^2)^{3/2}}$$

$A\cdot\sqrt{A} = A^{3/2}$

$$\boxed{\vec{F}_M = 2Kq^2\frac{y}{(a^2+y^2)^{3/2}}\vec{j}}$$

3) $y = ?$ pour que F_M soit max





$$F_M = 2Kq^2 \frac{y}{(a^2+y^2)^{3/2}}$$

$$\left(f(x) = 2Kq \frac{x}{(a^2+x^2)^{3/2}} \to \frac{df}{dx} = 0\right)$$

$$\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2}$$

$$\frac{3}{2} - 1 = \frac{3}{2} - \frac{2}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\left[\underbrace{(a^2+y^2)}_{U}{}^{3/2}\right]' = \frac{3}{2}(a^2+y^2)^{1/2}\cdot(2y)$$

$$\frac{dF_M}{dy} = 2Kq^2\left[\frac{1\cdot(a^2+y^2)^{3/2} - y\cdot\frac{3}{\cancel{2}}(a^2+y^2)^{1/2}\cdot \cancel{2}y}{(a^2+y^2)^3}\right] = 0$$

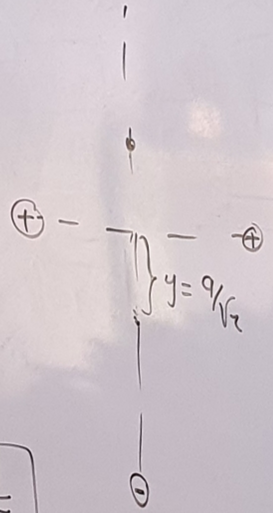
$(a^2+y^2)^{3/2}$

$$(U^n)' = nU^{n-1}\cdot U'$$

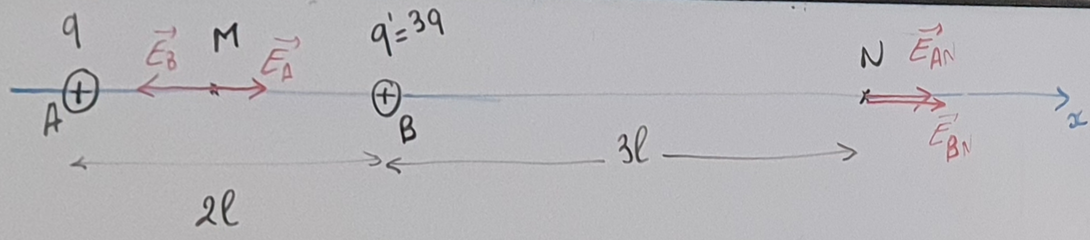
$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

$$(a^2+y^2)^{1/2}\cdot(a^2+y^2) - 3y^2(a^2+y^2)^{1/2} = \underbrace{(a^2+y^2)^{1/2}}_{\neq 0}\left[a^2+y^2-3y^2\right] = 0$$

$$a^2 - 2y^2 = 0 \to 2y^2 = a^2 \to y^2 = \frac{a^2}{2} \to \boxed{y = \pm\frac{a}{\sqrt{2}}}$$



Exo 3:



1) $\boxed{\vec{E}_M = \vec{E}_A + \vec{E}_B}$ (*)

module: $E_A = \frac{Kq}{AM^2} = \frac{Kq}{\ell^2}$

$E_B = \frac{Kq'}{BM^2} = \frac{3Kq}{\ell^2}$

Proj (*) / $\vec{Ox}$: $E_M = E_{Mx} = E_A - E_B =$

$\boxed{E_M = \frac{Kq}{\ell^2} - \frac{3Kq}{\ell^2} = -\frac{2Kq}{\ell^2}}$

$\boxed{\vec{E}_M = -\frac{2Kq}{\ell^2}\vec{i}}$

2) $\boxed{\vec{E}_N = \vec{E}_{AN} + \vec{E}_{BN}}$ (*)

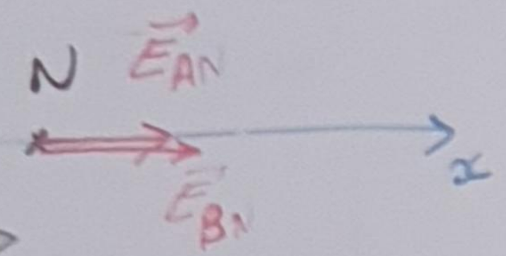
modules:

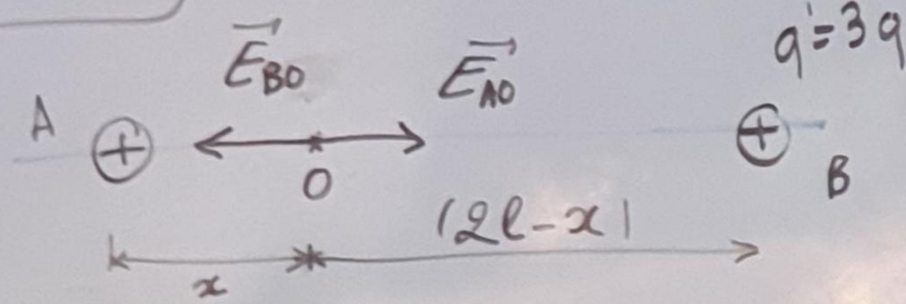
$E_{AN} = \frac{Kq}{AN^2} = \frac{Kq}{(5\ell)^2} = \frac{Kq}{25\ell^2}$

$E_{BN} = \frac{Kq'}{BN^2} = \frac{3Kq}{(3\ell)^2} = \frac{3Kq}{9\ell^2} = \frac{Kq}{3\ell^2}$ ($q' = 3q$)

Proj / $\vec{Ox}$: $\boxed{E_N = E_{Nx} = E_{AN} + E_{BN} = \frac{Kq}{25\ell^2} + \frac{Kq}{3\ell^2} = \frac{28Kq}{75\ell^2}}$

$\boxed{\vec{E}_N = \frac{28Kq}{75\ell^2}\vec{i}}$





$$\vec{E}_O = \vec{E}_{AO} + \vec{E}_{BO} = \vec{0}$$

module: $E_{AO} = \frac{Kq}{x^2}$; $E_{BO} = \frac{3Kq}{(2l-x)^2}$

proj(+)/$\vec{Ox}$: $E_O = E_{AO} - E_{BO} = 0$

$$\frac{Kq}{x^2} - \frac{3Kq}{(2l-x)^2} = 0 \rightarrow \frac{1}{x^2} = \frac{3}{(2l-x)^2}$$

$$(2l-x)^2 = 3x^2$$

$$4l^2 - 4lx + x^2 = 3x^2$$

$$2x^2 + 4lx - 4l^2 = 0$$

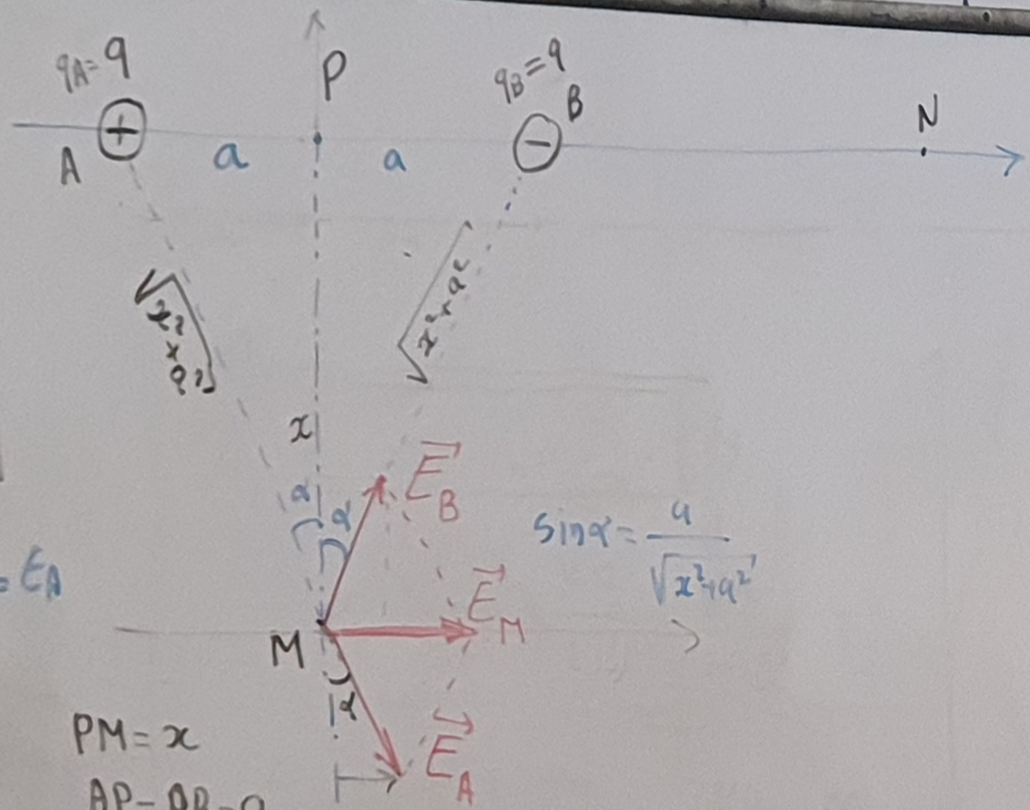
$$x^2 + 2lx - 2l^2 = 0$$

$$\Delta = 4l^2 + 8l^2 = 12l^2 = (2\sqrt{3}l)^2$$

$$x_{1,2} = \frac{-2l \pm 2\sqrt{3}l}{2} = \begin{cases} (\sqrt{3}-1)l \\ -(\sqrt{3}-1)l < 0 \end{cases}$$

Exo 4:

a) $\vec{E}_M = \vec{E}_A + \vec{E}_B$ (*)



module: $E_A = \frac{K|q|}{AM^2} = \boxed{\frac{Kq}{(x^2+a^2)}}$

$E_B = \frac{K|-q|}{BM^2} = \frac{Kq}{(x^2+a^2)} = E_A$

$\sin\alpha = \frac{a}{\sqrt{x^2+a^2}}$

$PM = x$

$AP = PB = a$

Proj (*) $/ \vec{Ox}$: $E_{Mx} = +E_A \sin\alpha + \underset{}{\overset{=E_A}{E_B}} \sin\alpha$

$$E_{Mx} = \frac{2Kq}{(x^2+a^2)} \cdot \frac{a}{\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{2Kq.a}{(x^2+a^2)^{3/2}}$$

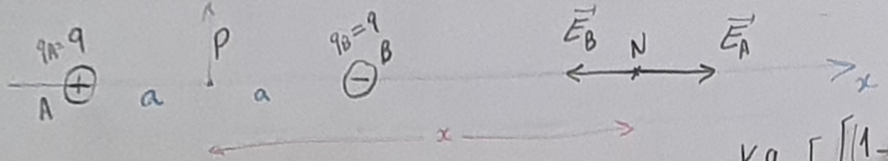
Proj (*) $/ \vec{Oy}$: $E_{My} = -E_A \cos\alpha + \overset{=E_A}{E_B} \cos\alpha = 0$

$$\boxed{\vec{E}_M = \frac{K2q.a}{(x^2+a^2)^{3/2}} \vec{i}}$$

$x \gg a$ $\quad (x^2+a^2)^{3/2} = x^3\left(1+\frac{a^2}{x^2}\right)^{3/2}$

$= x^3$ $\quad \rightarrow \boxed{\vec{E}_M = \frac{K2q.a}{x^3} \vec{i}}$

Exo 4:



1) $\overline{PN} = x$

$\vec{E}_N = \vec{E}_A + \vec{E}_B$ (*)

module: $E_A = \frac{K|q_A|}{AN^2} = \frac{Kq}{(x+a)^2}$

$E_B = \frac{K|q_B|}{BN^2} = \frac{Kq}{(x-a)^2}$

Projection $/x$: $E_N = E_{Nx} = E_A - E_B$

$$E_N = \frac{Kq}{(x+a)^2} - \frac{Kq}{(x-a)^2}$$

$\vec{E}_N = E_{N}$

3) Si $x \gg a$

$$E_N = \frac{Kq}{x^2\left(1+\frac{a}{x}\right)^2} - \frac{Kq}{x^2\left(1-\frac{a}{x}\right)^2}$$

$$E_N = \frac{K.q}{x^2}\left[\frac{1}{\left(1+\frac{a}{x}\right)^2} - \frac{1}{\left(1-\frac{a}{x}\right)^2}\right]$$

$$E_N = \frac{K.q}{x^2}\left[\frac{\overbrace{\left(1-a/x\right)^2}^{a^2} - \overbrace{\left(1+\frac{a}{x}\right)^2}^{b^2}}{\left(1+\frac{a}{x}\right)^2\left(1-\frac{a}{x}\right)^2}\right]$$

$$E_N = \frac{K.q}{x^2}\left[\frac{\left[\left(1-\frac{a}{x}\right)+\left(1+\frac{a}{x}\right)\right]\left[\left(1-\frac{a}{x}\right)-\left(1+\frac{a}{x}\right)\right]}{\left[\underbrace{\left(1+\frac{a}{x}\right)}_{(a+b)}\cdot\underbrace{\left(1-\frac{a}{x}\right)}_{(a-b)}\right]^2}\right]$$

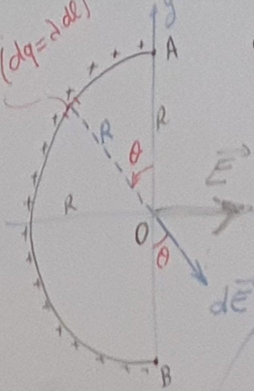
$$E_N = \frac{K.q}{x^2}\left[\frac{(2)\left(-\frac{2a}{x}\right)}{\left[1-\underbrace{\frac{a^2}{x^2}}_{0}\right]^2}\right] = \frac{-4Kq.a}{x^3} = \boxed{\frac{-2Kp}{x^3}}$$

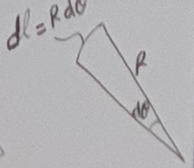
$p = 2q.a$ le moment dipolaire.

Exo 5: λ densité de charge linéaire

$$q = \lambda \, l \quad (C)\ (C/m)\ (m) \qquad (dq = \lambda \, dl)$$

L'élément de longueur dl porte une charge "dq" qui crée au pt O un champ $d\vec{E} = \frac{K\,dq}{R^2}\vec{u} = \frac{K\lambda\,dl}{R^2}\vec{u}$





$$d\vec{E} \begin{cases} dE_x = dE\sin\theta = \frac{K\lambda \overbrace{dl}^{=R\,d\theta}}{R^2}\sin\theta = \boxed{\frac{K\lambda}{R}\sin\theta\,d\theta} \\ dE_y = -dE\cos\theta = -\frac{K\lambda \overbrace{dl}^{=R\,d\theta}}{R^2}\cos\theta = \boxed{-\frac{K\lambda}{R}\cos\theta\,d\theta} \end{cases}$$

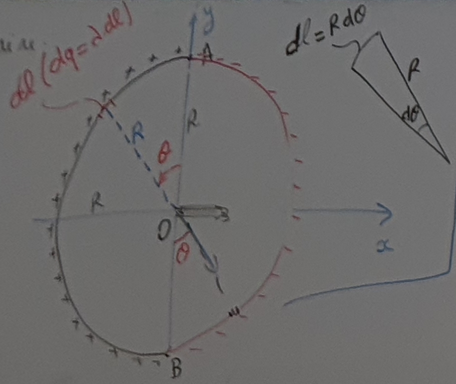
. détermination du champ total $\vec{E} = \sum d\vec{E} = \int d\vec{E}$

$$\vec{E} \begin{cases} E_x = \int_A^B dE_x = \frac{K\lambda}{R}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}\sin\theta\,d\theta = \frac{K\lambda}{R}\left[-\cos\theta\right]_0^{\pi} = -\frac{K\lambda}{R}\left[\overbrace{\cos\pi}^{=-1} - \overbrace{\cos 0}^{=1}\right] = \boxed{\frac{2K\lambda}{R}} \\ E_y = \int_A^B dE_y = -\frac{K\lambda}{R}\int_0^{\pi}\cos\theta\,d\theta = -\frac{K\lambda}{R}\left[\sin\theta\right]_0^{\pi} = -\frac{K\lambda}{R}\left[\overbrace{\sin\pi}^{=0} - \overbrace{\sin 0}^{=0}\right] = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{2K\lambda}{R}\vec{i}}$$

Exo 5: λ densité de charge linéaire

$$\boxed{\underset{(C)}{q} = \underset{(C/m)}{\lambda}.\underset{(m)}{l}}\quad (dq = \lambda dl)$$



L'élément de longueur dl porte une charge "dq" qui crée au pt O un champ $d\vec{E} = \frac{K\,dq}{R^2}\vec{u} = \frac{K\lambda\,dl}{R^2}\vec{u}$

$$d\vec{E}\ \Big|\ dE_x = dE\sin\theta = \frac{K\lambda \overbrace{dl}^{=R\,d\theta}}{R^2}\sin\theta = \boxed{\frac{K\lambda}{R}\sin\theta.d\theta}$$

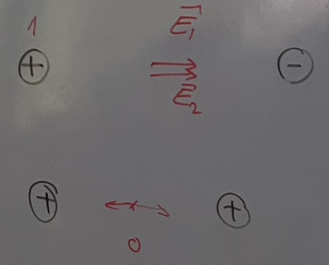
$$dE_y = -dE\cos\theta = -\frac{K\lambda \overbrace{dl}^{=R\,d\theta}}{R^2}\cos\theta = \boxed{-\frac{K\lambda}{R}\cos\theta\,d\theta}$$

. détermination du champ total $\vec{E} = \Sigma d\vec{E} = \int d\vec{E}$

$$\vec{E}\ \Big|\ E_x = \int_A^B dE_x = \frac{K\lambda}{R}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}\sin\theta.d\theta = \frac{K\lambda}{R}\left[-\cos\theta\right]_0^{\pi} = -\frac{K\lambda}{R}\left[\underbrace{\cos\pi}_{=-1} - \underbrace{\cos 0}_{=1}\right] = \boxed{\frac{2K\lambda}{R}}$$

$$E_y = \int_A^B dE_y = -\frac{K\lambda}{R}\int_0^{\pi}\cos\theta\,d\theta = -\frac{K\lambda}{R}\left[\sin\theta\right]_0^{\pi} = -\frac{K\lambda}{R}\left[\underbrace{\sin\pi}_{=0} - \underbrace{\sin 0}_{=0}\right] = 0$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{2K\lambda}{R}\vec{i}}$$



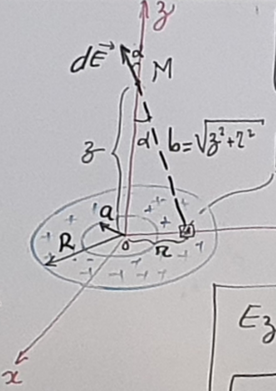
2) $\vec{E} = \vec{E}^{+} + \vec{E}^{-} = \frac{2K\lambda}{R}\vec{i} + \frac{2K\lambda}{R}\vec{i}$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{4K\lambda}{R}\vec{i}}$$

Exo 6:

La surface $dS = r\,dr\,d\theta$ porte une charge $dq = \sigma.dS$ qui crée au pt M un champ

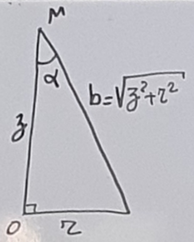
$$d\vec{E} = \overbrace{\frac{K\,dq}{b^2}}^{dE}\,\vec{u}$$



$$\boxed{\cos\alpha = \frac{z}{\sqrt{z^2+r^2}}}$$

$$\boxed{dS = r\,dr\,d\theta}$$

$dq = \sigma.dS$



le champ total $\vec{E}$ $\left|\begin{array}{l} E_x = \sum dE_x = 0 \\ E_y = \sum dE_y = 0 \\ E_z = \sum dE_z = \iint dE_z \end{array}\right.$ Par raison de symétrie

$$\Rightarrow dE_z = +dE\cos\alpha = \frac{K\,dq}{b^2}\cdot\cos\alpha = \frac{K\sigma.\overbrace{r\,dr\,d\theta}^{dS}}{(z^2+r^2)}\cdot\frac{z}{\sqrt{z^2+r^2}} = \frac{K\sigma.z\,r\,dr\,d\theta}{(z^2+r^2)^{3/2}}$$

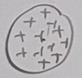
$$E_z = \iint dE_z = K\sigma.z\underbrace{\int_a^R \frac{r\,dr}{(z^2+r^2)^{3/2}}}_{-\frac{1}{\sqrt{z^2+r^2}}}\cdot\int_0^{2\pi} d\theta$$

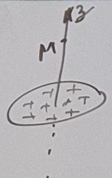
$$E_z = K\sigma.z\left[-\frac{1}{\sqrt{z^2+r^2}}\right]_a^R\cdot\underbrace{[\theta]_0^{2\pi}}_{2\pi} = \overset{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}}{K}.\sigma.2\pi z\left[\left(-\frac{1}{\sqrt{z^2+R^2}}\right)-\left(-\frac{1}{\sqrt{z^2+a^2}}\right)\right]$$

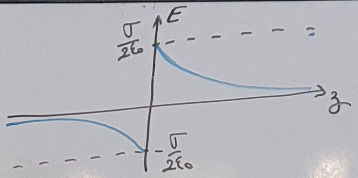
$$\boxed{E_z = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\frac{z}{\sqrt{z^2+a^2}} - \frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right]}$$

$$\boxed{\vec{E} = E_z\,\vec{k}}$$

b) 1) Si $a=0$ on aura un disque de rayon R







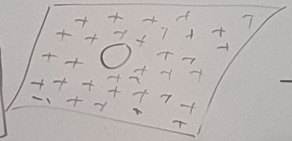
$$E_z=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\frac{z}{\sqrt{z^2}}-\frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right]=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\frac{z}{|z|}-\frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right]$$

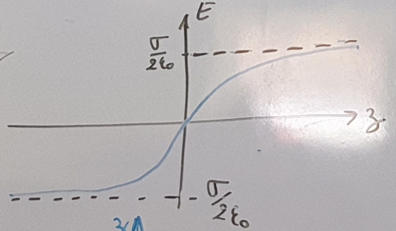
avec : $\frac{z}{|z|}=+1$ si $z>0$ et $\frac{z}{|z|}=-1$ si $z<0$

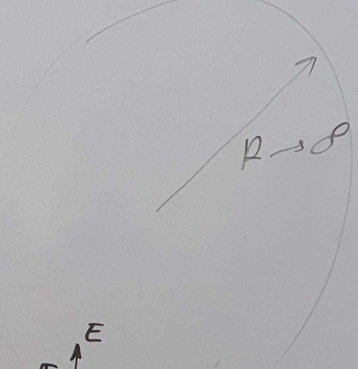
2) Si $a\neq 0$ et $R\to\infty$ (plan troué)

$$E_z=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\frac{z}{\sqrt{z^2+a^2}}-\cancel{\frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}}^{\,0}\right]=\boxed{\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\cdot\frac{z}{\sqrt{z^2+a^2}}}$$

$z\sqrt{1+a^2/z^2}$



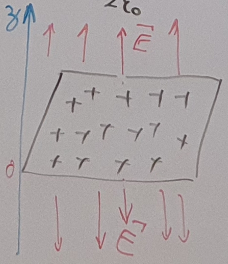


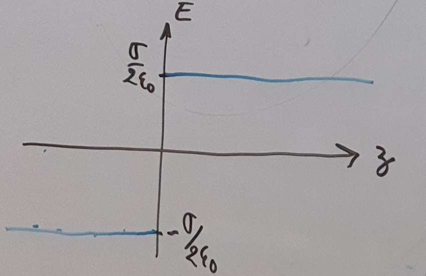


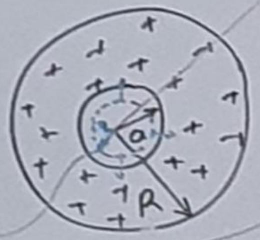
3) Si $a=0$ et $R\to\infty$ (plan infini)

$$E_z=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\frac{z}{\sqrt{z^2+a^2}}-\cancel{\frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}}^{\,0}\right]=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\cdot\frac{z}{|z|}=\begin{cases}\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} & \text{si } z>0\\ -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} & \text{si } z<0\end{cases}$$

$$\vec{E}=\begin{cases}+\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{k} & \text{si } z>0\\ -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{k} & \text{si } z<0\end{cases}$$

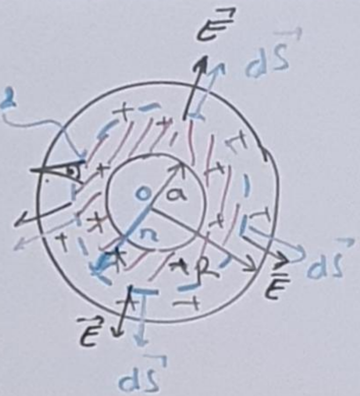






* 2ème cas : M entre les deux sphère $a \leq r \leq R$.

La surface de Gauss choisie (S_{G_2}) est une sphère de rayon $a \leq r \leq R$.



$$\bullet\ \Phi = \iint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \iint E\cdot dS\cdot \cos\hat{0} = E\overbrace{\iint dS}^{4\pi r^2} = \boxed{E\cdot 4\pi r^2} \quad (1')$$

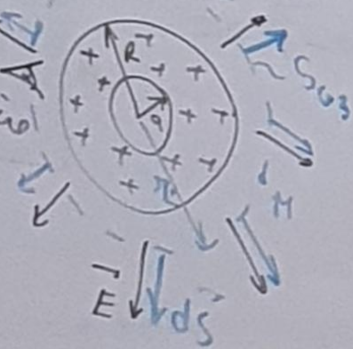
$$\bullet\ \Phi = \frac{\sum q_i}{\varepsilon_0} = \frac{\rho\cdot V_{chargé}}{\varepsilon_0} = \boxed{\frac{\rho\left[\frac{4}{3}\pi r^3 - \frac{4}{3}\pi a^3\right]}{\varepsilon_0}} \quad (2')$$

$q = \rho\cdot V$

$$(1') = (2') \quad E\cdot \cancel{4\pi} r^2 = \frac{\rho \cancel{4\pi}}{3\varepsilon_0}\left[r^3 - a^3\right] \Rightarrow \boxed{E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left[r - \frac{a^3}{r^2}\right]} \quad \text{si } a \leq r \leq R$$

* 3ème cas : M à l'extérieur des 2 sphère :

La surface de Gauss choisie S_{G_3} est une sphère de rayon $r \geq R$



$$\bullet\ \Phi = \iint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \ldots\ldots = \boxed{E\cdot 4\pi r^2} \quad (1'')$$

$$\bullet\ \Phi = \frac{\sum q_i}{\varepsilon_0} = \frac{\rho V_{chargé}}{\varepsilon_0} = \boxed{\frac{\rho\left[\frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{4}{3}\pi a^3\right]}{\varepsilon_0}} \quad (2'')$$

$$(1'') = (2'') \quad E\cdot 4\pi r^2 = \frac{\rho\cdot 4\pi}{3\varepsilon_0}\left[R^3 - a^3\right] \Rightarrow \boxed{E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left[R^3 - a^3\right]\cdot \frac{1}{r^2}}$$

Exo 7

$$E = \begin{cases} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots & \text{si } r<a \\ = \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\left[r - \dfrac{a^3}{r^2}\right] \ldots & \text{si } a \leq r \leq R \\ = \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\left[R^3 - a^3\right]\dfrac{1}{r^2} \ldots & \text{si } r \geq R \end{cases}$$

2) $V(r) = ?$ $\quad \int dV = -\int \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int E\, dr$

1er cas $r<a$

$$V_1 = \int dV = -\int 0\, dr = C_1 \longrightarrow \boxed{V_1 = C_1}$$

2ème cas $a \leq r \leq R$

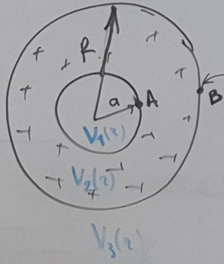
$$V_2 = \int dV = -\int \underbrace{\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left[r - \frac{a^3}{r^2}\right]}_{E} dr = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\int\left(r - \frac{a^3}{r^2}\right) dr$$

$$\boxed{V_2 = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(\frac{r^2}{2} + \frac{1}{r}\right) + C_2}$$

3ème cas $r \geq R$

$$V_3 = \int dV = -\int E\, dr = -\int \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left[R^3 - a^3\right]\cdot\frac{1}{r^2}\, dr = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left[R^3 - a^3\right]\underbrace{\int -\frac{1}{r^2}\, dr}_{\frac{1}{r}}$$

$$\boxed{V_3 = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left[R^3 - a^3\right]\cdot\frac{1}{r} + C_3}$$



$$V(r) = \begin{cases} = \overset{?}{C_1} \ldots\ldots\ldots\ldots & \text{si } r<a \\ = -\dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(\dfrac{r^2}{2} + \dfrac{1}{r}\right) + \overset{?}{C_2} \ldots & a \leq r \leq R \\ = \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(R^3 - a^3\right)\cdot\dfrac{1}{r} + \overset{?}{C_3} \ldots & r \geq R \end{cases}$$

C_1, C_2, C_3 ? $\quad$ si $r \to \infty \Rightarrow V_3 = 0 \longrightarrow C_3 = \ldots \leftarrow \lim\limits_{r\to\infty} V_3 = 0 \quad (C_3 = 0)$

au pt B: $V_2(r=R) = V_3(r=R) \longrightarrow \boxed{C_2 = \dfrac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}}$

au pt A: $V_1(r=a) = V_2(r=a) \longrightarrow \boxed{C_1 = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}\left(\dfrac{R^2}{2} - \dfrac{a^2}{2}\right)}$

Exo7

$$E=\begin{cases} =0 \ \ldots\ldots\ldots\ \text{si } r<a \\ =\dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\left[r-\dfrac{a^3}{r^2}\right] \ \ldots\ \text{si } a\leqslant r\leqslant R \\ =\dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\left[R^3-a^3\right]\cdot\dfrac{1}{r^2} \ \ldots\ \text{si } r\geqslant R \end{cases}$$

2) $V(r)=\,?$ $\quad \int dV=-\int \vec{E}\cdot d\vec{l}=-\int E\,dr$

1er cas: $r<a$

$V_1=\int dV=-\int 0\,dr=C_1 \longrightarrow \boxed{V_1=C_1}$

2ème cas $a\leqslant r\leqslant R$

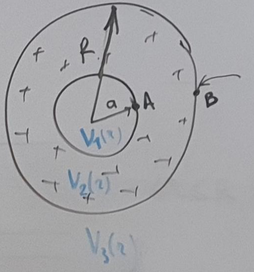
$$V_2=\int dV=-\int \underbrace{\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left[r-\frac{a^3}{r^2}\right]}_{E} dr=-\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\int\left(r-\frac{a^3}{r^2}\right)dr$$

$$\boxed{V_2=-\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(\frac{r^2}{2}+\frac{1}{r}\right)+C_2}$$

3ème cas: $r\geqslant R$

$$V_3=\int dV=-\int E\,dr=-\int\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left[R^3-a^3\right]\cdot\frac{1}{r^2}\,dr=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left[R^3-a^3\right]\underbrace{\int-\frac{1}{r^2}\,dr}_{\frac{1}{r}}$$

$$\boxed{V_3=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left[R^3-a^3\right]\cdot\frac{1}{r}+C_3}$$



$$V(r)=\begin{cases} =\overset{?}{C_1} \ \ldots\ldots\ldots\ \text{si } r<a \\ =-\dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(\dfrac{r^2}{2}+\dfrac{1}{r}\right)+\overset{?}{C_2} \ \ldots\ a\leqslant r\leqslant R \\ =\dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(R^3-a^3\right)\cdot\dfrac{1}{r}+\overset{?}{C_3} \ \ldots\ r\geqslant R \end{cases}$$

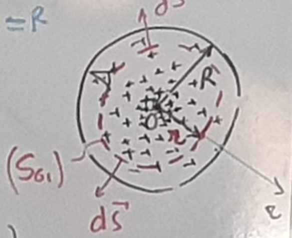
$C_1, C_2, C_3\,?$ $\quad$ si $r\to\infty \Rightarrow V_3=0 \longrightarrow C_3=\ldots \leftarrow \lim\limits_{r\to\infty} V_3=0 \quad (C_3=0)$

au pt B: $V_2(r=R)=V_3(r=R) \longrightarrow \boxed{C_2=\dfrac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}}$

au pt A: $V_1(r=a)=V_2(r=a) \longrightarrow \boxed{C_1=\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}\left(\dfrac{R^2}{2}-\dfrac{a^2}{2}\right)}$

Exo 8 : $\rho(r) = \rho_0 \left[1 - \frac{r}{R}\right] \Rightarrow \rho(r) = \begin{cases} = \rho_0 \dots & \text{si } r = 0 \\ = 0 & \text{si } r = R \end{cases}$

Si $\rho = \rho(r)$ variable $q \neq \rho . V \Rightarrow \boxed{q = \int \rho \, dV}$



- E ? à l'intérieur de la sphère $(r \leq R)$

La surface de Gauss choisie est une sphère (S_{G_1}) de rayon $r \leq R$.

- $\Phi = \iint \vec{E} \, d\vec{S} = \iint E \, dS \cos \overset{1}{0} = \dots = \boxed{E . 4\pi r^2}$ (1)

- $\Phi = \frac{\sum q_i}{\varepsilon_0} = \frac{\int_0^r dq}{\varepsilon_0} = \frac{\int_0^r \rho \, dV}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_0^r \rho_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right) . \underbrace{4\pi r^2 dr}_{dV}$

$= \frac{\rho_0 4\pi}{\varepsilon_0} \int_0^r \left(r^2 - \frac{r^3}{R}\right) dr = \frac{\rho_0 4\pi}{\varepsilon_0} \left[\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4R}\right]_0^r = \boxed{\frac{4\pi \rho_0}{\varepsilon_0} \left[\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4}\right]}$ (2)

(1) = (2) : $E . 4\pi r^2 = \frac{4\pi \rho_0}{\varepsilon_0} \left[\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4R}\right]$

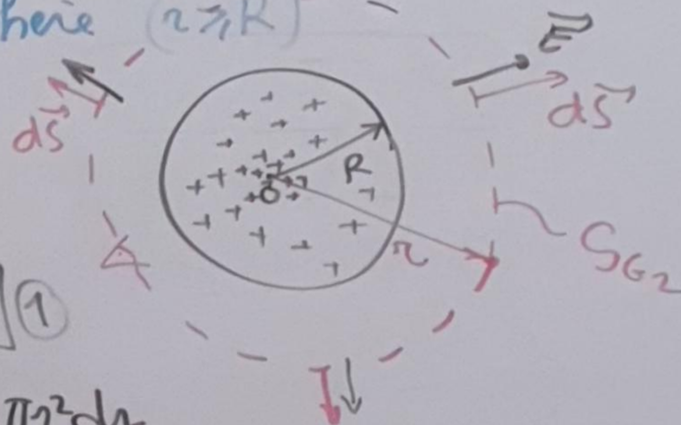
$\Rightarrow \boxed{E = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \left[\frac{r}{3} - \frac{r^2}{4R}\right]}$

① = ② : $E \cdot 4\pi r^2 = \frac{4\pi \rho_0}{\varepsilon_0}\left[\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4R}\right]$

$\Rightarrow \boxed{E = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left[\frac{r}{3} - \frac{r^2}{4R}\right]}$ si $r \leq R$

. E? à l'exterieur de la sphère $(r \geqslant R)$

La surface de Gauss choisie est une sphère (S_{G_2}) de rayon $r \geqslant R$



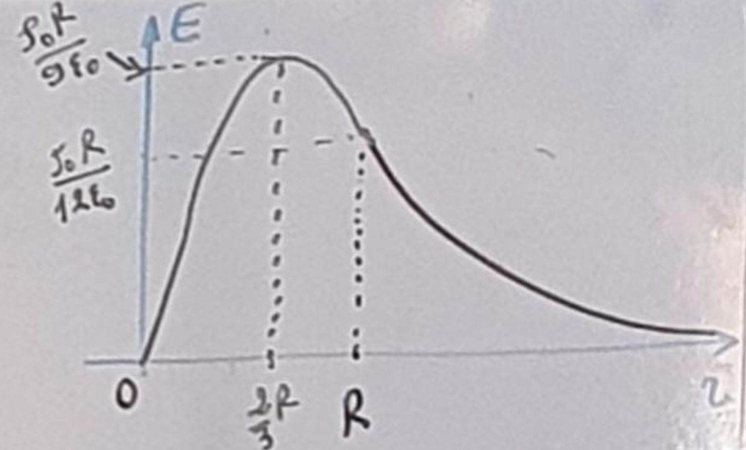
• $\Phi = \iint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \boxed{E \cdot 4\pi r^2}$ ①

• $\Phi = \frac{\Sigma q_i}{\varepsilon_0} = \frac{\int_0^R \rho \, dV}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^R \rho_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right) \cdot \underbrace{4\pi r^2 dr}_{dV}$

$= \frac{\rho_0 \cdot 4\pi}{\varepsilon_0}\int_0^R \left[r^2 - \frac{r^3}{R}\right] dr = \frac{\rho_0 \cdot 4\pi}{\varepsilon_0}\left[\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4R}\right] = \frac{\rho_0 \cdot 4\pi}{\varepsilon_0}\left[\frac{R^3}{3} - \frac{R^3}{4}\right] = \boxed{\frac{\rho_0 \cdot 4\pi}{\varepsilon_0} \cdot \frac{R^3}{12}}$ ②

① = ② $\Rightarrow E \cdot 4\pi r^2 = \frac{\rho_0 \cdot 4\pi}{\varepsilon_0} \cdot \frac{R^3}{12} \rightarrow \boxed{E = \frac{\rho_0 \cdot R^3}{12\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2}}$ si $r \geqslant R$

$$E = \begin{cases} = \dfrac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left[\dfrac{r}{3} - \dfrac{r^2}{4R}\right] \dots\dots \text{si } r \leq R \\ = \dfrac{\rho_0 R^3}{12\varepsilon_0} \cdot \dfrac{1}{r^2} \dots\dots \text{si } r \geq R \end{cases}$$



2) r_m ?

Si $r \leq R$: $\dfrac{dE}{dr} = \dfrac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{2r}{4R}\right) = 0$

$$= \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\underbrace{\left(\frac{1}{3} - \frac{r}{2R}\right)}_{=0} = 0$$

$$\rightarrow \frac{r}{2R} = \frac{1}{3} \rightarrow \boxed{r = \frac{2R}{3} = r_m = 0{,}66R}$$

$$E_{max} = E\left(r = \tfrac{2}{3}R\right) = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left(\frac{\frac{2}{3}R}{3} - \frac{\frac{4}{9}R^2}{4R}\right) = \frac{\rho_0}{3}\left(\frac{2R}{9} - \frac{R}{9}\right) = \boxed{\frac{\rho_0 R}{9\varepsilon_0} = E_{max}}$$

2) $V = ?$ $\quad V = \int dV = -\int \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int E\,dy$

Zone 1: $\vec{E} = -\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2\varepsilon_0}\vec{j} \Rightarrow \boxed{V_1 = \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2\varepsilon_0}\,y + C_1}$ si ... $y<0$

Zone 2: $\vec{E} = \frac{\sigma_1-\sigma_2}{2\varepsilon_0}\vec{j} \Rightarrow \boxed{V_2 = -\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2\varepsilon_0}\,y + C_2}$ si .... $0 \leq y \leq a$

Zone 3: $\vec{E} = \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2\varepsilon_0}\vec{j} \Rightarrow \boxed{V_3 = -\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2\varepsilon_0}\,y + C_3}$ si ... $y \geq a$

3) $\sigma_1 = +\sigma$ et $\sigma_2 = -\sigma$ plan 1 : plan de référence $\rightarrow \boxed{V=0}$

Zone 1: $\vec{E} = \vec{0} \longrightarrow \boxed{V_1 = C_1}$ $\quad C_1$?

Zone 2: $\vec{E} = \frac{\sigma-(-\sigma)}{2\varepsilon_0}\vec{j} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{j} \longrightarrow \boxed{V_2 = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\,y + C_2}$ $\quad C_2$?

Zone 3: $\vec{E} = \frac{\sigma-\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{j} = \vec{0} \longrightarrow \boxed{V_3 = C_3}$

C_3 ?

• Zone 3:

$\vec{E} = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}\vec{j} + \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}\vec{j} = \boxed{\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2\varepsilon_0}\vec{j}}$

$= +\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}\vec{j} - \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}\vec{j} \qquad \boxed{\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2\varepsilon_0}\vec{j}}$

$\boxed{-\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2\varepsilon_0}\vec{j}}$