7. sea $X \sim N_3(\mu, \Sigma)$ con $\mu' = (2, -3, 1)$ y $\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

a) Encuentra la distribución de $3X_1 - 2X_2 + X_3$

como $X \sim N_3(\mu, \Sigma) \longrightarrow a'X \sim N(a'\mu, a'\Sigma a)$

sea $a' = (3, -2, 1)$

$$a'\mu = (3, -2, 1)\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = 6 + 6 + 1 = 13$$

$$a'\Sigma a = (3, -2, 1)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = (3-2+1,\ 3-6+2,\ 3-4+2)\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= (2, -1, 1)\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= 6 + 2 + 1$$

$$= 9$$

$\therefore\ 3X_1 - 2X_2 + X_3 \sim N(13, 9)$ //

b) Encontrar un vector a tal que $X_2 \perp\!\!\!\perp X_2 - a'(X_1, X_2)'$ (sean independientes)

$$X_2 - a'(X_1, X_2)' = X_2 - (a_1, a_2)\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = X_2 - a_1 X_1 - a_2 X_2 = (1 - a_2)X_2 - a_1 X_1$$

primero veamos qué distribución tiene $\begin{bmatrix} X_2 \\ (1-a_2)X_2 - a_1 X_1 \end{bmatrix}$ y para que $X_2 \perp\!\!\!\perp X_2 - a'(X_1, X_2)'$

necesitaremos que $\operatorname{Cov}(X_2, X_2 - a'(X_1, X_2)') = 0$

$$\begin{bmatrix} X_2 \\ (1-a_2)X_2 - a_1 X_1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -a_1 & (1-a_2) & 0 \end{bmatrix}}_{A}\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}$$

$$A\Sigma A' = \underset{2\times 3}{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -a_1 & (1-a_2) & 0 \end{bmatrix}}\underset{3\times 3}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}}\underset{3\times 2}{\begin{bmatrix} 0 & -a_1 \\ 1 & 1-a_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}} = \underset{2\times 3}{\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -a_1 + 1 - a_2 & -a_1 + 3 - 3a_2 & -a_1 + 2 - 2a_2 \end{bmatrix}}\underset{3\times 2}{\begin{bmatrix} 0 & -a_1 \\ 1 & 1-a_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & -a_1 + 3 - 3a_2 \\ -a_1 + 3 - 3a_2 & -a_1(-a_1 + 1 - a_2) + (1-a_2)(-a_1 + 3 - 3a_2) \end{bmatrix} \longrightarrow -a_1 + 3 - 3a_2 = 0$$

$$\Longleftrightarrow a_1 = 3 - 3a_2$$

$\therefore\ a' = (3 - 3a_2, a_2)$ //