Chapitre 2 *L E S   C O N D U C T E U R S*

1/ Conducteur en équilibre électrostatique (CEE):

1.1/ Définition :

Un conducteur est un corps dans lequel les charges peuvent se déplacer facilement.

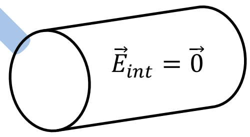
Un conducteur est en équilibre électrostatique (CEE) si toutes ses charges sont immobiles (au repos).

1.2/ Propriétés d'un CEE :

a) *Le champ électrique :*

- *A l'intérieur d'un CEE le champ électrique est nul* $\vec{E}_{int} = \vec{0}$

$$\boxed{\vec{E}_{int} = \vec{0}}$$

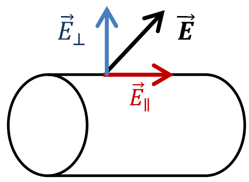


Démonstration :

Dans un CEE les charges sont immobiles :

$\Rightarrow \quad \sum \vec{F} = \vec{0} = q.\vec{E} \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = \vec{0}$

- *A la surface d'un conducteur le champ est perpendiculaire à cette dernière :*



Démonstration :

Si $\vec{E}$ *n'est pas perpendiculaire* $(\perp)$ *à la surface alors on peut le décomposer en :* $\vec{E} = \vec{E}_{\perp} + \vec{E}_{\parallel}$ *;*

et si $\vec{E}_{\parallel} \neq \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = q.\vec{E} \neq \vec{0} \quad \Rightarrow$ *mouvement des charges* $\Rightarrow$ *ce n'est plus un CEE.*

b) *Le potentiel électrique :*

A l'intérieur d'un conducteur en équilibre électrostatique (CEE) le potentiel est constant $(V = C^{st})$ *: on dit que ce conducteur forme un volume équipotentiel.*

Démonstration :

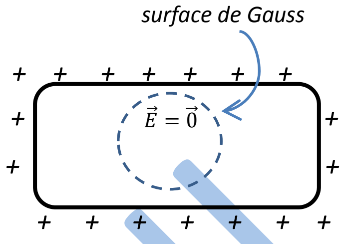
A l'intérieur d'un CEE $\Rightarrow \vec{E} = \vec{0}$ *puisque on a* $dV = -\vec{E}.\vec{dl} = 0 \Rightarrow \boxed{V = C^{st}}$

c) ***Répartition des charges dans un CEE :***

Dans un CEE la charge interne est nulle ($\sum q_{int} = 0$) , cependant les charges se trouvent réparties sur la surface du conducteur.

Démonstration :

Si on applique le théorème de Gauss à l'intérieur du conducteur, on aura :



$\Phi = \iint \vec{E}.\overrightarrow{dS} = 0$ ① *(l'intérieur d'un CEE : $\vec{E} = \vec{0}$)*

$\Phi = \frac{\sum q_i}{\varepsilon_0}$ ②

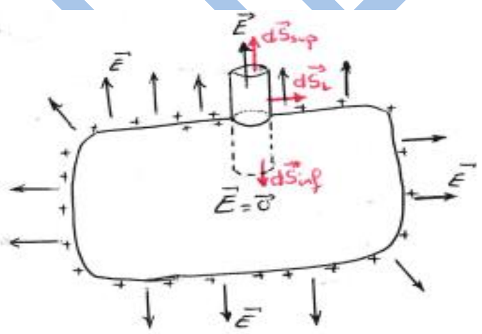
Comme ① = ② $\Rightarrow$ $\boxed{\sum \boldsymbol{q_i} = \mathbf{0}}$

d) *Le champ $\vec{E}$ =? au voisinage d'un conducteur :*

Soit un conducteur portant une charge de densité surfacique"σ ", le champ à proximité immédiat (au voisinage) de ce conducteur est donné par :

$\boldsymbol{\vec{E}} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\boldsymbol{\varepsilon_0}}\boldsymbol{\vec{n}}$ $\qquad$ *$\vec{n}$: le vecteur unitaire normal ($\perp$) au conducteur*

Choisissons un cylindre comme surface de Gauss passant par la surface du CEE :



En appliquant le théorème de Gauss on aura :

$* \ \Phi = \iint \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \iint \vec{E}.\overrightarrow{dS}_{sup} + \cancel{\iint \vec{E}.\overrightarrow{dS}_L} + \cancel{\iint \vec{E}.\overrightarrow{dS}_{inf}} = \iint E.dS_{sup}.cos0 = E.S$ ①

d'autre part :

$* \ \Phi = \frac{\sum q_i}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma.S}{\varepsilon_0}$ ② *(les charge existent seulement sur la surface du CEE et $S = S_{sup}$)*

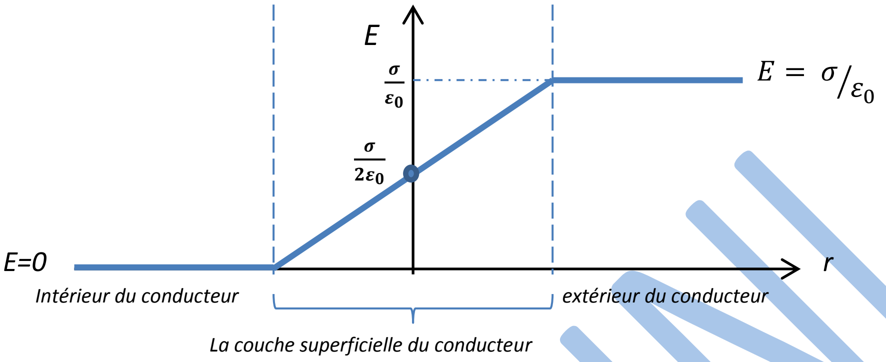
① = ② $\Rightarrow$ $E.S = \frac{\sigma.S}{\varepsilon_0}$ $\Rightarrow$ $\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\boldsymbol{\varepsilon_0}}$

Puisque ce champ est $\perp$ à la surface du conducteur alors vectoriellement il s'écrit :

$\boxed{\boldsymbol{\vec{E}} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\boldsymbol{\varepsilon_0}}\boldsymbol{\vec{n}}}$ $\qquad$ *($\vec{n}$: le vecteur unitaire $\perp$ au conducteur)*

Remarque importante : *« Répartition du champ sur la couche superficielle du CEE »*

A l'intérieur d'un conducteur (CEE) le champ est nul $\vec{E} = \vec{E}_{int} = \vec{0}$, *au voisinage immédiat du conducteur* $\vec{E} = \vec{E}_{ext} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}$ *donc par raison de continuité linéaire le champ à la surface du conducteur est égal à* $\sigma/2\varepsilon_0$ *:*



2/ Capacité et énergie interne d'un conducteur isolé :

2.1/ Capacité d'un conducteur isolé :

Soit un conducteur en équilibre électrostatique isolé qui porte une charge Q, il produit dans l'espace un champ $\vec{E}$ *et un potentiel* V *; on remarque que si on augmente la charge* Q *alors le potentiel* V *augmente aussi mais le rapport* $\frac{Q}{V}$ *reste constant, ce rapport est définit comme étant la capacité du conducteur :*

$$\boxed{C = \frac{Q}{V}} \quad \text{avec :} \begin{cases} C\ en\ Farad\ (F) \\ Q\ en\ Coulomb\ (C) \\ V\ en\ Volt\ (V) \end{cases}$$

La capacité C *est une grandeur positive, elle dépend du matériau (permittivité) et de la géométrie du conducteur.*

*L'unité de la capacité est le « **Farad** », mais comme le Farad est une très grande capacité alors on utilise les sous multiples :*

$$1\mu F = 10^{-6}F \ ;$$

$$1nF = 10^{-9}F \ ;$$

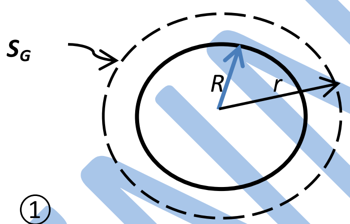
$$1pF = 10^{-12}F$$

Exercice :

*Calculer la capacité propre d'une sphère conductrice de rayon **R** chargée avec un densité surfacique de charge* $\boldsymbol{\sigma}$: $(\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{\sigma S})$.

On utilise le théorème de Gauss pour déterminer le champ à l'extérieur de la sphère :

La surface de Gauss choisie est une sphère de rayon $r > R$ *alors on aura :*



$$* \ \Phi = \iint \vec{E}.\overrightarrow{dS} = E \iint dS = E.4\pi r^2 \quad ①$$

$$* \ \Phi = \frac{\sum q_i}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \left(\frac{\sigma.S}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma.4\pi R^2}{\varepsilon_0}\right) \quad ②$$

① = ② $\quad \Rightarrow \quad E = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0.r^2} = \dfrac{K.Q}{r^2}$

Comme $dV = -\vec{E}.\vec{dl} = -E.dr \quad \Rightarrow \quad V = \int dV = -\int \frac{K.Q}{r^2} = \frac{K.Q}{r} + C$

à l'infini $V = 0$ *:* $\quad \lim_{r\to\infty} V(r) = 0 \quad \Rightarrow \quad C = 0$

donc le potentiel à l'extérieur de la sphère s'écrit : $V = \frac{K.Q}{r}$ *et au voisinage immédiat de la sphère* $(r \simeq R)$ *on aura :* $\boldsymbol{V = \frac{K.Q}{R}}$

*Finalement la capacité de **la sphère** conductrice sera :*

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{K.Q/_R} = \frac{R}{K} = 4\pi\varepsilon_0 R \quad \Rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{C = 4\pi\varepsilon_0 R}}$$

2.2/ Energie interne d'un conducteur :

Soit un conducteur de capacité "C" portant une charge "q" : le potentiel de ce conducteur en fonction de la charge et de la capacité s'écrit : $V = {}^{q}/_{C}$

Quand on charge ce conducteur d'une charge élémentaire "dq" : ($q \rightarrow q + dq$), on doit fournir un travail "dW" qui entraine une augmentation de l'énergie interne du conducteur :

$$dW = V.dq = \frac{q}{C}dq$$

L'énergie interne totale (emmagasinée) sera :

$$W = \int dW = \int_0^Q \frac{q}{C}dq = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

Comme : $Q = V.C$

alors, on peut écrire que :
$$\begin{cases} W = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \\ W = \frac{1}{2}CV^2 \\ W = \frac{1}{2}QV \end{cases}$$

Cette énergie interne représente l'énergie potentielle du conducteur.

Remarque : *« énergie électrostatique en fonction du champ E »*

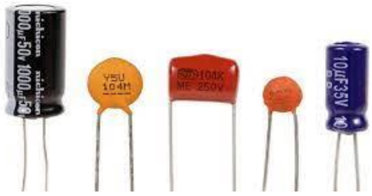
- *La densité volumique de l'énergie électrostatique est donnée par :*

$$\frac{dW}{dV} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \qquad \text{avec :} \begin{cases} E: \text{module du champ électrostatique} \\ \varepsilon_0 : \text{permittivité du vide} \end{cases}$$

- *L'énergie électrostatique sera :*

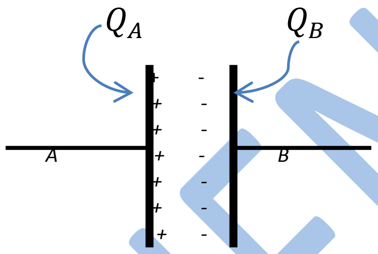
$$W = \int dW = \int \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2\, dV = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int E^2\, dV$$

3/ Les condensateurs :



3.1/ Capacité d'un condensateur :

Un condensateur est un système formé de deux conducteurs A et B (en influence totale) le premier conducteur porte une charge ($Q_A = +Q$) et l'autre une charge ($Q_B = -Q$), les deux conducteurs appelés « armatures » sont séparés par une faible distance portant un isolant (air, papier…).



La charge du condensateur est : $Q = |Q_A| = |Q_B|$

La capacité du condensateur est donnée par :

$$\boxed{C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{V_A - V_B} = C^{st}}$$

La capacité d'un condensateur (c'est-à-dire la quantité de charge qu'un conducteur peut emmagasiner) dépend de la forme des armatures et du milieu les séparant.

3.2/ Calcul des capacités :

Pour déterminer la capacité d'un condensateur, on doit passer par les étapes suivantes :

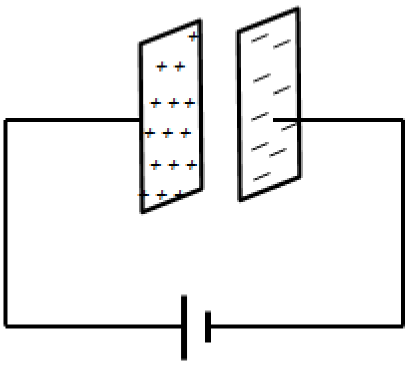
- *Calculer le champ $\vec{E}$ entre les armatures ;*
- *Déduire la différence de potentiel (d.d.p) entre les armatures $V_A - V_B$:*

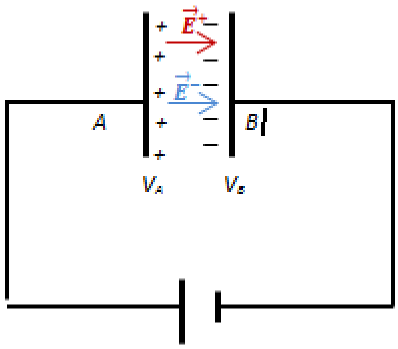
$$\int_{V_A}^{V_B} dV = -\int \vec{E}.\overrightarrow{dl} \quad \Rightarrow \quad V = V_A - V_B = \cdots$$

- *Connaissant la charge $Q = \iint \sigma \, dS$ → On peut calculer la capacité C :*

$$\boxed{C = \frac{Q}{V} = \cdots}$$

3.2.1/ Calcul de la capacité d'un condensateur plan :



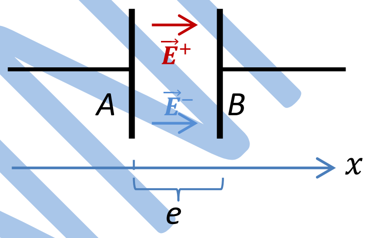


- Le champ entre les deux armatures est :

$$\vec{E} = \vec{E}^+ + \vec{E}^- = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{\imath} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{\imath} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{\imath}$$

donc en module :

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}}$$



e : distance entre les armatures

- Comme $dV = -\vec{E}.\vec{dl} = -\vec{E}.\vec{dx} = -E.dx$

$$\int_{V_A}^{V_B} dV = -\int_0^e E.dx = -\int_0^e \frac{\sigma}{\varepsilon_0} dx = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}[x]_0^e = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} e$$

Alors : $V_B - V_A = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} e$ c'est-à-dire $\boxed{V_A - V_B = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} e}$

Finalement : la capacité d'un condensateur plan sera :

$$C = \frac{Q}{V_A - V_B} = \frac{\sigma.S}{\frac{\sigma}{\varepsilon_0} e} = \frac{S.\varepsilon_0}{e} \qquad \boxed{\boldsymbol{C = \frac{S.\varepsilon_0}{e}}}$$

Remarque :

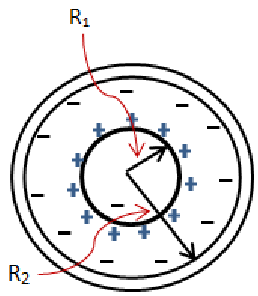
Pour augmenter la capacité d'un condensateur plan, on peut soit :

- changer le milieu entre les armatures ($\varepsilon = \varepsilon_0 . \varepsilon_r$ avec : ε_r : donnée) ;
- diminuer la distance entre les armatures ;
- augmenter la surface des plaques "S"

3.2.2/ Calcul de la capacité d'un condensateur sphérique :

Soit un condensateur sphérique constitué de deux sphères concentriques :

- *la première de rayon R_1 , de charge Q_1 et de potentiel V_1;*
- *la deuxième de rayon R_2 , de charge Q_2 et de potentiel V_2*



D'après le théorème de Gauss, on a vu que :

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2} \quad \text{pour} \quad R_1 < r < R_2 \qquad \left(K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9.10^9\right)$$

Puisque : $dV = -E.dr \quad \rightarrow \quad \int dV = -\int E.dr$

$$\int_{V_1}^{V_2} dV = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{R_1}^{R_2}\frac{1}{r^2}dr = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_{R_1}^{R_2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right]$$

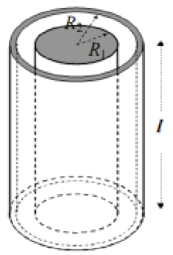
$$\Rightarrow \quad V_2 - V_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{R_1 - R_2}{R_1 R_2}\right] \qquad d'où \quad \Rightarrow V = V_1 - V_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}\right]$$

Alors la capacité d'un condensateur sphérique sera :

$$\boxed{\boldsymbol{C = \frac{Q}{V} = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}}}$$

3.2.3/ calcul de la capacité d'un condensateur cylindrique :

Même travail pour un condensateur cylindrique chargé avec "$Q = \lambda L$" le champ entre les armatures de rayon R_1 et R_2 est : $\quad E = \frac{Q}{2\pi r L}$

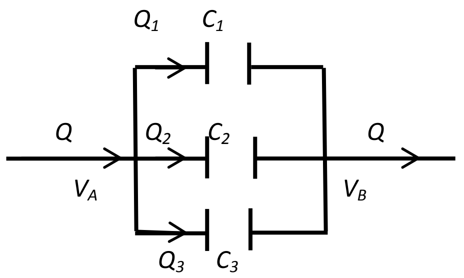


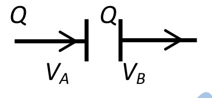
La d.d.p sera $\quad V = V_1 - V_2 = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L} ln\frac{R_2}{R_1}$ *ainsi la capacité sera* **:** $\boxed{\boldsymbol{C = \frac{2\pi\varepsilon_0 L}{ln\frac{R_2}{R_1}}}}$

3.3/ Association des condensateurs :

3.3.1/ Condensateurs en parallèle :

Dans ce cas tous les condensateurs sont mis à la même différence de potentielle (ddp) donc à la même tension U = V_A-V_B =V_1 =V_2 =V_3 :





$$U = V_A - V_B = \frac{Q}{C_{éq}}$$

Comme : $U = V_1 = V_2 = V_3 = V_A - V_B$

Alors : $V_A - V_B = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2} = \frac{Q_3}{C_3}$

Puisque la charge totale : $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$

Alors on aura : $(V_A - V_B).C_{éq} = (V_A - V_B).C_1 + (V_A - V_B).C_2 + (V_A - V_B).C_3$

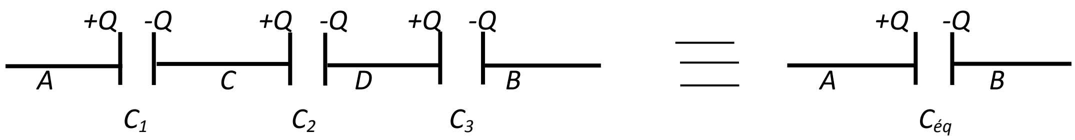
Donc : $C_{éq} = C_1 + C_2 + C_3$

D'une façon générale, si on a « n » condensateurs en parallèle alors la capacité équivalente sera :

$$\boxed{\boldsymbol{C_{éq} = \sum_{i=1}^{n} C_i}}$$

3.3.2/ Condensateurs en série :

Soit des condensateurs placés en série, si la première armature du premier condensateur porte une charge $+Q$ alors l'autre armature prendra la charge $-Q$ comme cette dernière est reliée à l'armature du deuxième condensateur par un fil conducteur, alors une charge $+Q$ apparaîtra sur cette dernière.



La ddp entre les points A et B est égal à la somme des différentes tensions (ddp) :

$$(V_A - V_B) = (V_A - V_C) + (V_C - V_D) + (V_D - V_B) \qquad ①$$

Comme : $\begin{cases} V_A - V_C = \frac{Q}{C_1} \\ V_C - V_D = \frac{Q}{C_2} \\ V_D - V_B = \frac{Q}{C_3} \end{cases}$ *et* $V_A - V_B = \frac{Q}{C_{éq}}$

Alors l'égalité ① devient : $\frac{Q}{C_{éq}} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \frac{Q}{C_3}$

C'est-à-dire : $\frac{1}{C_{éq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$

D'une façon générale, si on a « n » condensateurs en série alors la capacité équivalente sera :

$$\boxed{\frac{1}{C_{éq}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_n}}$$

3.4/ Energie interne d'un condensateur :

La quantité d'énergie emmagasinée par un condensateur est égale au travail accompli pour le charger (voir paragraphe 2.2):

$$dW = V.dq = \frac{q}{C} dq$$

L'énergie interne totale (emmagasinée) sera :

$$W = \int dW = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

Comme : $Q = V.C$

Ce travail emmagasiné sous forme d'énergie potentielle électrique s'écrit :

$$\boxed{W = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} QV}$$