CHAPITRE 2 : Matrices et Déterminants

Cours N° 4

Matrices inversibles

1. Définitions et Propriétés :

1.1. Définition : *Soit A une matrice carrée d'ordre n. A est inversible s'il existe une matrice B carrée d'ordre n telle que $A.B = B.A = I_n$.*

On appelle B *matrice inverse* de A et on la note A^{-1}.

Exemples :

1/ Soient deux matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Vérifier que B est l'inverse de A.

On a $A.B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$ et $B.A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$. Donc B est l'inverse de A

2/ La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible car pour toute matrice $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Le produit $A.B$ contient une ligne nulle et donc ne peut pas être égal à I_2.

$$A.B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 5a+4c & 5b+4d \end{pmatrix} \neq I_2$$

3/ Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Calculer A^2 et A^3.

Vérifier que $A^3 - 4A^2 - A + 4I_3 = 0_{3,3}$. Où $0_{3,3}$ est la matrice carrée nulle d'ordre 3.

Montrer que A est inversible. En déduire A^{-1} en fonction de A et I_3 puis calculer A^{-1}.

$$A^2 = A.A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} \text{ et } A^3 = A^2.A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 64 \end{pmatrix}$$

$$-4A^2 = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -64 \end{pmatrix},\ -A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \text{ et } 4I_3 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^3 - 4A^2 - A + 4I_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 64 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -64 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

.

Montrer que A est inversible.

A est inversible $\Leftrightarrow \exists B \in M_3(\Re) : AB = BA = I_3$

On a $A^3 - 4A^2 - A + 4I_3 = 0_{3,3}$ alors $A^3 - 4A^2 - A = -4I_3$

Donc $A(A^2 - 4A - I_3) = -4I_3$ d'où $A\left[-\frac{1}{4}(A^2 - 4A - I_3)\right] = I_3$.

D'autre part, on a $A^3 - 4A^2 - A + 4I_3 = 0_{3,3}$ alors $A^3 - 4A^2 - A = -4I_3$

Donc $(A^2 - 4A - I_3)A = -4I_3$ d'où $A\left[-\frac{1}{4}(A^2 - 4A - I_3)\right] = I_3$.

On a $A\left[-\frac{1}{4}(A^2 - 4A - I_3)\right] = \left[-\frac{1}{4}(A^2 - 4A - I_3)\right]A = I_3$

Alors A est inversible et $A^{-1} = -\frac{1}{4}(A^2 - 4A - I_3)$ d'où $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

1.2. Propriétés : Soient A, B et C des matrices carrées d'ordre n.

- Si l'inverse existe elle est unique.
- $A.A^{-1} = I_n$ et $A^{-1}.A = I_n$.
- Si $A.B = B.C = I_n$ alors $A = C$.
- $I_n^{-1} = I_n$.
- Si A est inversible alors A^{-1} est inversible et $(A^{-1})^{-1} = A$.
- Si A est inversible alors ${}^tA$ est inversible et $\left({}^tA\right)^{-1} = {}^t\left(A^{-1}\right)$
- Si A et B sont inversibles alors $A.B$ est inversible et $(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$.

2. Calcul de l'inverse d'une matrice :

2.1. Méthode des cofacteurs (de déterminants) :

Proposition : *Soit A une matrice carrée d'ordre n.*
A est inversible si seulement si $\det(A) \neq 0$.
Si de plus A est inversible alors $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

Définition : *Soit A une matrice carrée d'ordre n.*
On appelle la comatrice de A, notée $com(A)$ la matrice des cofacteurs
$c_{ij} = (-1)^{i+j}|A_{ij}| \qquad i = 1...n$ *et* $j = 1...n$.

Théorème : *Soit A une matrice carrée d'ordre n. Si A est inversible alors* $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}{}^t(com(A))$.

Exemple :

Montrer que $A=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer son inverse.

$|A| = 1\times\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 2\times\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 0\times\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}$ suivant la 3$^{\text{ème}}$ colonne.

$|A| = (4-3) - 2\times(4-2) = -3$.

$|A| \neq 0$ donc A est inversible.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\,{}^{t}(com(A))$$

$$com(A) = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} \qquad com(A) = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$${}^{t}com(A) = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-3}\begin{pmatrix} -4 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \text{ donc } A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

2.2. Méthode de Gauss (de l'échelonnement) :

Proposition : *Soit A une matrice carrée d'ordre n.*
A est inversible si seulement si $rg(A) = n$.

Description de la méthode :

On associe à la matrice A (carrée d'ordre n) à inverser, la matrice I_n. On transforme A et I_n simultanément par les mêmes opérations élémentaires. L'objectif final est de transformer A en I_n. La transformée de I_n correspondante est l'inverse de A.

Exemple :

Calculer le rang de $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

On calcule le rang de A par l'échelonnement.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3+L_1}{\overset{L_2 \leftarrow L_2-2L_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \overset{L_3 \leftarrow L_3+L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$rg(A)=3$ car il existe trois lignes non nulles, et A est d'ordre 3 donc $rg(A)=3=n$.
D'où A est inversible.

Calcul de A^{-1} l'inverse de A par la méthode de Gauss.

$$(A|I_3)=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow L_3+L_1}{\overset{L_2 \leftarrow L_2-2L_1}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{L_3 \leftarrow L_3+L_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \overset{L_2 \leftarrow -\frac{1}{3}L_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{L_1 \leftarrow L_1-L_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \overset{L_3 \leftarrow -L_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2-\frac{1}{3}L_3}{\overset{L_1 \leftarrow L_1-\frac{2}{3}L_3}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

Donc $A^{-1}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 1 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$