Domaine de définition

Exercice :

Déterminer le domaine de définition D_f des fonctions suivantes :

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \to f(x) = \frac{x+1}{2x-1}$$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} \,/\, f(x) \quad existe\}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} \,/\, 2x-1 \neq 0\}$

$2x-1 \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{1}{2}$

Donc $D_f = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\} = \left]-\infty, \frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$

2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \to f(x) = \sqrt{1-x^2}$$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} \,/\, 1-x^2 \geq 0\}$

$1-x^2 \geq 0 \Rightarrow x \in [-1,1]$ car le signe de $(1-x^2)$ est

x		-1		1	
	-	0	+	0	-

Donc $D_f = [-1,1]$

3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \to f(x) = \frac{2-x}{\sqrt{1-3x}}$$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} \,/\, 1-3x > 0\}$

$1-3x > 0 \Rightarrow -3x > -1$

$\Rightarrow x < \frac{1}{3}$

Donc $D_f = \left]-\infty, \frac{1}{3}\right[$.

4. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \to f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$$

$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} \,/\, 1+x \neq 0 \wedge \frac{1-x}{1+x} > 0\right\}$

$1+x \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$

$\frac{1-x}{1+x} > 0 \Rightarrow x \in]-1,1[$ car le signe de $\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$ est le signe de $[(1-x)(1+x)]$

x		-1		1	
	-	0 ‖	+	0	-

Donc $D_f =]-1,1[$.

5. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \to f(x) = \frac{2e^x}{1+e^{-x}}$$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / 1 + e^{-x} \neq 0\}$

$1 + e^{-x} = 0 \Rightarrow e^{-x} = -1$ impossible car $\forall x \in \mathbb{R},\ e^{-x} > 0$.

Donc $D_f = \mathbb{R}$

6. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \to f(x) = \sqrt{-\sqrt{x}}$$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 0 \wedge -\sqrt{x} \geq 0\}$

On a $\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x} \geq 0$

Donc : $-\sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow x = 0$

Alors $D_f = \{0\}$.

7. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \to f(x) = \sqrt{x - \sqrt{x}}$$

$\boldsymbol{D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 0 \wedge x - \sqrt{x} \geq 0\}}$

$$\begin{aligned} x \geq 0 \wedge x - \sqrt{x} \geq 0 &\Rightarrow x \geq 0 \wedge x \geq \sqrt{x} \\ &\Rightarrow x \geq 0 \wedge x^2 \geq x \\ &\Rightarrow x \geq 0 \wedge x^2 - x \geq 0 \end{aligned}$$

x		0		1	
	+	0	-	0	+

Donc $D_f = [1,+\infty[\cup \{0\}$.

8.

Soit $h(x) = (f(x))^{g(x)}$ définie sur $D_h = D_f \cap D_g \cap \{x \in D_f \ / \ f(x) > 0\}$

$f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 0 \wedge 1 + x > 0\}$

$1 + x > 0 \Rightarrow x > -1$

$D_f =]-1,0[\cup]0,+\infty[$

9. $f(x) = \left(\dfrac{x-1}{x+2}\right)^{x+3}$

$$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} / x + 2 \neq 0 \wedge \frac{1-x}{x+2} > 0\right\}$$

$x+2 \neq 0 \Rightarrow x \neq -2$

$\frac{1-x}{x+2} > 0 \quad ((1+x)(x+2) > 0)$

$D_f =]-\infty,-2[\cup]1,+\infty[$