2.1 Mějme skalární součin $\langle , \rangle$ na $\mathbb{R}^2$ a ortonormální bázi $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$

a hledám vzorec pro $\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle$

PLÁN: Použiju tvrzení 8.49 $\to \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right]_B \cdot \left[\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right] = a_1 \cdot b_1 + a_2 b_2$

standardní skalární součin

kde $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_B = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}_B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$.

REALIZACE:

$$a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x_1 \\ 2 & 3 & x_2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x_1 \\ 2-2 & 3-2 & x_2 - 2x_1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 - 2x_1 \end{array} \right)$$

$$b_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + b_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_1 - x_2 + 2x_1 \\ 0 & 1 & x_2 - 2x_1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3x_1 - x_2 \\ 0 & 1 & x_2 - 2x_1 \end{array} \right)$$

$\Rightarrow a_1 = 3x_1 - x_2 \qquad b_1 = 3y_1 - y_2$

$ a_2 = x_2 - 2x_1 \qquad b_2 = y_2 - 2y_1$

zkouška

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} (3x_1 - x_2) + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} (x_2 - 2x_1) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$3x_1 - x_2 + x_2 - 2x_1 = x_1$ ✓

$6x_1 - 2x_2 + 3x_2 - 6x_2 = x_2$ ✓

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = (3x_1 - x_2) \cdot (3y_1 - y_2) + (x_2 - 2x_1) \cdot (y_2 - 2y_1) =$$

$$\cancel{= 9x_1y_1 - 3x_1y_2 - 3y_1y_2 + 4x_1y_1 - 2x_2y_1 - 2x_1y_2}$$

$$= 9x_1y_1 - 3x_1y_2 - 3y_1x_2 + y_2x_2 + 4x_1y_1 - 2x_2y_1 - 2x_1y_2 + x_2y_2 =$$

$$= \underline{13x_1y_1 - 5x_1y_2 - 5x_2y_1 + 2x_2y_2}$$

2.2

A. Kubír

cvičení/nálet a:00

$\langle\,,\rangle$ na R^2

Máme skalární součin daný maticí $A=(a_{ij})$. Hledám bázi $B=\{\vec{b_1},\vec{b_2}\}$, takovou $\vec{b_1}\perp\vec{b_2}$ jak vzhledem k $\langle\,,\rangle$, tak pro standardní skal. součin.

Skalární součin $\langle\,,\rangle$ tedy vypadá takto: $\langle\vec{u},\vec{v}\rangle=\vec{u}^T\cdot A\cdot\vec{v}=(u_1\ u_2)\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}$

a protože platí axiom $\langle u,v\rangle=\langle v,u\rangle$, tak musí být matice A symetrická $(a_{12}=a_{21})$

$$(u_1\ u_2)\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}=(v_1\ v_2)\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}$$

$$u_1v_1a_{11}+u_1v_2a_{12}+u_2v_1a_{21}+u_2v_2a_{22}=u_1v_1a_{11}+u_2v_1a_{12}+u_1v_2a_{21}+u_2v_2a_{22}$$

$$u_1v_2a_{12}+u_2v_1a_{21}=u_2v_1a_{12}+u_1v_2a_{21}$$

$$(u_1v_2-v_1u_2)\cdot(a_{12}-a_{21})=0\quad\Rightarrow a_{12}=a_{21}$$

nemusí platit vždy pro obecné $\vec{u},\vec{v}$ $\Rightarrow$ tohle bude nula

POZOROVÁNÍ: $\vec{e_1},\vec{e_2}$ nejsou kolmé vzhledem k $\langle\,,\rangle$, neboť $\langle\vec{e_1},\vec{e_2}\rangle=(1\ 0)\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{12}&a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

$=(1\ 0)\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\end{pmatrix}=a_{12}\Rightarrow$ jsou kolmé pouze pokud $a_{12}=0$.

PLÁN: $\Rightarrow$ kanonickou bázi otočíme, tedy použijeme vektory $\vec{s_1}=\begin{pmatrix}\cos\alpha&-\sin\alpha\\\sin\alpha&\cos\alpha\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\alpha\\\sin\alpha\end{pmatrix}$

a $\vec{s_2}=\begin{pmatrix}\cos\alpha&-\sin\alpha\\\sin\alpha&\cos\alpha\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\sin\alpha\\\cos\alpha\end{pmatrix}$ a najdeme úhel α, t.ž. $\vec{s_1}^T\cdot A\cdot\vec{s_2}=0$

POZOROVÁNÍ: $\vec{s_1},\vec{s_2}$ jsou kolmé vzhledem ke standardnímu skal. součinu neboť

$$\vec{s_1}^T\cdot\vec{s_2}=\cos\alpha\cdot(-\sin\alpha)+\sin\alpha\cdot\cos\alpha=0\Rightarrow\text{zbývá najít úhel alfa.}$$

REALIZACE:

$$\langle\vec{s_1},\vec{s_2}\rangle=(\cos\alpha\ \sin\alpha)\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{12}&a_{22}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\sin\alpha\\\cos\alpha\end{pmatrix}=(\cos\alpha\ \sin\alpha)\begin{pmatrix}a_{11}(-\sin\alpha)+a_{12}\cos\alpha\\a_{12}(-\sin\alpha)+a_{22}\cos\alpha\end{pmatrix}=$$

$$=a_{11}\cdot(-\sin\alpha)\cos\alpha+a_{12}\cos^2\alpha-a_{12}\sin^2\alpha+a_{22}\cos\alpha\cdot\sin\alpha=$$

$$=a_{12}\cdot(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)+\cos\alpha\cdot\sin\alpha\,(a_{22}-a_{11})=a_{12}\cdot\cos2\alpha+\frac{\sin2\alpha}{2}\cdot(a_{22}-a_{11})=0$$

$$\Rightarrow a_{12}\cos2\alpha=\frac{\sin2\alpha}{2}\cdot(a_{11}-a_{22})$$

$$\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{2a_{12}}{a_{11}-a_{22}}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2a_{12}}{a_{11}-a_{22}}$$

$$2\alpha = \operatorname{arctg} \frac{2a_{12}}{a_{11}-a_{22}}$$

$$\alpha = \frac{\operatorname{arctg} \frac{2a_{12}}{a_{11}-a_{22}}}{2}$$

kdyby $a_{11} \neq a_{22}$ a $\cos 2\alpha \neq 0$, *

POZOROVÁNÍ: pro A, takové, že $a_{11}=a_{22}$ platí

$$a_{12} \cdot \cos 2\alpha = 0$$

$$\cos 2\alpha = 0$$

$$2\alpha = \arccos 0$$

$$\alpha = \frac{\arccos 0}{2} = 45^\circ \text{ např.}$$

pozn. platí i pro $\alpha = 135^\circ$, ale pro ověření existence stačí nalézt 1 takovou rotaci

Báze B tedy existuje a pro matice A, t.ž. $a_{11} \neq a_{22}$ vypadá takto

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\operatorname{arctg} \frac{2a_{12}}{a_{11}-a_{22}}}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\operatorname{arctg} \frac{2a_{12}}{a_{11}-a_{22}}}{2}\right) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin\left(\frac{\operatorname{arctg} \frac{2a_{12}}{a_{11}-a_{22}}}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{\operatorname{arctg} \frac{2a_{12}}{a_{11}-a_{22}}}{2}\right) \end{pmatrix} \right\},$$

Zatímco pro matice A, t.ž. $a_{11}=a_{22}$

např. takto

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \right\}.$$

* tedy $\cos 2x \neq 0$

$$\cos^2 x - \sin^2 x \neq 0$$

$$\cos x \neq \sin x$$

$$\cos x \neq -\sin x$$

$$x \neq 45^\circ$$

$$x \neq 135^\circ$$

$$x \neq 225^\circ$$

$$x \neq 315^\circ$$

$$\alpha \neq 45^\circ + k \cdot 90^\circ,\ k \in \mathbb{Z}$$