Exercice sur les relations binaires

Exercice 01 : Sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$, on considère la relation $\mathcal{R}$ définie par :

$$\forall (a;b);(c;d)\in \mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$$

$$\boxed{(a;b)\,\mathcal{R}\,(c;d) \iff a\cdot c>0 \text{ et } b=d.}$$

1) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

2) Déterminer $cl(-2;3)$ et $cl(2;-3)$.

Exercice 02 : On définit sur $\mathbb{Z}$ une relation $\mathcal{R}$ par $\forall x,y\in\mathbb{Z}$

$$\boxed{x\,\mathcal{R}\,y \iff \exists k\in\mathbb{Z} : x-y=2k}$$

1) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

2) Déterminer $cl(1)$; $cl(2)$; $cl(0)$ et $cl(-1)$.

3) Détermine l'ensemble quotient $\mathbb{Z}\backslash\mathcal{R}$.

Exercice 03 : Sur $\mathbb{R}$, on considère la relation binaire, notée $\mathcal{R}$ et définit par : $\forall x,y\in\mathbb{R}$:

$$\boxed{x\,\mathcal{R}\,y \iff x^2+y^2\leq 1 \text{ ou } x=y}$$

1) Les propositions suivantes sont elles vraies ?

$1\,\mathcal{R}\,1$; $1\,\mathcal{R}\,\frac{1}{2}$; $1\,\mathcal{R}\,0$; $0\,\mathcal{R}\,\frac{1}{2}$

2) Vérifier que $\mathcal{R}$ ni transitive ni antisymétrique.

3) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation réflexive et symétrique.

4) Déterminer les éléments des ensembles suivants :

$A=\{x\in\mathbb{R} ; x\,\mathcal{R}\,\tfrac{1}{2}\}$; $B=\{x\in\mathbb{R} ; x\,\mathcal{R}\,2\}$.

Exercice 04: On définit sur $\mathbb{N}^*$ une relation binaire $\mathcal{R}$ par :

$$\boxed{\forall x,y\in\mathbb{N}^*;\ x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists n\in\mathbb{N}^* : x=y^n}$$

1) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre.

2) L'ordre est-il total ou partial?

Exercice 05: Sur $[0;+\infty[$, on considère une relation binaire $\mathcal{R}$ définie par: $\forall x,y\in[0;+\infty[$

$$\boxed{x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}\leq\sqrt{y^2+1}}$$

1) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre.

2) Montrer que l'ordre est total.

Exercice 06:

On définit sur $\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$, une relation $\mathcal{R}$ par : $\forall(a;b);(c;d)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$

$$\boxed{(a;b)\mathcal{R}(c;d) \Leftrightarrow a-c=\frac{a}{c}-1 \text{ et } b\leq d}$$

1) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation réflexive et antisymétrique.

2) Montrer que $\mathcal{R}$ n'est pas symétrique

Exercice 07: Sur $\mathbb{R}^2$, on considère une relation binaire $\mathcal{R}$ définie par: $\forall(a;b);(c,d)\in\mathbb{R}^2$

$$\boxed{(a;b)\mathcal{R}(c;d) \Longleftrightarrow a-c=0 \text{ et } b-d\leq 0}$$

) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre.

2) Les propositions suivantes sont elles vraies? $(1,2)\mathcal{R}(1,3)$ $(-2,3)\mathcal{R}(0,1)$ et $(0,1)\mathcal{R}(-2;3)$.

3) L'ordre est-il total ?

Solution :

Exercice 01 : Sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, on considère la relation $\mathcal{R}$ définie par : $\forall (a,b);(c,d) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$

$$(a,b)\,\mathcal{R}\,(c,d) \iff a\cdot c > 0 \text{ et } b = d$$

1) On montre que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

a) Réflexivitée : Soit $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$:

$$(a,b)\,\mathcal{R}\,(a,b) \iff a\cdot a > 0 \text{ et } b = b$$
$$\iff \underbrace{a^2 > 0}_{\checkmark} \ \underline{\text{et}} \ \underbrace{b = b}_{\checkmark}$$

est vraie car "=" est réflexive et $\forall a \in \mathbb{R}^*$ $a^2 > 0$.

b) symétrie : Soient $(a,b);(c,d) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

$$(a,b)\,\mathcal{R}\,(c,d) \iff a\cdot c > 0 \text{ et } b = d$$
$$\Rightarrow c\cdot a > 0 \text{ et } d = b$$
$$\Rightarrow (c,d)\,\mathcal{R}\,(a,b)$$

car le produit "x" est commutative et "=" est symétrique. Donc $\mathcal{R}$ est symétrique.

c) Transitivitée : Soient $(a,b);(c,d)(e,f) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} (a,b)\,\mathcal{R}\,(c,d) \\ \text{et} \\ (c,d)\,\mathcal{R}\,(e,f) \end{cases} \iff \begin{cases} a\cdot c > 0 \ \text{①} \text{ et } b = d \ \text{③} \\ \text{et} \\ c\cdot e > 0 \ \text{②} \text{ et } d = f \ \text{④} \end{cases}$$

① x ② $\Rightarrow a\cdot c^2\cdot e > 0 \Rightarrow a\cdot e > 0$ car $c^2 > 0$.

③ et ④ $\Rightarrow b = f$ car "=" est transitive.

alors $a\cdot e > 0$ et $b = f \Rightarrow (a,b)\,\mathcal{R}\,(e,f)$

donc $\mathcal{R}$ est transitive.

D'après a), b) et c) on conclue que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

2) Déterminons $cl(-2,3)$ et $cl(2,-3)$.

- $cl(-2,3) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} : (x,y)\,\mathcal{R}\,(-2,3)\}$

$\hookrightarrow (x,y)\,\mathcal{R}\,(-2,3)$ c-à-d $x \times (-2) > 0$ et $y = 3$

c-à-d $-2x > 0$ et $y = 3 \Rightarrow x < 0$ et $y = 3$.

$\Rightarrow x \in]-\infty; 0[$ et $y \in \{3\}$.

$\Rightarrow (x,y) \in]-\infty, 0[\times \{3\}$

$\Rightarrow cl(-2,3) =]-\infty, 0[\times \{3\}$.

• $cl(2,-3) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} ; (x,y) R (2,-3)\}$

de même manière on trouve:

$cl(2,-3) =]0,+\infty[\times \{-3\}$.

Exercice 02: On définit sur $\mathbb{Z}$ une relation R par: $\forall x,y \in \mathbb{Z} ; xRy \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x-y = 2k$

1) On montre que R est une relation d'équivalence.

a) Réflexivité: soit $x \in \mathbb{Z}$.

$xRx \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x - x = 2k$.

$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : 0 = 2k$.

$\exists k = 0 \in \mathbb{Z} : 0 = 2 \times 0$ donc R est réflexive.

b) Symétrie: Soient $x,y \in \mathbb{Z}$.

$xRy \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x-y = 2k$.

$x-y = 2k \Rightarrow -(x-y) = -2k$

$\Rightarrow y-x = 2(-k)$

$\exists k' = -k \in \mathbb{Z} : y-x = 2k'$ donc R est symétrique.

c) Transitivité: Soient $x,y,z \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{cases} xRy \\ \wedge \\ yRz \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \exists k_1 \in \mathbb{Z} : x-y = 2k_1 \quad \text{--- } ① \\ \wedge \\ \exists k_2 \in \mathbb{Z} : y-z = 2k_2 \quad \text{--- } ② \end{cases}$$

$① + ② \Rightarrow x-z = 2k_1 + 2k_2 \Rightarrow x-z = 2(k_1+k_2)$

$\exists k_3 = (k_1+k_2) \in \mathbb{Z} : x-z = 2k_3$.

donc R est transitive.

D'après a), b) et c) on conclu que R est une relation d'équivalence.

2) Déterminons $cl(1)$; $cl(2)$; $cl(0)$ et $cl(-1)$.

• $cl(1) = \{x \in \mathbb{Z} ; xR1\}$.

$\hookrightarrow xR1 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x-1 = 2k$

$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x = 2k+1$

Donc $cl(1) = \{2k+1 ; k \in \mathbb{Z}\}$.

$= \{\dots, -3, -1, 1, 3, 5, \dots\}$

• $cl(2) = \{x \in \mathbb{Z} ; xR2\}$.

$\hookrightarrow xR2 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x-2 = 2k$

$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x = 2k+2$

$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x = 2(\underbrace{k+1}_{k'})$

$\Rightarrow \exists k' \in \mathbb{Z} : x = 2k'$.

donc $cl(2) = \{2k' ; k' \in \mathbb{Z}\}$.

$= \{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots\}$.

• $cl(0) = \{x \in \mathbb{Z} ; xR0\}$.

$\hookrightarrow xR0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x-0 = 2k$

$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x = 2k$.

donc $cl(0) = cl(2)$.

• $cl(-1) = \{x \in \mathbb{Z} ; xR(-1)\}$

$\hookrightarrow xR(-1) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x-(-1) = 2k$

$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x = 2k-1$.

Donc $cl(-1) = \{2k-1 ; k \in \mathbb{Z}\}$

$= \{\ldots, -5; -3; -1; 1, 3, \ldots\}$

$= cl(1)$.

3) L'ensemble quotient.

$\mathbb{Z} \backslash R = \{cl(a) ; a \in \mathbb{Z}\}$.

$= \{cl(1) ; cl(2)\}$.

Les autres classes sont égaux à $cl(1)$ ou $cl(2)$

Exercice 04: Sur $\mathbb{N}^*$ on considère la relation binaire, notée R et définie par : $\forall x, y \in \mathbb{N}^*$

$xRy \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}^* : x = y^n$.

1) On montre que R est une relation d'ordre.

a) Réflexivitée: Soit $x \in \mathbb{N}^*$.

$xRx \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}^* : x = x^n$.

$\exists n = 1 \in \mathbb{N}^* : x = x^1$.

Donc R est réflexive.

b) Antisymétrie : Soient $x, y \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{cases} x R y \\ \wedge \\ y R x \end{cases} \iff \begin{cases} \exists n_1 \in \mathbb{N}^* : x = y^{n_1} & \text{— (1)} \\ \wedge \\ \exists n_2 \in \mathbb{N}^* : y = x^{n_2} & \text{— (2)} \end{cases}$$

On remplace (1) dans (2) on obtient :

$$x = (x^{n_2})^{n_1} \Rightarrow x = x^{n_1 \cdot n_2} \Rightarrow n_1 \cdot n_2 = 1$$

$$\Rightarrow n_1 = 1 \wedge n_2 = 1 \text{ car } n_1, n_2 \in \mathbb{N}.$$

De (1) on trouve $x = y^1$ c-à-d $x = y$

Donc R est antisymétrique.

c) Transitivitée : Soient $x, y, z \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{cases} x R y \\ \wedge \\ y R z \end{cases} \iff \begin{cases} \exists n_1 \in \mathbb{N}^* : x = y^{n_1} & \text{— (1)} \\ \wedge \\ \exists n_2 \in \mathbb{N}^* : y = z^{n_2} & \text{— (2)} \end{cases}$$

On remplace (2) dans (1) on obtient :

$$x = (z^{n_2})^{n_1} \Rightarrow x = z^{n_2 \cdot n_2}$$

$$\exists n_3 = n_1 \cdot n_2 \in \mathbb{N}^* : x = z^{n_3} \Rightarrow x R z$$

Donc R est transitive.

D'après a), b) et c) on conclue que R est une relation d'ordre.

2) L'ordre est partial car :

$\exists x = 3$ et $y = 2$: $3 \neq 2^n$ et $2 \neq 3^n$.

c-à-d $2 \bar{R} 3$ et $3 \bar{R} 2$.

Exercice 05 : Sur $[0; +\infty[$, on considère une relation binaire R définie par : $\forall x, y \in [0, +\infty[$

$$x R y \iff \sqrt{x^2+1} \leq \sqrt{y^2+1}.$$

1) On montre que R est une relation d'ordre.

a) Réflexivitée : Soit $x \in [0; +\infty[$.

$x R x \iff \sqrt{x^2+1} \leq \sqrt{x^2+1}$ est vraie car "$\leq$" est réflexive.

b) Antisymétrie : Soient $x, y \in \mathbb{R}_+$.

$$\begin{cases} x R y \\ \wedge \\ y R x \end{cases} \iff \begin{cases} \sqrt{x^2+1} \leq \sqrt{y^2+1} & \text{— (1)} \\ \wedge \\ \sqrt{y^2+1} \leq \sqrt{x^2+1} & \text{— (2)} \end{cases}$$

(1) et (2) $\Rightarrow \sqrt{x^2+1} = \sqrt{y^2+1}$ car "$\leq$" est antisymétrique.

$$\Rightarrow x^2+1 = y^2+1 \Rightarrow x^2 = y^2$$

$\Rightarrow |x| = |y| \Rightarrow x = y$ " car $x, y \geq 0$ "

donc R est antisymétrique.

c) Transitivité : Soient $x, y, z \in \mathbb{R}_+$.

$$\begin{cases} xRy \\ \wedge \\ yRz \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+1} \leq \sqrt{y^2+1} \quad \ldots (1) \\ \wedge \\ \sqrt{y^2+1} \leq \sqrt{z^2+1} \quad \ldots (2) \end{cases}$$

(1) et (2) $\Rightarrow \sqrt{x^2+1} \leq \sqrt{z^2+1}$ car " $\leq$ " est transitive

$\Rightarrow xRz$

donc R est transitive.

D'après a), b) et c) on conclue que R est une relation d'ordre.

2) On montre que R est d'ordre total.

*) $x, y \in \mathbb{R}_+ \Leftrightarrow 0 \leq x \leq y \vee 0 \leq y \leq x$

a) si $0 \leq x \leq y$ alors $x^2 \leq y^2$

$\Rightarrow x^2+1 \leq y^2+1 \Rightarrow \sqrt{x^2+1} \leq \sqrt{y^2+1}$

$\Rightarrow xRy$.

b) si $0 \leq y \leq x$ alors $y^2 \leq x^2$

$\Rightarrow \sqrt{y^2+1} \leq \sqrt{x^2+1} \Rightarrow yRx$.

Donc $\forall x, y \in \mathbb{R}_+$ on a $xRy \vee yRx$.

donc l'ordre est total.

Exercice 06 : On définit sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, $\forall (a,b), (c,d) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$. une relation R par :

$$(a,b) R (c,d) \Leftrightarrow a - c = \frac{a}{c} - 1 \text{ et } b \leq d.$$

1) On montre que R est une relation réflexive et antisymétrique.

a) Réflexivité : Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

$(a,b) R (a,b) \Leftrightarrow a - a = \frac{a}{a} - 1$ et $b \leq b$

$\Rightarrow 0 = 0$ et $b \leq b$ est vraie car " = " et " $\leq$ " sont réflexives.

b) Antisymétrie : Soient $(a,b), (c,d) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$

$$\begin{cases} (a,b) R (c,d) \\ \wedge \\ (c,d) R (a,b) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - c = \frac{a}{c} - 1 \ (1) \text{ et } b \leq d \ (3) \\ \wedge \\ c - a = \frac{c}{a} - 1 \ (2) \text{ et } d \leq b \ (4) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow (1) + (2) \Rightarrow 0 = \frac{a}{c} + \frac{c}{a} - 2$

$\Rightarrow \dfrac{a^2 + c^2 - 2ac}{ac} = 0$

$\Rightarrow a^2 + c^2 - 2ac = 0$

$\Rightarrow (a-c)^2 = 0 \Rightarrow a-c=0 \Rightarrow a=c$ -- ⑤

③ et ④ $\Rightarrow b=d$ --⑥ car " $\leq$ " est antisymétrique.

D'après ⑤ et ⑥ on conclue que R est antisymétrique.

2) On montre que R n'est symétrique :

On prend $(a,b)=(2,3)$ et $(c,d)=(2,4)$.

donc : $(a,b) R (c,d) \Leftrightarrow \underbrace{2-2=\frac{2}{2}-1}_{V}$ et $\underbrace{3\leq 4}_{V}$

est vraie.

mais $(c,d) \overline{R} (a,b)$ car : $\underbrace{2-2=\frac{2}{2}-1}_{V}$ $\boxed{\text{et}}$ $\underbrace{4\leq 3}_{F}$

est fausse.

c-à-d $(2,3) R (2,4)$ et $(2,4) \overline{R} (2,3)$

donc R n'est pas symétrique.

Exercice 07 : Sur $\mathbb{R}^2$, on considère une relation binaire R définie par :

$\forall (a,b);(c,d) \in \mathbb{R}^2$:

$$\boxed{(a,b) R (c,d) \Leftrightarrow a-c=0 \text{ et } b-d\leq 0}$$

1) On montre que R est une relation d'ordre.

a) Réflexivitée : Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$.

$(a,b) R (a,b) \Leftrightarrow a-a=0$ et $b-b\leq 0$

$\Rightarrow 0=0$ et $0\leq 0$

est vraie " $=$ " et " $\leq$ " sont réflexives.

b) Antisymétrie : Soient $(a,b);(c,d)\in\mathbb{R}^2$.

$$\begin{cases}(a,b) R (c,d)\\ \wedge\\ (c,d) R (a,b)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-c=0 \text{ et } b-d\leq 0\\ \wedge\\ c-a=0 \text{ et } d-d\leq 0\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=c \text{ ① et } b\leq d \text{ — ③}\\ \wedge\\ c=a \text{ ② et } d\leq b \text{ — ④}\end{cases}$$

③ et ④ $\Rightarrow b=d$ — ⑤ car " $\leq$ " est antisymétrique

① et ⑤ $\Rightarrow (a,b)=(c,d)$ donc R est antisymétrique.

c) Transitivitée :

Soient $(a,b);(c,d)$ et $(e,f)\in\mathbb{R}^2$.

$$\begin{cases}(a,b) R (c,d)\\ \wedge\\ (c,d) R (e,f)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-c=0 \text{ ① et } b\leq d \text{ — ③}\\ \wedge\\ c-e=0 \text{ ② et } d\leq f \text{ — ④}\end{cases}$$

$① + ② \Rightarrow (a-c)+(c-e)=0$

$\Rightarrow a-e=0$ — ⑤

$③$ et $④ \Rightarrow b \leq f$ — ⑥ car "$\leq$" est transitive.

$⑤$ et $⑥ \Rightarrow (a,b) R (e,f) \Rightarrow R$ est transitive.

D'après a), b) et c) on conclue que R est une relation d'ordre.

2) La véritée des prps suivantes:

$(1,2) R (1,3) \Leftrightarrow 1-1=0$ et $2-3 \leq 0$

$\Leftrightarrow \underbrace{0=0}_{V}$ et $\underbrace{-1 \leq 0}_{V}$

donc $(1,2) R (1,3)$ est vraie.

- $(-2,3) R (0,1) \Leftrightarrow -2-0=0$ et $3-1 \leq 0$

$\Leftrightarrow \underbrace{-2=0}_{F}$ et $\underbrace{2 \leq 0}_{F}$

donc $(-2,3) R (0,1)$ est fausse c-à-d $(-2,3) \overline{R} (0,1)$

- $(0,1) R (-2,3) \Leftrightarrow 0-(-2)=0$ et $1-3 \leq 0$

$\Leftrightarrow \underbrace{2=0}_{F}$ et $\underbrace{-2 \leq 0}_{V}$

donc $(0,1) R (-2,3)$ est fausse c-à-d $(0,1) \overline{R} (-2,3)$.

3) L'ordre est partial car:

$\exists (a,b) = (-2,3)$ et $(c,d) = (0,1)$ tels que

$(-2,3) \overline{R} (0,1)$ et $(0,1) \overline{R} (-2,3)$.

Exercice 03 :

Sur $\mathbb{R}$, on considère la relation binaire notée R et définie par : $\forall x,y \in \mathbb{R}$, $xRy \Leftrightarrow x^2+y^2 \leq 1$ ou $x=y$.

1) Les propositions suivantes sont-elles vraies ?

$1R0$; $0R\frac{1}{2}$; $1R\frac{1}{2}$; $1R1$

2) Vérifier que R est ni transitive et ni antisymétrique.

3) Montrer que R est une relation réflexive et symétrique.

4) Déterminer les éléments des ensembles suivants :

$A = \{x \in \mathbb{R} \,;\, xR\frac{1}{2}\}$; $B = \{x \in \mathbb{R} \,;\, xR2\}$

Solution :

1) . $1R0$ est vraie car $(\underbrace{1^2+0^2 \leq 1}_{V}$ ou $\underbrace{1=0}_{F})$ est vraie.

. $0R\frac{1}{2}$ est vraie car $(0^2+(\frac{1}{2})^2 \leq 1$ ou $0=\frac{1}{2})$ est vraie.

. $1R\frac{1}{2}$ est fausse car $(\underbrace{1^2+(\frac{1}{2})^2 \leq 1}_{F}$ ou $\underbrace{1=\frac{1}{2}}_{F})$ est fausse

. $1R1$ est vraie car $(\underbrace{1^2+1^2 \leq 1}_{F}$ ou $\underbrace{1=1}_{V})$ est vraie

2) Vérifions que R est ni transitive et ni antisymétrique :

D'après la question ① on a :

a) $1R0$ et $0R\frac{1}{2}$ mais $1 \not R \frac{1}{2}$ alors R n'est pas transitive.

b) $1R0$ et $0R1$ mais $0 \neq 1$ alors R n'est pas antisymétrique.

3) Montrons que $\mathcal{R}$ est réflexive et symétrique.

a) $\mathcal{R}$ est réflexive $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}\ ;\ x\mathcal{R}x$?

Soit $x \in \mathbb{R}$ on a la proposition $(\underbrace{x^2+x^2 \leq 1}_{F}$ ou $\underbrace{x=x}_{V})$

est vraie alors $x\mathcal{R}x$ d'où $\mathcal{R}$ est réflexive.

b) $\mathcal{R}$ est symétrique $\Leftrightarrow \forall x,y \in \mathbb{R},\ x\mathcal{R}y \overset{?}{\Rightarrow} y\mathcal{R}x$.

Soient $x, y \in \mathbb{R}$ alors $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^2+y^2 \leq 1$ ou $x=y$

$\Rightarrow y^2+x^2 \leq 1$ ou $y=x$

"car $+$ est commutative et $=$ est réflexive"

$\Rightarrow y\mathcal{R}x$,

d'ou $\mathcal{R}$ est symétrique.

4) Déterminons les éléments des ensembles suivants

$A = \{x \in \mathbb{R} : x\mathcal{R}\frac{1}{2}\}$; $B = \{x \in \mathbb{R} ; x\mathcal{R}2\}$.

- $A = cl(\frac{1}{2})$.

$x\mathcal{R}\frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2+(\frac{1}{2})^2 \leq 1$ ou $x=\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x^2 \leq \frac{3}{4}$ ou $x=\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow |x| \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $x=\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow -\frac{\sqrt{3}}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $x=\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x \in [-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}] \cup \{\frac{1}{2}\}$

D'où $A = [-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}] \cup \{\frac{1}{2}\}$

$= [-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}]$ "car $\frac{1}{2} \in [-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}]$"

- $B = cl(2)$.

$x\mathcal{R}2 \Leftrightarrow x^2+2^2 \leq 1$ ou $x=2 \Leftrightarrow \underset{\text{(impossible)}}{x^2 \leq -3}$ ou $x=2$

$\Leftrightarrow x=2$. D'ou $B=\{2\}$.