Ejercicio 31 Un promedio de 0.5 clientes por minuto llega a una caja de salida en un almacen. ¿Cuál es la probabilidad de que lleguen más de 20 clientes a la caja en un intervalo especifico de media hora?

Solución:
X es una variable con distribución exponencial.
Datos:
- $P = 0{,}5xmin$
- $n = \frac{1}{2}hora = 30min.$
- $\lambda = np = (0{,}5)(30) = 15$
- $x > 20$

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} = 15e^{-15x}$$

$$\mu = \int_{20}^{\infty} xf(x) = \lim_{b\to\infty} \int_{20}^{b} x15e^{-15x}dx = \lim_{b\to\infty} x(-e^{-15x})|_{20}^{b} - \int_{20}^{b} -e^{-15x}dx$$

$$\mu = \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{x}{e^{15x}} - \frac{1}{15e^{15x}}\right)|_{20}^{b}$$

$$\mu = \lim_{n\to\infty} \left(-\frac{b}{e^{15b}} - \frac{1}{15e^{15b}} + \frac{20}{e^{(15)(20)}} + \frac{1}{e^{(15)(20)}}\right) = 20 + \frac{1}{15} = 20{,}067$$

Entonces,

$$P(x, t = \tfrac{1}{2}) = \int_0^{\frac{1}{2}} \tfrac{301}{15} e^{-\frac{301}{15}} = 0{,}999 \text{ ó } 99{,}9\,\%$$

Ejercicio 32 Determine la media y la varianza para todas las distribuciones vistas en clase.

- Solución: Media Poisson

Sea x una variable aleatoria con distribución de Poisson

$$E[x] = \sum_{j=0}^{\infty} jp(1-p)^j$$

$$E[x] = p(1-p)\sum_{j=0}^{\infty} j(1-p)^{j-1}$$

$$E[x] = -p(1-p)\sum_{j=0}^{\infty} \frac{d}{dp}(1-p)^j$$

Ya que una serie de potencias puede ser diferenciada término a término, se sigue que

$$E[x] = -p(1-p)\frac{d}{dp}\sum_{j=0}^{\infty}(1-p)^j$$

Utilizando la fórmula para una progresión geométrica, vemos que

$$E[x] = -p(1-p)\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{p}\right) = -p(1-p)\left(\frac{-1}{p^2}\right)$$

Lo que nos da como resultado

$$E[x] = \frac{1-p}{p}$$

- Solución: Media Distribución Binomial

Sea x una variable aleatoria con una distribución binomial

Para $n = 1$ $\quad x$ asume los valores 0 y 1 con probabilidades $1-p$ y p respectivamente

$$E[x] = 0p(x=0) + 1p(x=1) = p$$

Calculando para cualquier $n \geq 1$

$$E[x] = \sum_{j=0}^{\infty} j\binom{n}{j}p^j(1-p)^{n-j}$$

Para calcular esto observamos que

$$j\binom{n}{j} = \frac{jn!}{j!(n-j)!}$$

$$j\binom{n}{j} = \frac{n(n-1)!}{(j-1)![(n-1)-(j-1)]!}$$

$$j\binom{n}{j} = n\binom{n-1}{j-1}$$

Entonces

$$E[x] = n\sum_{j=0}^{n}\binom{n-1}{j-1}p^j(1-p)^{n-j}$$

Si $i = j-1$ vemos que

$$E[x] = np\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}p^i(1-p)^{n-i-1}$$

Por el teorema del binomio

$$\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} p^i (1-p)^{n-i-1} = [p + (1-p)^{n-1}] = 1$$

Por lo que

$$E[x] = np$$

Ejercicio 33 Demuestre que las distribuciones vistas en clase son de probabilidad.

Solución:

a) Distribución Binomial

$$P(\Omega) = 1$$

$$P(\Omega) = \sum_{x=0}^{n} f(x) = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = 1$$

Sabemos que

$$(a+b)^n = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} a^x b^{n-x} \qquad \forall \ a, b \ \in \ \mathbb{R}$$

si $a = p$ y $b = q$

$$(p+q)^n = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

$$(1)^n = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \qquad \textit{ya que} \ \ p + q = 1$$

$$1 = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

Solución:

b) Distribución Binomial Negativa

Solución:

$$1 = \sum_{n=x}^{\infty} \binom{n-1}{x-1} p^x (1-p)^{n-x} = \sum_{n=x}^{\infty} \frac{(n-1)!}{(x-1)!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x} = \frac{p^x}{(x-1)!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+x-1)!}{n!} (1-p)^n$$

Entonces podemos cambiar nuestra hipótesis de inducción (HI) suponiendo que

$$HI = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+x-1)!}{n!} (1-p)^n = \frac{(x-1)!}{p^x} \tag{1}$$

Demostrar que (1) es verdadera para $x+1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+x)!}{n!} (1-p)^n = \frac{x!}{p^{x+1}} \tag{2}$$

Tenemos que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+x)!}{n!} (1-p)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+x) \frac{(n+x-1)!}{n!} (1-p)^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{(n+x-1)!}{n!} (1-p)^n + x \sum_{n=0}^{\infty} x \frac{(n+x-1)!}{n!} (1-p)^n \tag{3}$$

$$HI = \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{(n+x-1)!}{n!} (1-p)^n + x \frac{(x-1)!}{p^x}$$

Trabajaremos ahora con

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \frac{(n+x-1)!}{n!} (1-p)^n$$

Tenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \frac{(n+x-1)!}{n!} (1-p)^n = (1-p) \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{(n+x-1)!}{n!} (1-p)^{n-1}$$

$$= (1-p) \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{d}{dp} \left(\frac{(n+x-1)!}{n!} (1-p)^n \right) = -(1-p) \frac{d}{dp} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(n+x-1)!}{n!} (1-p)^n \right) \tag{4}$$

HI

$$= -(1-p)\frac{d}{dp}\left(\frac{(x-1)!}{p^x}\right) = (1-p)\frac{x!}{p^{x+1}}$$

Insertando (3) en (4) obtenemos:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+x)!}{n!}(1-p)^n = (1-p)\frac{x!}{p^{x+1}} + \frac{x!}{p^x} = \frac{(1-p)x! + p(x!)}{p^{x+1}} = \frac{x!}{p^{x+1}}$$

Y por lo tanto queda demostrado (2) lo que implica que la proposición es verdadera.

c) Distribución Geométrica

Solución:

$$P(\Omega) = 1$$

$$P(\Omega) = \sum_{x=1}^{n} f(x) = \sum_{x=1}^{n} pq^{x-1}$$

$$P(\Omega) = pq^0 + pq^1 + pq^2 + pq^3 + pq^4 + \cdots + pq^{n-1}$$

$$P(\Omega) = p(q^0 + q^1 + q^2 + q^3 + q^4 + \cdots + q^{n-1})$$

$$S_n = r^0a_1 + r^1a_1 + r^2a_1 + r^3a_1 + \cdots + r^na_1$$

$$rS_n = r^1a_1 + r^2a_1 + r^3a_1 + \cdots + r^{n+1}a_1$$

$$S_n - rS_n = a_1 - r^{n+1}a_1$$

$$S_n(1-r) = a_1\frac{1-r^{n+1}}{1-r}$$

$$S_{n\to\infty} = \lim_{n\to\infty} a_1 \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$$

$si \qquad r < 1$

$$= \frac{a_1}{1-r}$$

$$S_{n\to\infty} = \frac{1(1-q^{n+1})}{1-q}$$

$$S_{n\to\infty} = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{p}$$

d) Distribución Hipergeométrica

Solución:

e) Distribución de Poisson

Solución:

$$P(\Omega) = 1$$

$$1 = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

$$1 = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$1 = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^x \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}$$

$$1 = \sum_{x=0}^{n} \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-x+1)(n-x)!}{(n-x)!x!} \frac{\lambda^x}{n^x} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-x}$$

$$1 = \sum_{x=0}^{n} \frac{\frac{n}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{x-1}{n}\right)}{x!} \lambda \big[$$

$si \qquad n \to \infty$

$$1 = \sum_{x=0}^{n} \frac{1(\lambda)^x(1)(e^{-\lambda})}{x!}$$

$$1 = \sum_{x=0}^{n} \frac{(\lambda)^x(e^{-\lambda})}{x!}$$

$Nota:$

$$y = \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{\dfrac{-n}{\lambda}}$$

$$si \qquad n \to \infty$$

$$ln(y) = ln\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{\dfrac{-n}{\lambda}}$$

$$ln(y) = -\frac{n}{\lambda} ln\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)$$

$$ln(y) = \frac{ln\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)}{-\frac{\lambda}{n}}$$

$$ln(y) = \frac{\dfrac{\dfrac{-\lambda}{n^2}}{1 - \dfrac{\lambda}{n}}}{\dfrac{-\lambda}{n^2}}$$

$$ln(y) = \frac{\dfrac{-\lambda}{n^2}\left(1 - \dfrac{\lambda}{n}\right)}{\dfrac{-\lambda}{n^2}}$$

$$ln(y) = 1 - \frac{\lambda}{n}$$

$$ln(y) = 1$$

$$ln(y) = e^1$$

$$ln(y) = e$$

f) Distribución Exponencial

Solución:

$$P(\Omega) = 1$$

$$f(x) = \mu e^{-\mu x} \qquad\qquad x > 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{\infty} f(x)dx = \int_{0}^{\infty} \mu e^{-\mu x}dx$$

$$= \lim_{h\to\infty} \int_{0}^{h} \mu e^{-\mu x}dx = \lim_{h\to\infty} -e^{-\mu x} \Big|_{0}^{h} = \lim_{h\to\infty} -e^{-\mu h} - (-e^{-\mu(0)}) = e^0 = 1$$