CHAPITRE 4: **Fonction réelle à une variable réelle**

Cours 2

Limite d'une fonction

1. **Voisinage :**

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, $V \subset \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$.

Définition1 :

V est dit *voisinage* de $x_0 \Leftrightarrow \exists]a,b[\subset V : x_0 \in]a,b[$

Exemples :

1. $]1,5[$ est un voisinage de 3 car $\exists]a,b[=]2,4[\subset]1,5[$ et $3 \in]2,4[$.

2. $]3,6[$ n'est pas un voisinage de 3.

Notation : $\mathcal{V}(x_0)$ est l'ensemble des voisinages de x_0.

Définition2 :

Un voisinage de x_0 est *centré*, s'il est de la forme $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$ avec $0 < \varepsilon < 1$

Remarque :

Tout voisinage de x_0 contient un voisinage centré en x_0.

2. **Limite d'une fonction :**

Soit f une fonction définie sur un voisinage V de point x_0, sauf peut être en x_0.

On dit que f admet une limite l lorsque x tend vers x_0 si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall \underset{x \neq x_0}{x \in V} : |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

On note $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ ou $f \to l$ qd $x \to x_0$

On lit f tend vers l quand x tend vers x_0.

Remarque :

On peut remplacer $<$ par $\leq$.

Exemple :

Montrer que $\lim\limits_{x \to 4} (3x + 2) = 14$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in D_f = \mathbb{R} : |x - 4| < \alpha \Rightarrow |f(x) - 14| < \varepsilon$$

$$|f(x) - 14| = |3x + 2 - 14| = |3x - 12| = |3(x - 4)| = 3|x - 4| < \varepsilon \Rightarrow |x - 4| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Donc il suffit de prendre $\alpha = \frac{\varepsilon}{3}$

3. **Limite à gauche et à droite :**

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$

3.1. Voisinage à gauche :

Voisinage à gauche de x_0 est un intervalle de la forme $]a, x_0]$ avec $a < x_0$.

$V_g(x_0)$ est l'ensemble des voisinages à gauche de x_0.

3.2. Voisinage à droite :

Voisinage à droite de x_0 est un intervalle de la forme $[x_0, a[$ avec $x_0 < a$

$V_d(x_0)$ est l'ensemble des voisinages à droite de x_0.

3.3. limite à gauche :

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie sur un voisinage $V_1 \in V_g(x_0)$.

f admet une limite l_1 à gauche de x_0 si et seulement si :

$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in V_1 : -\alpha < x - x_0 < 0 \Rightarrow |f(x) - l_1| < \varepsilon$

On note : $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ <}} f(x) = l_1$ ou $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = l_1$.

3.4. Limite à droite :

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie sur un voisinage $V_2 \in V_d(x_0)$.

f admet une limite l_2 à droite de x_0 si et seulement si :

$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in V_2 : 0 < x - x_0 < \alpha \Rightarrow |f(x) - l_2| < \varepsilon$

On note : $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ >}} f(x) = l_2$ ou $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = l_2$.

4. Généralisation sur les limites :

1. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall A > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in D_f : |x - x_0| < \alpha \Rightarrow f(x) > A$.
2. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall A > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in D_f : |x - x_0| < \alpha \Rightarrow f(x) < -A$
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists B > 0, \forall x \in D_f : x > B \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$
4. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists B > 0, \forall x \in D_f : x < -B \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$
5. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall A > 0, \exists B > 0, \forall x \in D_f : x > B \Rightarrow f(x) > A$
6. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall A > 0, \exists B > 0, \forall x \in D_f : x < -B \Rightarrow f(x) < -A$

Exercice :

Ecrire les propositions suivantes en utilisant les quantificateurs :

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ **2.** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

5. Propriétés et théorèmes de base sur les limites :

Soit f une fonction définie au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$ et $l \in \mathbb{R}$.

Théorème1 :

1. Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ alors l est unique.
2. Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ alors f est bornée au voisinage de x_0.

Proposition1 :

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ >}} f(x) = l$

Exemple : f admet-elle une limite en x_0 ?

1. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+2} & x > 2 \\ x^2 - 2 & x < 2 \end{cases} \quad x_0 = 2$

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} \left(\sqrt{x+2}\right) = \sqrt{4} = 2$$

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 2 \\ <}} \left(x^2 - 2\right) = 4 - 2 = 2$$

On a $\lim_{\substack{x \to 2 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} f(x) = 2$ (existe, finie et unique) donc f admet une limite en 2

Et $\lim_{x \to 2} f(x) = 2$.

2. $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ $\quad x_0 = 0$.

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{x}{x}\right) = \lim_{x \to 0^+} (1) = 1$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \left(\frac{-x}{x}\right) = \lim_{x \to 0^-} (-1) = -1$$

On a $\lim_{x \to 0^+} f(x) \neq \lim_{x \to 0^-} f(x)$, donc f n'admet pas de limite en 0.

3. Montrer que la fonction ‘’ Partie entière’’ n'admet pas de limite en aucun $t \in \mathbb{Z}$.
Soit $t \in \mathbb{Z}$.
Pour $x \in [t, t+1[$: $E(x) = t$ donc $\lim_{\substack{x \to t \\ >}} E(x) = t$

Pour $x \in [t-1, t[$ $E(x) = t-1$ donc $\lim_{\substack{x \to t \\ <}} E(x) = t-1$

On en déduit que $E(x)$ n'admet pas de limite en $t \in \mathbb{Z}$.

6. Règles de calcul :

Soient f, g deux fonctions définies au voisinage V de x_0 ($x_0 \in \mathbb{R}$) et $l, l' \in \mathbb{R}$.

Théorème :

1. $\lim_{x \to x_0} f(x) = l \Rightarrow \left|\lim_{x \to x_0} f(x)\right| = |l|$

Si $l = 0$ alors $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \Leftrightarrow \left|\lim_{x \to x_0} f(x)\right| = 0$

2. Si $f > 0$ ou $f \geq 0$ $\forall x \in V$ et $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ alors $l \geq 0$.

3. Si $f < g$ ou $f \leq g$ $\forall x \in V$ alors

a. $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ et $\lim_{x \to x_0} g(x) = l'$ alors $l \leq l'$

b. $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$

c. $\lim_{x \to x_0} g(x) = -\infty$ alors $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$

4. Soit h une fonction définie au voisinage V de x_0

Si $f < h < g$ ou $f \leq h \leq g$ $\forall x \in V$ et $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = l$ alors $\lim_{x \to x_0} h(x) = l$.

Cette propriété est appelée théorème des gendarmes.

Exemple :

Calculer $\lim\limits_{x \to 0} xE\left(x - \frac{1}{x}\right)$

$\forall x \in \mathbb{R}^*$ **:** $x - \frac{1}{x} - 1 < E\left(x - \frac{1}{x}\right) \leq x - \frac{1}{x}$

$x \to 0^+$ **:** $x\left(x - \frac{1}{x} - 1\right) < xE\left(x - \frac{1}{x}\right) \leq x\left(x - \frac{1}{x}\right)$

$$\Rightarrow x^2 - 1 - x < xE\left(x - \frac{1}{x}\right) \leq x^2 - 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0^+}\left(x^2 - 1 - x\right) \leq \lim_{x \to 0^+} xE\left(x - \frac{1}{x}\right) \leq \lim_{x \to 0^+}\left(x^2 - 1\right)$$

$$\Rightarrow -1 \leq \lim_{x \to 0^+} xE\left(x - \frac{1}{x}\right) \leq -1$$

Donc $\lim\limits_{x \to 0^+} xE\left(x - \frac{1}{x}\right) = -1 \ldots.(1)$

$x \to 0^-$ **:** $x\left(x - \frac{1}{x}\right) \leq xE\left(x - \frac{1}{x}\right) < x\left(x - \frac{1}{x} - 1\right)$

$$\Rightarrow x^2 - 1 \leq xE\left(x - \frac{1}{x}\right) < x^2 - 1 - x$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0^-}\left(x^2 - 1\right) \leq \lim_{x \to 0^-} xE\left(x - \frac{1}{x}\right) \leq \lim_{x \to 0^-}\left(x^2 - 1 - x\right)$$

$$\Rightarrow -1 \leq \lim_{x \to 0^-} xE\left(x - \frac{1}{x}\right) \leq -1$$

Donc $\lim\limits_{x \to 0^-} xE\left(x - \frac{1}{x}\right) = -1 \ldots.(2)$

De (1) et (2) on a $\lim\limits_{x \to 0} xE\left(x - \frac{1}{x}\right) = -1$

Proposition :

Si f une fonction bornée au voisinage de x_0 et $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ (x_0 fini ou infini) alors $\lim\limits_{x \to x_0}\left(f(x)g(x)\right) = 0$.

Exemples :

1. $\lim\limits_{x \to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ car $\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq 1$ et $\lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$.
2. $\lim\limits_{x \to 0} \sin x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ car $\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq 1$ et $\lim\limits_{x \to 0} \sin x = 0$.

7. Opérations sur les limites :

Soient f , g deux fonctions définies au voisinage V de x_0 ($x_0 \in \mathbb{R}$) et $l, l' \in \mathbb{R}$.

1. Limite d'une somme de deux fonctions :

a. Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ et $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l'$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} (f+g)(x) = l + l'$

b. Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \in \{+\infty, -\infty\}$ et $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l'$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} (f+g)(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$

c. Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} (f+g)(x) = +\infty$

d. Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} (f+g)(x) = -\infty$

2. Limite de produit de deux fonctions :

a. Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ et $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l'$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} (f.g)(x) = l.l'$

b. Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \in \{+\infty, -\infty\}$ et $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l' \in \mathbb{R}_+^*$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} (f.g)(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$

c. Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \in \{+\infty, -\infty\}$ et $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l' \in \mathbb{R}_-^*$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} (f.g)(x) = -\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$

d. Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} (f.g)(x) = +\infty$

e. Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} (f.g)(x) = +\infty$

f. Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} (f.g)(x) = -\infty$

3. Limite de l'inverse d'une fonction :

On suppose que f ne s'annule pas sur V

a. Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}^*$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} \left(\dfrac{1}{f(x)} \right) = \dfrac{1}{l}$

b. Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \in \{+\infty, -\infty\}$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} \left(\dfrac{1}{f(x)} \right) = 0$

c. Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ et $f > 0 \ \forall x \in V$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} \left(\dfrac{1}{f(x)} \right) = +\infty$

d. Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ et $f < 0 \ \forall x \in V$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} \left(\dfrac{1}{f(x)} \right) = -\infty$

4. Limite de la composition de deux fonctions :

Soient I et J deux parties de $\mathbb{R}$, f une fonction définie sur I et g une fonction définie sur J tel que $f(I) \subseteq J$ donc $g \circ f$ est bien définie.

Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \mathrm{a}$ et $\lim\limits_{y \to a} g(y) = l$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} (g \circ f) = l$

8. Formes Indéterminées :

$$\frac{0}{0},\ \frac{\pm\infty}{\pm\infty},\ 0\times\pm\infty,\ \frac{-\infty+\infty}{+\infty-\infty},\ \left(0^+\right)^0,\ \left(+\infty\right)^0,\ 1^{\pm\infty}$$

9. Limites remarquables :

I/ 1. $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ 2. $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$ 3. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

4. $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0$ 5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$

II/ 1. $\lim\limits_{x\to -\infty} e^x = 0$ 2. $\lim\limits_{x\to +\infty} e^x = +\infty$ 3. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$

4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$ 5. $\lim\limits_{x\to -\infty} xe^x = 0$.

III/ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

Rappel :

$\forall \alpha \in \mathbb{R}$:

1. $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$
   $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

2. $\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha$
$\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$

3. $\sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha$
$\cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha$

4. $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha$

$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right) = \sin\alpha$

5. $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right) = \cos\alpha$

$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\sin\alpha$

Exercice :

Calculer les limites suivantes :

A/ 1. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{1}{1-x^2}\right)$

$$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-x^2}\right) \quad (-\infty+\infty)\ \text{FI}$$

$$\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-x^2}\right) \quad (+\infty-\infty)\ \text{FI}$$

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-x^2}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{1+x-1}{1-x^2}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{1-x^2}\right)$$

$$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-x^2}\right)=\frac{1}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-x^2}\right)=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right) \quad (+\infty-\infty)$ FI

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1-x}{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}=\frac{1}{+\infty}=0$$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\ln x) \quad (+\infty-\infty)$ FI

$$\lim_{x\to+\infty}(x-\ln x)=\lim_{x\to+\infty}x\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)=+\infty(1-0)=+\infty$$

B/ 1. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{\dfrac{1}{x}+x}}{\sqrt{\dfrac{1}{x}-x}} \quad \left(\dfrac{+\infty}{+\infty}\right)$ FI

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{\frac{1}{x}+x}}{\sqrt{\frac{1}{x}-x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{\frac{1+x^2}{x}}}{\sqrt{\frac{1-x^2}{x}}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{x}}}{\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{x}}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{1}}=1$$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(1+e^x\right)}{x} \quad \left(\dfrac{+\infty}{+\infty}\right)$ FI

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+e^x\right)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(e^x\left(1+e^{-x}\right)\right)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(e^x\right)+\ln\left(1+e^{-x}\right)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x}{x}+\frac{\ln\left(1+e^{-x}\right)}{x}\right]=1+\frac{0}{+\infty}=1+0=1$$

C/

I. 1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{-x^2+3x-2}{x^2-4}$ $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ FI

$$\lim_{x\to 2}\frac{-x^2+3x-2}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{-(x-2)(x-1)}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{-(x-1)}{(x+2)}=-\frac{1}{3}$$

2. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}$ **,** $a>0$ $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ FI

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)}{(x-a)\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)}=\lim_{x\to a}\frac{x-a}{(x-a)\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)}=\lim_{x\to a}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}=\frac{1}{2\sqrt{a}}\,.$$

3. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$ $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ FI

$$\lim_{x\to 4}\frac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}=\lim_{x\to 4}\frac{\left(3-\sqrt{5+x}\right)\left(3+\sqrt{5+x}\right)\left(1+\sqrt{5-x}\right)}{\left(1-\sqrt{5-x}\right)\left(1+\sqrt{5-x}\right)\left(3+\sqrt{5+x}\right)}=\lim_{x\to 4}\frac{(9-(5+x))\left(1+\sqrt{5-x}\right)}{(1-(5-x))\left(3+\sqrt{5+x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(4-x)\left(1+\sqrt{5-x}\right)}{(-4+x)\left(3+\sqrt{5+x}\right)}=\lim_{x\to 4}\frac{-\left(1+\sqrt{5-x}\right)}{\left(3+\sqrt{5+x}\right)}=-\frac{1}{3}$$

II. 1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(5x)}{x}$ $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ FI

On pose $y=5x$ donc $x=\dfrac{y}{5}$

Quand $x\to 0,\ y\to 0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(5x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{5\sin y}{y}=5\lim_{x\to 0}\frac{\sin y}{y}=5\times 1=5\,.$$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx}{x}$ $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ FI

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x\cos x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)\left(\frac{1}{\cos x}\right)=1\times 1=1\,.$$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg(kx)}{x}$**,** $k\neq 0$ $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ FI

On pose $y=kx$ donc $x=\dfrac{y}{k}$

Quand $x\to 0,\ y\to 0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg(kx)}{x}=\lim_{x\to 0}k\frac{tg(y)}{y}=k\lim_{x\to 0}\frac{tg(y)}{y}=k\times 1=k\,.$$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}\quad\left(\dfrac{0}{0}\right)$ FI

<u>1$^{\text{ère}}$ méthode</u>

$$\forall\alpha\in\mathbb{R},\ \cos(2\alpha)=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$
$$=1-2\sin^2\alpha$$

Donc $1-\cos(2\alpha)=2\sin^2\alpha$

$$2\alpha=x\Rightarrow\alpha=\frac{x}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right).\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{x.x}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right).\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{4\left(\frac{x}{2}\right).\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$=\frac{2}{4}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right)\left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right)=\frac{1}{2}\times 1\times 1=\frac{1}{2}.$$

<u>2$^{\text{ème}}$méthode</u>

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\left(\frac{1}{1+\cos x}\right)=1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

5. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}\quad\left(\dfrac{0}{0}\right)$ FI

On pose $y=\dfrac{\pi}{2}-x$ donc $x=\dfrac{\pi}{2}-y$

Quand $x\to\dfrac{\pi}{2}\quad y\to 0$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}=\lim_{y\to 0}\frac{1-\sin\left(\frac{\pi}{2}-y\right)}{y^2}=\lim_{y\to 0}\frac{1-\cos y}{y^2}=\frac{1}{2}$$ (d'après **4.**)

6. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin^2 x}{1+\cos x}\quad\left(\dfrac{0}{0}\right)$ FI

On pose $y=\pi-x$ donc $x=\pi-y$

Quand $x\to\pi\quad y\to 0$

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin^2 x}{1+\cos x}=\lim_{x\to\pi}\frac{\sin^2(\pi-y)}{1+\cos(\pi-y)}=\lim_{x\to\pi}\frac{\sin^2 y}{1-\cos y}=\lim_{x\to\pi}\frac{\sin^2 y(1+\cos y)}{(1-\cos y)(1+\cos y)}=\lim_{x\to\pi}\frac{\sin^2 y(1+\cos y)}{1-\cos^2 y}$$

$$=\lim_{x\to\pi}\frac{\sin^2 y(1+\cos y)}{\sin^2 y}=\lim_{x\to\pi}(1+\cos y)=2$$

D/ **1.** $\lim_{x\to 0^+}(\ln x.\sin x)$ $\quad(-\infty.0)$ FI

$$\lim_{x\to 0^+}(\ln x.\sin x)=\lim_{x\to 0^+}\left((x\ln x).\left(\frac{\sin x}{x}\right)\right)=0\times 1=0$$

2. $\lim_{x\to 0^+}\left(x\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)$ $\quad(0.(+\infty))$ FI

<u>1ère méthode</u>

$$\lim_{x\to 0^+}\left(x\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(x\sqrt{\frac{x+1}{x}}\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x}{\sqrt{x}}\sqrt{x+1}\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(\sqrt{x}\sqrt{x+1}\right)=0\times 1=0$$

<u>2ème méthode</u>

$$\lim_{x\to 0^+}\left(x\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right)=\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x^2+x}=0\ .$$

E/ 1. $\lim_{x\to 0^+}(x^x)$ $\quad(0^0)$ FI

$$\lim_{x\to 0^+}(x^x)=\lim_{x\to 0^+}e^{\ln(x^x)}=\lim_{x\to 0^+}e^{x\ln x}=e^{\lim_{x\to 0^+}(x\ln x)}=e^0=1$$

2. $\lim_{x\to 1^+}\left(\sqrt{x}-1\right)^{x-1}$ (0^0) FI

$$\left(\sqrt{x}-1\right)^{x-1}=e^{\ln\left(\sqrt{x}-1\right)^{x-1}}$$

$$=e^{(x-1)\ln\left(\sqrt{x}-1\right)}$$

$$\lim_{x\to 1^+}\left(\sqrt{x}-1\right)^{x-1}=\lim_{x\to 1^+}e^{(x-1)\ln\left(\sqrt{x}-1\right)}=e^{\lim_{x\to 1^+}(x-1)\ln\left(\sqrt{x}-1\right)}$$

$\lim_{x\to 1^+}(x-1)\ln\left(\sqrt{x}-1\right)$ $\quad(0.(-\infty))$ FI

$$\lim_{x\to 1^+}\left[(x-1)\ln\left(\sqrt{x}-1\right)\right]=\lim_{x\to 1^+}\left[\left(\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}\right)\left(\sqrt{x}-1\right)\ln\left(\sqrt{x}-1\right)\right]=\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}\right)\lim_{x\to 1^+}\left[\left(\sqrt{x}-1\right)\ln\left(\sqrt{x}-1\right)\right]$$

$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}\right)$ $\left(\frac{0}{0}\right)$ FI

$$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}\right)=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\left(\sqrt{x}+1\right)=2$$

$$\lim_{x\to 1^+}\left(\sqrt{x}-1\right)\ln\left(\sqrt{x}-1\right)=0$$

$$\lim_{x\to 1^+}(x-1)\ln\left(\sqrt{x}-1\right)=2\times 0=0$$

$$\lim_{x\to 1^+}\left(\sqrt{x}-1\right)^{x-1}=e^0=1$$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+3x)^{\frac{1}{4x}}$ $\quad (+\infty)^0$ FI

$$\lim\limits_{x\to+\infty}(1+3x)^{\frac{1}{4x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{\ln(1+3x)^{\frac{1}{4x}}} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{4x}\ln(1+3x)} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+3x)}{4x}}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+3x)}{4x}$ $\quad \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)$ FI

$$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+3x)}{4x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(1+3x)\ln(1+3x)}{4x.(1+3x)} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1+3x}{4x}\right)\left(\frac{\ln(1+3x)}{1+3x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1+3x}{4x}\right)\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(1+3x)}{1+3x}\right)$$

$$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1+3x}{4x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x}{4x} = \frac{3}{4}$$

$$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(1+3x)}{1+3x}\right) = 0$$

$$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(1+3x)}{1+3x}\right) = \frac{3}{4}\times 0 = 0$$

$$\lim\limits_{x\to+\infty}(1+3x)^{\frac{1}{4x}} = e^0 = 1$$

4. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ $\quad (1^{\pm\infty})$ FI

Proposition :

Soient f et g deux fonctions définies sur un même voisinage de x_0 , $V\in\mathcal{V}(x_0)$.

Supposons que $f(x)\neq 1,\ \forall x\in V \quad x\neq x_0$

Et $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=1 \quad \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\pm\infty$

Donc $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x))^{g(x)} = 1^{\pm\infty}$ se présente sous forme indéterminée.

Si $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-1)g(x)=\lambda$ alors $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x))^{g(x)} = e^{\lambda}$.

$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ $\quad (1^{\pm\infty})$ FI

$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\lambda}$ et $\lambda = \lim\limits_{x\to 0}(f(x)-1)g(x)$ avec $f(x)=1+x$ et $g(x)=\frac{1}{x}$

$$\lambda = \lim\limits_{x\to 0}(1+x-1)\left(\frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to 0}(x)\left(\frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x}{x}\right) = \lim\limits_{x\to 0}(1) = 1$$

Donc $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e^1 = e$

5. $\lim\limits_{x\to 1}\left(x^{\frac{1}{\sqrt{x}-1}}\right)$ $\quad (1^{\pm\infty})$ FI

$\lim\limits_{x\to 1}\left(x^{\frac{1}{\sqrt{x}-1}}\right) = e^{\lambda}$ et $\lambda = \lim\limits_{x\to 1}(f(x)-1)g(x)$ avec $f(x)=x$ et $g(x)=\frac{1}{\sqrt{x}-1}$

$$\lambda = \lim_{x\to 1}(x-1)\left(\frac{1}{\sqrt{x}-1}\right) = \lim_{x\to 1}\left(\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}\right) \quad \left(\frac{0}{0}\right) \text{ FI}$$

$$\lambda = \lim_{x\to 1}\left(\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}\right) = \lim_{x\to 1}\left(\frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}\right) = \lim_{x\to 1}\left(\frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{x-1}\right) = \lim_{x\to 1}(\sqrt{x}+1) = 2$$

Donc $\lim_{x\to 1}\left(x^{\frac{1}{\sqrt{x}-1}}\right) = e^2$.

6. $\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{3+x}{4+x}\right)^{2x}$ $(1^{+\infty})$ FI

$$\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{3+x}{4+x}\right)^{2x} = e^{\lambda} \text{ et } \lambda = \lim_{x\to +\infty}(f(x)-1)g(x) \text{ avec } f(x) = \frac{3+x}{4+x} \text{ et } g(x) = 2x$$

$$\lambda = \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{3+x}{4+x}-1\right)(2x) = \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{3+x-4-x}{4+x}\right)(2x) = \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{-1}{4+x}\right)(2x) = \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{-2x}{4+x}\right) = \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{-2x}{x}\right) = -2$$

donc $\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{3+x}{4+x}\right)^{2x} = e^{-2}$.

7. $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$ $(1^{+\infty})$ FI

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\lambda} \text{ et } \lambda = \lim_{x\to 0}(f(x)-1)g(x) \text{ avec } f(x) = \cos x \text{ et } g(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$\lambda = \lim_{x\to 0}(\cos x - 1)\left(\frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x - 1}{x^2}\right) \quad \left(\frac{0}{0}\right) \text{ FI}$$

$$\lambda = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x - 1}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{(\cos x - 1)(\cos x + 1)}{x^2(\cos x + 1)} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x - 1}{x^2(\cos x + 1)} = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin^2 x}{x^2(\cos x + 1)}$$

$$\lambda == \lim_{x\to 0}\frac{-\sin^2 x}{x^2(\cos x + 1)} = -\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\left(\frac{1}{\cos x + 1}\right) = (-1)\times\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

Donc $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{2}}$.