CHAPITRE 3 : Les relations binaires et les applications

Cours 2

Les applications

Injection, Surjection, Bijection :

1. Injection :

Soit $f : E \to F$ une application.

f est dite *injective* si et seulement si : $\forall x_1, x_2 \in E : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

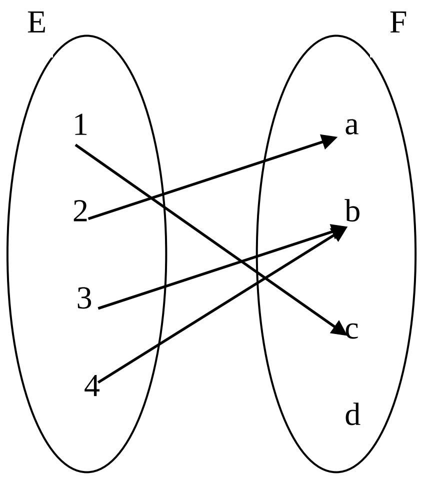
Ou encore : $\forall x_1, x_2 \in E : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

<u>Autrement dit</u> :

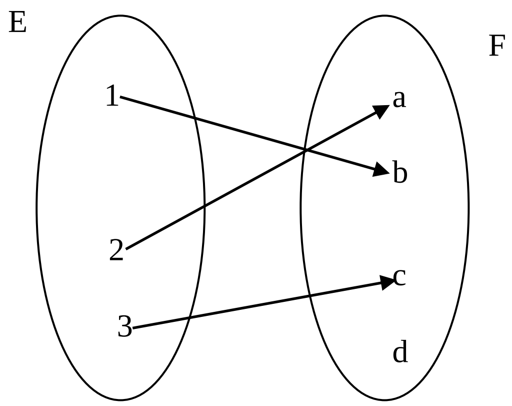
f est dite injective si et seulement si tout élément de l'ensemble d'arrivée possède **au plus** un antécédent par f .

Exemples :

1. f est-elle injective ?



f n'est pas injective car d admet deux antécédents



f est injective

2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto f(x) = 2x - 3$

Montrer que f est injective.

Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1 - 3 = 2x_2 - 3$$
$$\Rightarrow 2x_1 = 2x_2$$
$$\Rightarrow x_1 = x_2$$

D'où f est injective.

3. $f : \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x) = \frac{3x}{1-x}$$

Montrer que f est injective.

Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R} - \{1\}$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Rightarrow \frac{3x_1}{1-x_1} = \frac{3x_2}{1-x_2} \\ &\Rightarrow 3x_1(1-x_2) = 3x_2(1-x_1) \\ &\Rightarrow 3x_1 - 3x_1x_2 = 3x_2 - 3x_2x_1 \\ &\Rightarrow 3x_1 = 3x_2 \\ &\Rightarrow x_1 = x_2. \end{aligned}$$

D'où f est injective.

4. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x) = (x-2)^2$$

f est-elle injective ?

Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Rightarrow (x_1 - 2)^2 = (x_2 - 2)^2 \\ &\Rightarrow |x_1 - 2| = |x_2 - 2| \\ &\Rightarrow x_1 - 2 = x_2 - 2 \vee x_1 - 2 = -(x_2 - 2) \\ &\Rightarrow x_1 = x_2 \vee x_1 = -x_2 + 4 \end{aligned}$$

On remarque que : $f(0) = 4$ et $f(4) = 4$ mais $0 \neq 4$ donc f n'est pas injective.

5. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x) = -x^2 - 2x + 3$$

Résoudre $f(x) = 0$. f est-elle injective ?

$f(x) = 0 \Rightarrow -x^2 - 2x + 3 = 0$

$\Delta = 16 > 0$ donc les solutions sont $x_1 = 1 \vee x_2 = -3$

f n'est pas injective car $f(1) = 0$ et $f(-3) = 0$ mais $1 \neq -3$.

6. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$(x, y) \mapsto f(x, y) = (x - y, xy)$$

Calculer $f(\{(1,1), (0,0), (-1,-1)\})$. f est-elle injective ?

$f(\{(1,1), (0,0), (-1,-1)\}) = \{f(x, y) \in \mathbb{R}^2 / (x, y) \in \{(1,1), (0,0), (-1,-1)\}\}$

$(x, y) \in \{(1,1), (0,0), (-1,-1)\} \Rightarrow (x, y) = (1,1) \vee (x, y) = (0,0) \vee (x, y) = (-1,-1)$

$f(1,1) = (0,1)$, $f(0,0) = (0,0)$ et $f(-1,-1) = (0,1)$

Donc $f(\{(1,1), (0,0), (-1,-1)\}) = \{(0,1), (0,0)\}$

f n'est pas injective car $f(1,1) = f(-1,-1) = (0,1)$ mais $(1,1) \neq (-1,-1)$.

7. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto f(x) = -x^2 + 2$

Déterminer $f^{-1}(\{2,0,3\})$. f est-elle injective ?

$f^{-1}(\{2,0,3\}) = \{x \in \mathbb{R} / f(x) \in \{2,0,3\}\}$

$f(x) \in \{2,0,3\} \Rightarrow f(x) = 2 \vee f(x) = 0 \vee f(x) = 3$

$$\begin{aligned} f(x) = 2 &\Rightarrow -x^2 + 2 = 2 \\ &\Rightarrow -x^2 = 0 \\ &\Rightarrow x^2 = 0 \\ &\Rightarrow x = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Rightarrow -x^2 + 2 = 0 \\ &\Rightarrow -x^2 = -2 \\ &\Rightarrow x^2 = 2 \\ &\Rightarrow |x| = \sqrt{2} \\ &\Rightarrow x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) = 3 &\Rightarrow -x^2 + 2 = 3 \\ &\Rightarrow -x^2 = 1 \\ &\Rightarrow x^2 = -1 \text{ impossible car } \forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Donc $f^{-1}(\{2,0,3\}) = \{0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$

f n'est pas injective car $f(\sqrt{2}) = f(-\sqrt{2}) = 0$ mais $\sqrt{2} \neq -\sqrt{2}$.

2. Surjection :

Soit $f : E \to F$ une application.

f est dite *surjective* si et seulement si : $\forall y \in F, \exists x \in E : y = f(x)$

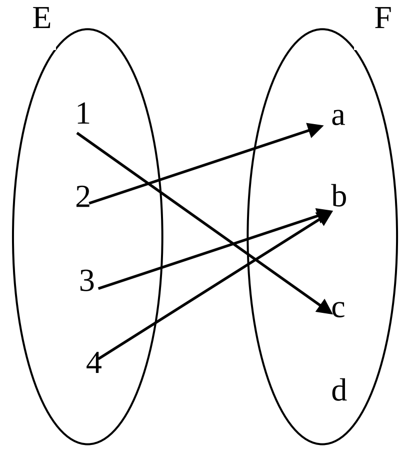
<u>Autrement dit</u> :

f est dite surjective si et seulement si tout élément de l'ensemble d'arrivée possède **au moins** un antécédent par f.

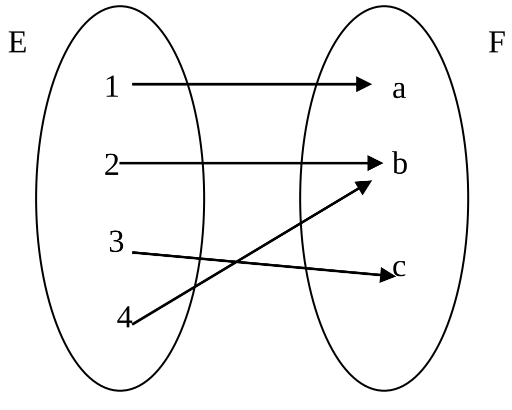
" L'équation $y = f(x)$ admet au moins une solutions".

Exemples :

1. f est-elle surjective ?



f n'est pas surjective car d n'a pas d'antécédent



f est surjective

2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto f(x) = 2x - 3$

Montrer que f est surjective.

Soit $y \in \mathbb{R}$ tel que $y = f(x)$

$$y = f(x) \Rightarrow 2x - 3 = y$$
$$\Rightarrow 2x = y + 3$$
$$\Rightarrow x = \frac{y+3}{2} \in \mathbb{R} .$$

Donc $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R} : y = f(x)$

D'où f est surjective.

3. $f : \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto f(x) = \frac{3x}{1-x}$

Soit $y \in \mathbb{R} - \{1\}$ tel que $y = f(x)$

$$y = f(x) \Rightarrow y = \frac{3x}{1-x}$$
$$\Rightarrow y(1-x) = 3x$$
$$\Rightarrow y - yx = 3x$$
$$\Rightarrow 3x + yx = y$$
$$\Rightarrow x(3+y) = y$$

Pour $y = -3$ il n'existe pas $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ tel que $y = f(x)$.

D'où f n'est pas surjective.

4. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto f(x) = -x^2 - 2x + 3$

Résoudre $f(x) = 5$. f est-elle surjective ?

$$f(x) = 5 \Rightarrow -x^2 - 2x - 2 = 0$$
$$\Rightarrow x^2 + 2x + 2 = 0$$

$\Delta = -4 < 0$ pas de solutions dans $\mathbb{R}$**.**

Donc $y = 5$ n'a pas d'antécédents.

D'où f n'est pas surjective.

5. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto f(x) = (x-2)^2$

Déterminer $f^{-1}(\{0,16,-2\})$. f est-elle surjective ?

$$f^{-1}(\{0,16,-2\}) = \{x \in \mathbb{R} / f(x) \in \{0,16,-2\}\}$$

$$f(x) \in \{0,16,-2\} \Rightarrow f(x) = 0 \vee f(x) = 16 \vee f(x) = -2$$

$$f(x) = 0 \Rightarrow (x-2)^2 = 0$$
$$\Rightarrow x - 2 = 0$$
$$\Rightarrow x = 2$$

$$f(x)=16 \Rightarrow (x-2)^2 = 16$$
$$\Rightarrow |x-2| = 4$$
$$\Rightarrow x-2=4 \vee x-2=-4$$
$$\Rightarrow x=6 \vee x=-2$$

$f(x)=-2 \Rightarrow (x-2)^2 = -2$ impossible car $\forall x \in \mathbb{R},\ (x-2)^2 \geq 0$

Donc $f^{-1}(\{0,16,-2\}) = \{0,6,-2\}$

On a $f^{-1}(\{-2\}) = \phi$ donc f n'est pas surjective.

Proposition1 :

Soit $f : E \to F$ une application.

f est *surjective* si et seulement si $f(E) = F$ ($\operatorname{Im} f = F$)

Exemples :

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

   $x \mapsto f(x) = |x|$

   f n'est pas surjective car $f(E) = f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+ \neq \mathbb{R} = F$.

2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$

   $x \mapsto f(x) = e^x$

   f est surjective car $f(E) = f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+^* = F$

3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

   $x \mapsto f(x) = \sin x$

   Modifier l'ensemble d'arrivée pour f soit surjective.

   f est *surjective* si et seulement si $f(E) = f(\mathbb{R}) = [-1,1] = F$

   Donc $f : \mathbb{R} \to [-1,1]$ est surjective

   $x \mapsto f(x) = \sin x$

3. Bijection :

Soit $f : E \to F$ une application.

On dit que f est *bijective* si et seulement si elle est injective et surjective à la fois.

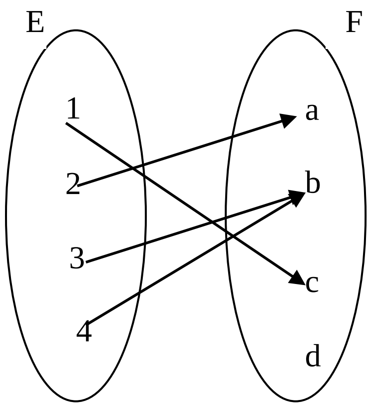
i.e. Tout élément y de F possède un et un seul antécédent x de E .

i.e. $\forall y \in F, \exists! x \in E : y = f(x)$

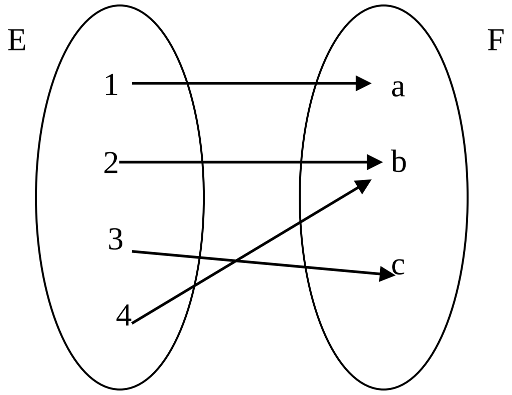
(l'équation $y = f(x)$ admet une et une seule solution x dans E , $\forall y \in F$).

Exemples :

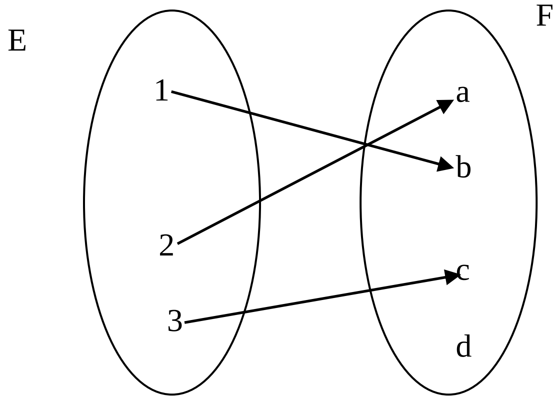
1. f est-elle bijective ?



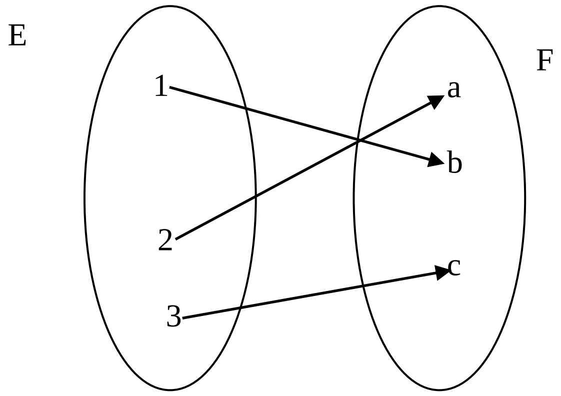
f n'est pas bijective car elle n'est ni injective ni surjective



f n’est pas bijective car elle n’est pas injective.



f n’est pas bijective car elle n’est surjective



f est bijective

2. $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$

$x \mapsto f(x) = 2x - 3$

f est bijective car elle est injective et surjective (déjà vue).

3. $f : \mathrm{R} - \{1\} \to \mathrm{R} - \{-3\}$

$$x \mapsto f(x) = \frac{3x}{1-x}$$

Montrons que f est bijective i.e. $\forall y \in \mathrm{R} - \{-3\}, \exists! x \in \mathrm{R} - \{1\} : y = f(x)$

Soit $y \in \mathrm{R} - \{-3\}$ tel que $y = f(x)$

$$y = f(x) \Rightarrow y = \frac{3x}{1-x}$$

$$\Rightarrow y(1-x) = 3x$$

$$\Rightarrow y - yx = 3x$$

$$\Rightarrow 3x + yx = y$$

$$\Rightarrow x(3+y)=y$$

$$\Rightarrow x=\frac{y}{3+y} \text{ car } y\neq -3$$

Donc il existe un unique x. Reste à montrer que $x\in \mathbb{R}-\{1\}$ ($x\neq 1$)

Raisonnons par l'absurde : supposons que $x=1$

$$x=1\Rightarrow 1=\frac{y}{3+y}$$
$$\Rightarrow 3+y=y$$
$$\Rightarrow 3=0 \text{ impossible.}$$

Donc $x\neq 1$.

$\forall y\in \mathbb{R}-\{-3\}, \exists! x\in \mathbb{R}-\{1\} : y=f(x)$. D'où f est bijective.

4. $f:\mathbb{R}_+\to [1,+\infty[$

$x\mapsto f(x)=\sqrt{x+1}$

Montrons que f est bijective i.e. $\forall y\in [1,+\infty[, \exists! x\in \mathbb{R}_+ : y=f(x)$

Soit $y\in [1,+\infty[$ tel que $y=f(x)$.

$$y=f(x)\Rightarrow y=\sqrt{x+1}$$
$$\Rightarrow y^2=x+1$$
$$\Rightarrow x=y^2-1$$

On a $y\in [1,+\infty[$

$$y\geq 1\Rightarrow y^2\geq 1$$
$$\Rightarrow y^2-1\geq 0$$
$$\Rightarrow x\geq 0$$

Donc $\forall y\in [1,+\infty[, \exists! x\in \mathbb{R}_+ : y=f(x)$. D'où f est bijective.

4. Application réciproque :

Soit $f:E\to F$ une application.

$x\mapsto y=f(x)$

Si f est bijective alors f admet une *application réciproque*, notée f^{-1} définie par :

$f^{-1}:F\to E$

$y\mapsto x=f^{-1}(y)$

Exemples :

1. $f:\mathbb{R}_+\to \mathbb{R}_+$ est bijective $f^{-1}:\mathbb{R}_+\to \mathbb{R}_+$

$x\mapsto f(x)=x^2$ $x\mapsto f^{-1}(x)=\sqrt{x}$

2. $f:\mathbb{R}\to \mathbb{R}_+^*$ est bijective $f^{-1}:\mathbb{R}_+^*\to \mathbb{R}$

$x\mapsto f(x)=e^x$ $x\mapsto f^{-1}(x)=\ln x$

3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est bijective $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto f(x) = 2x - 3$ $x \mapsto f^{-1}(x) = \dfrac{x+3}{2}$

4. $f : \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R} - \{-3\}$ est bijective $f^{-1} : \mathbb{R} - \{-3\} \to \mathbb{R} - \{1\}$

$x \mapsto f(x) = \dfrac{3x}{1-x}$ $x \mapsto f^{-1}(x) = \dfrac{x}{3+x}$

5. $f : \mathbb{R}_+ \to [1, +\infty[$ est bijective $f^{-1} : [1, +\infty[\to \mathbb{R}_+$

$x \mapsto f(x) = \sqrt{x+1}$ $x \mapsto f^{-1}(x) = x^2 - 1$

Proposition1 :

Si $f : E \to F$ est une application bijective, alors il existe une application réciproque f^{-1} qui est bijective de F dans E vérifiant $f^{-1} \circ f = Id_E$, $f \circ f^{-1} = Id_F$ et $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$.

Exemple :

$f : \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R} - \{-3\}$ est bijective $f^{-1} : \mathbb{R} - \{-3\} \to \mathbb{R} - \{1\}$

$x \mapsto f(x) = \dfrac{3x}{1-x}$ $x \mapsto f^{-1}(x) = \dfrac{x}{3+x}$

Déterminons $f^{-1} \circ f$ et $f \circ f^{-1}$

$f^{-1} \circ f : \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R} - \{1\}$

Soit $x \in \mathbb{R} - \{1\}$

$$f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}\left(\frac{3x}{1-x}\right) = \frac{\dfrac{3x}{1-x}}{3 + \dfrac{3x}{1-x}} = \frac{\dfrac{3x}{1-x}}{\dfrac{3}{1-x}} = \frac{3x}{3} = x$$

$f \circ f^{-1} : \mathbb{R} - \{-3\} \to \mathbb{R} - \{-3\}$

Soit $x \in \mathbb{R} - \{-3\}$

$$f \circ f^{-1}(x) = f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{x}{3+x}\right) = \frac{3\dfrac{x}{3+x}}{1 - \dfrac{x}{3+x}} = \frac{\dfrac{3x}{3+x}}{\dfrac{3}{3+x}} = \frac{3x}{3} = x.$$

Proposition2 :

Une application $f : E \to F$ est bijective si et seulement si :

Il existe une application $g : F \to E$ telle que $g \circ f = id_E$ et $f \circ g = Id_F$.

g est appelée l'application réciproque de f , notée f^{-1}.

Exemple :

$f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}_+$ $g : \mathbb{R}_+ \to [1, +\infty[$

$x \mapsto \sqrt{x-1}$ $x \mapsto x^2 + 1$

Calculer $g \circ f$ et $f \circ g$. Que peut-on conclure ?

$g \circ f : [1,+\infty[\to [1,+\infty[$

Soit $x \in [1,+\infty[$

$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x-1}) = (\sqrt{x-1})^2 + 1 = (x-1)+1 = x$

Donc $g \circ f = id_{[1,+\infty[}$

$f \circ g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$

Soit $x \in \mathbb{R}_+$

$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x^2+1) = \sqrt{(x^2+1)-1} = \sqrt{x^2} = |x| = x$ car $x \in \mathbb{R}_+$.

Donc $f \circ g = id_{\mathbb{R}_+}$

Conclusion :

On a $g \circ f = id_{[1,+\infty[} = id_E$ et $f \circ g = id_{\mathbb{R}_+} = Id_F$, d'après la proposition2 : f est bijective et son application réciproque est $f^{-1} = g$.

Proposition3 :

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.

1. si f et g sont injectives alors $g \circ f$ est injective.
2. si f et g sont surjectives alors $g \circ f$ est surjective.
3. si f et g sont bijectives alors $g \circ f$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.