Lista de probabilidad y estadística

Carlos Tonatihu Barrera Pérez
Profesor: Montiel
Probabilidad y Estadística
Grupo: 2CM10

12 de diciembre de 2016

1. Lista 1

1. Demuestre que :

   a) $\binom{n}{r} = \frac{n-r+1}{r}\binom{n}{r-1}$

   Demostración.

$$
\begin{aligned}
\binom{n}{r} &= \frac{n!}{(n-r)!r!} \\
&= \frac{n-r+1}{n-r+1}(\frac{n!}{(n-r)!r!}) \\
&= \frac{n-r+1}{n-r+1}(\frac{n!}{(n-r)!r(r-1)!}) \\
&= \frac{n-r+1}{r}(\frac{n!}{(n-r+1)(n-r)!(r-1)!}) \\
&= \frac{n-r+1}{r}(\frac{n!}{(n-r+1)!(r-1)!}) \\
&= \frac{n-r+1}{r}(\frac{n!}{(n-(r-1))!(r-1)!}) \\
&= \frac{n-r+1}{r}\binom{n}{r-1}
\end{aligned}
$$

$\square$

   b) $(x+y)^n = \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}x^{n-r}y^r$

   Demostración. Probemos para n=1

$$(x+y)^1 = \sum_{r=0}^{1}\binom{n}{r}x^{n-r}y^r = \binom{1}{0}(x^1)(y^0) + \binom{1}{1}(x^0)(y^1) = x+y = (x+y)^1$$

   Supongamos

$$(x+y)^n = \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}x^{n-r}y^r$$

   Y probemos para $n+1$

$$(x+y)^{n+1} = \sum_{r=0}^{n+1}\binom{n+1}{r}x^{n+1-r}y^r$$

$$
\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= (x+y)(x+y)^n = (x+y)\sum_{r=0}^{n+1}\binom{n}{r}x^{n-r}y^r \\
&= x\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}x^{n-r}y^r + y\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}x^{n-r}y^r \\
&= \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}x^{(n-1)-r}y^r + y\sum_{r=1}^{n+1}\binom{n}{r-1}x^{n-(r-1)}y^r \\
&= \binom{n}{0}x^{n+1}y^0 + \sum_{r=1}^{n}\binom{n}{r}x^{(n+1)-r}y^r \\
&+ \sum_{r=1}^{n}\binom{n}{r-1}x^{(n+1)-r}y^r + \binom{n}{n+r-1}x^{n-(r-1)}y^{n+1} \\
&= x^{n+1} + \sum_{r=1}^{n}\binom{n}{r}x^{(n+1)-r}y^r + \sum_{r=1}^{n}\binom{n}{r-1}x^{n+1-r)}y^r + y^{n+1} \\
&= x^{n+1} + \sum_{r=1}^{n}(\binom{n}{r} + \binom{n}{r-1})x^{(n+1)-r}y^r + y^{n+1} \\
&= x^{n+1} + \sum_{r=1}^{n}\binom{n+1}{r}(x^{(n+1)-r}y^r) \\
&= \sum_{r=0}^{n+1}\binom{n+1}{r}(x^{(n+1)-r}y^r)
\end{aligned}
$$

□

c) $\sum_{r=0}^{n} r\binom{n}{r} = n2^{n-1}$

Demostración. Tenemos que:

$$(1+x)^n = \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}(1^{n-r}x^r) = \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}x^r$$

Derivando:

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{r=1}^{n} r\binom{n}{r}x^{r-1}$$

Y con x=1:

$$n2^{n-1} = \sum_{r=1}^{n} r\binom{n}{r}$$

$$\sum_{r=1}^{n} r\binom{n}{r} = n2^{n-1}$$

□

d) $\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}(a-1)^{r} = a^{n}$

Demostración.

$$a^{n} = (a+1-1)^{n} = [1+(a-1)]^{n} = \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}(1^{n-r})(a-1)^{r}$$

$$\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}(a-1)^{r} = a^{n}$$

□

e) $\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}^{2} = \binom{2n}{n}$

Demostración.

$$\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}^{2} = \binom{2n}{n}$$

$$(1+x)^{2n} = (1+x)^{n} * (1+x)^{n} = \sum_{r=0}^{n}(\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{j}\binom{n}{r-j}x^{k})$$

$$(1+x)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}x^{k}$$

$$\binom{2n}{n} = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\binom{n}{n-j} = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}^{2}$$

□

2. ¿De cuantas maneras pueden formarse 5 personas para abordar un autobús, si dos de las personas se niegan a hacerlo una tras la otra?

3. Dos focos se mantienen encendidos hasta que se funden. Suponer que ninguno dura mas de 1600 horas. Definir un espacio muestral adecuado para este experimento, donde se describen los siguientes eventos:

   i)Ambos focos duran menos de 1000 horas
   Solucion

   $$A = \{x, y|0 \leq x, y < 1000\}$$

   ii)Ningun foco se funde antes de 1000 horas
   Solucion

   $$B = \{x, y|1000 < x, y \leq 1600\}$$

   iii) El menor tiempo de duracion (de los dos) es de 1000 horas
   Solucion

   $$C = \{x, y|1000 \leq x + y \leq 1600\}$$

4. Se inscriben Alejandro, Pedrito y Carlos en una carrera. ¿Cual es la probabilidad de que Alejandro termine antes que Carlos, si todos tienen la misma habilidad y no hay empates?
   Solucion

   $$P(\Omega) = 3! = 6$$
   $$|\Omega| = (A, B, C), (B, A, C), (A, C, B), (B, C, A), (C, A, B), (C, B, A)$$
   $$|A > C| = (A, B, C), (A, C, B), (B, A, C)$$
   $$P(A > C) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 50\,\%$$

5. En un año determinado para elecciones nacionales deben elegirse gobernadores para 20 estados. Si se supone que en cada estado hay 2 candidatos (PT y Alianza Zapatista),

¿cual es la probabilidad de que el mismo partido gane en todos los estados?
Solucion

$$P(PT \cup AZ) = P(PT) + P(AZ)$$
$$P(PT \cup AZ) = \frac{1}{2^{20}} + \frac{1}{2^{20}} = \frac{2}{2^{20}} = .001907\,\%$$

6. Se somete a un alumno a un examen de tipo Verdadero - Falso que contiene 10 preguntas; para que apruebe, debe responder correctamente a 8 preguntas o mas. Si el estudiante esta adivinando, ¿Cual es la probabilidad de que apruebe el examen?
Solucion

$$P|8| = \binom{10}{8}(\frac{1}{2})^8(\frac{1}{2})^2 = \frac{45}{1024}$$
$$P|9| = \binom{10}{9}(\frac{1}{2})^9(\frac{1}{2})^1 = \frac{10}{1024}$$
$$P|9| = \binom{10}{10}(\frac{1}{2})^{10}(\frac{1}{2})^0 = \frac{1}{1024}$$
$$P(8 \cup 9 \cup 10) = \frac{56}{1024} = 5.46\,\%$$

7. En el curso de Plastilina II se distribuye un examen con 10 preguntas de opcion multiple. Para aprobarlo, se requiere responder correctamente a 7 o mas de las preguntas. Si se supone que esta adivinando la respuesta en cada pregunta, ¿Cual es la probabilidad de aprobar el examen si las primeras 5 preguntas tienen 3 respuestas ocionales y las ultimas 5 preguntas tienen 4 respuestas opcionales?
Solucion
7p:

$$5p2p = \binom{5}{5}(\frac{1}{3})^5(\frac{2}{3})^0 + \binom{5}{2}(\frac{1}{4})^2(\frac{3}{4})^3$$
$$4p3p = \binom{5}{4}(\frac{1}{3})^4(\frac{2}{3})^1 + \binom{5}{3}(\frac{1}{4})^3(\frac{3}{4})^2$$
$$3p4p = \binom{5}{3}(\frac{1}{3})^3(\frac{2}{3})^2 + \binom{5}{4}(\frac{1}{4})^4(\frac{3}{4})^1$$
$$2p5p = \binom{5}{2}(\frac{1}{3})^2(\frac{2}{3})^3 + \binom{5}{5}(\frac{1}{4})^5(\frac{3}{4})^0$$

8p:

$$5p3p = \binom{5}{5}(\frac{1}{3})^5(\frac{2}{3})^0 + \binom{3}{5}(\frac{1}{4})^3(\frac{3}{4})^2$$
$$4p4p = \binom{5}{4}(\frac{1}{3})^4(\frac{2}{3})^1 + \binom{4}{5}(\frac{1}{4})^4(\frac{3}{4})^1$$
$$3p5p = \binom{5}{3}(\frac{1}{3})^3(\frac{2}{3})^2 + \binom{5}{5}(\frac{1}{4})^5(\frac{3}{4})^0$$

9p:

$$5p4p = \binom{5}{5}(\frac{1}{3})^5(\frac{2}{3})^0 + \binom{5}{4}(\frac{1}{4})^4(\frac{3}{4})^1$$
$$4p5p = \binom{5}{4}(\frac{1}{3})^4(\frac{2}{3})^1 + \binom{5}{5}(\frac{1}{4})^5(\frac{3}{4})^0$$

10p:

$$5p5p = \binom{5}{5}(\frac{1}{3})^5(\frac{2}{3})^0 + \binom{5}{5}(\frac{1}{4})^5(\frac{3}{4})^0$$

$$P(x \leq 7) = \frac{23}{31104} = 7.39x10^{-4} \text{ ó } .074$$

8. El departamento de investigación de una fábrica de focos ha perfeccionado un recubrimiento para los filamentos capaz de prolongar la duración de aquellos. Para comparar las duraciones de los focos nuevos con la de los focos viejos, se seleccionan 10 focos fabricados con el nuevo procedimiento y 10 normales, y se forman parejas: un foco viejo con uno nuevo. Se somete los 10 pares a prueba, y se anota cuál de los focos de cada par falla primero, si el foco nuevo o el viejo. Suponiendo que el nuevo proceso realmente no prolonga la duración de los focos, ¿cuál es la probabilidad de que el foco viejo falle primero en por lo menos 9 de los 10 pares?
   Solución
   La variable es binomial.

$$P(F_v) = \binom{10}{9} \cdot \frac{1}{2}^9 \cdot \frac{1}{2}^1 + \binom{10}{10} \cdot \frac{1}{2}^{10} \cdot \frac{1}{2}^0$$
$$= \frac{11}{1024} = 1.07\,\%$$

9. Demuestre que:

   a) $P(A^C \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$
   Demostración

$$\begin{aligned} P(A^C \cap B) &= P(B \cap A^C) = P((B \cap A^C) \cup \varnothing) \\ &= P((B \cap A^C) \cup (B \cap B^C)) = P(B \cap (A^C \cup B^C)) \\ &= P(B \cap (A \cap B)^C) = P(B \backslash (A \cap B)^C) \\ &= P(B) - P(A \cap B) \end{aligned}$$

   b) Si $A \subseteq B$, entonces $P(B^C) \leq P(A^C)$
   Demostración

$$\begin{gathered} A \subseteq B \\ P(A) \leq P(B) \\ 1 - P(A^C) \leq 1 - P(B^C) \\ -P(A^C) \leq -P(B^C) \\ P(B^C) \leq P(A^C) \end{gathered}$$

   c) $P(A \cup B \cup C) = P(A \cup (B \backslash (A \cap B)) \cup (C \backslash (A \cap C)))$
   Demostración

$$\begin{gathered} P(A \cup (B \backslash (A \cap B)) \cup (C \backslash (A \cap C))) \\ = P(A \cup (B \cap (A \cap B)^C) \cup (C \cap (A \cap C))^C) \\ = P(A \cup (B \cap (A^C \cup B^C)) \cup (C \cap (A^C \cup C^C))) \\ = P(A \cup ((B \cap A^C) \cup (B \cap B^C)) \cup ((C \cap A^C) \cup (C \cap C^C))) \\ = P((A \cup (B \cap A^C) \cup (C \cap A^C)) = P(((A \cup B) \cap (A \cup A^C)) \cup C \cap A^C)) \\ = P((A \cup B) \cup (C \cap A^C)) = P((A \cup B \cup C) \cap (A \cup B \cup A^C)) \\ = P(A \cup B \cup C) \end{gathered}$$

   d) $P(A \cap B^C) = P(A) - P(A \cap B)$
   Demostración

$$\begin{gathered} P(A \cap B^C) = P((A \cap B^C) \cup \varnothing) \\ = P((A \cap B^C) \cup (A \cap A^C)) = P(A \cap (B^C \cup A^C)) \\ = P(A \cap (B \cap A)^C) = P(A \backslash (B \cap A)) \\ = P(A) - P(B \cap A) = P(A) - P(A \cap B) \end{gathered}$$

10. Dado un experimento en el que $P(A) = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{1}{3}, P(A \cap B) = \frac{1}{4}$, calcular:

a) $P(A^C \cap B^C)$
Solución

$$\begin{gathered} P(A^C \cap B^C) = P(A^C) + P(B^C) - P(A^C \cup B^C) \\ = 1 - P(A) + 1 - P(B) - P((A \cap B)^C) = 2 - P(A) - P(B-) - 1 + P(A \cap B) \\ = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{5}{12} \end{gathered}$$

b) $P(A^C \cup B^C)$
Solución

$$\begin{gathered} P(A^C \cup B^C) = P((A \cap B)^C) \\ = 1 - P(A \cap B) \\ = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \end{gathered}$$

c) $P(A^C \cap B)$
Solución

$$\begin{gathered} P(A^C \cap B) = P(B) - P(A \cap B) \\ = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12} \end{gathered}$$

11. Demuestre por inducción ue:

$$P(E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup \ldots \cup E_n) \leq \sum_{i=1}^{n} P(E_i)$$

Demostración

a) Probemos para $n = 1$:

$$P(E_1) \leq \sum_{i=1}^{1} P(E_i) = P(E_1)$$

b) Supongamos que $P(E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup \ldots \cup E_n) \leq \sum_{i=1}^{n} P(E_i)$ y probemos que $P(E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup \ldots \cup E_n \cup E_{n+1}) \leq \sum_{i=1}^{n+1} P(E_i)$: Sabemos que

$$\sum_{i=1}^{n+1} P(E_i) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i) + P(E_{n+1})$$

Así

$$P(E_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} P(E_i) - \sum_{i=1}^{n} P(E_i)$$

Luego

$$\begin{aligned}
&P(E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup \ldots \cup E_n \cup E_{n+1}) \\
&= P(E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup \ldots \cup E_n) + P(E_{n+1}) - P((E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup \ldots \cup E_n) \cap E_{n+1}) \\
&= P(E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup \ldots \cup E_n) + \sum_{i=1}^{n+1} P(E_i) - \sum_{i=1}^{n} P(E_i) \\
&\quad - P((E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup \ldots \cup E_n) \cap E_{n+1}) \\
&\leq P(E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup \ldots \cup E_n) + \sum_{i=1}^{n+1} P(E_i) - P(E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup \ldots \cup E_n) \\
&\quad - P((E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup \ldots \cup E_n) \cap E_{n+1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} P(E_i) - P((E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup \ldots \cup E_n) \cap E_{n+1})
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
P(E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup \ldots \cup E_n \cup E_{n+1}) &\leq \sum_{i=1}^{n+1} P(E_i) - P((E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup \ldots \cup E_n) \cap E_{n+1}) \\
&\leq \sum_{i=1}^{n+1} P(E_i)
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$P(E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup \ldots \cup E_n) \leq \sum_{i=1}^{n} P(E_i)$$

12. Se lanzan 3 dados. Si ninguna pareja muestra la misma cara, ¿cuál es la probabilidad de que haya un uno?

Solución

$$P(No-Rep) = \frac{6}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{4}{6} = \frac{120}{216}$$
$$P(1,X,X) = \frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{4}{6} = \frac{20}{216}$$
$$P(2,1,X) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{4}{6} = \frac{4}{216}$$
$$P(3,1,X) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{4}{6} = \frac{4}{216}$$
$$\ldots P(2-6,1,X) = \frac{20}{216}P(2,3,1) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{216}$$
$$P(2,4,1) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{216}$$
$$\ldots P(2-6,2-6,X,No-Rep) = 5\cdot P(2-6,2-6,1) = \frac{20}{216}$$
$$P(1\cap No-Rep) = P(1,X,X) + P(2-6,1,X) + P(2-6,2-6,X,No-Rep) = \frac{60}{216}$$
$$P(1|No-Rep) = \frac{P(1\cap No-Rep)}{P(No-Rep)} = \frac{60}{120} = 50\,\%$$

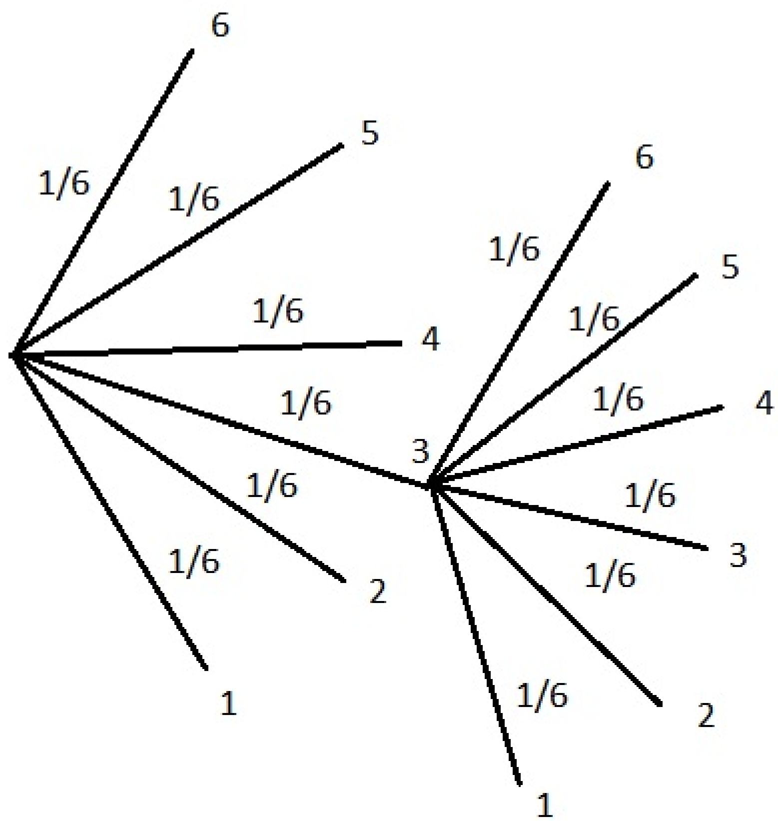
13. En una fábrica de pernos, las máquinas A, B C producen, respectivamente, el 25, 35 y 40 por ciento del total. En esta producción, el 5, 4 y 2 por ciento son pernos defectuosos. Se toma al azar un perno de la producción total y se le encuentra defectuoso. ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido producido por B?
Solución

$$P(Def) = 0.25\cdot 0.05 + 0.35\cdot 0.04 + 0.40\cdot 0.02 = \frac{69}{2000}$$
$$P(B\cap Def) = 0.35\cdot 0.04 = \frac{28}{2000}$$
$$P(B|Def) = \frac{P(B\cap Def)}{P(Def)} = \frac{28}{69} = 40.57\,\%$$

14. En una escuela, 1 % del estuciantado participa en un programa atlético intercolegial; de este grupo, 10 % tiene promedio de 7 o más, en tanto que el 20 % del resto del estudiantado tienen promedio de 7 o más. ¿Qué proporción total del estudiantado tiene un nivel de 7 o más? Si se selecciona 1 estudiante al azar de entre el estudiantado y se ve que tiene un nivel de 7.13, ¿cuál es la probabilidad de que participe en el programa atlético intercolegial?
Solución

$$P(7^+) = \frac{P(pic\cap 7^+) + p(no-pic\cap 7^+)}{P(\Omega)} = \frac{\frac{10}{100}\cdot\frac{1}{100} + \frac{20}{100}\cdot\frac{99}{100}}{1} = \frac{1990}{10000} = 19.9\,\%$$
$$P(pic|7^+) = \frac{P(pic\cap 7^+)}{P(7^+)} = \frac{\frac{1}{10}\cdot\frac{10}{100}}{\frac{1990}{10000}} = \frac{10}{1990} = 0.502\,\%$$

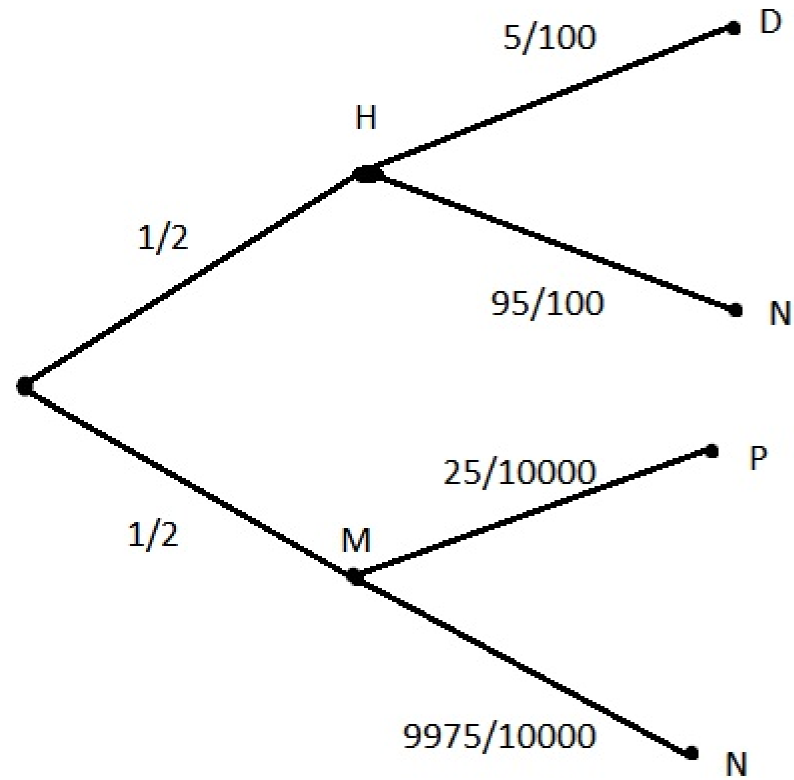
15. Se tira un par de dados. Si la suma de los dos es cuando menos igual a 7. Calcule la probabilidad de que sea igual a 9.
Solución



$$P(7 \geq) = \frac{1}{6}[\frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6)] = \frac{21}{36}$$
$$P(9) = \frac{4}{36}$$
$$P(9|7 \geq) = \frac{P(9|7 \geq)}{P(7 \geq)} = \frac{\frac{4}{36}}{\frac{21}{36}} = \frac{4}{21} \text{ ó } 19.04\,\%$$

16. Supongamos que 5 de cada 100 hombres y 25 de cada 10000 sufren daltonismo.
Una persona daltónica se escoge aleatoriamente.
¿Cuál es la probabilidad de que sea hombre? (Supongamos que hay el mismo número de hombres que de mujeres)

Solución



$$P(D) = (\frac{1}{2})(\frac{5}{100}) + (\frac{1}{2})(\frac{25}{10000}) = \frac{525}{20000}$$
$$P(H|D) = \frac{P(H \cap D)}{P(D)} = \frac{\frac{500}{20000}}{\frac{525}{20000}} = \frac{500}{525} = \frac{20}{21} \text{ ó } 95.23\,\%$$

17. Se escoge al azar un punto entre el 0 y el 1 en el eje de las x dentro del plano(x,y).
A continuación se dibuja un circulo con centro en el origen y radio determinado por el punto escogido.
Calcula la probabilidad de que el área del circulo sea menor que $\pi/2$
Solución

$$\pi r^2 = \frac{\pi}{2}$$
$$r = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$p(A) = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ ó } 70.71\,\%$$

18. Se rompe una regla de 12 pulgadas al azar en 2 partes a lo largo.
¿Cuál es la probabilidad de que la longitud de la parte más larga sea al menos el doble

de la corta?
Solución

$$x + y = 12$$
$$y = \frac{x}{2}$$
$$x + \frac{x}{2} = 12$$
$$x = 8$$
$$L = 12 - 8 = 4 * 2 = 8$$
$$P(L) = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

19. Si la función de probabilidad de la variable aleatoria y esta dada por:

$$f(y) = \begin{cases} \frac{1}{8}(y+1) & 2 \leq y \leq 4 \\ \\ 0 & otro \end{cases}$$

Solución
La variable es continua

$$P(\Omega) = 1$$

$$\int_2^4 F(y)\,dy = \int_2^4 \frac{1}{8}(y+1)\,dy = \frac{1}{8}\int_2^4 (y+1)\,dy =$$

$$\frac{1}{8}(\frac{y^2}{2} + y)|_2^4 = \frac{1}{8}[(8+4) - (2+2)]\frac{1}{8}(8) = 1$$

Determine

a) P(y < 3.2)

b) P(2.9 < y < 3.1)

a)

$$\frac{1}{8}\int_2^{3.2} (y+1)\,dy = \frac{1}{8}(\frac{y^2}{2} + y)|_2^3.2 = \frac{1}{8}[(5.12 + 3.2) - (2+2)] = \frac{1}{8}[8.32 - 4]$$

$$= \frac{4.32}{8} = 54\,\%$$

b)

$$\frac{1}{8}\int_{2.9}^{3.2}(y+1)\,dy = \frac{1}{8}(\frac{y^2}{2}+y)|_{2}.9^3.2 = \frac{1}{8}[(5.12+3.2)-(4.205+2.9)]$$

$$= \frac{1}{8}[1.215] = 15.1875\,\%$$

20. Si la función de distribución de la variable aleatoria x está dada por

$$f(y) = \begin{cases} \frac{c}{\sqrt{x}} & 0 \leq x \leq 4 \\ \\ 0 & otro \end{cases}$$

Determine el valor de c

Solución
La variable es continua

$$P(\Omega) = 1$$

$$\int_0^4 \frac{c}{\sqrt{x}}\,dx = c\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

"No se puede integrar"

$$\frac{1}{\sqrt{0}}$$

No existe

21. La cantidad real de café (en gramos) en un recipiente de 230 gr llenado por cierta máquina es una variable aleatoria cuya densidad de probabilidad está dada por

$$f(y) = \begin{cases} 0 & x \leq 227.5 \\ \\ \frac{1}{5} & 227.5 < x < 232.5 \\ \\ 0 & x \geq 232.5 \end{cases}$$

Determine la probabilidad de que en un recipiente de 230gr llenado por esta máquina contendrá cuando mucho 228.65gr de café
Solución
La variable es continua

$$P(\Omega) = 1$$

$$\int_{227.5}^{232.5}\frac{1}{5}\,dx = \frac{1}{5}\int_{227.5}^{232.5}\frac{1}{5}\,dx = \frac{1}{5}x|_{227.5}^{232.5}$$

$$\frac{5}{5} = 1$$

$$\int_{227.5}^{228.65} \frac{1}{5}\, dx = \frac{1}{5} x|_{227.5}^{228.65} = \frac{1}{5}(228.65 - 227.5)$$

$$= \frac{1}{5}(1.15) = 0.23 \text{ ó} 23\,\%$$

22. El retraso o adelanto (en minutos) de un vuelo de Guadalajara a Monterrey es una variable aleatoria cuya densidad de probabilidad esta dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{288}(36 - x^2) & si \quad -6 \leq x \leq 6 \\ \\ 0 & , \qquad DOM \end{cases}$$

Donde los valores negativos son indicativos de que el vuelo llega adelantado y los valores positivos señalan que el vuelo llega retrasado. Determine la probabilidad de que uno de estos vuelos llegará cuando menos dos minutos antes.
Solución
La variable es aleatoria continua.

$$P(\Omega) = 1$$

$$\frac{1}{288}\int_{-6}^{6}(136 - x^2)dx = \frac{1}{288}(36x - \frac{x^3}{3})\bigg|_{-6}^{6} = \frac{1}{288}(216 - 72 + 216 - 72)$$

$$= \frac{1}{288}(288) = 1$$

$$\frac{1}{288}\int_{-6}^{6}(136 - x^2)dx = \frac{1}{288}(36x - \frac{x^3}{3})\bigg|_{-2}^{-6} = \frac{1}{288}(-72 + \frac{8}{3} + 216 - 72) = \frac{1}{288}(\frac{224}{3}) = 0.2592$$

23. Si la ganancia de un contratista en una obra de construcción puede considerarse como una variable aleatoria que tiene la densidad de probabilidad:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{18}(x + 1) & si \quad -1 \leq x \leq 5 \\ \\ 0 & , \qquad DOM \end{cases}$$

Donde las utilidades se expresan en miles de pesos, ¿cuál es la utilidad esperada?
Solución

La variable es aleatoria continua.

$$\frac{1}{18}\int_{-1}^{5}(x+1)dx = \frac{1}{18}(\frac{x^2}{2}+x)\Big|_{-1}^{5} = \frac{1}{18}(\frac{25}{2}+5-\frac{1}{2}+1) = 1$$

$$\mu = \frac{1}{18}\int_{-1}^{5}x(x+1)dx = \frac{1}{18}(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2})\Big|_{-1}^{5} = 3$$

Por lo tanto, la utilidad esperada es de 3.

24. La probabilidad de que la Sra. Matínez venda una cadena de oro con una ganancia de \$3000 es: $\frac{3}{20}$. La probabilidad de que la venda y obtenga una ganancia de \$1500 es de $\frac{7}{20}$, la probabilidad de que salga a mano es $\frac{7}{20}$ y la probabilidad de que pierda \$1500 es $\frac{3}{20}$. ¿Cuál es su ganancia esperada?
Solución
La variable es aleatoria discreta, así:

$$\mu = \sum_{i=0}^{n=4} x_i f(x_i) = 3000 * \frac{3}{20} + 1500 * \frac{7}{20} + 0 * \frac{7}{20} - 1500 * \frac{3}{20} = 750$$

Por lo tanto, su ganancia esperada es de \$750.

25. El tiempo que tardan en atender a un individuo en una cafetería es una variable aleatoria con la densidad de probabilidad:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}(e^{-\frac{x}{4}}) & si \quad x > 0 \\ \\ 0 & , \quad DOM \end{cases}$$

Obtenga el valor esperado de esta distribución.
Solución
La variable es aleatoria continua.

$$P(\Omega) = \int_{0}^{\infty}(\frac{1}{4}(e^{-\frac{x}{4}}))dx = -e^{-\frac{x}{4}}\Big|_{0}^{b} = \lim_{b\to\infty} -e^{-\frac{b}{4}} - (-e^0) = 1$$

$$\mu = \int_{0}^{\infty}(\frac{1}{4}x(e^{-\frac{x}{4}}))dx = \frac{1}{4}(e^{-\frac{x}{4}})(-4x-16)\Big|_{0}^{b} = \lim_{b\to\infty} -e^{-\frac{b}{4}}(-4b-16) - (-e^0)(-16) = 4$$

Por lo tanto el valor esperado es 4.

26. El número de horas de operación satisfactoria que proporciona un televisor Sonny es una variable aleatoria de z cuya función de probabilidad es:

$$f(z) = \begin{cases} 0.0001e^{-0.0001z} & si \quad z > 0 \\ \\ 0 & , \quad DOM \end{cases}$$

Obtenga el valor esperado de esta distribución.
Solución
La variable es aleatoria continua.

$$P(\Omega) = \int_0^\infty (0.0001e^{-0.0001z})dz = -e^{-0.0001z}\Big|_0^b = \lim_{b\to\infty} -e^{-0.0001b} - (-e^0) = 1$$

$$\mu = \int_0^\infty (0.0001ze^{-0.0001z})dz = \frac{e-\frac{x}{10000}(-10000x - 100000000)}{10000}\Bigg|_0^b$$

$$= \lim_{b\to\infty} \frac{e-\frac{b}{10000}(-10000b - 100000000)}{10000} - \frac{e-\frac{0}{10000}(-10000(0) - 100000000)}{10000} = 10000$$

Por lo tanto, el valor esperado es 10 000.

2. Lista 2

1. Se sabe que 10 % de los vasos producidos por cierta máquina tienen algún defecto. Si se seleccionan 10 vasos por ésta máquina, ¿cuál es la probabilidad de que ninguno este defectuoso?, ¿cuántos se esperaría encontrar defectuosos?
Solución
La variable tiene una distribución binomial

$$n = 10$$
$$p = 0.1$$
$$q = 0.9$$
$$P(x = 0) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = \binom{10}{0}(0.1)^0(0.9)^{10-0} = 0.3486784401 \textit{ o } \textit{34.86 \%.}$$

$$\mu = np = (10)(0.1) = 1$$

2. Un laberinto para ratas tiene un corredor recto, y al final una bifurcación; en la bifurcación, la debe ir a la derecha o a la izquierda. Suponer que se colocan 10 ratas, en el laberinto, de una en una. Si cada rata toma al azar una de las dos alternativas del camino. ¿Cuál es la probabilidad de que cuando menos 9 vayan al mismo lado?
Solución
La variable tiene una distribución binomial

$$n = 10$$
$$p = 0.5$$
$$q = 0.5$$
$$P(x = 9) = \binom{10}{9}(0.5)^x(0.5)^{n-x} + \binom{10}{10}(0.5)^x(0.5)^{n-x} = 0.0107421875 \textit{ o } \textit{1.07 \%.}$$

3. En una "prueba de tortura" se enciende y se apaga un interruptor eléctrico hasta que este falla. Si la probabilidad es 0.001 de que el interruptor falle en cualquier momento en que este encendido o apagado, cual es la probabilidad de que el interruptor no falle durante las primeras 800 veces que se enciende o apague?
Solución
La variable es de Poisson

$$n = 800$$
$$p = 0.001$$
$$q = 0.999$$
$$\lambda = np = 800(0.001) = 0.8$$
$$P(x = 0) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = \frac{(0.8)^0 e^{-\lambda}}{0!} = \frac{1e^{-.8}}{1} = 0.4493289641 \text{ ó } 44.93\,\%$$

4. Un ingeniero de control de calidad inspecciona una muestra tomada al azar de dos calculadoras portátiles de cada lote de 18 unidades que llega y acepta el lote si ambas están en buenas condiciones de funcionamiento; en caso contrario, se inspecciona todo el lote y el costo se carga al distribuidos. ¿Cuál es la probabilidad de que este lote sea aceptado sin mayor inspección si contiene...

   a) Cuatro calculadoras en mal estado?
   Solución
   La variable es de hipergeometrica

$$N = 18$$
$$n = 2$$
$$k = 18 - 4 = 14$$
$$x = 2$$
$$P(2) = \frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{14}{2}\binom{4}{0}}{\binom{18}{2}} = \frac{91}{153} = 0.5947712418 \text{ ó } 59.47\,\%$$

   b) Ocho calculadoras en malas condiciones de funcionamiento?
   Solución
   La variable es de hipergeometrica

$$N = 18$$
$$n = 2$$
$$k = 18 - 8 = 10$$
$$x = 2$$
$$P(2) = \frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{10}{2}\binom{8}{0}}{\binom{18}{2}} = \frac{45}{153} = \frac{5}{17} = .294117647 \text{ ó } 29.41\,\%$$

5. Un examen de opción múltiple consta de ocho preguntas y tres respuestas a cada pregunta. Si un estudiante responde a cada pregunta tirando un dado y marca la primera respuesta si obtiene un 1 o un 2, la segunda respuesta si obtiene un 3 o un 4, y la tercera respuesta si obtiene un 5 o un 6, ¿Cuál es la probabilidad de que logre exactamente cuatro respuestas correctas?
   Solución
   La variable es de binomial

$$n = 8$$
$$p = \frac{1}{3}$$
$$q = \frac{2}{3}$$
$$P(4) = \binom{n}{x}(p)^x(q)^{n-x} = \binom{8}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^4 = 0.1707056851 \text{ ó } 17.07\,\%$$

6. Si el 40 % de los alumnos se volvieran agresivos en un periodo de 2 horas después de haber ingerido algún liquido en el Sportaco, determine la probabilidad de que exactamente seis de los 15 alumnos que han ingerido algún líquido se vuelvan agresivos en el periodo de 2 horas.
Solución
La variable es de binomial

$$
\begin{aligned}
n &= 15 \\
p &= 0.4 \\
q &= 0.6 \\
P(6) = \binom{n}{x}(p)^x(q)^{n-x} &= \binom{15}{6}(0.4)^6(0.6)^9 = .2065976053 \text{ ó } 20.65\,\%
\end{aligned}
$$

7. Un jurado de 7 jueces debe decidir entre 2 finalistas quien es la ganadora de un concurso de belleza, para lo cual bastara una mayoría de los jueces. Suponga que 4 jueces voten por María y que los otros 3 voten por Susana. Si se seleccionan al azar 3 jueces y se les pregunta por quien van a votar, ¿cuál es la probabilidad de que la mayoría de los jueces de la muestra estén a favor de María?
Solución
La variable es de hipergeometrica

$$
\begin{aligned}
N &= 7 \\
n &= 3 \\
k &= 4 \\
x &= 2, 3 \\
p(2,3) = \sum_{x=2}^{3}\frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}} &= \frac{\binom{4}{2}\binom{3}{1}}{\binom{7}{3}} + \frac{\binom{4}{3}\binom{3}{0}}{\binom{7}{3}} = \frac{22}{35} = 0.6285714286 \text{ ó } 62.85\,\%
\end{aligned}
$$

8. Se ha observado que el transito promedio de automóviles en determinado punto de un camino rural es de 3 por hora. Suponga que los instantes en que pasan los mismos son independientes, haciendo que x represente el numero de los que pasan por este punto en un intervalo de 20 minutos, calcule la probabilidad de $P(x > 2)$
Solución
La variable es de Poisson

$$
\begin{aligned}
\lambda &= np = 1 \qquad \text{(cada 20 min)} \\
x &> 2 \\
p(x>2) = \sum_{x=3}^{\infty}\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} &= \sum_{x=3}^{\infty}\frac{1^x e^{-1}}{x!} = 1 - \sum_{x=0}^{2}\frac{1^x e^{-1}}{x!} = 1 - \left(\frac{e^{-1}}{0!} + \frac{e^{-1}}{1!} + \frac{e^{-1}}{2!}\right) \\
&= 0.08030139707 \text{ ó } 8.03\,\%
\end{aligned}
$$

9. En determinada planta manufacturera han ocurrido accidentes a razón de 1 cada 2 meses. suponiendo que ocurren en forma independiente, Cual es el numero esperado de

accidentes al año?
Solución
La variable es de Poisson

$$\lambda = 1 \qquad \text{(cada 2 meses)}$$

$$\lambda = \frac{(1 \text{ accidentes})(12 \text{ meses})}{2 \text{ meses}} = 6 \text{ accidentes}$$

10. En Chilpancingo, la incompatibilidad se da como la razón o motivo legal en el 70 % de todos los casos de divorcio. Obtenga la probabilidad de que 5 de los 6 siguientes divorcios archivados de esta ciudad argumentan incompatibilidad como motivo principal.
Solución
La variable es binomial

$$n = 6$$
$$p = 0.70$$
$$q = 0.30$$
$$P(5) = \binom{6}{5}(0.7)^5(0.3)^1 = 0.302526 \text{ ó } 30.35\,\%$$

11. Un psicólogo asevera que sólo el 50 %de todos los alumnos del último semestre de vocacional, capaces de desempeñar trabajos a nivel superior, asisten en realidad al nivel superior. Suponiendo verdadera esta afirmación, obtenga las probabilidades de que, entre 18 alumnos capaces de desempeñar trabajos a nivel superior, exactamente 10 asistan a ESCOM.
Solución
No se puede resolver, pues no se puede saber cuántos de los que están en superior, están en ESCOM.

12. Suponga que el 40 % de los empleados a destajo de la empresa ACME están a favor de tener representación sindical y que se entrevista a una muestra aleatoria de 10 de ellos y se les solicita una respuesta anónima.
¿Cuál es la probabilidad de que la mayoria de los que respondan estarán a favor de la representación sindical?
Solución
La variable es de poisson

$$\lambda = np = (10)(0.4) = 4$$
$$x > 6$$
$$P(x) = 1 - \sum_{x=0}^{5} \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = 1 - \sum_{x=0}^{5} \frac{4^x e^{-4}}{x!} = 0.214869613 \text{ ó } 21.48\,\%$$

13. Un profesor de ESCOM selecciona al azar a 3 alumnos de un grupo de 10 para aprobarlos. Suponiendo que el semestre anterior aprobó cuatro de esos 10 alumnos, determine

la probabilidad de que exactamente 2 de los 3 alumnos hayan aprobado en el semestre anterior.
Solución
La variable tiene una distribución hipergeométrica

$$N = 10$$
$$n = 3$$
$$k = 4$$
$$x = 2$$
$$P(x = 2) = \frac{\binom{4}{2}\binom{6}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{3}{10} = 0.3 \text{ o } 30\,\%.$$

14. En promedio, de cada 500 cervezas servidas en el Sportaco dos salen defectuosas, cuál es la probabilidad de que en un lote especifico de 100 cervezas no haya ninguna defectuosa?
Solución

$$n = 100 \text{ cervezas}$$
$$p = \frac{1}{250} \text{ (Regla de tres)}$$
$$\lambda = np = \frac{2}{5}$$
$$P(x = 0) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = \frac{(0.4)^0 (e)^{-0.4}}{0!} = 0.670320046 \text{ ó } 67.03\,\%$$

24. Supóngase que la cantidad real de café instantáneo colocada por una máquina llenadora en frascos de "6 onzas.[es] ua variable aleatoria que tiene distribución normal con varianza 0.0025 de onza. Si sólo el 3 % de los frascos va a contener menos de 6 onzas de café, ¿cuál debe ser el contenido medio de estos frascos?
Solución
La variable es de distribución normal.

a) Si la probabilidad de que el frasco contenga menos de 6 onzas de café es de 3 %, entonces:

$$\int_{-\infty}^{x} f(x)dx = 0.03 = F(x) - F(-\infty) = F(x) - 0$$

b) Obervando las tablas para el área bajo la curva de la función de distribución normal estándar, se obtiene que x = -0.52, pero$x = Z_{max}$, entonces

$$Z_{max} = \frac{b - \mu}{\sigma}$$
$$-0.52 = \frac{6 - \mu}{0.05}$$
$$\mu = 6.026$$

25. Si el 23 % de todos los pacientes con presión sanguínea elevada tienen efectos colaterales nocivos por la ingestión de cierto medicamento, utilie la aproximación normal para obtener la probabilidad de que entre 120 de estos pacientes tratados con este medicamento unas 32 presentarán efectos colaterales nocivos

Solución
La variable es de distribución normal.

a) Determinar la media y desviación estándar:

$$\mu = np = (120)(0.23) = 27.6$$
$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{npq} = \sqrt{(120)(0.23)(0.77)} = \pm 4.609989$$

b) Calcular la probabilidad por aproximación normal. Calculando $P(31.5 \leq x \leq 32.5)$ en lugar de $P(32 \leq x \leq 32)$

$$P(x = 32) = P(31.5 \leq x \leq 32.5)$$

c) Calcular Z_{max} y Z_{min}:

$$Z_{max} = \frac{32.5 - 27.6}{4.609} = 1.063137$$
$$Z_{min} = \frac{31.5 - 27.6}{4.609} = 0.846117$$

$$\Rightarrow P(31.5 \leq x \leq 32.5) = F(1.063137) - F(0.846117)$$
$$= 0.8554276993 - 0.7995458057 = 0.0558818936$$
$$P(31.5 \leq x \leq 32.5) = 0.0558818936 \text{ ó } 0.558\,\%$$

26. Se ha ajustado el proceso de fabricación de un tornillo de precisión de manera que la longitud promedio de los tornillos sea de 13cm. Por supuesto no todos los tornillos tiene una longitud exacta de 13cm, debido a fuentes aleatorias de variabilidad. La desviación estaándar de la longitud de los tornillos de 0.1cm y se sabe que la distribución de las longitudes tiene una forma normal. Determine la probabilidad de que un tornillo elegindo al azar tenga una longitud de entre 13.0 y 13.2cm.

Solución
La variable es de distribución normal.

a) Calcular la probabilidad $P(13 \leq x \leq 13.2)$

$$\mu = 13$$
$$\sigma = 0.1$$
$$Z_{max} = \frac{13.2 - 13}{0.1} = 2$$
$$Z_{min} = \frac{13 - 13}{0.1} = 0$$
$$\Rightarrow P(13 \leq x \leq 13.2) = P0 \leq x \leq 2) = F(2) - F(0)$$
$$0.9772498670 - 0.4999999990 = 0.477249868$$

$$P(13 \leq x \leq 13.2) = 0.4772 \text{ ó } 47.72\,\%$$

27. El número promedio de solicitudes de servicio que se reciben en un departamento de reparación de maqunaria por cada turno de 8 horas es de 10. Deterine la probabilidad de que se reciban más de 15 solicitides en un turno de 8 horas elegido al azar.

Solución
La distribución es de Poisson.

a) Calcular la probabilidad $P(x > 15)$

$$\lambda = 10$$
$$P(x > 15) = \sum_{x=15}^{\infty} \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$
$$= 1 - \sum_{x=0}^{15} \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$
$$= 1 - \sum_{x=0}^{15} \frac{(10)^x e^{-10}}{x!}$$
$$= 0.0487404033 \text{ ó } 4.87\,\%$$

28. Un embarque de 10 máquinas incluye una defectuosa. Si se eligen 7 máquinas al azar de ese embarque, ¿cuál es la probabilidad de que ningua de las 7 esté defectuosa?

Solución
La distribución es hipergeométrica

a) Calcular la probabilidad $P(0)$

$$N = 10$$
$$n = 7$$
$$K = 9$$
$$x = 7$$

$$P(0) = \frac{\binom{9}{7}\binom{1}{0}}{\binom{10}{7}} = \frac{3}{10} \text{ ó } 30\,\%$$

29. Suponga que la proporción de máquinas defectuosas en una operación de ensamble es de 0.01 y que se incluye una muestra de 200 de ellas en un embarque específico, ¿cuál es la probabilidad de que cuando mucho 3 máquinas estén defectuosas? **Solución**
La distribución es de Poisson

   a) Calcular la probabilidad $P(x < 4)$

$$\lambda = np = 200(0.01) = 2$$
$$Px < 4() = \sum_{x=0}^{3} \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$
$$= \sum_{x=0}^{3} \frac{(2)^x e^{-2}}{x!} = 0.8571234605 \text{ ó } 85.71\,\%$$

30. Un promedio de 0.5 clientes por minuto llega a una caja de salida en un almacén, ¿cuál es la probabilidad d eque lleguen 5 o más clientes en un intervalo dado de 5 minutos. **Solución**
La distribución es de Poisson

   a) Calcular la probabilidad $P(x < 4)$

$$\lambda = np = (0.5)(5) = 2.5$$
$$Px < 4() = \sum_{x=5}^{\infty} \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$
$$= \sum_{x=0}^{3} \frac{(2.5)^x e^{-2.5}}{x!} = 0.1088219811 \text{ ó } 10.88\,\%$$

31. Un promedio de 0.5 clientes por minuto llega a una caja de salida en un almacen. ¿Cuál es la probabilidad de que lleguen más de 20 clientes a la caja en un intervalo especifico

de media hora?

Solución:
X es una variable con distribución exponencial.
Datos:
- $P = 0.5xmin$
- $n = \frac{1}{2}hora = 30min.$
- $\lambda = np = (0.5)(30) = 15$
- $x > 20$

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} = 15e^{-15x}$$

$$\mu = \int_{20}^{\infty} xf(x) = \lim_{b\to\infty} \int_{20}^{b} x15e^{-15x}dx = \lim_{b\to\infty} x(-e^{-15x})|_{20}^{b} - \int_{20}^{b} -e^{-15x}dx$$

$$\mu = \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{x}{e^{15x}} - \frac{1}{15e^{15x}}\right)|_{20}^{b}$$

$$\mu = \lim_{n\to\infty} \left(-\frac{b}{e^{15b}} - \frac{1}{15e^{15b}} + \frac{20}{e^{(15)(20)}} + \frac{1}{e^{(15)(20)}}\right) = 20 + \frac{1}{15} = 20.067$$

Entonces,

$$P(x, t = \tfrac{1}{2}) = \int_0^{\frac{1}{2}} \tfrac{301}{15} e^{-\frac{301}{15}} = 0.999 \text{ ó } 99.9\,\%$$

32. Determine la media y la varianza para todas las distribuciones vistas en clase. Media Poisson Sea x una variable aleatoria con distribución de Poisson

$$E[x] = \sum_{j=0}^{\infty} jp(1-p)^j$$

$$E[x] = p(1-p)\sum_{j=0}^{\infty} j(1-p)^{j-1}$$

$$E[x] = -p(1-p)\sum_{j=0}^{\infty} \frac{d}{dp}(1-p)^j$$

Ya que una serie de potencias puede ser diferenciada término a término, se sigue que

$$E[x] = -p(1-p)\frac{d}{dp}\sum_{j=0}^{\infty}(1-p)^j$$

Utilizando la fórmula para una progresión geométrica, vemos que

$$E[x] = -p(1-p)\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{p}\right) = -p(1-p)\left(\frac{-1}{p^2}\right)$$

Lo que nos da como resultado

$$E[x] = \frac{1-p}{p}$$

Media Distribución Binomial Sea x una variable aleatoria con una distribución binomial Para $n = 1$ $\;x$ asume los valores 0 y 1 con probabilidades $1-p$ y p respectivamente

$$E[x] = 0p(x=0) + 1p(x=1) = p$$

Calculando para cualquier $n \geq 1$

$$E[x] = \sum_{j=0}^{\infty} j \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j}$$

Para calcular esto observamos que

$$j\binom{n}{j} = \frac{jn!}{j!(n-j)!}$$

$$j\binom{n}{j} = \frac{n(n-1)!}{(j-1)![(n-1)-(j-1)]!}$$

$$j\binom{n}{j} = n\binom{n-1}{j-1}$$

Entonces

$$E[x] = n\sum_{j=0}^{n} \binom{n-1}{j-1} p^j (1-p)^{n-j}$$

Si $i = j-1$ vemos que

$$E[x] = np\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} p^i (1-p)^{n-i-1}$$

Por el teorema del binomio

$$\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} p^i (1-p)^{n-i-1} = [p + (1-p)^{n-1}] = 1$$

Por lo que

$$E[x] = np$$

3. Lista 3

1. Las siguientes son las puntuaciones de una prueba de IQ obtenidas por una muestra aleatoria de 18 estudiantes de ESCOM:

$$130,\ 122,\ 119,\ 142,\ 136,\ 127,\ 120,\ 152,\ 141,$$
$$132,\ 127,\ 118,\ 150,\ 141,\ 133,\ 137,\ 129,\ 142$$

Determine un intervalo de confianza del 93 % para la puntuación promedio de todos los estudiantes de ESCOM.

Solución:

$$\overline{x} = \sum xf(x) = (118)\left(\frac{1}{18}\right)+(119)\left(\frac{1}{18}\right)+(120)\left(\frac{1}{18}\right)+(122)\left(\frac{1}{18}\right)+(127)\left(\frac{2}{18}\right)+(129)\left(\frac{1}{18}\right)+$$
$$(130)\left(\frac{1}{18}\right)+(132)\left(\frac{1}{18}\right)+(133)\left(\frac{1}{18}\right)+(136)\left(\frac{1}{18}\right)+(137)\left(\frac{1}{18}\right)+(141)\left(\frac{2}{18}\right)+(142)\left(\frac{2}{18}\right)+$$
$$(150)\left(\frac{1}{18}\right)+(152)\left(\frac{1}{18}\right) = 133.22$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$
$$\sigma^2 = E[x^2] - \overline{x}^2$$

$$E[x^2] = \sum x^2 f(x) = (118)^2\left(\frac{1}{18}\right)+(119)^2\left(\frac{1}{18}\right)+(120)^2\left(\frac{1}{18}\right)+(122)^2\left(\frac{1}{18}\right)+(127)^2\left(\frac{2}{18}\right)+$$
$$(129)^2\left(\frac{1}{18}\right)+(130)^2\left(\frac{1}{18}\right)+(132)^2\left(\frac{1}{18}\right)+(133)^2\left(\frac{1}{18}\right)+(136)^2\left(\frac{1}{18}\right)+(137)^2\left(\frac{1}{18}\right)+(141)^2\left(\frac{2}{18}\right)$$
$$(142)^2\left(\frac{2}{18}\right)+(150)^2\left(\frac{1}{18}\right)+(152)^2\left(\frac{1}{18}\right) = 19096.66$$

Entonces, $\sigma^2 = 19096.66 - (133.22)^2 = 1349.09$ y $\sigma = \sqrt{1349.09} = \pm 36.73$
Por lo tanto, tenemos los elementos para poder hacer un intervalo, donde:
- $\overline{x} = 133.22$
- $\sigma = 16907.25$
- $n = 18$
- $\alpha = 93$
Entonces:

$$Z_{\frac{100-93}{2}} = Z_{\frac{7}{2}} = Z_{0.035} = -1.81$$
$$Z_{0.965} = 1.81$$

Por lo tanto, el intervalo está dado por:

$$\left(133.22-(1.81)\left(\frac{36.73}{\sqrt{18}}\right)\leq\mu\leq 133.22+(1.81)\left(\frac{36.73}{\sqrt{18}}\right)\right)\Rightarrow(117.53\leq\mu\leq 148.86)\Rightarrow(117,149)$$

2. Un ingeniero civil quiere medir la potencia comprensiva de dos tipos diferentes de concreto. Una muestra aleatoria de 10 especimenes del primer tipo dio los datos siguientes:

Tipo 1	3250,	3268,	4302,	3184,	3266,
	3297,	3332,	3502,	3064,	3116.

mientras que una muestra de 10 especimenes del segundo tipo dio los resultados siguientes:

Tipo 2	3094,	3106,	3004,	3066,	2984,
	3124,	3316,	3212,	3380,	3018.

Determine un intervalo de confianza del 92 % para la diferencia entre las medias.

Solución:
Para el tipo 1:

$$\overline{x_1}=\sum x_1 f(x_1)=(3250)\left(\frac{1}{10}\right)+(3268)\left(\frac{1}{10}\right)+(4302)\left(\frac{1}{10}\right)+(3184)\left(\frac{1}{10}\right)+(3266)\left(\frac{1}{10}\right)$$

$$+(3297)\left(\frac{1}{10}\right)+(3332)\left(\frac{1}{10}\right)+(3502)\left(\frac{1}{10}\right)+(3064)\left(\frac{1}{10}\right)+(3116)\left(\frac{1}{10}\right)=3358.1$$

Entonces

$$\sigma_1=\sqrt{\sigma_1^2}$$
$$\sigma_1^2=E[x_1^2]-\overline{x_1}^2$$

$$E[x_1^2]=\sum x_1^2 f(x_1)=(3250)^2\left(\frac{1}{10}\right)+(3268)^2\left(\frac{1}{10}\right)+(4302)^2\left(\frac{1}{10}\right)+(3184)^2\left(\frac{1}{10}\right)+(3266)^2\left(\frac{1}{10}\right)$$

$$+(3297)^2\left(\frac{1}{10}\right)+(3332)^2\left(\frac{1}{10}\right)+(3502)^2\left(\frac{1}{10}\right)+(3064)^2\left(\frac{1}{10}\right)+(3116)^2\left(\frac{1}{10}\right)=11388812.9$$

Entonces, $\sigma_1^2=11388812.9-(3358.1)^2=111977.29$ y $\sigma_1=\sqrt{111977.29}=\pm 334.63$

Para el tipo 2:

$$\overline{x_2} = \sum x_2 f(x_2) = (3094)\left(\frac{1}{10}\right)+(3106)\left(\frac{1}{10}\right)+(3004)\left(\frac{1}{10}\right)+(3066)\left(\frac{1}{10}\right)+(2984)\left(\frac{1}{10}\right)$$

$$+(3124)\left(\frac{1}{10}\right)+(3316)\left(\frac{1}{10}\right)+(3212)\left(\frac{1}{10}\right)+(3380)\left(\frac{1}{10}\right)+(3018)\left(\frac{1}{10}\right) = 3130.4$$

Entonces

$$\sigma_2 = \sqrt{\sigma_2^2}$$
$$\sigma_2^2 = E[x_2^2] - \overline{x_2}^2$$

$$E[x_2^2] = \sum x_2^2 f(x_2) = (3094)^2\left(\frac{1}{10}\right)+(3106)^2\left(\frac{1}{10}\right)+(3004)^2\left(\frac{1}{10}\right)+(3066)^2\left(\frac{1}{10}\right)+(2984)^2\left(\frac{1}{10}\right)$$

$$+(3124)^2\left(\frac{1}{10}\right)+(3316)^2\left(\frac{1}{10}\right)+(3212)^2\left(\frac{1}{10}\right)+(3380)^2\left(\frac{1}{10}\right)+(3018)^2\left(\frac{1}{10}\right) = 9815360$$

Entonces, $\sigma_2^2 = 9815360 - (3130.4)^2 = 15955.84$ y $\sigma_2 = \sqrt{15955.84} = \pm 126.31$

Por lo tanto, tenemos los elementos para poder hacer un intervalo, donde:
- $\overline{x_1} = 3358.1$
- $\overline{x_2} = 3130.4$
- $\sigma_1 = 334.63$
- $\sigma_2 = 126.31$
- $n = 10$
- $\alpha = 92$

Entonces:

$$Z_{\frac{100-92}{2}} = Z_4 = Z_{0.04} = -1.75$$
$$Z_{0.96} = 1.75$$

Por lo tanto, el intervalo está dado por:

$$\left((\overline{x_1} - \overline{x_2}) - (1.75)\sqrt{\frac{111977.29 - 15955.84}{10^2}} \leq \mu_1 - \mu_2 \leq (\overline{x_1} - \overline{x_2}) + (1.75)\sqrt{\frac{111977.29 - 15955.84}{10^2}}\right.$$

$$(165.0706 \leq \mu_1 - \mu_2 \leq 290.7293) \Rightarrow (165, 291)$$

3. Con la finalidad de estimar la proporción de recién nacidos que son varones, se registró el género de 10 000 niños recién nacidos. Si de éstos 4 000 fueron varones, determine un intervalo de confianza del 96 % para la proporción real.

   Solución:
   Tenemos los elementos para poder hacer un intervalo, donde:
   - $n = 10000$
   - $p = 0.4$
   - $q = 0.6$
   - $\alpha = 96$

   - $\overline{x} = np = (10000)(0.4) = 4000$
   - $\sigma^2 = npq = (10000)(0.4)(0.6) = 2400 \Rightarrow \sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{2400} = 48.99$

$$Z_{\frac{100\pm\alpha}{2}} \Rightarrow Z_{\frac{100-96}{2}} = Z_{0.02} = -2.05 \text{ y } Z_{\frac{100+96}{2}} = Z_{0.98} = 2.05$$

   Por lo tanto, el intervalo está dado por:

$$\left(4000 - (2.05)\left(\frac{48.9897}{\sqrt{10000}}\right) \leq \mu \leq 4000 + (2.05)\left(\frac{48.9897}{\sqrt{10000}}\right)\right) \Rightarrow (3998, 4002)$$

4. A un coche se le hace publicidad afirmando que tiene un rendimiento en carretera de por lo menos 30 millas por galón. Si las millas por galón que se obtuvieron en 10 experimentos son 26, 24, 20, 25, 27, 25, 28, 30, 26, 33, ¿creería usted en lo que dice la publicidad en un 90 %?

   Solución:

$$\overline{x} = \sum xf(x) = (20)\left(\frac{1}{10}\right) + (24)\left(\frac{1}{10}\right) + (25)\left(\frac{2}{10}\right) + (26)\left(\frac{2}{10}\right) + (27)\left(\frac{1}{10}\right)$$
$$+(28)\left(\frac{1}{10}\right) + (30)\left(\frac{1}{10}\right) + (33)\left(\frac{1}{10}\right) = 26.4$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$
$$\sigma^2 = E[x^2] - \overline{x}^2$$

$$E[x^2] = \sum x^2 f(x) = (20^2)\left(\frac{1}{10}\right) + (24)^2\left(\frac{1}{10}\right) + (25)^2\left(\frac{2}{10}\right) + (26)^2\left(\frac{2}{10}\right) + (27)^2\left(\frac{1}{10}\right)$$
$$+(28)^2\left(\frac{1}{10}\right) + (30)^2\left(\frac{1}{10}\right) + (33)^2\left(\frac{1}{10}\right) = 708$$

Entonces, $\sigma^2 = 708 - (26.4)^2 = 11.04 \Rightarrow \sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{11.04} = \pm 3.322$

$$Z_{\frac{100 \pm \alpha}{2}} \Rightarrow Z_{\frac{100-90}{2}} = Z_{0.05} = -1.64 \text{ y } Z_{\frac{100+90}{2}} = Z_{0.95} = 1.64$$

Ahora, con los datos dados $Z = \frac{26.4-30}{\frac{3.322}{\sqrt{10}}} = -3.426$ lo cual excede el rango y no es de confianza.

5. Se sabe que el gatorade es eficiente en el 72 % de los casos en los que se usa para aliviar los efectos del laboratorio del día anterior.
   Se ha desarrollado un nuevo sabor y las pruebas demuestra que fue efectivo en 42 de los 50 casos.
   ¿Es esta una evidencia suficientemente fuerte paraprobar que el nuevo sabor es mas efectivo que el viejo con una confianza del 91 %?
   Solución

$$\begin{aligned}
n_1 &= 50 \\
n_2 &= 50 \\
\overline{x_1} &= 36 \\
\overline{x_2} &= 42 \\
\sigma_1^2 &= npq = 11.52 \\
\sigma_2^2 &= npq = 12.58 \\
z &= \frac{\overline{x_1} - \overline{x_2}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1^2} + \frac{\sigma_2^2}{n_2^2}}} \\
&= \frac{36 - 42}{\sqrt{\frac{11.52}{50^2} + \frac{12.18}{50^2}}} \\
&= \frac{-6}{0.097} = -61.85
\end{aligned}$$

si es prueba suficiente

6. Suponga que un dispositivo determinado contiene cinco circuitos electrónicos; se supone que el tiempo(en horas) hasta que falle cada uno de los siguientes circuitos es una variable exponencial con media igual a 1000 y que el dispositivo trabaja solamente mientras trabajan los 5 circuitos.
   ¿Cuál es la probabilidad de que el dispositivo trabaje al menos 100 horas?
   Solución

$$\mu = 1000 = np = \lambda$$
$$X = 100$$
$$P(X \geq 100) = \int_{X=100}^{X=\infty} (\lambda)(e^{-\lambda X})dX = 1 - \int_{X=0}^{X=100} (\lambda)(e^{-\lambda X})dX$$
$$= 1 - e^{-\mu X}|_{\infty}^{100}$$
$$= 1 + 0 - 1 = 0$$

7. Supóngase que la cantidad real de café colocada por una maquina llena de frascos de "n.ºnzas es una variable aleatoria con distribución normal con varianza de 0.0025 de onza.
   Si solo el 3 % de los frascos van a contener menos de n onzas de café.
   ¿Cuál debe de ser el contenido medio de estos frascos?.

   Solución

$$Z_{\frac{100-97}{2}} = Z_{.015} = -2.17$$
$$Z = \frac{n-\mu}{\sigma} \mu = n - Z\sigma = n + .0054$$

8. Supóngase que la cantidad real de pintura colocada por una maquina llena de latas de ocho galones es una variable aleatoria con distribución normal con desviación estándar 0.0025 de onza.
   Si solo el 3 % de las latas van a contener menos de 3 galones de pintura.
   ¿Cuál debe de ser el contenido medio de estas latas?.

   Solución

$$Z_{\frac{100-97}{2}} = Z_{.015} = -2.17$$
$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \mu = X - Z\sigma = 8.0054$$

9. El departamento de seguridad de una fabrica desea saber si el tiempo promedio real que requiere el velador para realizar una ronda nocturna es de 30 min.

Si en una muestra tomada al azar requiere de 32 rondas, el velador promedio 30.8 min con una desviación estándar de 1.5 min.
Determine con un nivel de confianza del 99 % si es evidencia suficiente para rechazar la hipotesis nula $\mu = 30$ a favor de la hipotesis alternativa de $\mu \neq 30$
Solución

$$n = 32$$
$$\mu = 30.8$$
$$\sigma = 1.5$$
$$\alpha = 99\,\% = .99$$

$$Z_{\frac{100-99}{2}} = Z_{.005} = -2.57$$
$$Z_{\frac{100+99}{2}} = Z_{.995} = 2.57$$

$$z = \frac{\mu - \mu'}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{30.8 - 30}{\frac{1.5}{\sqrt{32}}} = 3.016$$

Se rechaza la hipotesis nula $\mu = 30\bullet$

10. El fabricante de un producto removedor de manchas afirma que su producto remueve cuando menos en 90 % de todas las manchas.
¿Qué podemos concluir acerca de estas afirmaciones en un 95 % si el producto solo alimino 174 de 200 manchas elegidas al azar de ropa manchada?
Solución

$$\alpha = 95\,\%$$
$$n = 200$$
$$p = \frac{174}{200} = .87$$
$$q = \frac{26}{200} = .13$$

$$\mu = np = (200)(.87) = 174$$
$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{(200)(.87)(.13)} = 4.756$$

$$Z_{\frac{100-95}{2}} = Z_{.05} = -1.64$$
$$Z_{\frac{100+95}{2}} = Z_{.95} = 1.64$$

$$(174 - 1.64(\frac{4.756}{\sqrt{200}}) \leq \mu \leq 174 + 1.64(\frac{4.756}{\sqrt{200}}))$$
$$(173.44 \leq \mu \leq 174.5528)$$
$$(173, 175)$$

$$\alpha = 95\,\%$$
$$n = 200$$
$$p = \frac{174}{200} = .9$$
$$q = \frac{26}{200} = .1$$
$$\mu = 180$$
$$\sigma = 4.24$$
$$(179.5087 \leq \mu \leq 180.4913)$$
$$(179, 180)$$

no se cumple el producto

11. Durante varios años, se había aplicado un examen diagnostico a todos los alumnos de tercer semestre de la ESCOM. Si 64 estudiantes seleccionados al azar tardaron en promedio 28.5 minutos en resolver el examen con una varianza de 9.3.
¿Cuánto se esperaría que tardaran entre 27 y 32 minutos en resolver el examen?
Solución

$$n = 64$$
$$\mu = 28.5$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{9.3} = 3.0496$$

$$\begin{gathered}
Z_{min} = \frac{32 - 28.5}{3.0496} = 1.147 \\
Z_{max} = \frac{27 - 28.5}{3.0496} = .4918 \\
P(x) = P(1.147) - P(.4918) \\
= .872856848 - .3120669484 \\
= .5607898996 = 56.07\,\%
\end{gathered}$$

12. Si el 23 % de todos los pacientes con presión sanguínea elevada tienen efectos colaterales nocivos por la ingesta de cierto medicamento.
    Utilice la aproximación normal para obtener la probabilidad de que entre 12n de estos pacientes tratados con este medicamento unos 3n presentaran efectos colaterales nocivos
    Solución

$$\begin{gathered}
"n" = 5 \\
n = (12)(5) = 60 \\
Exitos : (3)(5) = 15 \\
p = .23 \\
q = .77
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
\mu = np = (60)(.23) = 13.8 \\
\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{(60)(.23)(.77)} = 3.856943648 = 3.857
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
14.5 \leq x \leq 15.5 \\
Z_{min} = \frac{14.5 - 13.8}{3.857} = .1814 \\
Z_{max} = \frac{15.5 - 13.8}{3.857} = .4407 \\
P(14.5 \leq x \leq 15.5) = P(.4407) - P(.1814) \\
= .67003144 - .57142371 = .0986077 = 9.86\,\%
\end{gathered}$$