9.

a) Fisher obtuvo los datos relativos al peso del cuerpo de los gatos en kg (x_1) y del corazón en gramos (x_2) de 144 gatos

Para las hembras la suma y suma de cuadrados están dados por

$$X_1' \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 110.9 \\ 432.5 \end{pmatrix} \qquad X_1' X_1 = \begin{pmatrix} 265.13 & 1029.62 \\ 1029.62 & 4069.71 \end{pmatrix}$$

Mostrar que el vector media y la matriz de covarianzas son

$$\bar{x} = (2.36, 9.20)' \quad y \quad S_x = \begin{pmatrix} 0.0735 & 0.1937 \\ 0.1937 & 1.8040 \end{pmatrix}$$

Hay $144 - 97 = 47$ hembras

$$X_1' \mathbb{1} = \begin{pmatrix} \Sigma x_B \\ \Sigma x_H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 110.9 \\ 432.5 \end{pmatrix}$$

donde x_B peso cuerpo

x_H peso corazón

$$X_1' X_1 = \begin{pmatrix} \Sigma x_B^2 & \Sigma x_B x_C \\ \Sigma x_B x_C & \Sigma x_C^2 \end{pmatrix}$$

De esto manera

$$\bar{x} = \frac{1}{47}\begin{pmatrix} 110.9 \\ 432.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.359 \\ 9.202 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2.36 \\ 9.2 \end{pmatrix} //$$

$$S = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n} (x_j - \bar{x})(x_j - \bar{x})'$$

$$\sigma_B^2 = \frac{1}{47-1} \Sigma (x - \bar{x})^2 = \frac{1}{46} (\Sigma x_i^2 - n\bar{x}^2)$$

$$= \frac{1}{46} (265.13 - 47(2.36)^2) = 0.0735$$

$$\sigma_H = \frac{1}{46} (4069.71 - 47(9.20)^2) = 1.88$$

$$\sigma_{BC} = \frac{1}{46} (\Sigma x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}) = \frac{1029.62 - 47(2.36)(9.2}{46}$$

$$= 0.1990$$

$$S_x = \begin{pmatrix} 0.0735 & 0.1990 \\ 0.1990 & 1.88 \end{pmatrix}$$

$$\approx \begin{pmatrix} 0.0735 & 0.1937 \\ 0.1937 & 1.8040 \end{pmatrix} //$$

b) Para los 97 gatos machos, las estadísticas son $X_2' \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 281.3 \\ 1098.3 \end{pmatrix}$

$$X_2' X_2 = \begin{pmatrix} 836.75 & 3275.55 \\ 3275.55 & 13056.17 \end{pmatrix}$$

encuentra el vector de medias y covarianzas (matriz)

$$\bar{x} = \frac{1}{97}\begin{pmatrix} 281.3 \\ 1098.3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.9 \\ 11.32 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_B^2 = \frac{1}{46} (836.75 - 47(2.9)^2) = 9.597 \approx 9.6$$

$$\sigma_H^2 = \frac{1}{46} (13056.17 - 47(11.32)^2) = 152.9$$

$$\sigma_{BH} = \frac{1}{46} (3275.55 - 47(2.9)(11.32)) = 37.66$$

$$S_y = \begin{pmatrix} 9.6 & 37.66 \\ 37.66 & 152.9 \end{pmatrix} //$$

considerando los 144 gatos como una sola muestra, calcular el vector de medias y la matriz de covarianzas

$$\text{para } \bar{X} = \frac{1}{144}\left(X_1' + X_2'\right) = \frac{1}{144}\begin{bmatrix} 110.9 + 281.3 \\ 432.5 + 1098.3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.72 \\ 10.63 \end{bmatrix}$$

$$\text{Para } S = \begin{bmatrix} \sigma_{B1}^2 + \sigma_{B2}^2 & \sigma_{HB} \\ \sigma_{HB} & \sigma_{H_1}^2 + \sigma_{H_2}^2 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{n-1}\left(\Sigma X_i Y_i - n\bar{X}\bar{Y}\right)$$

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{n-1}\left(\Sigma X_i^2 - n\bar{X}^2\right)$$

$$\text{para } \sigma_B^2 = \frac{1}{143}\left[\Sigma\left(X_{B1i}^2 + X_{B2i}^2\right) - 144(2.72)^2\right]$$

$$= \frac{1}{143}\left[265.13 + 836.75 - 1065.3696\right]$$

$$= 0.255 \approx 0.26$$

$$\sigma_H^2 = \frac{1}{143}\left[\Sigma\left(X_{H1_i}^2 + X_{H2_i}^2\right) - 144(10.63)^2\right]$$

$$= \frac{1}{143}\left[4064.71 + 13056.17 - 16271.5536\right]$$

$$= 5.939 \approx 5.94$$

$$\sigma_{BC} = \frac{1}{143}\left(\Sigma\left(X_{H1}X_{B1} + X_{H2}X_{B2}\right) - 144(2.72)(10.63)\right)$$

$$= \frac{1}{143}\left(1029.62 + 3275.55 - 4163.5584\right)$$

$$= 0.990$$

$$\therefore S = \begin{bmatrix} 0.26 & 0.99 \\ 0.99 & 5.94 \end{bmatrix}$$

//

d) calcula el coef. de correlación para todos los incisos anteriores

sabemos que el coeficiente de correlación se define como

$$\rho_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sqrt{\sigma_{x^2}}\sqrt{\sigma_{y^2}}}$$

a) para las hembras

$$S_{x_1} = \begin{pmatrix} 0.0735 & 0.1937 \\ 0.1937 & 1.8040 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \rho_{HB} = \frac{0.1937}{\sqrt{0.0735}\sqrt{1.8040}} = 0.53 \,//$$

b) para los machos

$$S_{x_2} = \begin{pmatrix} 9.6 & 37.66 \\ 37.66 & 152.9 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \rho_{HB} = \frac{37.66}{\sqrt{9.6}\sqrt{152.4}} = 0.98 \,//$$

) para el total

$$S = \begin{pmatrix} 0.26 & 0.99 \\ 0.99 & 5.94 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \rho_{HB} = \frac{0.99}{\sqrt{0.26}\sqrt{5.94}} = 0.79 \,//$$