CHAPITRE 3: Matrices et Déterminants

Cours N° 3

1 Les déterminants:

1.1 Définition:

On associe à toute matrice carrée A, un nombre appelé *déterminant*, noté $|A|$, ou $\det(A)$ ou Δ, défini par:

1/ Si $A = (a_{11})$ est une matrice carrée d'ordre 1, on pose: $|A| = a_{11}$.

2/ Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ est une matrice carrée d'ordre 2,on pose:

$|A| = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$.

3/ En général, si A est une matrice carrée d'ordre n

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & . & a_{nn} \end{pmatrix}$$

On pose:

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \ |A_{ij}| \ \text{ suivant la ligne } i,$$

ou bien

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \ |A_{ij}| \ \text{ suivant la colonne } j,$$

où A_{ij} est la matrice obtenue en supprimant la ligne i et la colonne j de la matrice A.

$|A_{ij}|$ est appelé *déterminant mineur* associé à la matrice A_{ij}.

$(-1)^{i+j} \det(A_{ij})$ est appelé le *cofacteur* de l'élément a_{ij}.

Exemples: Calculer le déterminant de chacune des matrices suivantes:

1/ $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$

$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -5 \end{vmatrix} = 2(-5) - (-3)4 = -10 + 12 = 2.$

2/ $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -6 & 8 \end{pmatrix}$

$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -6 & 8 \end{vmatrix} = 3.8 - (-6)(-4) = 0.$

3/ $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ -3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

Remarque: Pour une matrice carrée d'ordre $n \geq 3$, on peut choisir la ligne ou la colonne par rapport à laquelle, on va calculer le détrminant.
En pratique, on le calculera par rapport à la ligne ou la colonne qui contient le plus de zéro.

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ -3 & 2 & 5 \end{vmatrix}$

Développement du déterminant par rapport à la ligne $1^{ère} ligne$ $(i = 1)$

$$|A| = \sum_{j=1}^{3} (-1)^{1+j} a_{1j} \; |A_{1j}|$$
$$= (-1)^{1+1} a_{11} \, |A_{11}| + (-1)^{1+2} a_{12} \, |A_{12}| + (-1)^{1+3} a_{13} \, |A_{13}|$$

avec $a_{11} = 1$ et $|A_{11}| = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = (-1)5 - 2.4 = -13$

A_{11} est la matrice obtenue à partir de la matrice A, en supprimant la $1^{ère}$ ligne et la $1^{ère}$ colonne.

$a_{12} = -2$ et $|A_{12}| = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 2.5 - (-3)4 = 22$

A_{12} est la matrice obtenue à partir de la matrice A, en supprimant la $1^{ère}$ ligne et la $2^{ème}$ colonne.

$a_{13} = 3$ et $|A_{13}| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 2.2 - (-3)(-1) = 1$

A_{13} est la matrice obtenue à partir de la matrice A, en supprimant la $1^{ère}$ ligne et la $3^{ème}$ colonne.

donc $|A| = 1(-13) - (-2)22 + 3.1 = 34.$

4/ $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 7 & 3 \end{pmatrix}$

On calcul le déterminant de A par rapport à la $1^{ère}$ colonne

$$|A| = \sum_{i=1}^{3} (-1)^{i+1} a_{i1} \; |A_{i1}|$$
$$= (-1)^{1+1} a_{11} \, |A_{11}| + (-1)^{2+1} a_{21} \, |A_{21}| + (-1)^{3+1} a_{31} \, |A_{31}|$$

avec $a_{11} = 2$ et $|A_{11}| = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = (-2)3 - 7.4 = -34$

A_{11} est la matrice obtenue à partir de la matrice A, en supprimant la $1^{ère}$ ligne et la $1^{ère}$ colonne.

$a_{21} = 0$ et $|A_{21}| = \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = (-1)3 - 7.5 = -38$

A_{21} est la matrice obtenue à partir de la matrice A, en supprimant la $2^{ème}$ ligne et la $1^{ère}$ colonne.

$a_{31} = 0$ et $|A_{31}| = \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = (-1)4 - (-2).5 = 6$

A_{31} est la matrice obtenue à partir de la matrice A, en supprimant la $3^{ème}$ ligne et la $1^{ère}$ colonne.

donc $|A| = 2.(-34) - 0.(-38) + 0.6 = -68.$

5/ $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 11 \\ 2 & 7 & 15 \\ -4 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

On développe le déterminant de A par rapport à la $2^{ème}$ colonne

$$|A| = \sum_{i=1}^{3} (-1)^{i+2} a_{i2}\ |A_{i2}|$$

$$|A| = (-1)^{1+2} a_{12}\ |A_{12}| + (-1)^{2+2} a_{22}\ |A_{22}| + (-1)^{3+2} a_{32}\ |A_{32}|$$

$$|A| = (-1).0. \begin{vmatrix} 2 & 15 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} + 7 \begin{vmatrix} -3 & 11 \\ -4 & 16 \end{vmatrix} - 0. \begin{vmatrix} -3 & 11 \\ 2 & 15 \end{vmatrix}$$

$$= 7(-18 + 44) = 182.$$

6/ $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

On développe le déterminant par rapport à la $1^{ère}$ colonne ou la $3^{ème}$ ligne

On choisit la $3^{ème}$ ligne.

$$|A| = \sum_{j=1}^{3} (-1)^{3+j} a_{3j}\ |A_{3j}|$$

$$|A| = (-1)^{3+1} a_{31}\ |A_{31}| + (-1)^{3+2} a_{32}\ |A_{32}| + (-1)^{3+3} a_{33}\ |A_{33}|$$

$$|A| = 0. \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - 0. \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + (-3) \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}$$

$$|A| = (-3)[4(-2) - 0.5] = 24.$$

7/ $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

On développe le déterminant par rapport à la $3^{ème}$ colonne

$$|A| = 0 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 0 \\ -3 & 5 & 0 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 5 & 3 & 0 \\ -3 & 5 & 0 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 1 & 2 & 1 \\ -3 & 5 & 0 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 1 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$|A| = (-2) \begin{vmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 5 & 3 & 0 \\ -3 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

On développe $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 5 & 3 & 0 \\ -3 & 5 & 0 \end{vmatrix}$ par rapport à la $3^{ème}$ colonne

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 5 & 3 & 0 \\ -3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 7\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}$$
$$= 7(25 - (-3)) = 238.$$

1.2 Propriétés:

1/ Si une matrice A a une ligne (ou une colonne) nulle alors $|A| = 0$.
2/ Si une matrice carrée Aa deux lignes (ou colonne) identiques
alors $|A| = 0$.
3/ Si A est une matrice triangulaire supérieure (ou inférieure) ou diagonale, alors $|A|$ est égal au produit des éléments diagonaux.
4/ Si B est une matrice carrée obtenue à partir d'une matrice carrée A, en multipliant une de ses lignes (ou colonne) par un scalaire non nul k,
alors $|B| = k\,|A|$.
5/ Si B est une matrice carrée obtenue à partir d'une matrice carrée A, en additionnant le multiple d'une ligne (ou colonne) à une autre,
alors $|B| = |A|$.
6/ Si B est une matrice carrée obtenue en permutant deux lignes (ou colonnes) d'une matrice carrée A, alors $|B| = -|A|$.
7/ $|{}^tA| = |A|$ où A est une matrice carrée.
8/ Si A et B sont deux matrices carrées de même ordre, alors $|AB| = |A|\,|B|$.

Exemples: Calculer le déterminant des matrices suivantes

1/ $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

Remarque: Puisqu'une matrice triangulaire inférieure est une matrice échelonnée, et toute matrice peut être transformé en une matrice échelonnée et en utilisant la propriété 3, ci dessus, alors pour calculer le déterminant d'une matrice carrée A, on échelonne d'abord A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} \underset{L_3 \longleftarrow L_3 - 3L_1}{\overset{L_2 \longleftarrow L_2 - 2L_1}{=}} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & -10 \\ 0 & 6 & -10 \end{vmatrix} \text{ (propriété 5)}$$

$$\overset{L_3 \longleftarrow L_3 - 2L_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & -10 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} \text{ (propriété 5)}$$

$|A| = 1 \times 3 \times 10 = 30$ (propriété 3)

2/ $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 4 & 5 & 1 \end{vmatrix} \overset{L_2 \leftrightarrow L_1}{=} - \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 4 & 5 & 1 \end{vmatrix} \text{(propriété 6)}$$

$$\overset{L_3 \longleftarrow L_3 - 2L_1}{=} - \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & -9 \end{vmatrix} \text{(propriété 5)}$$

$$\overset{L_3 \longleftarrow L_3 - 3L_2}{=} - \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \text{(propriété 5)}$$

donc $|A| = 0$ (propriété 1).

1.3 Calcul du rang d'une matrice par déterminant

1.3.1 Définition:

Le rang d'une matrice $A \in M_{m,p}(\mathbb{R})$ est le *plus grand entier* r tel qu'il existe un déterminant d'ordre r extrait de A *non nul.*

i.e : Le rang de la matrice A est l'ordre du déterminant mineur le plus élevé qui peut être extrait de A.

Exemples: Calculer le rang des matrices suivantes:

1/ $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$

Comme A est une matrice carrée, le premier déterminant à calculer est celui de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} -5 & 3 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 6 & -6 \end{vmatrix} = 86 \neq 0$$

donc $rg(A) = 3$, car $A \in M_3(\mathbb{R})$ (3 c'est l'ordre du déterminant non nul l le plus élevé).

2/ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, A n'est pas une matrice carrée

Le premier déterminant extrait de A est d'ordre 3 (il existe 4 déterminants mineur d'ordre 3)

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \text{(déterminant mineur obtenu en supprimant la } 4^{ème} \text{colonne)}$$

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$ (On développe Δ_1 suivant la $1^{ère}$ colonne)

$\Delta_1 = 0$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ (déterminant mineur obtenu en supprimant la $3^{ème}$colonne)

$\Delta_2 = 0$ (la $1^{ère}$ et la $3^{ème}$ colonne sont identiques)

$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ (déterminant mineur obtenu en supprimant la $2^{ème}$colonne)

$\Delta_3 = 0$ (la $1^{ère}$ et la $3^{ème}$ colonne sont identiques)

$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ (déterminant mineur obtenu en supprimant la $1^{ère}$colonne)

$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$ (On développe Δ_4 suivant la $3^{ème}$ colonne)

$\Delta_4 = 0$

Comme tous les mineurs d'ordre 3 sont nuls, alors $rg(A) \leq 2$

On cherche un déterminant mineur d'ordre 2 non nul, s'il existe.

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ (déterminant mineur obtenu en supprimant la $3^{ème}$ et $4^{ème}$ colonne et la $3^{ème}$ ligne)

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0$

donc $rg(A) = 2$.

3/ $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 3

$|A| = 0$ (déterminant mineur d'ordre 3) donc $rg(A) \leq 2$

Les détrminants mineurs d'ordre 2 sont de la forme $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$

et $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$ donc $rg(A) \leq 1$

alors il existe un déterminant mineur d'ordre 1 non nul

$|2| = 2 \neq 0$

donc $rg(A) = 1$

Remarque: Pour calculer la rang d'une matrice, on s'arrête lorsqu'on trouve un déterminant mineur différent de 0.