Solution de l'exercice du dernier cours:

1°) Détermination de la vitesse de chaque phase :

V_0=8m/s   on sait que : $\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{dV}}{\boldsymbol{dt}}$ (avec a connue) $\rightarrow$ $\boldsymbol{dV = adt}$

- $\boldsymbol{t} \in [\mathbf{0}; \mathbf{2}]$: $a = -3m/s^2$

dV=-3dt $\rightarrow \int_{V_0=8}^{V} dV = \int_0^t -3dt \rightarrow V]_8^V = -3t]_0^t$

$V - 8 = -3t \rightarrow \boxed{V(t) = -3t + 8}$

$\nearrow$ V(0)=8m/s

$\searrow$ V(2)=2m/s

- $\boldsymbol{t} \in [\mathbf{2}; \mathbf{4}]$: $a = 0$ $\rightarrow$ V=C^{st} c.à.d   V(2)=V(4)=2m/s

- $\boldsymbol{t} \in [\mathbf{4}; \mathbf{8}]$: $a = 2m/s^2$

$\int_2^V dV = \int_4^t 2dt \rightarrow V]_2^V = 2t]_4^t$

alors $V - 2 = 2t - 8 \rightarrow \boxed{V(t) = 2t - 6}$

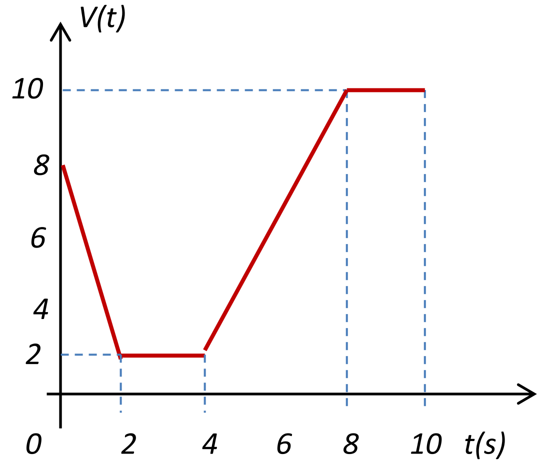
$\nearrow$ V(4)=2m/s

$\searrow$ V(8)=10m/s

- $\boldsymbol{t} \in [\mathbf{8}; \mathbf{10}]$: $a = 0$ $\rightarrow$ V=C^{st} c.à.d   V(8)=V(10)=10m/s

$Représentation\ de\ V(t)$

t(s)	0	2	4	6	8	10
V(m/s)	8	2	2	6	10	10



2°) Détermination de l'abscisse x(t) ? (Position du mobile ?)

$$\boldsymbol{V = \frac{dx}{dt}} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{dx = Vdt} \ \rightarrow \ \boldsymbol{\int dx = \int Vdt}$$

- $\boldsymbol{t} \in [\mathbf{0}; \mathbf{2}]$: $V = -3t + 8$

MEGUENNI

$$\int_0^x dx = \int_0^t V dt = \int_0^t (-3t+8)dt \rightarrow x]_0^x = -\frac{3}{2}t^2 + 8t\Big]_0^t$$

$$\rightarrow \boxed{x(t) = -\frac{3}{2}t^2 + 8t}$$

$x(0) = 0$

$x(2) = 10$

- $\boldsymbol{t} \in [\mathbf{2}; \mathbf{4}]$: $V = 2m/s$

$$\int_{10}^x dx = \int_2^t V dt = \int_2^t 2dt \rightarrow x]_{10}^x = 2t]_2^t$$

$$x - 10 = 2t - 4 \rightarrow \boxed{x(t) = 2t + 6}$$

$x(2) = 10$

$x(4) = 14$

- $\boldsymbol{t} \in [\mathbf{4}; \mathbf{8}]$: $V = 2t - 6$

$$\int_{14}^x dx = \int_4^t V dt = \int_4^t (2t-6)dt \rightarrow x]_{14}^x = t^2 - 6t]_4^t$$

$$\rightarrow \boxed{x(t) = t^2 - 6t + 22}$$

$x(4) = 14$

$x(8) = 38$

- $\boldsymbol{t} \in [\mathbf{8}; \mathbf{10}]$: $V = 10$

$$\int_{38}^x dx = \int_8^t V dt = \int_8^t 10dt \rightarrow x]_{38}^x = 10t]_8^t$$

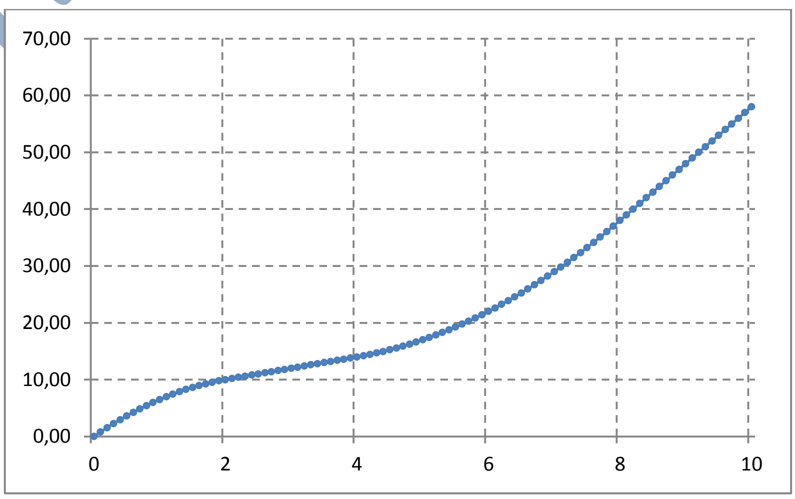
$$\rightarrow \boxed{x(t) = 10t - 42}$$

$x(8) = 38$

$x(10) = 58$

Représentation de x en fonction du temps t:

t(s)	0	2	4	6	8	10
x(m)	0	10	14	22	38	58



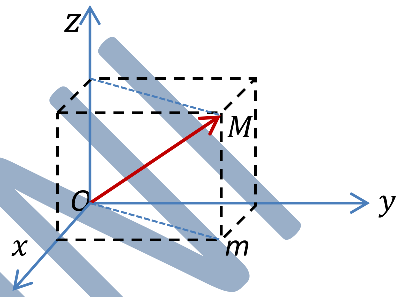
MEGUENNI

3/MOUVEMENT CURVILIGNE (dans le plan & dans l'espace):

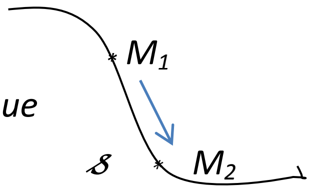
3.1/ Définition :

- *Pour déterminer la position d'un point matériel dans l'espace, il faut donner les composantes du vecteur position $(\overrightarrow{OM})$ qui s'écrit en coordonnées cartésiennes (par exemple) en fonction de x, y et z.*

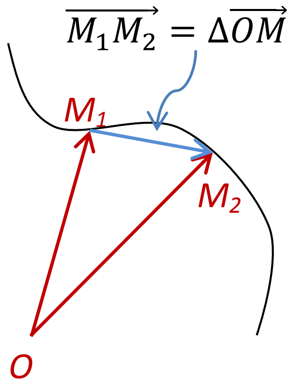
- *Pour déterminer l'équation de la trajectoire, il faut chercher une relation qui dépend de x, y et z sans dépendre de t (le temps).*



- *Abscisse curviligne :*
  On peut repérer la position d'un mobile sur la trajectoire par l'abscisse curviligne ($\mathcal{s}$) :
  Alors : - on oriente la trajectoire dans un sens arbitraire ;
  - L'abscisse curviligne « s » sera la valeur algébrique de l'arc : $\overset{\frown}{M_1M_2} = \mathcal{s}$



3.2/ Vecteur déplacement et vecteur position :



3.2.1/ Le vecteur déplacement :

$\overrightarrow{OM_1}$ *: vecteur position à l'instant initial (t_1)*

$\overrightarrow{OM_2}$ *: vecteur position à l'instant final (t_2)*

Le vecteur déplacement est le vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$ *,*

tel que : $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{M_1O} + \overrightarrow{OM_2} = -\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}$

$$= \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1} = \Delta\overrightarrow{OM}$$

Finalement : $\boxed{\overrightarrow{M_1M_2} = \Delta\overrightarrow{OM}}$

MEGUENNI

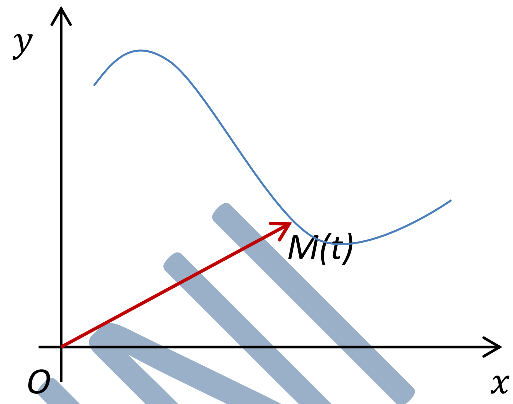
3.2.2/ Le vecteur position :

Le vecteur position est le vecteur $\overrightarrow{OM}$ *tel que : le début vecteur est toujours l'origine du repère* O.

Le vecteur position détermine la position du mobile à n'importe quel instant « t ».

$$\overrightarrow{OM}\begin{vmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{vmatrix}$$

on écrit : $\overrightarrow{OM} = x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath} + z(t)\vec{k}$



Connaissant le vecteur position $\overrightarrow{OM}$, *on peut déterminer :*

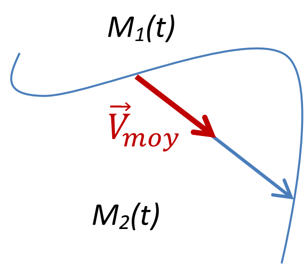
$$\begin{cases} -\ l'\text{équationde la trajectoire} \\ -\ \text{la vitesse du mobile } V(t) \\ -\ l'\text{accélérationdu mobile } a(t) \end{cases}$$

3.3/ Le vecteur vitesse :

3.3.1/ La vitesse moyenne :

Le vecteur vitesse moyenne entre les points $M_1(t_1)$ *et le point* $M_2(t_2)$ *est le vecteur déplacement* $\overrightarrow{M_1M_2}$ *divisé par* Δt :

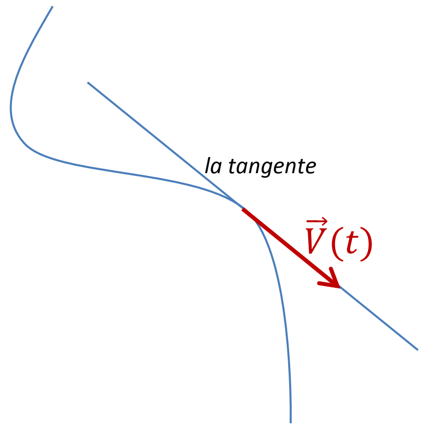
$$\boxed{\vec{V}_{moy} = \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{\Delta t} = \frac{\Delta\overrightarrow{OM}}{\Delta t}}$$



Avec : $\begin{cases} -\ \text{le module de } \vec{V}_{moy} = \dfrac{|\overrightarrow{M_1M_2}|}{\Delta t} \\ -\ \text{La direction et le sens de } \vec{V}_{moy} \text{ sont ceux} \\ \qquad \text{du vecteur déplacement } \overrightarrow{M_1M_2} \end{cases}$

MEGUENNI

3.3.2/ La vitesse instantanée :



Pour déterminer la vitesse instantanée on doit rapprocher les deux points $M_1(t_1)$ et $M_2(t_2)$, donc on tendre $\Delta t = t_2 - t_1$ vers zéro.

$$\boxed{\vec{V}_{inst} = \vec{V} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\overrightarrow{OM}}{\Delta t} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}}$$

Donc on remarque que la vitesse instantanée est la dérivée du vecteur position par rapport à t.

$$\boxed{\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}}$$

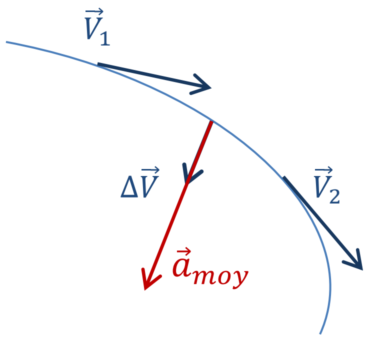
avec :

$$\begin{cases} -\ le\ module\ de\ \vec{V}:\ |\vec{V}| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} = \left|\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right| \\ -\ la\ direction\ de\ \vec{V} = la\ tangente\ à\ la\ trajectoire \\ -\ le\ sens\ de\ \vec{V} = sens\ du\ mouvement \end{cases}$$

MEGUENNI

3.4/ Le vecteur accélération :

3.4.1/ L'accélération moyenne :



L'accélération moyenne est égale à la variation de la vitesse sur le temps écoulé :

$$\boxed{\vec{a}_{moy} = \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t} = \frac{\vec{V}_2 - \vec{V}_1}{\Delta t} = \frac{\vec{V}(t_2) - \vec{V}(t_1)}{\Delta t}}$$

avec :

$$\begin{cases} -\ le\ module\ de\ \vec{a}_{moy} = \left|\frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t}\right| \\ -\ la\ direction\ et\ le\ sens:\ \vec{a}_{moy}\ est\ toujours\ orientée \\ \qquad\qquad vers\ l'intérieurde\ la\ courbe \end{cases}$$

3.4.2/ L'accélération instantanée :

Pour déterminer l'accélération instantanée on doit rapprocher les deux points $M_1(t_1)$ et $M_2(t_2)$, donc on tendre $\Delta t = t_2 - t_1$ vers zéro.

$$\boxed{\vec{a}_{inst} = \vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} = \frac{d\vec{V}}{dt}}$$

Avec $|\vec{a}| = \left|\frac{d\vec{V}}{dt}\right| = \sqrt{\left(\frac{dV_x}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dV_y}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dV_z}{dt}\right)^2}$

L'accélération instantanée est orienté vers l'intérieure de la courbure.

Si on cannait $\vec{V}\left|\begin{array}{l} V_x \\ V_y \\ V_z \end{array}\right. \longrightarrow \vec{a}\left|\begin{array}{l} a_x = \frac{dV_x}{dt} = \cdots \\ a_y = \frac{dV_y}{dt} = \cdots \\ a_z = \frac{dV_z}{dt} = \cdots \end{array}\right.$

<u>Exercice :</u>

Les coordonnées d'un point matériel se déplaçant dans un plan sont données par : $x = e^{3t}cos2t$ *et* $y = e^{3t}sin2t$

On vous demande de déterminer les vecteurs : position, vitesse et accélération.

<u>Solution :</u>

- *Vecteur position :* $\overrightarrow{OM} = e^{3t}cos2t\,\vec{\imath} + e^{3t}sin2t\,\vec{\jmath}$

- *Vecteur vitesse :* $\vec{V} = (3e^{3t}cos2t - 2e^{3t}sin2t)\vec{\imath} + (3e^{3t}sin2t + 2e^{3t}cos2t)\vec{\jmath}$

avec : $|\vec{V}| = \sqrt{13}\, e^{3t}$ *m/s.*

- *Vecteur acc :* $\vec{a} = (5e^{3t}cos2t - 12e^{3t}sin2t)\vec{\imath} + (5e^{3t}sin2t + 12e^{3t}cos2t)\vec{\jmath}$

avec : $|\vec{a}| = 13\, e^{3t}$ *m/s².*

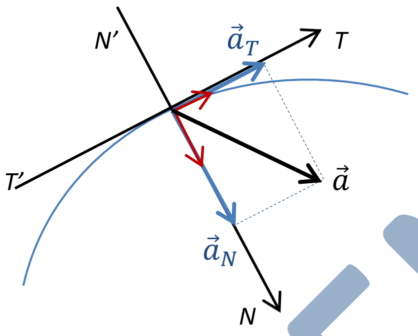
MEGUENNI

3.5/Les composantes intrinsèques de l'accélération :

3.5.1/ Définition :

Le vecteur accélération est dirigé vers la concavité intérieure de la trajectoire.

Nous le décomposons en une composante tangentielle $(\vec{a}_T)$ *et une composante normale* $(\vec{a}_N)$ *:*



$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_N = a_T\,\vec{u}_T + a_N\,\vec{u}_N}$$

avec : $$\boxed{a^2 = a_T^{\,2} + a_N^2}$$

$(\vec{a}_T)$*et* $(\vec{a}_N)$ *sont appelées les composantes intrinsèques de l'accélération ou les composantes de Frenet).*

3.5.2/ Les expressions de $\vec{a}_T$ et $\vec{a}_N$:

- $\boldsymbol{\vec{a}_T}$ **:** *l'accélération tangentielle varie suivant le module de la vitesse, elle est donnée par la dérivée du* <u>*module*</u> *de la vitesse par rapport au temps :*

$$\vec{a}_T = \frac{d|\vec{V}|}{dt}\,\vec{u}_T$$

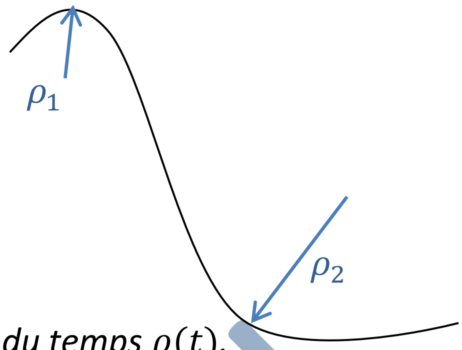
Le module de l'accélération tangentielle s'écrit :

$$\boxed{a_T = |\vec{a}_T| = \frac{d|\vec{V}|}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}\right)}$$

MEGUENNI

$\vec{a}_N$ **:** *l'accélération normale varie suivant le* <u>*rayon de la trajectoire*</u> *(rayon de courbure), elle est donnée par :*

$$\vec{a}_N = \frac{V^2}{\rho}\,\vec{u}_N \quad \rightarrow \quad \boxed{a_N = \frac{V^2}{\rho}}$$



Le rayon de courbure peut varier en fonction du temps $\rho(t)$.

L'accélération $\vec{a}$ *sera :*

$$\begin{cases} -\ en\ vecteur: \quad \vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_N = \dfrac{d|\vec{V}|}{dt}\,\vec{u}_T + \dfrac{V^2}{\rho}\,\vec{u}_N \\ -\ en\ module: \qquad a = |\vec{a}| = \sqrt{a_T^2 + a_N^2} \end{cases}$$

<u>*Exercice :*</u>

Le mouvement d'un point M est donné par : $x = 2t$ *et* $y = 4t.(t-1)$*, on vous demande de :*

1°) Déterminer et tracer l'équation de la trajectoire.

2°) déterminer la vitesse de M à l'instant t.

3°) Montrer que le mouvement a une accélération constante. Calculer les composantes intrinsèques de l'accélération, en déduire le rayon de courbure.

<u>*Solution :*</u>

1°) $y = x^2 - 2x$

2°) $\vec{V}\left|\begin{matrix}2\\8t-4\end{matrix}\right. \quad \rightarrow V = 2\sqrt{16t^2 - 16t + 5}$

3°) $a = \frac{8m}{s^2} = C^{st}$ *avec* $\vec{a}_T = \frac{32t-16}{\sqrt{16t^2-16t+5}}\,\vec{u}_T$ *et* $\vec{a}_N = \frac{8}{\sqrt{16t^2-16t+5}}\vec{u}_N$

$\rho = \frac{1}{2}[16t^2 - 16t + 5]^{3/2}$

MEGUENNI

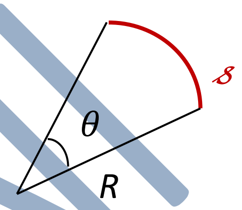
3.6/ Le mouvement circulaire :

3.6.1/ Expression de la vitesse et accélération angulaires :

En mouvement circulaire le mobile M pourra être repéré par le rayon $R = C^{st}$ et l'angle $\theta(t)$ variable.

- **M.v.t circulaire uniforme : $\boldsymbol{\omega = C^{st}}$**

ω: *vitesse angulaire (rad/s).*
θ: *angle de rotation (rad).*



$$\boldsymbol{\omega = \frac{d\theta}{dt}} \quad \rightarrow \quad \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_{t_0}^{t} \omega dt$$

$$\rightarrow \quad \boxed{\theta = \omega(t - t_0) + \theta_0}$$

- **M.v.t circulaire uniformément varié : $\boldsymbol{\alpha = C^{st}}$**

α: *accélération angulaire (rad/s²).*

$$\boldsymbol{\alpha = \frac{d\omega}{dt}} \quad \rightarrow \quad \int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \int_{t_0}^{t} \alpha dt$$

$$\rightarrow \quad \boxed{\omega = \alpha(t - t_0) + \omega_0}$$

Si on pose $t_0 = 0 \rightarrow \quad \boldsymbol{\omega = \alpha t + \omega_0}$

$$\boldsymbol{\omega = \frac{d\theta}{dt}} \quad \rightarrow \quad \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_{t_0}^{t} \omega dt = \int_{t_0}^{t} (\alpha t + \omega_0) dt$$

$$\rightarrow \quad \boxed{\theta = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \omega_0 t + \theta_0}$$

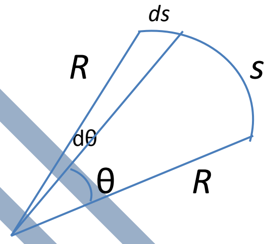
MEGUENNI

3.6.2/ Vitesse et accélération linéaire d'un m.v.t circulaire :

- **La vitesse linéaire : $V(t)$**

La vitesse linéaire est la dérivée de l'abscisse curviligne par rapport à t.

$$V = \frac{ds}{dt} \rightarrow V = \frac{Rd\theta}{dt} = R\frac{d\theta}{dt} = R\omega$$



$$\boxed{V = R\omega}$$

la vitesse linéaire est tangente à la trajectoire : $\vec{V} = R\omega.\overrightarrow{u_T}$

- **L'accélération linéaire a(t) :**

acc tangentielle : $a_T = \frac{dV}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = R\alpha$

acc normale : $a_N = \frac{V^2}{R} = \frac{(R\omega)^2}{R} = R\omega^2$

ainsi l'accélération totale s' écrit :

$$\vec{a} = a_T\vec{u}_T + a_N\vec{u}_N = R\alpha\,\vec{u}_T + R\omega^2\overrightarrow{u_T}$$

Remarque :

Si $V = C^{st} \rightarrow \omega = \frac{V}{R} = C^{st} \rightarrow \alpha = \frac{d\omega}{dt} = 0$

$\rightarrow \begin{cases} a_T = 0 \\ a_N = R\omega^2 = \frac{V^2}{R} \end{cases}$ *alors* $\vec{a} = a_N\vec{u}_N$

MEGUENNI