Université Saad Dahlab- Blida1
Module : Maths 1

Année universitaire 2022/2023
Première Année LMD TCST

"Fiche TD n°2

"Développements limités "

Exercice 1. *Trouver $DL_3(f)(0)$ dans les cas suivants :*

$f_1(x) = cosx + ln(\frac{1+x}{1-x}) - 2e^x$, $f_2(x) = (sinx)^2\sqrt{2+x}$, $f_3(x) = \frac{x^3+x^2+x-1}{\sqrt{1-x}}$,

$f_4(x) = ln(cos(2x))$, $f_5(x) = \sqrt[3]{1+sin2x}$, $f_6(x) = (\frac{1}{cosx})^{\frac{1}{x^2}}$

Donner $DL_n(f)(x_0)$ pour les fonctions suivantes :

1. $f(x) = \sqrt{2+x}, n = 2, x_0 = 3$
2. $h(x) = 2x^3 + x^2 + 5x + 1, n = 2, x_0 = 2$
3. $g(x) = ln(sinx), n = 3, x_0 = \frac{\pi}{2}$

Trouver le développement limité au voisinage de l'infini des fonctions suivantes :

1. $f(x) = ln(x + \sqrt{1+x^2}) - ln(x), n = 4, V(+\infty)$
2. $g(x) = \sqrt{\frac{x+4}{x-1}}, n = 3, V(+\infty)$

En utilisant les développements limités, calculer les limites :

$\lim_{x\to 0} \frac{arcsinx - x}{x - sinx}$, $\lim_{x\to 1} \frac{lnx}{sin(\pi x)}$, $\lim_{x\to 1} \frac{e^{x^2} - cosx}{x^2}$

Exercice 2. *Calculer le développement limité à l'ordre 3 au point 0 de $f(x) = arctan(\frac{x}{x+2})$ de trois façons :*

1. *Par la formule de Taylor-Young.*
2. *Par composition de développements limités.*
3. *En commençant par calculer le développement limité de f'.*

Exercice 3. *Soit pour $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $f(x)$ définie par : $f(x) = (x^2 + \alpha)ln(2 + sin(x))$:*

1. *Montrer que f admet un développement limité dans un voisinage de 0.*
2. *Donner en fonction de α, le développement limité de f, à l'ordre 3, dans un voisinage de 0.*
3. *Déterminer l'équation de la tangente au graphe de f au point d'abscisse 0. puis préciser la position du graphe par rapport à cette droite.*
4. *Pour quelle valeur de α on a :$f^{(2)}(0) = ln(4)$?*

Exercice 4. *Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sqrt{1+x^2}\, exp(-x)$*

1. *Déterminer le développement limité de f à l'ordre 3 au voisinage de 0. .*
2. *En déduire le développement limité de $g(x) = \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\, exp(\frac{x-1}{x})$ à l'ordre 2 au voisinage de $+\infty$.*
3. *Déterminer une équation de l'asymptote au $v(+\infty)$,ainsi que la position de cette asymptote par rapport à la courbe de f.*

1)	e^x	=	$1+\frac{x}{1!}+\frac{1}{2!}x^2+\ldots+\frac{1}{n!}x^n+o(x^n)=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+o(x^n)$,
2)	$\log(1+x)$	=	$x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\ldots\frac{1}{n}x^n+o(x^n)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}+o(x^n)$,
3)	$(1+x)^\alpha$	=	$1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)=$
		=	$1+\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}x^k+o(x^n)$,
4)	$\frac{1}{1-x}$	=	$1+x+x^2+\ldots+x^n+o(x^n)=\sum_{k=0}^{n}x^k+o(x^n)$,
5)	$\frac{1}{1+x}$	=	$1-x+x^2-x^3+\ldots+(-1)^nx^n+o(x^n)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^kx^k+o(x^n)$,
6)	$\sqrt{1+x}$	=	$1+\frac{x}{2}-\frac{1}{2.4}x^2+\frac{1.3}{2.4.6.}x^3+\ldots+(-1)^{n+1-1}\frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2.4.6\ldots(2n)}x^n+o(x^n)=$
		=	$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{(2k-3)!!}{(2k)!!}x^k+o(x^n)$.
7)	$\frac{1}{\sqrt{1+x}}$	=	$1-\frac{1}{2}x+\frac{1.3}{2.4}x^2-\frac{1.3.5}{2.4.6}x^3+\ldots+(-1)^n\frac{1.3\ldots(2n-3)}{2.4\ldots(2n)}x^n+o(x^n)=$
		=	$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{1.3\ldots(2k-3)}{2.4\ldots(2k)}x^k+o(x^n)$,
8)	$\sin x$	=	$x-\frac{x^3}{3!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+2})=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+o(x^{2n+2})$,
9)	$\cos x$	=	$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1})=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}+o(x^{2n+1})$,
10)	$\mathrm{tg}x=\frac{\sin x}{\cos x}$	=	$x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\frac{17}{315}x^7+\ldots+o(x^{2n+1})$,
11)	$\mathrm{ctg}x=\frac{\cos x}{\sin x}$	=	$\frac{1}{x}-\frac{1}{3}x-\frac{1}{45}x^3-\frac{2}{945}x^5+\ldots+a_{2n+1}x^{2n+1}o(x^{2n+2})$,
12)	$\arcsin x$	=	$x+\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5}+\ldots+\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+o(x^{2n+2})=$
		=	$x+\sum_{k=1}^{n}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\frac{x^{2k+1}}{2k+1}+o(x^{2n+2})=\sum_{k=0}^{n}\frac{(2k)!}{4^k(k!)^2}\frac{x^{2k+1}}{2k+1}+o(x^{2n+2})$,
13)	$\arccos x$	=	$\frac{\pi}{2}-\arcsin x=\frac{\pi}{2}-\sum_{k=0}^{n}\frac{(2k)!}{4^k(k!)^2}\frac{x^{2k+1}}{2k+1}+o(x^{2n+1})$,
14)	$\mathrm{arctg}x$	=	$x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5+\ldots+\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}+o(x^{2n+2})=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}x^{2k+1}+o(x^{2n+2})$,
15)	$\mathrm{arcctg}x$	=	$\frac{\pi}{2}-\mathrm{arctg}x=\frac{\pi}{2}-\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}x^{2k+1}+o(x^{2n+2})$,
16)	$\mathrm{sh}x$	=	$\frac{x}{1!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+2})=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+o(x^{2n+2})$,

Fiche TD n°2 : Développements limités.

Ex 1

A) Trouver le $DL_3(f)(0)$:

① $f_1(x) = \cos x + \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - 2e^x$

On a

- $\boxed{\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)}$

et

- $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln(1+x) - \ln(1+(-x))$

$\ln(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 + o(t^3)$

D'où

$\ln(1+x) = x - \cancel{\frac{1}{2}x^2} + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$

$\ln(1-x) = (-x) - \frac{1}{2}(-x)^2 + \frac{1}{3}(-x)^3 + o(x^3)$

$= -x - \cancel{\frac{1}{2}x^2} - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$

Donc

$$\boxed{\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)}$$

$$-2e^x = -2\left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right)$$

$$\boxed{-2e^x = -2 - 2x - x^2 - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)}$$

Donc

$$\boxed{f_1(x) = -1 - \frac{3}{2}x^2 + o(x^3)}$$

② $f_2(x) = (\sin x)^2 \cdot \sqrt{2+x}$

On a

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$$

D'où

$$(\sin x)^2 = \left(x - \frac{1}{6}x^3\right)^2 + o(x^3)$$

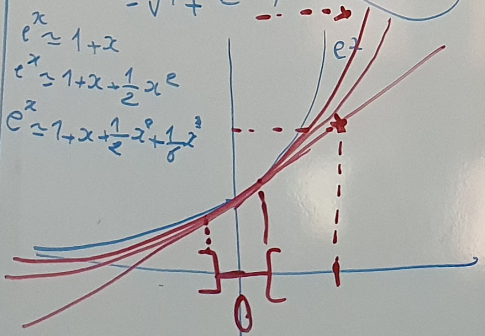
$$= x^2 + o(x^3)$$

• $\sqrt{2+x} =$

$$\sqrt{1+t} \underset{V(0)}{=} 1 + \frac{t}{2} - \frac{1}{8}t^2 + \frac{1}{16}t^3 + o(t^3)$$

$$\sqrt{2+x} = \sqrt{1+(1+x)}$$

$$= \sqrt{1+t}$$ Faux



$$\sqrt{2+x} = \sqrt{2\left(1+\frac{x}{2}\right)} = \sqrt{2}\sqrt{1+\frac{x}{2}}$$

$$= \sqrt{2}\sqrt{1+t}$$

D'où

$$\sqrt{1+\left(\frac{x}{2}\right)} = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{16}\left(\frac{x}{2}\right)^3 + o(x^3)$$

$$= 1 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{32}x^2 + \frac{1}{128}x^3 + o$$

Donc

$$\boxed{\sqrt{2+x} = \sqrt{2}\left(1 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{32}x^2 + \frac{1}{128}x^3 + o(x^3)\right)}$$

Donc

$$f_2(x) = \sqrt{2}\left(x^2 + \frac{1}{4}x^3 + o(x^3)\right)$$

$$= \sqrt{2}x^2 + \frac{\sqrt{2}}{4}x^3 + o(x^3)$$

3) $f_3(x) = \dfrac{x^5 + x^2 + x - 1}{\sqrt{x-1}}$

On a

$$\begin{array}{l|l}
\cancel{-1} + \cancel{x} + x^2 & 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 \\
\cancel{1} - \cancel{\frac{1}{2}x} - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 & \hline -1 + \frac{1}{2}x + \frac{9}{8}x^2 + \frac{9}{16}x^3 \\
\hline \cancel{\frac{1}{2}x} + \frac{7}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 & \\
-\cancel{\frac{1}{2}x} + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{16}x^3 & \\
\hline \cancel{\frac{9}{8}x^2} & \\
-\cancel{\frac{9}{8}x^2} + \frac{9}{16}x^3 & \\
\hline \frac{9}{16}x^3 &
\end{array}$$

D'où $f_3(x) = -1 + \frac{1}{2}x + \frac{9}{8}x^2 + \frac{9}{16}x^3 + o(x^3)$

$\sqrt{2+x} = \sqrt{2\left(1+\frac{x}{2}\right)} = \sqrt{2}\sqrt{1+\frac{x}{2}}$

$= \sqrt{2}\sqrt{1+t}$

D'où

$\sqrt{1+\left(\frac{x}{2}\right)} = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{16}\left(\frac{x}{2}\right)^3 + o(x^3)$

$= 1 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{32}x^2 + \frac{1}{128}x^3 + o(x^3)$

Donc

$\sqrt{2+x} = \sqrt{2}\left(1 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{32}x^2 + \frac{1}{128}x^3 + o(x^3)\right)$

Donc

$f_2(x) = \sqrt{2}\left(x^2 + \frac{1}{4}x^3 + o(x^3)\right)$

$= \sqrt{2}x^2 + \frac{\sqrt{2}}{4}x^3 + o(x^3)$

3) $f_3(x) = \dfrac{x^5 + x^2 + x - 1}{\sqrt{1-x}}$

On a

- $x^5 + x^2 + x - 1 = \boxed{-1 + x + x^2 + o(x^3)}$
- $\sqrt{1-x} = \sqrt{1+(-x)}$

$= 1 + \frac{1}{2}(-x) - \frac{1}{8}(-x)^2 + \frac{1}{16}(-x)^3 + o(x^3)$

$= \boxed{1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)}$

Série n°2. DL

20.02.2023
Tableau 1

Ex 1

A) $DL_n(f)(0)$

B) $DL_n(f)(x_0)$

$g(x)=\ln(\sin x)$, $n=3$ $\quad x_0=\frac{\pi}{2}$

DL(x_0) $\quad x_0\neq 0$

Changement de variable
$t=x-x_0$
$t\in V(0)$

Formule de Taylor-Young
$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}x+\frac{f''(x_0)}{2!}x^2+\dots$

On pose $t=x-\frac{\pi}{2}$

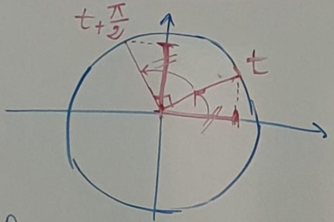
D'où $x=t+\frac{\pi}{2}$ et $t\xrightarrow[x\to\frac{\pi}{2}]{}0$

Donc

$\ln(\sin x)=\ln(\sin(t+\frac{\pi}{2}))$

$=\ln(\cos t)$

$\sin(t+\frac{\pi}{2})=\cos t$



$$\ln(\sin x)=\ln(1\underbrace{-\frac{1}{2}t^2+o(t^3)}_{X})$$

$$=\ln(1+X)\quad X\in V(0)$$

$$=X-\frac{1}{2}\underbrace{\cancel{X^2}}_{o(t^3)}+\frac{1}{3}\underbrace{\cancel{X^3}}_{o(t^3)}+\cancel{o(X^3)}$$

$$=\frac{-1}{2}t^2+o(t^3),\ \text{car } X^2=\frac{1}{4}t^4$$

$$\boxed{g(x)=\ln(\sin x)=\frac{-1}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2+o\left(\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^3\right)}$$

c) DL au $V(\infty)$

$g(x)=\sqrt{\frac{x+4}{x-1}}$, $n=3$ $\quad V(+\infty)$

On pose $t=\frac{1}{x}$ $\quad$ D'où $x=\frac{1}{t}$ et $t\xrightarrow[x\to+\infty]{}0^+$

D'où

$$\sqrt{\frac{x+4}{x-1}}=\sqrt{\frac{\frac{1}{t}+4}{\frac{1}{t}-1}}=\sqrt{\frac{\frac{1+4t}{t}}{\frac{1-t}{t}}}=\sqrt{\frac{1+4t}{1-t}}$$

$$\begin{array}{r|l} 1+4t & 1-t \\ \hline -1+t & 1+5t+5t^2+5t^3 \\ 5t & \\ -5t+5t^2 & \\ 5t^2 & \\ -5t^2+5t^3 & \\ 5t^3 & \end{array}$$

$$=\sqrt{1+\underbrace{5t+5t^2+5t^3+o(t^3)}_{Z\in V(0)}}$$

$$=\sqrt{1+Z}$$

$$=1+\frac{1}{2}Z-\frac{1}{8}Z^2+\frac{1}{16}Z^3+o(Z^3)$$

20.02.2023
Tableau :)

· $Z = 5t + 5t^2 + 5t^3 + o(t^3)$

· $Z^2 = Z.Z = (5t+5t^2+5t^3)(5t+5t^2+5t^3) + o(t^3)$

$= 25t^2 + 25t^3 + 25t^3 + o(t^3)$

$= 25t^2 + 50t^3 + o(t^3)$

· $Z^3 = Z.Z^2 = 125t^3 + o(t^3)$

D'où

$\sqrt{1+Z} = 1 + \frac{1}{2}(5t+5t^2+5t^3)$
$- \frac{1}{8}(25t^2+50t^3)$
$+ \frac{1}{16}125.t^3 + o(t^3)$

$= 1 + \frac{5}{2}t + \frac{5}{2}t^2 + \frac{5}{2}t^3$
$- \frac{25}{8}t^2 - \frac{50}{8}t^3$
$+ \frac{125}{16}t^3 + o(t^3)$

$= 1 + \frac{5}{2}t - \frac{5}{8}t^2 + \frac{65}{16}t^3 + o(t^3)$

Donc

$$\boxed{g(x) = 1 + \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{x} - \frac{5}{8}\frac{1}{x^2} + \frac{65}{16}\frac{1}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)}$$

D) Limites en utilisant les DL

$l_1 = \lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x - x}{x - \sin x}$ $\quad \frac{0}{0}$

On a $\arcsin(x) = x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$
$\sin(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$

D'où $l_1 = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x} + \frac{1}{6}x^3 - \cancel{x} + o(x^3)}{\cancel{x} - \cancel{x} + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)}$

$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{\frac{1}{6}x^3}{\frac{1}{6}x^3}\right) + \cancel{\lim_{x\to 0}(o(x^3))}$ 0

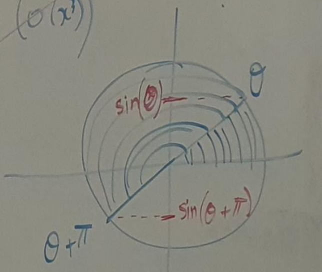
$= \boxed{1}$

$l_2 = \lim_{x\to 1} \left(\frac{\ln x}{\sin(\pi x)}\right)$

On pose $t = x-1$ d'où $x = t+1$ et $t \to 0$

$l_2 = \lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{\sin(\pi t + \pi)} = \lim_{t\to 0} \frac{t + o(t)}{-\sin(\pi t)}$

$= \lim_{t\to 0} \frac{t+o(t)}{-(\pi t + o(t))} = \frac{-1}{\pi}$



20.02.2023

Tableau 3

Ex.3

$\alpha \in \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2+\alpha).\ln(2+\sin x)$

1)

$$\left(\begin{array}{c} f \text{ est continue en } x_0 \\ \Updownarrow \\ DL_0(x_0) \text{ existe} \end{array} \right)$$

$$f(x) = a_0 x^0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \dots$$

$$\left(\begin{array}{c} f \text{ est dérivable en } x_0 \\ \Updownarrow \\ DL_1(x_0) \text{ existe} \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{c} f \text{ n-fois dérivable} \\ \Downarrow \\ DL_n(x_0) \text{ existe} \end{array} \right) \quad n \geq 1$$

On a

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \alpha \ln 2$$

$$f(0) = \alpha \ln 2$$

D'où f est continue en 0

Donc f admet un $DL_0(0)$

2) $DL_3(f)(0)$

On a

• $\boxed{x^2+\alpha = \alpha + x^2 + o(x^3)}$

On a $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$

$$\ln(2+\sin x) = \ln\left(2 + x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right)$$

$$= \ln\left(2\left(1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}x^3 + o(x^3)\right)\right)$$

$$= \ln 2 + \ln\Big(1 + \underbrace{\frac{1}{2}x - \frac{1}{12}x^3 + o(x^3)}_{y \in V(0)}\Big)$$

$\ln(1+t) =$

$$= \ln 2 + \ln(1+y)$$

$$= \ln 2 + \left(y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 + o(y^3)\right)$$

$-\frac{2}{24} + \frac{1}{24}$

• $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}x^3 + o(x^3)$ • $y^2 = y.y = \frac{1}{4}x^2 + o(x^3)$

• $y^3 = y.y^2 = \frac{1}{8}x^3 + o(x^3)$

$$\boxed{\begin{aligned} \ln(2+\sin x) &= \ln 2 + \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{12}x^3\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}x^2\right) + \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{8}x^3\right) + o(x^3) \\ &= \ln 2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{24}x^3 + o(x^3) \end{aligned}}$$

20.02.2023

Tableau 4

Donc

$$f(x) = \alpha \ln 2 + \frac{\alpha}{2}x - \frac{\alpha}{8}x^2 - \frac{\alpha}{24}x^3 + \ln(2)\, x^2 + \frac{1}{2}x^3 + o(x^3)$$

$$= \alpha \ln 2 + \frac{\alpha}{2}x^1 + \boxed{\left(\frac{-\alpha}{8} + \ln 2\right)x^2} + \left(\frac{-\alpha}{24} + \frac{1}{2}\right)x^3 + o(x^3)$$

3) * L'équation de la tangente (T) au graphe (C_f) de f au point $(0, f(0))$:

$$y = \alpha \ln(2) + \frac{\alpha}{2}x.$$

* La position de (C_f) par rapport à (T):

On étudie le signe de $f(x) - y$:

$$f(x) - y = \left(\frac{-\alpha}{8} + \ln 2\right)x^2 + o(x^2)$$

On a $x^2 \geq 0$.

- $\frac{-\alpha}{8} + \ln 2 = 0 \Rightarrow \frac{-\alpha}{8} = -\ln 2$
  $\Rightarrow \alpha = 8\ln 2$
- $\frac{-\alpha}{8} + \ln 2 > 0 \Rightarrow \frac{-\alpha}{8} > -\ln 2$
  $\Rightarrow \alpha < 8\ln 2$
- $\frac{-\alpha}{8} + \ln 2 < 0 \Rightarrow \alpha > 8\ln 2$

. Si $\alpha < 8\ln 2$ alors (C_f) au-dessus de (T).

. Si $\alpha > 8\ln 2$ alors (C_f) au-dessous de (T)

. Si $\alpha = 8\ln 2$ alors (C_f) traverse (T)

Donc

le point $(0, f(0))$ est un point d'inflexion.

4) Pour quelle valeur de α on a $f^{(2)}(0) = \ln 4$.

On a selon la formule de MacLaurin-Young:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \boxed{\frac{f^{(2)}(0)}{2!}}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + o(x^3)$$

Par identification de $DL_3(f)(0)$ avec cette formule on:

$$\frac{f^{(2)}(0)}{2!} = \frac{-\alpha}{8} + \ln 2 \Rightarrow \frac{\ln 4}{2} = \frac{-\alpha}{8} + \ln 2 \Rightarrow \frac{\cancel{2}\ln 2}{\cancel{2}} = \frac{-\alpha}{8} + \ln 2$$

$$\Rightarrow \frac{-\alpha}{8} = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha = 0}$$

Série n°2 : DL

Ex. 2 :

$f(x) = \arctan\left(\frac{x}{x+2}\right)$

Calculer le $DL_3(f)(0)$ avec 3 méthodes

1) Par la formule de Taylor-Young :

$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + o(x^3)$

- $f(0) = 0$
- $f'(x) = \left(\frac{x}{x+2}\right)' \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{x}{x+2}\right)^2} = \frac{1}{x^2+2x+2}$

$f'(0) = \frac{1}{2}$

- $f''(x) = \left(\frac{1}{x^2+2x+2}\right)' = \frac{-2x-2}{(x^2+2x+2)^2}$

$f''(0) = \frac{-1}{2}$

- $f^{(3)}(0) = \frac{1}{2}$

D'où

$f(x) = 0 + \frac{\frac{1}{2}}{1}x + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)}{2}x^2 + \frac{\frac{1}{2}}{6}x^3 + o(x^3)$

$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{12}x^3 + o(x^3)$

2) Par composition :

On a

$\frac{x}{x+2} = x \cdot \frac{1}{2+x} = x \cdot \frac{1}{2\left(1+\frac{x}{2}\right)} = x \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+\frac{x}{2}}$

$= \frac{1}{2}x \cdot \left(1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}x^3 + o(x^3)\right)$

$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}x^3 + o(x^3)$

D'où

$\arctan\left(\frac{x}{x+2}\right) = \arctan\left(\underbrace{\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}x^3 + o(x^3)}_{y}\right)$

$= \arctan(y) \qquad y \xrightarrow[x \to 0]{} 0$

$= y - \frac{1}{3}y^3 + o(y^3)$

- $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}x^3 + o(x^3)$
- $y^3 = \frac{1}{8}x^3 + o(x^3)$.

Donc

$f(x) = \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}x^3 + o(x^3)\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{8}x^3\right) + o(x^3)$

$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{12}x^3 + o(x^3)$

27.02.2023
Tableau 2

3) En commençant par le DL de f' :

$$f'(x) = \frac{1}{x^2+2x+2} = \frac{1}{2+2x+x^2} = \frac{1}{2\left(1+x+\frac{1}{2}x^2\right)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x+\frac{1}{2}x^2}$$

ou

$$\begin{array}{l|l} 1 & 2+2x+x^2 \\ \hline \vdots & \frac{1}{2}\cdots \end{array}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2 + o(x^2)$$

D'où

$$f(x) = f(0) + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$

$$\boxed{= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{12}x^3 + o(x^3)}$$

Ex 4 :

$$f(x) = \sqrt{1+x^2}\cdot e^{-x}$$

1) $DL_3(f)(0)$:

- $\sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)$
- $e^{-x} = 1 + (-x) + \frac{1}{2}(-x)^2 + \frac{1}{6}(-x)^3 + o(x^3)$
  $= 1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$

Donc

$$f(x) = 1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 + o(x^3)$$

$$= 1 - x + x^2 - \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)$$

2) DL de g à l'ordre 2 au $V(+\infty)$:

$$g(x) = \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\; e^{\frac{x-1}{x}}$$

On pose $t = \frac{1}{x}$ d'où $x = \frac{1}{t}$ et $t \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}$

$$\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\cdot e^{\frac{x-1}{x}} = \sqrt{1+t^2}\cdot e^{\frac{\frac{1}{t}-1}{\frac{1}{t}}} = \sqrt{1+t^2}\cdot e^{\frac{\frac{1-t}{t}}{1/t}}$$

$$= \sqrt{1+t^2}\; e^{1-t}$$

$$= \sqrt{1+t^2}\cdot e\cdot e^{-t}$$

$$= e\sqrt{1+t^2}\cdot e^{-t}$$

27.02.2023
Tableau 3

$$= e\cdot\left(1 - t + t^2 - \frac{2}{3}t^3 + o(t^3)\right)$$

$$= e - et + et^2 - \frac{2e}{3}t^3 + o(t^3)$$

$$\boxed{= e - e\cdot\frac{1}{x} + e\,\frac{1}{x^2} - \frac{2e}{3}\cdot\frac{1}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)}$$

3) DL

$\boxed{0 \quad x_0}$ $\qquad$ $\boxed{\infty}$ $\qquad$ $\boxed{\cancel{ax}+b}$

Tangente $\qquad$ Asymptote

$$f(x) = \underbrace{a_0 + a_1 x}\, + \underbrace{a_2 x^2}\dots$$

$$f(x) = \underbrace{a_0 + a_1(x - x_0)} + \underbrace{a_2(x - x_0)^2}\dots$$

$$f(x) = \underbrace{bx + a_0} + \underbrace{a_1\cdot\frac{1}{x}}$$

* L'équation de l'asymptote est $y = e$.

* On étudie le signe de $(g(x) - y)$:

$$g(x) - y = \left(e - e\cdot\frac{1}{x}\right) - (e) = -e\cdot\frac{1}{x} < 0$$

(car $x \in V(+\infty)$ d'où $\frac{1}{x} > 0$
et $-e < 0$)

Donc la courbe de g est au-dessous de l'asymptote.