CHAPITRE 3 : Les relations binaires et les applications

Cours 1

Les applications

1. Définition :

Soient E et F deux ensembles.

Une application f de E dans F est une relation qui associe à tout élément x de E un unique élément y de F noté $y = f(x)$.

E est appelé ensemble de *départ* de f.

F est appelé ensemble d'*arrivée* de f.

$y = f(x)$ est appelé l'*image* de x par f.

x est appelé l'*antécédent* de y.

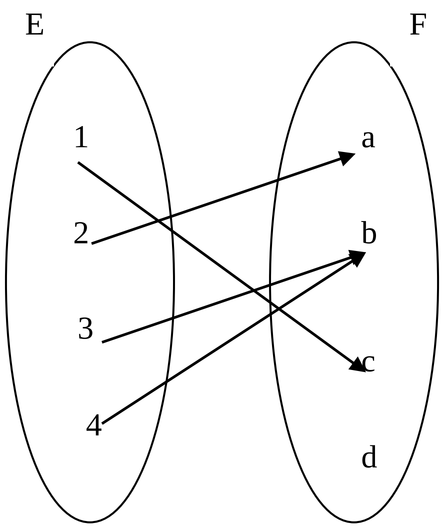
Une application f de E dans F s'écrit : $f : E \to F$

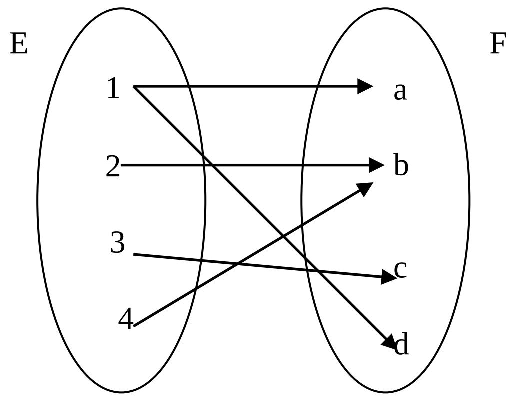
$$x \mapsto f(x) = y$$

Exemples :

f est-elle une application ?

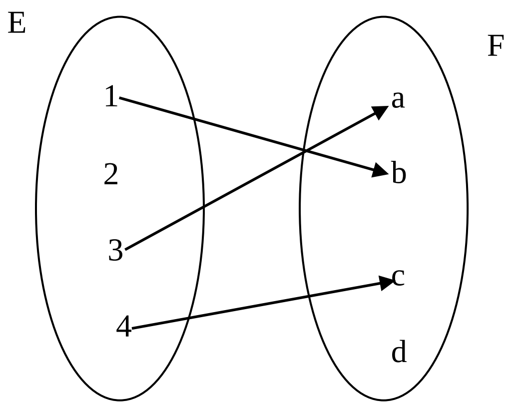
1.





Oui f est une application.

Non f n'est pas une application car 1 a deux images



.

Non f n'est pas une application car 2 n'a pas d'image.

2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto f(x) = \cos x - 2$

Oui f est une application

3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto f(x) = \dfrac{x+2}{x-3}$

Non f n'est pas une application car 3 n'a pas d'image.

4. $f : \mathbb{R} - \{3\} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto f(x) = \dfrac{x+2}{x-3}$

Oui f est une application

Généralité :

L'ensemble des applications de E dans F est noté par $A(E, F)$.

2. Exemples d'applications :

Soient E et F deux ensembles et $k \in F$.

2.1. Application identité

On définit l'application *identité de* E, notée Id_E par : $\forall x \in E : Id_E(x) = x$

$Id_E : E \to F$

$x \mapsto Id_E(x) = x$

2.2.Application constante

Une application f de E dans F est dite *constante* si : $\exists k \in F, \forall x \in E : f(x) = k$

$f : E \to F$

$x \mapsto f(x) = k$

2.3.Application caractéristique :

Soient E un ensemble et A une partie de E.

On définit l'application *caractéristique* de A, notée χ_A, par :

$$\chi_A : E \to F$$
$$x \mapsto \chi_A(x) = \begin{cases} 1\, si & x \in A \\ 0\, si & x \notin A \end{cases}$$

3. Egalité de deux applications :

Soient $f : E \to F$ et $g : G \to H$ deux applications.

On dit que f et g sont égales si et seulement si les trois conditions suivantes sont vérifiées :

1. $E = G$.
2. $F = H$
3. $\forall x \in E : f(x) = g(x)$.

Exemples :

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = \cos^2 x$ $\qquad$ $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto g(x) = 1 - \sin^2 x$

$$f = g$$

2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = x^2$ $\qquad$ $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto g(x) = x^2$ $\qquad$ $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $x \mapsto h(x) = x^2$

$f \neq g$, $f \neq h$ et $g \neq h$

4. Restriction et prolongement d'une application :

Soit $f : E \to F$ une application.

4.1. Soit $A \subset E$. La *restriction* de f à A, est l'application $g : \mathrm{A} \to \mathrm{F}$ définie par

$\forall x \in A : g(x) = f(x)$.

g est notée par $f_{/A}$.

Exemples :

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = x^2$ $\qquad$ $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto g(x) = x^2$

$g = f_{/\mathbb{R}_+}$

2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = |x|$ $\qquad$ $g : \mathbb{R}_- \to \mathbb{R}$, $x \mapsto g(x) = -x$

$g = f_{/\mathbb{R}_-}$

4.2. Soit H un ensemble tel que $E \subset H$. On appelle *prolongement* de f à H toute application $h : H \to F$ telle que $h_{/E} = f$.

Exemples :

1. $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$

$x \mapsto f(x) = \sin x$

Déterminer un prolongement de f à $\mathbb{R}$.

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto h(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

h est un prolongement de f à $\mathbb{R}$.

2. $f :]0,1] \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x) = \sqrt{x}$$

Déterminer des prolongement de f à $[-1,1]$.

$$h_1 : [-1,1] \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto h_1(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x \in]0,1] \\ x+1 & x \in [-1,0] \end{cases}$$

$$h_2 : [-1,1] \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto h_2(x) = \sqrt{|x|} = \begin{cases} \sqrt{x} & x \in]0,1] \\ \sqrt{-x} & x \in [-1,0] \end{cases}$$

$$h_3 : [-1,1] \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto h_3(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x \in]0,1] \\ \sin^2 x & x \in [-1,0] \end{cases}$$

h_1, h_2 et h_3 sont des prolongement de f à $[-1,1]$.

Remarque :

Une application $f : E \to F$ admet une restriction unique à une partie A de E, mais elle admet des prolongements à tout ensemble H tel que a $E \subset H$.

5. Composition des applications :

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.

On définit une application de E dans G notée $g \circ f$ par :

$$\forall x \in E : g \circ f(x) = g(f(x))$$

On l'appelle application *composée* de f et g.

$$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$$

Exemples :

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\qquad$ $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto f(x) = x^2$ $\qquad$ $x \mapsto g(x) = 2x - 3$

Déterminer $g \circ f$ et $f \circ g$.

$g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Soit $x \in \mathbb{R}$: $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x^2) = 2x^2 - 3$.

Donc $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto g \circ f(x) = 2x^2 - 3$$

$f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Soit $x \in \mathbb{R}$: $f \circ g(x) = f(g(x)) = f(2x-3) = (2x-3)^2 = 4x^2 - 12x + 9$

Donc $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto f \circ g(x) = 4x^2 - 12x + 9$$

Remarque :

$g \circ f \neq g \circ f$ **.**

Proposition :

Soient E, F et G des ensembles ; et $f : E \to F$, $g : F \to G$ et $h : G \to H$ des applications :

1. $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ **.**

2. Si $E = G$, alors on peut définir $g \circ f$ et $f \circ g$, mais en général ces applications ne sont pas égales.

3. $f \circ Id_E = f$ et $Id_F \circ f = f$ **.**

En effet :

$E \xrightarrow{Id_E} E \xrightarrow{f} F$

Soit $x \in \mathrm{E}$: $f \circ Id_E(x) = f(Id_E(x)) = f(x)$.

$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{Id_F} F$

Soit $x \in \mathrm{E}$: $Id_F \circ f(x) = Id_F(f(x)) = f(x)$**.**

6. Image directe et Image réciproque :

6.1. Image directe :

Soit $f : E \to F$ une application et $A \subseteq E$

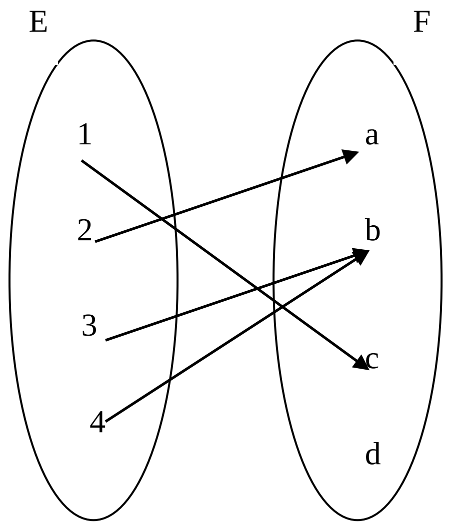
On appelle *image directe* de A par f, l'ensemble des images des éléments de A par f.

$$f(A) = \{y \in F / \exists x \in E : y = f(x)\}$$

$$f(A) = \{f(x) \in F / x \in A\}$$

Exemples :

1. f :



$A=\{1,2\}$ $\quad f(A)=\{c,a\}$
$A=\{2,3,4\}$ $\quad f(A)=\{a,b\}$
$A=\{3,4\}$ $\quad f(A)=\{b\}$

2. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$x\mapsto f(x)=2x-3$

Déterminer $f(\{0,2,-3\})$

$f(\{0,2,-3\})=\{f(x)\in\mathbb{R}/x\in\{0,2,-3\}\}$

$x\in\{0,2,-3\}\Rightarrow x=0\vee x=2\vee x=-3$

$f(0)=-3$, $f(2)=1$ et $f(-3)=-9$

Donc $f(\{0,2,-3\})=\{-3,1,-9\}$

3. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$x\mapsto f(x)=\dfrac{2}{3+x^2}$

Déterminer $f([0,1])$

$f([0,1])=\{f(x)\in\mathbb{R}/x\in[0,1]\}$

$$x\in[0,1]\Rightarrow 0\le x\le 1$$
$$\Rightarrow 0\le x^2\le 1 \text{ car } x^2 \text{ est croissante sur } \mathbb{R}_+$$
$$\Rightarrow 3\le 3+x^2\le 4$$
$$\Rightarrow \frac{1}{4}\le\frac{1}{3+x^2}\le\frac{1}{3}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2}\le\frac{2}{3+x^2}\le\frac{2}{3}$$

Donc $f([0,1])=\left[\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{3}\right]$

4. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$x\mapsto f(x)=x^2$

Déterminer $f([-2,2])$

$[-2,2]=[-2,0]\cup[0,2]$

$f([-2,2])=f([-2,0]\cup[0,2])=f([-2,0])\cup f([0,2])=[0,4]\cup[0,4]=[0,4]$.

5. $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$

$(x,y)\mapsto f(x,y)=2x^2+y$

Déterminer $f(\{(-1,0),(0,0),(3,-4),(1,0)\})$

$f(\{(-1,0),(0,0),(3,-4),(1,0)\})=\{f(x,y)\in\mathbb{R}/(x,y)\in\{(-1,0),(0,0),(3,-4),(1,0)\}\}$

$(x,y)\in\{(-1,0),(0,0),(3,-4),(1,0)\}\Rightarrow(x,y)=(-1,0)\vee(x,y)=(0,0)\vee(x,y)=(3,-4)\vee(x,y)=(1,0)$

$f(-1,0)=2$, $f(0,0)=0$, $f(-3,4)=22$ et $f(1,0)=2$

Donc $f(\{(-1,0),(0,0),(3,-4),(1,0)\})=\{2,0,22\}$

6. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$

$x\mapsto f(x)=(\sin x,\cos x)$

Déterminer $f\left(\left\{0,2\pi,\pi,\frac{\pi}{4}\right\}\right)$

$$f\left(\left\{0,2\pi,\pi,\frac{\pi}{4}\right\}\right)=\left\{f(x)\in\mathbb{R}/x\in\left\{0,2\pi,\pi,\frac{\pi}{4}\right\}\right\}$$

$$x\in\left\{0,2\pi,\pi,\frac{\pi}{4}\right\}\Rightarrow x=0\vee x=2\pi\vee x=\pi\vee x\frac{\pi}{4}$$

$$f(0)=(\sin 0,\cos 0)=(0,1)$$

$$f(2\pi)=(\sin(2\pi),\cos(2\pi))=(0,1)$$

$$f(\pi)=(\sin(\pi),\cos(\pi))=(0,-1)$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}\right),\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Donc $f\left(\left\{0,2\pi,\pi,\frac{\pi}{4}\right\}\right)=\left\{(0,1),(0,-1),\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$

Remarque :

Soit $f:E\to F$ une application.

$f(E)=\{f(x)\in F/x\in E\}$

On note $f(E)$ par $\operatorname{Im} f$ et on lit image de f ou bien im de f.

Exemples :

1. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$x\mapsto f(x)=x^2$.

$f(E)=f(\mathbb{R})=\{f(x)\in\mathbb{R}/x\in\mathbb{R}\}=\{x^2\in\mathbb{R}/x\in\mathbb{R}\}$

$\forall x\in\mathbb{R}:\ x^2\geq 0$. Donc $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}_+$

2. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$x\mapsto f(x)=e^x$

$f(E)=f(\mathbb{R})=\{f(x)\in\mathbb{R}/x\in\mathbb{R}\}=\{e^x\in\mathbb{R}/x\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R}^*{}_+$

3. $f:]0,+\infty[\to\mathbb{R}$

$x\mapsto f(x)=\ln x$

$f(E)=f(]0,+\infty[)=\{f(x)\in\mathbb{R}/x\in]0,+\infty[\}=\{\ln x\in\mathbb{R}/x\in]0,+\infty[\}=\mathbb{R}$

4. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$x\mapsto f(x)=\sin x$

$f(E)=f(\mathbb{R})=\{f(x)\in\mathbb{R}/x\in\mathbb{R}\}=\{\sin x\in\mathbb{R}/x\in\mathbb{R}\}=[-1,1]$.

Proposition : Soient $f: E \to F$ une application, et A_1, A_2 des parties de E.

1. $f(\phi)=\phi$.
2. $A_1 \subset A_2 \Rightarrow f(A_1) \subset f(A_2)$.
3. $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.
4. $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$.

6.2. Image réciproque :

Soit $f: E \to F$ une application et $B \subseteq F$

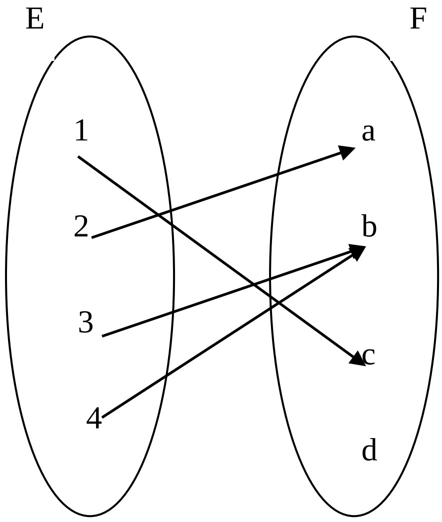
On appelle *image réciproque* de B par f, notée $f^{-1}(B)$ l'ensemble des antécédents des éléments de B par f.

$f^{-1}(B) = \{x \in E / f(x) \in B\}$.

$\forall x \in E;\ x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B$.

Exemples :

1. f :



$f^{-1}(\{a,c\}) = \{2,1\}$ $\quad f^{-1}(\{b,c\}) = \{3,4,1\}$ $\quad f^{-1}(\{d\}) = \phi$

2. $f: \mathrm{R} \to \mathrm{R}$

$x \mapsto f(x) = -x^2 - 2x + 3$.

Déterminer $f^{-1}(\{0,4,5\})$.

$f^{-1}(\{0,4,5\}) = \{x \in \mathrm{R} / f(x) \in \{0,4,5\}\}$

$f(x) \in \{0,4,5\} \Rightarrow f(x) = 0 \vee f(x) = 4 \vee f(x) = 5$

$f(x) = 0 \Rightarrow -x^2 - 2x + 3 = 0$

$\Delta = 16 > 0$ donc les solutions sont $x_1 = 1 \vee x_2 = -3$.

$f(x) = 4 \Rightarrow -x^2 - 2x + 3 = 4$

$\Rightarrow -x^2 - 2x - 1 = 0$

$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 0$

$\Rightarrow (x+1)^2 = 0$

$\Rightarrow x + 1 = 0$

$$\Rightarrow x=-1$$

$$f(x)=5 \Rightarrow -x^2-2x-2=0$$

$$\Rightarrow x^2+2x+2=0$$

$\Delta=-4<0$ donc pas de solutions dans $\mathbb{R}$.

$$f^{-1}(\{0,4,5\})=\{1,-3,-1\}$$

3. $f:\mathrm{R}-\{1\}\to\mathrm{R}$

$$x\mapsto f(x)=\frac{3}{1-x}$$

Déterminer $f^{-1}([1,2])$.

$$f^{-1}([1,2])=\{x\in\mathrm{R}-\{1\}/\ f(x)\in[1,2]\}$$

$$f(x)\in[1,2]\Rightarrow 1\le f(x)\le 2$$

$$\Rightarrow 1\le\frac{3}{1-x}\le 2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\le\frac{1-x}{3}\le 1$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}\le 1-x\le 3$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\le -x\le 2$$

$$\Rightarrow -2\le x\le -\frac{1}{2}$$

$$f^{-1}([1,2])=\left[-2,-\frac{1}{2}\right].$$

4. $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}^2$

$$x\mapsto f(x)=(\sin x,\cos x)$$

Déterminer $f^{-1}\left(\left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right)\right\}\right)$ et $f^{-1}(\{(0,0)\})$

$$f^{-1}\left(\left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right)\right\}\right)=\left\{x\in\mathrm{R}/f(x)\in\left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right)\right\}\right\}$$

$$f(x)\in\left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right)\right\}\Rightarrow f(x)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\vee f(x)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right)$$

$$f(x)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\Rightarrow(\sin x,\cos x)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}\wedge\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow x=\frac{\pi}{4}+2k\pi\quad\text{avec } k\in\mathrm{Z}$$

$$f(x)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right)\Rightarrow(\sin x,\cos x)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}\wedge \cos x=-\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x=2\frac{\pi}{3}+2k\pi \quad \text{avec } k\in \mathbb{Z}$$

$$f^{-1}\left(\left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right)\right\}\right)=\left\{\frac{\pi}{4}+2k\pi, 2\frac{\pi}{3}+2k\pi \,/\, k\in \mathbb{Z}\right\}$$

$f^{-1}(\{(0,0)\})=\{x\in \mathbb{R}/f(x)\in\{(0,0)\}\}$

$f(x)\in\{(0,0)\}\Rightarrow f(x)=(0,0)$

$f(x)=(0,0)\Rightarrow(\sin x,\cos x)=(0,0)$ impossible car $\sin^2 x+\cos^2 x=0\neq 1$

Donc $f^{-1}(\{(0,0)\})=\phi$

Proposition : Soient $f:E\rightarrow F$ une application, et B, B_1, B_2 des parties de F.

1. $B_1\subset B_2\Rightarrow f^{-1}(B_1)\subset f^{-1}(B_2)$

2. $f^{-1}(B_1\cup B_2)=f^{-1}(B_1)\cup f^{-1}(B_2)$

3. $f^{-1}(B_1\cap B_2)=f^{-1}(B_1)\cap f^{-1}(B_2)$

4. $f^{-1}(C_F^B)=C_E^{f^{-1}(B)}$