Les limites

Formes Indéterminées :

$$\frac{0}{0},\ \frac{\pm\infty}{\pm\infty},\ 0\times\pm\infty,\ \frac{-\infty+\infty}{+\infty-\infty},\ \left(0^{+}\right)^{0},\ (+\infty)^{0},\ 1^{\pm\infty}$$

Limites remarquables :

I/ 1. $\lim\limits_{x\to 0^{+}} \ln x = -\infty$ 2. $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$ 3. $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

4. $\lim\limits_{x\to 0^{+}} x\ln x = 0$ 5. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

II/ 1. $\lim\limits_{x\to -\infty} e^{x} = 0$ 2. $\lim\limits_{x\to +\infty} e^{x} = +\infty$ 3. $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^{x}}{x} = +\infty$

4. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{x}-1}{x} = 1$ 5. $\lim\limits_{x\to -\infty} xe^{x} = 0$.

III/ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Rappel :

$\forall \alpha \in \mathbb{R}$:

1. $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$
   $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

2. $\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha$
$\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$

3. $\sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha$
$\cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha$

4. $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha$
$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \sin\alpha$

5. $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \cos\alpha$
$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\sin\alpha$

Exercice :

Calculer les limites suivantes :

A/ 1. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-x^2}\right)$

$$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-x^2}\right)\quad(-\infty+\infty)\ \text{FI}$$

$$\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-x^2}\right)\ (+\infty-\infty)\quad \text{FI}$$

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-x^2}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{1+x-1}{1-x^2}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{1-x^2}\right)$$

$$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-x^2}\right)=\frac{1}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-x^2}\right)=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\quad(+\infty-\infty)$ FI

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1-x}{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}=\frac{1}{+\infty}=0$$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\ln x)\quad(+\infty-\infty)$ FI

$$\lim_{x\to+\infty}(x-\ln x)=\lim_{x\to+\infty}x\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)=+\infty(1-0)=+\infty$$

B/ 1. $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{\frac{1}{x}+x}}{\sqrt{\frac{1}{x}-x}}\quad\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)$ FI

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{\frac{1}{x}+x}}{\sqrt{\frac{1}{x}-x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{\frac{1+x^2}{x}}}{\sqrt{\frac{1-x^2}{x}}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{x}}}{\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{x}}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{1}}=1$$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+e^x\right)}{x}\quad\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)$ FI

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+e^x\right)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(e^x\left(1+e^{-x}\right)\right)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(e^x\right)+\ln\left(1+e^{-x}\right)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x}{x}+\frac{\ln\left(1+e^{-x}\right)}{x}\right]=1+\frac{0}{+\infty}=1+0=1$$

C/

I. 1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{-x^2+3x-2}{x^2-4}$ $\quad\left(\dfrac{0}{0}\right)$ FI

$$\lim_{x\to 2}\frac{-x^2+3x-2}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{-(x-2)(x-1)}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{-(x-1)}{(x+2)}=-\frac{1}{3}$$

2. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}$ **,** $a>0$ $\quad\left(\dfrac{0}{0}\right)$ FI

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)}{(x-a)\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)}=\lim_{x\to a}\frac{x-a}{(x-a)\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)}=\lim_{x\to a}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}=\frac{1}{2\sqrt{a}}\,.$$

3. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$ $\quad\left(\dfrac{0}{0}\right)$ FI

$$\lim_{x\to 4}\frac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}=\lim_{x\to 4}\frac{\left(3-\sqrt{5+x}\right)\left(3+\sqrt{5+x}\right)\left(1+\sqrt{5-x}\right)}{\left(1-\sqrt{5-x}\right)\left(1+\sqrt{5-x}\right)\left(3+\sqrt{5+x}\right)}=\lim_{x\to 4}\frac{(9-(5+x))\left(1+\sqrt{5-x}\right)}{(1-(5-x))\left(3+\sqrt{5+x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(4-x)\left(1+\sqrt{5-x}\right)}{(-4+x)\left(3+\sqrt{5+x}\right)}=\lim_{x\to 4}\frac{-\left(1+\sqrt{5-x}\right)}{\left(3+\sqrt{5+x}\right)}=-\frac{1}{3}$$

II. 1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(5x)}{x}$ $\quad\left(\dfrac{0}{0}\right)$ FI

On pose $y=5x$ donc $x=\dfrac{y}{5}$

Quand $x\to 0,\ y\to 0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(5x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{5\sin y}{y}=5\lim_{x\to 0}\frac{\sin y}{y}=5\times 1=5\,.$$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx}{x}$ $\quad\left(\dfrac{0}{0}\right)$ FI

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x\cos x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)\left(\frac{1}{\cos x}\right)=1\times 1=1\,.$$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg(kx)}{x}$**,** $k\neq 0$ $\quad\left(\dfrac{0}{0}\right)$ FI

On pose $y=kx$ donc $x=\dfrac{y}{k}$

Quand $x\to 0,\ y\to 0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg(kx)}{x}=\lim_{x\to 0}k\frac{tg(y)}{y}=k\lim_{x\to 0}\frac{tg(y)}{y}=k\times 1=k\,.$$

4. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$ $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ FI

<u>1^{ère} méthode</u>

$\forall\alpha\in\mathrm{R},\ \cos(2\alpha)=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$

$=1-2\sin^2\alpha$

Donc $1-\cos(2\alpha)=2\sin^2\alpha$

$2\alpha=x\Rightarrow\alpha=\dfrac{x}{2}$

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2}=2\lim_{x\to0}\frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2}=2\lim_{x\to0}\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right).\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{x.x}=2\lim_{x\to0}\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right).\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{4\left(\frac{x}{2}\right).\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$=\frac{2}{4}\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right)\left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right)=\frac{1}{2}\times1\times1=\frac{1}{2}.$$

2ème méthode

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2x}{x^2(1+\cos x)}=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2x}{x^2(1+\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\left(\frac{1}{1+\cos x}\right)=1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

5. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}$ $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ FI

On pose $y=\dfrac{\pi}{2}-x$ donc $x=\dfrac{\pi}{2}-y$

Quand $x\to\dfrac{\pi}{2}$ $\quad y\to0$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}=\lim_{y\to0}\frac{1-\sin\left(\frac{\pi}{2}-y\right)}{y^2}=\lim_{y\to0}\frac{1-\cos y}{y^2}=\frac{1}{2}$$ (d'après **4.**)

6. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin^2x}{1+\cos x}$ $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ FI

On pose $y=\pi-x$ donc $x=\pi-y$

Quand $x\to\pi$ $\quad y\to0$

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin^2 x}{1+\cos x}=\lim_{x\to\pi}\frac{\sin^2(\pi-y)}{1+\cos(\pi-y)}=\lim_{x\to\pi}\frac{\sin^2 y}{1-\cos y}=\lim_{x\to\pi}\frac{\sin^2 y(1+\cos y)}{(1-\cos y)(1+\cos y)}=\lim_{x\to\pi}\frac{\sin^2 y(1+\cos y)}{1-\cos^2 y}$$

$$=\lim_{x\to\pi}\frac{\sin^2 y(1+\cos y)}{\sin^2 y}=\lim_{x\to\pi}(1+\cos y)=2$$

D/ **1.** $\lim_{x\to 0^+}(\ln x.\sin x)$ $(-\infty.0)$ FI

$$\lim_{x\to 0^+}(\ln x.\sin x)=\lim_{x\to 0^+}\left((x\ln x).\left(\frac{\sin x}{x}\right)\right)=0\times 1=0$$

2. $\lim_{x\to 0^+}\left(x\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)$ $(0.(+\infty))$ FI

<u>1ère méthode</u>

$$\lim_{x\to 0^+}\left(x\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(x\sqrt{\frac{x+1}{x}}\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x}{\sqrt{x}}\sqrt{x+1}\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(\sqrt{x}\sqrt{x+1}\right)=0\times 1=0$$

<u>2èmeméthode</u>

$$\lim_{x\to 0^+}\left(x\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right)=\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x^2+x}=0\,.$$

E/ 1. $\lim_{x\to 0^+}(x^x)$ (0^0) FI

$$\lim_{x\to 0^+}(x^x)=\lim_{x\to 0^+}e^{\ln(x^x)}=\lim_{x\to 0^+}e^{x\ln x}=e^{\lim_{x\to 0^+}(x\ln x)}=e^0=1$$

2. $\lim_{x\to 1^+}\left(\sqrt{x}-1\right)^{x-1}$ (0^0) FI

$$\left(\sqrt{x}-1\right)^{x-1}=e^{\ln\left(\sqrt{x}-1\right)^{x-1}}$$

$$=e^{(x-1)\ln\left(\sqrt{x}-1\right)}$$

$$\lim_{x\to 1^+}\left(\sqrt{x}-1\right)^{x-1}=\lim_{x\to 1^+}e^{(x-1)\ln\left(\sqrt{x}-1\right)}=e^{\lim_{x\to 1^+}(x-1)\ln\left(\sqrt{x}-1\right)}$$

$\lim_{x\to 1^+}(x-1)\ln\left(\sqrt{x}-1\right)$ $(0.(-\infty))$ FI

$$\lim_{x\to 1^+}\left[(x-1)\ln\left(\sqrt{x}-1\right)\right]=\lim_{x\to 1^+}\left[\left(\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}\right)\left(\sqrt{x}-1\right)\ln\left(\sqrt{x}-1\right)\right]=\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}\right)\lim_{x\to 1^+}\left[\left(\sqrt{x}-1\right)\ln\left(\sqrt{x}-1\right)\right]$$

$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}\right)$ $\left(\frac{0}{0}\right)$ FI

$$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}\right)=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\left(\sqrt{x}+1\right)=2$$

$$\lim_{x\to 1^+}\left(\sqrt{x}-1\right)\ln\left(\sqrt{x}-1\right)=0$$

$$\lim_{x\to 1^+}(x-1)\ln\left(\sqrt{x}-1\right)=2\times 0=0$$

$$\lim_{x\to 1^+}\left(\sqrt{x}-1\right)^{x-1}=e^0=1$$

3. $\lim_{x\to+\infty}(1+3x)^{\frac{1}{4x}}$ $\quad(+\infty)^0$ FI

$$\lim_{x\to+\infty}(1+3x)^{\frac{1}{4x}} = \lim_{x\to+\infty} e^{\ln(1+3x)^{\frac{1}{4x}}} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{4x}\ln(1+3x)} = e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+3x)}{4x}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+3x)}{4x} \quad \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \text{ FI}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+3x)}{4x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{(1+3x)\ln(1+3x)}{4x.(1+3x)} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1+3x}{4x}\right)\left(\frac{\ln(1+3x)}{1+3x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1+3x}{4x}\right)\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(1+3x)}{1+3x}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1+3x}{4x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{3x}{4x} = \frac{3}{4}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(1+3x)}{1+3x}\right) = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(1+3x)}{1+3x}\right) = \frac{3}{4}\times 0 = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty}(1+3x)^{\frac{1}{4x}} = e^0 = 1$$

4. $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ $\quad\left(1^{\pm\infty}\right)$ FI

Proposition :

Soient f et g deux fonctions définies sur un même voisinage de x_0 , $V \in \mathcal{V}(x_0)$.

Supposons que $f(x)\neq 1,\ \forall x\in V \quad x\neq x_0$

Et $\lim_{x\to x_0} f(x)=1 \quad \lim_{x\to x_0} g(x)=\pm\infty$

Donc $\lim_{x\to x_0}(f(x))^{g(x)} = 1^{\pm\infty}$ se présente sous forme indéterminée.

Si $\lim_{x\to x_0}(f(x)-1)g(x)=\lambda$ alors $\lim_{x\to x_0}(f(x))^{g(x)} = e^{\lambda}$.

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} \quad \left(1^{\pm\infty}\right) \text{ FI}$$

$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\lambda}$ et $\lambda = \lim_{x\to 0}(f(x)-1)g(x)$ avec $f(x)=1+x$ et $g(x)=\dfrac{1}{x}$

$$\lambda = \lim_{x\to 0}(1+x-1)\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0}(x)\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{x}\right) = \lim_{x\to 0}(1) = 1$$

Donc $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e^1 = e$

5. $\lim_{x\to 1}\left(x^{\frac{1}{\sqrt{x}-1}}\right)$ $\quad\left(1^{\pm\infty}\right)$ FI

$\lim_{x\to 1}\left(x^{\frac{1}{\sqrt{x}-1}}\right) = e^{\lambda}$ et $\lambda = \lim_{x\to 1}(f(x)-1)g(x)$ avec $f(x)=x$ et $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}$

$$\lambda=\lim_{x\to1}(x-1)\left(\frac{1}{\sqrt{x}-1}\right)=\lim_{x\to1}\left(\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}\right)\quad\left(\frac{0}{0}\right)\ \text{FI}$$

$$\lambda=\lim_{x\to1}\left(\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}\right)=\lim_{x\to1}\left(\frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}\right)=\lim_{x\to1}\left(\frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{x-1}\right)=\lim_{x\to1}(\sqrt{x}+1)=2$$

Donc $\lim_{x\to1}\left(x^{\frac{1}{\sqrt{x}-1}}\right)=e^2$.

6. $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3+x}{4+x}\right)^{2x}$ $(1^{+\infty})$ FI

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3+x}{4+x}\right)^{2x}=e^{\lambda}\ \text{et}\ \lambda=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-1)g(x)\ \text{avec}\ f(x)=\frac{3+x}{4+x}\ \text{et}\ g(x)=2x$$

$$\lambda=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3+x}{4+x}-1\right)(2x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3+x-4-x}{4+x}\right)(2x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-1}{4+x}\right)(2x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-2x}{4+x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-2x}{x}\right)=-2$$

donc $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3+x}{4+x}\right)^{2x}=e^{-2}$.

7. $\lim_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$ $(1^{+\infty})$ FI

$$\lim_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\lambda}\ \text{et}\ \lambda=\lim_{x\to0}(f(x)-1)g(x)\ \text{avec}\ f(x)=\cos x\ \text{et}\ g(x)=\frac{1}{x^2}$$

$$\lambda=\lim_{x\to0}(\cos x-1)\left(\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{\cos x-1}{x^2}\right)\quad\left(\frac{0}{0}\right)\ \text{FI}$$

$$\lambda=\lim_{x\to0}\left(\frac{\cos x-1}{x^2}\right)=\lim_{x\to0}\frac{(\cos x-1)(\cos x+1)}{x^2(\cos x+1)}=\lim_{x\to0}\frac{\cos^2 x-1}{x^2(\cos x+1)}=\lim_{x\to0}\frac{-\sin^2 x}{x^2(\cos x+1)}$$

$$\lambda==\lim_{x\to0}\frac{-\sin^2 x}{x^2(\cos x+1)}=-\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\left(\frac{1}{\cos x+1}\right)=(-1)\times\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}$$

Donc $\lim_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=e^{-\frac{1}{2}}$.