Lista de probabilidad y estadística

Carlos Tonatihu Barrera Pérez
Profesor: Montiel
Probabilidad y Estadística
Grupo: 2CM10

12 de diciembre de 2016

1. Lista 1

1. Demuestre que :

   a) $\binom{n}{r} = \frac{n-r+1}{r}\binom{n}{r-1}$

   Demostración.

$$\begin{aligned}
\binom{n}{r} &= \frac{n!}{(n-r)!r!} \\
&= \frac{n-r+1}{n-r+1}(\frac{n!}{(n-r)!r!}) \\
&= \frac{n-r+1}{n-r+1}(\frac{n!}{(n-r)!r(r-1)!}) \\
&= \frac{n-r+1}{r}(\frac{n!}{(n-r+1)(n-r)!(r-1)!}) \\
&= \frac{n-r+1}{r}(\frac{n!}{(n-r+1)!(r-1)!}) \\
&= \frac{n-r+1}{r}(\frac{n!}{(n-(r-1))!(r-1)!}) \\
&= \frac{n-r+1}{r}\binom{n}{r-1}
\end{aligned}$$

$\square$

   b) $(x+y)^n = \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}x^{n-r}y^r$

   Demostración. Probemos para n=1

$$(x+y)^1 = \sum_{r=0}^{1}\binom{n}{r}x^{n-r}y^r = \binom{1}{0}(x^1)(y^0) + \binom{1}{1}(x^0)(y^1) = x+y = (x+y)^1$$

   Supongamos

$$(x+y)^n = \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}x^{n-r}y^r$$

   Y probemos para $n+1$

$$(x+y)^{n+1} = \sum_{r=0}^{n+1}\binom{n+1}{r}x^{n+1-r}y^r$$

$$
\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= (x+y)(x+y)^n = (x+y)\sum_{r=0}^{n+1}\binom{n}{r}x^{n-r}y^r \\
&= x\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}x^{n-r}y^r + y\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}x^{n-r}y^r \\
&= \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}x^{(n-1)-r}y^r + y\sum_{r=1}^{n+1}\binom{n}{r-1}x^{n-(r-1)}y^r \\
&= \binom{n}{0}x^{n+1}y^0 + \sum_{r=1}^{n}\binom{n}{r}x^{(n+1)-r}y^r \\
&+ \sum_{r=1}^{n}\binom{n}{r-1}x^{(n+1)-r}y^r + \binom{n}{n+r-1}x^{n-(r-1)}y^{n+1} \\
&= x^{n+1} + \sum_{r=1}^{n}\binom{n}{r}x^{(n+1)-r}y^r + \sum_{r=1}^{n}\binom{n}{r-1}x^{n+1-r)}y^r + y^{n+1} \\
&= x^{n+1} + \sum_{r=1}^{n}(\binom{n}{r} + \binom{n}{r-1})x^{(n+1)-r}y^r + y^{n+1} \\
&= x^{n+1} + \sum_{r=1}^{n}\binom{n+1}{r}(x^{(n+1)-r}y^r) \\
&= \sum_{r=0}^{n+1}\binom{n+1}{r}(x^{(n+1)-r}y^r)
\end{aligned}
$$

□

c) $\sum_{r=0}^{n} r\binom{n}{r} = n2^{n-1}$

Demostración. Tenemos que:

$$(1+x)^n = \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}(1^{n-r}x^r) = \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}x^r$$

Derivando:

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{r=1}^{n} r\binom{n}{r}x^{r-1}$$

Y con x=1:

$$n2^{n-1} = \sum_{r=1}^{n} r\binom{n}{r}$$

$$\sum_{r=1}^{n} r\binom{n}{r} = n2^{n-1}$$

$\square$

d) $\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r}(a-1)^r = a^n$

Demostración.

$$a^n = (a+1-1)^n = [1+(a-1)]^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r}(1^{n-r})(a-1)^r$$

$$\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r}(a-1)^r = a^n$$

$\square$

e) $\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r}^2 = \binom{2n}{n}$

Demostración.

$$\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r}^2 = \binom{2n}{n}$$

$$(1+x)^{2n} = (1+x)^n * (1+x)^n = \sum_{r=0}^{n}(\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{j}\binom{n}{r-j}x^k)$$

$$(1+x)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k}x^k$$

$$\binom{2n}{n} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}\binom{n}{n-j} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}^2$$

$\square$

2. ¿De cuantas maneras pueden formarse 5 personas para abordar un autobús, si dos de las personas se niegan a hacerlo una tras la otra?

3. Dos focos se mantienen encendidos hasta que se funden. Suponer que ninguno dura mas de 1600 horas. Definir un espacio muestral adecuado para este experimento, donde se describen los siguientes eventos:

   i)Ambos focos duran menos de 1000 horas
   Solucion

$$A = \{x, y|0 \leq x, y < 1000\}$$

   ii)Ningun foco se funde antes de 1000 horas
   Solucion

$$B = \{x, y|1000 < x, y \leq 1600\}$$

   iii) El menor tiempo de duracion (de los dos) es de 1000 horas
   Solucion

$$C = \{x, y|1000 \leq x + y \leq 1600\}$$

4. Se inscriben Alejandro, Pedrito y Carlos en una carrera. ¿Cual es la probabilidad de que Alejandro termine antes que Carlos, si todos tienen la misma habilidad y no hay empates?
   Solucion

$$P(\Omega) = 3! = 6$$
$$|\Omega| = (A, B, C), (B, A, C), (A, C, B), (B, C, A), (C, A, B), (C, B, A)$$
$$|A > C| = (A, B, C), (A, C, B), (B, A, C)$$
$$P(A > C) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 50\,\%$$

5. En un año determinado para elecciones nacionales deben elegirse gobernadores para 20 estados. Si se supone que en cada estado hay 2 candidatos (PT y Alianza Zapatista),

¿cual es la probabilidad de que el mismo partido gane en todos los estados?
Solucion

$$P(PT \cup AZ) = P(PT) + P(AZ)$$
$$P(PT \cup AZ) = \frac{1}{2^{20}} + \frac{1}{2^{20}} = \frac{2}{2^{20}} = .001907\,\%$$

6. Se somete a un alumno a un examen de tipo Verdadero - Falso que contiene 10 preguntas; para que apruebe, debe responder correctamente a 8 preguntas o mas. Si el estudiante esta adivinando, ¿Cual es la probabilidad de que apruebe el examen?
Solucion

$$P|8| = \binom{10}{8}(\frac{1}{2})^8(\frac{1}{2})^2 = \frac{45}{1024}$$
$$P|9| = \binom{10}{9}(\frac{1}{2})^9(\frac{1}{2})^1 = \frac{10}{1024}$$
$$P|9| = \binom{10}{10}(\frac{1}{2})^{10}(\frac{1}{2})^0 = \frac{1}{1024}$$
$$P(8 \cup 9 \cup 10) = \frac{56}{1024} = 5.46\,\%$$

7. En el curso de Plastilina II se distribuye un examen con 10 preguntas de opcion multiple. Para aprobarlo, se requiere responder correctamente a 7 o mas de las preguntas. Si se supone que esta adivinando la respuesta en cada pregunta, ¿Cual es la probabilidad de aprobar el examen si las primeras 5 preguntas tienen 3 respuestas ocionales y las ultimas 5 preguntas tienen 4 respuestas opcionales?
Solucion
7p:

$$5p2p = \binom{5}{5}(\frac{1}{3})^5(\frac{2}{3})^0 + \binom{5}{2}(\frac{1}{4})^2(\frac{3}{4})^3$$
$$4p3p = \binom{5}{4}(\frac{1}{3})^4(\frac{2}{3})^1 + \binom{5}{3}(\frac{1}{4})^3(\frac{3}{4})^2$$
$$3p4p = \binom{5}{3}(\frac{1}{3})^3(\frac{2}{3})^2 + \binom{5}{4}(\frac{1}{4})^4(\frac{3}{4})^1$$
$$2p5p = \binom{5}{2}(\frac{1}{3})^2(\frac{2}{3})^3 + \binom{5}{5}(\frac{1}{4})^5(\frac{3}{4})^0$$

8p:

$$
\begin{aligned}
5p3p &= \binom{5}{5}(\frac{1}{3})^5(\frac{2}{3})^0 + \binom{3}{5}(\frac{1}{4})^3(\frac{3}{4})^2 \\
4p4p &= \binom{5}{4}(\frac{1}{3})^4(\frac{2}{3})^1 + \binom{4}{5}(\frac{1}{4})^4(\frac{3}{4})^1 \\
3p5p &= \binom{5}{3}(\frac{1}{3})^3(\frac{2}{3})^2 + \binom{5}{5}(\frac{1}{4})^5(\frac{3}{4})^0
\end{aligned}
$$

9p:

$$
\begin{aligned}
5p4p &= \binom{5}{5}(\frac{1}{3})^5(\frac{2}{3})^0 + \binom{5}{4}(\frac{1}{4})^4(\frac{3}{4})^1 \\
4p5p &= \binom{5}{4}(\frac{1}{3})^4(\frac{2}{3})^1 + \binom{5}{5}(\frac{1}{4})^5(\frac{3}{4})^0
\end{aligned}
$$

10p:

$$
5p5p = \binom{5}{5}(\frac{1}{3})^5(\frac{2}{3})^0 + \binom{5}{5}(\frac{1}{4})^5(\frac{3}{4})^0
$$

$$
P(x \leq 7) = \frac{23}{31104} = 7.39x10^{-4} \text{ ó } .074
$$

8. El departamento de investigación de una fábrica de focos ha perfeccionado un recubrimiento para los filamentos capaz de prolongar la duración de aquellos. Para comparar las duraciones de los focos nuevos con la de los focos viejos, se seleccionan 10 focos fabricados con el nuevo procedimiento y 10 normales, y se forman parejas: un foco viejo con uno nuevo. Se somete los 10 pares a prueba, y se anota cuál de los focos de cada par falla primero, si el foco nuevo o el viejo. Suponiendo que el nuevo proceso realmente no prolonga la duración de los focos, ¿cuál es la probabilidad de que el foco viejo falle primero en por lo menos 9 de los 10 pares?
   Solución
   La variable es binomial.

$$
\begin{aligned}
P(F_v) &= \binom{10}{9} \cdot \frac{1}{2}^9 \cdot \frac{1}{2}^1 + \binom{10}{10} \cdot \frac{1}{2}^{10} \cdot \frac{1}{2}^0 \\
&= \frac{11}{1024} = 1.07\,\%
\end{aligned}
$$

9. Demuestre que:

   a) $P(A^C \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$
   Demostración

$$
\begin{aligned}
P(A^C \cap B) &= P(B \cap A^C) = P((B \cap A^C) \cup \varnothing) \\
&= P((B \cap A^C) \cup (B \cap B^C)) = P(B \cap (A^C \cup B^C)) \\
&= P(B \cap (A \cap B)^C) = P(B \backslash (A \cap B)^C) \\
&= P(B) - P(A \cap B)
\end{aligned}
$$

   b) Si $A \subseteq B$, entonces $P(B^C) \leq P(A^C)$
   Demostración

$$
\begin{gathered}
A \subseteq B \\
P(A) \leq P(B) \\
1 - P(A^C) \leq 1 - P(B^C) \\
-P(A^C) \leq -P(B^C) \\
P(B^C) \leq P(A^C)
\end{gathered}
$$

   c) $P(A \cup B \cup C) = P(A \cup (B \backslash (A \cap B)) \cup (C \backslash (A \cap C)))$
   Demostración

$$
\begin{gathered}
P(A \cup (B \backslash (A \cap B)) \cup (C \backslash (A \cap C))) \\
= P(A \cup (B \cap (A \cap B)^C) \cup (C \cap (A \cap C))^C) \\
= P(A \cup (B \cap (A^C \cup B^C)) \cup (C \cap (A^C \cup C^C))) \\
= P(A \cup ((B \cap A^C) \cup (B \cap B^C)) \cup ((C \cap A^C) \cup (C \cap C^C))) \\
= P((A \cup (B \cap A^C) \cup (C \cap A^C)) = P(((A \cup B) \cap (A \cup A^C)) \cup C \cap A^C)) \\
= P((A \cup B) \cup (C \cap A^C)) = P((A \cup B \cup C) \cap (A \cup B \cup A^C)) \\
= P(A \cup B \cup C)
\end{gathered}
$$

   d) $P(A \cap B^C) = P(A) - P(A \cap B)$
   Demostración

$$
\begin{gathered}
P(A \cap B^C) = P((A \cap B^C) \cup \varnothing) \\
= P((A \cap B^C) \cup (A \cap A^C)) = P(A \cap (B^C \cup A^C)) \\
= P(A \cap (B \cap A)^C) = P(A \backslash (B \cap A)) \\
= P(A) - P(B \cap A) = P(A) - P(A \cap B)
\end{gathered}
$$

10. Dado un experimento en el que $P(A) = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{1}{3}, P(A \cap B) = \frac{1}{4}$, calcular:

a) $P(A^C \cap B^C)$
Solución

$$P(A^C \cap B^C) = P(A^C) + P(B^C) - P(A^C \cup B^C)$$
$$= 1 - P(A) + 1 - P(B) - P((A \cap B)^C) = 2 - P(A) - P(B-) - 1 + P(A \cap B)$$
$$= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$$

b) $P(A^C \cup B^C)$
Solución

$$P(A^C \cup B^C) = P((A \cap B)^C)$$
$$= 1 - P(A \cap B)$$
$$= 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

c) $P(A^C \cap B)$
Solución

$$P(A^C \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$$
$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

11. Demuestre por inducción ue:

$$P(E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup \ldots \cup E_n) \leq \sum_{i=1}^{n} P(E_i)$$

Demostración

a) Probemos para $n = 1$:

$$P(E_1) \leq \sum_{i=1}^{1} P(E_i) = P(E_1)$$

b) Supongamos que $P(E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup \ldots \cup E_n) \leq \sum_{i=1}^{n} P(E_i)$ y probemos que $P(E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup \ldots \cup E_n \cup E_{n+1}) \leq \sum_{i=1}^{n+1} P(E_i)$: Sabemos que

$$\sum_{i=1}^{n+1} P(E_i) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i) + P(E_{n+1})$$

Así

$$P(E_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} P(E_i) - \sum_{i=1}^{n} P(E_i)$$

Luego

$$\begin{aligned}
&P(E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup \ldots \cup E_n \cup E_{n+1}) \\
&= P(E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup \ldots \cup E_n) + P(E_{n+1}) - P((E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup \ldots \cup E_n) \cap E_{n+1}) \\
&= P(E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup \ldots \cup E_n) + \sum_{i=1}^{n+1} P(E_i) - \sum_{i=1}^{n} P(E_i) \\
&\quad - P((E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup \ldots \cup E_n) \cap E_{n+1}) \\
&\leq P(E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup \ldots \cup E_n) + \sum_{i=1}^{n+1} P(E_i) - P(E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup \ldots \cup E_n) \\
&\quad - P((E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup \ldots \cup E_n) \cap E_{n+1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} P(E_i) - P((E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup \ldots \cup E_n) \cap E_{n+1})
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
P(E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup \ldots \cup E_n \cup E_{n+1}) &\leq \sum_{i=1}^{n+1} P(E_i) - P((E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup \ldots \cup E_n) \cap E_{n+1}) \\
&\leq \sum_{i=1}^{n+1} P(E_i)
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$P(E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup \ldots \cup E_n) \leq \sum_{i=1}^{n} P(E_i)$$

12. Se lanzan 3 dados. Si ninguna pareja muestra la misma cara, ¿cuál es la probabilidad de que haya un uno?

Solución

$$P(No-Rep)=\frac{6}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{4}{6}=\frac{120}{216}$$
$$P(1,X,X)=\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{4}{6}=\frac{20}{216}$$
$$P(2,1,X)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{4}{6}=\frac{4}{216}$$
$$P(3,1,X)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{4}{6}=\frac{4}{216}$$
$$\ldots P(2-6,1,X)=\frac{20}{216}P(2,3,1)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{216}$$
$$P(2,4,1)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{216}$$
$$\ldots P(2-6,2-6,X,No-Rep)=5\cdot P(2-6,2-6,1)=\frac{20}{216}$$
$$P(1\cap No-Rep)=P(1,X,X)+P(2-6,1,X)+P(2-6,2-6,X,No-Rep)=\frac{60}{216}$$
$$P(1|No-Rep)=\frac{P(1\cap No-Rep)}{P(No-Rep)}=\frac{60}{120}=50\,\%$$

13. En una fábrica de pernos, las máquinas A, B C producen, respectivamente, el 25, 35 y 40 por ciento del total. En esta producción, el 5, 4 y 2 por ciento son pernos defectuosos. Se toma al azar un perno de la producción total y se le encuentra defectuoso. ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido producido por B?
Solución

$$P(Def)=0.25\cdot 0.05+0.35\cdot 0.04+0.40\cdot 0.02=\frac{69}{2000}$$
$$P(B\cap Def)=0.35\cdot 0.04=\frac{28}{2000}$$
$$P(B|Def)=\frac{P(B\cap Def)}{P(Def)}=\frac{28}{69}=40.57\,\%$$

14. En una escuela, 1 % del estuciantado participa en un programa atlético intercolegial; de este grupo, 10 % tiene promedio de 7 o más, en tanto que el 20 % del resto del estudiantado tienen promedio de 7 o más. ¿Qué proporción total del estudiantado tiene un nivel de 7 o más? Si se selecciona 1 estudiante al azar de entre el estudiantado y se ve que tiene un nivel de 7.13, ¿cuál es la probabilidad de que participe en el programa atlético intercolegial?
Solución

$$P(7^+)=\frac{P(pic\cap 7^+)+p(no-pic\cap 7^+)}{P(\Omega)}=\frac{\frac{10}{100}\cdot\frac{1}{100}+\frac{20}{100}\cdot\frac{99}{100}}{1}=\frac{1990}{10000}=19.9\,\%$$
$$P(pic|7^+)=\frac{P(pic\cap 7^+)}{P(7^+)}=\frac{\frac{1}{10}\cdot\frac{10}{100}}{\frac{1990}{10000}}=\frac{10}{1990}=0.502\,\%$$

15. El retraso o adelanto (en minutos) de un vuelo de Guadalajara a Monterrey es una variable aleatoria cuya densidad de probabilidad esta dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{288}(36 - x^2) & si \quad -6 \leq x \leq 6 \\ 0 & , \qquad DOM \end{cases}$$

Donde los valores negativos son indicativos de que el vuelo llega adelantado y los valores positivos señalan que el vuelo llega retrasado. Determine la probabilidad de que uno de estos vuelos llegará cuando menos dos minutos antes.

Solución

La variable es aleatoria continua.

$$P(\Omega) = 1$$

$$\frac{1}{288}\int_{-6}^{6}(136 - x^2)dx = \frac{1}{288}(36x - \frac{x^3}{3})\Big|_{-6}^{6} = \frac{1}{288}(216 - 72 + 216 - 72)$$

$$= \frac{1}{288}(288) = 1$$

$$\frac{1}{288}\int_{-6}^{6}(136 - x^2)dx = \frac{1}{288}(36x - \frac{x^3}{3})\Big|_{-2}^{-6} = \frac{1}{288}(-72 + \frac{8}{3} + 216 - 72) = \frac{1}{288}(\frac{224}{3}) = 0.2592$$

16. Si la ganancia de un contratista en una obra de construcción puede considerarse como una variable aleatoria que tiene la densidad de probabilidad:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{18}(x + 1) & si \quad -1 \leq x \leq 5 \\ 0 & , \qquad DOM \end{cases}$$

Donde las utilidades se expresan en miles de pesos, ¿cuál es la utilidad esperada?

Solución

La variable es aleatoria continua.

$$\frac{1}{18}\int_{-1}^{5}(x + 1)dx = \frac{1}{18}(\frac{x^2}{2} + x)\Big|_{-1}^{5} = \frac{1}{18}(\frac{25}{2} + 5 - \frac{1}{2} + 1) = 1$$

$$\mu = \frac{1}{18}\int_{-1}^{5}x(x + 1)dx = \frac{1}{18}(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2})\Big|_{-1}^{5} = 3$$

Por lo tanto, la utilidad esperada es de 3.

17. La probabilidad de que la Sra. Matínez venda una cadena de oro con una ganancia de \$3000 es: $\frac{3}{20}$. La probabilidad de que la venda y obtenga una ganancia de \$1500 es de $\frac{7}{20}$, la probabilidad de que salga a mano es $\frac{7}{20}$ y la probabilidad de que pierda \$1500 es $\frac{3}{20}$. ¿Cuál es su ganancia esperada?
Solución
La variable es aleatoria discreta, así:

$$\mu = \sum_{i=0}^{n=4} x_i f(x_i) = 3000 * \frac{3}{20} + 1500 * \frac{7}{20} + 0 * \frac{7}{20} - 1500 * \frac{3}{20} = 750$$

Por lo tanto, su ganancia esperada es de \$750.

18. El tiempo que tardan en atender a un individuo en una cafetería es una variable aleatoria con la densidad de probabilidad:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}(e^{-\frac{x}{4}}) & si \quad x > 0 \\ \\ 0 & , \quad DOM \end{cases}$$

Obtenga el valor esperado de esta distribución.
Solución
La variable es aleatoria continua.

$$P(\Omega) = \int_0^\infty (\frac{1}{4}(e^{-\frac{x}{4}}))dx = -e^{-\frac{x}{4}}\Big|_0^b = \lim_{b\to\infty} -e^{-\frac{b}{4}} - (-e^0) = 1$$

$$\mu = \int_0^\infty (\frac{1}{4}x(e^{-\frac{x}{4}}))dx = \frac{1}{4}(e^{-\frac{x}{4}})(-4x-16)\Big|_0^b = \lim_{b\to\infty} -e^{-\frac{b}{4}}(-4b-16) - (-e^0)(-16) = 4$$

Por lo tanto el valor esperado es 4.

19. El número de horas de operación satisfactoria que proporciona un televisor Sonny es una variable aleatoria de z cuya función de probabilidad es:

$$f(z) = \begin{cases} 0.0001e^{-0.0001z} & si \quad z > 0 \\ \\ 0 & , \quad DOM \end{cases}$$

Obtenga el valor esperado de esta distribución.
Solución
La variable es aleatoria continua.

$$P(\Omega) = \int_{0}^{\infty} (0.0001e^{-0.0001z})dz = -e^{-0.0001z}\Big|_{0}^{b} = \lim_{b\to\infty} -e^{-0.0001b} - (-e^{0}) = 1$$

$$\mu = \int_{0}^{\infty} (0.0001ze^{-0.0001z})dz = \frac{e-\frac{x}{10000}(-10000x - 100000000)}{10000}\Bigg|_{0}^{b}$$

$$= \lim_{b\to\infty} \frac{e-\frac{b}{10000}(-10000b - 100000000)}{10000} - \frac{e-\frac{0}{10000}(-10000(0) - 100000000)}{10000} = 10000$$

Por lo tanto, el valor esperado es 10 000.

2. Lista 2

1. Se sabe que 10 % de los vasos producidos por cierta máquina tienen algún defecto. Si se seleccionan 10 vasos por ésta máquina, ¿cuál es la probabilidad de que ninguno este defectuoso?, ¿cuántos se esperaría encontrar defectuosos?
   Solución
   La variable tiene una distribución binomial

$$n = 10$$
$$p = 0.1$$
$$q = 0.9$$
$$P(x = 0) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = \binom{10}{0} (0.1)^0 (0.9)^{10-0} = 0.3486784401 \textit{ o } 34.86\,\%.$$

$$\mu = np = (10)(0.1) = 1$$

2. Un laberinto para ratas tiene un corredor recto, y al final una bifurcación; en la bifurcación, la debe ir a la derecha o a la izquierda. Suponer que se colocan 10 ratas, en el laberinto, de una en una. Si cada rata toma al azar una de las dos alternativas del camino. ¿Cuál es la probabilidad de que cuando menos 9 vayan al mismo lado?
   Solución
   La variable tiene una distribución binomial

$$n = 10$$
$$p = 0.5$$
$$q = 0.5$$
$$P(x = 9) = \binom{10}{9} (0.5)^x (0.5)^{n-x} + \binom{10}{10} (0.5)^x (0.5)^{n-x} = 0.0107421875 \textit{ o } 1.07\,\%.$$

3. En una "prueba de tortura" se enciende y se apaga un interruptor eléctrico hasta que este falla. Si la probabilidad es 0.001 de que el interruptor falle en cualquier momento en que este encendido o apagado, cual es la probabilidad de que el interruptor no falle durante las primeras 800 veces que se enciende o apague?
   Solución
   La variable es de Poisson

$$n = 800$$
$$p = 0.001$$
$$q = 0.999$$
$$\lambda = np = 800(0.001) = 0.8$$
$$P(x = 0) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = \frac{(0.8)^0 e^{-\lambda}}{0!} = \frac{1e^{-.8}}{1} = 0.4493289641 \text{ ó } 44.93\,\%$$

4. Un ingeniero de control de calidad inspecciona una muestra tomada al azar de dos calculadoras portátiles de cada lote de 18 unidades que llega y acepta el lote si ambas están en buenas condiciones de funcionamiento; en caso contrario, se inspecciona todo el lote y el costo se carga al distribuidos. ¿Cuál es la probabilidad de que este lote sea aceptado sin mayor inspección si contiene...

   a) Cuatro calculadoras en mal estado?
   Solución
   La variable es de hipergeometrica

$$N = 18$$
$$n = 2$$
$$k = 18 - 4 = 14$$
$$x = 2$$
$$P(2) = \frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{14}{2}\binom{4}{0}}{\binom{18}{2}} = \frac{91}{153} = 0.5947712418 \text{ ó } 59.47\,\%$$

   b) Ocho calculadoras en malas condiciones de funcionamiento?
   Solución
   La variable es de hipergeometrica

$$N = 18$$
$$n = 2$$
$$k = 18 - 8 = 10$$
$$x = 2$$
$$P(2) = \frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{10}{2}\binom{8}{0}}{\binom{18}{2}} = \frac{45}{153} = \frac{5}{17} = .294117647 \text{ ó } 29.41\,\%$$

5. Un examen de opción múltiple consta de ocho preguntas y tres respuestas a cada pregunta. Si un estudiante responde a cada pregunta tirando un dado y marca la primera respuesta si obtiene un 1 o un 2, la segunda respuesta si obtiene un 3 o un 4, y la tercera respuesta si obtiene un 5 o un 6, ¿Cuál es la probabilidad de que logre exactamente cuatro respuestas correctas?
   Solución
   La variable es de binomial

$$n = 8$$
$$p = \frac{1}{3}$$
$$q = \frac{2}{3}$$
$$P(4) = \binom{n}{x}(p)^x (q)^{n-x} = \binom{8}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^4 = 0.1707056851 \text{ ó } 17.07\,\%$$

6. Si el 40 % de los alumnos se volvieran agresivos en un periodo de 2 horas después de haber ingerido algún liquido en el Sportaco, determine la probabilidad de que exactamente seis de los 15 alumnos que han ingerido algún líquido se vuelvan agresivos en el periodo de 2 horas.
Solución
La variable es de binomial

$$n = 15$$
$$p = 0.4$$
$$q = 0.6$$
$$P(6) = \binom{n}{x}(p)^x(q)^{n-x} = \binom{15}{6}(0.4)^6(0.6)^9 = .2065976053 \text{ ó } 20.65\,\%$$

7. Un jurado de 7 jueces debe decidir entre 2 finalistas quien es la ganadora de un concurso de belleza, para lo cual bastara una mayoría de los jueces. Suponga que 4 jueces voten por María y que los otros 3 voten por Susana. Si se seleccionan al azar 3 jueces y se les pregunta por quien van a votar, ¿cuál es la probabilidad de que la mayoría de los jueces de la muestra estén a favor de María?
Solución
La variable es de hipergeometrica

$$N = 7$$
$$n = 3$$
$$k = 4$$
$$x = 2, 3$$
$$p(2,3) = \sum_{x=2}^{3} \frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{4}{2}\binom{3}{1}}{\binom{7}{3}} + \frac{\binom{4}{3}\binom{3}{0}}{\binom{7}{3}} = \frac{22}{35} = 0.6285714286 \text{ ó } 62.85\,\%$$

8. Se ha observado que el transito promedio de automóviles en determinado punto de un camino rural es de 3 por hora. Suponga que los instantes en que pasan los mismos son independientes, haciendo que x represente el numero de los que pasan por este punto en un intervalo de 20 minutos, calcule la probabilidad de $P(x > 2)$
Solución
La variable es de Poisson

$$\lambda = np = 1 \qquad \text{(cada 20 min)}$$
$$x > 2$$
$$p(x > 2) = \sum_{x=3}^{\infty} \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = \sum_{x=3}^{\infty} \frac{1^x e^{-1}}{x!} = 1 - \sum_{x=0}^{2} \frac{1^x e^{-1}}{x!} = 1 - \left(\frac{e^{-1}}{0!} + \frac{e^{-1}}{1!} + \frac{e^{-1}}{2!}\right)$$
$$= 0.08030139707 \text{ ó } 8.03\,\%$$

9. En determinada planta manufacturera han ocurrido accidentes a razón de 1 cada 2 meses. suponiendo que ocurren en forma independiente, Cual es el numero esperado de

accidentes al año?
Solución
La variable es de Poisson

$$\lambda = 1 \qquad \text{(cada 2 meses)}$$
$$\lambda = \frac{(1 \text{ accidentes})(12 \text{ meses})}{2 \text{ meses}} = 6 \text{ accidentes}$$

10. En Chilpancingo, la incompatibilidad se da como la razón o motivo legal en el 70 % de todos los casos de divorcio. Obtenga la probabilidad de que 5 de los 6 siguientes divorcios archivados de esta ciudad argumentan incompatibilidad como motivo principal.
    Solución
    La variable es binomial

$$n = 6$$
$$p = 0.70$$
$$q = 0.30$$
$$P(5) = \binom{6}{5}(0.7)^5(0.3)^1 = 0.302526 \text{ ó } 30.35\,\%$$

11. Un psicólogo asevera que sólo el 50 %de todos los alumnos del último semestre de vocacional, capaces de desempeñar trabajos a nivel superior, asisten en realidad al nivel superior. Suponiendo verdadera esta afirmación, obtenga las probabilidades de que, entre 18 alumnos capaces de desempeñar trabajos a nivel superior, exactamente 10 asistan a ESCOM.
    Solución
    No se puede resolver, pues no se puede saber cuántos de los que están en superior, están en ESCOM.