Munkres Topology Solution: Section 13–32

tonextpage
https://github.com/tonextpage

13 Basis for a Topology

Exercise 13.1. A의 각 점 x에 대하여 $x \in U_x \subset A$인 열린집합 U_x가 존재한다. 이때 $A = \bigcup_{x \in A} U_x$이므로 A는 열린집합이다.

Note. 이 연습문제의 명제는 이 책의 거의 모든 부분에서 사용하므로 이곳에서 역시 특별한 언급 없이 이용하겠다.

Exercise 13.2. Do it yourself!

Exercise 13.3. 먼저 $\mathcal{T}_c$가 위상임을 보이자. $\varnothing$과 X의 여집합은 각각 X와 $\varnothing$이므로 $\mathcal{T}_c$에는 $\varnothing$과 X가 속한다. $\{U_\alpha\}$가 임의의 열린집합의 모임이면 집합 $X \setminus (\bigcup_\alpha U_\alpha) = \bigcap_\alpha (X \setminus U_\alpha)$가 가산이므로 $\bigcup_\alpha U_\alpha$ 역시 열린집합이다. $\{U_i\}_{i=1}^n$가 열린집합의 유한 모임이면 집합 $X \setminus (\bigcap_{i=1}^n U_i) = \bigcup_{i=1}^n (X \setminus U_i)$ 역시 가산이므로 열린집합이다. 한편, $\mathcal{T}_\infty$는 일반적으로 위상이 아니다. X가 유한집합이면, $\mathcal{T}_\infty$는 X 위의 자명 위상이다. 이제 X가 무한집합이라 하자. 두 집합 X_1과 X_2가 무한집합이 되도록 집합 X의 분할 X_1, X_2, $\{x\}$를 잡자. 그러면 X_1과 X_2는 모두 열린집합이지만, 둘의 합집합 $X_1 \cup X_2$는 열린집합이 아니다.

Exercise 13.4.

(a) 먼저 $\bigcap \mathcal{T}_\alpha$가 위상임을 보이자. 모든 $\mathcal{T}_\alpha$에 $\varnothing$과 X가 속하므로 $\bigcap \mathcal{T}_\alpha$에도 이 둘이 속한다. $\bigcap \mathcal{T}_\alpha$에 속하는 임의의 원소의 합집합과 유한 교집합 역시 같은 논리로 $\bigcap \mathcal{T}_\alpha$에 속한다. 한편, $\bigcup \mathcal{T}_\alpha$는 일반적으로 위상이 아니다. $X = \{a, b, c\}$라 하고,
$$\mathcal{T}_1 = \{\varnothing, \{a\}, X\}, \quad \mathcal{T}_2 = \{\varnothing, \{b\}, X\}$$
라 하자. 이 둘의 합집합 $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T} = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, X\}$는 위상이 아니다.

(b) (a)에 의해, 모든 $\mathcal{T}_\alpha$에 포함되는 가장 큰 (유일한) 위상은 $\bigcap \mathcal{T}_\alpha$이다. 모든 $\mathcal{T}_\alpha$를 포함하는 가장 작은 (유일한) 위상은 $\mathcal{T}_\alpha$를 모두 포함하는 모든 위상의 교집합이다. 이는 집합 $\bigcup \mathcal{T}_\alpha$을 부분기저로 하여 생성된 위상이다. (Exercise 13.5)

(c) $\mathcal{T}_1$과 $\mathcal{T}_2$에 모두 포함되는 가장 큰 위상은 $\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2 = \{\varnothing, X, \{a\}\}$이다. $\mathcal{T}_1$과 $\mathcal{T}_2$을 모두 포함하는 가장 작은 위상은 $\{\varnothing, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$이다.

Exercise 13.5. $\mathcal{A}$를 한 기저라 하자. $\mathcal{A}$를 포함하는 모든 위상에는 $\mathcal{A}$의 임의의 원소의 합집합이 속해야 하므로 $\mathcal{A}$를 포함하는 모든 위상은 $\mathcal{A}$로 생성된 위상을 포함한다. 이제 $\mathcal{A}$가 부분기저라 하자. $\mathcal{A}$를 포함하는 모든 위상에는 $\mathcal{A}$의 원소의 유한 교집합이 속해야 한다. 즉, $\mathcal{A}$로 생성된 기저를 포함해야 한다. 반대로, (기저 또는 부분기저) $\mathcal{A}$로 생성된 위상은 자명하게 $\mathcal{A}$를 포함한다.

Exercise 13.6. 하극한 위상의 임의의 기저 원소 $[x, b)$에 대하여, x를 포함하는 K-위상의 기저 원소는 존재하지 않는다. 따라서 K-위상은 하극한 위상을 포함하지 않는다. 반대로, K-위상의 기저 원소 $(-1, 1) \setminus K$에 대하여, 0을 포함하는 하극한 위상의 기저 원소는 존재하지 않으므로 하극한 위상 역시 K-위상을 포함하지 않는다. (Lemma 13.3)

Exercise 13.7. 기저 원소를 간단히 비교하면

$$\mathcal{T}_3 \subsetneq \mathcal{T}_1 \subsetneq \mathcal{T}_2 \subsetneq \mathcal{T}_4\text{이고} \quad \mathcal{T}_5 \subsetneq \mathcal{T}_1 \subsetneq \mathcal{T}_2 \subsetneq \mathcal{T}_4$$

임을 알 수 있다. ($\mathcal{T}_2$와 $\mathcal{T}_4$를 비교하는 경우, K-위상에서 0이 문제를 일으킴에 주목하라.) 한편, $\mathcal{T}_3$과 $\mathcal{T}_5$는 비교가능하지 않다. (Lemma 13.3)

Exercise 13.8.

(a) U를 보통 위상에서의 열린집합이라 하고, x를 U의 한 점이라 하자. 이때 $x \in (a, b) \subset U$를 만족하는 열린구간 (a, b)가 존재한다. 이 열린구간에서 두 유리수점 q와 r을 $a < q < x < r < b$가 되도록 택하자. 그러면 열린구간 (q, r)은 $\mathcal{B}$의 원소이고, $x \in (q, r) \subset U$를 만족한다. 따라서 Lemma 13.2에 의해 $\mathcal{B}$는 보통 위상을 생성하는 기저이다.

(b) $\mathcal{C}$가 기저인 점과 $\mathcal{C}$로 생성된 위상이 하극한 위상보다 거친 위상임은 쉽게 확인할 수 있다. 한편, 하극한 위상의 기저 원소 $[\sqrt{2}, 2)$에 속하는 점 $\sqrt{2}$를 포함하는 $\mathcal{C}$의 기저 원소가 존재하지 않으므로 두 위상은 서로 다르다.

16 The Subspace Topology

Exercise 16.1. B가 (Y의 부분공간인) A의 열린집합이다. $\iff$ $B = C \cap A$이고 C는 Y의 열린집합이다. $\iff$ $C = D \cap Y$이고 D는 X의 열린집합이다. $\iff$ $B = D \cap Y \cap A = D \cap A$이고 D는 X의 열린집합이다. $\iff$ B는 (X의 부분공간인) A의 열린집합이다.

Exercise 16.2. Y와 Y'을 각각 $(X, \mathcal{T})$와 $(X, \mathcal{T}')$의 부분공간이라 하자. 그러면 Y'의 위상은 Y의 위상보다 세밀하다. X의 위상이 $\mathcal{T}$에서 $\mathcal{T}'$으로 바뀌어도, 기존의 열린집합은 새로운 위상에서도 열린집합이기 때문이다. 한편, 두 부분공간의 위상은 반드시 다를 필요는 없다. Y를 한점집합으로 두는 경우, 두 부분공간 위상은 항상 같다.

Exercise 16.3.

	A	B	C	D	E
Y에서 열린집합이다.	참	참	거짓	거짓	참
$\mathbb{R}$에서 열린집합이다.	참	거짓	거짓	거짓	참

Exercise 16.4. U를 $X \times Y$의 열린집합이라 하고, x를 $\pi_1(U)$의 한 점이라 하자. 그러면 $x \times y \in U$인 점 y가 존재한다. U가 열린집합이므로, $x \times y \in A \times B \subset U$를 만족하는 기저 원소 $A \times B$가 존재한다. 이때 $x \in A = \pi_1(A \times B) \subset \pi_1(U)$이므로 $\pi_1(U)$는 X의 열린집합니다. 같은 방법으로 $\pi_2(U)$ 역시 Y의 열린집합임을 알 수 있다.

Exercise 16.5.

(a) $X \times Y$의 모든 기저 원소는 $X' \times Y'$의 기저 원소이다.

(b) 모든 집합이 공집합이 아님을 가정하면 (a)의 역 또한 성립한다.

Lemma. $A \subset X$와 $B \subset Y$가 공집합이 아니라 가정하자. $A \times B$가 $X \times Y$의 열린집합일 필요충분조건은 A와 B가 각각 X와 Y의 열린집합인 것이다.

증명. A와 B가 각각 열린집합이면 $A \times B$는 $X \times Y$의 기저 원소이다. 반대로 $A \times B$가 $X \times Y$의 열린집합이라 가정하자. 사영 π_1과 π_2가 열린사상이므로 $A = \pi_1(A \times B)$와 $B = \pi_2(A \times B)$는 열린집합이다. □

U가 점 x를 포함하는 X의 열린집합이고, V가 점 y를 포함하는 Y의 열린집합이라 하자. 그러면 $U \times V$는 $X \times Y$의 열린집합이면서 (가정에 의해) $X' \times Y'$의 열린집합이다. 따라서 $x \times y \in A \times B \subset U \times V$를 만족하는 $X' \times Y'$의 기저 원소 $A \times B$가 존재한다. A는 $x \in A \subset U$를 만족하는 X'의 열린집합이고, B는 $y \in B \subset V$를 만족하는 Y'의 열린집합이므로 (Lemma) U와 V는 각각 X'과 Y'의 열린집합이다.

Exercise 16.6. Exercise 13.8(a)와 Theorem 15.1에 의해 성립한다.

Exercise 16.7. 그렇지 않다. $\mathbb{Q}$에 보편적인 순서를 부여한 위상공간에서 $(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q}$는 볼록집합이지만 구간이 아니다.

Exercise 16.8. To be updated.

Exercise 16.9. $\mathbb{R}_d \times \mathbb{R}$의 모든 기저 원소 $\{x\} \times (a, b)$는 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$에서의 열린구간 $(x \times a, x \times b)$에 해당한다. 반대로 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$의 모든 열린구간은 $\mathbb{R}_d \times \mathbb{R}$의 기저 원소의 적절한 합집합이다. 따라서 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$의 사전식 순서 위상과 $\mathbb{R}_d \times \mathbb{R}$의 위상은 같다. 이 위상은 $\mathbb{R}^2$보다 세밀하지만 (Exercise 16.5(a)) 같지는 않다. 부분집합 $\{0\} \times \mathbb{R}$은 $\mathbb{R}_d \times \mathbb{R}$에서는 열린집합이지만 $\mathbb{R}^2$에서는 그렇지 않기 때문이다.

Exercise 16.10. $I \times I$ 위의 곱 위상과 $I \times I$ 위상 사전식 순서 위상은 비교가능하지 않다. 먼저 $A = I \times (1/2, 1]$이라 하자. $(1/2, 1] = (1/2, 2) \cap I$이므로 A는 곱 위상에서 열린집합이지만, 사전식 순서 위상에서는 열린집합이 아니다. (Figure 16.1 참고) $B = \{0\} \times (0, 1)$이라 하자. B는 사전식 순서 위상에서의 열린구간에 해당하므로 열린집합지만, $\{0\}$은 I의 열린집합이 아니므로 B는 곱 위상에서 열린집합이 아니다. $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$의 부분공간 $I \times I$의 기저 원소를 적절히 합집합하면 앞의 두 위상의 기저 원소를 얻는다. 따라서 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$의 부분공간인 $I \times I$는 앞의 두 위상보다 세밀하다. 그러나 앞의 두 위상이 서로 비교가능하지 않기에 모든 위상은 서로 같지 않다.

17 Closed Sets and Limit Points

Exercise 17.1. $\varnothing$과 X의 여집합은 각각 X와 $\varnothing$이므로 $\varnothing, X \in \mathcal{T}$이다. $\{C_\alpha\}$를 $\mathcal{C}$의 임의의 원소의 모임이라 하자. 그러면 $\bigcap_\alpha C_\alpha \in \mathcal{C}$이므로 $\bigcup_\alpha (X \setminus C_\alpha) = X \setminus (\bigcap_\alpha C_\alpha) \in \mathcal{T}$이다. $\{C_i\}_{i=1}^n$이 $\mathcal{C}$의 원소의 유한한 모임이라 하면, $\bigcup_{i=1}^n C_i \in \mathcal{C}$이므로 $\bigcap_{i=1}^n (X \setminus C_i) = X \setminus (\bigcup_{i=1}^n C_i) \in \mathcal{T}$이다. 따라서 $\mathcal{T}$는 X 위의 한 위상이다.

Note. 이 연습문제에서는 닫힌집합을 선언하여 위상을 구성할 수 있음을 보여준다.

Exercise 17.2. A가 Y의 닫힌집합이므로 Theorem 17.2로부터 X의 닫힌집합 C가 존재하여 $A = C \cap Y$이다. Y 역시 X의 닫힌집합이므로 A는 X에서 닫힌집합이다.

Exercise 17.3. $A \times B = (X \times Y) \setminus ((X \setminus A) \times Y \cup X \times (Y \setminus B))$는 $X \times Y$에서의 닫힌집합이다.

Exercise 17.4. $U \setminus A = U \cap (X \setminus A)$는 X의 열린집합이고, $A \setminus U = A \cap (X \setminus U)$는 X의 닫힌집합이다.

Exercise 17.5. $[a, b] = X \setminus ((-\infty, a) \cup (b, \infty))$는 (a, b)를 포함하는 닫힌집합이므로 $\overline{(a, b)} \subset [a, b]$가 성립한다. 두 집합이 같으려면 a와 b가 (a, b)의 극한점이어야 한다. 즉 $(a, b) \neq \varnothing$이고 모든 $x \in (a, b)$에 대하여 $a < c < x < d < b$인 c와 d가 존재해야 한다. 이는 곧 a의 바로 뒤 원소(immediate successor)가 존재하지 않고, b의 바로 앞 원소(immediate predecessor)가 존재하지 않는 것과 동치이다. 만약 a에 바로 뒤 원소 u가 존재하면 $(-\infty, u)$는 a를 포함하는 열린구간이지만 (a, b)의 원소를 갖지 않는다. (b가 바로 앞 원소를 갖는 경우도 비슷하다.)

Exercise 17.6.

(a) $\overline{B}$는 A를 포함하는 닫힌집합이므로 $\overline{A} \subset \overline{B}$가 성립힌다.

(b) ($\supset$) (c)를 참고하라.

($\subset$) $\overline{A} \cup \overline{B}$는 $A \cup B$를 포함하는 (닫힌집합의 **유한** 합집합으로서) 닫힌집합이므로 $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$가 성립한다.

(c) ($\supset$) $\overline{A_\alpha}$는 A_α를 포함하는 가장 작은 닫힌집합이므로 $\bigcup A_\alpha$를 포함하는 닫힌집합은 모든 $\overline{A_\alpha}$를 포함해야 한다. 따라서 $\overline{\bigcup A_\alpha} \supset \bigcup \overline{A_\alpha}$가 성립한다.

($\not\subset$) $X = \mathbb{R}$이라 하고, 유리수 q에 대하여 $A_q = \{q\}$라 하자. 그러면 $\overline{\bigcup_{q \in \mathbb{Q}} A_q} = \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$이고, $\bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \overline{A_q} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} A_q = \mathbb{Q}$이다.

Exercise 17.7. x의 근방 U의 선택에 따라 A_α 역시 달라질 수 있음에 주목하라. 따라서 U가 어떤 A_α와 만난다는 사실만으로 x가 특정 A_α에 속함을 보일 수 없다. Exercise 17.6(c)의 예시를 그대로 이용하자. $x = \sqrt{2} \in \overline{\bigcup_{q\in\mathbb{Q}} A_q} = \mathbb{R}$라 하자. x를 포함하는 임의의 열린구간은 어떠한 A_q, 즉 유리수점을 포함한다. 하지만 x는 무리수이므로 어떤 $\overline{A_q}$에도 속하지 않는다. 특히 어떤 A_q도 모든 열린구간에 포함되지 않는다.

Exercise 17.8.

(a), (b) ($\subset$) Exercise 17.6(a)에 의해 $\overline{\bigcap A_\alpha} \subset \overline{A_\alpha}$이므로 $\overline{\bigcap A_\alpha} \subset \bigcap \overline{A_\alpha}$이 성립한다.

($\not\supset$) $X = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{Q}$, $B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$라 하자. $\overline{A \cap B} = \overline{\varnothing} = \varnothing$이고, $\overline{A} \cap \overline{B} = \mathbb{R}$이다.

(c) ($\supset$) Exercise 17.6(a), (b)로부터

$$\begin{aligned}
\overline{A} - \overline{B} &= \overline{(A - B) \cup (A \cap B)} - \overline{B} \\
&= (\overline{A - B} \cup \overline{A \cap B}) - \overline{B} \\
&= \overline{A - B} - \overline{B} \subset \overline{A - B}
\end{aligned}$$

가 성립한다. 다음과 같이 보일 수도 있다. x가 $\overline{A} \setminus \overline{B}$의 원소이면, x의 모든 근방은 A와 만나며, B와 만나지 않는 x의 근방 U가 존재한다. 이때 x가 $\overline{A \setminus B}$에 속하지 않는다고 가정하면, $A \setminus B$와 만나지 않는 x의 근방 V가 존재한다. 그러면 x의 근방 $U \cap V$는 $A \setminus B$ 및 B와 만나지 않는다. 이는 $Z \cap V$가 A와 만나지 않음을 의미하므로 모순이다. 즉, x는 $\overline{A \setminus B}$의 원소여야 한다.

($\not\subset$) (a), (b)의 예시에서 $\overline{A \setminus B} = \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$이고 $\overline{A} \setminus \overline{B} = \varnothing$이다.

Exercise 17.9. $x \times y \in \overline{A \times B}$일 필요충분조건은 $x \times y$를 포함하는 임의의 기저 원소가 $A \times B$와 만나는 것이다. 이때 $X \times Y$의 기저 원소는 X의 열린집합과 Y의 열린집합의 곱이므로 이는 x(또는 y)의 임의의 근방은 A(또는 B)와 만나야 함과 동치이다. 따라서 $x \in \overline{A}$이고 $y \in \overline{B}$이므로 $x \times y \in \overline{A} \times \overline{B}$와 동치이다.

Exercise 17.10. 일반성을 잃지 않고 $x_1 < x_2$라 하자. x_2가 x_1의 바로 앞 원소이면 $U = (-\infty, x_2) \ni x_1$이고 $V = (x_1, \infty) \ni x_2$이다. $x_1 < y < x_2$인 y가 존재하면 $U = (-\infty, y) \ni x_1$이고 $V = (y, \infty) \ni x_2$이다.

Exercise 17.11. $x_1 \times y_1$과 $x_2 \times y_2$를 $X \times Y$의 서로 다른 두 원소라 하자. 일반성을 잃지 않고 $x_1 \neq x_2$라 가정하자. X가 하우스도르프이므로 서로소인 두 근방 $U \ni x_1$와 $V \ni x_2$가 존재한다. 이때 $U \times Y \ni x_1 \times y_1$와 $V \times Y \ni x_2 \times y_2$는 $X \times Y$에서 서로소인 근방이다.

Exercise 17.12. x_1과 x_2를 Y의 서로 다른 두 원소라 하자. X가 하우스도르프이므로 서로소인 두 근방 $U \ni x_1$와 $V \ni x_2$가 존재한다. 이때 $U \cap Y \ni x_1$과 $V \cap Y \ni x_2$는 Y에서 서로소인 근방이다.

Exercise 17.13.

($\Longrightarrow$) 먼저 X가 하우스도르프라 가정하자. 서로 다른 X의 두 원소 x_1과 x_2에 대하여 서로소인 두 근방 $U \ni x_1$과 $V \ni x_2$가 존재한다. 이때 두 성분이 모두 같은 원소 $x \times x$가 $U \times V$에 속하면, U와 V는 서로소가 될 수 없다. 따라서 $x_1 \times x_2 \in U \times V \in (X \times X) \setminus \Delta$이다. 즉 $(X \times X) \setminus \Delta$가 열린집합이므로 Δ는 닫힌집합이다.

($\Longleftarrow$) 역으로, Δ가 $X \times X$의 닫힌집합이라 가정하자. $(X \times X) \setminus \Delta$가 열린집합이므로, X의 서로 다른 두 원소 x_1과 x_2에 대하여 X의 열린집합 U와 V가 존재하여 $x_1 \times x_2 \in U \times V \subset (X \times X) \setminus \Delta$이다. 이때 $U \ni x_1$와 $V \ni x_2$는 서로소인 두 근방이다. 따라서 X는 하우스도르프이다.

Exercise 17.14. 수열 $x_n = 1/n$은 $\mathbb{R}$의 여유한위상에서 모든 점으로 수렴한다. 임의의 실수 x의 근방 U에 대하여 $\mathbb{R} \setminus U$가 유한집합이므로 U는 유한개를 제외한 수열의 모든 값을 포함해야 하기 때문이다.

Exercise 17.15. T_1 공리 $\iff$ X의 모든 한점집합 $\{x\}$이 닫혀있다. $\iff$ 모든 $x \in X$에 대하여 $X \setminus \{x\}$이 열린집합이다. $\iff$ X의 서로 다른 두 원소 x와 y에 대하여, $y \in U \subset X \setminus \{x\}$을 만족하는 y의 근방 U가 존재한다.

Exercise 17.16.

	$\mathcal{T}_1$	$\mathcal{T}_2$	$\mathcal{T}_3$	$\mathcal{T}_4$	$\mathcal{T}_5$
K'	$\{0\}$	$\varnothing$	$\mathbb{R}$	$\varnothing$	$[0,\infty)$
$\overline{K}$	$K\cup\{0\}$	K	$\mathbb{R}$	K	$[0,\infty)$
하우스도르프	Yes	Yes	No	Yes	No
T_1 성질	Yes	Yes	Yes	Yes	No

Exercise 17.17.

	$\overline{A}$	$\overline{B}$
하극한 위상	$[0,\sqrt{2})$	$[\sqrt{2},3)$
$\mathcal{C}$ 로 생성된 위상	$[0,\sqrt{2}]$	$[\sqrt{2},3)$

Exercise 17.18.

$$\begin{aligned}
\overline{A} &= A\cup\{0\times 1\}\\
\overline{B} &= B\cup\{1\times 0\}\\
\overline{C} &= (0,1]\times\{0\}\cup[0,1)\times\{1\}\\
\overline{D} &= D\cup(0,1]\times\{0\}\cup[0,1)\times\{1\}\\
\overline{E} &= \{1/2\}\times[0,1]
\end{aligned}$$

Exercise 17.19.

(a) $\operatorname{Int}A\subset A\subset\overline{A}$이고 $\operatorname{Bd}A\subset\overline{A}$이므로 $\operatorname{Int}A\cup\operatorname{Bd}A\subset\overline{A}$이다. 역으로, $x\in\overline{A}\setminus\operatorname{Int}A$라 가정하자. 그러면 x의 모든 근방은 A과 만나고, 임의의 열린집합 U에 대하여 $x\notin U$이거나 $U\not\subset A$이다. 따라서 x의 모든 근방은 A와 $X\setminus A$의 점을 동시에 포함한다. 즉 $x\in\overline{A}\cap\overline{X\setminus A}=\operatorname{Bd}A$이다. 또한 이로부터 $\operatorname{Int}A\cap\operatorname{Bd}A=\varnothing$임을 알 수 있다.

(b) A가 열린집합이면서 닫힌집합이면 $\operatorname{Bd}A=\overline{A}\cap\overline{X\setminus A}=A\cap(X\setminus A)=\varnothing$이다. 역으로, $\operatorname{Bd}A=\varnothing$이면, (a)로부터 $A=\operatorname{Int}A=\overline{A}$이다. 따라서 A는 열린집합이면서 닫힌집합이다.

(c) (a)로부터 $\operatorname{Bd}A=\overline{A}\setminus\operatorname{Int}A$이고 $\operatorname{Int}A=\overline{A}\setminus\operatorname{Bd}A$이다. 따라서 U가 열린집합일 필요충분조건은 $\operatorname{Bd}U=\overline{U}\setminus\operatorname{Int}U=\overline{U}\setminus U$이다.

(d) 일반적으로, U가 열린집합이면 정의에 의해 $U\subset\operatorname{Int}(\overline{U})$가 성립한다. 하지만 역은 성립하지 않는다. $\mathbb{R}$의 열린집합 $U=\mathbb{R}\setminus\{0\}$에 대하여 $\operatorname{Int}(\overline{U})=\mathbb{R}$이다.

Exercise 17.20.

(a) $\operatorname{Int}A=\varnothing$, $\operatorname{Bd}A=A$

(b) $\operatorname{Int}B=B$, $\operatorname{Bd}B=(\{0\}\times\mathbb{R})\cup((0,\infty)\times\mathbb{R})$

(c) $\operatorname{Int}C=[0,\infty)\times\mathbb{R}$, $\operatorname{Bd}(C)=(\{0\}\times\mathbb{R})\cup((-\infty,0)\times\{0\})$

(d) $\operatorname{Int}D=\varnothing$, $\operatorname{Bd}D=\mathbb{R}^2$

(e) $\operatorname{Int}E=\{x\times y\mid 0<x^2-y^2<1\}$, $\operatorname{Bd}E=\{x\times y\mid |x|=|y|\vee x^2-y^2=1\}$

(f) $\operatorname{Int}F=\{x\times y\mid x\neq 0, y<1/x\}$, $\operatorname{Bd}F=\{x\times y\mid x\neq 0, y=1/x\}\cup\{x\times y\mid x=0\}$

Exercise 17.21. To be updated.

18 Continuous Functions

Exercise 18.1. f가 $\epsilon-\delta$ 정의를 만족하고, V가 $\mathbb{R}$의 열린집합이라 가정하자. $f^{-1}(V)$에 속한 모든 a에 대하여, $(f(a)-\epsilon, f(a)+\epsilon) \subset V$인 $\epsilon > 0$이 존재한다. $\epsilon-\delta$ 정의에 따라, x가 $|x-a| < \delta$를 만족하면 $|f(x)-f(a)| < \epsilon$가 성립하도록 하는 $\delta > 0$가 존재한다. 따라서 $U = (a-\delta, a+\delta)$라 하면 $a \in U \subset f^{-1}(V)$이다. 그러므로 f는 연속함수이다.

Exercise 18.2. 그렇지 않다. $\mathbb{R}$ 위의 임의의 상수함수를 생각하면 간단하다.

Exercise 18.3.

(a) i가 연속이면 모든 $U \in \mathcal{T}$에 대하여 $i^{-1}(U) = U$이므로 $U \in \mathcal{T}'$이다.

(b) (a)에서 i와 i^{-1}의 역할을 바꾸면 자명하다.

Exercise 18.4. f와 g가 단사 연속함수임은 자명하다. X의 부분집합 U에 대하여 $V = f(U)$라 하자. V가 $f(X) = X \times \{y_0\}$에서 열린집합일 필요충분조건은 $U \times \{y_0\}$가 $f(X)$에서 열린집합인 것이고,이는 U가 X에서 열린집합인 것과 동치이다. g도 마찬가지이므로 f와 g는 매장이다.

Exercise 18.5. 두 경우 모두 함수 $f(x) = (x-a)/(b-a)$가 위상동형사상이다.

Exercise 18.6. 유리수 x에 대하여 $f(x) = x$이고, 무리수 x에 대하여 $f(x) = 0$인 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$은 $x = 0$에서만 연속이다.

Exercise 18.7.

(a) V를 $\mathbb{R}$의 열린집합이라 하고, $a \in f^{-1}(V)$라 하자. 그러면 $(f(a)-\epsilon, f(a)+\epsilon) \subset V$인 $\epsilon > 0$이 존재한다. f가 오른쪽에서 연속(continuous from the right)이므로 x가 $a \leq x < a+\delta$을 만족하면 $|f(x)-f(a)| < \epsilon$이 성립하도록 하는 $\delta > 0$이 존재한다. 따라서 $U = [a, a+\epsilon)$이라 하면 $a \in [a, a+\epsilon) \subset f^{-1}(V)$이므로 $f^{-1}(V)$는 $\mathbb{R}_l$의 열린집합이다. 그러므로 $f : \mathbb{R}_l \to \mathbb{R}$은 연속함수이다.

(b) 먼저 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_l$가 연속함수이면, $f^{-1}([a,b))$가 $\mathbb{R}$의 열린집합이다. 한편, $\mathbb{R} \setminus f^{-1}([a,b)) = f^{-1}(\mathbb{R} \setminus [a,b)) = f^{-1}((-\infty, a) \cup [b, \infty))$ 역시 $\mathbb{R}$의 열린집합이므로, $f^{-1}([a,b))$은 $\mathbb{R}$에서 열린집합이면서 닫힌집합이다. 따라서 $f^{-1}([a,b))$는 $\varnothing$ 또는 $\mathbb{R}$이다. (Theorem 24.1) 이것이 가능한 경우는 상수함수밖에 없다. 한편, 함수 $f : \mathbb{R}_l \to \mathbb{R}_l$이 연속함수일 필요충분조건은

$$\forall a \in \mathbb{R}_l \; \forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \text{ s.t. } x \in [a, a+\delta) \implies f(x) \in [f(a), f(a)+\epsilon)$$

이다. 이는 f가 오른쪽에서 연속이고, 오른쪽에서 국소적으로 단조증가함수임을 의미한다.

Note. 정의역의 위상을 더 세밀한 것으로 교체하면, 기존의 연속함수과 더불어 더 많은 함수가 연속함수로 인정된다. 비슷한 논리로, 공역의 위상을 더 거친 것으로 교체하면 더 많은 함수가 연속함수가 될 수 있다. 반대로 정의역의 위상을 더 거칠게 하거나 공역의 위상을 더 세밀하게 하면, 기존의 연속함수가 자격을 박탈당할 수 있다. 하지만 동시에 거칠게 하거나 세밀하게 하는 경우에는 일반적인 결론이 없다.

Exercise 18.8.

Lemma. 순서 공간 Y에 대하여, 집합 $\Delta^- = \{y_1 \times y_2 \mid y_1 > y_2\}$는 곱 공간 $Y \times Y$의 열린집합이다.

증명. $y_1 > y_2$라 가정하자. y_2가 y_1의 바로 앞 원소이면

$$y_1 \times y_2 \in (y_2, \infty) \times (-\infty, y_1) \subset \Delta^-$$

이다. $y_1 > y > y_2$인 $y \in Y$가 존재하면

$$y_1 \times y_2 \in (y, \infty) \times (-\infty, y) \subset \Delta^-$$

이다. 따라서 Δ^-는 열린집합이다. $\square$

(a) 대응 $x \mapsto x \times x \mapsto f(x) \times g(x)$로 정의된 함수 $(f,g) : X \xrightarrow{\Delta} X \times X \xrightarrow{f \times g} Y \times Y$를 생각하자. Exercise 18.10으로부터 함수 $f \times g$는 연속이다. 따라서 $(f,g)(\Delta^-) = \{x \mid f(x) > g(x)\}$는 열린집합이므로, $\{x \mid f(x) \leq g(x)\}$는 닫힌집합이다.

(b) $f(x) \leq g(x)$이면 $h(x) = f(x)$이고 $f(x) \geq g(x)$이면 $h(x) = g(x)$이므로 Theorem 18.3(The pasting lem)에 의해 h는 연속함수이다.

Exercise 18.9.

(a) Theorem 18.3(The pasting lem)을 유한번 적용한다.

(b) 함수 $f : (-\infty, 1] \to \mathbb{R}$을 다음과 같이 정의하자: 어떤 자연수 n에 대하여 $x \in \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$이면 $f(x) = 0$이다. $x \in (-\infty, 0]$이면 $f(x) = 1$이다. 그러면 $f^{-1}(\{0\}) = (0, 1]$은 $(-\infty, 1]$에서 닫힌집합이 아니므로 f는 연속함수가 아니다.

Note. 닫힌집합의 **무한** 합집합이 닫힌집합이 아닐 수 있음을 이용한다.

(c) B를 Y의 닫힌집합이라 하고, $A = f^{-1}(B) = \bigcup_\alpha (f|_{A_\alpha})^{-1}(B)$라 하자. A가 닫힌집합임을 보이기 위해 $x \notin A$라 가정하자. $\{A_\alpha\}$가 국소유한(locally finite)이므로 유한개의 A_α와만 만나는 x의 근방 U가 존재한다. U와 만나는 A_α의 첨수 α를 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$이라 하자. 각 $i = 1, \cdots, n$에 대하여 $C_i = (f|_{A_{\alpha_i}})^{-1}(B)$가 A_{α_i}의 닫힌집합이므로 X에서도 닫힌집합이다. $x \notin C_i$이므로, C_i와 만나지 않는 x의 근방 U_i가 존재한다. 따라서 집합 $U \cap (\bigcap_{i=1}^n U_i)$는 A와 만나지 않는 x의 근방이다.

Exercise 18.10. $U \times V$를 $B \times D$의 기저 원소라 하면, $(f \times g)^{-1}(U \times V) = f^{-1}(U) \times g^{-1}(V)$은 $A \times C$의 열린집합이다.

Exercise 18.11. f와 g를 Exercise 18.4에서 정의한 함수라 하자. 그러면 $h = F \circ f$, $k = F \circ g$이므로 F가 연속함수이면 h와 k도 연속함수이다.

Exercise 18.12.

(a) $y_0 = 0$이면 $F(x \times y_0) = 0$이고, $y_0 \neq 0$이면 $F(x \times y_0) = \dfrac{xy_0}{x^2 + y_0^2}$이다. 이 두 함수의 연속성은 자명하다.

(b) $x \neq 0$이면 $g(x) = 1/2$이고, $x = 0$이면 $g(x) = 0$이다.

(c) $F^{-1}(\{1/2\} = \{x \times x \mid x \neq 0\}$이 닫힌집합이 아니므로 F는 연속함수가 아니다.

Exercise 18.13. g와 h를 집합 $\overline{A}$로의 f의 연속적 확장이라 하자. 그러면 함수 $(g,h) : \overline{A} \to Y \times Y$는 연속이다. 집합 $C = \{x \in \overline{A} \mid g(x) = h(x)\}$라 하면, $g|_A = h|_A$이므로 $A \subset C \subset \overline{A}$가 성립한다. 이때 Y가 하우스도르프이므로 Exercise 17.13에서 정의한 집합 Δ는 $Y \times Y$의 닫힌집합이다. $C = (g,h)^{-1}(\Delta)$이므로 C는 닫힌집합이다. 따라서 $C = \overline{A}$이다.

19 The Product Topology

Exercise 19.1. 기저 원소는 열린집합이므로 Theorem 19.2에서 정의한 위상은 각각 상자 위상과 곱 위상보다 거칠다. X_α의 열린집합 U_α는 적당한 기저 원소의 합집합 $\bigcup_{B_\alpha \subset U_\alpha} B_\alpha$이다. 따라서 $\prod_\alpha U_\alpha = \bigcup_{B_\alpha \subset U_\alpha} \prod_\alpha B_\alpha$이다. 따라서 Theorem 19.2의 기저는 각각 상자 위상과 곱 위상의 기저이다.

Exercise 19.2. $\prod_\alpha U_\alpha \cap \prod_\alpha A_\alpha = \prod_\alpha (U_\alpha \cap A_\alpha)$이다. 좌변의 집합은 곱 공간의 부분공간의 기저 원소이고, 우변의 집합은 부분공간의 곱 공간의 기저 원소이다. 따라서 이 등식은 곱 공간의 부분공간과 부분공간의 곱 공간의 기저가 같음을 보여준다.

Exercise 19.3. 곱 공간 $\prod X_\alpha$의 두 점 x와 y가 서로 다르면, 적어도 하나의 좌표에 대한 값 x_β와 y_β가 서로 다르다. X_β에서 x_β와 y_β를 각각 포함하는 서로소 근방 U와 V를 선택하자. 각 첨수 α에 대하여 $\alpha \neq \beta$이면 $U_\alpha = V_\alpha = X_\alpha$라 하고, $\alpha = \beta$이면 $U_\alpha = U$, $V_\alpha = V$라 하자. 그러면 $\prod U_\alpha$와 $\prod V_\alpha$는 x와 y를 각각 포함하는 서로소 근방이다.

Exercise 19.4. 함수 $f : \prod_{i=1}^{n-1} X_i \times X_n \to \prod_{i=1}^{n} X_i$를

$$f((x_1 \times \cdots \times x_{n-1}) \times x_n) = x_1 \times \cdots \times x_{n-1} \times x_n$$

로 정의하자. f가 전단사임은 자명하다. f가 위상 동형 사상임은 다음과 같이 보일 수 있다: U가 $\prod_{i=1}^{n-1} X_i \times X_n$의 열린집합이다. $\iff$ U의 모든 점 $(x_1 \times \cdots \times x_{n-1}) \times x_n$에 대하여 기저 근방 $V \times U_n \subset U$이 존재한다. 여기서 V는 $\prod_{i=1}^{n-1} X_i \times X_n$의 열린집합이다. $\iff$ U의 모든 점 $(x_1 \times \cdots \times x_{n-1}) \times x_n$에 대하여 기저 근방 $\prod_{i=1}^{n-1} U_i \times U_n \subset U$이 존재한다. $\iff$ $f(U)$의 모든 점 $x_1 \times \cdots \times x_{n-1} \times x_n$에 대하여 기저 근방 $\prod_{i=1}^{n} U_i$가 존재한다.

Exercise 19.5. 사영 π_α는 상자 위상에서도 연속이므로 f가 연속이면 각 성분 함수 f_α도 연속이다. 하지만 각 성분 함수 f_α가 연속이라고 해서 f가 연속은 아니다. Example 19.2를 참고하라.

Exercise 19.6.

($\Longrightarrow$) **곱 위상 또는 상자 위상**에서 점렬 x_n이 x로 수렴한다고 가정하자. U를 X_α에서 $\pi_\alpha(x)$의 근방이라 하자. 그러면 $\pi_\alpha^{-1}(U)$는 $\prod X_\alpha$에서 x의 근방이다. 따라서 적당한 자연수 N에 대하여 $n \geq N$이면 $x_n \in \pi_\alpha^{-1}(U)$, 즉 $\pi_\alpha(x_n) \in U$이므로 점렬 $\pi_\alpha(x_n)$은 $\pi_a(x)$로 수렴한다.

($\Longleftarrow$) **곱 위상**에서 모든 α에 대하여 점렬 $\pi_\alpha(x_n)$이 $\pi_\alpha(x)$로 수렴한다고 가정하자. U를 $\prod X_\alpha$에서 x의 근방이라 하자. 그러면 $x \in \prod U_\alpha \subset U$를 만족하는 기저 원소 $\prod U_\alpha$가 존재한다. 이때 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$을 제외한 모든 α에 대하여 $U_\alpha = X_\alpha$이다. 각 α에 대하여, $n \geq N_\alpha$이면 $\pi_\alpha(x_n) \in U_\alpha$가 되도록 하는 자연수 N_α를 선택하자. 이때 $\alpha \neq \alpha_1, \cdots, \alpha_n$의 경우에는 $N_\alpha = 1$로 택할 수 있다. 따라서 $N = \max\{N_{\alpha_1}, \cdots, N_{\alpha_n}\}$이라 하면 $n \geq N$일 때 $x_n \in \prod U_\alpha \subset U$이므로 점렬 x_n은 x로 수렴한다.

상자 위상에서 ($\Longleftarrow$)가 성립하지 않는 예시는 Exercise 20.4(b)를 참고하라.

Exercise 19.7. **곱 위상**에서 $\overline{\mathbb{R}^\infty} = \mathbb{R}^\omega$이다. $\mathbb{R}^\omega$의 임의의 점 x와 그 기저 근방 $U = \prod_{n \in \mathbb{Z}_+} U_n$을 생각하자. 이때 $n_1, \cdots, n_k$를 제외한 모든 n에 대하여 $U_n = \mathbb{R}$이고, $U_{n_1}, \cdots, U_{n_k}$는 $\mathbb{R}$의 열린집합이다. 각 $n \in \mathbb{Z}_+$에 대하여 U_n에 속하는 점 y_n을 선택하자. 이때 $n = n_1, \cdots, n_k$인 경우에는 $y_n \neq x_n$이 되도록 하고, 그 외의 경우에는 $y_n = 0$으로 정한다. 그러면 $\mathbb{R}^\omega$의 원소 $y = (y_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$는 x와 서로 다르면서 집합 $U \cap \mathbb{R}^\infty$에 속한다. 따라서 $\mathbb{R}^\omega$의 모든 점은 $\mathbb{R}^\infty$의 극한점이다. 한편, **상자 위상**에서 $\overline{\mathbb{R}^\infty} = \mathbb{R}^\infty$이다. $\mathbb{R}^\omega \setminus \mathbb{R}^\infty$의 임의의 점 x을 고려하자. 각 $n \in \mathbb{Z}_+$에 대하여, $x_n \neq 0$이면 $U_n = (-|x_n| - 1, 0) \cup (0, |x_n| + 1)$라 하고, $x_n = 0$이면 $U_n = \mathbb{R}$이라 하자. 그러면 집합 $U = \prod_{n \in \mathbb{Z}_+} U_n$은 $x \in U \subset \mathbb{R}^\omega \setminus \mathbb{R}^\infty$를 만족하는 열린집합이다. 따라서 $\mathbb{R}^\omega \setminus \mathbb{R}^\infty$가 열린집합이므로 $\mathbb{R}^\infty$는 닫힌집합이다.

Note. 위상이 세밀할수록 닫힌집합으로 인정되는 부분집합이 많다. 따라서 같은 부분집합의 폐포는 세밀한 위상에서 더 작다.

Exercise 19.8. 사상 h가 일대일대응임은 자명하다. **곱 위상 또는 상자 위상**에서, h가 위상동형사상임을 보이기 위해서는 h가 연속임을 보이는 것으로 충분하다. (h^{-1}도 h와 같은 형태이기 때문이다.) $U = \prod_{n \in \mathbb{Z}_-} U_n$을 기저 원소라 하자. $V_n = \{x \in \mathbb{R} \mid a_n x + b_n \in U_n\}$이라 하면 V_n은 $\mathbb{R}$의 열린집합이므로 $h^{-1}(U) = \prod_{n \in \mathbb{Z}_+} V_n$은 $\mathbb{R}^\omega$의 열린집합이다. ($U_n = \mathbb{R}$이면 $V_n = \mathbb{R}$이다.)

Exercise 19.9.

($\Longleftarrow$) $\mathcal{B}$가 공집합이 아닌 집합의 족이면 데카르트 곱 $\prod_{B\in\mathcal{B}} B$는 공집합이 아니다. 따라서 임의의 $B \in \mathcal{B}$에 대하여 $x(B) \in B$가 되도록 하는 함수 $x : \mathcal{B} \to \bigcup_{B\in\mathcal{B}} B$가 존재한다. 이는 선택함수이다.

($\Longrightarrow$) $J \neq 0$에 대하여 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in J}$를 공집합이 아닌 집합의 첨수족(indexed family)이라 하자. 선택공리에 의해 각 $\alpha \in J$에 대하여 $x(\alpha) \in A_\alpha$인 선택함수 $x : J \to \bigcup_{\alpha\in J} A_\alpha$가 존재한다. 이는 데카르트 곱 $\prod_{\alpha\in J} A_\alpha$가 공집합이 아님을 의미한다.

Exercise 19.10.

(a) $\mathfrak{T}$를 모든 f_α가 연속이 되도록 하는 A 위의 위상의 모임이라 하자. A 위의 이산 위상은 $\mathfrak{T}$에 속하므로 $\mathfrak{T}$는 비어있지 않다. 이제 $\mathcal{T} = \bigcap_{\mathcal{U}\in\mathfrak{T}} \mathcal{U}$라 하자. Exercise 13.4(a)에 의해 $\mathcal{T}$는 위상이다. 이때 U가 X_α의 열린집합이면 임의의 위상 $\mathcal{U} \in \mathfrak{T}$에 대하여 $f_\alpha^{-1}(U) \in \mathcal{U}$이므로 $\mathcal{T} \in \mathfrak{T}$이다. 따라서 $\mathcal{T}$는 모든 f_α가 연속이 되도록 하는 가장 거친 유일한 위상이다. (유일성은 정의에 의해 자명하다.)

(b) 임의의 위상 $\mathcal{U} \in \mathfrak{T}$에 대하여, 모든 f_β가 연속이므로 S의 원소는 모두 $\mathcal{U}$에 속해야 한다. 따라서 $\mathfrak{T}$에 속하는 모든 위상은 $\mathcal{S}$를 포함한다. 역으로, $\mathcal{S}$를 포함하는 A의 위상에서는 모든 f_β가 연속이다. 따라서 $\mathfrak{T}$는 $\mathcal{S}$를 포함하는 A의 위상의 모임과 같다. 그러므로 Exercise 13.5에 의해 $\mathcal{T}$는 $\mathcal{S}$를 부분기저로 하여 생성된 위상이다.

(c) g가 연속이면 모든 합성 $f_\alpha \circ g$도 연속이다. (Theorem 18.2(c)) 역으로, $f_\alpha \circ g$가 연속이라 하고, U_β를 X_β의 열린집합, $U = f_\beta^{-1}(U_\beta)$라 하자. $g^{-1}(U) = g^{-1}(f_\beta^{-1}(U_\beta)) = (f_\beta \circ g)^{-1}(U_\beta)$이므로 $g^{-1}(U)$는 Y의 열린집합이다. 그러므로 g는 연속이다.

(d) $U \in \mathcal{T}$, $x \in f(U)$라 하자. $f(a) = x$인 $a \in U$를 선택하자. U가 열린집합이므로 $a \in V \subset U$인 기저 원소 V가 존재한다. 이때 부분기저를 이용하여 $V = \bigcap_{i=1}^n f_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i})$라 쓸 수 있다. 여기서 U_{α_i}는 X_{α_i}의 열린집합이다. (일반성을 잃지 않고 모든 첨수 β_i가 서로 다르다고 가정하자.) 여기서 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$을 제외한 모든 α에 대하여 $U_\alpha = X_\alpha$라 두면 $V = f^{-1}(\prod_{\alpha\in J} U_\alpha)$이고 $f(V) = f(A) \cap \prod_{\alpha\in J} U_\alpha$이다. $f(V)$는 부분공간 $f(A)$의 열린집합이고 $x \in f(V) \subset f(U)$를 만족한다. 따라서 $f(U)$ 역시 $f(A)$의 열린집합이다.

20 The Metric Topology

Exercise 20.1.

(a) $\rho(x,y) \le d'(x,y) \le n\rho(x,y)$이므로 d'은 $\mathbb{R}^n$의 보통 위상을 생성한다. $n = 2$일 때의 기저 원소는 $\pi/4$(rad) 만큼 기울어진 정사각형이다.

(b) (a)와 마찬가지로 $\rho(x,y) \le d'(x,y) \le n^{1/p}\rho(x,y)$이다.

Exercise 20.2. 두 점 $x_1 \times y_1$과 $x_2 \times y_2$에 대하여 $x_1 \neq x_2$이면 $d(x_1 \times y_1, x_2 \times y_2) = 1$, $x_1 = x_2$이면 $d(x_1 \times y_1, x_2 \times y_2) = \min\{|y_1 - y_2|, 1\}$이라 하자. d는 거리함수이다. (삼각부등식이 약간 까다롭지만, 이마저도 쉽게 보일 수 있다.) Exercise 16.9로부터 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$는 $\{x\} \times (a,b)$로 생성된다. 이 세로 막대 구간은 $0 < \dfrac{b-a}{2} \le 1$일 때 $\{x\} \times (a,b) = B_d\left(x \times \dfrac{a+b}{2}, \dfrac{b-a}{2}\right)$로 표현할 수 있다. 역으로, 임의의 $\epsilon \in (0,1]$에 대하여 $B_d(x \times y, \epsilon) = \{x\} \times (y-\epsilon, y+\epsilon)$이다. 따라서 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$의 사전식 순서 위상은 d에 대한 반지름이 $\epsilon \le 1$인 열린 공으로 생성된다.

Note. 본문에 따르면, 거리 위상에서는 충분히 작은 반지름의 열린 공만 살피면 충분하다. 따라서 이후에 풀이에서 등장하는 열린 공의 반지름은 모두 특정 양수보다 (대표적으로 1) 작다고 가정해도 좋다.

Exercise 20.3.

(a) U를 $\mathbb{R}$의 열린집합이라 하고, $x \times y \in d^{-1}(U)$라 하자. 그러면 $d := d(x \times y) \in U$이므로 $\epsilon > 0$에 대하여 $(d-\epsilon, d+\epsilon) \subset U$이다. 집합 $V = B_d(x, \epsilon/2) \times B_d(y, \epsilon/2)$의 임의의 점 $a \times b$에 대하여 $|d(a\times b) - d(x \times y)| \le d(a \times x) + d(y \times b) < \epsilon/2 + \epsilon/2 < \epsilon$이므로 $x \times y \in V \subset d^{-1}(U)$에서 $d^{-1}(U)$는 열린집합이다.

(b) $d : X' \times X' \to \mathbb{R}$이 연속이면, Exercise 18.11로부터 고정된 $x \in X'$에 대하여 $d_x(y) = d(x,y)$로 정의된 함수 $d_x : X' \to \mathbb{R}$가 연속이다. 따라서 $B_d(x,\epsilon) = d_x^{-1}((-\infty,\epsilon))$은 X'에서 열린집합이다.

Note. 연습문제 아래의 첨언은 Exercise 19.10을 참고하라.

Exercise 20.4.

(a)

$\mathbb{R}^\omega$	상자 위상$^{(i)}$ $\supsetneq$	균등 위상$^{(ii)}$ $\supsetneq$	곱 위상$^{(iii)}$
f	불연속	불연속	연속
g	불연속	연속	연속
h	불연속	연속	연속

(i) **상자 위상**에서, 각 함수에 대한 열린집합 $\prod_{n\in\mathbb{Z}_+}(-1/n^2, 1/n^2)$의 역상은 모두 $\{0\}$이다. 따라서 세 함수는 모두 불연속이다. (Example 19.2 참고)

(ii) **균등 위상**에서, $f^{-1}(B_{\overline{\rho}}(0,\epsilon)) = f^{-1}(\prod_{n\in\mathbb{Z}_+}(-1,1)) = \{0\}$이다. 이제 함수 $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^\omega$를 $k(t) = (a_n t)_{n\in\mathbb{Z}_+}$라 하자. ($g$와 h를 따지기 위해 $a_n = 1$ 또는 $a_n = 1/n$으로 둔다.) $t \in k^{-1}(B_{\overline{\rho}}(x,\epsilon))$이라 하면 모든 $n \in \mathbb{Z}_+$에 대하여 $|x_n - a_n t| \le \sup\{|x_n - a_n t| : n \in \mathbb{Z}_+\} =: \mu < \epsilon$이다. 이제 $|\delta| < \dfrac{\epsilon-\mu}{2}$이면

$$\begin{aligned} |x_n - a_n(t+\delta)| &\le |x_n - a_n t| + a_n|\delta| < \mu + a_n\frac{\epsilon-\mu}{2} \\ &\le \mu + \frac{\epsilon-\mu}{2} = \frac{\epsilon+\mu}{2} < \epsilon \end{aligned}$$

이 성립한다. 따라서 f는 불연속이고, g와 h는 연속이다.

(iii) **곱 위상**에서, 세 함수는 Theorem 19.6에 따라 모두 연속이다.

Note. Exercise 18.7의 note를 추가로 참고하라.

(b) Exercise 19.6에 의해, 네 점렬은 0으로만 수렴하거나 발산해야 한다.

$\mathbb{R}^\omega$	상자 위상$^{(i)}$ $\supsetneq$	균등 위상$^{(ii)}$ $\supsetneq$	곱 위상$^{(iii)}$
w_n	발산	발산	수렴
x_n	발산	수렴	수렴
y_n	발산	수렴	수렴
z_n	수렴	수렴	수렴

(i) **상자 위상**에서, 양수 ϵ_n에 대하여 $n > 1/\min\{\epsilon_1,\epsilon_2\}$이면 $z_n \in \prod_{n\in\mathbb{Z}_+}(-\epsilon_n,\epsilon_n)$이다. 한편, 0의 근방 $U = \prod_{n\in\mathbb{Z}_+}(-1/(n+1), 1/(n+1))$에 대하여 모든 w_n, x_n, y_n은 U에 속하지 않는다. 따라서 점렬 z_n은 0으로 수렴하고, w_n, x_n, y_n은 발산한다.

(ii) **균등 위상**에서, 임의의 점 w_n과 0 사이의 거리는 1이다. 이는 어떤 w_n도 0의 근방 $B_{\overline{\rho}}(0,1)$에 속하지 않음을 의미한다. 한편 $\overline{\rho}(x_n,0) = \overline{\rho}(y_n,0) = 1/n$이므로 $n > 1/\epsilon$이면 $x_n, y_n \in B_{\overline{\rho}}(0,\epsilon)$이다. 따라서 점렬 x_n, y_n은 0으로 수렴하고, w_n은 발산한다.

(iii) **곱 위상**에서, 네 점렬은 Exercise 19.6에 따라 모두 0으로 수렴한다.

Note. 한 위상에서 수렴하는 점렬은 그보다 거친 위상에서도 수렴한다.

Exercise 20.5. X를 $\mathbb{R}$에서 0으로 수렴하는 모든 수열 x_n의 집합이라 하면 $\overline{\mathbb{R}^\infty} = X$이다. 먼저 X가 $\mathbb{R}^\omega$의 닫힌 집합임을 보이자. $x \in \mathbb{R}^\omega \setminus X$라 하면, 모든 $k \in \mathbb{Z}_+$에 대하여 $|x_{n_k}| \ge \epsilon$인 $n_k \ge k$가 존재하도록 하는 $\epsilon > 0$이 존재한다. 그러한 ϵ에 대해 $y \in B_{\overline{\rho}}(x,\epsilon/2)$라 하자. 그러면 모든 $k \in \mathbb{Z}_+$에 대하여

$$\epsilon \le |x_{n_k}| \le |x_{n_k} - y_{n_k}| + |y_{n_k}| < \frac{\epsilon}{2} + |y_{n_k}|$$

이므로 $|y_{n_k}| > \epsilon/2$이고, $y \in \mathbb{R}^\omega \setminus X$이다. 따라서 $B_{\overline{\rho}}(x, \epsilon/2) \subset \mathbb{R}^\omega \setminus X$이므로 $\mathbb{R}^\omega \setminus X$는 열린집합이다. X는 $\mathbb{R}^\infty$를 포함하는 닫힌집합이므로 $\overline{\mathbb{R}^\infty} \subset X$이다. 역으로, $x \in X$라 하면, 모든 $\epsilon > 0$에 대하여 $n \geq k$이면 $|x_n| < \epsilon/2$인 $k \in \mathbb{Z}_+$가 존재한다. 이때 $y = (x_1, \cdots, x_k, 0, 0, \cdots)$라 하면 $\overline{\rho}(x, y) < \epsilon$이므로 $y \in B_{\overline{\rho}}(x, \epsilon) \cap \mathbb{R}^\infty$이다. 그러므로 $X \subset \overline{\mathbb{R}^\infty}$이다.

Note. Exercise 19.7의 note를 추가로 참고하라.

Exercise 20.6.

(a) $U(x, \epsilon)$에 속하면서 $\overline{\rho}(x, y) = \epsilon$인 점 y를 찾자. $y = (x_n + \epsilon - \epsilon/n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$라 하자. 그러면 모든 $n \in \mathbb{Z}_+$에 대하여 $|x_n - y_n| = \epsilon(1 - 1/n) < \epsilon$이므로 $y \in U(x, \epsilon)$이고, $\overline{\rho}(x, y) = \sup\{\epsilon(1 - 1/n) \mid n \in \mathbb{Z}_+\} = \epsilon$이므로 $y \notin B_{\overline{\rho}}(x, \epsilon)$이다.

(b) (a)의 점 y와 $\delta \in (0, \epsilon)$에 대하여 열린 공 $B_{\overline{\rho}}(y, \delta)$를 생각하자. 아르키메데스 원리에 의해 $\epsilon/n < \delta$인 $n \in \mathbb{Z}_+$가 존재한다. 이러한 자연수 중 가장 작은 것을 n_0라 하자. 자연수 n에 대하여 $n < n_0$이면 $z_n = y_n + \delta/2$, $n \geq n_0$이면 $z_n = y_n + \epsilon/n + \delta/2$라 하고, $z = (z_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$라 하자. 그러면 모든 $n \in \mathbb{Z}_+$에 대하여

$$|y_n - z_n| = \begin{cases} \dfrac{\delta}{2} & (n < n_0) \\ \dfrac{1}{2}\left(\delta + \dfrac{\epsilon}{n}\right) & (n \geq n_0) \end{cases} < \delta$$

이고, 모든 $n \geq n_0$에 대하여

$$|x_n - z_n| = \epsilon + \frac{1}{2}\left(\delta - \frac{\epsilon}{n}\right) > \epsilon$$

이다. 따라서 z는 $B_{\overline{\rho}}(y, \delta)$에는 속하지만, $U(x, \epsilon)$에는 속하지 않는다.

(c) 먼저 $\delta < \epsilon$에 대하여 $z \in U(x, \delta)$라 하자. 그러면 모든 $n \in \mathbb{Z}_+$에 대하여 $|x_n - z_n| < \delta$이므로 $\overline{\rho}(x, z) \leq \delta < \epsilon$이다. 역으로, $z \in B_{\overline{\rho}}(x, \epsilon)$이라 하자. 그러면 $\overline{\rho}(x, z) < \epsilon$이므로 모든 $n \in \mathbb{Z}_+$에 대하여

$$|x_n - z_n| \leq \overline{\rho}(x, z) < \frac{\epsilon + \overline{\rho}(x, z)}{2} < \epsilon$$

이므로 $z \in U\left(x, \dfrac{\epsilon + \overline{\rho}(x, z)}{2}\right)$이다.

Exercise 20.7. h가 연속일 필요충분조건은 수열 a_n이 유계인 것이다.

($\Longrightarrow$) 수열 a_n이 유계가 아니라고 가정하자. 이때 Exercise 20.6으로부터

$$h^{-1}(B_{\overline{\rho}}(y, \epsilon)) = \bigcup_{\epsilon_1 < \epsilon} h^{-1}(U(x, \epsilon_1)) = \bigcup_{\epsilon_1 < \epsilon} \prod_{n \in \mathbb{Z}_+} \left(\frac{y_n}{a_n} - \frac{b_n}{a_n} - \frac{\epsilon_1}{a_n}, \frac{y_n}{a_n} - \frac{b_n}{a_n} + \frac{\epsilon_1}{a_n}\right),$$

$$B_{\overline{\rho}}(x, \delta) = \bigcup_{\delta_1 < \delta} U(x, \delta_1) = \bigcup_{\delta_1 < \delta} \prod_{n \in \mathbb{Z}_+} (x_n - \delta_1, x_n + \delta_1)$$

이다. 수열 a_n이 유계가 아니므로 임의의 $\delta_1 < \delta$에 대하여 $\epsilon/a_n < \delta$인 $n \in \mathbb{Z}_+$가 존재한다. 이러한 자연수 중 가장 작은 것을 n_0이라 하자. 그러면 $\mathbb{R}$에서 지름이 $2\delta_1$인 구간 $(x_{n_0} - \delta_1, x_{n_0} + \delta_1)$은 반지름이 $\dfrac{2\epsilon_1}{a_{n_0}} < \dfrac{2\epsilon}{a_{n_0}} < 2\delta$인 구간 $\left(\dfrac{y_{n_0}}{a_{n_0}} - \dfrac{b_{n_0}}{a_{n_0}} - \dfrac{\epsilon_1}{a_{n_0}}, \dfrac{y_{n_0}}{a_{n_0}} - \dfrac{b_{n_0}}{a_{n_0}} + \dfrac{\epsilon_1}{a_{n_0}}\right)$에 포함될 수 없다. 따라서 어떠한 열린 공 $B_{\overline{\rho}}(x, \delta)$도 역상 $h^{-1}(B_{\overline{\rho}}(y, \epsilon))$에 포함될 수 없으므로 h는 연속이 아니다.

($\Longleftarrow$) 수열 a_n이 유계라 가정하고, $M > 0$을 a_n의 한 상계라 하자. $x \in h^{-1}(B_{\overline{\rho}}(y, \epsilon))$이라 하자. 그러면 어떤 $\epsilon_1 < \epsilon$에 대하여 $h(x) \in U(y, \epsilon_1)$이므로 모든 $n \in \mathbb{Z}_+$에 대하여 $|a_n x_n + b_n - y_n| < \epsilon_1$이다. 이제 $\delta = \dfrac{\epsilon - \epsilon_1}{2M}$라

하고, $z \in B_{\overline{\rho}}(x,\delta)$라 하자. 그러면 모든 $n \in \mathbb{Z}_+$에 대하여 $|x_n - z_n| < \delta_1$인 $\delta_1 < \delta$가 존재한다. 이때 모든 $n \in \mathbb{Z}_+$에 대하여

$$\begin{aligned}|a_n z_n + b_n - y_n| &\le a_n|z_n - x_n| + |a_n x_n + b_n - y_n| < M\delta_1 + \epsilon_1 \\ &< M\delta + \epsilon_1 = \frac{\epsilon+\epsilon_1}{2} < \epsilon\end{aligned}$$

이므로 $z \in h^{-1}(B_{\overline{\rho}}(y,\epsilon))$이다. 따라서 $B_{\overline{\rho}}(x,\delta) \subset h^{-1}(B_{\overline{\rho}}(y,\epsilon))$이므로 h는 연속이다.

앞선 내용과 h^{-1}의 형태를 생각하면, h가 위상동형사상이 될 필요충분조건은 두 양수 m과 M이 존재하여 모든 $n \in \mathbb{Z}_+$에 대해 $m \le a_n \le M$인 것이라 할 수 있다.

Exercise 20.8.

(a) 점 $x \in X$에 대하여 집합 $D(x,\epsilon) = \prod_{n\in\mathbb{Z}_+}(x_n - \epsilon/2^{n/2}, x_n + \epsilon/2^{n/2})$라 하고, $y \in D(x,\epsilon)$이라 하자. 모든 $n \in \mathbb{Z}_+$에 대하여 $|y_n|^2 < |x_n|^2 + \epsilon^2/2^n$이므로 $D(x,\epsilon) \subset X$이다. 또한 $d(x,y)^2 = \sum_{i=1}^{\infty}|x_n - y_n|^2 < \sum_{i=1}^{\infty}\epsilon^2/2^n = \epsilon^2$이므로 $y \in B_d(x,\epsilon)$이다. 이제 $z \in B_d(x,\epsilon)$이라 하자. 그러면 $\sum_{i=1}^{\infty}|x_n - y_n|^2 < \epsilon^2$이고, 이는 $\overline{\rho}(x,y) < \epsilon$을 함의한다. 그렇지 않으면, 어떤 $n_0 \in \mathbb{Z}_+$에 대하여 $|x_{n_0} - y_{n_0}| > \dfrac{\epsilon + \overline{\rho}(x,y)}{2} \ge \epsilon$이므로 $|x_{n_0} - y_{n_0}|^2 > \epsilon^2$이다. 따라서 $D(x,\epsilon) \subset B_d(x,\epsilon) \subset B_{\overline{\rho}}(x,\epsilon)$이 성립한다.

(b) 상자 위상에서 집합 $U = \mathbb{R}^\infty \cap \prod_{n\in\mathbb{Z}_+}(-1/k, 1/k)$는 열린집합이지만 l^2–위상에서는 그렇지 않다. 어떠한 기저 원소 $B_d(0,\epsilon) \cap \mathbb{R}^\infty$도 U에 포함되지 않기 때문이다. 임의의 $\epsilon > 0$에 대하여 $1/n_0 < \epsilon/2$이 되도록 하는 자연수 n_0를 선택하고, $n \ne n_0$이면 $x_n = 0$, $x_{n_0} = 1/2n_0 + \epsilon/4$라 하자. 그러면 점 $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}_+} \in \mathbb{R}^\infty$에 대하여

$$\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^2 = |x_{n_0}|^2 = \left(\frac{1}{2n_0} + \frac{\epsilon}{4}\right)^2 < \left(\frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4}\right)^2 = \frac{\epsilon^2}{4} < \epsilon^2$$

이므로 $x \in B_d(0,\epsilon) \cap \mathbb{R}^\infty$이고,

$$|x_{n_0}| = \frac{1}{2n_0} + \frac{\epsilon}{4} > \frac{1}{2n_0} + \frac{1}{2n_0} = \frac{1}{n_0}$$

이므로 $x \notin U$이다. 또한 l^2–위상의 기저 원소 $B_d(0,\epsilon) \cap \mathbb{R}^\infty$는 균등 위상에서 열린집합이 아니다. 앞선 경우와 마찬가지로, 어떠한 기저 원소 $B_{\overline{\rho}}(0,\delta) \cap \mathbb{R}^\infty$도 $B_d(0,\epsilon) \cap \mathbb{R}^\infty$에 포함되지 않기 때문이다. 임의의 $\delta > 0$에 대하여 $n_0\delta^2/4 > \epsilon^2$이 되도록 하는 자연수 n_0를 선택하고, $n \le n_0$이면 $x_n = \delta/2$, $n > n_0$이면 $x_n = 0$이라 하자. 그러면 점 $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}_+} \in \mathbb{R}^\infty$에 대하여

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}_+}|x_n| = \frac{\delta}{2} < \delta$$

이므로 $x \in B_{\overline{\rho}}(0,\delta) \cap \mathbb{R}^\infty$이고,

$$\sum_{i=1}^{\infty}|x_k|^2 = \sum_{i=1}^{n_0}\frac{\delta^2}{4} = \frac{n_0\delta^2}{4} > \epsilon^2$$

이므로 $x \notin B_d(0,\epsilon) \cap \mathbb{R}^\infty$이다. 마지막으로 균등 위상과 곱 위상에 의한 부분공간이 서로 같지 않음은 Theorem 20.4로부터 유도된다.

(c) 상자 위상에서 집합 $U = H \cap \prod_{n\in\mathbb{Z}_+}(-1/(k+1), 1/(k+1) = \prod_{n\in\mathbb{Z}_+}[0, 1/(k+1))$은 열린집합이지만, 균등 위상에서는 그렇지 않다. ((b)와 비슷하게 증명할 수 있다.) 이제 H에서 곱 위상이 l^2–위상보다 세밀함을 보이자. l^2–위상의 기저 원소 $B_d(x,\epsilon) \cap H$에 대하여, $\sum_{k=k_0}^{\infty} 1/k^2 < \epsilon^2/2$가 되도록 하는 자연수 k_0를 선택하고, 집합

$$V = \prod_{k=1}^{k_0}\left(x_k - \frac{\epsilon}{(2k_0)^{1/2}}, x_k + \frac{\epsilon}{(2k_0)^{1/2}}\right) \cap H \times \prod_{k>k_0}\left[0, \frac{1}{k}\right]$$

라 하자. V는 곱 위상의 기저 원소이다. 점 $y \in V$에 대하여

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}|x_k-y_k|^2 = \sum_{k=1}^{k_0}|x_k-y_k|^2 + \sum_{k>k_0}|x_k-y_k|^2 < \sum_{k=1}^{k_0}\frac{\epsilon^2}{2k_0} + \sum_{k>k_0}\frac{1}{k^2} \\ < \frac{\epsilon^2}{2}+\frac{\epsilon^2}{2}=\epsilon^2\end{aligned}$$

이므로 $V \subset B_d(x,\epsilon)\cap H$이다. 그러므로 H에서 상자 위상을 제외한 세 위상에 의한 부분공간은 서로 같다.

Exercise 20.9. Do it yourself!

Exercise 20.10. Do it yourself!

Exercise 20.11. 함수 $f : [0,\infty) \to [0,1)$을 $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$로 정의하자. f는 증가함수이고, 모든 $a,b \geq 0$에 대하여

$$f(a+b)-f(b) = \frac{a+b}{1+a+b} - \frac{b}{1+b} = \frac{a}{(1+b)(1+a+b)} \leq \frac{a}{1+b} = f(a)$$

이므로 $f(a+b) \leq f(a)+f(b)$이다. $d' = f\circ d$이므로

$$\begin{aligned}d'(x,z) &= f(d(x,z)) \leq f(d(x,y)+d(y,z)) \\ &\leq f(d(x,y)) + f(d(y,z)) = d'(x,y)+d'(y,z)\end{aligned}$$

이다. 나머지 두 조건은 자명하므로 d'은 거리함수이다. Exercise 20.3(a)에 의해 $d' = f\circ d$는 d로 생성된 공간에서 연속이고, 역으로 $d = f^{-1}\circ d'$은 d'으로 생성된 공간에서 연속이다. 따라서 Exercise 20.3(b)로부터 d'은 d와 같은 거리 위상을 생성하는 X 위의 유계 거리함수이다.

Note. 본문과 더불어 이 연습문제에서 유계성은 위상적 성질이 아님을 재차 강조하겠다.

21 The Metric Topology (continued)

Exercise 21.1. $d' := d|_{A\times A}$가 A 위의 거리함수임은 자명하다. 점 $a \in A$에 대하여 $B_{d'}(a,\epsilon) = B_d(a,\epsilon)\cap A$이므로 부분공간 위상은 d'로 유도된 거리 위상보다 세밀하다. 역으로, 부분공간의 기저 원소 $B_d(x,\epsilon)\cap A$ $(x \in X)$에 속한 점 a에 대하여 $\delta \in (0, \epsilon - d(x,a))$이면 $B_{d'}(a,\delta) = B_d(a,\delta)\cap A \subset B_d(x,\epsilon)\cap A$이므로 d'으로 유도된 거리 위상은 부분공간 위상보다 세밀하다.

Exercise 21.2. 거리함수의 성질에 의해 f는 단사이다. 이때

$$x \in B_{d_X}(x_0,\epsilon) \iff d_X(x,x_0) < \epsilon \iff d_Y(f(x),f(x_0)) < \epsilon \iff f(x) \in B_{d_Y}(f(x_0),\epsilon)$$

이므로 f는 X에서 Y로의 등거리매장(isometric imbedding)이다.

Exercise 21.3. Theorem 20.3과 Theorem 20.5의 증명을 변형하라. Do it yourself!

Exercise 21.4. $\mathbb{R}_l$에서, 집합족 $\{[x, x+1/n)\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$은 점 x에서의 가산 기저이다. I_o^2에서는 점에 따라 가산 기저를 다르게 잡을 수 있다.

점	가산 기저
0×0	$\{[0\times 0, 0\times 1/n)\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$
$a\times 0$ $(a>0)$	$\{((a-a/n)\times 1, a\times 1/n)\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$
$a\times b$ $(0<b<1)$	$\{(a\times(b-b/n), a\times(b+(1-b)/n))\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$
$a\times 1$ $(a<1)$	$\{(a\times(1-1/n), (a+(1-a)/n)\times 0)\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$
1×1	$\{(1\times(1-1/n), 1\times 1]\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$

Exercise 21.5. Do it yourself!

Exercise 21.6. Do it yourself!

Exercise 21.7.

($\Longrightarrow$) 함수열 f_n이 f로 균등수렴한다고 가정하고 $(\mathbb{R}^X, \overline{\rho})$에서 U를 f의 한 근방이라 하자. 그러면 U에 속하는 열린 공 $B_{\overline{\rho}}(f,\epsilon)$이 존재한다. 또한 자연수 N이 존재하여 모든 $x \in X$와 $n \geq N$에 대하여 $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon/2$이다. 따라서 $n \geq N$이면

$$\overline{\rho}(f_n, f) = \sup\{\overline{d}(f_n(x), f(x)) \mid x \in X\} \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$$

이므로 $f_n \in B_{\overline{\rho}}(f,\epsilon)$이다. 이는 점렬 f_n이 $(\mathbb{R}^X, \overline{\rho})$에서 f로 수렴함을 의미한다.

($\Longleftarrow$) 역으로, 점렬 f_n이 $(\mathbb{R}^X, \overline{\rho})$에서 f로 수렴한다고 가정하자. 그러면 자연수 N이 존재하여 $n \geq N$이면 $f_n \in B_{\overline{\rho}}(f,\epsilon)$이다. 이러한 n과 $x \in X$에 대하여 $d(f_n(x), f(x)) \leq \delta < \epsilon$인 $\delta \in (0,\epsilon)$이 존재한다. 이는 함수열 f_n이 f로 균등수렴함을 의미한다.

Exercise 21.8. 함수열 f_n이 f로 균등수렴한다고 가정하고, U를 $f(x)$의 한 근방이라 하자. U에 속하는 열린 공 $B_{d_Y}(f(x),\epsilon)$을 택하자. 자연수 N_1이 존재하여 $n \geq N_1$이면 $d_Y(f_n(x_n) - f_n(x)) < \epsilon/2$이다. (Theorem 21.3) 자연수 N_2가 존재하여 $n \geq N_2$이면 $d_Y(f_n(x), f(x)) < \epsilon/2$이다. 따라서 $n \geq \max\{N_1, N_2\}$이면

$$d_Y(f_n(x_n), f(x)) \leq d_Y(f_n(x_n), f_n(x)) + d_Y(f_n(x), f(x)) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

이므로 점렬 $(f_n(x_n))$은 $f(x)$로 수렴한다.

Exercise 21.9.

(a) 간단한 극한 계산으로 쉽게 알 수 있다.

(b) $|f_n(1/n) - f(1/n)| = 1$

Exercise 21.10. 두 연속함수 $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$를 각각 $f(x \times y) = xy$, $g(x \times y) = x^2 + y^2$으로 정의하자. Theorem 18.1에 의해, 세 집합 $A = f^{-1}(\{1\})$, $B = g^{-1}(\{1\})$, $C = g^{-1}((-\infty, 1])$은 모두 $\mathbb{R}^2$의 닫힌집합이다.

Exercise 21.11. Do it yourself!

Exercise 21.12. Do it yourself!

22 The Quotient Topology

Exercise 22.1. Do it yourself!

Exercise 22.2.

(a) 사상 p가 우역사상(right inverse) f를 가지므로 p는 전사이다. (Exercise 2.5(a)) 여기서 임의의 $U \subset Y$에 대하여 $U = (p \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(p^{-1}(U))$가 성립함과 두 사상 f, g가 모두 연속임을 고려하면, U가 Y의 열린집합일 필요충분조건은 $p^{-1}(U)$가 X의 열린집합인 것이다. 따라서 p는 상사상이다.

(b) f를 A에서 X로의 포함사상(inclusion map)이라 하자. f는 연속이고, $r \circ f$는 A 위의 항등사상이므로 (a)에 의해 r은 상사상이다.

Exercise 22.3. 사상 $p : A \to \mathbb{R} \times \{0\}$를 수축 $x \times y \mapsto x \times 0$으로 정의하고, 사상 $f : \mathbb{R} \times \{0\} \to \mathbb{R}$을 위상동형사상 $x \times 0 \to x$로 정의하자. 그러면 p와 f는 모두 상사상이고, $q = f \circ p$이다. 따라서 Theorem 22.2로부터 q는 상사상이다. 이때

$$q(\{x \times y \mid x \geq 0, y > 1\}) = [0, \infty),$$
$$q(\{x \times 1/x \mid x > 0\}) = (0, \infty)$$

이므로 q는 열린 사상도 닫힌 사상도 아니다.

Exercise 22.4.

(a) 힌트와 Corollary 22.3을 이용하여 X^*이 $\mathbb{R}$와 위상동형임을 알 수 있다.

(b) $g(x \times y) = x^2 + y^2$라 하면 (a)와 비슷한 논리로 X^*이 $[0, \infty)$와 위상동형임을 알 수 있다.

Exercise 22.5. U가 A의 열린집합이라 하자. A가 X의 열린집합이므로 U도 X의 열린집합이다. 그러면 $q(U) = p(U) \subset p(A)$ 역시 열린집합이다.

Exercise 22.6.

(a) $\mathbb{R}_K$가 T_1이고, K가 $\mathbb{R}_K$의 닫힌집합이므로 Y의 모든 한점집합 $\{[1]\}$, $\{x\}$ $(x \notin K)$은 닫혀있다. 따라서 Y는 T_1 공간이다. $\mathbb{R}_K$에서 0의 근방은 $\mathbb{R}$에서의 근방 U에 대하여 U 또는 $U \setminus K$의 형태를 갖는다. U는 0을 갖는 열린구간을 포함하므로 반드시 K와 만난다. 이때 Y에서 $[1]$의 근방은 $\mathbb{R}$에서 K의 각 점의 근방의 합집합이다. 따라서 Y에서 0과 $[1]$을 두 서로소 열린집합으로 구분할 수 없으므로 Y는 하우스도르프가 아니다.

(b) Y는 하우스도르프가 아니므로 집합 Δ_Y는 Y의 닫힌집합이 아니다. 이때 역상

$$(p \times p)^{-1}(\Delta_Y) = \{x \times y \mid x = y \quad x, y \in K\} = \Delta_{\mathbb{R}_K} \cup (K \times K)$$

은 $\mathbb{R}_K \times \mathbb{R}_K$의 닫힌집합이다.

23 Connected Spaces

Exercise 23.1. 공간 $(X, \mathcal{T})$의 분리는 공간 $(X, \mathcal{T}')$의 분리이므로 $(X, \mathcal{T}')$이 연결공간이면 $(X, \mathcal{T})$도 연결공간이다. 그러나 역은 성립하지 않는다. 이는 X 위의 비이산 위상과 이산 위상을 비교하면 간단하다.

Exercise 23.2. 두 집합 C와 D가 $\bigcup A_n$의 분리라 가정하자. A_n이 $\bigcup A_n$의 연결 부분공간이므로 C 또는 D에 완전히 포함되어야 한다. $A_1 \subset C$라 하자. $A_1 \cap A_2 \neq \varnothing$이므로 $A_2 \subset C$이다. 귀납법에 의해 모든 n에 대하여 $A_n \subset C$이므로 모순이다.

Exercise 23.3. 두 집합 C와 D가 $A \cup (\bigcup A_\alpha)$의 분리라 가정하자. A는 $A \cup (\bigcup A_\alpha)$의 연결 부분공간이므로 C 또는 D에 완전히 포함되어야 한다. $A \subset C$라 하자. $A \cap A_\alpha \neq \varnothing$이므로 모든 α에 대하여 $A_\alpha \subset C$이고, 이는 모순이다.

Note. Theorem 23.3을 두 번 적용하여 같은 결과를 얻을 수 있다.

Exercise 23.4. 두 집합 A와 B가 X의 분리이면, $B = X \setminus A$이므로 B는 유한집합이다. 따라서 B는 여유한위상에서 열린집합이 될 수 없다.

Exercise 23.5. 만약 두 점 x와 y가 $A \subset X$에 속해 있다면 두 집합 $\{x\}$와 $A \setminus \{x\}$는 A의 분리이다. Example 23.4를 참고하면, 역은 성립하지 않음을 확인할 수 있다.

Exercise 23.6. $C \cap \operatorname{Bd} A = \varnothing$이면, $C \cap \operatorname{Int} A = C \cap \overline{A} \neq \varnothing$이고 $C \cap \operatorname{Int}(X \setminus A) = C \cap \overline{X \setminus A} \neq \varnothing$이므로 두 집합은 C의 분리이다.

Exercise 23.7. 두 구간 $[0,\infty)$와 $(-\infty,0)$은 $\mathbb{R}_l$의 분리이므로 $\mathbb{R}_l$은 연결공간이 아니다.

Exercise 23.8. A를 $\mathbb{R}^\omega$의 모든 유계 수열의 집합이라 하고, $B = X \setminus A$라 하자. (Example 23.6 참고) $x \in A$이면 $|x_n| \le M$인 $M > 0$이 존재한다. $y \in B_{\overline{\rho}}(x, 1/2)$라 하면, 모든 $n \in \mathbb{Z}_+$에 대하여

$$|y_n| \le |y_n - x_n| + |x_n| \le \frac{1}{2} + M$$

이므로 $y \in A$이다. 따라서 A는 열린집합이다. $x \in B$이면 임의의 $M > 0$에 대하여 $|x_{n_M}| > M$이 되도록 하는 $n_M \in \mathbb{Z}_+$가 존재한다. 똑같이 $y \in B_{\overline{\rho}}(x, 1/2)$라 하면, 임의의 $M > 0$에 대하여

$$|y_{n_{M+1}}| \ge |x_{n_{M+1}}| - |x_{n_{M+1}} - y_{n_{M+1}}| > M + 1 - \frac{1}{2} = M + \frac{1}{2} > M$$

이므로 $y \in B$이다. 따라서 B 역시 열린집합이고, A와 B는 $\mathbb{R}^\omega$의 분리이다.

Exercise 23.9. $Z = (X \times Y) \setminus (A \times B)$라 하자. 임의의 $x \notin A$에 대하여, 세로선(vertical line) $V_x = \{x\} \times Y$는 Y와 위상동형이므로 연결공간이다. 같은 논리로, 임의의 $y \notin B$에 대하여, 가로선(horizontal line) $H_y = X \times \{y\}$는 연결공간이다. 이제 기준점(base point) $a \times b$ ($a \notin A$, $b \notin B$)를 하나 정하자. 그러면 Theorem 23.3에 의해 $V_a \cup H_b$는 연결집합이다. 한편, 모든 세로선 V_x와 가로선 H_y는 집합 $V_a \cup H_b$와 만나므로 $Z = (\bigcup_{x \notin A} V_x) \cup (\bigcup_{y \notin B} H_y)$는 연결집합이다.

Exercise 23.10.

(a) X_K는 $\prod_{\alpha \in K} X_\alpha$와 위상동형이므로 연결공간이다.

(b) 모든 X_K는 점 a를 공유하므로 Y 역시 연결공간이다. (Theorem 23.3)

(c) 점 $x \in X$의 한 근방을 U라 하면 $x \in \prod_{\alpha \in J} U_\alpha \subset U$인 기저 원소 $\prod_{\alpha \in J} U_\alpha$가 존재한다. 이때 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$를 제외한 모든 α에 대하여 $U_\alpha = X_\alpha$라 할 수 있다. 이제 $K = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$이라 하고, $\alpha \in K$이면 $y_\alpha = x_\alpha$, $\alpha \notin K$이면 $y_\alpha = a_\alpha$라 두자. 그러면 점 $y = (y_\alpha)_{\alpha \in J}$는 $U \cap X_K$이다. 따라서 $\overline{Y} = X$이고, Theorem 23.4에 의해 X는 연결공간이다.

Note. 이 연습문제는 Example 26.7의 일반화이다.

Exercise 23.11. 두 집합 A와 B가 X의 분리라 가정하자. 만약 집합 $p^{-1}(\{y\})$이 A와 만나면 A는 연결집합인 $p^{-1}(\{y\})$를 포함해야 한다. B에도 같은 논리가 적용되므로, A와 B는 모두 포화된 열린집합(saturated open set)이다. 따라서 p에 의한 두 집합의 상 $p(A)$, $p(B)$는 모두 Y의 열린집합이다. 두 상은 서로소이므로 Y의 분리를 이룬다.

Exercise 23.12. C와 D가 $Y \cup A$의 분리라 가정하자. Y는 $Y \cup A$의 연결 부분집합이므로 Y는 C 또는 D에 포함되어야 한다. C와 D가 서로소이므로 $Y \subset C$라 하면 $D \subset A$이다. 여기서 $X = Y \cup (X \setminus Y) = Y \cup A \cup B = B \cup C \cup D$이므로 D가 X에서 열린집합이면서 닫힌집합임을 보이면 충분하다. Lemma 23.1로부터 C의 극한점은 D에 속할 수 없고, B의 극한점은 A에 속할 수 없으므로 $D \cap A$에도 속할 수 없다. 이는 곧 $B \cup C$가 자신의 극한점을 모두 포함함을 의미하므로 $B \cup C$는 X의 닫힌집합이다. 따라서 D는 X의 열린집합이다. Lemma 23.1을 한 번 더 적용하자. D의 극한점은 C와 B에 모두 속할 수 없다. 이는 D가 자신의 극한점을 모두 포함함을 의미하므로 D는 X의 닫힌집합이다.

24 Connected Subspaces of the Real Line

Exercise 24.1.

(a) 각 구간에서 점을 하나 제거해보자. $(0,1)$에서 한 점을 제거한 집합은 연결집합이 아니다. 하지만 나머지 두 구간에서는 1을 제거해도 연결성을 유지한다. 따라서 $(0,1)$은 나머지 두 구간과 위상동형이 아니다. 한편, 닫힌구간 $[0,1]$에서는 두 점 0과 1을 제거해도 연결성을 유지하나, 다른 두 구간은 그렇지 않다. 따라서 $[0,1]$은 $(0,1]$과 위상동형이 아니다.

(b) (a)를 활용하자. $X=[0,1]$, $Y=(0,1)$, $f(x)=x/2+1/4$, $g(y)=y$로 두면 충분하다.

(c) $\mathbb{R}^n$에서 한 점을 제거해도 연결성을 유지하지만, $\mathbb{R}$에서는 그렇지 않다.

Exercise 24.2. 함수 $g: S^1 \to \mathbb{R}$을 $g(x)=f(x)-f(-x)$로 정의하자. S^1은 연결공간이고 (Example 18.6), 모든 $x \in S^1$에 대하여 $g(-x)=-g(x)$이므로 $g(c)=0$이 되도록 하는 점 $c \in S^1$이 존재한다. (Theorem 24.3(Intermediate value theorem)) 즉, $f(c)=f(-c)$이다.

Exercise 24.3. $X=[0,1]$이라 하고, 함수 $g: X \to X$를 $g(x)=f(x)-x$로 정의하자. $g(0)=f(0) \geq 0$이고 $g(1)=f(1)-1| \leq 0$이므로 $g(c)=f(c)-c=0$을 만족하는 $c \in X$가 존재한다. $f(0)>0$이고 $f(1)<1$인 경우에는 Theorem 24.3(Intermediate value theorem)를 적용하고, 그 외의 경우에는 0 또는 1이 고정점(fixed point)이다. 이제 $X=[0,1)$ 또는 $X=(0,1)$이라 하자. 이 경우 $f(x)=(x+1)/2$로 정의된 함수 f는 X에서 고정점을 갖지 않는다.

Exercise 24.4. 먼저 $S \neq \varnothing$이 위로 유계이면서 상한이 존재하지 않는 X의 부분집합이라 하자. A를 S의 모든 상계의 집합, $B=X \setminus A$라 하자. 가정에 의해 두 집합 A와 B는 모두 공집합이 아니다. 한편 $a \in A$이면 a는 S의 상계이지만 상한은 아니므로 $a_0<a$인 $a_0 \in A$가 존재하고, $a \in (a_0,\infty) \subset A$이다. $b \in B$이면 b는 S의 상계가 아니므로 $s>b$인 $s \in S$가 존재하고, $b \in (-\infty,s) \subset B$이다. 따라서 A와 B는 열린집합이므로 X의 분리이다. 이제 두 점 $x<y$에 대하여 $x<z<y$를 만족하는 $z \in X$가 없다고 가정하자. 그러면 구간 $(-\infty,x]=(-\infty,y)$는 X의 열린집합이면서 닫힌집합이다.

Note. Theorem 24.1의 역도 성립한다.

Exercise 24.5.

(a) $\mathbb{Z}_+$는 정렬집합(well-ordered set)이므로 $\mathbb{Z}_+ \times [0,1)$은 선형 연속체(linear continuum)이다. (Exercise 24.6)

(b) Example 3.12에 의해 $[0,1) \times \mathbb{Z}_+$는 선형 연속체가 아니다.

(c) 임의의 두 점 $a \times b < c \times d$에 대하여 $a \times b < (a+c)/2 \times (b+d)/2 < c \times d$이다. Exercise 3.15(b)로부터 $[0,1) \times [0,1]$는 최소 상계 성질(least upper bound property)를 만족하므로 선형 연속체이다.

(d) 부분집합 $\{0\} \times [0,1)$은 위로 유계이지만 상한이 존재하지 않으므로 $[0,1] \times [0,1)$은 선형 연속체가 아니다.

Exercise 24.6. $a \times b < c \times d$라 하자. $a<c$이면 $a \times b < a \times (b+1)/2 < c \times d$이다. $a=c$이고 $b<d$이면 $a \times b < a \times (b+d)/2 < c \times d$이다. 이제 $A \neq \varnothing$가 아래로 유계인 부분집합이라 하자. X가 정렬집합이므로, 집합 $\pi_1(A) \subset X$는 최소 원소 x를 갖는다. 그러면 점 $x \times \inf \pi_2((\{x\} \times [0,1)) \cap A)$가 A의 하한이다.

Exercise 24.7.

(a) $x_1<x_2$이면 $f(x_1)<f(x_2)$에서 f는 단사이므로 f는 일대일대응이다. U가 X의 열린집합이고 $x \in (a,b) \subset U$이면 $f(x) \in (f(a),f(b)) \subset f(U)$이므로 $f(U)$는 Y의 열린집합이다. 역으로, $f(U)$가 Y의 열린집합이고 $y \in (c,d) \subset f(U)$이면 $f^{-1}(y) \in (f^{-1}(c),f^{-1}(d)) \subset U$이므로 U는 X의 열린집합이다. 따라서 f는 위상동형사상이다. (최소 원소 또는 최대 원소의 경우도 비슷하게 논증할 수 있다.)

(b) $x \leq y$이면 $f(x)=x^n \leq y^n=f(y)$이고, $f(x^{1/n})=x$이므로 f는 순서를 보존하는 전사함수이다. (a)로부터 f는 위상동형사상이므로 f^{-1}는 연속이다.

(c) $x \leq y < -1$이면 $f(x)=x+1 \leq y+1 \leq f(y)$, $x<-1<0 \leq y$이면 $f(x)=x+1 \leq y=f(y)$, $0 \leq x \leq y$이면 $f(x)=x \leq y=f(y)$이므로 f는 순서를 보존한다. $y<0$에 대하여 $f(y-1)=y$이고 $y \geq 0$이면 $f(y)=y$이므로 f는 전사이다. 그러나 f는 위상동형사상이 아니다. 구간 $[0,\infty)=(-1/2,\infty) \cap X$는 X의 열린집합이지만 $f([0,\infty))=[0,\infty)$는 $\mathbb{R}$의 열린집합이 아니다.

Note. (c)에서 (a)가 성립하지 않는 이유는 X 위의 순서 위상과 X의 $\mathbb{R}$에 대한 부분공간 위상이 서로 다르기 때문이다. 구간 $[0,\infty)$는 부분공간 위상에서는 열린집합이지만, 순서 위상에서는 열린집합이 아니다. (Theorem 16.4 참고)

Exercise 24.8.

(a) 그렇다. $\{X_\alpha\}_{\alpha\in J}$를 경로연결공간의 모임이라 하고, x와 y를 곱 공간 $\prod_{\alpha\in J} X_\alpha$의 두 점이라 하자. 각 $\alpha \in J$에 대하여, x_α와 y_α를 연결하는 경로 $f_\alpha : [a,b] \to X_\alpha$를 택하자. 그러면 $f(t) = (f_\alpha(t))_{\alpha\in J}$로 정의된 함수 $f : [a,b] \to \prod_{\alpha\in J} X_\alpha$는 x와 y를 연결하는 경로이다. (Theorem 19.6)

(b) 그렇지 않다. Example 24.7을 생각하라.

(c) 그렇다. $f(p), f(q) \in f(X)$라 하자. $g : [a,b] \to X$가 p와 q를 연결하는 경로이면, 합성 $f \circ g : [a,b] \to Y$는 $f(p)$와 $f(q)$를 연결하는 경로이다.

(d) 그렇다. x와 y가 같은 A_α에 속해있는 경우는 자명하다. $x \in A_\alpha$, $y \in A_\beta$ $(\alpha \neq \beta)$라 하자. 점 $p \in \bigcap A_\alpha$를 택하면 x에서 p로의 경로 $f : [a,b] \to A_\alpha$와 p에서 y로의 경로 $g : [b,c] \to A_\beta$를 얻는다. 이제 두 경로를 이어 붙인 $h : [a,c] \to A_\alpha \cup A_\beta$는 x에서 y로의 경로이다. (Theorem 18.3(The pasting lem))

Exercise 24.9. $\mathbb{R}^2$의 특정한 점에서 A를 지나지 않는 직선의 집합은 비가산이다. 따라서 A를 피하면서 임의의 두 점을 적당한 선분 몇 개로 연결할 수 있다.

Exercise 24.10. 힌트에서 주어진 집합을 A라 하자. $y \in A$이면 $y \in B \subset U$인 열린 공 B가 존재한다. B의 모든 점은 y, y는 x_0와 경로로 연결되므로 B의 모든 점은 x_0와 경로로 연결된다. (Example 24.3) 따라서 $B \subset A$이므로 A는 열린집합이다. $y \in U \setminus A$이면 같은 방식으로 열린 공 B를 생각했을 때, B의 임의의 점은 x_0와 경로로 연결될 수 없다. 그렇지 않으면 y와 x_0를 연결하는 경로가 존재하게 된다. 따라서 $B \subset U \setminus A$이므로 A는 닫힌집합이다. A는 연결집합 U의 열린집합이면서 닫힌집합이고 공집합이 아니므로 $A = U$이다.

Exercise 24.11. $\mathbb{R}$에서, 구간 $A_1 = [-1,1]$는 연결집합이지만 $\operatorname{Bd} A_1 = \{\pm 1\}$은 연결집합이 아니다. (Example 23.3) $\mathbb{R}^2$에서, $A_2 = B(-1,1) \cup B(1,1) \cup \{0\times 0\}$은 연결집합이지만, $\operatorname{Int} A_2 = A \setminus \{0 \times 0\}$은 연결집합이 아니다. $\mathbb{R}$에서, $\mathbb{Q}$는 연결집합이 아니지만 $\operatorname{Int}\mathbb{Q} = \varnothing$과 $\operatorname{Bd}\mathbb{Q} = \mathbb{R}$은 연결집합이다. (Example 23.4)

Exercise 24.12. To be updated.

25 Components and Local Connectedness

Exercise 25.1. A가 $\mathbb{R}_l$의 연결집합이고 $x \in A$이면 기저 원소 $[x,b) \cap A$는 A의 열린집합이라 닫힌집합이므로 임의의 $b > x$에 대하여 $A = [x,b) \cap A$이다. 따라서 $A = \{x\}$이다. 이는 $\mathbb{R}_l$의 연결성분과 경로성분 모두 한점집합이다. Theorem 23.5로부터 $\mathbb{R}$에서 $\mathbb{R}_l$로의 연속함수는 상수함수밖에 없음을 알 수 있다.

Note. Exercise 18.7의 결론을 연결성을 이용하여 다시 확인하였다.

Exercise 25.2.

(a) (경로)연결공간의 곱 공간은 (경로)연결공간이므로 곱 위상에서 $\mathbb{R}^\omega$의 (경로)연결성분은 자기 자신이다. (Exercise 23.10, Exercise 24.8)

(b) $x - y$가 유계라 가정하고, 함수 $f : [0,1] \to \mathbb{R}^\omega$를 $f(t) = (1-t)x + ty$로 정의하자. $M > 0$이 $x - y$의 상계이면, 모든 $t, s \in [0,1]$에 대하여

$$\|f(t) - f(s)\|_{\bar{\rho}} = \|x - y\|_{\bar{\rho}}|t - s| \leq M|t - s|$$

이므로 f는 연속이다. $[0,1]$은 연결공간이므로 $f([0,1])$은 $f(0)=x$와 $f(1)=y$를 포함하는 연결 부분공간이다. 그러므로 x와 y는 같은 연결성분에 속한다. 역으로 $x-y$가 유계가 아니라 가정하자. 두 부분집합 A, B를 다음과 같이 설정하자.

$$A=\{z\in\mathbb{R}^\omega \mid x-z\text{가 유계이다.}\},\quad B=\mathbb{R}^\omega\setminus A$$

Exercise 23.8과 같은 방법으로, A와 B는 $\mathbb{R}^\omega$의 분리를 이룸을 보일 수 있다. 따라서 $x\in A$와 $y\in B$는 같은 연결성분에 속할 수 없다.

(c) 자연수 N에 대하여 $n>N$이면 $x_n=y_n$이라 가정하고, 함수 $g:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}^\omega$를 $g(a_1,\cdots,a_N)=(a_1,\cdots,a_N,\cdots,x_{N+1},x_{N+2},\cdots)$로 정의하자. 이때 $\mathbb{R}^\omega$의 기저 원소 $\prod_{n\in\mathbb{Z}_+}U_n$에 대하여

$$g^{-1}\left(\prod_{n\in\mathbb{Z}_+}U_n\right)=\begin{cases}\displaystyle\prod_{n=1}^{N}U_n & (n>N\text{에 대하여 } x_n\in U_n\text{ 경우})\\ \varnothing & (\text{그 외의 경우})\end{cases}$$

이므로 g는 연속이다. $\mathbb{R}^N$은 연결공간이므로 $g(\mathbb{R}^N)$은 $x=g(x_1,\cdots,x_N)$과 $y=g(y_1,\cdots,y_N)$을 포함하는 연결공간아다. 그러므로 x와 y는 같은 연결성분에 속한다. 역으로, 무수히 많은 $n\in\mathbb{Z}_+$에 대하여 $x_n\neq y_n$이라 가정하고, 함수 $h:\mathbb{R}^\omega\to\mathbb{R}^\omega$를

$$(h(z))_n=\begin{cases}\dfrac{n(z_n-x_n)}{|x_n-y_n|} & (x_n\neq y_n)\\ z_n-x_n & (x_n=y_n)\end{cases}$$

으로 정의하자. Exercise 19.8로부터 h는 위상동형사상이다. $h(x)=0$이고 $h(y)$는 유계가 아니므로 x와 y는 같은 연결성분에 속하지 않는다.

Note. 이쯤에서 위상에 따른 $\mathbb{R}^\omega$의 연결성을 정리하자. (증명은 Do it yourself!)

$\mathbb{R}^\omega$	상자 위상 $\supsetneq$	균등 위상 $\supsetneq$	곱 위상
연결	No	No	Yes
경로연결	No	No	Yes
국소연결	No	Yes	Yes
국소경로연결	No	Yes	Yes
연결성분=경로연결성분	Yes	Yes	Yes

Exercise 25.3. I_o^2에서 임의의 열린구간은 연결집합이므로 I_o^2는 국소연결이다. (Example 24.1, Theorem 24.1) 한편, 점 $x\times 0$ $(x>0)$을 포함하는 임의의 열린구간은 점 $y\times 0$ $(y<x)$를 포함한다. Example 24.6과 같은 논리로 $x\times 0$과 $y\times 0$은 경로로 연결될 수 없다. 따라서 I_o^2은 임의의 점 $x\times 0$ $(x>0)$에서 국소경로연결이 아니다. (점 $x\times 1$ $(x<1)$ 역시 마찬가지이다.) 이제 경로연결성분을 구하기 위해 다음을 증명하자: 두 점 $x\times a$와 $y\times b$가 같은 경로연결성분에 속할 필요충분조건은 $x=y$이다. 먼저 $x=y$이고 $a<b$이면, I_o^2의 부분공간 $\{x\}\times[a,b]$는 $\mathbb{R}$의 구간 $[a,b]$와 위상동형이므로 경로연결이다. 역으로 $x<y$라 가정하고, 함수 $f:[a,b]\to I_o^2$이 $x\times a$와 $y\times b$를 연결하는 경로라 가정하자. Theorem 24.3(Intermediate value theorem)으로부터 $x<z<y$인 임의의 z에 대하여 점 $z\times c$는 $f([a,b])$에 속해야 한다. 집합 $U_z=f^{-1}(\{z\}\times(0,1))$라 하면, 각 $z\in(x,y)$에 대하여 U_z는 공집합이 아니면서 구간 $[a,b]$에서의 열린집합이다. 따라서 집합 U_z마다 유리수점 q_z를 택할 수 있다. 각 U_z는 서로소이므로 사상 $z\mapsto q_z$는 구간 (x,y)에서 $\mathbb{Q}$로의 단사이고, 이는 모순이다. 따라서 두 점 $x\times a$와 $y\times b$는 같은 경로연결성분에 속할 수 없다. 이상의 결과를 종합하면, I_o^2의 경로연결성분은 $\{\{x\}\times[0,1]:x\in[0,1]\}$이다.

Note. I_0^2은 연결공간이므로 연결성분은 자기 자신 하나지만, 경로연결성분은 비가산이다.

Exercise 25.4. U를 X의 연결 열린집합이라 하자. X가 국소경로연결이므로, U의 각 경로연결성분은 X의 열린집합이다. (Theorme 25.4) 만약 U의 경로연결성분이 둘 이상이면 이들은 U의 분리가 된다. 그러므로 U는 자기 자신의 경로연결성분이므로 경로연결이다.

Note. Exercise 24.10은 이 연습문제의 특수한 경우이다.

Exercise 25.5. To be updated.

Exercise 25.6. U를 X의 열린집합이라 하고, C를 U의 연결성분이라 하자. C의 임의의 점 x는, U의 원소로서, x의 근방 V를 포함하면서 U에 포함되는 연결집합 D를 갖는다. C는 연결성분이므로 D는 C에 포함된다. 따라서 $x \in V \subset D \subset C$이므로 C는 열린집합이다. Theorem 25.3으로부터 X는 국소연결이다.

Exercise 25.7. To be updated.

Exercise 25.8. U를 Y의 열린집합이라 하고, C를 U의 연결성분이라 하자. p가 상사상이므로 $p^{-1}(C)$가 X의 열린집합임을 보이면 충분하다. 점 $x \in p^{-1}(C) \subset p^{-1}(U)$의 연결성분 C_x를 선택하자. $p^{-1}(U)$가 열린집합이므로 C_x 역시 열린집합이다. 이때 $p(C_x)$는 점 $p(x)$를 포함하는 연결집합이므로 $p(C_x) \subset C$이다. 즉, $x \in C_x \subset p^{-1}(C)$이므로 $p^{-1}(C)$는 열린집합이다.

Exercise 25.9. To be updated.

Exercise 25.10.

(a) (반사성) 어떤 분리도 같은 점을 공유할 수 없다. (대칭성) A와 B의 역할을 바꾼다. (추이성) $x \sim y$이고 $y \sim z$라 가정하고, 역으로 $x \sim z$이 성립하지 않는다고 하자. 그러면 $x \in A$이고 $z \in B$인 X의 분리 A, B가 존재한다. 이때 y는 A와 B 둘 중 하나에 속해야 하고, 어느 경우에도 가정에 모순이다.

(b) 같은 연결 부분공간 C에 속하는 두 점 x와 y에 대하여 X의 분리 $A \ni x$, $B \ni y$가 존재하면 $C \cap A$와 $C \cap B$는 C의 분리이다. 따라서 임의의 연결성분은 어떤 준연결성분에 포함된다. 이제 X가 국소연결이면, Theorem 25.3에 의해 모든 연결성분은 열린집합이다. 이는 서로 다른 연결성분에 속하는 두 점은 서로 다른 준연결성분에 각각 속함을 의미한다. 그러므로 X가 국소연결이면 연결성분과 준연결성분은 같다.

(c) To be updated.

26 Compact Spaces

Exercise 26.1.

(a) $(X, \mathcal{T})$의 열린집합은 $(X, \mathcal{T}')$의 열린집합이므로 $(X, \mathcal{T}')$가 콤팩트이면 $(X, \mathcal{T})$도 콤팩트이다. 역은 성립하지 않는다. (Exercise 26.2)

(b) $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$이라 가정하고, 함수 $i : (X, \mathcal{T}') \to (X, \mathcal{T})$를 항등함수로 정의하자. 가정에 의해 i는 연속 전단사이고, 콤팩트 공간에서 하우스도르프 공간으로의 함수이므로 i는 위상동형사상이다. (Theorem 26.6) 그러므로 $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$이다.

Exercise 26.2.

(a) 부분공간 $X \subset \mathbb{R}$의 한 열린덮개 $\{A_\alpha\}$를 생각하자. 이 덮개의 한 원소 A_β는 유한개를 제외한 X의 모든 점을 포함해야 한다. 따라서 A_β에 속하지 않은 X의 점을 갖는 유한개의 집합을 $\{A_\alpha\}$에서 택하면 유한 부분덮개를 얻는다.

(b) 집합 $A_n = [0, 1] \setminus \{\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \cdots\}$에 대하여, $\{A_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$은 $[0, 1]$의 열린 덮개이지만 유한 부분덮개를 갖지 않는다.

Exercise 26.3. $\{A_i\}_{i=1}^n$ 을 콤팩트 집합의 유한 모임이라 하고, $\{C_\alpha\}$를 $\bigcup_{i=1}^n A_i$ 의 한 열린 덮개라 하자. $\{C_\alpha\}$는 모든 A_i의 덮개이므로 각 A_i를 덮는 유한 부분 덮개 $\{C_{i,1}, \cdots, C_{i,k_i}\}$가 존재한다. 그러므로 $\{C_{1,1}, \cdots, C_{1,k_1}, \cdots, C_{n,1}, \cdots, C_{n,k_n}\}$ 은 $\{C_\alpha\}$의 유한 부분덮개이다.

Exercise 26.4. 거리공간은 하우스도르프 공간이므로 모든 콤팩트 집합은 닫힌집합이다. (Theorem 26.3) A가 거리 공간 X에서 유계가 아니라 가정하자. 점 $x \in A$에 대한 열린 공의 모임 $\{B(x,n) \mid n \in \mathbb{Z}_+\}$는 A의 열린 덮개이지만 유한 부분덮개를 갖지 않는다. 그러므로 거리공간의 콤팩트 부분공간은 유계인 닫힌집합이다. 유계성이 위상적 성질이 아님을 고려하면, 역이 성립하지 않는 예시는 쉽게 구상할 수 있다.

Exercise 26.5. Lemma 26.4로부터, 각 점 $x \in A$에 대하여 서로소인 두 열린집합 $U_x \ni x$와 $V_x \supset B$가 존재한다. 이때 $\{U_x\}_{x\in A}$는 A의 열린 덮개이므로 유한 부분덮개 $\{U_{x_i}\}_{i=1}^n$이 존재한다. 이때 $U = \bigcup_{i=1}^n U_{x_i} \supset A$와 $V = \bigcap_{i=1}^n V_{x_i} \supset B$는 서로소인 열린집합이다.

Exercise 26.6. C 닫힌집합 $\xrightarrow{X \text{ 콤팩트}}$ C 콤팩트 $\xrightarrow{f \text{ 연속}}$ $f(C)$ 콤팩트 $\xrightarrow{Y \text{ 하우스도르프}}$ $f(C)$ 닫힌집합

Exercise 26.7. C를 $X \times Y$의 한 닫힌집합이라 하자. 그러면 $(X \times Y) \setminus C$는 열린집합이다. x가 $X \setminus \pi_1(C)$의 점이면 $\{x\} \times Y \subset (X \times Y) \setminus C$가 성립한다. 여기에 Lemma 26.8(The tube lemma)를 적용하면, X에서 x의 근방 W가 존재하여 $\{x\} \times Y \subset W \times Y \subset (X \times Y) \setminus C$가 성립한다. 이는 $x \in W \subset X \setminus \pi_1(C)$를 의미하므로 $X \setminus \pi_1(C)$는 열린집합이고, $\pi_1(C)$는 닫힌집합이다.

Exercise 26.8.

($\Longrightarrow$) f가 연속이라 가정하고 $(X \times Y) \setminus G_f$가 열린집합임을 보이자. $x \times y \notin G_f$이면 $y \neq f(x)$이고 Y가 하우스도르프이므로 서로소인 두 근방 $V_1 \ni y$, $V_2 \ni f(x)$가 존재한다. 이때 $U_2 = f^{-1}(V_2) \ni x$는 X의 열린집합이다. 만약 $a \times b \in (U_2 \times V_1) \cap G_f$이면 $b = f(a) \in V_1 \cap V_2$이므로 이는 모순이다. 따라서 $x \times y \in U_2 \times V_1 \subset (X \times Y) \setminus G_f$이므로 $(X \times Y) \setminus G_f$는 열린집합이다.

($\Longleftarrow$) 이제 G_f가 $X \times Y$의 닫힌집합이라 가정하고, 점 $x \in X$에 대하여 V를 Y에서 점 $f(x)$의 근방이라 하자. $Y \setminus V$가 닫힌집합이므로 집합 $A = G_f \cap (Y \setminus V)$는 닫힌집합이다. Y가 콤팩트이므로 Exercise 26.7로부터 $\pi_1(A)$는 X의 닫힌집합이다. 이때 $f^{-1}(V) = X \setminus \pi_1(A)$가 성립하므로 f는 연속이다.

Exercise 26.9. 세로선 $\{a\} \times B$를 N에 포함되는 열린집합 $U^a \times V^a$로 덮자. $\{a\} \times B$는 콤팩트 공간 B와 위상동형이므로 유한개의 집합 $U_1^a \times V_1^a, \cdots, U_{a_n}^a \times V_{a_n}^a$으로도 충분하다. 두 집합 $U_a = \bigcap_{i=1}^n U_{a_i}^a$와 $V_a = \bigcup_{i=1}^n V_{a_i}^a$의 곱 $U_a \times V_a$는 N에 포함되면서 $\{a\} \times B$를 덮는다. $\{U_a \times V_a \mid a \in A\}$는 $A \times B$의 열린 덮개이고, $A \times B$는 콤팩트이므로 유한 부분덮개 $\{U_1 \times V_1, \cdots, U_k \times V_k\}$가 존재한다. 이제 $U = \bigcup_{i=1}^k U_i$와 $V = \bigcap_{i=1}^k V_i$가 찾고자 하는 두 열린집합이 된다.

Exercise 26.10.

(a) $\epsilon > 0$을 고정하자. 각 $x \in X$에 대하여, $f(x) - f_{n_x}(x) < \epsilon$이 되도록 하는 $n_x \in \mathbb{Z}_+$가 존재한다. 함수 $f - f_{n_x}$는 연속이므로 x의 근방 U_x가 존재하여 모든 $y \in U_x$에 대해 $f(y) - f_{n_x}(y) < \epsilon$이 성립한다. 함수열 f_n이 단조증가하므로 모든 $n \geq n_x$와 $y \in U_x$에 대하여 $f(y) - f_n(y) < \epsilon$이 성립한다. $\{U_x \mid x \in X\}$는 콤팩트 공간 X의 열린 덮개이므로 유한 부분덮개 $\{U_{x_1}, \cdots, U_{x_k}\}$가 존재한다. $N = \max\{n_{x_1}, \cdots, n_{x_k}\}$라 하자. 각 $x \in X$에 대해 x_i가 존재하여 $x \in U_{x_i}$이므로 $n \geq N$이면

$$f(x) - f_n(x) \leq f(x) - f_N(x) \leq f(x) - f_{n_{x_i}}(x) < \epsilon$$

이 성립한다. 따라서 함수열 f_n은 균등수렴한다.

(b) 함수열 f_n이 단조가 아닌 경우의 반례는 Exercise 21.9를 변형하여 얻을 수 있다. X가 콤팩트가 아닌 경우의 반례는 $f_n : [0,1) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$으로 쉽게 찾을 수 있다.

Exercise 26.11. C와 D를 Y의 분리라 하자. Y는 닫힌집합이므로, C와 D도 X의 닫힌집합이다. X가 콤팩트 하우스도르프이므로 C와 D는 서로소인 콤팩트 집합이다. 따라서 서로소인 두 열린 근방 $U \supset C$와 $V \supset D$가 존재한다. (Exercise 26.5) 가정에 의해, 모든 $A \in \mathcal{A}$에 대하여 $A \setminus (U \cup V)$는 공집합이 아닌 닫힌집합이다. (만약 공집합이면, $U \cap A$와 $V \cap A$는 A의 분리가 된다.) $\mathcal{A}$의 단순순서관계(simply ordered by proper inclusion)에 의해 모임 $\{A \setminus (U \cup V) \mid A \in \mathcal{A}\}$는 유한교차성(finite intersection property)을 갖는다. 따라서 $\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A \setminus (U \cup V)$는 콤팩트 공간 X에서 공집합이 아니다. (Theorem 26.9) 이는 Y에서 $U \cup V$에 속하지 않는 점이 있음을 의미하므로 $Y = C \cup D \subset U \cup V$에 모순이다.

Exercise 26.12. 먼저 힌트를 증명하자.

Lemma. $U \supset p^{-1}(\{y\})$가 열린집합이면, $p^{-1}(W) \subset U$인 y의 근방 W가 존재한다.

증명. p가 닫힌 사상이므로 $p(X \setminus U)$는 Y의 닫힌집합이고, $W = Y \setminus p(X \setminus U)$는 열린집합이다. $y \notin W$이면 $y \in p(X \setminus U)$이고 p가 전사이므로 $y = f(x)$인 $x \in X \setminus U$가 존재한다. 그러나 $p^{-1}(\{y\}) \subset U$이므로 이는 모순이고, $y \in W$이다. $x \in p^{-1}(W)$라 하면 $p(x) \in W$이므로 $p(x) \notin p(X \setminus U)$이다. 즉 $x \notin p^{-1}(p(X \setminus U))$이고, $X \setminus U \subset p^{-1}(p(X \setminus U))$이므로 $x \notin X \setminus U$이다. 따라서 $p^{-1}(W) \subset U$이다. □

이제 $\{U_\alpha\}$를 $X = p^{-1}(Y) = \bigcup_{y\in Y} p^{-1}(\{y\})$의 열린 덮개라 하자. 각 $y \in Y$에 대하여 $p^{-1}(\{y\})$와 만나는 $\{U_\alpha\}$의 열린집합을 생각하자. $p^{-1}(\{y\})$가 콤팩트이므로 이를 덮는 유한 덮개 $\{U_{y_1}, \cdots, U_{y_k}\}$가 존재한다. $U_y = \bigcup_{i=1}^k U_{y_i}$라 하고, W_y를 $p^{-1}(W_y) \subset U_y$를 만족하는 y의 근방이라 하자. Y가 콤팩트이므로 $\{W_y \mid y \in Y\}$의 유한 덮개 $\{W_1, \cdots, W_n\}$이 존재한다. 각 W_i에 해당하는 U_i는 X의 유한 덮개를 이룬다:

$$\bigcup_{i=1}^n U_i \supset \bigcup_{i=1}^n p^{-1}(W_i) = p^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^n W_i\right) = p^{-1}(Y) = X.$$

Exercise 26.13. To be updated.

27 Compact Spaces of the Real Line

Exercise 27.1. 점 z를 부분집합 A의 한 상계라 하자. $z \in A$이면 자명하게 z는 A의 상한이다. $z \notin A$라 가정하자. A의 원소 a를 하나 고르면 닫힌구간 $[a, z]$는 순서 위상에서 콤팩트이다. 닫힌구간의 모임

$$\mathcal{A} = \{[b, y] \subset [a, z] \mid b \in A, y\text{는 } A \text{ 의 상계}\}$$

를 고려하자. $[a, z] \in \mathcal{A}$이므로 $\mathcal{A} \neq \varnothing$이고, $\mathcal{A}$의 원소의 임의의 유한 교집합은 다시 $\mathcal{A}$에 속하는 닫힌구간이 되므로 $\mathcal{A}$는 유한교차성을 갖는다. 따라서 Theorem 26.9로부터 $\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A \neq \varnothing$이다. $x \in \bigcap_{A\in\mathcal{A}} A$라 하자. a보다 크거나 같은 모든 $b \in A$에 대하여 $b \leq x$이므로 x는 A의 상계이고, z보다 작은 모든 A의 상계 y에 대하여 $x \leq y$이다. 특히 $\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A = \{x\}$이다. (만약 $x' < x$ 역시 $\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A$의 원소이면 x'도 A의 상계이므로 $x \in [a, x'] \in \mathcal{A}$이므로 $x \leq x'$이 되어 모순이다.) 따라서 $\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A$의 유일한 원소 x가 A의 상한이다.

Exercise 27.2.

(a) $d(x, A) = 0 \iff \forall\epsilon > 0\ \exists a \in A$ s.t. $d(x, a) < \epsilon \iff$ 모든 열린 공 $B_d(x, \epsilon)$는 A와 만난다. $\iff x \in \overline{A}$

(b) 고정된 점 $x \in X$에 대하여, $d_x(a) = d(x, a)$로 정의된 함수 $d_x : A \to \mathbb{R}$는 연속이다. (Exercise 20.3) A가 콤팩트이므로 d_x는 최솟값을 갖는다.

(c) $x \in U(A, \epsilon) \iff d(x, A) < \epsilon \iff \exists a \in A$ s.t. $d(x, a) < \epsilon \iff \exists a \in A$ s.t. $x \in B_d(a, \epsilon) \iff x \in \bigcup_{a\in A} B_d(a, \epsilon)$

(d) 임의의 점 $a \in A \subset U$에 대하여 열린 공 $B_d(a, 2\epsilon_a) \subset U$가 존재한다. 열린 공의 모임 $\{B_d(a, \epsilon_a) \subset U \mid a \in A\}$는 콤팩트 집합 A의 열린 덮개이므로 유한 부분덮개 $\{B_d(a_1, \epsilon_1), \cdots, B_d(a_n, \epsilon_n)\}$이 존재한다.

$\epsilon = \min\{\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n\}$이라 하자. (c)로부터

$$x \in U(A,\epsilon) \implies \exists a \in A \text{ s.t. } x \in B_d(a,\epsilon) \implies \exists a_i \text{ s.t. } a \in B_d(a_i,\epsilon_i) \quad (1)$$
$$\implies d(x,a_i) \le d(x,a) + d(a,a_i) < \epsilon + \epsilon_i \le 2\epsilon_i \implies x \in B_d(a_i, 2\epsilon_i) \subset U \quad (2)$$

이므로 $U(A,\epsilon) \subset U$이다.

(e) $A = \{x \times (1/x) \mid x \ge 1\}$는 $\mathbb{R}^2$의 닫힌집합이지만 콤팩트는 아니다. (Exercise 26.4, Exercise 26.8) 이때 $U = \mathbb{R}^2_+$은 $\mathbb{R}^2$의 열린집합이지만 A의 어떠한 ϵ-근방도 U에 포함되지 않는다.

Exercise 27.3.

(a) $\{[0,1] \setminus K\} \cup \{(1/n, 1] : n \in \mathbb{Z}_+\}$은 유한 부분덮개가 존재하지 않는 $[0,1]$의 열린 덮개이다.

(b) 힌트에서 $(0,\infty)$의 경우만 증명하자. ($(-\infty,0)$도 비슷하게 증명할 수 있다.) $\mathbb{R}_K$의 부분공간 위상이 보통 위상보다 세밀함은 자명하자. $x \in (a,b) \setminus K \subset (0,\infty)$라 하자. $n > 1/x$인 가장 작은 자연수 n을 n_x라 하자. $n_x = 1$이면 $a \le 1 < x < b$이므로 $x \in (1,b) \in (a,b) \setminus K$이다. $n_x > 1$이면 $1/n < x < 1/(n-1)$이므로 $x \in (1/n, 1/(n-1)) \cap (a,b) \setminus K \subset (a,b) \setminus K$이다. 따라서 $(0,\infty)$와 $(-\infty,0)$의 보통 위상 공간은 각각 $\mathbb{R}_K$의 부분공간이므로 연결공간이다. 0은 $\overline{(0,\infty)}$와 $\overline{(-\infty,0)}$의 공통 원소이므로 $\mathbb{R}_K = (-\infty,0) \cup \{0\} \cup (0,\infty)$는 연결공간이다.

(c) $f : [0,1] \to \mathbb{R}_k$이 $0 = f(0)$과 $1 = f(1)$을 연결하는 경로라 하자. 정의역 $[0,1]$은 콤팩트 연결공간이므로 상 $f([0,1])$도 $\mathbb{R}_K$의 콤팩트 연결 부분공간이다. 그러므로 $f([0,1])$은 더 거친 공간인 $\mathbb{R}$에서도 연결 부분공간이어야 하므로 $[0,1] \subset f([0,1])$이다. 이는 $[0,1]$이 콤팩트 공간의 닫힌 부분집합으로서 $\mathbb{R}_K$의 콤팩트 집합임을 의미하므로 (a)에 모순이다.

Exercise 27.4. (X,d)를 둘 이상의 점을 갖는 연결 거리공간이라 하자. 점 $x \in X$를 선택하자. Exercise 20.3에서 $d_x(y) = d(x,y)$로 정의된 함수 $d_x : X \to \mathbb{R}$는 연속이다. x'이 x와 다른 X의 점이라 하면, $d_x(x) = 0$과 $d^* := d_x(x') > 0$으로부터 $[0,d^*] \subset d_x(X)$이다. (Theorem 24.3(Intermediate value theorem))

Exercise 27.5. Theorem 48.2(Baire category theorem)를 참고하라.

Exercise 27.6. To be updated.

28 Limit Point Compactness

Exercise 28.1. 점 x_i를 $j \ne i$이면 $\pi_j(x_i) = 0$, $\pi_i(x_i) = 1$로 정의하고, $A = \{x_i \mid i \in \mathbb{Z}_+\}$라 하자. 점 $y \in [0,1]^\omega$에 대하여, 다음의 두 경우가 있다.

(i) 모든 $j \in \mathbb{Z}_+$에 대하여 $\pi_j(y) = 0$ 또는 1인 경우: 모든 i에 대하여 $\overline{\rho}(y,x_i) = 0$ 또는 1이므로 y는 A의 극한점이 될 수 없다.

(ii) 모든 $j \in \mathbb{Z}_+$에 대하여 $\pi_j(y) \in (0,1)$인 경우: 모든 $\epsilon > 0$에 대하여 점 $x_{i_\epsilon} \in B(y,\epsilon)$이 존재한다고 가정하자. $\epsilon_1 \in (0, \min\{y_1, 1-y_1\})$에 대하여 i_{ϵ_1}을 택하자. 이때 $\overline{\rho}(x_{i_{\epsilon_1}}, y) = \sup\{y_1, \cdots, y_{i_{\epsilon_1}-1}, 1 - y_{i_{\epsilon_1}}, y_{i_{\epsilon_1}+1}, \cdots\} < \epsilon_1$이다. 만약 $i_{\epsilon_1} > 1$이면, $y_1 \le \overline{\rho}(x_{i_{\epsilon_1}}, y) < \epsilon_1$이므로 모순이다. $i_{\epsilon_1} = 1$이면 $1 - y_1 < \epsilon_1$이므로 이 역시 모순이다. 따라서 어떤 열린 공 $B(y,\epsilon)$은 A의 원소를 갖지 않고, y는 A의 극한점이 아니다.

그러므로 A는 $[0,1]^\omega$에서 극한점을 갖지 않는 무한집합이다.

Note. 균등 위상을 갖는 공간 $[0,1]^\omega$은 거리공간이다. Theorem 28.2에 의해 $[0,1]^\omega$는 콤팩트, 극한점 콤팩트, 점렬 콤팩트 모두 아니다.

Exercise 28.2. 집합 $A = \{1 - 1/n \mid n \in \mathbb{Z}_+\}$라 하자. 임의의 점 $x \in [0, 1)$에 대하여, n_0를 $n_0 > 1/(1-x)$, 즉 $1 - 1/n_0 > x$인 가장 작은 자연수라 하자. 그러면 x의 근방 $[x, 1 - 1/n_0)$은 A와 x를 제외한 점에서는 만날 수 없다. $x = 1$에 대해서는 $\{1\} = [1, 2) \cap [0, 1]$이 A와 만나지 않는 x의 근방이다. 그러므로 A는 $[0, 1]$에서 극한점을 갖지 않는다.

Exercise 28.3.

(a) X를 Example 28.1의 공간 $\mathbb{Z}_+ \times Y$라 하고, $f = \pi_1$이라 하자. 상 $f(X) = \mathbb{Z}_+$는 극한점 콤팩트가 아니다.

(b) B를 A의 무한 부분집합이라 하면 X의 무한 부분집합이기도 하므로 X에서 극한점 x를 갖는다. X에서 x의 모든 근방은 $B \setminus \{x\}$와 만나므로 $A \setminus \{x\}$와도 만난다. 이는 x가 A의 극한점임을 의미하고, A가 닫힌집합이므로 $x \in A$이다. 따라서 A는 극한점 콤팩트이다.

(c) $X = S_\Omega$, $Z = \overline{S_\Omega}$이라 하자. Z는 순서 위상이 부여된 공간이므로 Z는 하우스도르프이다. Example 28.2의 논의로부터 X는 극한점 콤팩트이지만 Z의 닫힌집합은 아니다.

Exercise 28.4.

($\Longrightarrow$) X를 가산콤팩트 공간이라 하고 A를 극한점이 없는 X의 무한 부분집합이라 하자. A의 한 가산 무한 부분집합을 B라 하자. B 역시 X에서 극한점을 갖지 않으므로 B는 닫힌집합이다. 또한 임의의 점 $b \in B$에 대하여 $U_b \cap B = \{b\}$를 만족하는 b의 근방 U_b가 존재한다. $\{X \setminus B\} \cup \{U_b \mid b \in B\}$는 X의 가산 열린 덮개이므로 유한 부분덮개가 존재한다. 따라서 B는 유한집합이므로 모순이다.

($\Longleftarrow$) X를 극한점 콤팩트 T_1**–공간**이라 하고, $\{U_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$를 X의 가산 열린 덮개라 하자. $\{U_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$의 어떤 유한 부분집합도 X를 덮을 수 없다고 가정하면, 각 $n \in \mathbb{Z}_+$에 대하여 집합 $\bigcup_{i=1}^{n} U_i$에 속하지 않는 점 x_n이 존재한다. $x_0 \in X$를 임의의 점이라 하고, n_1을 $x_0 \in \bigcup_{i=1}^{n_1} U_i$인 가장 작은 자연수라 하자. $\bigcup_{i=1}^{n_1} U_i$에 속하지 않는 점 x_1을 택하자. 같은 방식으로, 점 $x_1, \cdots, x_{k-1}$을 택했다고 할 때, 자연수 $n_k > n_{k-1}$를 $x_{k-1} \in \bigcup_{i=1}^{n_k} U_i$인 가장 작은 자연수라 하자. $\bigcup_{i=1}^{n_k} U_i$에 속하지 않는 점 x_k을 택하자. 이같은 방법으로 무한집합 $A = \{x_k \mid k \in \mathbb{Z}_+\}$를 구성할 수 있다. A는 X에서 극한점을 갖지 않음을 보이자. 만약 A가 극한점 x를 가지면, n_x를 $x \in \bigcup_{i=1}^{n_x} U_i =: V_x$인 가장 작은 자연수라 하자. A의 구성 방식에 의해, V_x는 A의 점을 유한개만 포함한다. 그 점들을 $x_{k_1}, \cdots, x_{k_m}$이라 하자. X가 T_1–공간이므로 각 x_{k_j} $(j = 1, \cdots, m)$와 만나지 않는 x의 근방 V_j가 존재한다. 그러면 집합 $\bigcup_{j=1}^{m}(V_x \cap V_j)$는 $A \setminus \{x\}$와 만나지 않는 x의 근방이므로 이는 x가 A의 극한점이라는 가정에 모순이다.

Exercise 28.5.

($\Longrightarrow$) X가 가산콤팩트이고 $\{C_n\}$를 공집합이 아닌 닫힌집합의 축소열(nested sequence)이라 하자. 여기서 임의의 유한 모임 $\{X \setminus C_{n_1}, \cdots, X \setminus C_{n_k}\}$은 X의 열린 덮개가 될 수 없다. $\bigcap_{j=1}^{k} C_{n_j} \neq \varnothing$이기 때문이다. 따라서 가산 모임 $\{X \setminus C_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$ 역시 X의 열린 덮개가 될 수 없고, $\bigcap_{n \in \mathbb{Z}_+} C_n \neq \varnothing$이다.

($\Longleftarrow$) $\{U_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$를 유한 부분덮개가 존재하지 않는 X의 가산 열린 덮개라 하자. 집합 $C_n = X \setminus (\bigcup_{i=1}^{n} U_n)$이라 하면 $\{C_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$는 공집합이 아닌 닫힌집합의 축소열이다. 만약 $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{Z}_+} C_n$이면 어떠한 U_n도 x를 포함할 수 없다. 따라서 $\bigcap_{n \in \mathbb{Z}_+} C_n = \varnothing$이다.

Exercise 28.6. f가 연속인 단사함수임은 자명하다.

Claim. f는 전사이다.

증명. $a \notin f(X)$라 가정하자. X는 콤팩트 하우스도르프 공간이므로 $f(X)$는 콤팩트이고, $B(a, \epsilon) \cap f(X) = \varnothing$인 $\epsilon > 0$가 존재한다. (Theorem 26.5, Lemma 26.4) 점렬 x_n을 $x_1 = a$, $x_{n+1} = f(x_n)$ $(n \in \mathbb{Z}_+)$로 정의하자. $n > m > 1$이면

$$d(x_n, x_m) = d(f(x_{n-1}), f(x_{m-1})) = d(x_{n-1}, x_{m-1}) = \cdots = d(f(x_{n-m}), a) \geq \epsilon$$

이다. 이는 점렬 x_n이 수렴하는 부분수열을 갖지 않음을 의미한다. 그러나 X는 콤팩트 거리공간이므로 점렬 콤팩트여야

한다. 따라서 f는 전사이다. □

이제 f는 연속인 전단사함수이고, X는 콤팩트 하우스도르프 공간이므로 Theorem 26.6에 따라 f는 위상동형사상이다.

Exercise 28.7.

(a) f의 축약적 성질(contracting principle)로부터 f가 연속함수임을 알 수 있다. 집합 $A_n = f^n(X)$라 하면, f가 연속이고 X가 콤팩트이므로 A_n 역시 콤팩트이다. 따라서 거리공간의 부분공간으로서 A_n은 닫힌집합이다. 이때 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$는 공집합이 아닌 닫힌집합의 축소열이므로 Theorem 26.9로부터 $A := \bigcap_{n\in\mathbb{Z}_+} A_n \neq \varnothing$이다.

Claim. $f(A) \subset A$.

증명. $y \in f(A)$이고 $y \notin A$라 가정하자. 그러면 $y = f(x)$인 $x \in A$가 존재하고, $y \notin A_n$인 $n \in \mathbb{Z}_+$가 존재한다. 이때 $x \in A_{n-1}$이므로 $x = f(x')$인 $x' \in A_{n-1}$이 존재한다. 따라서 $y = f(x) = f(f^{n-1}(x')) = f^n(x') \in A_n$이므로 모순이다. □

Claim. $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(A_n) = 0$.

증명. $\epsilon > 0$을 고정하자. X가 콤팩트 거리공간이므로 유계이다. 모든 $x_1, x_2 \in X$에 대하여 $d(x_1, x_2) \leq M$인 $M > 0$을 택하자. $a, b \in A_n$라 하면 어떤 $a_0, b_0 \in X$에 대하여 $a = f^n(a_0)$, $b = f^n(b_0)$이다. 그러면

$$d(a,b) \leq \alpha d(f^{n-1}(a_0), f^{n-1}(b_0)) \leq \cdots \leq \alpha^n d(a_0, b_0) \leq M\alpha^n$$

이므로 충분히 큰 $n \in \mathbb{Z}_+$에 대하여 $\operatorname{diam}(A_n) < \epsilon$을 얻는다. □

Claim. A는 한점집합이다.

증명. $t, s \in A$ $(t \neq s)$라 가정하자. 임의의 $\epsilon \in (0, d(t,s))$를 택하자. 그러면 $n_0 \in \mathbb{Z}_+$가 존재하여 $\operatorname{diam}(A_{n_0}) < \epsilon$이다. $t, s \in A_{n_0}$에서, $d(t,s) \leq \operatorname{diam}(A_{n_0}) < \epsilon < d(t,s)$이므로 모순이다. □

이상의 논의로부터, f는 A의 원소를 유일한 고정점을 갖는다.

(b) 집합 A를 (a)에서 정의한 것과 같은 것으로 두자.

Claim. $A = f(A)$.

증명. $x \in A$이면 모든 $n \geq 0$에 대하여 $x = f^{n+1}(x_n)$인 $x_n \in X$가 존재한다. 콤팩트 거리공간으로서, X는 점렬 콤팩트이다. 따라서 점렬 $y_n = f^n(x_n)$은 수렴하는 부분열을 갖는다. a를 한 부분열 y_{n_j}의 극한이라 하자. 정의에 의해, a의 모든 근방은 점 $y_{n_j} = f^{n_j}(x_{n_j})$을 무수히 많이 포함한다. A_n이 닫힌집합이므로, 모든 $n \in \mathbb{Z}_+$에 대해 $a \in A_n$, 즉 $a \in A$이다. 모든 $n \in \mathbb{Z}_+$에 대해 $f(y_n) = x$이므로 $f(a) = x$이고, 따라서 $A \subset f(A)$이다. □

Claim. $\operatorname{diam}(A) = 0$, 즉 A는 한점집합이다.

증명. 거리공간에서 거리 d는 연속함수이고, A가 콤팩트 집합이므로 $d(x,y)$가 d의 최댓값이 되도록 하는 점 x, y가 존재한다. $A = f(A)$이므로 $x = f(a)$, $y = f(b)$가 되도록 하는 $a, b \in A$가 존재한다. 만약 $x \neq y$이면 $d(x,y) = d(f(a), f(b)) < d(a,b) \leq d(x,y)$이므로 모순이다. 따라서 A는 한점집합이다. □

이상의 논의로부터, f는 A의 원소를 유일한 고정점을 갖는다.

(c) $f([0,1]) = [0,1]$임은 자명하고, $x \neq y$이면

$$d(f(x), f(y)) = |x-y| \cdot \left|1 - \frac{1}{2}(x+y)\right| < |x-y| = d(x,y)$$

이다. $\alpha < 1$라 하자. 임의의 $x < y < 1-\alpha$에 대하여

$$\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| = |f'(c_{x,y})| = 1 - c_{x,y}$$

인 실수 $c_{x,y} \in (x,y)$가 존재한다. 즉, 다음이 성립한다.

$$d(f(x),f(y)) = |f(x)-f(y)| = |1-c_{x,y}|\cdot|x-y| > \alpha|x-y| = \alpha d(x,y)$$

(d) 등식 $f(x)=x$를 정리하면 $1=0$이므로 모순이고, f는 고정점을 갖지 않는다. f가 문제에서 제시하는 조건을 만족함은 다음과 같이 보일 수 있다.

$$\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| = \frac{1}{2}\left|1+\frac{x+y}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}}\right| < 1$$
$$\left|\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right| = \frac{1}{2}\left|1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+1}\right| \to 1 \text{ as } x\to\infty$$

29 Local Compactness

Exercise 29.1. $\mathbb{Q}$에서 열린집합 U를 포함하는 콤팩트 집합 C가 존재한다고 가정하자. 그러면 U는 어떤 닫힌구간 $[a,b]$를 반드시 포함해야 한다. (순서 위상의 관점, 유리수의 조밀성) $[a,b]$는 C의 닫힌 부분집합이므로 콤팩트이다. 그러나 $[a,b]$는 점렬 콤팩트가 아니므로 콤팩트일 수 없다. (거리 위상의 관점) 따라서 $\mathbb{Q}$는 국소콤팩트가 아니다.

Exercise 29.2.

(a) 사영 π_α가 연속인 열린 사상이므로 Exercise 29.3에 의해 각 X_α가 국소콤팩트임은 쉽게 확인할 수 있다. $\prod X_\alpha$가 국소콤팩트이므로 콤팩트 집합에 포함되는 기저 원소 $\prod U_\alpha$가 존재한다. 이때 유한개를 제외한 모든 α에 대하여 $U_\alpha = X_\alpha$이다. 이 α들에 대한 사영을 생각하면 유한개를 제외한 모든 X_α가 콤팩트임을 알 수 있다.

(b) 두 국소콤팩트 공간 X_1과 X_2에 대하여 곱 공간 $X_1\times X_2$가 국소콤팩트임을 보이면 충분하다. $x_1\times x_2$를 $X_1\times X_2$의 점이라 하자. 각 $i=1,2$에 대하여, X_i가 국소콤팩트이므로, 콤팩트 집합 C_i와 열린집합 U_i가 존재하여 $x_i\in U_i\subset C_i\subset X_i$이다. 따라서 $x_1\times x_2\in U_1\times U_2\subset C_1\times C_2\subset X_1\times X_2$이다.

Exercise 29.3. f가 연속인 열린 사상이면 $f(X)$도 국소콤팩트이다. $f(x)\in f(X)$라 하자. X가 국소콤팩트이므로 X의 어떤 콤팩트 집합 C와 열린집합 U에 대하여 $x\in U\subset C$이다. 가정에 의해 $f(C)$는 콤팩트 집합, $f(U)$는 열린집합이고, $f(x)\in f(U)\subset f(C)$이므로 $f(X)$는 $f(x)$에서 국소콤팩트이다. f가 열린 사상이 아닌 연속함수이면 반례가 존재한다. $\mathbb{Q}$를 $\mathbb{R}$의 부분공간이라 하고, $\mathbb{Q}_d$를 $\mathbb{Q}$ 위에 이산 위상을 부여한 공간이라 하자. $f:\mathbb{Q}_d\to\mathbb{Q}$를 항등사상이라 하면, f는 연속이지만 열린 사상은 아니다. $\mathbb{Q}_d$는 국소콤팩트이지만, $\mathbb{Q}$는 그렇지 않다. (Exercise 29.1)

Exercise 29.4. $[0,1]^\omega$가 0에서 국소콤팩트라 가정하자. 그러면 콤팩트 집합 C와 열린집합 U가 존재하여 $0\in U\subset C$이다. U가 0의 근방이므로 $B(0,\epsilon)\subset U$인 $\epsilon>0$가 존재한다. Exercise 28.1과 비슷한 논리로, C는 극한점 콤팩트가 아니다. 따라서 $[0,1]^\omega$는 0에서 국소콤팩트가 아니다. ($\pi_i(x_i)=\epsilon/2$로 바꾸면 충분하다.)

Exercise 29.5. X_1과 X_2의 한점콤팩트화를 각각 $Y_1=X_1\cup\{p\}$, $Y_2=X_2\cup\{q\}$라 하자. 함수 f를 확장하여 $f(p)=q$라 정의하자. f가 전단사임은 자명하다. 다음 논증에 의해 f는 Y_1에서 Y_2로의 위상동형사상이다. U가 Y_1의 열린집합이다. $\iff$ (i) U는 X_1의 열린집합이다. (ii) $Y_1\setminus U$는 X_1의 콤팩트 집합이다. $\iff$ (i) $f(U)$는 X_2의 열린집합이다. (ii) $f(Y_1\setminus U)=Y_2\setminus f(U)$는 X_2의 콤팩트 집합이다. ((i), (ii)를 대응시켜 생각하라.)

Exercise 29.6. 한 점을 제거한 원과 $\mathbb{R}$이 서로 위상동형임은 직접 확인해보라. (Do it yourself!) 따라서 Exercise 29.5에 의해 S^1과 $\mathbb{R}$의 한점콤팩트화는 서로 위상동형이다.

Note. 이 결과를 n차원으로 확장할 수 있다.

Exercise 29.7. $\overline{S_\Omega}$는 정렬집합이므로 최소상계성질(least upper bound property)를 갖고, 닫힌집합이므로 콤팩트 공간이다. (Exercise 10.1, Theorem 27.1) 또한 Theorem 17.11에 의해 $\overline{S_\Omega}$는 하우스도르프 공간이다. 같은 논리로 S_Ω 역시 하우스도르프 공간이고, Example 29.3에 의해 국소콤팩트이다. 그러나 Example 28.2에서 S_Ω는 콤팩트 공간이 아님을 알 수 있다.

Exercise 29.8. $\mathbb{Z}_+$와 $\{1/n \mid n \in \mathbb{Z}_+\}$는 모두 $\mathbb{R}$의 부분공간으로서 이산 위상을 가지므로 항등사상에 대하여 위상동형이다. $\{0\} \cup \{1/n \mid n \in \mathbb{Z}_+\}$는 콤팩트 하우스도르프 공간이므로 $\mathbb{Z}_+$의 한점콤팩트화와 위상동형이다.

Exercise 29.9. To be updated.

Exercise 29.10. X가 점 x에서 국소콤팩트이므로 $x \in W \subset C$인 콤팩트 집합 C와 열린집합 W가 존재한다. x의 근방 U에 대하여, 집합 $C \setminus (U \cap W)$은 C의 닫힌집합이므로 콤팩트이다. X가 하우스도르프이므로, 서로소인 두 열린집합 $V_1 \ni x$과 $V_2 \supset C \setminus (U \cap W)$가 존재한다. 이때 집합 $V = V_1 \cap U \cap W$는 x의 근방이고, $\overline{V} \subset U$는 C의 닫힌집합이므로 콤팩트이다.

Exercise 29.11. To be updated.

30 The Countability Axioms

Exercise 30.1.

(a) $\mathcal{B}_x$를 점 $x \in X$에서의 가산 국소 기저라 하자. 점 $y \neq x$를 포함하지 않는 x의 국소 기저 원소 $B_y \in \mathcal{B}_x$가 존재한다. 따라서 $\bigcap_{B \in \mathcal{B}_x} B = \{x\}$이다.

(b) $\mathbb{R}^\omega$의 곱 공간 $\mathbb{R}^\omega_{\text{prod}}$는 거리화 가능 공간이므로 제1가산 T_1–공간이고, 임의의 한점집합은 G_δ 집합이다. 이제 $\mathbb{R}^\omega$에 상자 위상을 부여한 공간 $\mathbb{R}^\omega_{\text{box}}$을 생각하자. Example 21.6으로부터 $\mathbb{R}^\omega_{\text{box}}$는 제1가산이 아님을 알 수 있다. 그러나 $\mathbb{R}^\omega_{\text{box}}$는 $\mathbb{R}^\omega_{\text{prod}}$보다 세밀한 공간이므로 모든 한점집합은 G_δ 집합이다.

Exercise 30.2. 힌트에 따라 $\mathcal{C}$의 부분모임 $\{C_{n,m}\}$을 구성하자. 점 x를 포함하는 임의의 열린집합 U에 대하여 $x \in B_m \subset U$인 기저 원소 B_m이 존재한다. $U = B_m$에 같은 논리를 적용하면 $x \in B_n \subset B_m \subset U$인 기저 원소 B_n이 존재한다. 따라서 $x \in B_n \subset C_{n,m} \subset B_m \subset U$이므로 $\{C_{n,m}\}$은 X의 기저이다.

Exercise 30.3. 역으로, A의 도집합 A'이 가산이라 가정하자. 그러면 A'에 속하지 않는 A의 점은 비가산이다. 이러한 점에 x에 대하여 $B_x \cap A = \{x\}$인 기저 원소 B_x를 택하자. 이 기저 원소들은 기준점마다 서로 다르기에 모순이다.

Note. Example 30.3의 아이디어를 활용하여, 비가산집합 $A \setminus A'$에서 가산집합 $\{B_x\}$로의 단사 $x \mapsto B_x$를 구성한다.

Exercise 30.4. $\mathcal{A} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}_+} \mathcal{A}_n$이라 하자. $\mathcal{A}$가 X의 기저임을 보이면 충분하다. 임의의 열린 공 $B(x, \epsilon)$에 대하여, 자연수 $n > 2/\epsilon$과 x를 덮는 열린 공 $B(y, 1/n) \in \mathcal{A}_n$을 차례대로 택하면 $x \in B(y, 1/n) \subset B(x, \epsilon)$이다.

Exercise 30.5.

(a) A를 X의 가산 조밀 부분집합이라 하고, $\mathcal{A}_n = \{B(a, 1/n) \mid a \in A\}$라 하자. 그러면 $\mathcal{A} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}_+} \mathcal{A}_n$은 X의 기저이다. 열린 공 $B(x, \epsilon)$에 대하여, 자연수 $n > 2/\epsilon$과 점 $a \in B(x, 1/n) \cap A$를 차례대로 택하면 $x \in B(a, 1/n) \subset B(x, \epsilon)$이다.

(b) 모임 $\mathcal{A}_n$이 가산집합인 점을 제외하면 Exercise 30.4와 동일하다.

Exercise 30.6.

- $\mathbb{R}_l$은 제2가산이 아닌 린델뢰프 공간이다.
  (Example 30.3, Exercise 30.5(b))
- I_o^2은 콤팩트 공간이지만 제2가산이 아닌 부분공간을 포함한다.
  (Theorem 27.1, Example 30.5, Exercise 30.4, Theorem 30.2)

Exercise 30.7. S_Ω의 최소원을 a_0이라 하자.

	제1가산	린델뢰프	분리가능	제2가산
S_Ω	Yes$^{(i)}$	No$^{(iii)}$	No$^{(v)}$	No
$\overline{S_\Omega}$	No$^{(ii)}$	Yes$^{(iv)}$	No$^{(v)}$	No

(i) $\{a_0\} = [a_0, a_0+1)$는 S_Ω의 열린집합이므로 a_0에서 가산 국소 기저를 갖는다. 점 $x > a_0$는 가산 국소 기저 $\{(y, x] \mid y < x\}$를 갖는다.

(ii) Example 21.3으로부터 $\overline{S_\Omega}$는 Ω에서 가산 국소 기저를 갖지 않는다.

(iii) 열린 덮개 $\{[a_0, x) \mid x \in S_\Omega\}$는 부분덮개를 갖지 않는다.

(iv) $\overline{S_\Omega}$는 콤팩트 공간이다.

(v) 임의의 가산 부분집합은 상한을 갖는다. (Theorem 10.3)

Exercise 30.8.

$\mathbb{R}^\omega$	상자 위상	$\supsetneq$	균등 위상	$\supsetneq$	곱 위상
제1가산	No		Yes		Yes
린델뢰프	No		No		Yes
분리가능	No		No		Yes
제2가산	No		No		Yes

균등 위상에서, $\mathbb{R}^\omega$는 거리공간이므로 제1가산이고, 나머지 세 성질은 동치이다. 만약 $\mathbb{R}^\omega$가 가산 기저를 갖는다면, Exercise 30.3에 의해 임의의 비가산 집합은 극한점을 가져야 한다. 그러나 모든 이진 수열(binary sequence)의 집합은 극한점을 갖지 않으므로 $\mathbb{R}^\omega$는 제2가산이 아니다.

Note. 상자 위상과 곱 위상은 스스로 고민해보라. Do it yourself!

Exercise 30.9. $\{V_\alpha\}$를 A에서의 열린집합으로 구성된 A의 덮개라 하자. X의 열린집합 U_α에 대하여 $V_\alpha = U_\alpha \cap A$라 하자. A가 닫힌 부분공간이므로 모임 $\{U_\alpha\} \cup \{X \setminus A\}$는 X의 열린 덮개이다. X가 린델뢰프이므로 가산 부분덮개 $\{U_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+} \cup \{X \setminus A\}$가 존재한다. 각 U_n에 해당하는 V_n의 모임 $\{V_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$은 $\{V_\alpha\}$의 가산 부분덮개이다. 이제 조르겐프라이 평면 $\mathbb{R}_l^2$을 고려하자. 유리수 평면 $\mathbb{Q}^2$이 가산 조밀 부분집합이므로 $\mathbb{R}_l^2$은 분리가능이다. 그러나 $\mathbb{R}_l^2$의 닫힌 부분공간 L(anti-diagonal, Example 30.3)은 분리가능하지 않다.

Exercise 30.10. $X = \prod_{n\in\mathbb{Z}_+} X_n$이 $\{X_n\}$의 가산 곱 공간이고 A_n이 공간 X_n의 가산 조밀 부분집합이면, $\prod_{n\in\mathbb{Z}_+} A_n$은 X의 가산 조밀 부분집합이다.

Exercise 30.11. 먼저 X가 린델뢰프이고 $\{U_\alpha\}$가 $f(X)$의 열린 덮개라 가정하자. $\{f^{-1}(U_\alpha)\}$는 X의 열린 덮개이므로 가산 부분덮개 $\{f^{-1}(U_n)\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$가 존재한다. 이때 $\{U_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$는 $\{U_\alpha\}$의 가산 부분덮개이다. 이제 A가 X의 가산 조밀 부분집합이라 가정하자. Theorem 18.1로부터 $\overline{f(A)} \supset f(\overline{A}) = f(X)$가 성립하므로 $\overline{f(A)} = f(X)$이다. 따라서 $f(A)$는 $f(X)$의 가산 조밀 부분집합이다.

Exercise 30.12. 먼저 X가 제1가산이라 하자. 그러면 점 X는 점 x에서 가산 국소 기저 $\{U_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$를 갖는다. f가 열린 사상이므로 $\{f(U_n)\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$는 $y := f(x)$를 포함하는 Y의 열린집합의 모임이다. V를 y의 임의의 근방이라 하면 $f^{-1}(V)$는 x의 근방이므로 어떤 $n_0 \in \mathbb{Z}_+$에 대하여 $x \in U_{n_0} \subset f^{-1}(V)$, 즉 $y \in f(U_{n_0}) \subset V$이다. 따라서 $\{f(U_n)\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$은 y의 가산 국소 기저이므로 $f(X)$는 제1가산이다. 이제 X가 가산 기저 $\{B_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$를 갖는다고 가정하자. 비슷한 논리로 $\{f(B_n)\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$은 $f(X)$의 가산 기저이다.

Exercise 30.13. A를 X의 가산 조밀 부분집합이라 하고, $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$를 공집합이 아니면서 서로소인 X의 열린집합의 모임이라 하자. $\overline{A} = X$이므로 모든 U_α는 A와 만나야 한다. 각 $\alpha \in I$에 대하여 점 $x_\alpha \in U_\alpha \cap A$를 선택하자. 여기서 $\alpha_1 \neq \alpha_2$이면 $x_{\alpha_1} \neq x_{\alpha_2}$여야 한다. 그렇지 않으면 $U_{\alpha_1} \cap U_{\alpha_2} \neq \varnothing$이다. 따라서 $\alpha \mapsto x_\alpha$로 정의된 사상은 I에서 A로의 단사이다.

Exercise 30.14. $\{U_\alpha \times V_\alpha\}$를 곱 공간 $X \times Y$의 기저 덮개라 하자. 각 점 $x \in X$에 대하여 공간 $\{x\} \times Y$의 유한 부분덮개 $\{U_n^x \times V_n^x\}$를 택하자. $U^x = \bigcap_n U_n^x$라 하고 X의 열린 덮개 $\{U^x\}$의 가산 부분덮개 $\{U^{x_k}\}$를 택하자. 그러면 $\{U_n^{x_k} \times V_n^{x_k}\}$는 $\{U_\alpha \times V_\alpha\}$의 가산 부분덮개이다.

Exercise 30.15. 힌트에서 주어진 함수의 모임은 가산이므로 임의의 함수 $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$가 힌트의 함수로 근사 가능함을 보이면 충분하다. f가 균등 연속이므로 주어진 $\epsilon > 0$에 대하여 $|x - y| < \delta$이면 $|f(x) - f(y)| < \epsilon/4$이 되도록 하는 $\delta > 0$가 존재한다. $\{x_n\}$을 노름(norm)이 δ보다 작은 I의 분할이라 하자. 각 분할점 x_n에 대하여 $|q_n - f(x_n)| < \epsilon/6$인 유리수 q_n을 택하자. 여기서

$$|q_{n+1} - q_n| \le |q_n - f(x_{n+1})| + |f(x_{n+1}) - f(x_n)| + f(x_n) - q_n| < \frac{7}{12}\epsilon$$

이다. 좌표평면 상의 점 $x_n \times q_n$을 선분으로 이어 만든 함수를 g라 하자. 그러면 임의의 $x \in [x_n, x_{n+1}]$에 대하여 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} |f(x) - g(x)| &\le |f(x) - f(x_n)| + |f(x_n) - q_n| + |q_n - g(x)| \\ &< \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{6} + |q_n - q_{n+1}| < \epsilon \end{aligned}$$

Exercise 30.16.

(a) $x \in \mathbb{R}^I$라 하고, $\prod_{\alpha \in I} U_\alpha$를 x의 기저 근방이라 하자. 즉 $x_\alpha \in U_\alpha$이고, $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$을 제외한 모든 α에 대하여 $U_\alpha = \mathbb{R}$이다. 양 끝점이 유리수이고 서로소인 닫힌구간 $I_i \ni \alpha_i$를 택하자. 각 $j = 1, \cdots, n$에 대하여 점 $x_j \in U_{\alpha_j} \cap \mathbb{Q}$를 택하자. 이제

$$y_\alpha = \begin{cases} x_j & (\text{어떤 } j = 1, \cdots, n\text{에 대하여 } \alpha \in I_j\text{인 경우}) \\ 0 & (\alpha \notin I_1 \cup \cdots \cup I_n\text{인 경우}) \end{cases}$$

라 하고 $y = (y_\alpha)_{\alpha \in I}$라 하자. 이렇게 구성한 점 y의 집합은 가산이다: $(\{I_i\}, \{x_j\}) \mapsto y_\alpha$. $y \in \prod_{\alpha \in I} U_\alpha$이므로 점 y의 집합은 $\mathbb{R}^I$의 가산 조밀 부분집합이다.

(b) 힌트의 사상 f는 단사이다. 만약 $\alpha \neq \beta$이면 집합 $D \cap \pi_\alpha^{-1}((a, b)) \cap \pi_\beta^{-1}((b, \infty))$는 $\pi_\beta^{-1}((a, b))$에 속하지 않는 $\mathbb{R}^J$의 점을 포함하므로 $f(\alpha) \neq f(\beta)$이다. 그러므로 $|J| < |\mathcal{P}(D)|$이다.

Exercise 30.17. $\mathbb{Q}^\infty$는 가산집합이므로 린델뢰프이면서 분리가능이다. Exercise 30.1(b)와 비슷한 논리로 $\mathbb{Q}^\infty$는 제1가산이 아니다. 그러므로 $\mathbb{Q}^\infty$는 제2가산 역시 아니다.

Exercise 30.18. To be updated.

31 The Separation Axioms

Exercise 31.1. 서로 다른 두 점 x, y에 대하여 서로소인 열린 근방 $U_x \ni x$와 $U_y \ni y$가 존재한다. X의 정칙성에 의해 $x \in \overline{V_x} \subset U_x$, $y \in \overline{V_y} \subset U_y$인 두 열린 근방 V_x와 V_y가 존재한다. (Lemma 31.1)

Exercise 31.2. Exercise 31.1에서 점 대신 닫힌집합으로 생각하여도 무관하다.

Exercise 31.3. $-\infty \le a < x < b \le \infty$라 하자.

(i) $a < c < x < d < b$인 경우: $x \in \overline{(c, d)} \subset [c, d] \subset [a, b]$ (Exercise 17.5)

(ii) $(a, x) = \varnothing$이면서 $x < d < b$인 경우: $x \in (a, d) = [x, d) \subset \overline{[x, d)} \subset [x, d] \subset (a, b)$

(iii) $a < c < x$이면서 $(x, b) = \varnothing$인 경우: (ii)와 동일하다.

(iv) $(a, x) = (x, b) = \varnothing$인 경우: $\{x\} = (a, b)$는 열린집합이자 닫힌집합이다.

Exercise 31.4. X가 하우스도르프이면 X'도 하우스도르프이다. 그러나 나머지 두 성질은 이러한 관계가 없다. $\mathbb{R}$은 정규 공간이지만 $\mathbb{R}_K$는 정칙 공간도 아니다. 모든 이산 공간은 정규 공간이다.

Exercise 31.5. Y가 하우스도르프이므로 Y의 대각(diagonal) $\Delta_Y = \{y \times y \mid y \in Y\}$는 $Y \times Y$의 닫힌집합이다. (Exercise 17.13) f와 g가 모두 연속이므로 Exercise 18.10의 사상 $f \times g : X \to Y \times Y$도 연속이다. 주어진 집합은 $(f \times g)^{-1}(\Delta_Y)$이고, 이는 닫힌집합이다.

Exercise 31.6. Y의 임의의 한점집합은 X의 한점집합의 상이므로 Y는 T_1−공간이다. 이제 B를 Y의 닫힌집합이라 하고 V를 B의 근방이라 하자. 집합 $A := p^{-1}(B)$는 X의 닫힌집합이고, $U := p^{-1}(V)$는 A의 근방이므로 $A \subset W$이고 $\overline{W} \subset U$인 A의 근방 W가 존재한다. $X \setminus W$가 X의 닫힌집합이므로 $p(X \setminus W)$는 Y의 닫힌집합이다. 이때 $A \cap (X \setminus W) = \varnothing$이고 $p(X \setminus W) \cup p(W) = Y$이므로 $W' = Y \setminus p(X \setminus W)$라 하면 W'은 Y의 열린집합이고 $B \subset W' \subset p(W) \subset p(\overline{W}) \subset V$가 성립한다. $p(\overline{W})$는 W'을 포함하는 닫힌집합이므로 $\overline{W'} \subset p(\overline{W}) \subset V$가 성립한다. 따라서 Y는 정규공간이다.

Note. 솔직히 힌트를 어디에 쓰는지 모르겠다.

Exercise 31.7. Exercise 26.12의 힌트를 이용하자. 약간의 변형을 거치면 $p^{-1}(\{y\})$ 대신 Y의 임의의 부분집합에 똑같이 적용할 수 있다.

Lemma. $U \supset p^{-1}(\{y\})$가 열린집합이면 $p^{-1}(W) \subset U$인 y의 근방 W가 존재한다.

(a) $y_1 \neq y_2$라 하자. p가 전사 완전사상이므로 두 집합 $p^{-1}(\{y_1\})$과 $p^{-1}(\{y_2\})$는 공집합이 아니고, X에서 서로소인 콤팩트 집합이다. X가 하우스도르프이므로 서로소인 두 근방 $U_1 \supset p^{-1}(\{y_1\})$, $U_2 \supset p^{-1}(\{y_2\})$가 존재한다. Lemma에 의해 $p^{-1}(W_1) \subset U_1$, $p^{-1}(W_2) \subset U_2$인 두 근방 $W_1 \ni y_1$과 $W_2 \ni y_2$가 존재한다. $W_1 \cap W_2 = \varnothing$이므로 Y는 하우스도르프이다.

(b) (a)로부터 Y는 하우스도르프이다. Y의 점 y와 닫힌집합 $C \not\ni y$에 대하여, p가 전사 연속 완전사상이므로 $p^{-1}(\{y\})$는 콤팩트이고 $p^{-1}(C)$는 닫힌집합이며, 두 집합은 모두 공집합이 아니다. X가 정칙공간이므로 각 점 $x \in p^{-1}(\{y\})$에 대하여 서로소인 두 근방 $U_x \ni x$와 $V_x \supset p^{-1}(C)$가 존재한다. $\{U_x\}$는 $p^{-1}(\{y\})$의 열린 덮개이므로 유한 부분덮개 $\{U_{x_1}, \cdots, U_{x_n}\}$이 존재한다. $U = \bigcup_{i=1}^n U_{x_i} \supset p^{-1}(\{y\})$, $V = \bigcap_{i=1}^n V_{x_i} \supset p^{-1}(C)$라 하면 U, V는 서로소인 열린집합이다. Lemma로부터 $p^{-1}(W_1) \subset U$이고 $p^{-1}(W_2) \subset V$인 두 근방 $W_1 \ni y$와 $W_2 \supset C$가 존재한다. $W_1 \cap W_2 = \varnothing$이므로 Y는 정칙공간이다.

(c) $y \in Y$라 하자. $p^{-1}(\{y\})$가 공집합이 아닌 콤팩트 집합이고 X가 국소콤팩트이므로 각 점 $x \in p^{-1}(\{y\})$에 대하여 $x \in U_x \subset C_x$인 열린집합 U_x와 콤팩트 집합 C_x가 존재한다. $\{U_x\}$는 $p^{-1}(\{y\})$의 열린 덮개이므로 유한 부분덮개 $\{U_{x_1}, \cdots, U_{x_n}\}$이 존재한다. 이때 $p^{-1}(\{y\}) \subset U := \bigcup_{i=1}^n U_{x_i} \subset C := \bigcup_{i=1}^n C_{x_i}$이고 U는 열린집합이므로 Lemma에 의해 $p^{-1}(W) \subset U \subset C$인 근방 $W \ni y$가 존재한다. C가 콤팩트 집합이므로 $p(C)$도 콤팩트이고, $y \in W \subset p(C)$이므로 Y는 국소콤팩트이다.

(d) $\mathcal{B} = \{B_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$를 X의 가산 기저라 하자. J를 $\mathbb{Z}_+$의 임의의 유한 부분집합이라 할 때, $p^{-1}(W) \subset \bigcup_{j \in J} B_j$을 만족하는 Y의 열린집합 W에 대하여 $p^{-1}(W)$의 합집합을 U_J라 하자. 이러한 U_J의 모임은 가산이다. $p(U_J)$는 Y의 열린집합의 합집합이므로 열린집합이다. V를 Y의 열린집합이라 하자. p가 연속 완전사상이므로 각 점 $y \in V$에 대하여 유한 부분집합 $J_y \subset \mathbb{Z}_+$가 존재하여 $p^{-1}(\{y\}) \subset U_{J_y} \subset \bigcup_{j \in J_y} B_j \subset p^{-1}(V)$이다. 이때 Lemma로부터 $p^{-1}(W_y) \subset \bigcup_{j \in J_y} B_j$인 근방 $W_y \ni y$가 존재한다. 그러므로 $U_{J_y} \neq \varnothing$이고, $p^{-1}(\{y\}) \subset U_{J_y} \subset \bigcup_{j \in J_y} B_j \subset p^{-1}(V)$이다. $p^{-1}(V) = \bigcup_{y \in V} p^{-1}(\{y\}) = \bigcup_{y \in V} U_{J_y}$에서 $V = p(p^{-1}(V)) = p(\bigcup_{y \in V} U_{J_y})$이므로 V는 가산 모임 $\{p(U_J)\}$의 원소의 합집합으로 표현된다. 따라서 Y는 제2가산이다.

Exercise 31.8. To be updated.

Exercise 31.9.

(a) $x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$이면 $x \times (-x) \in B$이므로 $\epsilon > 0$이 존재하여 $[x, x+\epsilon) \times [-x, -x+\epsilon) \subset V$이다. 따라서 $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}_+} K_n = [0,1] \setminus \mathbb{Q}$이다.

(b) $\mathbb{R}$에서 $[0,1]$은 콤팩트 하우스도르프 부분공간이다. $\{\overline{K_n} \mid n \in \mathbb{Z}_+\} \cup \{\{q\} \mid q \in [0,1] \cap \mathbb{Q}\}$은 합집합이 $[0,1]$인 닫힌집합의 가산 모임이므로 어떤 $\overline{K_n}$은 적당한 열린구간 (a,b)를 포함해야 한다. (Exercise 27.5)

(c) n, a, b가 (b)를 만족한다고 하자. $x \in (a, b)$이고 $\epsilon \in (0, 1/n)$라 하자. $x \in \overline{K_n}$이므로 만약 $\epsilon < x - a$이면 $(x-\epsilon, x) \cap K_n \neq \varnothing$이다. 이 집합의 한 원소를 y라 하면 $x - \epsilon < y < x$이고 $[y, y+1/n) \times [-y, -y+1/n) \subset V$이므로 $x - y < \epsilon < 1/n$에서 $x \in [y, y+1/n)$이고 $(x-\epsilon) - (y - 1/n) = (x-y) + (1/n - \epsilon) > 0$에서 $-x + \epsilon \in [-y, -y+1/n)$이다. 따라서 $x \times (-x+\epsilon) \in V$이다.

Note. (b)를 만족하는 n을 충분히 크게 잡을 수 있음을 이용한다.

(d) $\mathbb{R}_l$의 기저 원소 $[q, q+\epsilon_1) \times [-q, -q+\epsilon_2)$에 대하여 양수 ϵ을 $\epsilon < \min\{\epsilon_1, \epsilon_2, 1/n, q-a\}$가 되도록 택하면 $q \times (-q+\epsilon) \in V$이다.

32 Normal Spaces

Exercise 32.1. A를 X의 닫힌집합아라 하고 B와 C를 A의 서로소인 두 닫힌집합이라 하자. B와 C는 X에서도 닫힌집합이다. 따라서 X에서 두 서로소 근방 $U \supset B$와 $V \supset C$가 존재한다. 이때 $U \cap A \supset B$와 $V \cap A \supset C$는 A에서 서로소인 두 근방이다.

Exercise 32.2. A와 B를 X_α에서 서로소인 두 닫힌집합이라 하자. 그러면 곱 공간 $\prod X_\alpha$에서 두 서로소 근방 $U \supset \prod_\beta A_\beta$와 $V \supset \prod_\beta A_\beta$가 존재한다. 여기서 $\beta \neq \alpha$이면 $A_\beta = B_\beta = X_\beta$,이고, $A_\alpha = A$, $B_\beta = B$이다. 그러면 $\pi_\alpha(U) \supset A$와 $\pi_\alpha(V) \supset B$는 서로소인 두 근방이다. 이제 X_α가 T_0–공간이 아니라고 가정하자. 그러면 서로 다른 두 점 a와 b가 존재하여 a의 임의의 근방은 b를 포함해야 한다.

$$y_\beta = \begin{cases} a & (\beta = \alpha) \\ x_\beta & (\beta \neq \alpha) \end{cases}, \quad z_\beta = \begin{cases} b & (\beta = \alpha) \\ x_\beta & (\beta \neq \alpha) \end{cases}$$

라 하면 곱 공간 $\prod X_\alpha$에서 점 $y := (y_\beta)_\beta$의 모든 근방은 점 $z := (z_\beta)_\beta$을 포함해야 하므로 $\prod X_\alpha$는 T_0–공간이 아니다.

Note. 세 분리 성질의 증명이 서로 비슷하므로 정규성만 증명하였다. 나머지 두 성질은 직접 해보라. Do it yourself! Munkres의 정의에서는 정칙성과 정규성에 T_0 성질을 요구하므로 이를 추가로 증명해야 한다.

Exercise 32.3. 모든 국소콤팩트 하우스도르프 공간은 그 한점콤팩트화 공간의 부분공간이다. (Theorem 29.1, Theorem 31.2)

Note. Theorem 29.2와 Lemma 31.1을 통해서도 같은 결과를 얻는다.

Exercise 32.4. X가 린델뢰프 정칙공간이라 하고, A와 B를 서로소인 X의 두 닫힌집합이라 하자. 각 점 $x \in A$에 대하여 $U_x \cap B = \varnothing$인 x의 근방 U_x가 존재하며, $\overline{V_x} \subset U_x$인 x의 근방 V_x가 존재한다. 따라서 폐포가 B와 만나지 않는 열린집합으로 구성된 A의 가산 열린 덮개가 존재한다. 이후는 Theorem 32.1의 증명과 동일하다.

Exercise 32.5. 두 공간 모두 거리화가능 공간이므로 정규공간이다. (Theorem 20.5, Theorem 32.2)

Exercise 32.6. 먼저 분리된 집합(separated sets) 조건이 성립한다고 가정하자. Y를 X의 부분공간이라 하고, A와 B를 서로소인 Y의 두 닫힌집합이라 하자. 그러면 $A = \overline{A} \cap Y$, $B = \overline{B} \cap Y$이다. 여기서 $\overline{A}$와 $\overline{B}$는 각각 X에서 A와 B의 폐포이다. $\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \varnothing$이므로 A와 B는 X에서 분리된 집합이다. 그러므로 A와 B는 X의 두 열린집합으로 분리할 수 있으며, Y에서도 가능하다. 이제 역으로 X가 완전정규공간이라 가정하자. A와 B를 분리된 집합이라 하자. $Y = X \setminus (\overline{A} \cap \overline{B})$는 A와 B를 모두 포함하는 열린 부분공간이다. 이때 A와 B의 Y에서의 폐포의 교집합은 $\overline{A}_Y \cap \overline{B}_Y = (\overline{A} \cap Y) \cap (\overline{B} \cap Y) = Y \cap (\overline{A} \cap \overline{B}) = \varnothing$이므로 Y에서 두 서로소 근방 $U \supset \overline{A}_Y \supset A$, $V \supset \overline{B}_Y \supset B$가 존재한다. Y가 열린집합이므로 U와 V는 X에서도 열린집합이다.

Exercise 32.7.

(a) Yes. 부분공간의 부분공간은 부분공간이다.

(b) No. (g)에서 $\mathbb{R}_l$은 완전정규공간이지만 $\mathbb{R}_l^2$은 정규공간이 아니다.

(c) Yes. a_0를 최소원이라 하고, A와 B를 각각 a_0를 포함하지 않는 분리된 집합이라 하자. 모든 $a \in A$에 대하여 B와 만나지 않는 a의 기저 근방이 존재하며, 그 기저 근방은 구간 $(x_a, a]$를 포함한다. 같은 방식으로 모든 $b \in B$에 대하여 A와 만나지 않는 구간 $(y_b, b]$를 얻는다. 이후는 Theorem 32.4의 증명을 참고하라.

Note. 모든 순서 위상공간은 완전정규공간이다.

(d) Yes. 거리공간의 부분공간은 거리화가능 공간이다. (Exercise 21.1)

(e) No. Example 32.2를 보라.

(f) Yes. 모든 부분공간 역시 제2가산 정칙공간이다.

(g) Yes. A와 B를 $\mathbb{R}_l$의 분리된 집합이라 하자. 그러면 모든 $a \in A$에 대하여 $[a, x_a) \cap B = \varnothing$인 점 x_α가 존재하고, 모든 $b \in B$에 대하여 $[b, y_b) \cap A = \varnothing$인 점 y_b가 존재한다. 이후는 Theorem 32.4의 증명이나 Example 31.2를 참고하라.

Exercise 32.8. To be updated.

Exercise 32.9. To be updated.

Exercise 32.10. To be updated.