6. Sea $X \sim N_3(\mu, \Sigma)$ con $\mu' = (-3, 1, 4)$ y $\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Determinar cuáles de las sig. variables son indep. y por qué

a) X_1 y X_2

No son independientes pues $\operatorname{cov}(X_1, X_2) = -2 \neq 0$

b) X_2 y X_3

Son independientes pues $\operatorname{cov}(X_2, X_3) = 0$

c) (X_1, X_2) y X_3

son independientes pues $X = \left[\begin{array}{c} X_1 \\ X_2 \\ \hline X_3 \end{array}\right]$ y $\Sigma = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$

y $\tilde{X}_1 = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$ y X_3 tienen $\Sigma_{12} = \bar{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

d) $\frac{X_1 + X_2}{2}$ y X_3

$$\begin{bmatrix} \frac{X_1 + X_2}{2} \\ X_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}$$

$AX \sim N_q(A\mu, A\Sigma A')$ si $X \sim N_p(\mu, \Sigma)$

$$A\Sigma A' = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{2\times 3} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_{3\times 3} \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - 1 & -1 + \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} + \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Sí son independientes pues $\Sigma_{12} = 0$

$-\frac{5}{2} - 2 = -\frac{9}{2}\left(-\frac{5}{2}\right) = +\frac{45}{4} =$

e) X_2 y $X_2 - \frac{5}{2} X_1 - X_3$

$$\begin{bmatrix} X_2 \\ X_2 - \frac{5}{2} X_1 - X_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{5}{2} & 1 & -1 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}$$

$$A\Sigma A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -5/2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -5/2 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 5 & 0 \\ -\frac{5}{2} - 2 & 5 + 5 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -5/2 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 5 + 5 \\ 10 & \frac{45}{4} + 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 93/4 \end{bmatrix}$$

No son independientes pues $\Sigma_{12} = 10 \neq 0$