Herramientas Computacionales 2016661

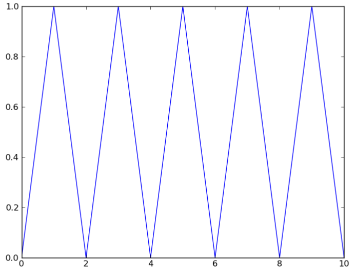
Transformada de Fourier

Ricardo Amézquita Orozco

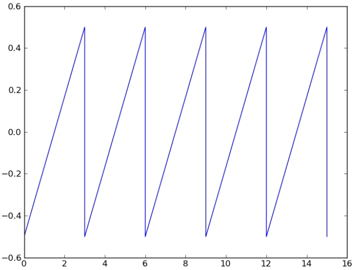
27 de abril de 2016

Señales periódicas

$$
\begin{aligned}
y(t+T) &= y(t) \\
\omega &= \frac{2\pi}{T}
\end{aligned}
$$



Señal triangular T=2



Señal diente de sierra T=3

Expansiones en series de Fourier

$$f_{aprox}(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\,\omega\,t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\,\omega\,t)$$

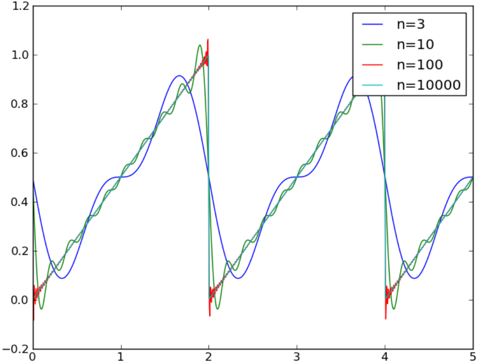
$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\,\omega\,t)\,dt \qquad b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\,\omega\,t)\,dt$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Preguntas:

1. Si los a_n y los b_n son diferentes de 0 para todo n, ¿cual es la frecuencia de oscilación de f_{aprox}?
2. ¿Es posible expandir una función no periódica usando series de Fourier?

Ejemplo de expansión:



$$f_{aprox}(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Ejercicios:

1. Grafique esta función aproximada para distintos valores de n.
2. Ajuste usando mínimos cuadrados los valores de los primeros 10 coef. y grafique el resultado.

Transformada de Fourier

$$\mathcal{F}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-\imath \omega t)\, dt$$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(\omega) \exp(\imath \omega t)\, d\omega$$

1. Son una extensión de las series de Fourier
2. Sirven para analizar funciones no periódicas
3. Sirven para expandir funciones complejas

Datos importantes de la transformada de Fourier

Definiciones:

1. $|\mathcal{F}(\omega)| \longrightarrow$Espectro de Fourier
2. $|\mathcal{F}(\omega)|^{2} \longrightarrow$Espectro de potencia de Fourier o densidad espectral
3. $\phi(\omega) = \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}(\mathcal{F}(\omega))}{\mathrm{Re}(\mathcal{F}(\omega))}\right) \longrightarrow$Fase de la transformada de Fourier

Propiedades:

1. $\mathrm{TFI}(\mathrm{TF}(f(t))) = f(t) \qquad \mathrm{TF}(\mathrm{TFI}(\mathcal{F}(\omega))) = \mathcal{F}(\omega)$
2. $\mathrm{TF}(\alpha f(t) + \beta g(t)) = \alpha\mathrm{TF}(f(t)) + \beta\mathrm{TF}(g(t))$
3. Si $\mathrm{TF}(f(t)) = \mathcal{F}(\omega)$, $\longrightarrow \mathrm{TF}(f(a\,t)) = \frac{1}{a}\mathcal{F}\left(\frac{\omega}{a}\right)$
4. Si $\mathrm{TF}(f(t)) = \mathcal{F}(\omega)$, $\longrightarrow \mathrm{TF}(f(t-a)) = \mathcal{F}(\omega)\exp(-2\pi\imath\omega\,a)$
5. $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}(\omega)|^2\, d\omega$

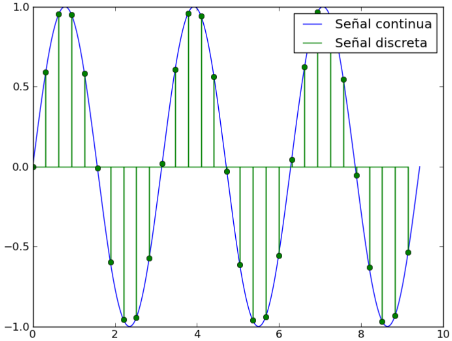
Teoremas de la convolución y la correlación

Si $\mathrm{TF}\left(g\left(t\right)\right)=\mathcal{G}(\omega)$ y $\mathrm{TF}\left(f\left(t\right)\right)=\mathcal{F}(\omega)$

$$\mathrm{TF}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} g\left(\tau\right) f\left(t-\tau\right) d\tau\right)=\mathrm{TF}\left(g * f\right)=\mathcal{G}(\omega)\mathcal{F}(\omega)$$

$$\mathrm{TF}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} g\left(\tau\right) f\left(\tau-t\right) d\tau\right)=\mathrm{TF}\left(g \star f\right)=\mathcal{G}^{*}(\omega)\mathcal{F}(\omega)$$

Nota: El teorema de la convolución se va a utilizar mas adelante para entender el funcionamiento de los filtros



$$f_n = f\left(t_o + n\,\Delta t\right)$$

$$F_m = \frac{1}{\Delta t}$$

Ejercicio:

Grafique 5 periodos de la función $y(t) = \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$ para T= 1s, 2s, 3s, 10s usando diferentes frecuencias de muestreo. Determine cual es el valor mínimo que puede tener esta ultima para que de la gráfica se pueda obtener la información de T. Relacione esta frecuencia de muestreo con T.

Transformada discreta de Fourier

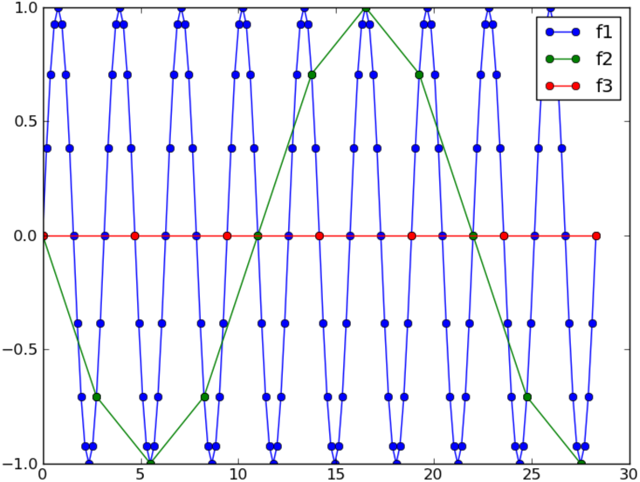
Teorema del muestreo de Nyquist-Shannon

Una señal análoga de banda limitada puede ser reconstruida completamente a partir de muestras discretas, si la frecuencia de muestreo cumple que:

$$f_m > 2 \times f_{max}$$

Transformada discreta de Fourier

Aliasing



Transformada continua:

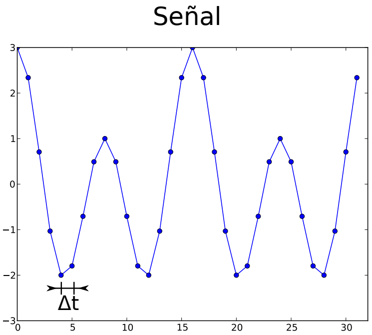
$$\mathcal{F}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-\imath\,\omega t)\, dt$$

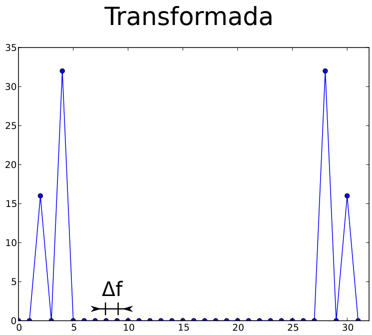
$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(\omega) \exp(\imath\,\omega t)\, d\omega$$

Transformada discreta:

$$\mathcal{F}_k = \sum_{n=0}^{N-1} f_n \exp\left(-2\pi\imath\frac{k}{N}n\right)$$

$$f_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \mathcal{F}_k \exp\left(2\pi\imath\frac{k}{N}n\right)$$





- Frecuencia de Muestreo $= \frac{1}{\Delta t} = N \times \Delta f$
- Tiempo total de muestreo $= N \times \Delta t$

Interpretación de la transformada de Fourier

Ejercicio:

Calcular la transformada discreta de Fourier de las siguientes funciones y comparar la amplitud y la fase de los picos correspondientes con los valores de amplitud y fase dados en las funciones.

1. $f(t) = 10 \times \exp\left(2\pi\imath \times 10 \times t\right)$
2. $f(t) = 10 \times \exp\left(\imath \times \left(2\pi \times 10 \times t + \pi/2\right)\right)$
3. $f(t) =$ $10 \times \exp\left(\imath \times \left(2\pi \times 10 \times t + \pi/2\right)\right) + 5 \times \exp\left(\imath \times \left(2\pi \times 20 \times t - \pi/2\right)\right)$
4. $f(t) = 6 \times \cos\left(2\pi \times 3 \times t\right)$
5. $f(t) = 4 \times \cos\left(2\pi \times 3 \times t + \pi/4\right)$
6. $f(t) = 3 \times \sin\left(2\pi \times 4 \times t\right)$
7. $f(t) = 13 + 7 \times \sin\left(2\pi \times 7 \times t\right) + 3 \times \cos\left(2\pi \times 3 \times t + \pi/4\right) + \sin\left(2\pi \times 7 \times t\right) + 7 + 3 \times \sin\left(2\pi \times 3 \times t + \pi/4\right)$

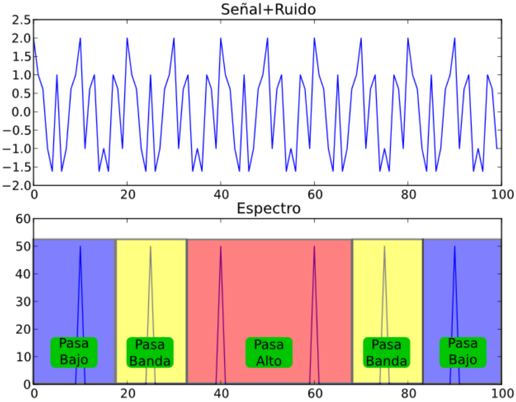
Filtrado de señales con la transformada rápida de Fourier

Preguntas:

1. ¿Que es un filtro?
2. ¿Como se define normalmente un filtro?

Filtrado en el dominio de las frecuencias

Interpretación de la convolución como filtro



$$\mathrm{TF}\left(g * f\right) = \mathcal{G}(\omega)\mathcal{F}(\omega)$$