CHAPITRE 1: Développements limités

Cours N^{0}2 : Formule de Taylor et développements limités pas 0

1 Développements limités au voisinage d'un point $x_0 \in \mathbb{R}$:

Définition: Soit f une fonction définie au voisinage d'un point x_0 sauf peut être en x_0.
On dit que f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de x_0 si:
$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + ... + a_n(x - x_0)^n + \circ((x - x_0)^n)$
où $a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$.

1.1 Cas des fonctions dérivables:

1.1.1 Formule de Taylor avec reste de Young:

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et soit I un voisinage de x_0.
Soit f une fonction de classe C^n sur I $(n \in \mathbb{N})$, alors f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de x_0 donné par la *formule de Taylor-young*:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}.(x - x_0)^k + \circ((x - x_0)^n)$$

$$= f(x_0) + \frac{f^{'}(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \circ((x - x_0)^n).$$

Remarque:
La recherche du développement limité d'une fonction f au voisinage d'un point $x_0 \in \mathbb{R}$ se ramène à celle du développement limité d'une fonction g au voisinage de 0, en faisant le changement de variable:
$y = x - x_0 \Longrightarrow x = y + x_0$
$x \in v(x_0),\ \ y \in v(0)$
donc $f(x) = f(y + x_0) = g(y)$.

Exemples:
- Calculer le développements limités de chacune des fonctions suivantes aux points et aux ordres indiqués.

1/ $f(x) = e^x,\ \ x_0 = 3,\ n = 3$.

Méthode 1:

$$f(x) = f(3) + \frac{f^{'}(3)}{1!}(x - 3) + \frac{f^{(2)}(3)}{2!}(x - 3)^2 + \frac{f^{(3)}(3)}{3!}(x - 3)^3 + \circ((x - 3)^3).$$

(Formule de Taylor-young à l'ordre 3 en $x_0 = 3$)

On a $\forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N}, f^{(k)}(x) = e^x$
donc $f(3) = f^{'}(3) = f^{(2)}(3) = f^{(3)}(3) = e^3$
donc $f(x) = e^3 + e^3(x-3) + \frac{e^3}{2}(x-3)^2 + \frac{e^3}{6}(x-3)^3 \ + \circ((x-3)^3)$.
Méthode 2:
On pose $y = x - 3 \Longrightarrow x = y + 3$
$x \in v(3), \ \ y \in v(0)$
$f(x) = f(3+y) = e^{3+y} = e^3.e^y$
et $e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \circ(y^3)$ car $y \in v(0)$
donc $f(x) = e^x = e^3[1 + (x-3) + \frac{1}{2}(x-3)^2 + \frac{1}{6}(x-3)^3 \ + \circ((x-3)^3)]$.
$f(x) = e^3 + e^3(x-3) + \frac{e^3}{2}(x-3)^2 + \frac{e^3}{6}(x-3)^3 \ + \circ((x-3)^3)$.
2/ $f(x) = \cos x, \ \ x_0 = \frac{\pi}{2}, n = 3$.
On pose $y = x - \frac{\pi}{2} \Longrightarrow x = y + \frac{\pi}{2}$
$x \in v(\frac{\pi}{2}), \ \ y \in v(0)$
$f(x) = f(y + \frac{\pi}{2}) = \cos(y + \frac{\pi}{2}) = -\sin y$
et $\sin y = y - \frac{y^3}{3!} + \circ(y^3)$
donc $f(x) = -[(x - \frac{\pi}{2}) - \frac{1}{3!}(x - \frac{\pi}{2})^3 + \circ((x - \frac{\pi}{2})^3)]$
$f(x) = -(x - \frac{\pi}{2}) + \frac{1}{6}(x - \frac{\pi}{2})^3 + \circ((x - \frac{\pi}{2})^3)$.

2 Développements limités au voisinage de l'infini:

Définition: Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a, +\infty[$ (resp $]-\infty, b]$).
On dit que f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de $+\infty$ (resp $-\infty$) si:
$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \frac{a_3}{x^3} + ... + \frac{a_n}{x^n} + \circ(\frac{1}{x^n})$
avec $a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$.

D'une autre manière:
La recherche du développement limité d'une fonction f au voisinage de $+\infty$ (resp $-\infty$) se ramène à celle du développement limité d'une fonction g à droite de 0 (resp à gauche de 0), en faisant le changement de variable:

$y = \frac{1}{x} \Longrightarrow x = \frac{1}{y}$
$$\begin{cases} x \in v(+\infty), \ y \in v(0^+) \\ x \in v(-\infty), \ y \in v(0^-) \end{cases}$$
donc $f(x) = f(\frac{1}{y}) = g(y)$.
Exemples:
Détrminer le développement limité des fonctions suivantes au voisinage de l'infini.
1/ $f(x) = \ln(1 + \frac{1}{x}), \ \ x_0 = +\infty, n = 4$.
On pose $\ \ y = \frac{1}{x} \Longrightarrow x = \frac{1}{y}$
$x \in v(+\infty), \ y \in v(0^+)$
$f(x) = f(\frac{1}{y}) = \ln(1 + y)$

et $\ln(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \circ(y^4)$
donc $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2}.\frac{1}{x^2} + \frac{1}{3}.\frac{1}{x^3} - \frac{1}{4}.\frac{1}{x^4} + \circ(\frac{1}{x^4})$.

2/ $f(x) = \sqrt{x^2-1} - \sqrt{x^2-x}$, $\;x_0 = \overset{-}{+}\infty, n = 4$.

Remarque: $\lim\limits_{x \longrightarrow \overset{-}{+}\infty} f(x) = \overset{-}{+}\frac{1}{2}$ (existe, finie et unique)

On pose $\;y = \frac{1}{x} \Longrightarrow x = \frac{1}{y}$

$$\begin{cases} \text{si } x \in v(+\infty) \text{ alors } \; y \in v(0^+) \\ \text{si } x \in v(-\infty) \text{ alors } \; y \in v(0^-) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f(x) = f(\tfrac{1}{y}) &= \sqrt{\tfrac{1}{y^2} - 1} - \sqrt{\tfrac{1}{y^2} - \tfrac{1}{y}} \\ &= \sqrt{\tfrac{1-y^2}{y^2}} - \sqrt{\tfrac{1-y}{y^2}} \\ &= \tfrac{1}{|y|}\sqrt{1-y^2} - \tfrac{1}{|y|}\sqrt{1-y} \\ &= \tfrac{1}{|y|}[\sqrt{1-y^2} - \sqrt{1-y}] \end{aligned}$$

On a $\sqrt{1-y^2} = \sqrt{1+t}$ avec $t = -y^2 \in v(0)$
et $\sqrt{1+t} = 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + \frac{1}{16}t^3 - \frac{5}{128}t^4 + \circ(t^4)$
(On peut s'arreter à l'ordre 2)
$t = -y^2 + \circ(y^4)$, $t^2 = y^4 + \circ(y^4)$, $t^3 = \circ(y^4)$, $t^4 = \circ(y^4)$

$\sqrt{1-y^2} = 1 + \frac{1}{2}(-y^2) - \frac{1}{8}y^4 + \circ(y^4) = 1 - \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{8}y^4 + \circ(y^4)$
et $\sqrt{1-y} = 1 - \frac{1}{2}y - \frac{1}{8}y^2 - \frac{1}{16}y^3 - \frac{5}{128}y^4 + \circ(y^4)$

$$\begin{aligned} \text{donc } f(\tfrac{1}{y}) &= \tfrac{1}{|y|}[1 - \tfrac{1}{2}y^2 - \tfrac{1}{8}y^4 - 1 + \tfrac{1}{2}y + \tfrac{1}{8}y^2 + \tfrac{1}{16}y^3 + \tfrac{5}{128}y^4 + \circ(y^4)] \\ &= \tfrac{1}{|y|}[\tfrac{1}{2}y - \tfrac{3}{8}y^2 + \tfrac{1}{16}y^3 - \tfrac{11}{128}y^4 + \circ(y^4)] \end{aligned}$$

- si $x \in v(+\infty)$ alors $\;y \in v(0^+)$

donc $|y| = y$

$$\begin{aligned} f(x) = f(\tfrac{1}{y}) &= \tfrac{1}{y}[\tfrac{1}{2}y - \tfrac{3}{8}y^2 + \tfrac{1}{16}y^3 - \tfrac{11}{128}y^4 + \circ(y^4)] \\ &= \tfrac{1}{2} - \tfrac{3}{8}y + \tfrac{1}{16}y^2 - \tfrac{11}{128}y^3 + \circ(y^3) \end{aligned}$$

d'où $\;f(x) = \frac{1}{2} - \frac{3}{8}\frac{1}{x} + \frac{1}{16}\frac{1}{x^2} - \frac{11}{128}\frac{1}{x^3} + \circ(\frac{1}{x^3})$
c'est le DL fe la fonction f au voisinage de $+\infty$ à l'ordre 3.

- si $x \in v(-\infty)$ alors $\;y \in v(0^-)$

donc $|y| = -y$

$$\begin{aligned} f(x) = f(\tfrac{1}{y}) &= \tfrac{1}{-y}[\tfrac{1}{2}y - \tfrac{3}{8}y^2 + \tfrac{1}{16}y^3 - \tfrac{11}{128}y^4 + \circ(y^4)] \\ &= -\tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{8}y - \tfrac{1}{16}y^2 + \tfrac{11}{128}y^3 + \circ(y^3) \end{aligned}$$

d'où $\;f(x) = -\frac{1}{2} + \frac{3}{8}\frac{1}{x} - \frac{1}{16}\frac{1}{x^2} + \frac{11}{128}\frac{1}{x^3} + \circ(\frac{1}{x^3})$
c'est le DL fe la fonction f au voisinage de $+\infty$ à l'ordre 3.