Herramientas Computacionales 2016661

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Ricardo Amézquita

Departamento de Física
Universidad Nacional de Colombia
Sede Bogotá

Problema a resolver

Partiendo de:

$$\frac{dy}{dt} = f(y,t)$$

y dada una condición inicial:

$$y(t_0) = y_0$$

Encontrar:

$$y(t)$$

Problema típico

¿Cual es la posición $X(t)$ de un vehículo si en $t = 0$ se encuentra en la posición X_0 y su velocidad está dada por la función $V(t)$?

Método de Euler

Expandiendo en series de Taylor, se tiene que:

$$y\left(t+\Delta t\right) = y\left(t\right) + \Delta t\, y'\left(t\right) + O\left(\Delta t^2\right) = y\left(t\right) + \Delta t\, f\left(y,t\right) + O\left(\Delta t^2\right)$$

Haciendo los siguientes cambio de notación:

$$\begin{aligned} y\left(t_0\right) &= y_0 \\ y\left(t\right) &= y\left(t_0+\Delta t\, n\right) = y_n \\ y\left(t+\Delta t\right) &= y\left(t_0+\Delta t\, \left(n+1\right)\right) = y_{n+1} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f\left(y_0;t_0\right) &= f_0 \\ f\left(y_n;t_n\right) &= f_n \\ f\left(y_{n+1};t_{n+1}\right) &= f_{n+1} \\ t_0+\Delta t\, n &= t_n \end{aligned}$$

Dado que: $t+\Delta t = t_0+\Delta t\, n+\Delta t = t_0+\left(n+1\right)\Delta t$, la expansión de Taylor se puede reescribir como:

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t\, f_n + O\left(\Delta t^2\right)$$

Resuelva la ecuación:

$$\frac{dy}{dx} = -xy$$

con $y(0) = 1$.

x	$hf(x,y)$	Euler	$y(x) = exp\left(-x^2/2\right)$[1]
0	0	1.000000	1
0.1	-0.0100000	1.000000	0.995012
0.2	-0.0198000	0.990000	0.980199
0.3	-0.0291960	0.970200	0.955997
0.4	-0.0376438	0.941094	0.923116
0.5	-0.0451725	0.903450	0.882497
0.6	-0.0514967	0.858278	0.835270
0.7	-0.0564747	0.806781	0.782705
0.8	-0.0600245	0.750306	0.726149
0.9	-0.0621254	0.690282	0.666977
1.0	-0.0628157	0.628157	0.606531

[1] Solución exacta

Error en el método de Euler

Si se tienen en cuenta términos de orden 2 el método de Euler se puede escribir como:

$$y\left(t_0+\Delta t\right) \quad = \quad y\left(t_0\right)+\Delta t\, f'\left(t_0\right)+\frac{f'\left(t_0\right)\Delta t^2}{2}$$

Si se reduce a la mitad Δt, el término de error se reduce una cuarta parte

Método del punto medio

Como caso general, una ecuación diferencial ordinaria se puede resolver como:

$$y\left(t_{n+1}\right) = y\left(t_n\right) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f\left(t\right) dt$$

Si se utiliza el método del punto medio para resolver la integral, esto se puede escribir como:

$$y\left(t_{n+1}\right) = y\left(t_n\right) + \Delta t\, f\left(y\left(t_n\right), t_0 + \frac{\Delta t}{2}\right) + \frac{f''\left(y\left(t_n\right), t_0 + \frac{\Delta t}{2}\right)}{6} \frac{\Delta t^3}{4} + \ldots$$

Si se reduce a la mitad Δt, el término de error se reduce una octava parte.

Método de Euler Mejorado[2]

$$
\begin{aligned}
y\left(t_{n+1}\right) &= y\left(t_n\right) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{dy}{dt} dt \\
&= y\left(t_n\right) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f\left(y\left(t\right), t\right) dt \\
&\simeq y\left(t_n\right) + \frac{\Delta t}{2}\left(f\left(y\left(t_n\right), t_n\right) + f\left(y\left(t_{n+1}\right), t_{n+1}\right)\right) \\
&= y\left(t_n\right) + \frac{\Delta t}{2}\left(f\left(y_n, t_n\right) + f\left(y_{n+1}, t_{n+1}\right)\right) \qquad (1)
\end{aligned}
$$

Donde se utilizó la regla del trapecio para la segunda integral

[2] También conocido como método de Heun

Al remplazar y_{n+1} por su aproximación de Euler en la ecuación 1 se llega a:

$$y\left(t_{n+1}\right) \simeq y\left(t_n\right) + \frac{h}{2}\left(f\left(y_n, t_n\right) + f\left(y_n + \Delta t\, f\left(y_n, t_n\right), t_{n+1}\right)\right)$$

lo cual se puede reescribir como:

$$y_{n+1} \simeq y_n + \frac{h}{2}\left(f_n + \tilde{f}_{n+1}\right)$$

donde:

$$\tilde{f}_{n+1} = f\left(y_n + h\, f_n, t_{n+1}\right)$$

Método de Runge-Kutta

$$\frac{dy}{dt} = f(y,t)$$

$$\begin{aligned}
k_1 &= \Delta t\, f(t_n, y_n) \\
k_2 &= \Delta t\, f\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right) \\
k_3 &= \Delta t\, f\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right) \\
k_4 &= \Delta t\, f\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, y_n + k_3\right)
\end{aligned}$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{k_1}{6} + \frac{k_2}{3} + \frac{k_3}{3} + \frac{k_4}{6}$$

Método de Runge-Kutta para 2 ecuaciones acopladas

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y, t) \qquad \frac{dy}{dt} = g(x, y, t)$$

$$k_{x1} = \Delta t\, f(t_n, x_n, y_n) \qquad k_{y1} = \Delta t\, g(t_n, x_n, y_n)$$

$$k_{x2} = \Delta t\, f\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, x_n + \frac{k_{x1}}{2}, y_n + \frac{k_{y1}}{2}\right) \qquad k_{y2} = \Delta t\, g\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, x_n + \frac{k_{x1}}{2}, y_n + \frac{k_{y1}}{2}\right)$$

$$k_{x3} = \Delta t\, f\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, x_n + \frac{k_{x2}}{2}, y_n + \frac{k_{y2}}{2}\right) \qquad k_{y3} = \Delta t\, g\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, x_n + \frac{k_{x2}}{2}, y_n + \frac{k_{y2}}{2}\right)$$

$$k_{x4} = \Delta t\, f\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, x_n + k_{x3}, y_n + k_{y3}\right) \qquad k_{y4} = \Delta t\, g\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, x_n + k_{x3}, y_n + k_{y3}\right)$$

$$x_{n+1} = x_n + \frac{k_{x1}}{6} + \frac{k_{x2}}{3} + \frac{k_{x3}}{3} + \frac{k_{x4}}{6}$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{k_{y1}}{6} + \frac{k_{y2}}{3} + \frac{k_{y3}}{3} + \frac{k_{y4}}{6}$$

Sistema masa resorte

Un sistema masa resorte se puede describir con la siguiente ecuación diferencial,

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

si se define $v = \frac{dx}{dt}$, el problema se puede representar como el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales acopladas de primer orden:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= v \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{kx}{m}\end{aligned}$$

que puede solucionarse utilizando un método numérico si se tienen en cuenta las condiciones iniciales para x y v.
Ver ejemplo.py

Ecuación exacta del péndulo simple

Un péndulo simple se puede describir con la siguiente ecuación diferencial,

$$L\frac{d^2\theta}{dt^2} + g\,\sin\theta = 0 \tag{2}$$

Si se define $\omega = \theta'$, la ecuación 2 se puede escribir como el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales acopladas de primer orden:

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= \omega \\ \frac{d\omega}{dt} &= -\frac{g}{L}\sin\theta \end{aligned}$$

que puede solucionarse utilizando un método numérico si se tienen en cuenta las condiciones iniciales para θ y ω.

Ejercicio

1. Resolver la ecuación exacta del péndulo simple por el método de Runge-Kutta
2. Buscar como se usa la función de scipy **odeint** y utilizarla para resolver el problema de 3 cuerpos para el sol la tierra y la luna. Haga gráficas de las orbitas resultantes.