

Taller II Electrodinámica I

Nombre: Stephanie Carolina Cely Rodriguez

C.C. 1013659975

Problema 4.28

Problem 4.28 Two long coaxial cylindrical metal tubes (inner radius a , outer radius b) stand vertically in a tank of dielectric oil (susceptibility χ_e , mass density ρ). The inner one is maintained at potential V , and the outer one is grounded (Fig. 4.32). To what height (h) does the oil rise in the space between the tubes?

La ganancia de energía cuando ingresa el aceite dielectrico a la cavidad cilindrica es:

$$[C_{after} - C_{before}] V^2 / 2$$

Dado que el volumen V es fijo hallaremos la capacitancia para un capacitor cilindrico de largo L cuando la cavidad tiene susceptibilidad dielectrica de χ_e . En el momento en el que el capacitor cilindrico se llena a una altura h con la sustancia que tiene constante dielectrica ϵ es:

$$C = 2\pi\epsilon\epsilon_0 / \ln(b/a)$$

$$C(h) = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln(b/a)} [h\epsilon_r + L - h]$$

Al llenarse la cavidad la ganancia de energía se reduce a:

$$\begin{aligned} & (C(h) - C(0))V^2 / 2 \\ \delta U_{cap} &= \frac{\pi h \epsilon_0 \chi_e}{\ln(b/a)} V^2 \end{aligned}$$

Donde usamos que $\chi_e = \epsilon_r - 1$. Luego el costo de energía para elevar el nivel de aceite a la altura requerida es:

$$\delta U_{grav} = \pi (b^2 - a^2) g \rho \int_0^h h' dh' = \frac{1}{2} \pi \rho g h^2 (b^2 - a^2)$$

El cambio total de energía cuando el aceite ingresa a la cavidad a la altura h , luego

$$U = \delta U_{grav} - \delta U_{cap}$$

La condición de equilibrio esta dada por $-\vec{\nabla}U = 0$ y la fuerza es cero.

Usando el gradiente para reducir la derivada respecto a la altura la condición de equilibrio resulta ser

$$h = \frac{\epsilon_0 \chi_e V^2}{\rho g (b^2 - a^2) \ln(b/a)}$$

Problema 4.33

Problem 4.33 At the interface between one linear dielectric and another the electric field lines bend (see Fig. 4.34). Show that

$$\tan \theta_2 / \tan \theta_1 = \epsilon_2 / \epsilon_1, \quad (4.68)$$

assuming there is no *free* charge at the boundary. [*Comment:* Eq. 4.68 is reminiscent of Snell's law in optics. Would a convex "lens" of dielectric material tend to "focus," or "defocus," the electric field?]

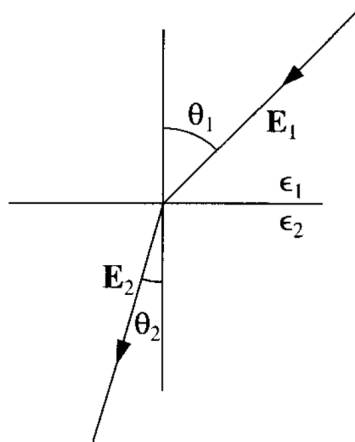


Figure 4.34

Considerando que pasa cuando el campo eléctrico de tensión E y el campo desplazante D se encuentran en la frontera de dos materiales dieléctricos, comparamos las componentes tangencial y normal en ambos lados de la frontera, entonces:

$$\mathbf{E}_1^{\parallel} = \mathbf{E}_2^{\parallel} \quad , \quad \mathbf{D}_1^{\perp} = \mathbf{D}_2^{\perp}$$

Además sabemos que:

$$\mathbf{E}_1^{\perp} \neq \mathbf{E}_2^{\perp} \quad , \quad \mathbf{D}_1^{\parallel} \neq \mathbf{D}_2^{\parallel}$$

Para los dieléctricos lineales que cumplan con:

$$\mathbf{D}_1 = \epsilon_1 \epsilon_0 \mathbf{E}_1$$

$$\mathbf{D}_2 = \epsilon_2 \epsilon_0 \mathbf{E}_2$$

nuestra ecuación se convierte en:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_1^{\parallel} &= \mathbf{E}_2^{\parallel} \\ \epsilon_1 \mathbf{E}_1^{\perp} &= \epsilon_2 \mathbf{E}_2^{\perp}\end{aligned}$$

Como estos dos vectores hacen parte del mismo plano que a su vez es perpendicular a la frontera el ángulo que se forma es:

$$\begin{aligned}\theta_1 &= \arctan \frac{E_1^{\parallel}}{E_1^{\perp}} \\ \theta_2 &= \arctan \frac{E_2^{\parallel}}{E_2^{\perp}}\end{aligned}$$

Extendiendo el desarrollo tenemos que:

$$\frac{\tan \theta_2}{\tan \theta_1} = \frac{E_2^{\parallel} / E_2^{\perp}}{E_1^{\parallel} / E_1^{\perp}} = \frac{E_2^{\parallel}}{E_1^{\parallel}} \times \frac{E_1^{\perp}}{E_2^{\perp}} = 1 \times \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}$$

Para la aproximación de ángulos pequeños este ultimo resultado se acerca a la conocida ley de Snell, por lo que el campo electrico cruzando adentro y afuera del dielectrico sigue una trayectoria similar a la de los rayos de luz en un material con indice de refraccion transparente, por lo que podia enfocar las lineas del campo electrico. Sin embargo hay diferencias en las propiedades fisicas de las lineas del campo electrico y las que sigue el rayo de luz, ya que las primeras se curvan y se ven afectadas en el punto de llegada y el punto de salida, es decir por las dos cargas, en cambio puede tomarse que la luz sigue caminos rectos. Una opcion es colocar una carga positiva a un lado del dielectrico y una negativa en el otro, ajustar las distancias hasta que forme una imagen pero esto requeriria ajustar las posiciones de las cargas.

Problema 4.38

Problem 4.38 In a linear dielectric, the polarization is proportional to the field: $\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}$. If the material consists of atoms (or nonpolar molecules), the induced dipole moment of each one is likewise proportional to the field $\mathbf{p} = \alpha \mathbf{E}$. *Question:* What is the relation between the atomic polarizability α and the susceptibility χ_e ?

Since \mathbf{P} (the dipole moment per unit volume) is \mathbf{p} (the dipole moment per atom) times N (the number of atoms per unit volume), $\mathbf{P} = N\mathbf{p} = N\alpha\mathbf{E}$, one's first inclination is to say that

$$\chi_e = \frac{N\alpha}{\epsilon_0}. \quad (4.70)$$

And in fact this is not far off, if the density is low. But closer inspection reveals a subtle problem, for the field \mathbf{E} in Eq. 4.30 is the *total macroscopic* field in the medium, whereas the field in Eq. 4.1 is due to everything *except* the particular atom under consideration (polarizability was defined for an isolated atom subject to a specified external field); call this field \mathbf{E}_{else} . Imagine that the space allotted to each atom is a sphere of radius R , and show that

$$\mathbf{E} = \left(1 - \frac{N\alpha}{3\epsilon_0}\right) \mathbf{E}_{\text{else}}. \quad (4.71)$$

Use this to conclude that

$$\chi_e = \frac{N\alpha/\epsilon_0}{1 - N\alpha/3\epsilon_0},$$

or

$$\alpha = \frac{3\epsilon_0}{N} \left(\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \right). \quad (4.72)$$

Equation 4.72 is known as the **Clausius-Mossotti** formula, or, in its application to optics, the **Lorentz-Lorenz** equation.

Tenemos que la densidad de atomos es,

$$N = \frac{1}{(4/3)\pi R^3}$$

El campo electrico macroscopico esta representado por la superposicion del campo propio y el sujeto a uno externo:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\text{propio}} + \mathbf{E}_{\text{ext}}$$

Tomamos el campo propio como un promedio sobre la esfera de la interaccion del atomo:

$$\mathbf{p} = \alpha \mathbf{E}_{\text{ext}} \Rightarrow \mathbf{P} = N\alpha \mathbf{E}_{\text{ext}}$$

Al sustituir nos queda:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\text{propio}} &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{P}}{R^3} \\ \mathbf{E} &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\alpha}{R^3} \mathbf{E}_{\text{ext}} + \mathbf{E}_{\text{ext}} = \left(1 - \frac{\alpha}{4\pi\epsilon_0 R^3}\right) \mathbf{E}_{\text{ext}} = \left(1 - \frac{N\alpha}{3\epsilon_0}\right) \mathbf{E}_{\text{ext}} \end{aligned}$$

Entonces:

$$\mathbf{P} = \frac{N\alpha}{(1 - N\alpha/3\epsilon_0)} \mathbf{E} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}$$

y por tanto la susceptibilidad eléctrica,

$$\chi_e = \frac{N\alpha/\epsilon_0}{(1 - N\alpha/3\epsilon_0)}$$

Ahora nos queda despejar α :

$$\alpha = \frac{\epsilon_0}{N} \frac{\chi_e}{(1 + \chi_e/3)} = \frac{3\epsilon_0}{N} \frac{\chi_e}{(3 + \chi_e)}$$

Pero como la susceptibilidad eléctrica se puede expresar en términos de la constante dieléctrica:

$$\chi_e = \epsilon_r - 1$$

Nos queda que,

$$\alpha = \frac{3\epsilon_0}{N} \left(\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \right)$$

6.23

Problem 6.23 Notice the following parallel:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{D} = 0, & \nabla \times \mathbf{E} = 0, & \epsilon_0 \mathbf{E} = \mathbf{D} - \mathbf{P}, & \text{(no free charge);} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, & \nabla \times \mathbf{H} = 0, & \mu_0 \mathbf{H} = \mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{M}, & \text{(no free current).} \end{cases}$$

Thus, the transcription $\mathbf{D} \rightarrow \mathbf{B}$, $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{H}$, $\mathbf{P} \rightarrow \mu_0 \mathbf{M}$, $\epsilon_0 \rightarrow \mu_0$ turns an electrostatic problem into an analogous magnetostatic one. Use this observation, together with your knowledge of the electrostatic results, to rederive

- (a) the magnetic field inside a uniformly magnetized sphere (Eq. 6.16);
- (b) the magnetic field inside a sphere of linear magnetic material in an otherwise uniform magnetic field (Prob. 6.18);
- (c) the average magnetic field over a sphere, due to steady currents within the sphere (Eq. 5.89).

Primero vamos a considerar el campo eléctrico de una esfera uniformemente polarizada,

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{3\epsilon_0} \mathbf{P}$$

esto puede traducirse a su contraparte magnética:

$$\begin{aligned}\mathbf{H} &= -\frac{1}{3\mu_0}(\mu_0\mathbf{M}) \\ &= -\frac{1}{3}\mathbf{M}\end{aligned}$$

Recordando que $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$, el campo magnético nos queda en términos de la magnetización

$$\mathbf{B} = \mu_0\left(-\frac{1}{3}\mathbf{M} + \mathbf{M}\right) = \frac{2}{3}\mu_0\mathbf{M}$$

b. El campo eléctrico dentro de una esfera con un dieléctrico lineal en un campo uniforme es

$$\mathbf{E} = \frac{1}{1 + \chi_e/3}\mathbf{E}_0$$

Entonces como $(\mathbf{P} = \epsilon_0\chi_e\mathbf{E})$ tenemos que $\chi_e \rightarrow \chi_m$,

$$\begin{aligned}\mu_0\mathbf{M} &= \mu_0\chi_m\mathbf{H} \\ \mathbf{M} &= \chi_m\mathbf{H}\end{aligned}$$

Así mismo para el vector \mathbf{H}

$$\mathbf{H} = \frac{1}{1 + \chi_m/3}\mathbf{H}_0$$

Además como $\mathbf{B} = \mu_0(1 + \chi_m)\mathbf{H}$ y $\mathbf{B}_0 = \mu_0\mathbf{H}_0$ el campo magnético dentro de una esfera de material magnético lineal es:

$$\frac{\mathbf{B}}{\mu_0(1 + \chi_m)} = \frac{1}{(1 + \chi_m/3)}\frac{\mathbf{B}_0}{\mu_0}$$

c. El campo eléctrico en promedio sobre una esfera debido a sus cargas tiene la forma:

$$\mathbf{B} = \left(\frac{1 + \chi_m}{1 + \chi_m/3}\right)\mathbf{B}_0$$

$$\mathbf{E}_{\text{promedio}} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{p}}{R^3}$$

Si son originadas por la polarización del medio es posible resolver:

$$\nabla \cdot \mathbf{P} = -\rho$$

para encontrar \mathbf{P} .

En ausencia de cargas libres con $\mathbf{p} = \int \mathbf{P} d\tau$

$$\mathbf{E}_{\text{promedio}} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{R^3}\int \mathbf{P} d\tau$$

$$\mathbf{H}_{\text{promedio}} = -\frac{1}{4\pi\mu_0}\frac{1}{R^3}\int \mu_0\mathbf{M} d\tau = -\frac{1}{4\pi R^3}\mathbf{m}.$$

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$$

$$\mathbf{B}_{\text{promedio}} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m}}{R^3} + \mu_0 \mathbf{M}_{\text{promedio}}$$

$$\mathbf{M}_{\text{promedio}} = \frac{\mathbf{m}}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

Entonces resulta que $\mathbf{B}_{\text{promedio}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\mathbf{m}}{R^3}$, Lo cual concuerda con el argumento de que todas las corrientes están ligadas.

Problema 6.26

Problem 6.26 At the interface between one linear magnetic material and another the magnetic field lines bend (see Fig. 6.32). Show that $\tan \theta_2 / \tan \theta_1 = \mu_2 / \mu_1$, assuming there is no free current at the boundary. Compare Eq. 4.68.

Este ejercicio es similar al realizado en el capítulo anterior, tenemos que para el caso de los campos $\vec{B}_1, \vec{B}_2, \mu_1, \mu_2$ y materiales lineales que no estén magnetizados, B_{\perp} y H_{\parallel} son continuas en la frontera, hacemos $k_f = 0$

$$\begin{aligned} B_{1\perp} &= B_{2\perp} \\ H_{1\parallel} &= H_{2\parallel} \end{aligned}$$

Como $\vec{B} = \mu \vec{H}$, aplicando a cada una de las componentes,

$$\begin{aligned} \frac{B_1^{\parallel}}{\mu_1} &= \frac{B_2^{\parallel}}{\mu_2} \\ \tan \theta_1 &= \frac{B_1^{\parallel}}{B_{1\perp}} \\ \tan \theta_2 &= \frac{B_2^{\parallel}}{B_{2\perp}} \end{aligned}$$

Para encontrar la relación que estamos buscando realizamos la división de estas ecuaciones:

$$\frac{\tan \theta_2}{\tan \theta_1} = \frac{B_2^{\parallel} B_{1\perp}}{B_{2\perp} B_1^{\parallel}} = \frac{B_2^{\parallel}}{B_1^{\parallel}} = \frac{\mu_2}{\mu_1}$$

Como queríamos comprobar

Problema 8.5

Problem 8.5 Consider an infinite parallel-plate capacitor, with the lower plate (at $z = -d/2$) carrying the charge density $-\sigma$, and the upper plate (at $z = +d/2$) carrying the charge density $+\sigma$.

(a) Determine all nine elements of the stress tensor, in the region between the plates. Display your answer as a 3×3 matrix:

$$\begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{pmatrix}$$

(b) Use Eq. 8.22 to determine the force per unit area on the top plate. Compare Eq. 2.51.

(c) What is the momentum per unit area, per unit time, crossing the xy plane (or any other plane parallel to that one, between the plates)?

(d) At the plates this momentum is absorbed, and the plates recoil (unless there is some nonelectrical force holding them in position). Find the recoil force per unit area on the top

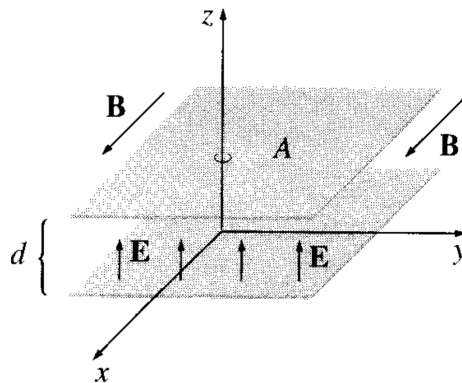
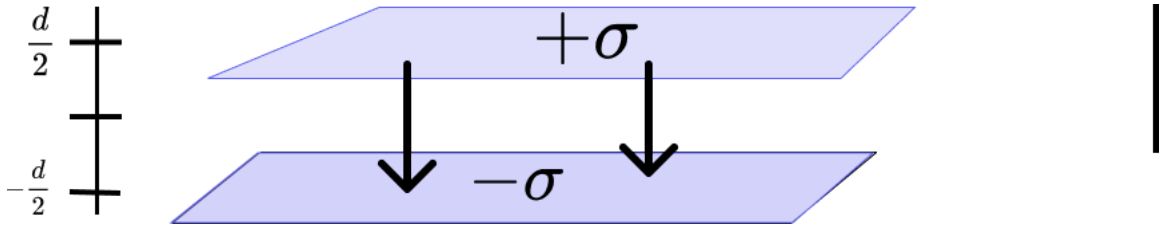


Figure 8.6

plate, and compare your answer to (b). [Note: This is not an *additional* force, but rather an alternative way of calculating the *same* force—in (b) we got it from the force law, and in (d) we did it by conservation of momentum.]



La forma del campo eléctrico es:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}(\hat{z})$$

$$T_{iJ} = \epsilon_0 \left(E_i E_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} E^2 \right)$$

Dado que $\vec{B} = 0$ no contribuye a los términos de T_{ij}

$$E_x = 0$$

$$E_y = 0$$

$$E_z = 0$$

De modo que,

$$T_{xy} = T_{xz} = T_{yx} = T_{yz} = T_{zx} = T_{zy} = 0$$

$$T_{xx} = \frac{-1}{2} \epsilon_0 \frac{\sigma^2}{\epsilon^2} = \frac{-\sigma^2}{2\epsilon_0} = T_{yy}$$

$$T_{zz} = \epsilon_0 \left(\frac{\sigma^2}{\epsilon_0^2} - \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{\sigma^2}{\epsilon_0^2} \right)$$

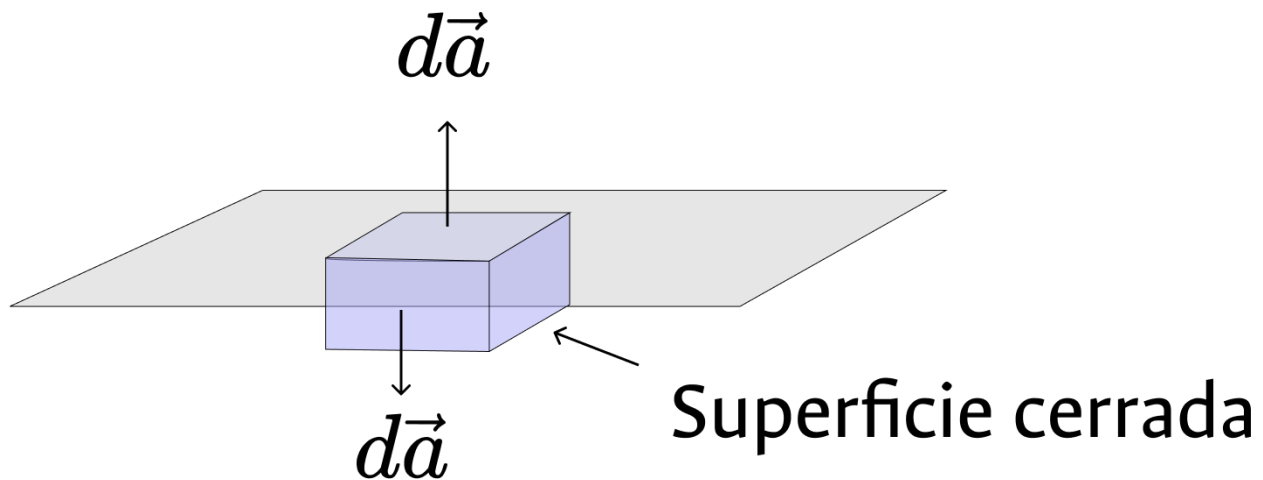
$$= \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{\epsilon_0}$$

$$\vec{T} = \begin{pmatrix} \frac{-\sigma^2}{2\epsilon_0} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-\sigma^2}{2\epsilon_0} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{+\sigma^2}{2\epsilon_0} \end{pmatrix}$$

b. Dado que se trata de una superficie cerrada,

$$\vec{F} = \oint \vec{T} \cdot d\vec{a}$$

Teniendo en cuenta que $\vec{s} = 0$



$$d\vec{a} = dx dy \hat{z} = d\vec{a}_z$$

Como T_{zz} es la componente no nula,

$$\int \vec{T} \cdot d\vec{a}_z = T_{zz} da_z \hat{z}$$

Entonces hallamos la fuerza por unidad de área:

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \frac{-\sigma^2 H}{2\epsilon_0} \hat{z} \\ \vec{f} &= -\frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \hat{z}\end{aligned}$$

c. Aquí tenemos que considerar que la cantidad de momento por unidad de área y de tiempo cruzando el plano x-y es perpendicular al plano en la dirección \hat{z}

$$-T_{zz} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}$$

d. La fuerza de retroceso está relacionada con la cantidad de momento absorbida, en la tapa superior corresponde a:

$$\vec{f} = -\frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \hat{z}$$

Funciones de Green

Machado

- 9.2** Utilizando o mesmo hemisfério do exercício anterior, resolva o problema de um hemisfério submetido aos potenciais $V_0 = -V$ e $V_1 = V$, com $\alpha = \frac{\pi}{3}$ rad. Calcule o potencial e o campo elétrico no eixo z e em todo o espaço, bem como a densidade de carga no hemisfério.

Del desarrollo de realizado en el Machado acerca de la funciones de Green sabemos que un potencial eléctrico general \mathbb{V} es:

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}') \mathfrak{F}(\vec{r}, \vec{r}') dV - \frac{1}{4\pi} \oint_S \mathbb{V}(\vec{r}') \nabla \mathfrak{F}(\vec{r}, \vec{r}') \cdot \hat{n} dA - \frac{1}{4\pi} \oint_S \mathfrak{F}(\vec{r}, \vec{r}') \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}') \cdot \hat{n} dA$$

Y si el problema tiene condiciones de frontera de Dirichlet $\mathfrak{F}_D(\vec{r}, \vec{r}') = 0$ $\vec{r}' \in S$, con \mathfrak{F}_D la función de Green asociada a las condiciones de Dirichlet entonces:

$$\mathbb{V}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}') \mathfrak{F}_D(\vec{r}, \vec{r}') dV - \frac{1}{4\pi} \oint_S \mathbb{V}(\vec{r}') \nabla \mathfrak{F}_D(\vec{r}, \vec{r}') \cdot \hat{n} dA$$

De esta forma el potencial de un esfera conductora con condiciones de frontera de Dirichlet y con una distribución $\rho(r')$ fuera de la esfera es:

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(r, \theta, \phi) = & \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \left[\frac{\rho(\vec{r}')}{\sqrt{r^2 - 2rr' \cos \gamma + r'^2}} - \frac{\rho(\vec{r}')}{\sqrt{\left(\frac{rr'}{R}\right)^2 - 2rr' \cos \gamma + R^2}} \right] dV \\ & + \frac{R(r^2 - R^2)}{4\pi} \oint_S \frac{\mathbb{V}(R, \theta', \phi') \sin \theta' d\theta' d\phi'}{[r^2 - 2rR \cos \gamma + R^2]^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

De esta forma si $\rho(r') = 0$ entonces:

Y si además se considera el potencial sujeto a las siguientes condiciones de frontera:

$$\mathbb{V}(R, \theta', \phi') = \begin{cases} V_0, & 0 \leq \theta' \leq \alpha \\ V_1, & \alpha \leq \theta' \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

entonces el potencial a largo del eje z :

$$\mathbb{V}(r, \theta, \phi) = \frac{R(r^2 - R^2)}{4\pi} \oint_S \frac{\mathbb{V}(R, \theta', \phi') \sin \theta' d\theta' d\phi'}{[r^2 - 2rR \cos \gamma + R^2]^{\frac{3}{2}}}$$

con $\cos(\gamma)$ tal que:

$$\begin{aligned} \cos \gamma &= \cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta' \cos(\phi - \phi') \\ &= \cos 0 \cos \theta' - \sin 0 \sin \theta' \cos(\phi - \phi') \\ \cos \gamma &= \cos \theta' \end{aligned}$$

por lo que el potencial queda:

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(z) &= \frac{R(z^2 - R^2)}{4\pi} \oint_S \frac{\mathbb{V}(R, \theta', \phi') \sin \theta' d\theta' d\phi'}{[z^2 - 2zR \cos \theta' + R^2]^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{R(z^2 - R^2)}{4\pi} \int_0^\alpha \int_0^{2\pi} \frac{V_0 \sin \theta' d\theta' d\phi'}{[z^2 - 2zR \cos \theta' + R^2]^{\frac{3}{2}}} \\
&\quad + \frac{R(z^2 - R^2)}{4\pi} \int_\alpha^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \frac{V_1 \sin \theta' d\theta' d\phi'}{[z^2 - 2zR \cos \theta' + R^2]^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{V_0 R(z^2 - R^2)}{2} \int_0^\alpha \frac{\sin \theta' d\theta'}{[z^2 - 2zR \cos \theta' + R^2]^{\frac{3}{2}}} \\
&\quad + \frac{V_1 R(z^2 - R^2)}{2} \int_\alpha^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \theta' d\theta'}{[z^2 - 2zR \cos \theta' + R^2]^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

Realizando la siguiente sustitución de variable entonces:

$$\begin{aligned}
u &= z^2 - 2zR \cos \theta' + R^2 \\
du &= 2zR \sin \theta' d\theta' \\
\sin \theta' d\theta' &= \frac{du}{2zR}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(z) &= \frac{V_0 R(z^2 - R^2)}{2} \int_{u_1}^{u_2} \frac{\frac{du}{2zR}}{u^{\frac{3}{2}}} + \frac{V_1 R(z^2 - R^2)}{2} \int_{u_2}^{u_3} \frac{\frac{du}{2zR}}{u^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{V_0(z^2 - R^2)}{4z} \int_{u_1}^{u_2} u^{-\frac{3}{2}} du + \frac{V_1(z^2 - R^2)}{4z} \int_{u_2}^{u_3} u^{-\frac{3}{2}} du \\
\mathbb{V}(z) &= -\frac{V_0(z^2 - R^2)}{2z} \left[\frac{1}{\sqrt{u_2}} - \frac{1}{\sqrt{u_1}} \right] - \frac{V_1(z^2 - R^2)}{2z} \left[\frac{1}{\sqrt{u_3}} - \frac{1}{\sqrt{u_2}} \right]
\end{aligned}$$

Teniendo en cuentas los limites de integración:

$$\begin{aligned}
\theta = 0 &\Rightarrow u_1 = z^2 - 2zR + R^2 = (z - R)^2 \\
\theta = \alpha &\Rightarrow u_2 = z^2 - 2zR \cos \alpha + R^2 \\
\theta = \frac{\pi}{2} &\Rightarrow u_3 = z^2 + R^2
\end{aligned}$$

Asi:

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(z) &= -\frac{V_0(z^2 - R^2)}{2z} \left[\frac{1}{\sqrt{z^2 - 2zR \cos \alpha + R^2}} - \frac{1}{|z - R|} \right] \\
&\quad - \frac{V_1(z^2 - R^2)}{2z} \left[\frac{1}{\sqrt{z^2 + R^2}} - \frac{1}{\sqrt{z^2 - 2zR \cos \alpha + R^2}} \right] \\
&= \frac{V_0(z - R)(z + R)}{2z} \frac{1}{|z - R|} \\
&\quad + \frac{z^2 - R^2}{2z\sqrt{z^2 - 2zR \cos \alpha + R^2}} (V_1 - V_0) - \frac{V_1(z^2 - R^2)}{2z} \frac{1}{\sqrt{z^2 + R^2}}
\end{aligned}$$

De esta forma si $z \geq R$ entonces:

$$\mathbb{V}(z) = \frac{V_0}{2} + \frac{V_0}{2} \frac{R}{z} + \frac{(z^2 - R^2)(V_1 - V_0)}{2z\sqrt{z^2 - 2zR \cos \alpha + R^2}} - \frac{V_1(z^2 - R^2)}{2z\sqrt{z^2 + R^2}}$$

O si $z < R$:

$$\mathbb{V}(z) = -\frac{V_0}{2} - \frac{V_0}{2} \frac{R}{z} + \frac{(z^2 - R^2)(V_1 - V_0)}{2z\sqrt{z^2 - 2zR\cos\alpha + R^2}} - \frac{V_1(z^2 - R^2)}{2z\sqrt{z^2 + R^2}}$$

Por lo que si $V_0 = -V$ y $V_1 = V$ y $\alpha = \frac{\pi}{3}$ entonces:

si $z \geq R$:

$$\mathbb{V}(z) = -\frac{V}{2} - \frac{V}{2} \frac{R}{z} + \frac{(z^2 - R^2)V}{z\sqrt{z^2 - zR + R^2}} - \frac{V(z^2 - R^2)}{2z\sqrt{z^2 + R^2}}$$

Si $z < R$:

$$\mathbb{V}(z) = \frac{V}{2} + \frac{V}{2} \frac{R}{z} + \frac{(z^2 - R^2)V}{z\sqrt{z^2 - zR + R^2}} - \frac{V(z^2 - R^2)}{2z\sqrt{z^2 + R^2}}$$

Y como además:

$$\frac{V(z^2 - R^2)}{z\sqrt{z^2 - zR + R^2}} = \frac{Vz^2\left(1 - \frac{R^2}{z^2}\right)}{z^2\sqrt{1 - \frac{R}{z} + \frac{R^2}{z^2}}} = \frac{V\left(1 - \frac{R^2}{z^2}\right)}{\sqrt{1 - \frac{R}{z} + \frac{R^2}{z^2}}}$$

Donde el numerador se expande en serie de Taylor:

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{R}{z} + \frac{R^2}{z^2}\right)^{-1/2} &= 1 + \left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{R}{z} + \frac{R^2}{z^2}\right) + \frac{3}{8}\left(-\frac{R}{z} + \frac{R^2}{z^2}\right)^2 - \frac{5}{16}\left(-\frac{R}{z} + \frac{R^2}{z^2}\right)^3 + \dots \Rightarrow \\ \left(1 - \frac{R^2}{z^2}\right)\left(1 - \frac{R}{z} + \frac{R^2}{z^2}\right)^{-1/2} &= \left(1 - \frac{R^2}{z^2}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{R^2}{z^2} - \frac{R}{z}\right) + \frac{3}{8}\left(\frac{R^2}{z^2} - \frac{R}{z}\right)^2 - \dots\right) \\ &= 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{R^2}{z^2} - \frac{R}{z}\right) + \frac{3}{8}\left(\frac{R^2}{z^2} + \frac{R}{z}\right)^2 - \frac{R^2}{z^2} + \frac{1}{2}\frac{R^2}{z^2}\left(\frac{R^2}{z^2} - \frac{R}{z}\right) - \frac{3}{8}\frac{R^2}{z^2}\left(\frac{R^2}{z^2} + \dots\right) \\ &= 1 - \frac{R^2}{z^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{R^2}{z^2} - \frac{R}{z}\right)\left(\frac{R^2}{z^2} - 1\right) - \frac{3}{8}\left(\frac{R^2}{z^2} - \frac{R}{z}\right)^2\left(\frac{R^2}{z^2} - 1\right) + \dots \end{aligned}$$

Además:

$$\frac{V_0(z^2 - R^2)}{2z\sqrt{z^2 + R^2}} = \frac{V_0}{2} \frac{1 - \frac{R^2}{z^2}}{\sqrt{1 + \frac{R^2}{z^2}}}$$

Donde:

$$\begin{aligned} \frac{1 - \frac{R^2}{z^2}}{\sqrt{1 + \frac{R^2}{z^2}}} &= \left(1 - \frac{R^2}{z^2}\right)\left(1 + \frac{R^2}{z^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \\ \frac{1 - \frac{R^2}{z^2}}{\sqrt{1 + \frac{R^2}{z^2}}} &= \left(1 - \frac{R^2}{z^2}\right)\left(1 - \frac{R^2}{2z^2} + \frac{3}{8}\frac{R^4}{z^4} - \frac{5}{16}\frac{R^6}{z^6} + \dots\right) \\ \frac{1 - \frac{R^2}{z^2}}{\sqrt{1 + \frac{R^2}{z^2}}} &= 1 - \frac{R^2}{2z^2} + \frac{3}{8}\frac{R^4}{z^4} - \frac{5}{16}\frac{R^6}{z^6} - \frac{R^2}{z^2} + \frac{R^4}{2z^4} - \frac{3}{8}\frac{R^6}{z^6} + \dots \\ \frac{1 - \frac{R^2}{z^2}}{\sqrt{1 + \frac{R^2}{z^2}}} &= 1 - \frac{3R^2}{2z^2} + \frac{7}{8}\frac{R^4}{z^4} - \frac{11}{16}\frac{R^6}{z^6} + \dots \end{aligned}$$

Y reagrupando:

$$V(z) = -\frac{V}{2} \frac{R}{z} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{R}{z} - \frac{7}{8} \frac{R^3}{z^3} + \frac{11}{16} \frac{R^5}{z^5} \right) + V \left[1 - \frac{R^2}{z^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{R^2}{z^2} - \frac{R}{z} \right) \left(\frac{R^2}{z^2} - 1 \right) - \frac{3}{8} \left(\frac{R^2}{z^2} - \frac{R}{z} \right)^2 \left(\frac{R^2}{z^2} - 1 \right) + \dots \right]$$

Griffiths

Ejercicios adicionales:

10.11

Problem 10.11 Suppose $\mathbf{J}(\mathbf{r})$ is constant in time, so (Prob. 7.55) $\rho(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, 0) + \dot{\rho}(\mathbf{r}, 0)t$. Show that

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t)}{r^2} \hat{\mathbf{r}} d\tau';$$

that is, Coulomb's law holds, with the charge density evaluated at the *non-retarded* time.

Problem 10.12 Suppose the current density changes slowly enough that we can (to good approximation) ignore all higher derivatives in the Taylor expansion

$$\mathbf{J}(t_r) = \mathbf{J}(t) + (t_r - t)\dot{\mathbf{J}}(t) + \dots$$

(for clarity, I suppress the \mathbf{r} -dependence, which is not at issue). Show that a fortuitous cancellation in Eq. 10.31 yields

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t) \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} d\tau'.$$

That is: the Biot-Savart law holds, with \mathbf{J} evaluated at the *non-retarded* time. This means that the quasistatic approximation is actually much *better* than we had any right to expect: the *two* errors involved (neglecting retardation and dropping the second term in Eq. 10.31) *cancel* one another, to first order.

Tenemos que $\dot{\rho}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial}{\partial t_r} \left(\rho(\vec{r}', 0) + \dot{\rho}(\vec{r}', 0) t_r \right) = \dot{\rho}(\mathbf{r}, 0)$ y dado que $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = 0$, entonces:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left[\frac{\rho(\mathbf{r}', 0) + \dot{\rho}(\mathbf{r}', 0) t_r}{r^2} + \frac{\dot{\rho}(\mathbf{r}', 0)}{cr} \right] \hat{\mathbf{r}} d\tau'$$

Como el tiempo retardado $t_r = t - \frac{r}{c}$ nos queda que

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left[\frac{\rho(\mathbf{r}', 0) + \dot{\rho}(\mathbf{r}', 0) t}{r^2} - \frac{\dot{\rho}(\mathbf{r}', 0) (r/c)}{r^2} + \frac{\dot{\rho}(\mathbf{r}', 0)}{cr} \right] \hat{\mathbf{r}} d\tau' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t)}{r^2} \hat{\mathbf{r}} d\tau'.$$

$$\begin{aligned}
\vec{E}(\vec{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \int \left[\frac{\rho(\vec{r}', 0) + \dot{\rho}(\vec{r}', 0) t_r}{\mathcal{R}^2} \hat{\mathcal{R}} + \frac{\dot{\rho}(\vec{r}', 0)}{c\mathcal{R}} \hat{\mathcal{R}} \right] d\tau' \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \int \left[\frac{\rho(\vec{r}', 0)}{\mathcal{R}^2} \hat{\mathcal{R}} + \frac{\dot{\rho}(\vec{r}', 0) (t - \frac{\mathcal{R}}{c})}{\mathcal{R}^2} \hat{\mathcal{R}} + \frac{\dot{\rho}(\vec{r}', 0)}{c\mathcal{R}} \hat{\mathcal{R}} \right] d\tau' \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \int \left[\frac{\rho(\vec{r}', 0)}{\mathcal{R}^2} \hat{\mathcal{R}} + \frac{\dot{\rho}(\vec{r}', 0) t}{\mathcal{R}^2} \hat{\mathcal{R}} - \frac{\dot{\rho}(\vec{r}', 0) \frac{\mathcal{R}}{c}}{\mathcal{R}^2} \hat{\mathcal{R}} + \frac{\dot{\rho}(\vec{r}', 0)}{c\mathcal{R}} \hat{\mathcal{R}} \right] d\tau' \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \int \left[\frac{\rho(\vec{r}', 0) + \dot{\rho}(\vec{r}', 0) t}{\mathcal{R}^2} \hat{\mathcal{R}} - \frac{\dot{\rho}(\vec{r}', 0) \frac{\mathcal{R}}{c}}{\mathcal{R}^2} \hat{\mathcal{R}} + \frac{\dot{\rho}(\vec{r}', 0)}{c\mathcal{R}} \hat{\mathcal{R}} \right] d\tau' \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \int \left[\frac{\rho(\vec{r}', t)}{\mathcal{R}^2} \hat{\mathcal{R}} - \frac{\dot{\rho}(\vec{r}', 0)}{c\mathcal{R}} \hat{\mathcal{R}} + \frac{\dot{\rho}(\vec{r}', 0)}{c\mathcal{R}} \hat{\mathcal{R}} \right] d\tau' \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \int \frac{\rho(\vec{r}', t)}{\mathcal{R}^2} \hat{\mathcal{R}} d\tau' \quad \checkmark
\end{aligned}$$

Por lo que la ley de Coulomb se mantiene aun cuando evaluamos la densidad de carga en el tiempo no retardado.

10.12

Para este ejercicio haremos que la densidad de corriente cambie de forma lenta para realizar la aproximación a una expansión y de ese modo mantener únicamente los términos de la primera derivada.

$$\vec{J}(t_r) = \vec{J}(t) + (t_r - t) \dot{\vec{J}}(t)$$

La dependencia espacial no tiene que escribirse explícitamente por lo que mostraremos que la ley de Biot Savart se mantiene con la densidad de corriente

Teniendo en cuenta los efectos de retardación, el campo magnético tiene la siguiente forma:

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_o}{4\pi} \int \left[\frac{\vec{J}(\vec{r}', t_r)}{\mathcal{R}^2} + \frac{\dot{\vec{J}}(\vec{r}', t_r)}{c\mathcal{R}} \right] \times \hat{\mathcal{R}} d\tau'$$

Y como se indica mantener solo la primera derivada:

$$\dot{\vec{J}}(t_r) = \dot{\vec{J}}(t)$$

Esto dado que al aplicar la derivada a la expansión de Taylor se obtiene un segundo orden, reemplazando:

$$\begin{aligned}
\vec{B}(\vec{r}, t) &= \frac{\mu_o}{4\pi} \int \left[\frac{\vec{J}(t) + (t_r - t) \dot{\vec{J}}(t)}{\mathcal{R}^2} + \frac{\dot{\vec{J}}(t)}{c\mathcal{R}} \right] \times \hat{\mathcal{R}} d\tau' \\
&= \frac{\mu_o}{4\pi} \int \left[\frac{\vec{J}(t) + \left(t - \frac{\mathcal{R}}{c} - t\right) \dot{\vec{J}}(t)}{\mathcal{R}^2} + \frac{\dot{\vec{J}}(t)}{c\mathcal{R}} \right] \times \hat{\mathcal{R}} d\tau' \\
&= \frac{\mu_o}{4\pi} \int \left[\frac{\vec{J}(t)}{\mathcal{R}^2} - \frac{\dot{\vec{J}}(t)}{c\mathcal{R}} + \frac{\dot{\vec{J}}(t)}{c\mathcal{R}} \right] \times \hat{\mathcal{R}} d\tau' \\
&= \frac{\mu_o}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}', t) \times \hat{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}^2} d\tau'
\end{aligned}$$