CHAPITRE 3 : **Les relations binaires et les applications**

Cours

Les relations binaires

1. Définitions :

Soient E et F deux ensembles.

Une relation binaire $\Re$ de E vers F est un triplet (E, F, Γ) où $\Gamma \subseteq E \times F$.

E est appelé l'ensemble de *départ* de $\Re$.

F est appelé l'ensemble d*'arrivée* de $\Re$.

Si $(x, y) \in \Gamma$: on dit que x est en relation avec y par de $\Re$ et on écrit $x\Re y$.

Exemples :

a. Soient $E = \{1,2,3\}$, $F = \{a, b, c, d\}$ et $\Gamma = \{(1, a), (1, c), (2, b), (2, d), (3, c)\}$**.**

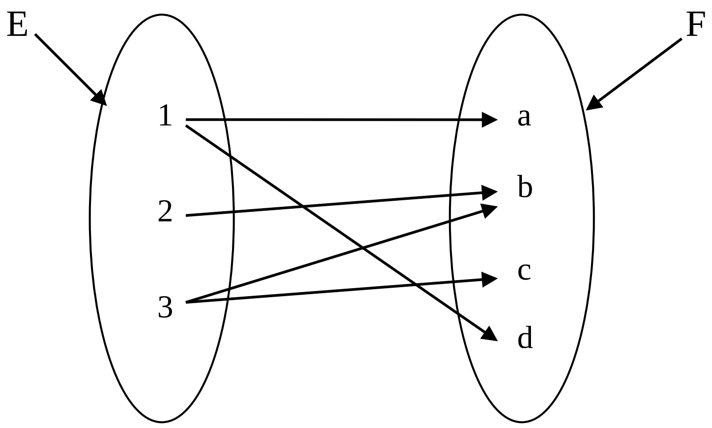
(E, F, Γ) est une relation de E vers F . En effet :

$1\Re a$, $1\Re c$, $2\Re b$, $3\Re c$

b. $\Re$ est une relation définie de $\mathbb{R}$ dans R_+ par : $\forall x, y \in \mathrm{R} : x\Re y \Leftrightarrow y = |x|$

Exemples : $0\Re 0$, $1\Re 1$, $-1\Re 1$, $4\Re 4$.

2. Représentations graphiques d'une relation :



Digramme sagital

Remarque :

Si $E = F$ on dit que $\Re$ est une *relation binaire.*

Exemples :

1. Soit E l'ensemble des étudiants de ST et $\Re$ est la relation " avoir même âge "
2. Sur $\mathbb{R}$, on définit la relation d'égalité "$=$" par : $\forall x, y \in R : x\Re y \Leftrightarrow x = y$
3. Sur $\mathbb{R}$, on définit la relation d'inégalité "$\leq$" par : $\forall x, y \in R : x\Re y \Leftrightarrow x \leq y$
4. Sur $P(E)$ (E est un ensemble), on définit la relation d'inclusion par :
   $\forall A, B \in P(E): A\Re B \Leftrightarrow A \subseteq B$

3. Propriétés d'une relation binaire :

Soit $\Re$ une relation binaire définie sur un ensemble E.

3.1. La réflexivité :

$\Re$ est dite réflexive si seulement si tout élément de E est en relation avec lui-même.

$\Re$ est réflexive $\Leftrightarrow$ $\forall x \in E : x\Re x$.

Exemples :

1. "$=$", "$\leq$" et "$\subseteq$" sont réflexives.

2. Montrer que les relations suivantes sont réflexives :

a. $\forall x, y \in R : x\Re y \Leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y$

$\forall x \in R$, on a $x^2 - x^2 = 0$ et $x - x = 0$

Donc $x^2 - x^2 = x - x$ (car "$=$" est réflexive)

Alors $x\Re x$.

D'où $\Re$ est réflexive.

b. $\forall x, y \in Z : x\Re y \Leftrightarrow \exists k \in Z : x - y = 3k$

$\forall x \in Z$, on a $x - x = 0 = 3.0$

Donc $\exists k = 0 \in Z : x - x = 3k$

Alors $x\Re x$.

D'où $\Re$ est réflexive

c. $\forall a, b \in N^* : a\Re b \Leftrightarrow \exists q \in N^* : b = a.q$

$\forall a \in N^*$, on a $a = a = a.1$

Donc $\exists q = 1 \in N^* : a = a.q$

Alors $a\Re a$.

D'où $\Re$ est réflexive

d. $\forall (a,b), (c,d) \in R^2 : (a,b)\Re(c,d) \Leftrightarrow a + d = b + c$

$\forall (a,b) \in R^2$, on a $a + b = b + a$ (car "$+$" est commutative sur $\mathbb{R}$).

Donc $(a,b)\Re(a,b)$

D'où $\Re$ est réflexive

e. $\forall (a,b), (a',b') \in N^2 : (a,b)\Re(a',b') \Leftrightarrow (a < a')$ ou $(a = a' \, et \, b \leq b')$

$\forall (a,b) \in N^2$: on a $(a = a \, et \, b \leq b)$ est vraie

Donc $(a < a)$ ou $(a = a \, et \, b \leq b)$ est vraie

Alors $(a,b)\Re(a,b)$

D'où $\Re$ est réflexive

f. $\forall x, y \in \mathrm{R}^* : x\Re y \Leftrightarrow x^2 - \frac{1}{x^2} = y^2 - \frac{1}{y^2}$

$\forall x \in \mathrm{R}^*$: on a $x^2 - \frac{1}{x^2} = x^2 - \frac{1}{x^2}$ (car $''=''$ est réflexive)

Donc $x\Re x$

D'où $\Re$ est réflexive

Remarque :

Pour montrer que $\Re$ n'est pas réflexive il suffit de donner un contre exemple.

$\exists x_0 \in E : x_0 \Re x_0$ est fausse

Exemple : $''<''$ n'est pas réflexive car $1 \not< 1$.

3.2. La symétrie :

$\Re$ est dite symétrique si seulement si pour tout x et y de E : si x est en relation avec y alors y est en relation avec x.

$\Re$ est symétrique $\Leftrightarrow \forall x, y \in E : x\Re y \Rightarrow y\Re x$

Exemples :

1. $''=''$ est réflexive.

2. Montrer que les relations suivantes sont symétriques :

a. $\forall x, y \in \mathrm{R} : x\Re y \Leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y$

Soient $x, y \in \mathrm{R}$ tel que $x\Re y$

$$\begin{aligned} x\Re y &\Leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y \\ &\Rightarrow -(x^2 - y^2) = -(x - y) \\ &\Rightarrow -x^2 + y^2 = -x + y \\ &\Rightarrow y^2 - x^2 = y - x \\ &\Rightarrow y\Re x \end{aligned}$$

D'où $\Re$ est symétrique

b. $\forall x, y \in \mathrm{Z} : x\Re y \Leftrightarrow \exists k \in \mathrm{Z} : x - y = 3k$

Soient $x, y \in \mathrm{Z}$ tel que $x\Re y$

$$\begin{aligned} x\Re y &\Leftrightarrow \exists k \in \mathrm{Z} : x - y = 3k \\ &\Rightarrow \exists k \in \mathrm{Z} : -(x - y) = -(3k) \\ &\Rightarrow \exists k \in \mathrm{Z} : -x + y = 3(-k) \\ &\Rightarrow \exists k' = -k \in \mathrm{Z} : y - x = 3k' \\ &\Rightarrow y\Re x \end{aligned}$$

D'où $\Re$ est symétrique

c. $\forall (a,b),(c,d) \in \mathrm{R}^2 : (a,b)\Re(c,d) \Leftrightarrow a + d = b + c$

Soient $(a,b),(c,d) \in \mathrm{R}^2$ tel que $(a,b)\Re(c,d)$

$$\begin{aligned} (a,b)\Re(c,d) &\Leftrightarrow a + d = b + c \\ &\Rightarrow d + a = c + b \text{ (car } ''+'' \text{ est commutative sur } \mathbb{R}). \\ &\Rightarrow c + b = d + a \text{ (car } ''='' \text{ est réflexive)} \\ &\Rightarrow (c,d)\Re(a,b) \end{aligned}$$

D'où $\Re$ est symétrique

d. $\forall x, y \in \mathbb{R}^* : x\Re y \Leftrightarrow x^2 - \frac{1}{x^2} = y^2 - \frac{1}{y^2}$

Soient $x, y \in \mathbb{R}^*$ tel que $x\Re y$

$$x\Re y \Leftrightarrow x^2 - \frac{1}{x^2} = y^2 - \frac{1}{y^2}$$

$$\Rightarrow y^2 - \frac{1}{y^2} = x^2 - \frac{1}{x^2} \text{ (car "=" est réflexive)}$$

$$\Rightarrow y\Re x$$

D'où $\Re$ est symétrique

Remarque :

Pour montrer que $\Re$ n'est pas symétrique il suffit de donner un contre exemple.

$\exists x_0, y_0 \in E$: $x_0\Re y_0$ vraie mais $y_0\Re x_0$ est fausse

Exemples :

1. "$\leq$" n'est pas symétrique car $1 \leq 2$ mais $2 \not\leq 1$

2. Montrer que les relations suivantes ne sont pas symétriques.

a. $\forall a, b \in \mathbb{N}^* : a\Re b \Leftrightarrow \exists q \in \mathbb{N}^* : b = a.q$

Contre-exemple : $a_0 = 3$ et $b_0 = 6$ on a $3\Re 6$ vraie ($\exists q = 2 \in \mathbb{N}^* : 6 = 3.2$)

mais $6\Re 3$ fausse ($\nexists q \in \mathbb{N}^* : 3 = 6.q$)

D'où $\Re$ n'est pas symétrique

b. $\forall (a,b),(a',b') \in \mathbb{N}^2$: $(a,b)\Re(a',b') \Leftrightarrow (a < a')$ ou $(a = a' \, et \, b \leq b')$

Contre-exemple : $(a_0, b_0) = (3,4)$ et $(a'_0, b'_0) = (6,2)$

On a $(3,4)\Re(6,2)$ vraie car $3 < 6$ mais $(6,2)\Re(3,4)$ fausse car $6 \not< 3$ et $6 \neq 3$

D'où $\Re$ n'est pas symétrique

3.3. La transitivité :

$\Re$ est dite transitive si seulement si pour tout x, y et z de E : si x est en relation avec y et y est en relation avec z alors x est en relation avec z.

$\Re$ est transitive $\Leftrightarrow \forall x, y, z \in E : x\Re y \wedge y\Re z \Rightarrow x\Re z$

Exemples :

1. "$=$", "$\leq$" et "$\subseteq$" sont transitives.

2. Montrer que les relations suivantes sont transitives :

a. $\forall x, y \in \mathbb{R} : x\Re y \Leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y$

Soient $x, y, z \in E$ tels que $x\Re y \wedge y\Re z$

$x\Re y \Leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y \ldots(1)$

$\wedge$

$y\Re z \Leftrightarrow y^2 - z^2 = y - z \ldots(2)$

$(1)+(2) \Rightarrow x^2 - y^2 + y^2 - z^2 = x - y + y - z$

$\Rightarrow x^2 - z^2 = x - z$

$\Rightarrow x\Re z$

D'où $\Re$ est transitive.

b. $\forall x, y \in \mathbb{Z} : x\Re y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x - y = 3k$

Soient $x, y, z \in E$ tels que $x\Re y \wedge y\Re z$

$x\Re y \Leftrightarrow \exists k_1 \in \mathbb{Z} : x - y = 3k_1 \ldots(1)$

$\wedge$

$y\Re z \Leftrightarrow \exists k_2 \in \mathbb{Z} : y - z = 3k_1 \ldots(2)$

(1)+(2) $\Rightarrow \exists k_1, k_2 \in \mathbb{Z} : x - y + y - z = 3k_1 + 3k_2$

$\Rightarrow \exists k_1, k_2 \in \mathbb{Z} : x - z = 3(k_1 + k_2)$

$\Rightarrow \exists k = k_1 + k_2 \in \mathbb{Z} : x - y + y - z = 3k$

$\Rightarrow x\Re z$

D'où $\Re$ est transitive.

c. $\forall a, b \in \mathbb{N}^* : a\Re b \Leftrightarrow \exists q \in \mathbb{N}^* : b = a.q$

Soient $a, b, c \in \mathbb{N}^*$ tels que $a\Re b \wedge b\Re c$

$a\Re b \Leftrightarrow \exists q_1 \in \mathbb{N}^* : b = a.q_1 \ldots(1)$

$\wedge$

$b\Re c \Leftrightarrow \exists q_2 \in \mathbb{N}^* : c = b.q_2 \ldots(2)$

Remplaçons (1) dans (2) :

$\exists q_1, q_2 \in \mathbb{N}^* : c = (a.q_1).q_2$

Donc $\exists q_1, q_2 \in \mathbb{N}^* : c = a.(q_1.q_2)$

Alors $\exists q = q_1.q_2 \in \mathbb{N}^* : c = a.q$

D'où $a\Re c$

Et donc $\Re$ est transitive.

d. $\forall (a,b),(c,d) \in \mathbb{R}^2 : (a,b)\Re(c,d) \Leftrightarrow a + d = b + c$

Soient $(a,b),(c,d),(e,f) \in \mathbb{R}^2$ tels que $(a,b)\Re(c,d) \wedge (c,d)\Re(e,f)$

$(a,b)\Re(c,d) \Leftrightarrow a + d = b + c \ldots(1)$

$\wedge$

$(c,d)\Re(e,f) \Leftrightarrow c + f = d + e \ldots(2)$

(1)+(2) $\Rightarrow a + d + c + f = b + c + d + e$

$\Rightarrow a + f = b + e$

$\Rightarrow (a,b)\Re(e,f)$

D'où $\Re$ est transitive.

e. $\forall (a,b),(a',b') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* : (a,b)\Re(a',b') \Leftrightarrow a.b' = a'.b$

Soient $(a,b),(a',b'),(a'',b'') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tels que $(a,b)\Re(a',b') \wedge (a',b')\Re(a'',b'')$

$(a,b)\Re(a',b') \Leftrightarrow a.b' = a'.b \ldots(1)$

$\wedge$

$(a',b')\Re(a'',b'') \Leftrightarrow a'.b'' = a''.b' \ldots(2)$

De (1) on a $a' = \dfrac{ab'}{b}$ car $b \neq 0$ ($b \in \mathbb{N}^*$)

Remplaçons dans (2) :

$\frac{ab'}{b}.b'' = a''.b'$

Donc $\frac{a}{b}.b'' = a''$ car $b' \neq 0$ ($b' \in \mathbb{N}^*$)

Alors $ab'' = a''b$

D'où $(a,b)\Re(a'',b'')$

Et donc $\Re$ est transitive.

Remarque :

Pour montrer que $\Re$ n'est pas transitive il suffit de donner un contre exemple.

$\exists x_0, y_0, z_0 \in E$: ($x_0 \Re y_0 \wedge y_0 \Re z_0$) vraie mais $x_0 \Re z_0$ est fausse

Exemple :

Montrer que les relations ne sont pas transitives :

1. $\forall (a,b),(a',b') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} : (a,b)\Re(a',b') \Leftrightarrow a.b' = a'.b$

Contre-exemple :

$(a,b) = (1,0)$, $(a',b') = (0,0)$ et $(a'',b'') = (-2,4)$

On a $(1,0)\Re(0,0)$ vraie car $1.0 = 0.0$

Et $(0,0)\Re(-2,4)$ vraie car $0.4 = (-2).0$

Mais $(1,0)\Re(-2,4)$ fausse car $1.4 \neq (-2).0$

D'où $\Re$ n'est pas transitive.

2. Soit E : ensemble de nombres premiers >2.

$\forall a,b \in E : a\Re b \Leftrightarrow \frac{a+b}{2} \in E$

Contre-exemple :

$a = 7$, $b = 3$ et $c = 11$

On a $a\Re b$ vraie car $\frac{a+b}{2} \in E$, en effet $\frac{7+3}{2} = 5 \in E$

Et $b\Re c$ vraie car $\frac{b+c}{2} \in E$ en effet $\frac{3+11}{2} = 7 \in E$

Mais $a\Re c$ fausse car $\frac{a+c}{2} \notin E$ en effet $\frac{7+11}{2} = 9 \notin E$

D'où $\Re$ n'est pas transitive.

3.4. L'antisymétrie :

$\Re$ est dite antisymétrique si seulement si pour tout x et y de E : si x est en relation avec y et y est en relation avec x alors x est égal à y.

$\Re$ est antisymétrique $\Leftrightarrow \forall x, y \in E : x\Re y \wedge y\Re x \Rightarrow x = y$

Exemples :

1. "$\leq$" et "$\subseteq$" sont antisymétriques.

2. Montrer que les relations suivantes sont antisymétriques :

a. $\forall a,b \in \mathbb{N}^* : a\Re b \Leftrightarrow \exists q \in \mathbb{N}^* : b = a.q$

Soient $a,b \in \mathbb{N}^*$ tels que $a\Re b \wedge b\Re a$

$a\Re b \Leftrightarrow \exists q_1 \in \mathbb{N}^* : b = a.q_1 \ldots (1)$

$\wedge$

$b\Re a \Leftrightarrow \exists q_2 \in \mathrm{N}^* : a = b.q_2 \ldots(2)$

Remplaçons (1) dans (2) :

$\exists q_1, q_2 \in \mathrm{N}^* : a = (a.q_1).q_2$

Donc $\exists q_1, q_2 \in \mathrm{N}^* : a = a.(q_1.q_2)$

Alors $q_1.q_2 = 1$

D'où $q_1 = q_2 = 1$ car $q_1, q_2 \in \mathrm{N}^*$

Remplaçons dans (1) on aura : $a = b$.

D'où $\Re$ est antisymétrique.

b. $\forall (a,b),(c,d) \in \mathrm{R}^2 : (a,b)\Re(c,d) \Leftrightarrow a \le c \wedge b \le d$

Soient $(a,b),(c,d) \in \mathrm{R}^2$ tel que $(a,b)\Re(c,d) \wedge (c,d)\Re(a,b)$

$(a,b)\Re(c,d) \Leftrightarrow a \le c \wedge b \le d \ldots(1)$

$\wedge$

$(c,d)\Re(a,b) \Leftrightarrow c \le a \wedge d \le b \ldots(2)$

$$
\begin{aligned}
(1) \wedge (2) &\Rightarrow (a \le c \wedge c \le a) \wedge (b \le d \wedge d \le b) \\
&\Rightarrow a = c \wedge b = d \\
&\Rightarrow (a,b) = (c,d)
\end{aligned}
$$

Remarque :

Pour montrer que $\Re$ n'est pas antisymétrique il suffit de donner un contre exemple.

$\exists x_0, y_0 \in E :\ x_0 \Re y_0 \wedge\ y_0 \Re x_0$ mais $x_0 \ne y_0$

Exemple :

Montrer que les relations suivantes ne sont antisymétriques :

1. $\forall (a,b),(c,d) \in \mathrm{R}^* \times \mathrm{R} : (a,b)\Re(c,d) \Leftrightarrow ac > 0 \wedge b = d$

Contre-exemple :

$(a,b) = (1,2)$ et $(c,d) = (3,2)$

On a $(1,2)\Re(3,2)$ car $1.3 > 0 \wedge 2 = 2$

Et $(3,2)\Re(1,2)$ car $3.1 > 0 \wedge 2 = 2$

Mais $(1,2) \ne (3,2)$

D'où $\Re$ n'est pas antisymétrique

2. $\forall (a,b),(c,d) \in \mathrm{R}^2 : (a,b)\Re(c,d) \Leftrightarrow a \le c \vee b \le d$

Contre-exemple :

$(a,b) = (1,2)$ et $(c,d) = (3,0)$

On a $(1,2)\Re(3,0)$ car $a = 1 \le c = 3$

Et $(3,0)\Re(1,2)$ car $b = 0 \le d = 2$

Mais $(1,2) \ne (3,0)$

D'où $\Re$ n'est pas antisymétrique.

3.5. La relation d'équivalence :

Soit E un ensemble muni d'une relation binaire $\Re$.

On dit que $\Re$ est une relation d'équivalence si et seulement si elle est réflexive, symétrique et transitive.

Exemples :

Les relations suivantes sont d'équivalence :

a. **"="**.

b. $\forall x, y \in \mathbb{R} : x\Re y \Leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y$.

c. $\forall x, y \in \mathbb{Z} : x\Re y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x - y = 3k$

d. $\forall (a,b), (c,d) \in \mathbb{R}^2 : (a,b)\Re(c,d) \Leftrightarrow a + d = b + c$

e. $\forall (a,b), (a',b') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* : (a,b)\Re(a',b') \Leftrightarrow a.b' = a'.b$

3.5.1. La classe d'équivalence :

Soit $\Re$ une relation d'équivalence définie sur un ensemble E et $a \in E$.

La classe d'équivalence de a, notée $cl(a)$ ou encore $\dot{a}$, est l'ensemble des éléments $x \in E$ qui sont en relation avec a.

$cl(a) = \{x \in E / x\Re a\}$

Exemple :

1. $\forall x, y \in \mathbb{R} : x\Re y \Leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y$ est relation d'équivalence.

Déterminer $cl(0)$

$cl(0) = \{x \in \mathbb{R} / x\Re 0\}$

$$
\begin{aligned}
x\Re 0 &\Leftrightarrow x^2 - 0^2 = x - 0 \\
&\Rightarrow x^2 = x \\
&\Rightarrow x^2 - x = 0 \\
&\Rightarrow x(x-1) = 0 \\
&\Rightarrow x = 0 \vee x - 1 = 0 \\
&\Rightarrow x = 0 \vee x = 1
\end{aligned}
$$

Donc $cl(0) = \{0,1\}$

2. $\forall x, y \in \mathbb{Z} : x\Re y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x - y = 3k$, est une relation d'équivalence.

Déterminer $cl(1)$

$cl(1) = \{x \in \mathbb{R} / x\Re 1\}$

$$
\begin{aligned}
x\Re 1 &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x - 1 = 3k \\
&\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x = 3k + 1
\end{aligned}
$$

Donc $cl(1) = \{3k + 1 / k \in \mathbb{Z}\}$

Propriétés de la classe d'équivalence :

Soit $\Re$ une relation d'équivalence définie sur un ensemble E .

1. $\forall a \in E$, $a \in cl(a) \Rightarrow cl(a) \neq \phi$

2. $\forall a, b \in E$**,** $cl(a) \neq cl(b) \Rightarrow cl(a) \cap cl(b) = \phi$

3. $\forall a, b \in E$**,** $a\Re b \Rightarrow cl(a) = cl(b)$

4. $\bigcup_{a\in E} cl(a) = E$

Donc Les classes d'équivalence de $\Re$ forment une partition de E .

L'ensemble quotient :

Soit $\Re$ une relation d'équivalence définie sur un ensemble E .

L'ensemble quotient noté $E/\Re$ est l'ensemble de toutes les classes d'équivalence des éléments de E .

Exemple :

1. $\forall x, y \in \mathrm{R} : x\Re y \Leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y$ est relation d'équivalence.

   Soit $a \in \mathrm{R}$

   $cl(a) = \{x \in \mathrm{R}/x\Re a\}$

   $$
   \begin{aligned}
   x\Re 0 &\Leftrightarrow x^2 - a^2 = x - a \\
   &\Rightarrow x^2 - a^2 - x + a = 0 \\
   &\Rightarrow (x-a)(x+a-1) = 0 \\
   &\Rightarrow x - a = 0 \vee x + a - 1 = 0 \\
   &\Rightarrow x = a \vee x = 1 - a
   \end{aligned}
   $$

   $a = 1 - a \Rightarrow a = \dfrac{1}{2}$

   $\mathrm{R}/\Re = \left\{\left\{\dfrac{1}{2}\right\}, \left\{a, 1-a/\mathrm{a} \neq \dfrac{1}{2}\right\}\right\}$.

2. $\forall x, y \in \mathrm{Z} : x\Re y \Leftrightarrow \exists k \in \mathrm{Z} : x - y = 3k$, est une relation d'équivalence.

   $\mathrm{Z}/\Re = \left\{\dot{0}, \dot{1}, \dot{2}\right\}$.

3.5.2. La relation d'ordre :

Soit E un ensemble muni d'une relation binaire $\Re$.

On dit que $\Re$ est une relation d'équivalence si et seulement si elle est réflexive, antisymétrique et transitive.

On dit aussi que E est ordonné par $\Re$.

Exemples :

Les relations suivantes sont d'ordre :

1. $"\leq"$ et $"\subseteq"$.
2. $\forall a, b \in \mathrm{N}^* : a\Re b \Leftrightarrow \exists q \in \mathrm{N}^* : b = a.q$
3. $\forall (a,b), (c,d) \in \mathrm{R}^2 : (a,b)\Re(c,d) \Leftrightarrow a \leq c \wedge b \leq d$

Définition :

une relation d'ordre $\Re$ sur un ensemble E est dite d'ordre **total** si

$\forall x, y \in \mathrm{E} : x\Re y$ ou bien $y\Re x$

Si l'ordre n'est pas total on dit qu'il est **partiel** i.e $\exists x_0, y_0 \in \mathrm{E} : x_0\Re y_0$ fausse et $y_0\Re x_0$ fausse

Exemples :

1. $"\leq"$ est une relation d'ordre total

2. $\forall x, y \in \mathrm{R}_+ : x\Re y \Leftrightarrow \sqrt{1+x^2} \leq \sqrt{1+y^2}$ est une relation d'ordre total

$\Re$ est une relation d'ordre (à prouver)

Montrons que l'ordre est total :

Soient $x, y \in \mathrm{R}_+$, on a $x \leq y$ ou bien $y \leq x$

Si $x \leq y$

$x \leq y \Rightarrow x^2 \leq y^2$ car $f(x) = x^2$ est croissante sur R_+

$\Rightarrow x^2 + 1 \leq y^2 + 1$

$\Rightarrow \sqrt{1+x^2} \leq \sqrt{1+y^2}$

$\Rightarrow x\Re y$

Si $y \leq x$

$x \leq y \Rightarrow y^2 \leq x^2$ car $f(x) = x^2$ est croissante sur R_+

$\Rightarrow y^2 + 1 \leq x^2 + 1$

$\Rightarrow \sqrt{1+x^2} \leq \sqrt{1+y^2}$

$\Rightarrow y\Re x$

Donc $\forall x, y \in \mathrm{R}_+ : x\Re y$ ou bien $y\Re x$

D'où $\Re$ est une relation d'ordre total

3. $\forall a, b \in \mathrm{N}^* : a\Re b \Leftrightarrow \exists q \in \mathrm{N}^* : b = a.q$ est une relation d'ordre partiel

$\Re$ est une relation d'ordre (déjà vue)

Montrons que l'ordre est partiel :

Pour $x_0 = 2$ et $y_0 = 3$

On a $2\Re 3$ fausse car $\nexists q \in \mathrm{N}^* : 3 = 2.q$

Et $3\Re 2$ fausse car $\nexists q \in \mathrm{N}^* : 2 = 3.q$

Donc $\exists x_0, y_0 \in \mathrm{E} : x_0 \Re y_0$ fausse et $y_0 \Re x_0$ fausse

D'où $\Re$ est une relation d'ordre partiel.