République Algérienne Démocratique & Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur & de la Recherche Scientifique
Université Blida1

Cours de Physique1
« Mécanique du point matériel »

MEGUENNI A/Hakim

1ère année ST/SM

Chapitre 1 **ANALYSE VECTORIELLE**

(Rappel mathématique)

1/INTRODUCTION:

La majorité des phénomènes physiques et en particulier dynamiques, sont représentés par des grandeurs vectorielles (ex : vecteur position $\overrightarrow{OM}$ *, vecteur vitesse* $\vec{V}$*, accélération* $\vec{a}$ *, force* $\vec{F}$*, quantité de mouvement* $\vec{P}$ *etc…)*

1.1/ Définition d'un vecteur :

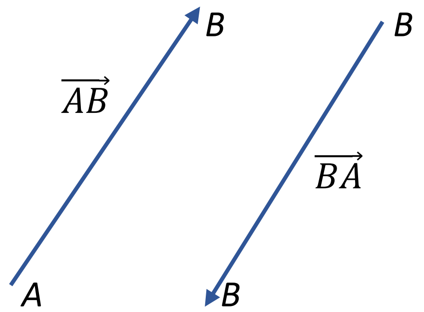
Un vecteur est un segment de droite qui joint deux points donnés, à partir d'un point donné, le vecteur doit être caractérisé par :

- *son module* مقياس $|\overrightarrow{AB}|=|\vec{V}|=$ *5 unité*
- *sa direction* الحامل
- *son sens* الاتجاه

a/ Vecteur opposé: شعاع معاكس

Le vecteur opposé au vecteur $\overrightarrow{AB}$*, sera un vecteur de même module que* $\overrightarrow{AB}$ *mais de sens contraire, noté par :* $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$

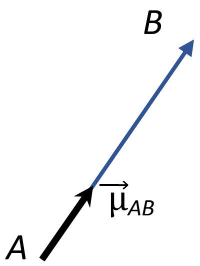
Le module de $\overrightarrow{AB}$ *est égale au module de* $\overrightarrow{BA}$ *: on écrit* $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{BA}|$ *ou bien* $AB = BA$



b/ vecteur unitaire : شعاع الوحدة

Le vecteur unitaire de $\overrightarrow{AB}$ *: est un vecteur qui a la même direction et le même sens que* $\overrightarrow{AB}$ *mais dont le module est égale à 1.*

$\overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}|.\vec{\mu}_{AB} \quad \rightarrow \quad \vec{\mu}_{AB} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$



Remarque : *Chaque vecteur a son propre vecteur unitaire.*

Exemple : *Déterminer le vecteur unitaire du vecteur* $\vec{V} = 4\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$

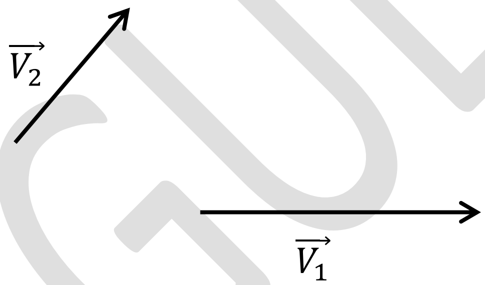
On sait que : $\vec{V} = = |\vec{V}| . \vec{\mu}_{\vec{V}}$ $\rightarrow$ $\vec{\mu}_{\vec{V}} = \dfrac{\vec{V}}{|\vec{V}|}$

Puisque le module de $\vec{V}$ *est :* $|\vec{V}| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$

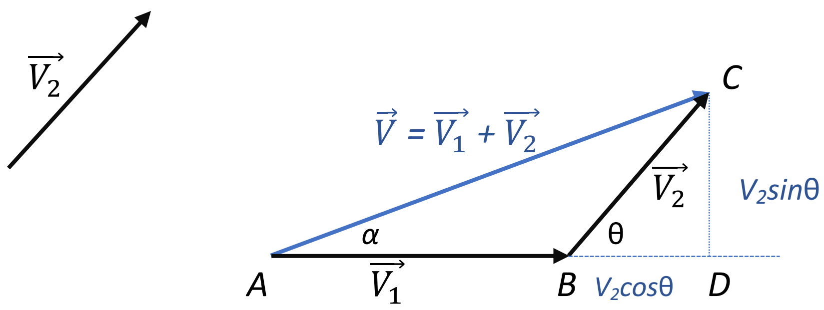
Donc : $\vec{\mu}_{\vec{V}} = \dfrac{4\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}}{5} = 0{,}8\vec{\imath} + 0{,}6j$

1.2/ L'addition (la somme) de deux vecteurs :

a/ Géométriquement :



Pour faire la somme de deux vecteurs $\vec{V_1}$ *et* $\vec{V_2}$, *il faut placer le début du vecteur* $\vec{V_2}$ *à la fin du vecteur* $\vec{V_1}$, *ainsi le vecteur résultant* $\vec{V} = \vec{V_1} + \vec{V_2}$ *sera le vecteur dont le point de départ coïncide avec le début de* $\vec{V_1}$ *et sa fin coïncide avec la fin de* $\vec{V_2}$ *(voir schéma)*



b/ Analytiquement :

Pour déterminer le vecteur $\vec{V}$ il faut donner son module, sa direction et son sens :

- *Détermination du module de $\vec{V}$:*

Nous remarquons que dans le triangle ADC : $AC^2 = AD^2 + DC^2$ *(théorème de Pythagore)*

Avec : $AC = |\vec{V}| = V$

$AD = AB + BD = V_1 + V_2 \cos\theta$

$DC = V_2 \sin\theta$

En remplaçant dans $AC^2 = AD^2 + DC^2$, on aura :

$$V^2 = (V_1 + V_2 \cos\theta)^2 + V_2^2 \sin^2\theta$$

$$V^2 = V_1^2 + 2V_1.V_2.\cos\theta + V_2^2\cos^2\theta + V_2^2\sin^2\theta$$

$$V^2 = V_1^2 + 2V_1.V_2.\cos\theta + V_2^2$$

D'où le module de $\vec{V}$: $\boxed{V = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 + 2V_1.V_2.\cos\theta}}$

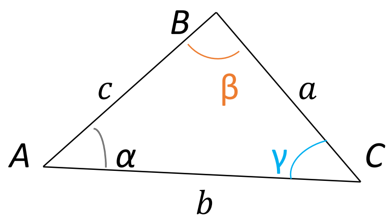
- *La direction de $\vec{V}$:*

Pour déterminer la direction du vecteur $\vec{V}$, il faut seulement donner l'angle α (α : angle entre le vecteur $\vec{V}$ et l'horizontale).

$$\left.\begin{aligned} &\text{Dans le triangle ADC : } DC = V\sin\alpha \\ &\text{Dans le triangle BDC : } DC = V_2 \sin\theta \end{aligned}\right] \quad \text{Donc : } DC = V\sin\alpha = V_2\sin\theta \;\Longrightarrow\; \boxed{\sin\alpha = \frac{V_2}{V}.\sin\theta}$$

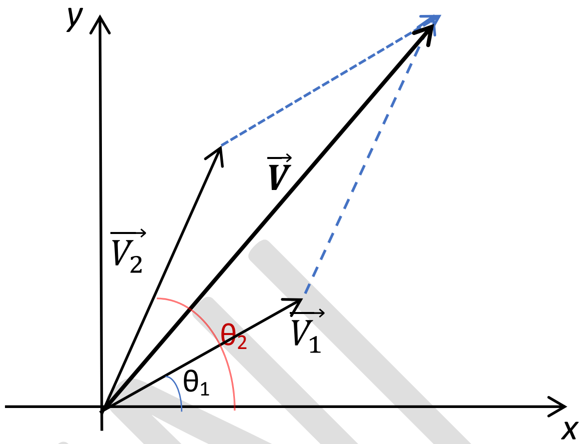
D'où la relation connue (d'un triangle quelconque) :

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$



c/ La somme de deux vecteurs en utilisant leurs composantes :

Nous allons déterminer les composantes du vecteur $\vec{V} = \vec{V_1} + \vec{V_2}$ *en fonction des composantes de* $\vec{V_1}$ *et* $\vec{V_2}$ *:*



$$\vec{V} = V_x\,\vec{\imath} + V_y\,\vec{\jmath} \qquad V_x = ? \quad et \quad V_y = ?$$

$$\vec{V_1} = V_{1x}\,\vec{\imath} + V_{1y}\,\vec{\jmath} = V_1 cos\theta_1\,\vec{\imath} + V_1\,sin\theta_1\,\vec{\jmath}$$

$$\vec{V_2} = V_{2x}\,\vec{\imath} + V_{2y}\,\vec{\jmath} = V_2 cos\theta_2\,\vec{\imath} + V_2 sin\theta_2\,\vec{\jmath}$$

Comme $\vec{V} = \vec{V_1} + \vec{V_2}$*, alors en faisant les projections sur les axes on aura les composantes de* $\vec{V}$ *:*

Proj / $\overrightarrow{Ox}$ *:* $V_x = V_{1x} + V_{2x} = V_1\,cos\theta_1 + V_2\,cos\theta_2$

Proj / $\overrightarrow{Oy}$ *:* $V_y = V_{1y} + V_{2y} = V_1\,sin\theta_1 + V_2\,sin\theta_2$

Finalement le module de V sera : $|\vec{V}| = V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$

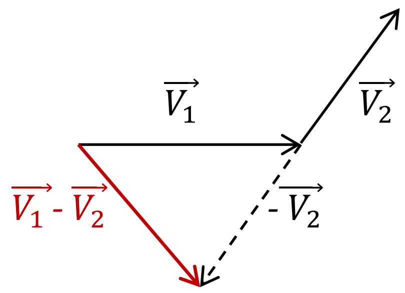
La direction de $\vec{V}$ *est donnée par l'angle α (angle entre le vecteur* $\vec{V}$ *et l'axe des x) tel que :*

$$tg\alpha = V_y/V_x$$

1.3/ Différence (soustraction) de deux vecteurs :

La différence de deux vecteurs $\vec{V_1} - \vec{V_2}$*, n'est autre que la somme du vecteur* $\vec{V_1}$ *plus l'opposé du vecteur* $\vec{V_2}$ *:*

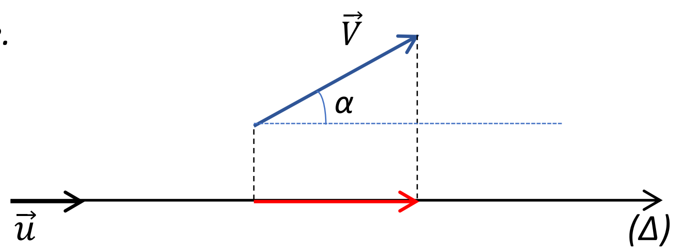
$$\vec{V_1} - \vec{V_2} = \vec{V_1} + (-\vec{V_2})$$



1.4/ Projection d'un vecteur :

- La projection d'un vecteur sur un axe (Δ) est égale au module du vecteur multiplié par le cosinus de l'angle entre le vecteur et l'axe.

Proj $\vec{V}/_{(\Delta)} = |\vec{V}|.cos(\vec{V},\vec{u})\,\vec{u} = |\vec{V}|.cos\alpha\,\vec{u}$

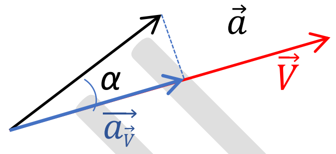


Le module de la projection de $\vec{V}$ sur (Δ) est égale à : $|\vec{V}|.cos\alpha = V.cos\alpha$

- *On peut projeter un vecteur sur un autre vecteur.*

  Par exemple le module de la projection du vecteur $\vec{a}$ sur le vecteur $\vec{V}$ s'écrit :

  Proj $\vec{a}/\vec{V} = |\vec{a_{\vec{V}}}| = |\vec{a}|.cos\alpha$



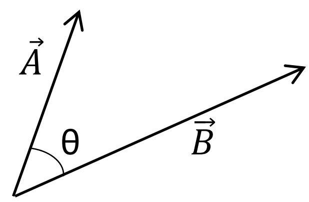
2/ LE PRODUIT SCALAIRE: (الجداء السلمي)

2.1/ Définition :

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{A}$ par $\vec{B}$ est défini par la grandeur scalaire obtenue par :

$$\boxed{\vec{A}.\vec{B} = |\vec{A}|.|\vec{B}|.cos(\overrightarrow{A,B}) = |\vec{A}|.|\vec{B}|.cos\theta = \text{scalaire}}$$

avec θ : angle compris entre les vecteurs $\vec{A}$ *et* $\vec{B}$.



Remarque :

- *Le produit scalaire est commutatif*

$$\vec{A}.\vec{B} = \vec{B}.\vec{A}$$

- *Le produit scalaire d'un vecteur par lui-même est égal au module du vecteur au carré.*

$$\vec{A}.\vec{A} = |\vec{A}|.|\vec{A}|.cos0 = |\vec{A}|.|\vec{A}| = A^2$$

- *Le produit scalaire de deux vecteurs perpendiculaires (orthogonaux) est nul.*

  Si $\vec{A} \perp \vec{B} \rightarrow \vec{A}.\vec{B} = |\vec{A}|.|\vec{B}|.cos\frac{\pi}{2} = 0$ *(c'est la condition d'orthogonalité)*

- *Dans un repère orthonormé (معلم متعامد متجانس), les produits scalaires des vecteurs unitaires ont pour valeurs:*

  $\vec{\imath}\,.\,\vec{\imath} = \vec{\jmath}\,.\,\vec{\jmath} = \vec{k}\,.\,\vec{k} = 1$ *(produit scalaire d'un vecteur par lui-même)*

  $\vec{\imath}\,.\,\vec{\jmath} = \vec{\jmath}\,.\,\vec{k} = \vec{k}\,.\,\vec{\imath} = 0$ *(produit scalaire de 2 vecteurs perpendiculaires)*

2.2/ Expression analytique du produit scalaire:

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{A}$ par $\vec{B}$ est égal à la somme des produits de leurs composantes :

$$\vec{A}\begin{vmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{vmatrix} \quad et \quad \vec{B}\begin{vmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{vmatrix} \quad alors \qquad \vec{A}.\vec{B} = (A_x\vec{\imath} + A_y\vec{\jmath} + A_z\vec{k}).(B_x\vec{\imath} + B_y\vec{\jmath} + B_z\vec{k})$$

donc on aura : $\boxed{\vec{A}.\vec{B} = A_x.B_x + A_y.B_y + A_z.B_z}$

Exemple :

$$\vec{A}\begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{vmatrix} \quad et \quad \vec{B}\begin{vmatrix} -4 \\ 5 \\ 3 \end{vmatrix} \quad \rightarrow \qquad \vec{A}.\vec{B}=1.(-4)+2.5+3.3=15$$

<u>Remarque :</u> Détermination d'un angle compris entre deux vecteurs

En connaissant les composantes des vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$, on peut déterminer l'angle θ compris entre ces deux vecteurs en utilisant le produit scalaire :

$$\vec{A} = A_x\vec{\imath} + A_y\vec{\jmath} + A_z\vec{k} \qquad et \qquad \vec{B} = B_x\vec{\imath} + B_y\vec{\jmath} + B_z\vec{k}$$

$$\left.\begin{aligned} \vec{A}.\vec{B} &= |\vec{A}|.|\vec{B}|.\cos\theta \\ \vec{A}.\vec{B} &= A_x.B_x + A_y.B_y + A_z.B_z \end{aligned}\right\} \rightarrow \cos\theta = \frac{A_x.B_x + A_y.B_y + A_z.B_z}{|\vec{A}|.|\vec{B}|} \qquad \rightarrow \theta = ?$$

3/ LE PRODUIT VECTORIEL : (الجداء الشعاعي)

3.1/ Rappel mathématique: (calcul d'un déterminant)

- *Un déterminant du second ordre est un tableau à 4 éléments (2x2) :*

$$\begin{array}{l} 1^{ère}\ ligne \longrightarrow \\ 2^{ème}\ ligne \longrightarrow \end{array} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 x b_2 - b_1 x a_2$$

$$\begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ 1^{ère}\ colonne & 2^{ème}\ colonne \end{array}$$

- Un déterminant du 3ème degré est un tableau à 9 éléments (3x3) :

$$\begin{array}{ccc} \color{red}{+} & \color{red}{-} & \color{red}{+} \end{array}$$

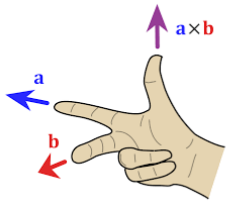
$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1.\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2.\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3.\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$= a_1.(b_2.c_3 - c_2.b_3) - a_2.(b_1.c_3 - c_1.b_3) + a_3.(b_1.c_2 - c_1.b_2)$$

3.2/ Définition du produit vectoriel :

Le produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ est un vecteur (noté $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = \vec{A} \wedge \vec{B}$) qui a les caractéristiques suivantes :

- La direction de $\vec{C}$: $\vec{C} \perp \vec{A}$ et $\vec{C} \perp \vec{B}$
- Le sens de $\vec{C}$: il est déterminé par la méthode de la main droite.



- Le module de $\vec{C}$: $\boxed{|\vec{C}| = |\vec{A} \wedge \vec{B}| = |\vec{A}|.|\vec{B}|.\sin\theta}$

<u>Remarques :</u>

- Si $\vec{A} \wedge \vec{B} = \vec{0}$ $\rightarrow \begin{cases} |\vec{A}| = |\vec{B}| = 0 \\ \vec{A} \text{ et } \vec{B} \text{ sont parallèles } (\theta = 0 \text{ ou } \pi) \end{cases}$

- Le produit vectoriel est anti-commutatif : $\vec{A} \wedge \vec{B} = - \vec{B} \wedge \vec{A}$

- Le produit vectoriel est distributif : $\vec{E} \wedge (\vec{A} + \vec{B}) = \vec{E} \wedge \vec{A} + \vec{E} \wedge \vec{B}$

- Le produit vectoriel des vecteurs unitaires :

$$\begin{array}{ccc} \vec{\imath} \wedge \vec{\jmath} = \vec{k} & \text{mais} & \vec{\imath} \wedge \vec{\jmath} = - \vec{k} \\ \vec{\jmath} \wedge \vec{k} = \vec{\imath} & \text{mais} & \vec{\jmath} \wedge \vec{k} = - \vec{\imath} \\ \vec{k} \wedge \vec{\imath} = \vec{\jmath} & \text{mais} & \vec{k} \wedge \vec{\imath} = - \vec{\jmath} \end{array}$$

Sans oublier que : $\vec{\imath} \wedge \vec{\imath} = \vec{\jmath} \wedge \vec{\jmath} = \vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{0}$

3.3/ Expression analytique :

$\vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B}$, *déterminer les composantes du vecteur* $\vec{C}$ *en fonction des composantes des vecteurs* $\vec{A}$ *et* $\vec{B}$:

$$\vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \vec{\imath}.\begin{vmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix} - \vec{\jmath}.\begin{vmatrix} A_x & A_z \\ B_x & B_z \end{vmatrix} + \vec{k}.\begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix}$$

$$= \left(A_y.B_z - B_y.A_z\right)\vec{\imath} - \left(A_x.B_z - B_x.A_z\right)\vec{\jmath} + \left(A_x.B_y - B_x.A_y\right)\vec{k}$$

$$= C_x\,\vec{\imath} + C_y\,\vec{\jmath} + C_z\,\vec{k}$$

Finalement les composantes de $\vec{C}$ *sont :*

$$\vec{C}\left|\begin{array}{l} C_x = \left(A_y.B_z - B_y.A_z\right) \\ C_y = -\left(A_x.B_z - B_x.A_z\right) \\ C_z = \left(A_x.B_y - B_x.A_y\right) \end{array}\right.$$

Exemple :

Déterminer les composantes du vecteur $\vec{C}$ *tel que* $\vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B}$ *: on donne*

$$\vec{A}\left|\begin{array}{l} 2 \\ 3 \\ 1 \end{array}\right. \quad et \quad \vec{B}\left|\begin{array}{r} 1 \\ -2 \\ 3 \end{array}\right.$$

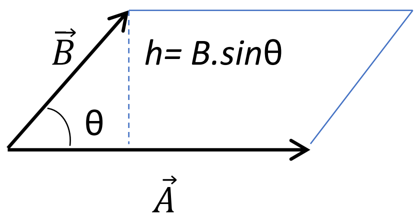
$$\vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = [9-(-2)]\vec{\imath} - [6-1]\vec{\jmath} + [2.(-2)-3]\vec{k}$$

$$= 11\vec{\imath} - 5\vec{\jmath} - 7\vec{k}$$

Remarque:

Le module du produit vectoriel $\vec{A} \wedge \vec{B}$ *représente l'aire (surface) du parallélogramme formé par* $\vec{A}$ et $\vec{B}$:

$$\left|\vec{A} \wedge \vec{B}\right| = S = \left|\vec{A}\right|.h = A.h$$



4/ LE PRODUIT MIXTE :

On appelle produit mixte des vecteurs $\overrightarrow{A}$, $\vec{B}$ et $\vec{C}$ pris dans cet ordre, le produit scalaire du premier par le produit vectoriel des deux autres, c'est donc un scalaire : $\overrightarrow{\boldsymbol{A}}.(\overrightarrow{\boldsymbol{B}} \wedge \vec{\boldsymbol{C}})$

On peut aisément démontrer que :

$$\overrightarrow{A}.(\overrightarrow{B} \wedge \vec{C}) = A_x(B_yC_z - B_zC_y) - A_y(B_xC_z - C_xB_z) + A_z(B_xC_y - C_xB_y)$$

C'est à dire :

$$\boxed{\overrightarrow{A}.(\overrightarrow{B} \wedge \vec{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}}$$

- *Attention :* $\overrightarrow{A} \wedge \vec{B} \wedge \vec{C} \neq \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$

5/ DERIVẺE D'UN VECTEUR :

La dérivée d'un vecteur : c'est la dérivée de ses composantes :

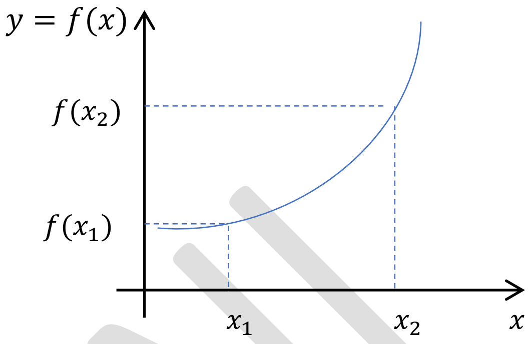
$\overrightarrow{A} = A_x\vec{\imath} + A_y\vec{\jmath} + A_z\vec{k}$ *alors* $\dfrac{d\vec{A}}{dt} = \dfrac{dA_x}{dt}\vec{\imath} + \dfrac{dA_y}{dt}\vec{\jmath} + \dfrac{dA_z}{dt}\vec{k}$

- $\dfrac{d}{dt}\lambda\vec{A} = \lambda\dfrac{d}{dt}\vec{A}$ *avec :* λ *= constante*
- $\dfrac{d}{dt}(\vec{A} + \vec{B}) = \dfrac{d\vec{A}}{dt} + \dfrac{d\vec{B}}{dt}$
- $\dfrac{d}{dt}(\vec{A} \,.\, \vec{B}) = \dfrac{d\vec{A}}{dt}\vec{B} + \vec{A}\dfrac{d\vec{B}}{dt}$
- $\dfrac{d}{dt}(\vec{A} \wedge \vec{B}) = \dfrac{d\vec{A}}{dt} \wedge \vec{B} + \vec{A} \wedge \dfrac{d\vec{B}}{dt}$

6/ NOTION DE DERIVÉE :

6.1/ Définition de la dérivée d'une fonction :

Soit une fonction $y = f(x)$, *le taux d'accroissement cette fonction en un point d'abscisse* x *est donné par :*



$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$\left.\begin{array}{l} si\ on\ pose:\ x_1 = x \\ et \qquad x_2 = x + \Delta x \end{array}\right\} \quad alors:\ f(x_1) = f(x)$$

$$f(x_2) = f(x + \Delta x)$$

$$et \quad x_2 - x_1 = \Delta x$$

La dérivée de la fonction f(x) est tout simplement la limite de l'accroissement $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ *lorsque* Δx *tend vers zéro :*

$$\boxed{f'(x) = \frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}}$$

6.2/ La différentielle d'une fonction :

Soit une fonction donnée qui peut dépendre de trois variables x, y, et z : f(x,y,z),

La différentielle de la fonction f s'écrit :

$$\boxed{df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) dy + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) dz}$$

avec : $\frac{\partial f}{\partial x}$ *: c'est la dérivée partielle de la fonction f par rapport à* x *;*

$\frac{\partial f}{\partial y}$ *: c'est la dérivée partielle de la fonction f par rapport à* y *;*

et $\frac{\partial f}{\partial z}$ *: c'est la dérivée partielle de la fonction f par rapport à z .*

Exemple :

Déterminer la différentielle de la fonction f : $f(x, y, z) = 2xy^2 - xz^3$

On a : $\frac{\partial f}{\partial x} = 2y^2 - z^3$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 4xy$

$\frac{\partial f}{\partial z} = -3xz^2$

alors : $df = (2y^2 - z^3)\, dx + 4xy\, dy - 3xz^2\, dz$

7/ GRADIENT – DIVERGENCE – ROTATIONNEL :

Soit l'opérateur 'nabla' $\vec{\nabla}$ *défini par :* $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$

Cet opérateur nous permet de déterminer (et d'apprendre) d'une manière simple les notions mathématiques (gradient, divergence et rotationnel).

7.1/ Gradient d'une fonction:

Le gradient d'une fonction f(x, y, z) est un vecteur noté par : $\overrightarrow{grad}f = \vec{\nabla}f$ *dont les composantes sont les dérivées partielles par rapport à x, par rapport à y et par rapport à z.*

$$\boxed{\overrightarrow{grad}\, f = \vec{\nabla}f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}} \quad \rightarrow \quad \overrightarrow{grad}\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$$

7.2/ Divergence d'un vecteur:

La divergence d'un vecteur $\vec{V}$ *représente le produit scalaire de* $\vec{\nabla}$ *par ce vecteur :*

$$\vec{\nabla}\begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \quad et \quad \vec{V}\begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix}$$

$$\boxed{div\,\vec{V} = \vec{\nabla}.\vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}}$$

7.3/ Rotationnel d'un vecteur:

Le rotationnel d'un vecteur $\vec{V}$ *est un vecteur représenter par le produit vectoriel de* $\vec{\nabla}$ *par ce vecteur :*

$$\overrightarrow{Rot}\,\vec{V} = \vec{\nabla}\wedge\vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}\right)\vec{i} - \left(\frac{\partial V_z}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial z}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right)\vec{k}$$

donc les composantes de $\overrightarrow{rot}$ *de* $\vec{V}$ *s'écrivent :*

$$\overrightarrow{Rot}\,\vec{V} = \vec{\nabla}\wedge\vec{V} = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \\ \frac{\partial V_z}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial z} \\ \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

- *Le vecteur peut être une force* $\vec{F} = F_x\,\vec{i} + F_y\,\vec{j} + F_z\,\vec{k}$ *ainsi le rotationnel de la force* $\vec{F}$ *sera :*

$$\overrightarrow{Rot}\,\vec{F} = \vec{\nabla}\wedge\vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial z} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Remarque :

- *Soit une fonction f(x,y,z) donnée : on a toujours* $\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{grad}\,f = \vec{0}$
- *Soit un vecteur* $\vec{F}(x,y,z)$ *donné : on a toujours* div $\overrightarrow{rot}\,\vec{F} = 0$