CHAPITRE 3: Matrices et Déterminants

**Cours N$^\circ$2**

# 1 Matrice échelonnée, Échelonnée réduite, Opérations élémentaires et Rang d'une matrice:

## 1.1 Matrice échelonnée:

**Définition:**

- Une matrice $A$ est dite échelonnée ou sous la forme échelonnée si le nombre de zéro (0) précédent le premier élément non nul d'une ligne augmente de ligne en ligne.
- Le premier élément non nul de chaque ligne dans une matrice échelonnée s'appelle **le pivot**.

**Exemples:**

**1/** La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{2} & -3 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{7} & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est échelonnée.

En effet le nombre de 0 précédent le premier élément non nul dans la première ligne est égal à 1, dans la deuxiéme est égal à 3, dans la troisième est égal à 4 et dans la quatrième est égal à 5. Donc le nombre de 0 augmente de ligne en ligne.
Les pivots sont en gras.

**2/** La matrice $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 4 & 9 \\ 0 & 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ n'est pas échelonnée.

## 1.2 Matrice échelonnée réduite:

**Définition:**

Une matrice $A$ est dite échelonnée réduite ou sous la forme échelonnée réduite ligne si elle est échelonnée, et le premier élément non nul d'une ligne est égal à 1 et si dans la colonne correspondante (colonne pivot ) tous les autres éléments sont nuls. C'est à dire 1 est le seul élément non nul dans sa colonne.

**Exemples:**

**1/** La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est échelonnée réduite ligne.

En effet la matrice $A$ est échelonnée et en plus dans chaque ligne le premier élément non nul (le pivot) lorsqu'il existe est égal à 1 et c'est le seul élément non nul dans sa colonne.

**2/** La matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 8 \end{pmatrix}$ est échelonnée réduite ligne.

**3/** la matrice identité est une matrice échelonnée réduite ligne.

## 1.3 Opérations élémentaires:

**Définition:** Soit une matrice $A$.
On désigne par $L_i$ la $i^{ème}$ ligne de $A$.
Faire une opération élémentaire sur les lignes de la matrice $A$ consiste à:
-Permuter 2 lignes (i.e. $L_i \leftrightarrow L_j$, $i \neq j$).
- Multiplier une ligne par une constante non nulle (i.e. $L_i \longleftarrow kL_i$, $k \in \mathbb{R}^*$).
- Ajouter à une ligne "k" fois une autre ligne (i.e. $L_i \longleftarrow L_i + kL_j$, $k \in \mathbb{R}^*$).

**Théorème :** On peut transformer toute matrice en une matrice échelonnée (ou échelonnée réduite), en effectuant des opérations élémentaires sur les lignes.

**Exemples: A/** Mettre les matrices suivantes sous leurs forme échelonnée

**1/** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & -4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

On désigne par $L_1, L_2, L_3$ et $L_4$ la première ligne, la deuxième ligne, la troisième ligne et la quatrième ligne respectivement de la matrice $A$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & -4 & 4 & 3 \end{pmatrix} \underset{L_4 \longleftarrow L_4 - 3L_1}{\overset{\substack{L_2 \longleftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \longleftarrow L_3 + L_1}}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & -4 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_3 \leftrightarrow L_4}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \underset{L_3 \longleftarrow L_3 + 2L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

**2/** $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 6 & 6 & 0 \end{pmatrix} \underset{L_3 \longleftarrow L_3 - 2L_1}{\overset{L_2 \longleftarrow L_2 + L_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

$\overset{L_3 \longleftarrow L_3 + L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

**B/** Mettre les matrices $A$ et $B$ sous leurs forme échelonnée réduite ligne

**1/** $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 3 & 7 \\ 4 & 5 & 10 \end{pmatrix} \overset{L_1 \longleftarrow \frac{1}{2} L_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 7 \\ 4 & 5 & 10 \end{pmatrix} \overset{L_2 \longleftarrow L_2 - 3L_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & -3 & -2 \end{pmatrix}$

$\overset{L_1 \longleftarrow \frac{1}{-3} L_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & -3 & -2 \end{pmatrix} \underset{L_3 \longleftarrow L_3 + 3L_2}{\overset{L_1 \longleftarrow L_1 - 2L_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

**2/** $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & -4 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \underset{L_3 \longleftarrow L_3 - L_1}{\overset{L_2 \longleftarrow L_2 - 2L_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix} \overset{L_2 \longleftarrow \frac{1}{2} L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

$\underset{L_3 \longleftarrow L_3 + 3L_2}{\overset{L_1 \longleftarrow L_1 - 2L_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \overset{L_3 \longleftarrow \frac{1}{3} L_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{L_1 \longleftarrow L_1 - 2L_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

## 1.4 Rang d'une matrice:

**Définition:** Soit $A$ une matrice.

- Le rang de $A$, noté $rg(A)$, est le nombre de lignes non nulles de sa forme échelonnée.
- Ce rang est indépendant de la manière dont on échelonne la matrice $A$.

**Exemples:** Calculer le rang des matrices suivantes

1/ $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -8 & 3 \\ -2 & 9 & -4 \end{pmatrix}$

Pour calculer le rang d'une matrice, il suffit de l'échelonner.

$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -8 & 3 \\ -2 & 9 & -4 \end{pmatrix} \underset{L_3 \longleftarrow L_3 + L_1}{\overset{L_2 \longleftarrow L_2 - 2L_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 6 & -3 \end{pmatrix} \overset{L_3 \longleftarrow L_3 + 3L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

La matrice échelonnée posséde deux lignes non nulles, donc le rang de $A$ est égal à 2. $rg(A) = 2$.

2/ $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

Echelonnons d'abord la matrice $B$.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \underset{L_3 \longleftarrow L_3 - L_1}{\overset{L_2 \longleftarrow L_2 - 2L_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 8 & 1 \end{pmatrix} \overset{L_3 \longleftarrow L_3 - 2L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$rg(B) = 3$, car la matrice échelonnée associée à $B$ a trois lignes non nulles.

**Propriétés:** Soient $A$ et $B$ deux matrices.

**1/** $rg(A) = rg({}^tA)$

**2/** Si le produit matriciel $AB$ est défini alors $rg(AB) \leq min(rg(A), rg(B))$