CHAPITRE 1: Développements limités

Cours $N^0 1$: Formule de Maclaurin et développements limités en 0

1 Les dérivées successives:

1.1 Définitions:

Définition1:
On définit par récurrence la dérivée $n^{ème}$ de f (ou dérivée d'ordre n) notée $f^{(n)}$ par:

$$\begin{cases} f^{(0)} = f \\ \text{et} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n+1)} = \left(f^{(n)}\right)' \end{cases}$$

Exemples:
1/ Calculer la dérivée d'ordre n de la fonction $f(x) = e^{kx}$, $k \in \mathbb{R}$.
Une dérivation successive nous donne:
$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = k.e^{kx},\ f''(x) = k^2.e^{kx},\ f^{(3)}(x) = k^3.e^{kx}$
On obtient par récurrence:
$\forall n \geq 1,\ f^{(n)}(x) = (e^{kx})^{(n)} = k^n.e^{kx}$.(On montre ce résultat par récurrence).
2/ Montrer par récurrence que:
$\forall n \in \mathbb{N},\ (\sin x)^{(n)} = \sin(x + n\frac{\pi}{2})$
- On vérifie que la propriété est vraie pour:
$n = 0 : (\sin x)^{(0)} = \sin x = \sin(x + 0.\frac{\pi}{2})$
$n = 1 : (\sin x)' = \cos x = \sin(x + 1.\frac{\pi}{2})$.
- On suppose que la propriété est vraie jusqu'à l'ordre n, c'est à dire: $(\sin x)^{(n)} = \sin(x + n\frac{\pi}{2})$.
- On montre que la propriété est vraie à l'ordre $(n + 1)$, c'est à dire: $(\sin x)^{(n+1)} \stackrel{?}{=} \sin(x + (n + 1)\frac{\pi}{2})$.

On a $(\sin x)^{(n+1)} = ((\sin x)^{(n)})' = (\sin(x + n\frac{\pi}{2}))' = \cos(x + n\frac{\pi}{2})$
et $\cos(x + n\frac{\pi}{2}) = \sin(x + n\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2})$
car $\forall x \in \mathbb{R},\ \sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$
donc $(\sin x)^{(n+1)} = \sin(x + n\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}) = \sin(x + (n + 1)\frac{\pi}{2})$
alors la propriété est vraie à l'ordre $(n + 1)$.
Conclusion: $\forall n \in \mathbb{N},\ (\sin x)^{(n)} = \sin(x + n\frac{\pi}{2})$.

Définition 2:
- On dit que f est de classe D^n sur I, si elle est n fois dérivable sur I.
- On dit que f est de classe C^n sur I si elle est de classe D^n sur I et que $f^{(n)}$ et continue sur I.
- On dit que f est de classe C^∞ sur I si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f est de classe C^n sur I. (f est dite indéfiniment dérivable sur I).

Notation:

1/ • $C^0(I)$ ou $C(I)$ est l'ensemble des fonctions continues sur I.
  • $D(I)$ est l'ensemble des fonctions dérivables sur I.
  • $C^1(I)$ est l'ensemble des fonctions dérivables sur I et dont la dérivée est continue sur I.

2/ • $D^n(I)$ est l'ensemble des fonctions de classe D^n sur I.
  • $C^n(I)$ est l'ensemble des fonctions de classe C^n sur I .

3/ • $C^\infty(I)$ est l'ensemble des fonctions de classe C^∞ sur I.

1.2 Formule de Leibnitz:

Soient f et g deux fonctions de classes D^n sur I et soit n un entier naturel n.

$(f.g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k.f^{(k)}.g^{(n-k)}$ avec $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

$n! = n(n-1)! = n(n-1)(n-2)....2.1$

Par convention**:** $0! = 1$, $1! = 1$.

Exemple:
- Montrer que $(x^2e^{-2x}) \in C^\infty(\mathbb{R})$.
- Calculer $(x^2e^{-2x})^{(n)}$.

Solution:
- On a $x^2 \in C^\infty(\mathbb{R})$ et $e^{-2x} \in C^\infty(\mathbb{R})$ (les deux fonctions sont indéfiniments dérivables sur $\mathbb{R}$) donc $(x^2e^{-2x}) \in C^\infty(\mathbb{R})$.

$(x^2e^{-2x})^{(n)} = \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k.(x^2)^{(k)}.(e^{-2x})^{(n-k)}$
$= C_n^0(x^2)^{(0)}(e^{-2x})^{(n)} + C_n^1(x^2)^{(1)}(e^{-2x})^{(n-1)} + C_n^2(x^2)^{(2)}(e^{-2x})^{(n-2)} + ...$

avec $C_n^0 = 1$, $C_n^1 = n$ et $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$.

$(x^2)^{(0)} = 1$, $(x^2)^{(1)} = 2x$, $(x^2)^{(2)} = 2$, $(x^2)^{(3)} = 0$, ...

donc $\forall n \geq 3$, $(x^2)^{(n)} = 0$.

et $(e^{-2x})' = -2e^{-2x}$, $(e^{-2x})^{(2)} = (-2)^2e^{-2x}$, $(e^{-2x})^{(3)} = (-2)^3e^{-2x}$

en déduit par récurrence que: $\forall n \in \mathbb{N}$, $(e^{-2x})^{(n)} = (-2)^ne^{-2x}$.

donc $(x^2e^{-2x})^{(n)} = (-2)^ne^{-2x}x^2 + n(-2)^{n-1}e^{-2x}2x + \frac{n(n-1)}{2}(-2)^{n-2}e^{-2x}$

$(x^2e^{-2x})^{(n)} = 2^{n-1}e^{-2x}[2(-1)^nx^2 + 2n(-1)^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{2}(-1)^{n-2}]$.

2 Développement limité en 0 et formule de Maclaurin:

2.1 Développement limité en 0 :

Définition3: Soit I un intervalle et $0 \in I$.
Soit f une fonction définie sur $I - \{0\}$.
On dit que f admet un *développement limité en* 0 *à l'ordre* n $(n \in \mathbb{N})$,
s'il existe un polynôme P_n de degré inférieur ou égal à n tels que:
$\forall x \in I,\ f(x) = P_n(x) + x^n \varepsilon(x)$
Où encore: $f(x) = P_n(x) + \circ(x^n)$
avec $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \varepsilon(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 0} \frac{\circ(x^n)}{x^n} = 0$
et $P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n = \sum_{k=0}^{k=n} a_k x^k$
où $a_0, a_1, ...a_n \in \mathbb{R}$
P_n est appelé la *partie régulière d'ordre* n du développement limité et $x^n \varepsilon(x)$
où $\circ(x^n)$ est *le reste d'ordre* n du développement limité.
Notation:
$DL_n(0, I)$ est l'ensemble des fonctions définies sur I admettant un
développement limité d'ordre n en 0.
Théorème:
Si f admet un développement limité à l'ordre n en 0, ce développement
est unique.

2.1.1 Propriétés:

Limite: On suppose que $f \in DL_n(0, I)$ avec $n \geq 0$,
tel que $f(x) = P_n(x) + \circ(x^n)$
avec $P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n = \sum_{k=0}^{k=n} a_k x^k$ alors f admet
a_0 pour limite en 0
c'est à dire: $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} f(x) = a_0$.
$f \in DL_n(0, I) \Longrightarrow \lim\limits_{x \longrightarrow 0} f(x)$ existe, finie et unique.
Remarque: Si f n'admet pas de limite en 0, alors f n'admet pas
un développement limité en 0.
Exemple:
Les fonctions $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \sin(\frac{1}{x})$ et $h(x) = \ln x$ n'admettent pas un
développement limité en 0.
$(\lim\limits_{x \longrightarrow 0} f(x) = \infty,\ \lim\limits_{x \longrightarrow 0} g(x) = \nexists$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} h(x) = -\infty)$

Restriction ou troncature: Si f admet un développement limité à
l'ordre n en 0: $f(x) = P_n(x) + \circ(x^n)$
avec $P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n = \sum_{k=0}^{k=n} a_k x^k$
alors pour tout entier $0 \leq r \leq n$, f admet un développement limité à l'ordre
r en 0 dont la partie régulière est: $P_r(x) = \sum_{k=0}^{k=r} a_k x^k = a_0 + a_1 x + ... + a_r x^r$.

Exemple:
Soit f une fonction admettant un développement limité en 0 à l'ordre 4 donné par:
$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \circ(x^4)$
alors $f\ (x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \circ(x^2)$ est le développement limité en 0 à l'ordre 2 de f . Et $f\ (x) = 1 + x + \circ(x)$ est son développement limité en 0 à l'ordre 1.

Parité: Soit f une fonction qui admet un développement limité à l'ordre n en 0 : $\quad f(x) = P_n(x) + \circ(x^n)$
1/ Si f est paire alors le polynôme P_n est pair.
2/ Si f est impaire alors le polynôme P_n est impair.

Remarque:
L'ordre d'un développement limité se voit sur le reste $\circ(x^n)$ et non sur le degré du polynôme P_n qui peut être strictement inférieur à n.

Exemple:
$f(x) = 2 + x^2 + 3x^3 - x^4 + \circ(x^5)$
c'est un développement limité de f à l'ordre 5 en 0 ($d^{\circ} P_n = 4$).

2.2 Développements limités en 0 des fonctions dérivables:

2.2.1 Formule de Maclaurin:

Soit V un voisinage de 0, et soit f une fonction de classe C^n sur V.
Alors f admet un développement limité à l'ordre n en 0, donné par la formule de $''Maclaurin''$ avec le reste de $''young''$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{k=n} x^k . \frac{f^{(k)}(0)}{k!} + \circ(x^n)$$
$$= f(0) + \frac{f^{'}(0)}{1!}x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \circ(x^n)$$

où par la formule de $''Maclaurin''$ avec le reste de $''lagrange''$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{k=n} x^k . \frac{f^{(k)}(0)}{k!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x), \text{ avec } \theta \in]0, 1[$$

où $f \in C^n$ sur V, et $f \in D^{n+1}$ sur V.

Remarques:

1/ La formule de *Maclaurin-lagrange* permet de calculer la valeur du reste. Elle est utilisée, en général, pour une meilleure approximation polynômiale de la fonction f (on peut contrôler le reste).

2/ La formule de *Maclaurin-young* montre que pour calculer le développement limité d'une fonction f à l'ordre n en 0, on peut se contenter de calculer les n dérivées successives $f^{'}$, $f^{''}$,...., $f^{(n)}$, et ensuite utiliser leur valeur en 0. En pratique c'est une trés mauvaise méthode dés que n dépasse 2 ou 3 car trés lourde en calcul.
Donc en général, on applique cette formule que pour les fonctions usuelles.

2.2.2 Développements limités usuelles en 0:

$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + ... + \frac{1}{n!}x^n + \circ(x^n) = \sum\limits_{k=0}^{k=n} \frac{x^k}{k!} + \circ(x^n)$
$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - .... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \circ(x^{2n+1}) = \sum\limits_{k=0}^{k=n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \circ(x^{2n+1})$
$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - .... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \circ(x^{2n}) = \sum\limits_{k=0}^{k=n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \circ(x^{2n})$
$shx = x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + ... + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \circ(x^{2n+1}) = \sum\limits_{k=0}^{k=n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \circ(x^{2n+1})$
$chx = 1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + ... + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \circ(x^{2n}) = \sum\limits_{k=0}^{k=n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \circ(x^{2n})$
$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - .... + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \circ(x^n) = \sum\limits_{k=0}^{k=n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + \circ(x^n)$
$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + ... + \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)\frac{x^n}{n!} + \circ(x^n)$ $\begin{cases} \alpha = -1, \quad \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - .... + (-1)^n x^n + \circ(x^n) = \sum\limits_{k=0}^{k=n} (-1)^k x^k + \circ(x^n) \\ \alpha = \frac{1}{2}, \quad \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \circ(x^4) \\ \alpha = \frac{-1}{2}, \quad \frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} - \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 + \circ(x^4) \end{cases}$

2.3 Opérations sur les développements limités:

(**Règles de calcul**)
Soient f et g deux fonctions admettant un développement limité en 0 à l'ordre n et $\lambda \in \mathbb{R}$.
$f(x) = P_n(x) + \circ(x^n)$ et $g(x) = Q_n(x) + \circ(x^n)$
tel que: $P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n = \sum\limits_{k=0}^{k=n} a_k x^k$
et $Q_n(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + ... + b_n x^n = \sum\limits_{k=0}^{k=n} b_k x^k$

2.3.1 Linéarité:

a/ $(f+g)$ admet un développement limité à l'ordre n en 0 et:

$$(f+g)(x) = (P_n + Q_n)(x) + \circ(x^n)$$

$$\begin{aligned}(P_n + Q_n)(x) &= P_n(x) + Q_n(x) \\ &= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + ... + (a_n + b_n)x^n\end{aligned}$$

$$(P_n + Q_n)(x) = \sum_{k=0}^{k=n} (a_k + b_k) x^k \ .$$

b/ $(\lambda.f)$ admet un développement limité à l'ordre n en 0 et:

$$(\lambda.f)(x) = (\lambda.P_n)(x) + \circ(x^n)$$

$$\begin{aligned}(\lambda.P_n)(x) &= \lambda.P_n(x) \\ &= \lambda.a_0 + \lambda.a_1 x + ... + \lambda.a_n x^n\end{aligned}$$

$$(\lambda.P_n)(x) = \sum_{k=0}^{k=n} \lambda.a_k x^k.$$

Exemples:

1/ Soient f et g deux fonctions définies par leurs développements limités $f(x) = 1 + x - x^2 + x^3 + \circ(x^3)$ et $g(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \circ(x^3)$.

- Déterminer le développement limité des fonctions $(f+g)$, $(-2f)$ et $(f-g)$ en 0 à l'ordre 3.

Soit $x \in \mathbb{R}$,

• $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

$= 1 + x - x^2 + x^3 + x + \frac{x^3}{3!} + \circ(x^3)$

$(f+g)(x) = 1 + 2x - x^2 + (1 + \frac{1}{6})x^3 + \circ(x^3)$

donc $(f+g)(x) = 1 + 2x - x^2 + \frac{7}{6}x^3 + \circ(x^3)$.

• $(-2.f)(x) = -2.f(x)$

$= -2(\ 1 + x - x^2 + x^3) + \circ(x^3)$

$-2f(x) = -2 - 2x + 2x^2 - 2x^3 + \circ(x^3)$.

• $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$

$= 1 + x - x^2 + x^3 - (x + \frac{x^3}{3!}) + \circ(x^3)$

$= 1 - x^2 + (1 - \frac{1}{6})x^3 + \circ(x^3)$

donc $(f-g)(x) = 1 - x^2 + \frac{5}{6}x^3 + \circ(x^3)$.

2/ Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 4 de la fonction $f(x) = e^x + \sin x - 3x$.

- On a $e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \circ(x^4)$

$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \circ(x^4)$ et $-3x = -3x + \circ(x^4)$

donc $f(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + x - \frac{1}{3!}x^3 - 3x + \circ(x^4)$

$= 1 - x + \frac{1}{2}x^2 + (\frac{1}{6} - \frac{1}{6})x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \circ(x^4)$

$f(x) = 1 - x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \circ(x^4)$

2.3.2 Produit:

$(f.g)$ admet un développement limité à l'ordre n en 0 et:

$(f.g)(x) = R_n(x) + \circ(x^n)$

avec $R_n(x) = P_n(x).Q_n(x)$ en ne gardant que les termes de degré inférieur ou égal à n.

Exemples:

1/ Déterminer le développement limité de la fonction $(f.g)$ en 0 à l'ordre 3 sachant que:

$f(x) = 1 + x - x^2 + x^3 + \circ(x^3)$ et $g(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \circ(x^3)$.

- Soit $x \in \mathbb{R}$.

$(f.g)(x) = (1 + x - x^2 + x^3 + \circ(x^3))(x + \frac{x^3}{3!} + \circ(x^3))$

$= x + \frac{x^3}{3!} + x^2 - x^3 + \circ(x^3)$

donc $(f.g)(x) = x + x^2 + (\frac{1}{6} - 1)x^3 + \circ(x^3) = x + x^2 - \frac{5}{6}x^3 + \circ(x^3)$.

2/ Déterminer le développement limité de la fonction $f(x) = \cosh x\sqrt{1+x}$ à l'ordre 3 en 0.

On a $chx = 1 + \frac{1}{2!}x^2 + \circ(x^3)$

et $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \circ(x^3)$

donc $f(x) = (1 + \frac{1}{2!}x^2 + \circ(x^3))(1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \circ(x^3))$

$$= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^3 + \circ(x^3)$$
$$f(x) = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3 + \circ(x^3)$$

2.3.3 Inverse et quotient:

Si $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} g(x) \neq 0$ (c'est à dire: $Q_n(0) \neq 0$)
alors $(\frac{1}{g})$ admet un développement limité à l'ordre n en 0 et
$(\frac{f}{g})$ admet un développement limité à l'ordre n en 0 et

$(\frac{f}{g})(x) = R_n(x) + \circ(x^n)$

où $R_n(x)$ est obtenu en faisant la division euclidienne du polynôme P_n par le polynôme Q_n suivant les puissances croissantes jusqu'à l'ordre n.

Exemples:

1/ Déterminer le développement limité de la fonction $f(x) = \frac{\sin x + 1}{\cos x + 1}$ à l'ordre 2 en 0.

On $\cos x + 1 \neq 0$ au voisinage de 0.

- On a $\sin x = x + \circ(x^2)$ donc $\sin x + 1 = 1 + x + \circ(x^2)$

et $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \circ(x^2)$ donc $\cos x + 1 = 1 - \frac{x^2}{2!} + 1 + \circ(x^2) = 2 - \frac{x^2}{2!} + \circ(x^2)$

$f(x) = \frac{1 + x + \circ(x^2)}{2 - \frac{x^2}{2!} + \circ(x^2)}$

On effectue la division euclidienne du polynôme numérateur par le polynôme dénominateur suivant les puissances croissantes

$$\begin{array}{l|l}
1 + x & 2 - \frac{x^2}{2} \\
\underline{1 - \frac{x^2}{4}} & \hline
x + \frac{x^2}{4} & \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 \\
\underline{x} & \\
\frac{x^2}{4} & \\
\underline{\frac{x^2}{4}} & \\
0 &
\end{array}$$

Alors $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 + \circ(x^2)$.

2/ Déterminer le développement limité de la fonction $f(x) = tgx$ à l'ordre 5 en 0.

On $tgx = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \circ(x^5)}{1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \circ(x^5)}$, $\cos 0 = 1 \neq 0$.

On effectue la division euclidienne du polynôme numérateur par le polynôme dénominateur suivant les puissances croissantes

$$\begin{array}{l|l}
x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 & 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 \\
\underline{x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{24}} & \hline
\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30} & x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 \\
\underline{\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{6}} & \\
\frac{2}{15}x^5 & \\
\underline{\frac{2}{15}x^5} & \\
0 &
\end{array}$$

Donc $f(x)=tgx=x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\circ(x^5)$.

2.3.4 Composée:

Soit f une fonction définie sur I et g une fonction définie sur J tel que $f(I)\subseteq J$.
Si $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} f(x)=0$ (c'est à dire: $P_n(0)=0$)
alors $(g\circ f)$ admet un développement limité à l'ordre n en 0 et:
$(g\circ f)(x)=R_n(x)+\circ(x^n)$
avec $R_n(x)=(Q_n\circ P_n)(x)=Q_n(P_n(x))$ en ne gardant que les termes de degré inférieur où égal à n.
(C'est à dire: On substitue la partie régulière de f dans la partie régulière de g et on tronque le polynôme obtenu à n).

Exemples:

1/ Déterminer le développement limité de la fonction $(f\circ g)$ en 0 à l'ordre 3 si $f(x)=1+x-x^2+x^3+\circ(x^3)$ et $g(x)=x+\frac{x^3}{3!}+\circ(x^3)$.
On a $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} g(x)=\lim\limits_{x\longrightarrow 0}(x+\frac{x^3}{3!}+\circ(x^3))=0$
$f\circ g(x)=f(g(x))=f(u)$
avec $u=g(x)=x+\frac{x^3}{3!}+\circ(x^3)$ et $u\in v(0)$
$f(u)=1+u-u^2+u^3+\circ(u^3)$
$u=x+\frac{x^3}{3!}+\circ(x^3)$
$u^2=u.u=(x+\frac{x^3}{3!}+\circ(x^3))(x+\frac{x^3}{3!}+\circ(x^3))\ =x^2+\circ(x^3)$
$u^3=u.u^2=(x+\frac{x^3}{3!}+\circ(x^3))(x^2+\circ(x^3))=x^3+\circ(x^3)$
donc $f\circ g(x)=1+x+\frac{x^3}{3!}-(x^2)+x^3+\circ(x^3)$
$=1+x-x^2+\frac{7}{6}x^3+\circ(x^3)$.

2/ Déterminer le développement limité de la fonction $f(x)=e^{shx}$ à l'ordre 4 en 0.
- On a $f(x)=g\circ h(x)$ avec $h(x)=shx$ et $g(x)=e^x$ avec $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} h(x)=\lim\limits_{x\longrightarrow 0} shx=0$
On a $shx=x+\frac{1}{3!}x^3+\circ(x^4)$
et $e^{shx}=e^u$ avec $u=shx=x+\frac{1}{3!}x^3+\circ(x^4)\in v(0)$
$e^u=1+u+\frac{1}{2!}u^2+\frac{1}{3!}u^3+\frac{1}{4!}u^4+\circ(u^4)$
$u^2=u.u=(x+\frac{1}{3!}x^3+\circ(x^4))(x+\frac{1}{3!}x^3+\circ(x^4))$
$=x^2+\frac{1}{6}x^4+\frac{1}{6}x^4+\circ(x^4)$
$u^2=x^2+\frac{1}{3}x^4+\circ(x^4)$
$u^3=u.u^2=(x+\frac{1}{3!}x^3+\circ(x^4))(x^2+\frac{1}{3}x^4+\circ(x^4))$
$=x^3+\circ(x^4)$
$u^4=u.u^3=(x+\frac{1}{3!}x^3+\circ(x^4))(x^3+\circ(x^4))=x^4+\circ(x^4)$
donc $e^{shx}=1+x+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{2}(x^2+\frac{1}{3}x^4)+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4+\circ(x^4)$
$e^{shx}=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\frac{5}{24}x^4+\circ(x^4)$.

3/ Déterminer le développement limité de la fonction $f(x)=\sqrt{1+\sin x}$ à l'ordre 3 en 0.
$f(x)=\sqrt{1+\sin x}=\sqrt{1+y}$ avec $y=\sin x\in v(0)$

et $\sqrt{1+y} = 1 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{8}y^2 + \frac{1}{16}y^3 - \frac{5}{128}y^4 + \circ(y^4)$
$y = \sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \circ(x^4)$
$y^2 = y.y = (x - \frac{1}{3!}x^3 + \circ(x^4))(x - \frac{1}{3!}x^3 + \circ(x^4)) = x^2 - \frac{1}{3}x^4 + \circ(x^4)$
$y^3 = y^2.y = (x^2 - \frac{1}{3}x^4 + \circ(x^4))(x - \frac{1}{3!}x^3 + \circ(x^4)) = x^3 + \circ(x^4)$
$y^4 = y^3.y = (x^3 + \circ(x^4))(x - \frac{1}{3!}x^3 + \circ(x^4)) = x^4 + \circ(x^4)$
donc $f(x) = 1 + \frac{1}{2}(x - \frac{1}{3!}x^3) - \frac{1}{8}(x^2 - \frac{1}{3}x^4) + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \circ(x^4)$
$f(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{48}x^3 + \frac{1}{384}x^4 + \circ(x^4)$

2.3.5 Primitive:

Soit f une fonction définie sur I un voisinage de 0.
On suppose que f admet un développement limité à l'ordre n en 0 et que f est continue sur I.
Alors: Toute primitive F de f sur I admet un développement limité à l'ordre $(n+1)$ en 0.
C'est à dire:
Si $\forall x \in I$, $f(x) = P_n(x) + \circ(x^n)$ avec $P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$
alors $\int_0^x f(t)dt = \int_0^x P_n(t)dt + \circ(x^{n+1})$
d'où $F(x) - F(0) = a_0x + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_2}{3}x^3 + ... + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + \circ(x^{n+1})$.

Exemples:

1/ Déterminer le développement limité de la fonction $f(x) = arctgx$ à l'ordre 5 en 0.
- On a $\forall x \in \mathbb{R}$, $(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$
Déterminons le DL de la fonction $\frac{1}{1+x^2}$ à l'ordre 4 en 0 :
$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1+t}$ avec $t = x^2 = x^2 + \circ(x^4) \in v(0)$
$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + t^4 + \circ(t^4)$
$t^2 = t.t = x^4 + \circ(x^4)$, $t^3 = t^2.t = \circ(x^4)$ et $t^4 = t^3.t = \circ(x^4)$
donc $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + \circ(x^4)$
On a $\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt = \int_0^x (1 - t^2 + t^4)dt + \circ(x^5)$
$\Longrightarrow [arctgt]_0^x = [t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5}]_0^x + \circ(x^5)$
$\Longrightarrow arctgx - arctg0 = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - 0 + \circ(x^5)$
$\Longrightarrow arctgx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \circ(x^5)$.

2/ Déterminer le développement limité de la fonction $f(x) = \arcsin x$ à l'ordre 5 en 0.
- On a $\forall x \in]-1,1[$, $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
Déterminons le DL de la fonction $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ à l'ordre 4 en 0 :
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{\frac{-1}{2}} = (1+t)^{\frac{-1}{2}}$ avec $t = -x^2 = -x^2 + \circ(x^4) \in v(0)$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+t}} = 1 - \frac{t}{2} + \frac{3t^2}{8} + \circ(t^2)$

$t^2 = t.t = x^4 + \circ(x^4)$
donc $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 - \frac{1}{2}(-x^2) + \frac{3}{8}x^4 + \circ(x^4)$
$= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{8} + \circ(x^4)$
On a $\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt = \int_0^x (1 + \frac{t^2}{2} + \frac{3t^4}{8})dt + \circ(x^5)$
$\Longrightarrow [\arcsin t]_0^x = [t + \frac{t^3}{6} + \frac{3t^5}{40}]_0^x + \circ(x^5)$
$\Longrightarrow \arcsin x - \arcsin 0 = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \circ(x^5)$
$\Longrightarrow \arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \circ(x^5).$

A partir des règles précédentes, on peut déduire les résultats du tableau suivant:

$\arcsin x = x + \frac{1}{2}.\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}.\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{x^7}{7} + ... + \circ(x^{2n+1}) = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1.3.5....(2k-1)}{2.4.6...(2k)} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \circ(x^{2n+1})$
$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x = \frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{2}.\frac{x^3}{3} - \frac{1.3}{2.4}.\frac{x^5}{5} - \frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{x^7}{7} - ..... + \circ(x^{2n+1})$
$arctgx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \circ(x^{2n+1}) = \sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \circ(x^{2n+1})$
$\arg shx = x - \frac{1}{2}.\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}.\frac{x^5}{5} - \frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{x^7}{7} + ... + \circ(x^{2n+1}) = \sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k \frac{1.3.5....(2k-1)}{2.4.6...(2k)} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \circ(x^{2n+1})$
$\arg thx = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + ... + \frac{x^{2n}+1}{2n+1} + \circ(x^{2n+1}) = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \circ(x^{2n+1})$

Remarques:
1/ Dans le calcul des développements limités (somme, produit, composée,.....) des fonctions f et g, il faut prendre des développements limités de f et g de même ordre.
2/ Le développement limité est une égalité mathématique, il faut toujours indiquer le reste et savoir à quel ordre on calcule le développement limité.
3/ On peut déterminer le développement limité d'une fonction par plusieurs méthodes.(Le résultat est unique)

Exercice:
Déterminer le développement limité des fonctions suivantes, à l'ordre indiqué au voisinage de 0.
1/ $f(x) = e^{\cos x}$, $n = 4$ **2/** $f(x) = \sqrt{2\cos x}$, $n = 4$
3/ $f(x) = \ln(\frac{\sin x}{x})$, $n = 3$ **4/** $f(x) = \cos(\sin x)$, $n = 4$
5/ $f(x) = \ln(\sqrt{1+2x} - x)$, $n = 4$ **6/** $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$, $n = 4.$