Lista de probabilidad y estadística

Carlos Tonatihu Barrera Pérez
Profesor: Montiel
Probabilidad y Estadística
Grupo: 2CM10

12 de diciembre de 2016

1. Lista 1

22. El retraso o adelanto (en minutos) de un vuelo de Guadalajara a Monterrey es una variable aleatoria cuya densidad de probabilidad esta dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{288}(36 - x^2) & si \quad -6 \leq x \leq 6 \\ \\ 0 & , \qquad DOM \end{cases}$$

Donde los valores negativos son indicativos de que el vuelo llega adelantado y los valores positivos señalan que el vuelo llega retrasado. Determine la probabilidad de que uno de estos vuelos llegará cuando menos dos minutos antes.

Solución

La variable es aleatoria continua.

$$P(\Omega) = 1$$

$$\frac{1}{288}\int_{-6}^{6}(136 - x^2)dx = \frac{1}{288}(36x - \frac{x^3}{3})\bigg|_{-6}^{6} = \frac{1}{288}(216 - 72 + 216 - 72)$$

$$= \frac{1}{288}(288) = 1$$

$$\frac{1}{288}\int_{-6}^{6}(136 - x^2)dx = \frac{1}{288}(36x - \frac{x^3}{3})\bigg|_{-2}^{-6} = \frac{1}{288}(-72 + \frac{8}{3} + 216 - 72) = \frac{1}{288}(\frac{224}{3}) = 0.2592$$

23. Si la ganancia de un contratista en una obra de construcción puede considerarse como una variable aleatoria que tiene la densidad de probabilidad:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{18}(x + 1) & si \quad -1 \leq x \leq 5 \\ \\ 0 & , \qquad DOM \end{cases}$$

Donde las utilidades se expresan en miles de pesos, ¿cuál es la utilidad esperada?

Solución

La variable es aleatoria continua.

$$\frac{1}{18}\int_{-1}^{5}(x + 1)dx = \frac{1}{18}(\frac{x^2}{2} + x)\bigg|_{-1}^{5} = \frac{1}{18}(\frac{25}{2} + 5 - \frac{1}{2} + 1) = 1$$

$$\mu = \frac{1}{18}\int_{-1}^{5}x(x + 1)dx = \frac{1}{18}(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2})\bigg|_{-1}^{5} = 3$$

Por lo tanto, la utilidad esperada es de 3.

24. La probabilidad de que la Sra. Matínez venda una cadena de oro con una ganancia de \$3000 es: $\frac{3}{20}$. La probabilidad de que la venda y obtenga una ganancia de \$1500 es de $\frac{7}{20}$, la probabilidad de que salga a mano es $\frac{7}{20}$ y la probabilidad de que pierda \$1500 es $\frac{3}{20}$. ¿Cuál es su ganancia esperada?
Solución
La variable es aleatoria discreta, así:

$$\mu = \sum_{i=0}^{n=4} x_i f(x_i) = 3000 * \frac{3}{20} + 1500 * \frac{7}{20} + 0 * \frac{7}{20} - 1500 * \frac{3}{20} = 750$$

Por lo tanto, su ganancia esperada es de \$750.

25. El tiempo que tardan en atender a un individuo en una cafetería es una variable aleatoria con la densidad de probabilidad:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}(e^{-\frac{x}{4}}) & si \quad x > 0 \\ \\ 0 & , \quad DOM \end{cases}$$

Obtenga el valor esperado de esta distribución.
Solución
La variable es aleatoria continua.

$$P(\Omega) = \int_0^\infty (\frac{1}{4}(e^{-\frac{x}{4}}))dx = -e^{-\frac{x}{4}} \Big|_0^b = \lim_{b\to\infty} -e^{-\frac{b}{4}} - (-e^0) = 1$$

$$\mu = \int_0^\infty (\frac{1}{4}x(e^{-\frac{x}{4}}))dx = \frac{1}{4}(e^{-\frac{x}{4}})(-4x-16) \Big|_0^b = \lim_{b\to\infty} -e^{-\frac{b}{4}}(-4b-16) - (-e^0)(-16) = 4$$

Por lo tanto el valor esperado es 4.

26. El número de horas de operación satisfactoria que proporciona un televisor Sonny es una variable aleatoria de z cuya función de probabilidad es:

$$f(z) = \begin{cases} 0.0001e^{-0.0001z} & si \quad z > 0 \\ \\ 0 & , \quad DOM \end{cases}$$

Obtenga el valor esperado de esta distribución.
Solución
La variable es aleatoria continua.

$$P(\Omega) = \int_{0}^{\infty} (0.0001e^{-0.0001z})dz = -e^{-0.0001z}\Big|_0^b = \lim_{b\to\infty} -e^{-0.0001b} - (-e^0) = 1$$

$$\mu = \int_{0}^{\infty} (0.0001ze^{-0.0001z})dz = \frac{e{-}\frac{x}{10000}(-10000x - 100000000)}{10000}\Bigg|_0^b$$

$$= \lim_{b\to\infty} \frac{e{-}\frac{b}{10000}(-10000b - 100000000)}{10000} - \frac{e{-}\frac{0}{10000}(-10000(0) - 100000000)}{10000} = 10000$$

Por lo tanto, el valor esperado es 10 000.

2. Lista 2

1. Se sabe que 10 % de los vasos producidos por cierta máquina tienen algún defecto. Si se seleccionan 10 vasos por ésta máquina, ¿cuál es la probabilidad de que ninguno este defectuoso?, ¿cuántos se esperaría encontrar defectuosos?
   Solución
   La variable tiene una distribución binomial

$$n = 10$$
$$p = 0.1$$
$$q = 0.9$$
$$P(x = 0) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = \binom{10}{0} (0.1)^0 (0.9)^{10-0} = 0.3486784401 \textit{ o 34.86 \%.}$$

$$\mu = np = (10)(0.1) = 1$$

2. Un laberinto para ratas tiene un corredor recto, y al final una bifurcación; en la bifurcación, la debe ir a la derecha o a la izquierda. Suponer que se colocan 10 ratas, en el laberinto, de una en una. Si cada rata toma al azar una de las dos alternativas del camino. ¿Cuál es la probabilidad de que cuando menos 9 vayan al mismo lado?
   Solución
   La variable tiene una distribución binomial

$$n = 10$$
$$p = 0.5$$
$$q = 0.5$$
$$P(x = 9) = \binom{10}{9} (0.5)^x (0.5)^{n-x} + \binom{10}{10} (0.5)^x (0.5)^{n-x} = 0.0107421875 \textit{ o 1.07 \%.}$$

3. En una "prueba de tortura" se enciende y se apaga un interruptor eléctrico hasta que este falla. Si la probabilidad es 0.001 de que el interruptor falle en cualquier momento en que este encendido o apagado, cual es la probabilidad de que el interruptor no falle durante las primeras 800 veces que se enciende o apague?
   Solución
   La variable es de Poisson

$$n = 800$$
$$p = 0.001$$
$$q = 0.999$$
$$\lambda = np = 800(0.001) = 0.8$$
$$P(x = 0) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = \frac{(0.8)^0 e^{-\lambda}}{0!} = \frac{1e^{-.8}}{1} = 0.4493289641 \text{ ó } 44.93\,\%$$

4. Un ingeniero de control de calidad inspecciona una muestra tomada al azar de dos calculadoras portátiles de cada lote de 18 unidades que llega y acepta el lote si ambas están en buenas condiciones de funcionamiento; en caso contrario, se inspecciona todo el lote y el costo se carga al distribuidos. ¿Cuál es la probabilidad de que este lote sea aceptado sin mayor inspección si contiene...

   a) Cuatro calculadoras en mal estado?
   Solución
   La variable es de hipergeometrica

$$N = 18$$
$$n = 2$$
$$k = 18 - 4 = 14$$
$$x = 2$$
$$P(2) = \frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{14}{2}\binom{4}{0}}{\binom{18}{2}} = \frac{91}{153} = 0.5947712418 \text{ ó } 59.47\,\%$$

   b) Ocho calculadoras en malas condiciones de funcionamiento?
   Solución
   La variable es de hipergeometrica

$$N = 18$$
$$n = 2$$
$$k = 18 - 8 = 10$$
$$x = 2$$
$$P(2) = \frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{10}{2}\binom{8}{0}}{\binom{18}{2}} = \frac{45}{153} = \frac{5}{17} = .294117647 \text{ ó } 29.41\,\%$$

5. Un examen de opción múltiple consta de ocho preguntas y tres respuestas a cada pregunta. Si un estudiante responde a cada pregunta tirando un dado y marca la primera respuesta si obtiene un 1 o un 2, la segunda respuesta si obtiene un 3 o un 4, y la tercera respuesta si obtiene un 5 o un 6, ¿Cuál es la probabilidad de que logre exactamente cuatro respuestas correctas?
   Solución
   La variable es de binomial

$$n = 8$$
$$p = \frac{1}{3}$$
$$q = \frac{2}{3}$$
$$P(4) = \binom{n}{x}(p)^x (q)^{n-x} = \binom{8}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^4 = 0.1707056851 \text{ ó } 17.07\,\%$$

6. Si el 40 % de los alumnos se volvieran agresivos en un periodo de 2 horas después de haber ingerido algún liquido en el Sportaco, determine la probabilidad de que exactamente seis de los 15 alumnos que han ingerido algún líquido se vuelvan agresivos en el periodo de 2 horas.
   Solución
   La variable es de binomial

$$n = 15$$
$$p = 0.4$$
$$q = 0.6$$
$$P(6) = \binom{n}{x}(p)^x(q)^{n-x} = \binom{15}{6}(0.4)^6(0.6)^9 = .2065976053 \text{ ó } 20.65\,\%$$

7. Un jurado de 7 jueces debe decidir entre 2 finalistas quien es la ganadora de un concurso de belleza, para lo cual bastara una mayoría de los jueces. Suponga que 4 jueces voten por María y que los otros 3 voten por Susana. Si se seleccionan al azar 3 jueces y se les pregunta por quien van a votar, ¿cuál es la probabilidad de que la mayoría de los jueces de la muestra estén a favor de María?
   Solución
   La variable es de hipergeometrica

$$N = 7$$
$$n = 3$$
$$k = 4$$
$$x = 2, 3$$
$$p(2,3) = \sum_{x=2}^{3} \frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{4}{2}\binom{3}{1}}{\binom{7}{3}} + \frac{\binom{4}{3}\binom{3}{0}}{\binom{7}{3}} = \frac{22}{35} = 0.6285714286 \text{ ó } 62.85\,\%$$

8. Se ha observado que el transito promedio de automóviles en determinado punto de un camino rural es de 3 por hora. Suponga que los instantes en que pasan los mismos son independientes, haciendo que x represente el numero de los que pasan por este punto en un intervalo de 20 minutos, calcule la probabilidad de $P(x > 2)$
   Solución
   La variable es de Poisson

$$\lambda = np = 1 \text{ (cada 20 min)}$$
$$x > 2$$
$$p(x>2) = \sum_{x=3}^{\infty} \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = \sum_{x=3}^{\infty} \frac{1^x e^{-1}}{x!} = 1 - \sum_{x=0}^{2} \frac{1^x e^{-1}}{x!} = 1 - \left(\frac{e^{-1}}{0!} + \frac{e^{-1}}{1!} + \frac{e^{-1}}{2!}\right)$$
$$= 0.08030139707 \text{ ó } 8.03\,\%$$

9. En determinada planta manufacturera han ocurrido accidentes a razón de 1 cada 2 meses. suponiendo que ocurren en forma independiente, Cual es el numero esperado de

accidentes al año?
Solución
La variable es de Poisson

$$\lambda = 1 \text{ (cada 2 meses)}$$
$$\lambda = \frac{(1 \text{ accidentes})(12 \text{ meses})}{2 \text{ meses}} = 6 \text{ accidentes}$$