자연수/정수 조건의 처리

tonextpage
https://tonextpage.notion.site/

예로부터 수능에서는 미지수가 자연수 또는 정수로 제한된 조건을 제시하는 문제를 출제하였다. 자연수 또는 정수는 실수와 달리 연속성을 갖지 않기에 문제에 해당 조건이 있으면 복잡한 경우 나누기가 필요하다. 복잡한 경우의 수 시험에서 한 문제에 소비되는 시간이 필연적으로 증가함을 의미하며, 경우 분류를 최적화하지 않으면 시간을 허비하게 된다. 이 칼럼에서는 자연수와 정수의 근본적인 성질로 경우 분류 및 조건 처리의 기준과 시작점을 제시할 것이다.

1 소인수분해

모든 자연수는 산술의 기본 정리에 따라 소수들의 곱으로 표현하는 방법, 즉 소인수분해가 유일하게 존재한다.

정리 1.1 (산술의 기본 정리)

모든 자연수는 유일한 소인수분해를 갖는다.

소인수분해로 얻은 소수의 곱 형태를 이용하거나, 소인수에 주목하는 방식으로 조건의 처리를 시도할 수 있다.

예제 1.2 (2017년 3월 학력평가 나형 21번)

자연수 m에 대하여 집합 A_m을

$$A_m = \left\{ (a, b) \mid 2^a = \frac{m}{b}, a, b \text{는 자연수} \right\}$$

라 할 때, ⟨보기⟩에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

⟨보기⟩

ㄱ. $A_4 = \{(1, 2), (2, 1)\}$

ㄴ. 자연수 k에 대하여 $m = 2^k$이면 $n(A_m) = k$이다.

ㄷ. $n(A_m) = 1$이 되도록 하는 두 자리 자연수 m의 개수는 23이다.

풀이

ㄴ과 ㄷ에서 집합 A_m의 원소의 개수 $n(A_m)$에 대한 명제를 제시하고 있으므로 먼저 $n(A_m)$을 구해보자. 집합 A_m의 정의로부터

$$2^a = \frac{m}{b} \longrightarrow m = 2^a b$$

이다. m의 소인수분해에서 나타나는 2의 개수(지수)를 a_m이라 하고, $b_m = m/2^{a_m}$이라 하자. 즉 m의 소인수분해는 $m = 2^{a_m} b_m$이다. 따라서 집합 A_m에서 가능한 a의 값은 $1, \cdots, a_m$으로 모두 a_m개이다.

ㄱ. $4 = 2^2$이므로 $A_4 = \{(1, 2), (2, 1)\}$이다. (참)

ㄴ. 위의 논의에 따라 $m = 2^k$이면 $n(A_m) = k$이다. (참)

ㄷ. $n(A_m) = 1$이 되려면 $m = 2 \times (\text{홀수})$가 되어야 하므로 가능한 홀수는 $5, 7, 9, \cdots, 49$로 총 23개이다. (참) □

2 경우 분류 (1) – 약수/배수 관계

조건으로 제시된 수의 범위와 상관없이, 문제를 푸는 일반적인 방법은 미지수나 문자 사이의 관계식을 찾는 것이다. 이때 (정수) $\times$ (정수) $=$ (정수)의 형태로 식을 변형하면 정수 사이의 약수/배수 관계를 이용할 수 있다. 이는 정수 조건의 부정방정식을 푸는 기본 사고방식이 된다.

예제 2.1 (2018년 6월 고2 학력평가 나형 20번)

첫째항이 -36이고 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$이 있다. 다음 조건을 만족하는 모든 자연수 d의 값의 합은? [4점]

> (가) 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \neq 0$이다.
>
> (나) $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} a_k = 0$인 자연수 m이 존재한다.

풀이

수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $a_n = -36 + (n-1)d$이다.

(가) 모든 자연수 n에 대하여 $(n-1)d \neq 36$이다. 즉 d는 36의 약수가 아니다.

(나) $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} a_k = \frac{m}{2}(a+1+a_m) = \frac{m}{2}(-72+(m-1)d)$에서 $(m-1)d = 72$이다. 즉 d는 72의 약수이다.

d는 36의 약수가 아니면서 72의 약수이므로 모든 d의 합은 $8+24+72 = 104$이다. $\square$

참고. 수열은 정의역이 자연수 전체의 집합인 함수이다. 따라서 이 문제에서 자연수 제약 걸린 문자는 d, n, m의 세 가지이다. 자연수 조건이 주어진 경우, 수열의 항 번호도 자연수임을 적극적으로 활용하여 부정방정식을 세워야 한다.

3 경우 분류 (2) – 나눗셈의 나머지

나눗셈에서 나머지를 고려하는 것은 정수를 탐구하는 가장 기본적인 자세이다. 특히 나머지로 가능한 값 사이의 연산을 통해 불필요한 경우 제거에 도움이 된다. 자연수 n으로 나누었을 때 등장할 수 있는 나머지는 $0, 1, \cdots, n-1$의 n가지이다. 이때 이 수들이 나머지임을 명시하기 위해 가로선을 그어 $\overline{0}, \overline{1}, \cdots, \overline{n-1}$이라 하고, 집합 $\mathbb{Z}_n = \{\overline{0}, \overline{1}, \cdots, \overline{n-1}\}$로 정의하자. 즉 $\mathbb{Z}_n$은 n으로 나눈 나머지의 집합이 된다. 이때 $\mathbb{Z}_n$의 두 원소 $\overline{x}, \overline{y}$ 사이에 다음 두 연산 $\dot{+}, \dot{\times}$를 정의하자.

$$\overline{x} \dot{+} \overline{y} = \overline{(x+y) \text{ mod } n}, \quad \overline{x} \dot{\times} \overline{y} = \overline{xy \text{ mod } n}$$

여기서 m mod n은 m을 n으로 나눈 나머지이다. 예를 들어 $\mathbb{Z}_4 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}\}$에 대하여

$$\overline{2} \dot{+} \overline{3} = \overline{(2+3) \text{ mod } 4} = \overline{1}, \quad \overline{2} \dot{\times} \overline{3} = \overline{2 \times 3 \text{ mod } 4} = \overline{2}$$

이다. 이 방식으로 나머지끼리 먼저 계산하면 직접 계산하기 전에 빠르게 경우 분류 및 모순 판단이 가능하다.

예제 3.1 (2019년 10월 학력평가 나형 29번)

첫째항이 짝수인 수열 $\{a_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 3 & (a_n\text{이 홀수인 경우}) \\ \dfrac{a_n}{2} & (a_n\text{이 짝수인 경우} \end{cases}$$

를 만족시킨다. $a_5 = 5$일 때, 수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 될 수 있는 모든 수의 합을 구하시오. [4점]

풀이

a_n이 홀수이면 $a_{n+1} = a_n + 3$은 짝수이다. 반대로 a_n이 짝수이면 a_{n+1}은 홀수와 짝수 모두 가능하다. $a_5 = 5$는 홀수이므로 a_4은 짝수이고 $a_4 = 10$이다. a_4는 짝수이므로 a_3은 두 가지 경우를 고려해야 한다.

(i) a_3이 홀수이면 $a_3 = 7$이다. 같은 논리로 a_2는 짝수이며 $a_2 = 14$이다. a_1은 짝수이므로 $a_1 = 28$이다.

(ii) a_3이 짝수이면 $a_3 = 20$이다. 이제 a_2에도 두 가지 경우가 있다. a_2가 홀수이면 $a_2 = 17$, $a_1 = 34$이다. a_2가 짝수이면 $a_2 = 40$, $a_1 = 80$이다.

(i), (ii)로부터 모든 a_1의 값의 합은 $28 + 34 + 80 = 142$이다. □

참고. 풀이에서는 글로 길게 썼지만, 실제 풀이에서는 간단한 수형도를 그려 a_1을 빠르게 구하면 된다.

4 기타 전략

몇몇 문제에서는 매우 유명한 아이디어가 등장하기도 한다. 대표적으로 수의 진법 변환을 활용한 식이 등장한다.

예제 4.1 (2021학년도 수능특강)

수열 $\{a_n\}$은 $a_1 = 1$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$\begin{cases} a_{2n} = a_n \\ a_{2n+1} = a_n + 1 \end{cases}$$

을 만족시킨다. 100 이하의 자연수 k에 대하여 $a_k = 2$인 모든 자연수 k의 개수는?

풀이

a_n은 n을 이진수로 변환하였을 때 등장하는 1의 개수이다. (Why?) $a_k = 2$임은 곧 이진수 자연수에서 등장하는 1의 개수가 단 두 개임의 의미한다. 이때 $2^6 = 64 < 100$이고 $2^7 = 128 > 100$이므로 고려해야 할 이진수의 자릿수는 2^0에서 2^6까지 총 7개이다. 따라서 7개의 자리 중에서 1이 들어갈 두 자리를 고르는 경우의 수는 21이다. □

연습문제

연습문제 1 (2022학년도 수능특강)

자연수 m에 대하여 집합 A_m을

$$A_m = \{(a, b) \mid m = a\log_2 b\text{이고}, a, b\text{는 자연수}\}$$

라 할 때, ⟨보기⟩에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

⟨보기⟩

ㄱ. $A_2 = \{(1,4), (2,2)\}$

ㄴ. 두 자연수 p, q에 대하여 $n(A_{pq}) = n(A_p) \times n(A_q)$이다.

ㄷ. $n(A_m) = 4$를 만족시키는 30 이하의 모든 자연수 m의 개수는 9이다.

풀이

ㄴ과 ㄷ에서 집합 A_m의 원소의 개수에 대한 명제를 제시하고 있으므로 먼저 $n(A_m)$을 구해보자. 집합 A_m의 정의에서

$$m = a\log_2 b \longrightarrow b = 2^{m/a}$$

이고 a, b 모두 자연수이므로 m/a는 자연수이다. 따라서 a는 m의 약수이고 $n(A_m)$은 m의 약수의 개수이다.

ㄱ. a로 가능한 값은 $1, 2$이고, 이에 따른 b의 값은 각각 $4, 2$이다. (참)

ㄴ. (pq의 약수의 개수) = (p의 약수의 개수) × (q의 약수의 개수)는 일반적으로 성립하지 않는다. (거짓)

ㄷ. 약수의 개수가 4가 되기 위해서는 자연수 m이 서로 다른 두 소수 p_1, p_2의 곱 $m = p_1p_2$이거나 소수 p의 세제곱 $m = p^3$여야 한다. 30 이하의 자연수 중에서 그러한 수는 9개이다. (참) □

연습문제 2 (2022학년도 9월 모의평가 공통 13번)

첫째항이 -45이고 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시키도록 하는 모든 자연수 d의 값의 합은? [4점]

> (가) $|a_m| = |a_{m+3}|$인 자연수 m이 존재한다.
>
> (나) 모든 자연수 n에 대하여 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k > -100$이다.

풀이

증가 또는 감소만 하는 등차수열의 경향에 따라 (가)로부터 $a_m = -a_{m+3}$이므로, 이를 정리하면 $(2m+1)d = 90$이다. 이때 $2m+1$은 3 이상의 홀수이므로 다음과 같이 경우를 나눌 수 있다.

$2m+1$	3	5	9	15	45
d	30	18	10	6	2
(m,d)	$(1,30)$	$(2,18)$	$(4,10)$	$(7,6)$	$(22,2)$

$a_m + a_{m+3} = 0$로부터 $a_{m+1} + a_{m+2} = 0$이고 $a_{m+1} < a_{m+2}$이므로 $a_{m+1} < 0$이고 $a_{m+2} > 0$이다. 따라서 수열 $\{a_n\}$은 $(m+1)$항까지만 음수이고 이후로는 모두 양수이다. 따라서 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$의 최솟값은

$$\sum_{k=1}^{m+1} a_k = \frac{(m+1)(a_1 + a_{m+1})}{2} = \frac{(m+1)(md-90)}{2} = \frac{(m+1)(md-(2m+1)d)}{2} = -\frac{(m+1)^2 d}{2}$$

이다. 이 값이 -100보다 커야 하므로 $(m+1)^2 d < 200$이다. (가)의 각 경우를 확인하자.

(m,d)	$(1,30)$	$(2,18)$	$(4,10)$	$(7,6)$	$(22,2)$
$(m+1)^2 d$	$120 < 200$	$168 < 200$	$250 \geq 200$	$364 \geq 200$	$1058 \geq 200$

따라서 가능한 모든 자연수 d의 합은 $30 + 18 = 48$이다. □

참고. (나)에서 $(m+1)^2 d < 200$을 이끌어내는 대신에 (가)에서 구한 (m,d)를 직접 대입하고 음수인 항을 나열하여 계산하는 것이 더 편하다. 90 대신엣 $(2m+1)d$를 대입하는 행위는 다소 발상적이기 때문이다. 그럼에도 이 풀이를 제시하는 이유는 자연수/정수 조건이 주어진 경우에 과감한 계산과 식 세우기를 강조하기 위함이다.

연습문제 3 (2021년 4월 학력평가 공통 21번)

첫째항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n - 2 & (a_n \geq 0) \\ a_n + 5 & (a_n < 0) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_{15} < 0$이 되도록 하는 a_1의 최솟값을 구하시오. [4점]

풀이

a_1은 자연수, 즉 양수이므로 2를 빼는 행위를 자연수 범위에서 지속하지 못하는 경우에 수열에서 음수가 등장한다. 2를 계속 빼는 연산의 결과는 a_1의 홀짝성에 좌우된다. (자연수의 나눗셈은 뺄셈의 반복임에 주목하라.) 따라서 a_1의 홀짝성에 따라 경우를 나누어 항의 부호가 바뀌는 지점을 관찰하자.

(i) $a_1 = 2k$ (k는 자연수)인 경우: a_1부터 a_k까지 모두 양수이고, $a_{k+1} = 0$, $a_{k+2} = -2$이다.

(ii) $a_1 = 2k-1$ (k는 자연수)인 경우: a_1부터 a_k까지 모두 양수이고, $a_{k+1} = -1$, $a_{k+2} = 4$이다. $(k+2)$항이 짝수이므로 (i)과 같은 논리로 $a_{k+4} = 0$, $a_{k+5} = -2$이다.

(i), (ii)로부터 a_1의 홀짝성에 관계없이 -2가 등장함을 알 수 있다. -2부터 몇 개의 항을 더 나열해보면 다음과 같다.

$$-2 \to 3 \to 1 \to -1 \to 4 \to 2 \to 0 \to -2$$

수열 $\{a_n\}$은 음수가 등장하면서부터 주기성을 갖는다. 이제 각 경우에 대하여 수열에서 음수인 항을 먼저 등장하는 순서대로 나열하면 다음과 같다. (화살표 위의 숫자는 항 번호의 규칙을 나타낸다.)

(i) $a_1 = 2k$ (k는 자연수)인 경우:

$$a_{k+2} = -2 \xrightarrow{+3} a_{k+5} = -1 \xrightarrow{+4} a_{k+9} = -2 \xrightarrow{+3} a_{p+12} = -1 \xrightarrow{+4} a_{p+16} = -2 \to \cdots$$

(ii) $a_1 = 2k-1$ (k는 자연수)인 경우:

$$a_{k+1} = -1 \xrightarrow{+4} a_{k+5} = -2 \xrightarrow{+3} a_{k+8} = -1 \xrightarrow{+4} a_{p+12} = -2 \xrightarrow{+3} a_{p+15} = -1 \to \cdots$$

그러므로 $a_{15} < 0$이면서 a_1이 최소이려면 $k + 12 = 15$, 즉 $k = 3$이어야 하며, 이때 a_1의 최솟값은 5이다. □

참고. 공식 해설에서는 $a_1 = 1$부터 직접 대입하여 확인한다. 이는 답이 작기 때문에 유효한 전략이며, 약간의 문제 변형으로 무용지물이 된다. 물론 실전에서는 여러 a_1의 값을 실험해보면서 주기성을 발견하고 이를 일반화해야 한다.

연습문제 4 (2023학년도 수능 공통 15번)

모든 항이 자연수이고 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_9의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M + m$의 값은? [4점]

> (가) $a_7 = 40$
>
> (나) 모든 자연수 n에 대하여
>
> $$a_{n+2} = \begin{cases} a_{n+1} + a_n & (a_{n+1}\text{이 3의 배수가 아닌 경우}) \\ \dfrac{1}{3}a_{n+1} & (a_{n+1}\text{이 3의 배수인 경우}) \end{cases}$$
>
> 이다.

풀이

수열 $\{a_n\}$의 한 항은 이전 항의 3의 배수 여부에 따라 정의된다. 따라서 a_n을 3을 나눈 나머지를 기준으로 경우를 분류하자. a_n을 3으로 나눈 나머지를 b_n이라 하자. 아래는 수열 $\{b_n\}$의 귀납적 정의이다.

(i) $b_{n+1} = 1, 2$이면 b_{n+2}는 $b_{n+1} + b_n$을 3으로 나눈 나머지이다.

(ii) $b_{n+1} = 0$이면 b_{n+2}는 $a_{n+1}/3$을 3으로 나눈 나머지이다.

(i), (ii)에서 다음을 얻는다.

(a) 수열 $\{a_n\}$의 어떤 항이 3으로 나누어떨어지지 않으면 그 앞의 항도 찾아야 한다.

(b) 수열 $\{a_n\}$의 어떤 항이 3으로 나누어떨어지면 다음 항을 찾을 수 있다.

지금까지의 결론을 바탕으로 문제를 풀면 아래의 표로 끝난다. 표의 숫자들은 $(b_n)_{a_n}$의 형태로 나열되어 있다. 예를 들어 $n = 7$일 때, 표에서 1_{40}은 $a_7 = 40$, $b_7 = 1$임을 뜻한다.

n	4	5	6	7	8	9
경우 1 ($b_6 = 0$)			0_{120}	1_{40}	1_{160}	2_{200}
경우 2 ($b_6 = 1$)		0_{30}	1_{10}	1_{40}	2_{50}	0_{90}
경우 3 ($b_6 = 2$)	0_{24}	2_{8}	2_{32}	1_{40}	0_{72}	1_{24}

$M = 200$, $m = 24$이므로 $M + m = 224$이다. □

연습문제 5 (2022년 10월 학력평가 공통 15번)

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. 두 자연수 p, q에 대하여 $S_n = pn^2 - 36n + q$일 때, S_n이 다음 조건을 만족시키도록 하는 p의 최솟값을 p_1이라 하자.

> 임의의 두 자연수 i, j에 대하여 $i \neq j$이면 $S_i \neq S_j$이다.

$p = p_1$일 때, $|a_k| < a_1$을 만족시키는 자연수 k의 개수가 3이 되도록 하는 모든 q의 값의 합은? [4점]

풀이

주어진 조건에 의해 $S_i = S_j$은 $i = j$ 이외의 경우에는 성립할 수 없다. $S_i - S_j$를 계산하면

$$S_i - S_j = (pi^2 - 36i + q) - (pj^2 - 36j + q) = (i - j)(p(i + j) - 36)$$

이다. 이 값은 $i = j$ 이외의 조건에서는 0이 될 수 없으므로 $p_1 = 5$이다. $p = p_1$일 때, 수열 $\{a_n\}$은 다음과 같다.

$$\begin{cases} a_1 = S_1 = q - 31 \\ a_n = S_n - S_{n-1} = 10n - 41 \quad (n \geq 2) \end{cases}$$

항의 절댓값이 특정 값보다 작은 상황을 고려하기 위해 $\{a_n\}$에서 부호가 변하는 지점을 관찰하자.

$$a_2 = -21, \quad a_3 = -11, \quad a_4 = -1, \quad a_5 = 9, \quad a_6 = 19$$

에서 $|a_k| < a_1 = q - 31$을 만족하는 3개의 k는 절댓값이 가장 작은 세 항의 번호인 $3, 4, 5$가 되어야 한다. 따라서 $11 < q - 31 \geq 19$에서 $42 < q < 50$이고 이를 만족하는 모든 자연수 q의 합은 $43 + \cdots + 50 = 372$이다. □

연습문제 6 (2022학년도 사관학교 공통 15번)

다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_1의 최솟값을 m이라 하자.

> (가) 수열 $\{a_n\}$의 모든 항은 정수이다.
>
> (나) 모든 자연수 n에 대하여
>
> $$a_{2n} = a_3 \times a_n + 1, \quad a_{2n+1} = 2a_n - a_2$$
>
> 이다.

$a_1 = m$인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_9의 값은? [4점]

풀이

두 식에 $n = 1$을 대입하면 $a_2 = a_3 \times a_1 + 1$, $a_3 = 2a_1 - a_2$이다. a_3과 a_1에 대하여 정리하면

$$a_3 = \frac{2a_1 - 1}{a_1 + 1} = 2 - \frac{3}{a_1 + 1}$$

이고, a_3은 정수이므로 $a_1 + 1$은 (부호를 고려한) 3의 약수이다. 따라서 $m = -4$이다. $a_1 = m$일 때, $a_3 = 3$, $a_2 = -11$이므로 $a_9 = 2a_4 - a_2 = 2(a_3 \times a_2 + 1) - a_2 = -53$이다. □

참고. (정수) $\times$ (정수) $=$ (정수)의 형태로 변형해도 되지만, 유리식으로 변형하면 최솟값을 구하기 쉽다.

연습문제 7 (2023학년도 6월 모의평가 공통 15번)

자연수 k에 대하여 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$이 있다.

> $a_1 = 0$이고, 모든 자연수 n에 대하여
>
> $$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + \dfrac{1}{k+1} & (a_n \le 0) \\ a_n - \dfrac{1}{k} & (a_n > 0) \end{cases}$$
>
> 이다.

$a_{22} = 0$이 되도록 하는 모든 k의 값의 합은? [4점]

풀이

임의의 자연수 n에 대하여 a_n은 $a_1 = 0$에 $\frac{1}{k+1}$을 더하거나 $\frac{1}{k}$을 빼는 행위를 $(n-1)$번 시행하여 얻는다. 이때 주어진 n에 대하여 a_n을 얻기까지 $\frac{1}{k}$을 빼는 행위를 p_n회 시행했다고 하면, $\frac{1}{k+1}$을 더하는 행위는 $(n-1-p_n)$회 시행한 것이 된다. 즉 다음 식이 성립한다.

$$a_n = \frac{n-1-p_n}{k+1} - \frac{p_n}{k}$$

$a_{22} = 0$으로부터

$$a_{22} = \frac{21-p_{22}}{k+1} - \frac{p_{22}}{k} = 0 \longrightarrow p_{22} = \frac{21k}{2k+1}$$

이다. p_{22}는 자연수이므로 $2k+1$은 $21k$의 약수여야 한다. k와 $2k+1$은 서로소이므로 $2k+1$은 21의 약수이다. 따라서 가능한 자연수 k는 $1, 3, 10$이고 그 합은 14이다. □

연습문제 8 (2006학년도 사관학교 나형 10번)

수열의 합 $\sum_{k=1}^{n} 2^k$ 의 값이 65의 배수가 되도록 하는 자연수 n의 최솟값은? [3점]

풀이

주어진 합은 $2(2^n-1)$이고 2와 65는 서로소이므로 2^n-1이 65의 배수가 되어야 한다. $65=5\times13$이므로 2^n을 5와 13으로 나눈 나머지를 관찰하자. 2^n을 5로 나눈 나머지는 $2,4,3,1$이 순서대로 반복된다. 따라서 n은 4의 배수가 되어야 한다. 자연수 m에 대하여 $n=4m$이라 하자. $2^{4m}=16^m=(13+3)^m$이므로 2^{4m}을 13으로 나눈 나머지는 3^m을 13으로 나눈 나머지와 같다. 3^m을 13으로 나눈 나머지는 $3,9,1$이 순서대로 반복된다. 따라서 m은 3의 배수이다. 그러므로 n은 12의 배수여야 하므로 최솟값은 12이다. □

연습문제 9 (2021학년도 6월 모의평가 가형 21번)

수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$$a_n = \log_2 \sqrt{\frac{2(n+1)}{n+2}}$$

이다. $\sum_{k=1}^{m} a^k$ 의 값이 100 이하의 자연수가 되도록 하는 모든 자연수 m의 값의 합은? [4점]

풀이

$a_n = \frac{1}{2}(1 + \log_2(n+1) - \log_2(n+2))$이므로

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m} a_k &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}(1 + \log_2(n+1) - \log_2(n+2)) \\ &= \frac{1}{2}(m + \log_2 2 - \log_2(m+2)) \\ &= \frac{1}{2}(m + 1 - \log_2(m+2))\end{aligned}$$

이다. 이 값이 자연수가 되려면 $m+2$는 2의 거듭제곱이어야 하고, $m+1-\log_2(m+2)$는 짝수여야 한다. $m+1$은 홀수이므로 $m+2$는 2의 홀수 거듭제곱이다. 또 $m+2 \geq 2^8 = 256$이면 값이 100을 초과하게 된다. 따라서 가능한 자연수 m은 다음과 같다.

$m+2$	$2^3 = 8$	$2^5 = 32$	$2^7 = 128$
m	6	30	126
$\sum_{k=1}^{m} a_k$	2	13	60

구하는 모든 자연수 m의 합은 162이다. □

연습문제 10 (2020학년도 4월 학력평가 가형 21번)

자연수 k에 대하여 집합 A_k를

$$A_k = \left\{ \sin \frac{2(m-1)}{k}\pi \,\middle|\, m\text{은 자연수} \right\}$$

라 할 때, ⟨보기⟩에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

⟨보기⟩

ㄱ. $A_3 = \left\{ -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$

ㄴ. 1이 집합 A_k의 원소가 되도록 하는 두 자리 자연수 k의 개수는 22이다.

ㄷ. $n(A_k) = 11$을 만족시키는 모든 k의 값의 합은 33이다.

풀이

$\sin \frac{2(m-1)}{k}\pi = \sin \frac{2\pi}{k}(m-1)$이므로 집합 A_k는 좌표평면 위의 단위원 $x^2 + y^2 = 1$에 내접하면서 점 $(1, 0)$을 한 꼭짓점으로 하는 정k각형의 꼭짓점의 y좌표의 집합이다. 이 정k각형은 x축에 대하여 대칭이다.

ㄱ. $\sin 0 = 0$, $\sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ (참)

ㄴ. 1이 A_k의 원소가 되기 위새ㅓ는 꼭짓점 중 하나가 $(0, 1)$이어야 하므로 k는 4의 배수여야 한다. 따라서 가능한 두 자리 자연수는 12부터 96까지 22개이다. (참)

ㄷ. k가 4의 배수이거나 4로 나눈 나머지가 2인 수이면 정k각형은 y축에 대하여 대칭이다. 이때 k가 4의 배수인 경우에는 점 $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(0, -1)$을 모두 꼭짓점이므로, 꼭짓점의 y좌표가 11가지이려면 $0 < y < 1$인 부분에 8개의 꼭짓점이 있어야 한다. 대칭성에 의해 $-1 < y < 0$인 부분에도 8개의 꼭짓점이 있어야 하므로 이때의 k는 $4 + 8 + 8 = 20$이다. k를 4로 나눈 나머지가 2이면 점 $(-1, 0)$은 꼭짓점이고 점 $(0, 1)$, $(0, -1)$은 꼭짓점이 아니므로 $0 < y < 1$인 부분과 $-1 < y < 0$인 부분에 각각 10개의 꼭짓점이 있어야 한다. 따라서 이때의 k는 $2 + 10 + 10 = 22$이다. 이외의 경우에는 y축 대칭이 아니므로 정확히 11개의 꼭짓점이 존재해야 한다. 그러므로 모든 k의 값의 합은 $20 + 22 + 11 = 53$이다. (거짓) □

연습문제 11 (2019학년도 6월 고2 학력평가 나형 21번)

음이 아닌 세 정수 a, b, n에 대하여

$$(a^2+b^2+2ab-4)\cos\frac{n}{4}\pi+(b^2+ab+2)\tan\frac{2n+1}{4}\pi=0$$

일 때, $a+b+\sin^2\frac{n}{8}\pi$의 값은? (단, $a\geq b$) [4점]

풀이

자연수 n에 대하여 $\cos\frac{n}{4}\pi$와 $\tan\frac{2n+1}{4}\pi$는 각각 8, 2의 주기를 갖는다. 이를 음이 아닌 정수 k에 대하여 다음 표와 같이 정리할 수 있다.

n	$8k$	$8k+1$	$8k+2$	$8k+3$	$8k+4$	$8k+5$	$8k+6$	$8k+7$
$\cos\frac{n}{4}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\tan\frac{2n+1}{4}\pi$	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1

(i) n이 $8k+1$, $8k+3$, $8k+5$, $8k+7$ 중 하나인 경우: 이 경우 식에 무리수인 $\sqrt{2}$가 포함되므로 계수에 해당하는 $a^2+b^2+2ab-4$와 b^2+ab+2는 모두 0이어야 한다. 특히

$$b^2+ab+2=0 \longrightarrow b(a+b)=-2<0$$

에서 b는 음이 아닌 정수이므로 $b>0$이다. 따라서 $a+b<0$에서 $a<-b<0$이므로 이는 a가 음이 아닌 정수임에 모순이다.

(ii) n이 $8k+2$, $8k+6$ 중 하나인 경우: $b^2+ab+2=0$이므로 (i)과 같은 논리로 이 식을 만족하는 음이 아닌 정수 a, b는 존재하지 않는다.

(iii) n $8k$인 경우: $a^2+b^2+2ab-4=-b^2-ab-2$에서 $a^2+3ab+2b^2=2$, $(a+b)(a+2b)=2$이고 $a+b<a+2b$이므로 $a+b=1$, $a+2b=2$에서 $(a,b)=(0,1)$이다. 이는 $a\geq b$를 만족하지 않는다.

(iv) n이 $8k+4$인 경우: $a^2+b^2+2ab-4=b^2+ab+2$에서 $a(a+b)=6$이고 $a<a+b$이므로 $(a,b)=(1,5),(2,1)$이고, 여기서 $a\geq b$를 만족하는 것은 $(2,1)$이다.

(i)–(iv)에서 $a=2$, $b=1$이고, $\sin^2\frac{n}{8}\pi=\sin^2\frac{8k+4}{8}\pi=1$이다. 따라서 구하는 값은 $2+1+1=4$이다. □

참고. 정수 조건과 삼각함수의 주기성을 동시에 생각하면 나눗셈의 나머지를 통한 경우 분류라는 아이디어는 필연적이다. 이후 무리수의 상등을 이용하여 절반의 경우의 수를 동시에 다룬다. 또한 모든 경우에서 (정수) $\times$ (정수) $=$ (정수)의 형태로 식을 변형하고 인수의 대소를 비교하여 약수/배수 관계를 적용한다.

연습문제 12 (2022학년도 6월 모의평가 공통 21번)

다음 조건을 만족시키는 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$가 존재하도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오. [4점]

> (가) x에 대한 방정식 $(x^n - 64)f(x) = 0$은 서로 다른 두 실근을 갖고, 각각의 실근은 중근이다.
>
> (나) 함수 $f(x)$의 최솟값은 음의 정수이다.

풀이

n이 홀수일 때 방정식 $x^n - 64 = 0$은 유일한 실근 $\sqrt[n]{64}$를 갖는다. 따라서 이차식 $f(x)$를 곱하도라도 방정식 $(x^n - 64)f(x) = 0$은 서로 다른 두 개의 중근을 가질 수 없다. n이 짝수이면서 방정식 $x^n - 64 = 0$의 실근은 $\sqrt[n]{64}$, $-\sqrt[n]{64}$로 두 개이다. 따라서 (가)를 만족시키기 위해서는

$$f(x) = (x - \sqrt[n]{64})(x + \sqrt[n]{64}) = x^2 - 2^{\frac{12}{n}}$$

이어야 한다. 함수 $f(x)$의 최솟값은 $-2^{\frac{12}{n}}$이다. 이 값이 음의 정수이므로 n이 12의 약수가 되어야 한다. (가)에서 n이 짝수이므로 가능한 n은 12의 약수 중에서 짝수인 $2, 4, 6, 12$이고, 합은 24이다. □

연습문제 13 (2019년 6월 고2 학력평가 가형 21번)

자연수 n에 대하여 $f(n)$이 다음과 같다.

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[4]{9 \times 2^{n+1}} & (\text{n이 홀수}) \\ \sqrt[4]{4 \times 3^{n}} & (\text{n이 짝수}) \end{cases}$$

10 이하의 두 자연수 p, q에 대하여 $f(p) \times f(q)$가 자연수가 되도록 하는 모든 순서쌍 (p, q)의 개수는? [4점]

풀이

p, q의 홀짝성에 따라 경우를 나누자.

(i) p와 q 모두 홀수인 경우: $f(p) \times f(q) = \sqrt[4]{9 \times 2^{p+1}} \times \sqrt[4]{9 \times 2^{q+1}} = 3\sqrt[4]{2^{p+q+2}}$이므로 $p+q+2$는 4의 배수여야 한다.

$p+q$	(p, q)
2	$(1,1)$
6	$(1,5), (3,3), (5,1)$
10	$(1,9), (3,7), (5,5), (7,3), (9,1)$
14	$(5,9), (7,7), (9,5)$
18	$(9,9)$

그러므로 순서쌍 (p, q)의 개수는 13이다.

(ii) p가 홀수 q가 짝수인 경우: $f(p) \times f(q) = \sqrt[4]{9 \times 2^{p+1}} \times \sqrt[4]{4 \times 3^{q}} = \sqrt[4]{2^{p+3} \times 3^{q+2}}$이므로 $p+3$과 $q+4$ 모두 4의 배수여야 한다. p로 가능한 수는 $1, 5, 9$이고 q로 가능한 수는 $2, 6, 10$이므로 순서쌍 (p, q)의 개수는 $3 \times 3 = 9$이다.

(iii) p가 짝수, q가 홀수인 경우: (ii)와 같은 논리로 순서쌍 (p, q)의 개수는 9이다.

(iv) p와 q 모두 짝수인 경우: $f(p) \times f(q) = \sqrt[4]{4 \times 3^{p}} \times \sqrt[4]{4 \times 3^{q}} = 2\sqrt[4]{3^{p+q}}$이므로 $p+q$는 4의 배수여야 한다. 이 경우는 (i)의 경우와 거의 동일하므로 순서쌍 (p, q)의 개수는 13이다. ((i)의 순서쌍의 각 성분에 모두 1을 더하면 (iv)에 해당하는 순서쌍을 얻는다.)

(i)–(iv)로부터 구하는 순서쌍의 개수는 44이다. □

연습문제 14 (2018학년도 사관학교 나형 28번)

2 이상의 자연수 n에 대하여 $n^{\frac{4}{k}}$ 의 값이 자연수가 되도록 하는 자연수 k의 개수를 $f(n)$이라 하자. 예를 들어 $f(6) = 3$이다. $f(n) = 8$을 만족시키는 n의 최솟값을 구하시오. [4점]

풀이

n의 소인수분해를 $p_1^{q_1} p_2^{q_2} \cdots p_{n_k}^{q_{n_k}}$ 라 하자. 지수에 해당하는 $q_1, \cdots, q_{n_k}$ 의 최대공약수를 d_n이라 하자. $n^{\frac{4}{k}}$ 의 값이 자연수가 되기 위해서는 k가 $4d_n$의 약수여야 한다. 약수의 개수가 8인 최소의 자연수는 $2^3 \times 3 = 4 \times 6 = 24$이므로 d_n이 6인 최소의 n은 $2^6 = 64$이다. □

연습문제 15 (2023학년도 수능특강)

$p > 0,\ q < 0$인 두 정수 $p,\ q$와 모든 자연수 n에 대하여 수열 $\{a_n\}$이

$$a_1 = 30, \quad a_{n+1} = a_n + 2pn + q$$

를 만족시킨다. 두 부등식 $a_3 > 0,\ a_4 < 0$이 모두 성립하도록 하는 정수 $p,\ q$의 모든 순서쌍 (p, q)의 개수를 구하시오.

풀이

먼저 a_3과 a_4를 구하자.

$$a_1 = 30 \longrightarrow a_2 = 30 + 2p + q \longrightarrow a_3 = 30 + 6p + 2q \longrightarrow a_4 = 30 + 12p + 3q$$

$a_3 > 0$에서 $-q < 15 + 3p$이고, $a_4 < 0$에서 $-q > 10 + 4p$이다. 두 부등식을 연립하면

$$10 + 4p < -q < 15 + 3p \longrightarrow 10 + 4p < 15 + 3p \longrightarrow p < 5$$

이므로 $p = 1, 2, 3, 4$에 대하여 가능한 순서쌍을 찾으면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
p = 1 &\longrightarrow 14 < -q < 18 \longrightarrow (1, -15), (1, -16), (1, -17) \\
p = 2 &\longrightarrow 18 < -q < 21 \longrightarrow (2, -19), (2, -20) \\
p = 3 &\longrightarrow 22 < -q < 24 \longrightarrow (3, -23) \\
p = 4 &\longrightarrow 26 < -q < 27 \longrightarrow \text{가능한 } q\text{가 존재하지 않는다.}
\end{aligned}$$

따라서 구하는 순서쌍의 개수는 6이다. □

연습문제 16 (2024학년도 수능특강)

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} n + a_n & (a_n < n) \\ a_n - p & (a_n \geq n) \end{cases}$$

을 만족시킨다. 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시키도록 하는 모든 p의 값의 합을 구하시오.

> (가) p는 10 이하의 자연수이다.
>
> (나) $a_m = 0$, $a_{m+4} = 0$인 자연수 m이 존재한다.

풀이

먼저 a_{m+3}까지는 무리없이 구할 수 있다.

$$a_m = 0 \longrightarrow a_{m+1} = m \longrightarrow a_{m+2} = 2m+1 \longrightarrow a_{m+3} = 2m+1-p$$

a_{m+3}으로부터 a_{m+4}를 구하려고 시도하면 경우를 분류해야 함을 알 수 있다.

(i) $2m+1-p < m+3$, 즉 $m < p+2$인 경우: $a_{m+4} = 3m+4-p = 0$에서 $p = 3m+4$이다. $m < p+2 = 3m+6$에서 $m > -3$이다. 따라서 가능한 자연수 m, p의 순서쌍 (m, p)는 $(1, 7), (2, 10)$이다.

(ii) $2m+1-p \geq m+3$, 즉 $m \geq p+2$인 경우: $a_{m+4} = 2m+1-2p = 0$에서 $p = m + \frac{1}{2}$이므로 이는 p가 자연수임에 모순이다.

(i), (ii)로부터 모든 p의 값의 합은 17이다. □