USD_Blida 1

Maths 1

$1^{ère}$ T.C/S.T 2022/23

Fiche TD N°4

Limites et continuité

Mr. OUAKID A.

Ex1 Déterminer D_f :

① $f_1(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-5x+6}}{x-4}$

$D_{f_1} = \{x \in \mathbb{R},\ x-4 \neq 0 \text{ et } x^2-5x+6 \geq 0\}$

. $x-4 \neq 0 \Rightarrow x \neq 4$

. Pour $x^2-5x+6 \geq 0$:

$\Delta = (-5)^2 - 4\times1\times6 = 25-24 = 1 > 0$

$x_1 = \dfrac{-(-5)+1}{2} = \dfrac{6}{2} = 3$

$x_2 = \dfrac{-(-5)-1}{2} = \dfrac{4}{2} = 2$

D'où

x		2		3	
x^2-5x+6	+	0	−	0	+

Donc

$x^2-5x+6 \geq 0 \Rightarrow x \in]-\infty, 2] \cup [3, +\infty[$

Donc

$D_{f_1} =]-\infty, 2] \cup [3, 4[\cup]4, +\infty[$

② $f_2(x) = \ln(e^{2x}-4)$

$D_{f_2} = \{x \in \mathbb{R},\ e^{2x}-4 > 0\}$.

$e^{2x}-4 > 0 \Rightarrow e^{2x} > 4$

$\Rightarrow 2x > \ln 4$

$\Rightarrow x > \dfrac{\ln 4}{2}$

$\Rightarrow x > \dfrac{\ln (2)^2}{2}$

$\Rightarrow x > \dfrac{2\ln 2}{2}$

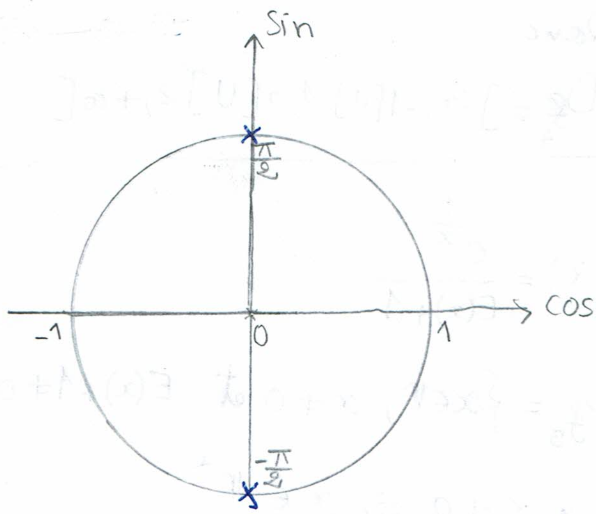
$\Rightarrow x > \ln 2$

$D_f =]\ln 2, +\infty[$.

③ $f_3(x) = \dfrac{x+1}{\cos x}$

$D_{f_3} = \{x \in \mathbb{R},\ \cos x \neq 0\}$

Si $\cos x = 0$



D'où $x = \ldots, \dfrac{-3\pi}{2}, \dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{5\pi}{2}, \ldots$

c.-à-d. $x = (2k+1)\dfrac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$

Donc

$D_{f_3} = \{x \in \mathbb{R},\ x \neq (2k+1)\dfrac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\}$

④

$$f_4(x) = \left(\frac{x}{x-2}\right)^{\frac{1}{|x|-1}}$$

$$D_{f_4} = \left\{x \in \mathbb{R},\ x-2 \neq 0 \text{ et } |x|-1 \neq 0 \text{ et } \left(\frac{x}{x-2}\right) > 0\right\}.$$

- $x - 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$.
- $|x| - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$ et $x \neq -1$
- Pour $\frac{x}{x-2}$ on a :

x		0		2	
x	$-$	0	$+$		$+$
$x-2$	$-$		$-$	0	$+$
$\frac{x}{x-2}$	$+$	0	$-$	‖	$+$

D'où

$\frac{x}{x-2} > 0 \Rightarrow x \in]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$

Donc

$D_{f_4} =]-\infty, -1[\cup]-1, 0[\cup]2, +\infty[$

⑤

$$f_5(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{E(x)+1}$$

$$D_{f_5} = \{x \in \mathbb{R},\ x \neq 0 \text{ et } E(x)+1 \neq 0\}$$

- $x \neq 0 \Rightarrow x \in \mathbb{R}^*$
- $E(x) + 1 \neq 0 \Rightarrow E(x) \neq -1$

$$\underbrace{[-1 \quad [0}_{E(x)=-1} \quad 1$$

D'où $x \notin [-1, 0[$

D'où

$x \in]-\infty, -1[\cup [0, +\infty[$

Donc

$D_f =]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$.

2. Calculer les limites:

$*\ \ell_1 = \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2+1}$ $\left(\begin{matrix}+\infty - \infty \\ \text{F.I}\end{matrix}\right)$

$$\ell_1 = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2+1}\right)\left(\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2+1}}$$

$$= \lim_{+\infty} \frac{(x^2+x+1) - (x^2+1)}{\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2+1}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2+1}} \quad \left(\frac{\infty}{\infty} \text{ F.I}\right)$$

$$\ell_1 = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} + \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)}$$

$\boxed{\text{avec } x \in V(+\infty)}$

$$= \frac{1}{2}.$$

$\left(\begin{matrix}\text{car : } \frac{1}{x} \xrightarrow[+\infty]{} 0 \\ \frac{1}{x^2} \xrightarrow[+\infty]{} 0\end{matrix}\right)$

$*\ \ell_2 = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\ln(x-1) + \ln\left(\frac{1}{x+1}\right)\right]$

$(+\infty - \infty \text{ F.I})$

$$\ell_2 = \lim_{x \to +\infty} \left(\ln \frac{x-1}{x+1}\right)$$

$\left(\begin{matrix}\ln a + \ln b = \ln ab \\ a, b > 0\end{matrix}\right)$

$$= \ln\left(\lim_{x \to +\infty} \frac{x-1}{x+1}\right)$$

$$= \ln 1$$

$$= 0$$

$$* \ \ell_3 = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x^2+1}}{x} \quad \left(\frac{0}{0} \text{ F.I}\right)$$

$$\ell_3 = \lim_{x \to 0} \frac{(x+1) - (x^2+1)}{x\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x^2+1}\right)}$$

On a multiplier et diviser par le conjugué $\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x^2+1}\right)$

$$\ell_3 = \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x}(1-x)}{\cancel{x}\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x^2+1}\right)}$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$* \ \ell_4 = \lim_{x \to 0} \left(\frac{e^{ax} - e^{bx}}{\sin x}\right) \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

$$\left(\frac{0}{0} \text{ F.I}\right)$$

$$\ell_4 = \lim_{x \to 0} \left[\frac{e^{ax} - e^{bx}}{x} \cdot \frac{x}{\sin x}\right]$$

Multiplier et diviser par x

$$= \lim_{x \to 0} \left[\frac{e^{ax} - e^{bx} - 1 + 1}{x} \cdot \frac{x}{\sin x}\right]$$

$$= \lim_{x \to 0} \left[\frac{e^{ax} - 1 - e^{bx} + 1}{x} \cdot \frac{x}{\sin x}\right]$$

$$= \lim_{x \to 0} \left[\frac{e^{ax} - 1 - (e^{bx} - 1)}{x} \cdot \frac{x}{\sin x}\right]$$

$$\ell_4 = \lim_{x \to 0} \left(\frac{e^{ax} - 1}{x} - \frac{e^{bx} - 1}{x}\right) \cdot \left(\frac{x}{\sin x}\right)$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(a \times \frac{e^{ax} - 1}{ax} - b \times \frac{e^{bx} - 1}{bx}\right) \cdot \left(\frac{x}{\sin x}\right)$$

On a multiplier et diviser par a (et aussi par b)

$$= (a \times 1 - b \times 1) \times 1$$

car $\lim_{t \to 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$

et $\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$

$$= a - b$$

$$* \ \ell_5 = \lim_{x \to 2\pi} \frac{\sin(3x)}{\sqrt{1-\cos(2x)}} \quad \left(\frac{0}{0} \text{ F.I}\right)$$

$$\ell_5 = \lim_{x \to 2\pi} \frac{\sin(3x) \cdot \sqrt{1+\cos(2x)}}{\sqrt{1-\cos(2x)}\sqrt{1+\cos(2x)}}$$

Multiplier et diviser par le conjugué $\sqrt{1+\cos(2x)}$.

$$= \lim_{x \to 2\pi} \frac{\sin(3x) \cdot \sqrt{1+\cos(2x)}}{\sqrt{1-\cos^2(2x)}} = \lim_{x \to 2\pi} \frac{\sin(3x) \cdot \sqrt{1+\cos(2x)}}{\sqrt{\sin^2(2x)}}$$

$$= \lim_{x \to 2\pi} \left(\frac{\sin(3x)}{|\sin(2x)|} \cdot \sqrt{1+\cos(2x)} \right)$$

$\forall x \in \mathbb{R} :$ $\sqrt{x^2} = |x|$

On fait un changement de variable pour obtenir une variable t telle que $t \to 0$ (pour utiliser $\lim\limits_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$).

$$\begin{cases} \text{On pose} & t = x - 2\pi \\ \text{d'où} & x = t + 2\pi \quad \text{et} \quad t \to 0 \end{cases}$$

$$\ell_5 = \lim_{t \to 0} \frac{\sin(3t+6\pi)}{|\sin(2t+4\pi)|} \cdot \sqrt{1+\cos(2t+4\pi)}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\sin(3t)}{|\sin(2t)|} \cdot \sqrt{1+\cos(2t)}$$

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

• Si $x \xrightarrow{>} 2\pi$ d'où $t \xrightarrow{>} 0$ alors

$$\ell'_5 = \lim_{t \xrightarrow{>} 0} \frac{\sin(3t)}{\sin(2t)} \cdot \sqrt{1+\cos(2t)}$$

Diviser et multiplier par $(3t)$ et $(2t)$ en même temps

$$= \lim_{t \xrightarrow{<} 0} \frac{\sin(3t)}{3t} \cdot \frac{3t}{2t} \cdot \frac{2t}{\sin(2t)} \cdot \sqrt{1+\cos(2t)} = 1 \times \frac{3}{2} \times 1 \times \sqrt{2} = \boxed{\frac{3\sqrt{2}}{2}}$$

• Si $x \xrightarrow{<} 2\pi$ d'où $t \xrightarrow{<} 0$ alors

$$\ell''_5 = \lim_{t \xrightarrow{<} 0} \frac{\sin(3t)}{-\sin(2t)} \cdot \sqrt{1+\cos(2t)} = \boxed{\frac{-3\sqrt{2}}{2}}$$

$$* \ \ell_6 = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1} \quad \left(\frac{0}{0} \text{ F.I}\right)$$

On pose $t^6 = x$ $\quad \boxed{6 = ppcm(2,3)}$

d'où $t \to 1$

$$\ell_6 = \lim_{t\to 1} \frac{(t^6)^{\frac{1}{3}} - 1}{(t^6)^{\frac{1}{2}} - 1}$$

$$= \lim_{t\to 1} \frac{t^2 - 1}{t^3 - 1}$$

$$= \lim_{t\to 1} \frac{(t-1)(t+1)}{(t-1)(t^2+t+1)}$$

$$= \lim_{t\to 1} \frac{t+1}{t^2+t+1}$$

$$= \frac{2}{3}.$$

$$* \ \ell_7 = \lim_{x\to 1^+} (x-1)^{\sin(\pi x)} \quad (0^0 \text{ F.I})$$

$$\ell_7 = \lim_{x\to 1^+} e^{\ln (x-1)^{\sin(\pi x)}}$$

$$= \lim_{x\to 1^+} e^{\sin(\pi x) \ln(x-1)}$$

$$= e^{\lim_{x\to 1^+} [\sin(\pi x) . \ln(x-1)]}$$

$$= e^{\lambda}$$

on calcul λ.

$$\lambda = \lim_{x\to 1^+} [\sin(\pi x) . \ln(x-1)]$$

$$(0 \times (-\infty) \text{ F.I})$$

On pose $t = x - 1$

d'où $x = t + 1$ et $t \to 0^+$

$$\lambda = \lim_{t\to 0^+} [\sin(\pi(t+1)) . \ln t]$$

$$= \lim_{t\to 0^+} [\sin(\pi t + \pi) . \ln t]$$

$$= \lim_{t\to 0^+} [-\sin(\pi t) . \ln t]$$

$$\boxed{\text{car } \sin(k+\pi) = \sin(-k) = -\sin(k)}$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \left[-\frac{\sin(\pi t)}{\pi t} . \pi t \ln t\right]$$

$$= [-(1) \times (\pi) \times (0)] = 0$$

$$\boxed{\text{car } \lim_{t\to 0^+} t \ln t = 0}$$

Donc

$$\ell_7 = e^{\lambda} = e^0 = 1$$

$$* \ l_8 = \lim_{x \to 1} \frac{1}{(x-1)^2} \ln\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)$$

$((+\infty) \times 0 \ \text{F.I})$

On pose $t = x - 1$

d'où $x = t+1$ et $t \to 0$

$$l_8 = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t^2} \cdot \ln\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}(t+1)\right)\right)$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t^2} \cdot \ln\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t^2} \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right)$$

$(0 \times \infty) \ \text{F.I}$

$$= \lim_{t \to 0} \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right)^{\frac{1}{t^2}}$$

$$= \ln\left(\lim_{t \to 0} \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right)^{\frac{1}{t^2}}\right)$$

$$= \ln K$$

avec $K = \lim_{t \to 0} \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right)^{\frac{1}{t^2}}$

$(1^\infty \ \text{F.I})$

D'où $K = e^{\lim_{t \to 0} \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) - 1\right) \cdot \frac{1}{t^2}}$

$$= e^{\lambda}$$

$$\lambda = \lim_{t \to 0} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) - 1}{t^2}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}t\right) - 1}{t^2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) + 1\right)}$$

$$\lambda = \lim_{t \to 0} \frac{-\sin^2\left(\frac{\pi}{2}t\right)}{t^2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) + 1\right)}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}t\right)}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cdot t^2} \cdot \frac{-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) + 1}$$

$$= \lim_{t \to 0} \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)}{\frac{\pi}{2}t}\right)^2 \cdot \left(\frac{-\frac{\pi^2}{4}}{\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) + 1}\right)$$

$$= 1^2 \cdot \frac{-\frac{\pi^2}{4}}{2}$$

$$= \boxed{\frac{-\pi^2}{8}}$$

D'où

$$K = e^{\lambda} = e^{\frac{-\pi^2}{8}}$$

Donc

$$l_8 = \ln K = \ln e^{\frac{-\pi^2}{8}} = \boxed{\frac{-\pi^2}{8}}$$

$* \; l_g = \lim_{x \to -1} (x+1)\, E\left(\frac{x-2}{x+1}\right)$

Rappel

On a

$\forall x \in \mathbb{R}; \quad x - 1 < E(x) \leq x.$

D'où

$\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}: \quad \frac{x-2}{x+1} - 1 < E\left(\frac{x-2}{x+1}\right) \leq \frac{x-2}{x+1}$

D'où

$$\frac{-3}{x+1} < E\left(\frac{x-2}{x+1}\right) \leq \frac{x-2}{x+1}$$

Multiplier par $(x+1)$:

• Si $x+1 > 0$ d'ou $x \xrightarrow{>} -1$ alors:

$$-3 < (x+1)\, E\left(\frac{x-2}{x+1}\right) \leq x-2$$

D'où

$$\lim_{x \xrightarrow{>} -1} (-3) < l_g^- \leq \lim_{x \xrightarrow{>} -1} (x-2)$$

D'où $\quad -3 < l_g^- \leq -3$

Donc

$$\lim_{x \xrightarrow{>} -1} (x+1)\, E\left(\frac{x-2}{x+1}\right) = -3$$

• Si $x+1 < 0$ alors $x \xrightarrow{<} -1$ et:

$$x-2 \leq (x+1)\, E\left(\frac{x-2}{x+1}\right) < -3$$

D'où

$$\lim_{x \xrightarrow{<} -1} (x+1)\, E\left(\frac{x-2}{x+1}\right) = -3$$

Page 7

Donc

$$\lim_{x \xrightarrow{>} -1} (x+1)\, E\left(\frac{x-2}{x+1}\right) = -3$$

et $\lim_{x \xrightarrow{<} -1} (x+1)\, E\left(\frac{x-2}{x+1}\right) = -3$

Donc $\quad l_g = \boxed{-3}$

$* \; l_{10} = \lim_{x \to 2^+} \left(\sqrt{x^2 - 4x + 5}\right)^{\frac{1}{\sqrt{x-2}}}$

(1^∞ F.I)

D'où

$$l_{10} = e^{\lambda}$$

avec $\lambda = \lim_{x \to 2^+} \left(\sqrt{x^2 - 4x + 5} - 1\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{x-2}}$

$(0 \times \infty \text{ F.I})$

$$\lambda = \lim_{x \to 2^+} \frac{x^2 - 4x + 5 - 1}{\sqrt{x-2}\left(\sqrt{x^2 - 4x + 5} + 1\right)}$$

Multiplier par le conjugué $\left(\sqrt{x^2 - 4x + 5} + 1\right)$

$$\lambda = \lim_{x \to 2^+} \frac{x^2 - 4x + 4}{\sqrt{x-2}\left(\sqrt{x^2 - 4x + 5} + 1\right)}$$

$$= \lim_{x \to 2^+} \frac{(x-2)(x-2)}{\sqrt{x-2}\left(\sqrt{x^2 - 4x + 5} + 1\right)}$$

$$= \lim_{x \to 2^+} \frac{\sqrt{x-2}\,(x-2)}{\sqrt{x^2 - 4x + 5} + 1}$$

$= 0$

Donc $l_{10} = e^{\lambda} = e^{0} = \boxed{1}$

* $\ell_{11} = \lim_{x\to 0} \cos(x)^{\frac{1}{e^x-1}}$ $\quad (1^\infty$ F.I$)$

$\ell_{11} = e^K$

avec

$K = \lim_{x\to 0}\left[(\cos(x)-1)\cdot\frac{1}{e^x-1}\right]$

$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{e^x - 1}$ $\quad \frac{0}{0}$ F.I

$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x - 1}{(e^x-1)(\cos(x)+1)}$

Multiplier par le conjugué $(\cos x + 1)$. (et diviser aussi)

$= \lim_{x\to 0} \frac{-\sin^2 x}{(e^x-1)(\cos x+1)}$

$= \lim_{x\to 0}\left(-\frac{\sin^2 x}{x^2}\cdot\frac{x}{e^x-1}\cdot x\cdot\frac{1}{\cos x+1}\right)$

$= \lim_{x\to 0}\left(-\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\frac{x}{e^x-1}\cdot x\cdot\frac{1}{\cos x+1}\right)$

$= -(1)^2\cdot 1\times 0\times\frac{1}{2} = 0$

Donc

$\ell_{11} = e^K = e^0 = 1.$

* $\ell_{12} = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}$ $\quad (\infty^0$ F.I$)$

D'où

$\ell_{12} = \lim_{x\to 0^+} e^{\sin x \ln\left(\frac{1}{x}\right)}$

$= e^{\lim_{x\to 0^+} \sin x \ln\left(\frac{1}{x}\right)}$

$= e^m$

$m = \lim_{x\to 0^+} \sin x \ln\left(\frac{1}{x}\right)$ $\quad (0\times\infty$ F.I$)$

$= \lim_{x\to 0^+}\left(\sin x\,(-\ln x)\right)$

$= \lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{\sin x}{x}\cdot x\ln x\right)$

$= -(1)\times 0 = 0$

Donc

$\ell_{12} = e^m = e^0 = \boxed{1}$

3) Étudier l'éxistence de la limite des fonctions suivantes :

① $\ell_1 = \lim_{x \to 0} \frac{2x+5}{|x|}$

Si $x>0$ alors

$\ell_1' = \lim_{x \to 0^+} \frac{2x+5}{x} = +\infty$

Si $x<0$ alors

$\ell_1'' = \lim_{x \to 0^-} \frac{2x+5}{-x} = +\infty$

D'où $\boxed{\ell_1 = +\infty}$

② $\ell_2 = \lim_{x \to 0} x \cos\left(\frac{1}{x}\right)$

$1^{ère}$ méthode:

On a $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ est bornée

et $\lim_{x \to 0} x = 0$

D'où $\ell_2 = \lim_{x \to 0} x . \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

$2^{ème}$ méthode:

Par encadrement.

On a

$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad -1 \leqslant \cos\left(\frac{1}{x}\right) \leqslant 1$

d'où

Si $x>0 \quad -x \leqslant x \cos\left(\frac{1}{x}\right) \leqslant x$

Aprés le passage au limites $(x \to 0)$:

$\ell_2' = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} x \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

Si $x<0$

$x \leqslant x \cos\left(\frac{1}{x}\right) \leqslant -x$

Aprés le passage au limites lorsque $x \to 0$:

$\ell_2'' = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} x . \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

Donc $\ell_1' = \ell_2'' = 0$

Donc $\boxed{\ell_2 = 0}$

Ex. 2

1) Étudier la continuité des fonctions suivantes sur leurs domaines de définition :

① $f_1(x) = \frac{1}{1-x} - e^x + \ln x$

$D_{f_1} = \{x \in \mathbb{R},\ 1-x \neq 0 \text{ et } x > 0\}$

- $1 - x \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$
  $\Rightarrow x \in \mathbb{R} - \{1\}$.
- $x > 0 \Rightarrow x \in]0, +\infty[$.

Donc

$D_{f_1} =]0, 1[\cup]1, +\infty[$.

- Continuité de f_1 sur D_{f_1}:

f_1 est la somme des fonctions suivantes:

$\left(\frac{1}{1-x}\right)$ fonction rationnelle continue sur $\mathbb{R} - \{1\}$, alors elle continue sur $]0,1[\cup]1, +\infty[$.

$(-e^x)$ est continue sur $\mathbb{R}$, alors elle est continue sur $]0,1[\cup]1, +\infty[$.

$(\ln x)$ est continue sur $]0, +\infty[$ alors elle est continue sur.
$]0,1[\cup]1, +\infty[$

Donc f_1 est continue sur son domaine de définition $]0,1[\cup]1, +\infty[$.

On écrit $D^c_{f_1} =]0,1[\cup]1, +\infty[$.

---

② $f_2(x) = |1 - x^2|$

$D_{f_2} = \mathbb{R}$.

f_2 est la composée des deux fonctions $u(x) = |x|$ est $v(x) = 1 - x^2$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "1-x^2"] \arrow[rr, bend right, "|1-x^2|"'] & \mathbb{R} \arrow[r, "|x|"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

u et v sont définies est continues sur $\mathbb{R}$

Donc $D^c_{f_2} = \mathbb{R}$.

③ $f_3(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$

• $D_{f_3} = \{x \in \mathbb{R},\ x^2 - 5x + 6 \geqslant 0\}$.

$\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 25 - 24 = 1$

$x_1 = \frac{5-1}{2} = 2$ et $x_2 = \frac{5+1}{2} = 3$

x		2		3	
$x^2 - 5x + 6$	$+$	0	$-$	0	$+$

D'où

$D_{f_3} =]-\infty, 2] \cup [3, +\infty[$.

• Continuité de f_3 sur D_{f_3}.

f_3 est la composée de deux fonctions $\sqrt{x}$ qui est continue sur $[0, +\infty[$.

$(x^2 - 5x + 6)$ qui est continue sur $]-\infty, 2] \cup [3, +\infty[$

avec $x^2 - 5x + 6 \geqslant 0$, $\forall x \in]-\infty, 2] \cup [2, +\infty[$

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{R}_+ \arrow[dr, "\sqrt{x}"] & \\
]-\infty,2] \cup [3,+\infty[\arrow[ur, "x^2-5x+6"] \arrow[rr, "f_3(x)"'] & & \mathbb{R}_+
\end{tikzcd}$$

2. Étudier la continuité en x_0 :

$* \ f(x) = \begin{cases} \dfrac{2e^{2x} - 2}{\ln(x+1)} & \text{si } x \in]-1, 0[\cup]0, +\infty[\\ 2 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

en $x_0 = 0$.

f est continue en $x_0 = 0$
$\Updownarrow$
$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$

On a

• $f(0) = \boxed{2}$.

• $l = \lim\limits_{x \to 0} f(x)$

$= \lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{2e^{2x} - 2}{\ln(x+1)} \right)$ $\left(\frac{0}{0} \text{ F.I}\right)$

$l = \lim\limits_{x \to 0} \frac{2(e^{2x} - 1)}{\ln(x+1)}$

$= \lim\limits_{x \to 0} 2 \cdot \frac{e^{2x} - 1}{2x} \cdot 2x \cdot \frac{1}{\ln(x+1)}$

$= \lim\limits_{x \to 0} \left(2 \cdot \underbrace{\frac{e^{2x} - 1}{2x}}_{\to 1} \cdot 2 \cdot \underbrace{\frac{x}{\ln(x+1)}}_{\to 1} \right)$

$= 2 \times 1 \times 2 \times 1 = \boxed{4}$

Page 11

Donc f n'est pas continue en $x_0 = 0$

car $\lim\limits_{x \to 0} f(x) \neq f(0)$

$* \ g(x) = x . E(x+1)$ en $x_0 = 1$

on a

- $g(1) = 1 \times E(1+1)$

$= 1 \times E(2)$

$= 1 \times 2 = \boxed{2}$

g est continue en $x_0 = 1$
$\Updownarrow$
$\lim_{x \overset{>}{\to} 1} g(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 1} g(x) = g(1)$
$\Updownarrow$
$\lim_{x \to 1} g(x) = g(1)$

▶ Si $x \overset{>}{\to} 1$

alors $(x+1) \overset{>}{\longrightarrow} 2$

D'où $E(x+1) = 2$

alors $\lim_{x \overset{>}{\to} 1} x . E(x+1) = 2$

▶ Si $x \overset{<}{\to} 1$

alors $(x+1) \overset{<}{\longrightarrow} 2$

d'où $E(x+1) = 1$

alors $\lim_{x \overset{<}{\to} 1} x . E(x+1) = 1$

Donc

$\lim_{x \overset{<}{\to} 1} g(x) \neq \lim_{x \overset{>}{\to} 1} g(x)$

D'où g n'est pas continue en $x_0 = 1$.

3. f et g sont-elles prolongeable par continuité ?

$* \ f(x) = \left(x - 2 + \sqrt{x^2+3}\right)^{\frac{1}{x-1}}$ en $x_0 = 1$

f est prolongeable par continuité en $x_0 = 1$
$\Updownarrow$
$\lim_{x \to 1} f(x) = \ell$ (avec ℓ existe, finie et unique)

La limite $\left(\lim_{x \to 1} f(x)\right)$ doit être égale à un réel unique.

$L = \lim_{x \to 1} f(x)$

$= \lim_{x \to 1} \left(x - 2 + \sqrt{x^2+3}\right)^{\frac{1}{x-1}}$ $(1^{\infty}$ F.I$)$

$L = e^{\lambda}$

avec

$\lambda = \lim_{x \to 1} \left(x - 2 + \sqrt{x^2+3} - 1\right) . \frac{1}{x-1}$

$= \lim_{x \to 1} \left(x - 3 + \sqrt{x^2+3}\right) . \frac{1}{x-1}$

$= \lim_{x \to 1} \frac{x - 3 + \sqrt{x^2+3}}{x-1}$ $\left(\frac{0}{0}\right.$ F.I$\left.\right)$

Multiplier et diviser par le conjugué $(x-3) - \sqrt{x^2+3}$

$$\lambda = \lim_{x \to 1} \frac{\left((x-3)+\sqrt{x^2+3}\right)\left((x-3)-\sqrt{x^2+3}\right)}{(x-1)\left(x-3-\sqrt{x^2+3}\right)}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x-3)^2 - \sqrt{x^2+3}^{\,2}}{(x-1)\left(x-3-\sqrt{x^2+3}\right)}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{\cancel{x^2}+9-6x-\cancel{x^2}-3}{(x-1)\left(x-3-\sqrt{x^2+3}\right)}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{-6x+6}{(x-1)\left(x-3-\sqrt{x^2+3}\right)}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{-6(x-1)}{(x-1)\left(x-3-\sqrt{x^2+3}\right)}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{-6}{x-3-\sqrt{x^2+3}}$$

$$= \frac{-6}{-4} = \boxed{\frac{3}{2}}$$

Donc

$$L = e^{\lambda} = e^{\frac{3}{2}}$$

On conclut que f est prolongéable par continuité en $x_0 = 1$

$*$ $g(x) = \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{\sqrt{x-2}}$ en $x_0 = 2$

g est prolongeable par continuité en $x_0 = 2$

$\Updownarrow$

$\lim\limits_{x \to 2} g(x) = \ell$ (ℓ finie, existe et unique)

$$L' = \lim_{x \to 2} g(x)$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{\sqrt{x-2}} \qquad \left(\frac{0}{0} \text{ F.I}\right)$$

Multiplier et diviser par le conjugué $(\sqrt{x}+\sqrt{2})$

$$L' = \lim_{x \to 2} \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{2})(\sqrt{x}+\sqrt{2})}{\sqrt{x-2}\,(\sqrt{x}+\sqrt{2})}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{x-2}{\sqrt{x-2}\,(\sqrt{x}+\sqrt{2})}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{\cancel{\sqrt{x-2}}\,\sqrt{x-2}}{\cancel{\sqrt{x-2}}\,(\sqrt{x}+\sqrt{2})}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}$$

$$= \frac{0}{2\sqrt{2}} = \boxed{0}$$

Donc g est prolongeable par continuité en $x_0 = 2$.

Ex. 3

$f(x) = \sqrt[3]{x^3+6x+1} - 3x$

▶ D_f :

$D_f = \mathbb{R}$

▶ D_f^c : domaine de continuité de f :

f est la somme de deux fonctions $\left(\sqrt[3]{x^3+6x+1}\right)$ et $(-3x)$.

- $\left(\sqrt[3]{x^3+6x+1}\right)$ est la composition de $\left(\sqrt[3]{x}\right)$ et $\left(x^3+6x+1\right)$ qui sont continues sur $\mathbb{R}$

Donc $\sqrt[3]{x^3+6x+1}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

- $(-3x)$ est un polynome, donc elle est continue sur $\mathbb{R}$.

Conclusion :

$D_f^c = \mathbb{R}$

(f est continue sur $\mathbb{R}$).

▶ Montrer que l'équation $f(x) = 2$ a au moins une solution dans $\mathbb{R}$.

On a

- f est continue sur $\mathbb{R}$

$D_f^c = \mathbb{R}$

- $\ell_1 = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt[3]{x^3+6x+1} - 3x\right)$

$(-\infty + \infty \quad \text{F.I})$

$\ell_1 = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt[3]{x^3\left(1+\frac{6}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)} - 3x\right)$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} \left(x\sqrt[3]{1+\frac{6}{x^2}+\frac{1}{x^3}} - 3x\right)$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} \left(x\left(\sqrt{1+\frac{6}{x^2}+\frac{1}{x^2}} - 3\right)\right)$

$= +\infty$

- $\ell_2 = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ Avec la même méthode

D'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f(x) = 2$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$.

Page15

Ex. 4

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos(2x)}{\sqrt{1+4x^2}-1} & \text{si } x<0 \\ \alpha\left(1-\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{2}{x}}+1 & \text{si } x\in]0,1] \\ \beta\,\dfrac{\sin(\pi x)}{1-x} & \text{si } x>1 \end{cases}$$

1. Déterminer D_f :

$$D_f = \left(\left\{x\in\mathbb{R},\ 1+4x^2\geqslant 0 \text{ et } (\sqrt{1+4x^2}-1)\neq 0\right\}\cap]-\infty,0[\right)$$
$$\cup\left(\left\{x\in\mathbb{R},\ x\neq 0 \text{ et } 1-\frac{x}{2}>0\right\}\cap]0,1]\right)$$
$$\cup\left(\left\{x\in\mathbb{R},\ 1-x\neq 0\right\}\cap]1,+\infty[\right)$$

- $1+4x^2\geqslant 0 \Rightarrow x\in\mathbb{R}$ $\left(\text{car } x^2\geqslant 0\ \forall x\in\mathbb{R}\right)$
- $\sqrt{1+4x^2}-1\neq 0 \Rightarrow \sqrt{1+4x^2}\neq 1$
  $\Rightarrow 1+4x^2\neq 1$
  $\Rightarrow 4x^2\neq 0$
  $\Rightarrow x\neq 0 \Rightarrow x\in\mathbb{R}^*$
- $x\neq 0 \Rightarrow x\in\mathbb{R}^*$
- $1-\frac{x}{2}>0 \Rightarrow \frac{x}{2}<1$
  $\Rightarrow x<2$
  $\Rightarrow x\in]-\infty,2[$
- $1-x\neq 0 \Rightarrow x\in\mathbb{R}-\{1\}$.

D'où

$$D_f = \left(\mathbb{R}^*\cap]-\infty,0[\right)$$
$$\cup\left(\left(]-\infty,0[\cup]0,2[\right)\cap]0,1]\right)$$
$$\cup\left(\mathbb{R}-\{1\}\cap]1,+\infty[\right)$$
$$=]-\infty,0[\cup]0,1]\cup]1,+\infty[$$
$$=]-\infty,0[\cup]0,+\infty[= \boxed{\mathbb{R}^*}$$

2. Trouver α pour que f soit prolongeable par continuité en $x_0=0$

f est prolongeable par continuité en $x_0=0$

$\Updownarrow$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = l$ (avec l existe, finie et unique)

$\Updownarrow$

$\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} f(x) = \lim\limits_{x\overset{<}{\to}0} f(x) = l$

- $l' = \lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} f(x)$
  $= \lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}\left(\alpha\left(1-\frac{x}{2}\right)^{\frac{2}{x}}+1\right)$
  $= \alpha.\left(\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}\left(1-\frac{x}{2}\right)^{\frac{2}{x}}\right)+1$
  $= \alpha.K+1$

On calcul la limite K

$$K = \lim_{x \xrightarrow{>} 0} \left(1 - \frac{x}{2}\right)^{\frac{2}{x}} \quad (1^{\infty} \text{ F.I})$$

D'où

$$K = e^{\lim_{x \xrightarrow{>} 0} \left(\cancel{1} - \frac{x}{2} - \cancel{1}\right) \cdot \left(\frac{2}{x}\right)}$$

$$= e^{\lambda}$$

On calcul la limite λ :

$$\lambda = \lim_{x \xrightarrow{>} 0} \left(\frac{-x}{2}\right) \cdot \left(\frac{2}{x}\right)$$

$$= \lim_{x \xrightarrow{>} 0} (-1) = -1$$

Donc $K = e^{\lambda} = e^{-1} = \frac{1}{e}$

Alors

$$\ell' = \alpha . K + 1 = \alpha . \frac{1}{e} + 1 = \boxed{\frac{\alpha}{e} + 1}$$

- $\ell'' = \lim_{x \xrightarrow{<} 0} f(x)$

$$= \lim_{x \xrightarrow{<} 0} \frac{1 - \cos(2x)}{\sqrt{1 + 4x^2} - 1} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$

On multiple par les conjugués $(1 + \cos(2x))$ et aussi $(\sqrt{1 + 4x^2} + 1)$;

$$\ell'' = \lim_{x \xrightarrow{<} 0} \frac{(1 - \cos(2x))(1 + \cos(2x))(\sqrt{1 + 4x^2} + 1)}{(\sqrt{1 + 4x^2} - 1)(\sqrt{1 + 4x^2} + 1)(1 + \cos(2x))}$$

$$= \lim_{x \xrightarrow{<} 0} \frac{1 - \cos^2(2x)}{\cancel{1} + 4x^2 - \cancel{1}} \cdot \frac{\sqrt{1 + 4x^2} + 1}{1 + \cos(2x)}$$

$$= \lim_{x \xrightarrow{<} 0} \frac{\sin^2(2x)}{(2x)^2} \cdot \frac{\sqrt{1 + 4x^2} + 1}{1 + \cos(2x)}$$

$$= \lim_{x \xrightarrow{<} 0} \left(\frac{\sin(2x)}{2x}\right)^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{1 + 4x^2} + 1}{1 + \cos(2x)}\right)$$

$$= 1^2 \times \frac{2}{2} = \boxed{1}.$$

Donc on a trouvé

$$\ell' = \lim_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = 1$$

$$\ell'' = \lim_{x \xrightarrow{<} 0} f(x) = \frac{\alpha}{e} + 1$$

Donc f est prolongeable par continuité en $x_0 = 0$ ssi $1 = \frac{\alpha}{e} + 1$

D'où $\frac{\alpha}{e} = 0$

Donc $\boxed{\alpha = 0}$

3. On suppose que $\alpha = 0$.

- Pour quelle valeur de β la fonction f est continue en $x_0 = 1$

f est continue en $x_0 = 1$

$$\Updownarrow$$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$$

$$\Updownarrow$$

$$\lim_{x \xrightarrow{<} 1} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{>} 1} f(x) = f(1)$$

On a

- $\boxed{f(1) = 1}$.

• $\ell_1 = \lim_{x \xrightarrow{<} 1} f(x)$

$= \lim_{x \xrightarrow{<} 1} (1)$

$= \boxed{1}$

Car si $\alpha = 0$ alors $f(x) = 1$ si $x \in]0,1]$

• $\ell_2 = \lim_{x \xrightarrow{>} 1} f(x)$

$= \lim_{x \xrightarrow{>} 1} \left(\beta . \dfrac{\sin(\pi x)}{1-x}\right)$

$= \beta . \lim_{x \xrightarrow{>} 1} \left(\dfrac{\sin(\pi x)}{1-x}\right) \quad \left(\dfrac{0}{0} \text{ F.I}\right)$

On pose $t = 1 - x$

D'où $t \xrightarrow{<} 0$ et $x = 1 - t$

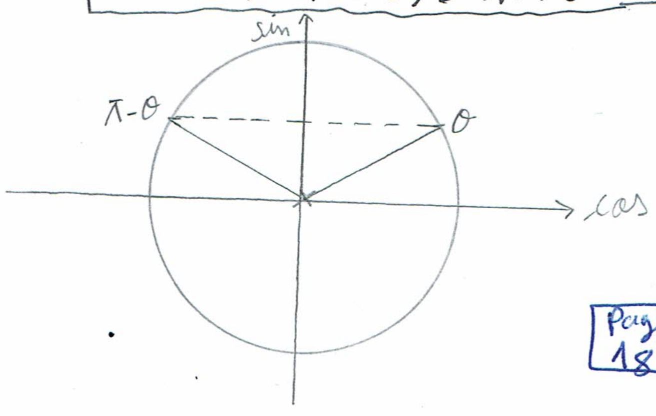
Donc

$\ell_2 = \beta . \lim_{t \xrightarrow{<} 0} \dfrac{\sin(\pi(1-t))}{t}$

$= \beta . \lim_{t \xrightarrow{<} 0} \dfrac{\sin(\pi - \pi t)}{t}$

$= \beta . \lim_{t \xrightarrow{<} 0} \dfrac{\sin(\pi t)}{t}$

Car $\sin(\pi - \theta) = \sin \theta$



D'où

$\ell_2 = \beta . \lim_{t \xrightarrow{<} 0} \pi . \dfrac{\sin(\pi t)}{\pi t}$

Multiplier et diviser par π

D'où $\ell_2 = \beta . \pi . \lim_{t \xrightarrow{<} 0} \left(\dfrac{\sin(\pi t)}{\pi t}\right) \to 1$

$= \beta . \pi . 1$

$= \boxed{\beta \pi}$

Donc f est continue en $x_0 = 1$ ssi $\beta . \pi = 1 = 1$

Donc $\boxed{\beta = \dfrac{1}{\pi}}$

■ Pour la valeur de $\beta = \dfrac{1}{\pi}$, montrer qu'il existe au moins un $c \in]\frac{1}{2}, 2]$ solution de $f(x) = x$.

On a $f(x) = x \Leftrightarrow f(x) - x = 0$

On pose $g(x) = f(x) - x$.

D'où $f(x) = x \Leftrightarrow g(x) = 0$.

• g est continue sur $[\frac{1}{2}, 2]$ car elle est la somme de deux fonctions f $(-x)$; f est continue sur $[\frac{1}{2}, 1[$ et $]1, 2]$ comme composition des fonctions continues et f est continue en $x_0 = 1$.

$(-x)$ est continue sur $[\frac{1}{2}, 2]$

• On a

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}$$
$$= 1 - \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$\boxed{f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \text{ car } \alpha = 0}$

$$g(2) = f(2) - 2$$
$$= \frac{1}{\pi} \cdot \left(\frac{\sin(2\pi)}{1-2}\right) - 2 \quad \boxed{\beta = \frac{1}{\pi}}$$
$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{0}{-1}\right) - 2$$
$$= -2$$

Donc $g\left(\frac{1}{2}\right) \cdot g(2) < 0$

<u>Conclusion:</u>

g est continue sur $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$

et $g\left(\frac{1}{2}\right) \cdot g(2) < 0$

alors d'aprés le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $g(x) = 0$ admet au moins une solution $c \in \left]\frac{1}{2}, 2\right[$

Donc il existe au moins un $c \in \left]\frac{1}{2}, 2\right[$ solution de l'équation $f(x) = x$.