적분법 총정리

tonextpage
`https://github.com/tonextpage`

고등학교 수준에서 배우는 적분법을 크게 치환적분과 부분적분의 두 가지이다. 두 방법 모두 미분법에서 파생하여 이해하기 쉬우나, 문제에서 실제로 적용하기는 어렵다. 특히 적분 공식을 다양하게 이용해야 하는 문제에서는 헤맬 수 있다. 이 칼럼에서는 적분법의 사용 기준을 정립하고 미분법과 적분법에서 파생하는 잡기술을 정리할 것이다. ⟨수학II⟩에서 학습하는 부정적분/정적분의 성질을 충분히 숙지하고 있음을 가정하고 ⟨미적분⟩에서 추가로 학습하는 적분법에 초점을 맞추어 설명한다.

1 기본 적분 공식

함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면, $f(x)$의 모든 부정적분은 어떤 상수 C에 대해

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

로 표현된다. 부정적분은 미분의 역과정이므로 미분 공식을 이용하여 적분 공식을 도출할 수 있다.

정리 1.1 (x^n의 부정적분)

x^n의 부정적분은 -1을 기준으로 공식이 다르다.

$$\int x^n\,dx = \frac{x^n}{n+1} + C\ (n \neq -1) \qquad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

정리 1.2 (지수함수의 부정적분)

지수함수의 부정적분은 자기 자신의 상수배이다.

$$\int_e^x dx = e^x + C, \qquad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\ (a > 0, a \neq 1)$$

정리 1.3 (삼각함수의 부정적분)

삼각함수의 부정적분에서는 순환 형태가 등장한다.

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C \qquad \int \cos x\,dx = \sin x + C$$
$$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C \qquad \int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$$
$$\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C \qquad \int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + C$$

예제 1.4 (2019학년도 수능특강)

$\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}}\left(\sqrt{x}-\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)^2 dx$의 값은?

풀이

$$\int_1^{\sqrt{2}}\left(\sqrt{x}-\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)^2 dx=\int_1^{\sqrt{2}}\left(x-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3}\right)dx=\left[\frac{x^2}{2}-2\ln|x|-\frac{1}{2x^2}\right]_1^{\sqrt{2}}=\frac{3}{4}-\ln 2 \quad \square$$

예제 1.5 (2015년 5월 전북교육청 B형 3번)

$\displaystyle\int_0^{\ln 2}\frac{e^{2x}}{e^x+1}dx-\int_0^{\ln 2}\frac{1}{e^x+1}dx$의 값은? (단, e는 자연로그의 밑이다.) [2점]

풀이

$$\begin{aligned}\int_0^{\ln 2}\frac{e^{2x}}{e^x+1}dx-\int_0^{\ln 2}\frac{1}{e^x+1}dx&=\int_0^{\ln 2}\frac{e^{2x}-1}{e^x+1}dx=\int_0^{\ln 2}\frac{(e^x+1)(e^x-1)}{e^x+1}dx\\&=\int_0^{\ln 2}(e^x-1)\,dx=\Big[e^x-x\Big]_0^{\ln 2}=1-\ln 2 \quad \square\end{aligned}$$

예제 1.6 (2024학년도 수능특강)

$0<\theta<\frac{\pi}{4}$인 실수 θ에 대하여 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}-\theta}\frac{1}{\sin^2\cos^2 x}dx=3$일 때, $\sin^2\theta$의 값은?

풀이

먼저 주어진 정적분을 계산하면

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}-\theta}\frac{1}{\sin^2\cos^2 x}dx&=\int_0^{\frac{\pi}{2}-\theta}\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}-\theta}\left(\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sin^2 x}\right)dx\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}-\theta}(\sec^2 x+\csc^2 x)\,dx=\Big[\tan x-\cot x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}-\theta}\\&=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)-\cot\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)-\tan\theta+\cot\theta\\&=\cot\theta-\tan\theta-\tan\theta+\cot\theta\\&=\frac{2}{\tan\theta}-2\tan\theta.\end{aligned}$$

그러므로

$$\frac{2}{\tan\theta}-2\tan\theta=3 \longrightarrow 2\tan^2\theta+3\tan\theta-2=0 \longrightarrow (2\tan\theta-1)(\tan\theta+2)=0$$

에서 $0<\theta<\frac{\pi}{4}$이므로 $\tan\theta=\frac{1}{2}$이고 $\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\frac{1}{1+\tan^2\theta}=\frac{1}{5}$이다. $\square$

참고. 삼각함수가 포함된 적분은 삼각함수의 성질을 적극적으로 이용한다.

2 치환적분법 – 도함수가 곱해져 있다

함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$$\frac{dF}{dx} = f, \quad \int f(x)\,dx = F(x) + C$$

가 성립한다. 이때 미분가능하고 일대일대응인 함수 g에 대하여 $x = g(t)$이면, $F(x) = F(g(t))$이므로 합성함수의 미분법에 의하여

$$\frac{d}{dt}F(x) = \frac{d}{dt}(F \circ g)(t) = \frac{dF}{dx}(g(t)) \times \frac{dg}{dt}(t) = f(g(t))g'(t)$$

이므로 $f(g(t))g'(t)$는 t에 대한 F의 한 부정적분이다. 따라서

$$\int f(g(t))g'(t)\,dt = F(x) + C = F(g(t)) + C$$

으로부터 다음을 얻는다.

정리 2.1 (치환적분법)

$$\int f(x)\,dx = \int f(g(t))g'(t)\,dt$$

정적분을 계산할 때는 적분 범위가 함수 g에 의해 바뀐다. $a = g(\alpha)$, $b = g(\beta)$라 할 때,

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = F(g(\beta)) - F(g(\alpha)) = \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(g(t))g'(t)\,dt$$

가 성립한다. 공식의 유도 과정에서는 좌변에서 치환 $x = g(t)$을 이용하였으나, 이를 적분법으로 이용하기 위해서는 우변의 형태에서 $x = g(t)$로 치환하여 좌변의 간단한 형태를 만든다.

$$\int f(x)\,dx \xrightarrow[\text{적분법의 유도}]{x=g(t):\ t\text{의 도입}} \int f(g(t))g'(t)\,dt$$

$$\int f(x)\,dx \xleftarrow[\text{적분법의 적용}]{x=g(t):\ x\text{의 도입}} \int f(g(t))g'(t)\,dt$$

따라서 치환적분법을 적용하기 위한 적절한 타이밍은 어떤 함수 f의 속에 들어있는 함수 g의 도함수 g'이 식 전체에 곱해져 있는 것을 발견할 때이다. g가 일차함수인 경우에는 특히 도함수 g'이 상수이므로 도함수가 항상 곱해져 있다고 해석할 수 있다. 이와 더불어 정적분에서 적분 구간이 바뀌는 점을 이용하면 적절한 일차함수 g를 이용하여 적분 범위를 임의로 조작할 수 있다.

$$\int_a^b f(x)\,dx \xrightarrow{t=\frac{\beta-\alpha}{b-a}(x-a)+\alpha} \frac{b-a}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta f\left(\frac{b-a}{\beta-\alpha}(t-\alpha)+a\right)dt$$

예제 2.2 (2022학년도 수능특강)

$\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\,dx$의 값은?

풀이

$(\sin x + \cos x)' = \cos x - \sin x$이므로 $t = \sin x + \cos x$라 하면

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\, dx = \int_{\sqrt{2}}^{1} \left(-\frac{1}{t}\right) dt = \int_{1}^{\sqrt{2}} \frac{1}{t} dt = \Big[\ln|t|\Big]_{1}^{\sqrt{2}} = \ln\sqrt{2}. \quad \square$$

참고. 분모에 있는 함수의 도함수가 분자에 곱해져 있는 형태는 자주 출제된다.

예제 2.3 (2013학년도 수능 가형 12번)

연속함수 $f(x)$가

$$f(x) = e^{x^2} + \int_0^1 t f(t)\, dt$$

를 만족시킬 때, $\displaystyle\int_0^1 x f(x)\, dx$의 값은? [3점]

풀이

$\displaystyle\int_0^1 x f(x)\, dx = k$라 하자. 그러면 $f(x) = e^{x^2} + k$이므로

$$\int_0^1 x f(x)\, dx = \int_0^1 (xe^{x^2} + kx)\, dx = \left[\frac{1}{2}e^{x^2} + \frac{k}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{e+k-1}{2}$$

이므로 $k = \dfrac{e+k-1}{2}$에서 $k = e - 1$이다. $\square$

참고. 도함수가 곱해져 있다는 점을 기억하면 치환하는 과정없이 암산으로 치환적분을 계산할 수 있다. 부정적분의 암산이 가능하면 정적분에서 적분 범위를 바꾸는 행위를 생략할 수 있다.

예제 2.4 (2012학년도 4월 학력평가 가형 16번)

정적분 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x(\sin x + 1)\, dx$의 값은? [3점]

풀이

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x(\sin x + 1)\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos x \sin x(\sin x + 1)\, dx = \left[\frac{2}{3}\sin^3 x + \sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{5}{3} \quad \square$$

3 부분적분법 – 미분/적분하기 쉬운 함수

미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 곱 $f(x)g(x)$의 도함수는

$$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

이다. 이를 이용하면 함수의 곱을 적분할 수 있는 방법인 부분적분법을 얻게 된다.

정리 3.1 (부분적분법)

$$'\int f(x)g'(x)\, dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\, dx$$

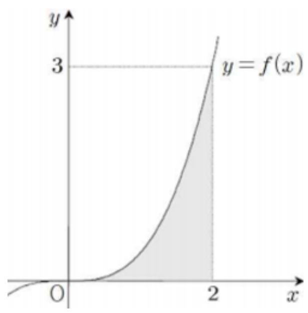
정적분을 계산하기 위해서는 적분 범위만 추가로 생각하면 된다.

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$$

좌변에서 우변으로 넘어가는 과정에서, 함수 $f(x)$는 미분을, 함수 $g'(x)$는 적분을 해야 한다. 일반적으로 부정적분의 계산이 도함수의 계산보다 어려우므로 $g'(x)$의 역할을 할 함수를 먼저 정해야 한다. 이때 곱의 각 부분에서 적분하기 쉬운 부분을 택해야 한다. 정리하면 두 함수 곱에서 (상대적으로) 미분하기 쉬운 부분과 적분하기 쉬운 부분으로 구분하여 부분적분법을 적용한다. 다항함수와 초월함수(지수/로그/삼각함수)가 서로 곱해진 함수의 적분에서는 일반적으로 [로다삼지]를 암기하여 부분적분을 할 부분을 정한다. 그러나 '미분하기 쉬운 부분, 적분하기 쉬운 부분' 만 생각하고 있으면 [로다삼지]를 암기할 필요가 없다. 특히 다항함수와 지수함수는 도함수와 부정적분이 모두 간단하게 계산되어 부분적분에서 역할이 다소 자유롭기 때문에, [로다삼지]가 무조건 통하지는 않는다.

예제 3.2 (2011년 10월 대전교육청 가형 29번)

다음 그림은 미분가능한 함수 $f(x)$의 그래프이다. $f(0)=0,\ f(2)=3$이고, $y=f(x)$와 x축 및 직선 $y=2$로 둘러싸인 부분의 넓이가 1일 때, 정적분 $\int_0^2 2xf'(x)\,dx$의 값을 구하시오. [4점]



풀이

넓이 조건에서 $\int_0^2 f(x)\,dx = 1$이다.

$$\int_0^2 2xf'(x)\,dx = \Big[2xf(x)\Big]_0^2 - \int_0^2 2f(x)\,dx = 4f(2) - \int_0^2 2f(x)\,dx = 10 \quad \square$$

참고. $f'(x)$는 적분하면 $f(x)$임을 곧바로 알 수 있는 반면, $f''(x)$는 문제의 조건에서 알 수 없으므로 $2x \times f'(x)$에서 $f'(x)$를 적분하기 쉬운 함수로 분류해야 한다.

예제 3.3 (2017학년도 사관학교 가형 18번)

함수 $f(x) = \int_1^x e^{t^3}\,dt$에 대하여 $\int_0^1 xf(x)\,dx$의 값은? [4점]

풀이

함수 $f(x)$의 정의에 의하여 $f(1)=0,\ f'(x)=e^{x^3}$이다.

$$\int_0^1 xf(x)\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2 f(x)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2}x^2 f'(x)\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 x^2 e^{x^3}\,dx = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}e^{x^3}\right]_0^1 = \frac{1-e}{6} \quad \square$$

참고. 함수 $f(x)$는 정적분으로 정의되어 있으므로 적분보다 미분이 편하다. 따라서 $f(x)$를 미분하기 쉬운 함수로 분류해야 한다.

4 부분적분법의 연속 적용 – Tabular Integration

부분적분법의 공식을 다시 보자.

$$\int \underbrace{f(x)}_{\text{미분하기 쉬운 함수}} \underbrace{g'(x)}_{\text{적분하기 쉬운 함수}} dx = \underbrace{f(x)}_{\text{그대로}} \underbrace{g(x)}_{\text{적분}} - \int \underbrace{f'(x)}_{\text{미분}} \underbrace{g(x)}_{\text{적분}} dx$$

여기서 우변의 $\displaystyle\int f'(x)g(x)\,dx$ 역시 두 함수의 곱으로 이루어져 있으므로 부분적분법의 적용을 고려할 수 있다. 이와 같이 부분적분법을 두 번 이상 적용해야 할 때 위의 공식에만 의존하기에는 식이 길어지므로 부분적분법의 과정을 도표로 만들어 연속적인 적용까지 고려한다. 이를 Tabular Integration이라 한다. 먼저 위의 공식을 참고하여 다음과 같이 표를 그려넣는다. D는 Differentiation(미분)을 의미하고, I는 Integration(적분)을 의미한다.

$$\begin{array}{cc} D & I \\ f(x) & g'(x) \end{array}$$

바로 아래에 f의 도함수 f'과 g'의 한 부정적분 g를 적고 다음과 같이 화살표를 그려넣고 부호를 번갈아 적는다.

$$\begin{tikzcd}
D & I \\
f(x) \arrow[dr, "+"] & g(x) \\
f'(x) \arrow[r, "-"] & g(x)
\end{tikzcd}$$

대각선 아래 방향 화살표는 부호와 함께 곱한다. 가로 화살표는 부호와 함께 곱하고 적분한다.

$$\begin{tikzcd}
D & I & \\
f(x) \arrow[dr, "+"] & g(x) & \\
f'(x) \arrow[r, "-"] & g(x) \arrow[r] \arrow[dr] & -\displaystyle\int f'(x)g(x)\,dx \\
 & & f(x)g(x)
\end{tikzcd}$$

이제 곱한 것들을 모두 더하면 부분적분법을 시행한 것이 된다.

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$$

Tabular Integration의 장점은 이 도표를 계속 연장하여 연속 적용할 수 있다는 점이다. 위의 도표에서 함수 $g(x)$의 한 부정적분을 $G(x)$라 하자. 이제 $\displaystyle\int f'(x)g(x)\,dx$에도 부분적분을 적용하고 싶다면 위의 도표를 그대로 연장하면 된다. 이때 화살표의 방향과 부호가 번갈아 나옴에 주의한다.

$$
\begin{tikzcd}[row sep=small]
D & I \\
f(x) \arrow[dr, "+"] & g'(x) \\
f'(x) \arrow[dr, "-"] & g(x) \\
f''(x) \arrow[r, "+"] & G(x)
\end{tikzcd}
$$

같은 방법으로 화살표와 부호에 따라 적절히 곱하면 다음을 얻는다.

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - f'(x)G(x) + \int f''(x)G(x)\,dx$$

이제 다양한 예제를 보면서 도표적분법을 적용해보자.

예제 4.1 (다항함수가 D에 있는 경우 [1])

$\displaystyle\int x\cos x\,dx$를 구하시오.

풀이

다항함수와 삼각함수의 곱으로 이루어져 있다. 이때 다항함수는 미분하면 차수가 낮아지고 결국 0이 되는 반면, 삼각함수는 미분/적분에 관계없이 항상 삼각함수의 형태로 남는다. 따라서 D에 x, I에 $\cos x$를 배치하여 Tabular Integration을 시행하자.

$$
\begin{tikzcd}[row sep=small]
D & I \\
x \arrow[dr, "+"] & \cos x \\
1 \arrow[dr, "-"] & \sin x \\
0 & -\cos x
\end{tikzcd}
$$

미분하는 쪽에서 결국 0이 나왔으므로 가로 화살표 $\xrightarrow{+}$는 생략 가능하다. 화살표를 따라 곱해도 0으로 무의미하기 때문이다. 이처럼 D에 다항함수가 배치되는 경우에는 마지막의 가로 화살표를 생략할 수 있다. 이제 도표의 화살표에 따라 곱하면 구하는 부정적분은

$$\int x\cos x\,dx = x\sin x + \cos x + C. \quad \square$$

예제 4.2 (다항함수가 D에 있는 경우 [2])

$\int x^2 e^{2x}\, dx$를 구하시오.

풀이

$$\begin{array}{ccc} D & & I \\ x^2 & & e^{2x} \\ & \searrow^{+} & \\ 2x & & \frac{1}{2}e^{2x} \\ & \searrow^{-} & \\ 2 & & \frac{1}{4}e^{2x} \\ & \searrow^{+} & \\ 0 & & \frac{1}{8}e^{2x} \end{array}$$

$$\int x^2 e^{2x}\, dx = \frac{1}{2}x^2 e^{2x} - \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{4}e^{2x} + C \quad \square$$

예제 4.3 (로그함수가 D에 있는 경우 [1])

$\int \ln x\, dx$를 구하시오.

풀이

로그함수의 부정적분을 구하기 위해 $1 \times \ln x$의 형태로 보고 D에 $\ln x$, I에 1을 두어 계산한다. D에 다항함수가 배치되는 것이 아니므로 미분을 계속해도 0이 나오지 않는다. 따라서 도표도 다음에 그친다.

$$\begin{array}{ccc} D & & I \\ \ln x & & 1 \\ & \searrow^{+} & \\ \frac{1}{x} & \xrightarrow{-} & x \end{array}$$

이제 부분적분법에 따라 $1/x$와 x의 곱인 1을 적분해야 한다. 이를 식으로 쓰지 않고 다음과 같이 오른쪽에 곱만 미리 표시해두자. (가로 화살표는 잠시 생략한다.)

$$\begin{array}{ccccc} D & & I & & \\ \ln x & & 1 & & \\ & \searrow^{+} & & & \\ \frac{1}{x} & \xrightarrow{-} & x & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

이제 1을 적분하기 위해 위의 도표를 연장해서 이용하자. D에 1, I에 1을 배치하자. 화살표와 부호 교대는 그대로 유지한다.

$$\begin{array}{ccc} D & & I \\ \ln x & & 1 \\ & \searrow^{+} & \\ \frac{1}{x} & & x \longrightarrow 1 \\ \hline 1 & & 1 \\ & \searrow^{-} & \\ 0 & & x \end{array}$$

따라서 구하는 부정적분은

$$\int \ln x\, dx = x \ln x - x + C. \quad \square$$

참고. $\ln x$의 부정적분은 암기하면 편하다.

예제 4.4 (로그함수가 D에 있는 경우 [2])

$\int x \ln x\, dx$를 구하시오.

풀이

$$\begin{array}{ccc} D & & I \\ \ln x & & x \\ & \searrow^{+} & \\ \frac{1}{x} & & \frac{1}{2}x^2 \longrightarrow \frac{1}{2}x \\ \hline \frac{1}{2} & & x \\ & \searrow^{-} & \\ 0 & & \frac{1}{2}x^2 \end{array}$$

$$\int x \ln x\, dx = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C \quad \square$$

예제 4.5 (로그함수가 D에 있는 경우 [3])

$\int x(\ln x)^2\,dx$를 구하시오.

풀이

D	부호	I	
$(\ln x)^2$		x	
	$+$		
$\dfrac{2\ln x}{x}$		$\dfrac{1}{2}x^2$	$\longrightarrow x\ln x$
$\ln x$		x	
	$-$		
$\dfrac{1}{x}$		$\dfrac{1}{2}x^2$	$\longrightarrow \dfrac{1}{2}x$
$\dfrac{1}{x}$		x	
	$+$		
0		$\dfrac{1}{2}x^2$	

$$\int x(\ln x)^2\,dx = \frac{1}{2}x^2(\ln x)^2 - \frac{1}{2}x^2\ln x + \frac{1}{4}x^2 + C \quad \square$$

예제 4.6 (삼각함수가 D에 있는 경우)

$\int e^x \sin x\,dx$를 구하시오.

풀이

D	부호	I
$\sin x$		e^x
	$+$	
$\cos x$		e^x
	$-$	
$-\sin x$	$\xrightarrow{+}$	e^x

도표의 마지막 행을 보면 $e^x \sin x$가 다시 등장하므로 도표 채우기를 멈추고 식을 쓴다.

$$\int e^x \sin x\,dx = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x\,dx$$

양변을 정리하고 적분상수를 붙이면 부정적분을 얻는다.

$$\int e^x \sin x\,dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C \quad \square$$

5 기본 넓이

이 단락부터는 알아두면 문제 해결의 속도를 높일 수 있는 잡기술을 소개한다.

정리 5.1 (기본 넓이)

$$\int_0^1 e^x\,dx = e-1 \tag{1}$$

$$\int_1^e \ln x\,dx = 1 \tag{2}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = 1 \tag{3}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2b}} a\sin bx\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2b}} a\cos bx\,dx = \frac{a}{b} \quad (a>0,\ b>0) \tag{4}$$

$$\int_0^1 x^n\,dx = \frac{1}{n+1} \quad (n \neq -1) \tag{5}$$

(1)–(3)는 실수 1과 관련이 있으며, (4)는 (3)을 일반화한 삼각함수에서의 한 칸($1/4$주기)의 넓이이다. 그래프를 그려보면서 숙지한자.

예제 5.2 (2014학년도 사관학교 B형 21번)

함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $0 \le x < 1$일 때, $f(x) = e^x - 1$이다.
>
> (나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x+1) = -f(x) + e - 1$이다.

$\int_0^3 f(x)\,dx$의 값은? [4점]

풀이

(나)를 이용하여 적분 범위를 조정하자.

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 (e^x - 1)\,dx = e-2$$

$$\int_1^2 f(x)\,dx = \int_0^1 f(x+1)\,dx = -\int_0^1 f(x)\,dx + e - 1 = 1$$

$$\int_2^3 f(x)\,dx = \int_1^2 f(x+1)\,dx = -\int_1^2 f(x)\,dx + e - 1 = e$$

$$\int_0^3 f(x)\,dx = (e-2) + 1 + e = 2e - 1 \quad \square$$

참고. x축과 평행한 방향으로의 평행이동은 적분 범위를 평행이동 시킨다.

6 유리함수의 적분 – Heaviside Cover-up Method

유리함수를 적분할 때에는 기본적으로 차수를 낮추는 것에 집중한다. 이때 다음의 루틴을 적용한다.

1. 간단한 부분분수 분해 공식을 적용할 수 있는 경우: 부분분수 분해를 적용한다.

$$\frac{1}{AB} = \frac{1}{B-A}\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right)$$

2. 분자의 차수가 분모의 차수보다 큰 경우: 다항식의 나눗셈을 이용한다. 특히 분모가 일차식인 경우 조립제법, 나머지정리를 이용할 수 있다.

$$f(x) = g(x)Q(x) + R(x) \longrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{g(x)}$$

3. 분자의 차수가 분모의 차수보다 작은 경우:
   (a) 치환적분법을 적용할 수 있는지를 판단한다.
   (b) 분모가 일차식의 곱으로 인수분해되는 경우에는 'Heaviside Cover-up Method' 을 이용한다.
   (c) 이외에는 적절히 부분분수를 설정하고 부분분수의 계수를 미지수로 하여 계수비교법 또는 수치대입법을 통해 부분분수 분해를 시행한다.

(iii)의 (b)에서 Heaviside Cover-up Method는 (i)의 부분분수 분해 공식을 일반화한 것이다.

정리 6.1 (Heaviside Cover-up Method)

다음 형태의 부분분수 분해를 생각하자.

$$\frac{p(x)}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)} = \sum_{i=1}^{n}\frac{c_i}{x-\alpha_i}$$

이때 계수 c_i는 다음과 같다.

$$c_i = \frac{p(\alpha_i)}{\prod\limits_{j\neq i}(\alpha_i-\alpha_j)} = \frac{p(\alpha_i)}{(\alpha_i-\alpha_1)\cdots(\alpha_i-\alpha_{i-1})(\alpha_i-\alpha_{i+1})\cdots(\alpha_i-\alpha_n)}$$

위의 식에 따르면 부분분수 분해에서 계수 c_i는 원래 유리식의 분모에서 $(x-\alpha_i)$만 '지우고' 남은 부분에 α_i를 대입한 값이 된다.

$$\frac{p(x)}{(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_{i-1})\cancel{(x-\alpha_i)}(x-\alpha_{i+1})\cdots(x-\alpha_n)}$$
$$\longrightarrow c_i = \frac{p(\alpha_i)}{(\alpha_i-\alpha_1)\cdots(\alpha_i-\alpha_{i-1})(\alpha_i-\alpha_{i+1})\cdots(\alpha_i-\alpha_n)}$$

특히 $f(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)$이라 하면

$$f'(\alpha_i) = (\alpha_i-\alpha_1)\cdots(\alpha_i-\alpha_{i-1})(\alpha_i-\alpha_{i+1})\cdots(\alpha_i-\alpha_n)$$

이므로 위의 식은 다음과 같이 축약할 수 있다.

$$c_i = \frac{p(\alpha_i)}{f'(\alpha_i)} \longrightarrow \frac{p(x)}{f(x)} = \sum_{i=1}^{n}\frac{p(\alpha_i)}{f'(\alpha_i)(x-\alpha_i)}$$

예제 6.2 (2024학년도 수능특강)

공차가 2인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 함수 $f(x)$를 $f(x) = (x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)$이라 하자. 함수 $g(x)$가

$$g(x) = \sum_{k=1}^{3} \frac{f(x)}{f'(a_k) \times (x - a_k)}$$

일 때, $g(a_4)$의 값은?

풀이

정리 6.1에서 $p(x) = 1$인 경우에 해당하므로 $g(x) = f(x) \times \dfrac{1}{f(x)} = 1$이다. □

예제 6.3 (2019학년도 수능특강)

$\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{1+\ln x}{x(\ln x)(2+\ln x)}\,dx$의 값은?

풀이

$\ln x = t$라 하면 $dx = \dfrac{1}{x}\,dt$이므로

$$\begin{aligned}\int_e^{e^2} \frac{1+\ln x}{x(\ln x)(2+\ln x)}\,dx &= \int_1^2 \frac{1+t}{t(2+t)}\,dt = \int_1^2 \left(\frac{1/2}{t} + \frac{1/2}{(t+2)}\right)dt \\ &= \left[\frac{1}{2}\ln|t| + \frac{1}{2}\ln|t+2|\right]_1^2 = \frac{1}{2}\ln\frac{8}{3}.\end{aligned}$$

여기서 $\dfrac{1}{t}$의 계수 $\dfrac{1}{2}$은 $\alpha_1 = 0$에서 $\dfrac{1+0}{2+0}$으로 구하고, $\dfrac{1}{t+2}$의 계수 $\dfrac{1}{2}$은 $\alpha_2 = -2$에서 $\dfrac{1+(-2)}{-2}$로 구한다. □

참고. $t(2+t) = u$라 하면 $du = (2t+2)\,dt$이므로 u로 다시 치환하는 방법도 가능하나, 이것이 쉽게 보이지 않는 경우에는 Heaviside Cover-up Method 같은 방법이 도움이 될 수 있다.

7 곱/몫의 미분법 형태의 처리

함수의 곱의 미분법, 몫의 미분법은 각각 다음과 같다.

$$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$
$$\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

문제에서 각 식의 우변의 형태 그대로 조건이 등장하는 경우가 많다. 특히 $f'(x)g(x) - f(x)g'(x)$의 형태가 보일 경우, $\{g(x)\}^2$으로 적절히 나누어 몫의 미분법의 형태를 이끌어내면 편하다.

예제 7.1 (2014년 7월 학력평가 B형 9번)

$x > 0$에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$
>
> (나) $f(x) + xf'(x) = x\cos x$

$f(\pi)$의 값은? [3점]

풀이

$f(x) + xf'(x) = \{xf(x)\}'$이므로 $\{xf(x)\}' = x\cos x$에서

$$\begin{array}{ccc} D & & I \\ x & & \cos x \\ & \searrow^{+} & \\ 1 & & \sin x \\ & \searrow^{-} & \\ 0 & & -\cos x \end{array} \qquad xf(x) = x\sin x + \cos x + C$$

이고 $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$에서 $C = 0$이다. 따라서 $f(\pi) = -\dfrac{1}{\pi}$이다. □

예제 7.2 (2019년 7월 학력평가 가형 26번)

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(1) = 0$
>
> (나) 0이 아닌 모든 실수 x에 대하여 $\dfrac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = xe^x$이다.

$f(3) \times f(-3)$의 값을 구하시오.

풀이

$\dfrac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = \left\{\dfrac{f(x)}{x}\right\}'$이므로 $\left\{\dfrac{f(x)}{x}\right\}' = xe^x$에서

$$\begin{array}{ccc} D & & I \\ x & & e^x \\ & \searrow^{+} & \\ 1 & & e^x \\ & \searrow^{-} & \\ 0 & & e^x \end{array} \qquad \frac{f(x)}{x} = (x-1)e^x + C$$

이고 $f(1) = 0$에서 $C = 0$이다. 따라서 $f(3) \times f(-3) = 6e^3 \times 12e^{-3} = 72$이다. □

$f'(x)+f(x)$, $f'(x)-f(x)$ 형태의 식이 등장하는 경우,

$$\{e^x f(x)\}' = e^x\{f'(x)+f(x)\}$$
$$\{e^{-x} f(x)\}' = e^{-x}\{f'(x)-f(x)\}$$

를 이용하기 위해 e^x 또는 e^{-x}를 적절히 곱한다.

예제 7.3 (2023학년도 수능특강)

$f(-1)=0$인 일차함수 $f(x)$에 대하여

$$\int_0^1 e^x\{f(x)+f'(x)\}\,dx = 4e-2$$

일 때, $f(2)$의 값은?

풀이

$f(-1)=0$이므로 상수 $m\neq 0$에 대하여 $f(x)=m(x+1)$라 하면

$$\int_0^1 e^x\{f(x)+f'(x)\}\,dx = \Big[e^x f(x)\Big]_0^1 = ef(1)-f(0)$$

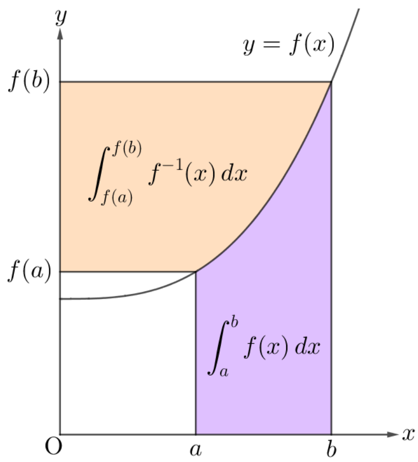
에서 $(2e-1)m=4e-2$이므로 $m=2$이다. 따라서 $f(2)=6$이다. □

8 역함수의 정적분

일대일대응이면서 연속인 함수 $f(x)$는 그 역함수 $f^{-1}(x)$ 역시 연속이므로 $f^{-1}(x)$의 정적분을 생각할 수 있다. 여기서 추가로 $f(x)$가 미분가능하다고 가정하고 정적분 $\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(x)\,dx$를 고려하자. $f^{-1}(x)=t$로 치환하면 $x=f(t)$, $\dfrac{dx}{dt}=f'(t)$이므로

$$\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(x)\,dxt = \int_a^b tf'(t)\,dt = \Big[tf(t)\Big]_a^b - \int_a^b f(t)\,dt = bf(b)-af(a)-\int_a^b f(t)\,dt$$

가 성립한다. 특히 마지막 등호의 식 $bf(b)-af(a)-\int_a^b f(t)\,dt$는 다음 그래프로 시각화할 수 있다.



역함수의 정적분을 그래프를 이용하여 빠르게 구할 수 있는 경우에는 $bf(b)-af(a)-\int_a^b f(t)\,dt$를, 식으로 계산해야 할 경우에는 $\int_a^b tf'(t)\,dt$를 이용한다. 이 등식은 항상 성립하므로 문제에서 역함수와 $xf'(x)$, 또는 역함수와 그래프가 동시에 등장하는 경우 등 상황에 맞게 적용하면 된다. 물론 직선 $y=x$에 대한 대칭성 등 미분/적분과 관계없이 성립하는 성질들은 기본적으로 숙지해야 한다.

예제 8.1 (2012년 7월 학력평가 나형 21번)

함수 $f(x)=x^3+x-1$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $\int_1^9 g(x)\,dx$의 값은? [4점]

풀이

$f(1)=1,\ f(2)=9$이므로

$$\int_1^9 g(x)\,dx=\int_1^2 xf'(x)\,dx=\int_1^2(3x^3+x)\,dx=\left[\frac{3}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2\right]_1^2=\frac{51}{4}.\quad\square$$

9 대칭성의 활용 – King Property

정적분의 계산에서 대칭성을 활용하여 계산을 줄일 수 있다. 일반적으로 적분의 범위가 0을 중심으로 대칭이면 y축 대칭과 원점 대칭을 이용한다. 여기서는 대칭성의 아이디어를 일반화한 King Property를 다룬다.

정리 9.1 (King Property [1])

구간 $[a,\,b]$에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 다음이 성립한다.

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b f(a+b-x)\,dx$$

증명. $x=a+b-t$라 하면 $\dfrac{dx}{dt}=-1$이므로

$$\int_a^b f(x)\,dx=-\int_b^a f(a+b-t)\,dt=\int_a^b f(a+b-t)\,dt.\qquad\square$$

참고. 두 함수 $f(x)$와 $f(a+b-x)$는 직선 $x=\dfrac{a+b}{2}$에 대하여 대칭이다.

정리 9.2 (King Property [2])

구간 $[a,\,b]$에서 연속이고 $f(a+b-x)+f(x)\neq 0$인 함수 $f(x)$에 대하여 다음이 성립한다.

$$\int_a^b \frac{f(x)}{f(a+b-x)+f(x)}\,dx=\frac{b-a}{2}$$

증명. 정리 9.1에 의해 다음이 성립힌다.

$$\int_a^b \frac{f(x)}{f(a+b-x)+f(x)}\,dx=\int_a^b \frac{f(a+b-x)}{f(x)+f(a+b-x)}\,dx$$

따라서

$$\int_a^b \frac{f(x)}{f(a+b-x)+f(x)}\,dx = \frac{1}{2}\left(\int_a^b \frac{f(x)}{f(a+b-x)+f(x)}\,dx + \int_a^b \frac{f(a+b-x)}{f(a+b-x)+f(x)}\,dx\right)$$
$$= \frac{1}{2}\int_a^b \frac{f(x)+f(a+b-x)}{f(x)+f(a+b-x)}\,dx = \frac{1}{2}\int_a^b dx = \frac{b-a}{2}. \qquad \square$$

예제 9.3 (2016년 3월 학력평가 가형 28번)

함수 $f(x) = \dfrac{e^{\cos x}}{1+e^{\cos x}}$ 에 대하여

$$a = f(\pi - x) + f(x), \quad b = \int_0^\pi f(x)\,dx$$

일 때, $a + \dfrac{100}{\pi}b$의 값을 구하시오.

풀이

정리 9.2의 아이디어를 차용하면

$$a = f(\pi-x)+f(x) = \frac{e^{-\cos x}}{1+e^{-\cos x}} + \frac{e^{\cos x}}{1+e^{\cos x}} = \frac{1}{e^{\cos x}+1} + \frac{e^{\cos x}}{1+e^{\cos x}} = 1$$
$$b = \int_0^\pi f(x)\,dx = \frac{1}{2}\left(\int_0^\pi f(x)\,dx + \int_0^\pi f(\pi-x)\,dx\right) = \frac{1}{2}\int_0^\pi 1\,dx = \frac{\pi}{2}$$

따라서 $a + \dfrac{100}{\pi}b = 51$ 이다. $\square$

연습문제

연습문제 1 (2019학년도 6월 모의평가 가형 11번)

$\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}} x^3\sqrt{x^2-1}\,dx$의 값은? [3점]

풀이 1

$x^2-1=t$라 하면 $\dfrac{dt}{dx}=2x$이므로

$$\int_1^{\sqrt{2}} x^3\sqrt{x^2-1}\,dx=\int_0^1 \frac{1}{2}(t+1)\sqrt{t}\,dt=\int_0^1 \frac{1}{2}(t\sqrt{t}+\sqrt{t})\,dt=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{\frac{3}{2}+1}+\frac{1}{\frac{1}{2}+1}\right)=\frac{8}{15}.\quad\square$$

풀이 2

$\sqrt{x^2-1}=t$라 하면 $\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$이므로

$$\int_1^{\sqrt{2}} x^3\sqrt{x^2-1}\,dx=\int_0^1 (t^2+1)t^2\,dt=\int_0^1 (t^4+t^2)\,dt=\frac{1}{5}+\frac{1}{3}=\frac{8}{15}.\quad\square$$

연습문제 2 (2022학년도 수능완성)

열린구간 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$에서 정의된 함수 $f(x)$에 대하여 $f(0)=0$이고

$$f'(x)=\frac{\cos x-\sin x}{\cos^3 x}$$

이다. $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$의 값은? [3점]

풀이

$$f(x)=\int \frac{\cos x-\sin x}{\cos^3 x}\,dx=\int(\sec^2 x-\sec^2 x\tan x)\,dx=\tan x-\frac{1}{2}\tan^2 x+C$$

이고 $f(0)=0$에서 $C=0$이다. 따라서 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$이다. □

연습문제 3 (2022학년도 수능특강)

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos^4 x}\,dx = k$일 때, k^2의 값을 구하시오.

풀이

$$k = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos^4 x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^4 x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} + \frac{1}{\cos^2 x}\right)dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sec^2 x \tan^2 x + \sec^2 x)\,dx = \left[\frac{1}{3}\tan^3 x + \tan x\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = 2\sqrt{3}$$

이므로 $k^2 = 12$이다. □

연습문제 4 (2009학년도 9월 모의평가 가형 28번)

좌표평면에서 곡선 $y = \dfrac{xe^{x^2}}{e^{x^2}+1}$ 과 직선 $y = \dfrac{2}{3}x$로 둘러싸인 두 부분의 넓이의 합은? [3점]

풀이

$\dfrac{xe^{x^2}}{e^{x^2}+1} = \dfrac{2}{3}x$에서 $x\left(\dfrac{e^{x^2}}{e^{x^2}+1} - \dfrac{2}{3}\right) = 0$이므로 $x = 0, \pm\sqrt{\ln 2}$이다. 두 도형은 서로 원점에 대하여 대칭이므로 구하는 넓이의 합은

$$2\left|\int_0^{\sqrt{\ln 2}} \left(\frac{xe^{x^2}}{e^{x^2}+1} - \frac{2}{3}x\right) dx\right| = \left|\left[\ln(e^{x^2}+1) - \frac{2}{3}x^2\right]_0^{\sqrt{\ln 2}}\right| = \frac{5}{3}\ln 2 - \ln 3. \quad \square$$

연습문제 5 (2022학년도 수능완성)

좌표평면 위의 점 P의 시각 $t\ (t>0)$에서의 위치 $(x,\ y)$가

$$x = t(1-\ln t)^2 + t + \frac{1}{t}, \quad y = (\ln t)^2$$

일 때, 시각 $t=1$에서 $t=e$까지 점 P가 움직인 거리는? [4점]

풀이

각 식을 t에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dt} = (1-\ln t)^2 - 2(1-\ln t) + 1 - \frac{1}{t^2} = (\ln t)^2 - \frac{1}{t^2}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{2\ln t}{t}$$

이므로

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{(\ln t)^4 + \frac{1}{t^4} + \frac{2(\ln t)^2}{t^2}} = \sqrt{\left\{(\ln t)^2 + \frac{1}{t^2}\right\}^2} = (\ln t)^2 + \frac{1}{t^2}$$

이고,

$$\begin{array}{ccccc}
D & & I & & \\
(\ln t)^2 & & 1 & & \\
 & \searrow^{+} & & & \\
\dfrac{2\ln t}{t} & & t & \longrightarrow & 2\ln t \\
\hline
\ln t & & 2 & & \\
 & \searrow^{-} & & & \\
\dfrac{1}{t} & & 2t & \longrightarrow & 2 \\
\hline
2 & & 1 & & \\
 & \searrow^{+} & & & \\
0 & & t & &
\end{array}$$

$$\int_1^e (\ln t)^2\,dt = \Big[t(\ln t)^2 - 2t\ln t + 2t\Big]_1^e = e-2$$

$$\int_1^e \frac{1}{t^2}\,dt = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^e = 1 - \frac{1}{e}$$

이므로 움직인 거리는 $(e-2) + \left(1 - \dfrac{1}{e}\right) = e - \dfrac{1}{e} - 1$이다. □

연습문제 6 (2019학년도 수능특강)

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\lim_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 3$
>
> (나) $f'(x) = (x+1)\sqrt{x^2+2x+a}$ (단, a는 상수이다.)

$a + f(\sqrt{a})$의 값은?

풀이

(가)에서 $f(0) = 0$, $f'(0) = 3$이다. (나)에서 $f'(0) = \sqrt{a}$이므로 $a = 9$이다.

$$f(x) = \int (x+1)\sqrt{x^2+2x+9}\,dx = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}(x^2+2x+9)^{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3}(x^2+2x+9)^{\frac{3}{2}} + C$$

에서 $f(0) = 9 + C$이므로 $C = -9$이다. 따라서 $a + f(\sqrt{a}) = 9 + (16\sqrt{6} - 9) = 16\sqrt{6}$이다. □

연습문제 7 (2015년 4월 학력평가 B형 17번)

자연수 n에 대하여 함수 $f(n) = \int_1^n x^3 e^{x^2} dx$라 할 때, $\frac{f(5)}{f(3)}$의 값은? [4점]

풀이

$$\begin{array}{ccl}
D & I & \\
x^2 & xe^{x^2} & \\
 & \searrow^{+} & \\
2x & \frac{1}{2}e^{x^2} & \longrightarrow xe^{x^2} \\
\hline
1 & xe^{x^2} & \\
 & \searrow^{-} & \\
0 & \frac{1}{2}e^{x^2} &
\end{array}$$

$$f(n) = \int_1^n x^3 e^{x^2}\, dx = \left[\frac{1}{2}x^2 e^{x^2} - \frac{1}{2}e^{x^2}\right]_1^n = \frac{1}{2}(n^2 - 1)e^{n^2}$$

$$\frac{f(5)}{f(3)} = \frac{24e^{25}}{8e^9} = 3e^{16} \quad \square$$

연습문제 8 (2023학년도 수능특강)

수열 $\{a_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여

$$\frac{a_n}{n+1} = \int_0^p (\tan^n x + \tan^{n+2} x)\, dx$$

를 만족시킨다. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{12}$일 때, $\tan p$의 값은? (단, p는 $0 < p < \frac{\pi}{4}$인 상수이다.)

풀이

a_n을 먼저 정리하자.

$$\begin{aligned} a_n &= (n+1)\int_0^p (\tan^n x + \tan^{n+2} x)\, dx = (n+1)\int_0^p (1+\tan^2 x)\tan^n x\, dx \\ &= (n+1)\int_0^p \sec^2 x \tan^n x\, dx = (n+1)\left[\frac{\tan^{n+1} x}{n+1}\right]_0^p = \tan^{n+1} p \end{aligned}$$

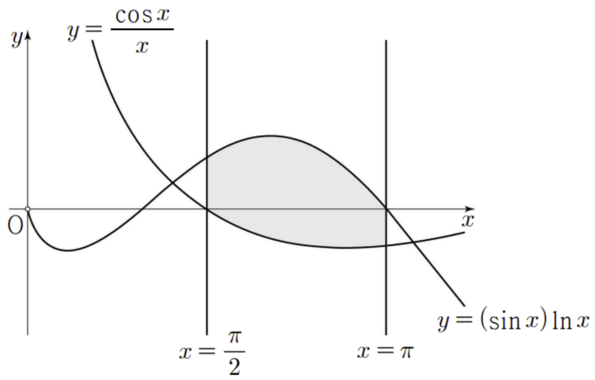
$0 < p < \frac{\pi}{4}$이므로 $0 < \tan p < 1$이고 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 수렴한다.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{\tan^2 p}{1-\tan p} = \frac{1}{12}$$

이므로 $12\tan^2 p + \tan p - 1 = 0$에서 $(3\tan p + 1)(4\tan p - 1) = 0$, $\tan p = \frac{1}{4}$이다. □

연습문제 9 (2019년 4월 학력평가 가형 16번)

두 곡선 $y=(\sin x)\ln x$, $y=\dfrac{\cos x}{x}$와 두 직선 $x=\dfrac{\pi}{2}$, $x=\pi$로 둘러싸인 부분의 넓이는? [4점]



풀이

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left\{(\sin x)\ln x-\frac{\cos x}{x}\right\}dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\{(-\cos x)'\ln x+(-\cos x)(\ln x)'\}\,dx$$

$$=\Big[(-\cos x)\ln x\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\ln\pi \quad \square$$

연습문제 10 (2020학년도 수능특강)

양의 실수 전체의 집합에서 정의된 연속함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 양의 실수 x에 대하여 $f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$이다.
>
> (나) $\int_{\frac{1}{2}}^{2} f(x)\,dx = 15 + 16\ln 2$

$\int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{f(x)}{x^2}\,dx$의 값은?

풀이

함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면 (나)에서 $F(2) - F\left(\frac{1}{2}\right) = 15 + 16\ln 2$이다.

$$\int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{f(x)}{x^2}\,dx = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{1}{x^2} f\left(\frac{1}{x}\right) dx = \left[-F\left(\frac{1}{x}\right)\right]_{\frac{1}{2}}^{2} = F(2) - F\left(\frac{1}{2}\right) = 15 + 16\ln 2 \quad \square$$

연습문제 11 (2004학년도 사관학교 가형 9번)

$f(x)$의 부정적분 $F(x)$와 $g(x)$의 부정적분 $G(x)$가 다음 관계식을 만족한다.

$$f(x) = \frac{G(x)+g(x)}{2}, \quad g(x) = \frac{F(x)+f(x)}{2}$$

$f(0)=0$, $g(0)=2$일 때, $f(1)+g(1)$의 값은? [3점]

풀이

$$\begin{aligned}
& f(x)+g(x) = \frac{F(x)+G(x)+f(x)+g(x)}{2} \\
& \longrightarrow f(x)+g(x) = F(x)+G(x) \\
& \longrightarrow \{F(x)+G(x)\}' - \{F(x)+G(x)\} = 0 \\
& \longrightarrow e^{-x}[\{F(x)+G(x)\}' - \{F(x)+G(x)\}] = 0 \\
& \longrightarrow [e^{-x}\{F(x)+G(x)\}]' = 0 \\
& \longrightarrow F(x)+G(x) = Ce^{x} \\
& \longrightarrow f(x)+g(x) = Ce^{x}
\end{aligned}$$

$f(0)+g(0)=2$이므로 $C=2$이다. 따라서 $f(1)+g(1)=2e$이다. □

연습문제 12 (2010학년도 9월 모의평가 가형 28번)

함수 $f(x)=\int_0^x \frac{1}{1+x^6}\,dt$에 대하여 상수 a가 $f(a)=\frac{1}{2}$을 만족시킬 때,

$$\int_0^a \frac{e^{f(x)}}{1+x^6}\,dx$$

의 값은? [3점]

풀이

주어진 조건으로부터 $f'(x)=\frac{1}{1+x^6}$, $f(0)=0$이다.

$$\int_0^a \frac{e^{f(x)}}{1+x^6}\,dx=\int_0^a f'(x)e^{f(x)}\,dx=\Big[e^{f(x)}\Big]_0^a=e^{f(a)}-e^{f(0)}=\sqrt{e}-1 \quad \square$$

연습문제 13 (2022학년도 수능특강)

정의역이 $\{x \mid x > 0\}$인 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 양의 실수 x에 대하여

$$xf'(x) + f(x) = 4x^3 \ln x$$

를 만족시킨다. $f(1) = -\frac{1}{4}$일 때, $f(e)$의 값은?

풀이

$$\begin{array}{cc}
D & I \\
\ln x & 4x^3 \\
 & + \\
\frac{1}{x} & x^4 \longrightarrow x^3 \\
\hline
1 & x^3 \\
 & - \\
0 & \frac{1}{4}x^4
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
&xf'(x) + f(x) = 4x^3 \ln x \\
\longrightarrow\ & \{xf(x)\}' = 4x^3 \ln x \\
\longrightarrow\ & xf(x) = x^4 \ln x - \frac{1}{4}x^4 + C
\end{aligned}$$

$f(1) = -\frac{1}{4}$에서 $C = 0$이다. 따라서 $f(e) = e^3 - \frac{1}{4}e^3 = \frac{3}{4}e^3$이다. □

연습문제 14 (2014학년도 6월 모의평가 B형 27번)

함수 $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$에 대하여

$$F(x)=\int_0^x tf(x-t)\,dt \quad (x\geq 0)$$

일 때, $F'(a)=\ln 10$을 만족시키는 상수 a의 값을 구하시오. [4점]

풀이 1

$x-t=u$라 하면 $\dfrac{du}{dt}=-1$이므로

$$F(x)=\int_0^x tf(x-t)\,dt=-\int_x^0 (x-u)f(u)\,du=\int_0^x (x-u)f(u)\,du=x\int_0^x f(u)\,du-\int_0^x uf(u)\,du$$

$$F'(x)=\int_0^x f(u)\,du+xf(x)-xf(x)=\int_0^x f(u)\,du=\int_0^x \frac{1}{1+u}\,du=\Big[\ln(1+u)\Big]_0^x=\ln(1+x)$$

따라서 $F'(a)=\ln(1+a)=\ln 10$으로부터 $a=9$이다. □

풀이 2

$$F(x)=\int_0^x tf(x-t)\,dt=\int_0^x \frac{t}{1+x-t}\,dt=\int_0^x\left(\frac{1+x}{1+x-t}-1\right)dt$$

$$=\Big[-(1+x)\ln(1+x-t)-t\Big]_{t=0}^{t=x}=(1+x)\ln(1+x)-x$$

$$F'(x)=\ln(1+x)+1-1=\ln(1+x)$$

(이하 생략) □

연습문제 15 (2017년 5월 전북교육청 가형 14번)

미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 양의 실수 x에 대하여 $f'(e^x) = \ln x$를 만족시킬 때, $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{f'(x)}{x}\,dx$의 값은? [4점]

풀이 1

$x = e^t$라 하면 $\dfrac{dx}{dt} = e^t$이다.

$$\int_e^{e^2} \frac{f'(x)}{x}\,dx = \int_1^2 \frac{f'(e^t)}{e^t}e^t\,dt = \int_1^2 \ln t\,dt = \Big[t\ln t - t\Big]_1^2 = 2\ln 2 - 1 \quad \square$$

풀이 2

$t = e^x$라 하면 $f'(t) = \ln(\ln t)$이다.

$$\int_e^{e^2} \frac{f'(x)}{x}\,dx = \int_1^2 \frac{\ln(\ln x)}{x}\,dx = \Big[(\ln x)\ln(\ln x) - \ln x\Big]_e^{e^2} = 2\ln 2 - 1 \quad \square$$

연습문제 16 (2016년 10월 전북교육청 가형 17번)

함수 $f(x)$의 도함수가 $f'(x) = \dfrac{1}{1+\sin x}$일 때, 함수 $g(x) = 2\sin x\cos x$에 대하여 함수 $h(x)$를 $h(x) = \displaystyle\int f(x)g'(x)\,dx$라 하자. $h(0)=0$일 때, $h\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$의 값은? [4점]

풀이

부분적분을 생각하여 $f'(x)g(x)$의 부정적분을 계산하고 $h(x)$를 구하자.

$$\begin{aligned}
\int f'(x)g(x)\,dx &= \int \frac{2\sin x\cos x}{1+\sin x}\,dx \\
&= \int (\sin x)'\left(2-\frac{2}{1+\sin x}\right)dx \\
&= 2\sin x - 2\ln|1+\sin x| + C \\
h(x) = \int f(x)g'(x)\,dx &= f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx \\
&= 2f(x)\sin x\cos x - 2\sin x + 2\ln|1+\sin x| + C
\end{aligned}$$

$h(0)=0$에서 $C=0$이므로 $h\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -2+2\ln 2$이다. □

참고. $h(x)$에서 C의 부호를 바꾸지 않은 것은 C가 상수이기 때문이다.

연습문제 17 (2024학년도 수능특강)

일차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \{f(x)\sin x - f'(x)\cos x\}\,dx = 1$
>
> (나) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \{f(x)\cos x + f'(x)\sin x\}\,dx = \frac{3}{2}\pi + 1$

$\displaystyle\int_0^1 e^x f(x)\,dx$의 값은?

풀이

(가)에서

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \{f(x)\sin x - f'(x)\cos x\}\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{f(x)(-\cos x)' + f'(x)(-\cos x)\}\,dx \\ &= \Big[-f(x)\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = f(0)\end{aligned}$$

이므로 $f(0) = 1$이다. (나)에서

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \{f(x)\cos x + f'(x)\sin x\}\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{f(x)(\sin x)' + f'(x)\sin x\}\,dx \\ &= \Big[f(x)\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = f\left(\frac{\pi}{2}\right)\end{aligned}$$

이므로 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3 \times \frac{\pi}{2} + 1$이다. 따라서 $f(x) = 3x + 1$이고,

$$\begin{array}{ccc} D & & I \\ 3x+1 & & e^x \\ & \searrow^{+} & \\ 3 & & e^x \\ & \searrow^{-} & \\ 0 & & e^x \end{array}$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^x f(x)\,dx &= \int_0^1 e^x(3x+1)\,dx \\ &= \Big[(3x-2)e^x\Big]_0^1 \\ &= e + 2. \quad \square\end{aligned}$$

연습문제 18 (2018학년도 수능 가형 15번)

함수 $f(x)$가

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{1+e^{-t}}\,dt$$

일 때, $(f \circ f)(a) = \ln 5$를 만족시키는 실수 a의 값은? [4점]

풀이

$f(x)$를 간단히 하면

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{1+e^{-t}}\,dt = \int_0^x \frac{e^t}{e^t+1}\,dt = \Big[\ln(e^t+1)\Big]_0^x = \ln(e^x+1) - \ln 2.$$

따라서

$$\begin{aligned}(f \circ f)(a) = \ln 5 &\longrightarrow \ln(e^{f(a)}+1) - \ln 2 = \ln 5\\ &\longrightarrow e^{f(a)} = 9\\ &\longrightarrow f(a) = \ln 9\\ &\longrightarrow \ln(e^a+1) - \ln 2 = \ln 9\\ &\longrightarrow a = \ln 17. \quad \square\end{aligned}$$

연습문제 19 (2017년 10월 학력평가 가형 16번)

연속함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $x \neq 0$인 실수 x에 대하여 $\{f(x)\}^2 f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$이다.
(나) $f(0) = 0$

$\{f(1)\}^3$의 값은? [4점]

풀이

$$\{f(x)\}^2 f'(x) = \frac{2x}{x^2+1} \implies \frac{1}{3}\{f(x)\}^3 = \ln(x^2+1) + C$$

$f(0) = 0$에서 $C = 0$이므로 $\{f(1)\}^3 = 3\ln 2$이다. □

연습문제 20 (2018년 3월 학력평가 가형 20번)

함수 $f(x)=\int_0^x \sin(\pi\cos t)\,dt$에 대하여 ⟨보기⟩에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

⟨보기⟩

ㄱ. $f'(0)=0$

ㄴ. 함수 $y=f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

ㄷ. $f(\pi)=0$

풀이

ㄱ. $f'(x)=\sin(\pi\cos x)$에서 $f'(0)=\sin\pi=0$. (참)

ㄴ. $t=-u$라 하면 $\dfrac{dt}{du}=-1$이므로

$$f(-x)=\int_0^{-x}\sin(\pi\cos t)\,dt=-\int_0^x\sin(\pi\cos(-u))\,du=-\int_0^x\sin(\pi\cos u)\,du=-f(x)$$

에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다. (참)

ㄷ. 정리 9.1을 이용하면

$$\begin{aligned} f(\pi)&=\int_0^{\pi}\sin(\pi\cos t)\,dt=\int_0^{\pi}\sin(\pi\cos(\pi-t))\,dt\\ &=\int_0^{\pi}\sin(-\pi\cos t)\,dt=-\int_0^{\pi}\sin(\pi\cos t)\,dt=-f(\pi)\end{aligned}$$

이므로 $f(\pi)=0$이다. (참) □

연습문제 21 (2024학년도 수능특강)

양의 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 양의 실수 x에 대하여

$$xf'(x) - f(x) = \frac{x^3}{\sqrt{3x^2+1}}$$

을 만족시킨다. $f(1) = 1$일 때, $\displaystyle\int_1^4 f(x)\,dx = \frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

풀이

주어진 식의 양변을 x^2으로 나누자.

$$\begin{aligned} xf'(x) - f(x) = \frac{x^3}{\sqrt{3x^2+1}} \quad &\longrightarrow \quad \frac{xf'(x)-f(x)}{x^2} = \frac{x}{\sqrt{3x^2+1}} \\ &\longrightarrow \quad \left(\frac{f(x)}{x}\right)' = \frac{x}{\sqrt{3x^2+1}} \\ &\longrightarrow \quad \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{3}\sqrt{3x^2+1} + C \end{aligned}$$

$f(1) = 1$에서 $C = \dfrac{1}{3}$이다. 따라서

$$\int_1^4 f(x)\,dx = \int_1^4 \left(\frac{1}{3}x\sqrt{3x^2+1} + \frac{1}{3}x\right)dx = \left[\frac{1}{27}(3x^2+1)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{6}x^2\right]_1^4 = \frac{805}{54}$$

에서 $p = 54$, $q = 805$이므로 $p+q = 859$이다. □

연습문제 22 (2020학년도 9월 모의평가 가형 17번)

두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 도함수가 연속이고 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)g(x) = x^4 - 1$이다.
(나) $\int_{-1}^{1} \{f(x)\}^2 g'(x)\,dx = 120$

$\int_{-1}^{1} x^3 f(x)$의 값은? [4점]

풀이

(나)에서

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} \{f(x)\}^2 g'(x)\,dx &= \Big[\{f(x)\}^2 g(x)\Big]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} 2f(x)f'(x)g(x)\,dx \\ &= \Big[(x^4-1)f(x)\Big]_{-1}^{1} - 2\int_{-1}^{1} (x^4-1)f'(x)\,dx\end{aligned}$$

이므로 $\int_{-1}^{1} (x^4-1)f'(x)\,dx = -60$이다. 또한

$$\int_{-1}^{1} (x^4-1)f'(x)\,dx = \Big[(x^4-1)f(x)\Big]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} 4x^3 f(x)\,dx$$

이므로 $\int_{-1}^{1} x^3 f(x) = 15$이다. □

연습문제 23 (2019학년도 수능 가형 16번)

$x > 0$에서 정의된 연속함수 $f(x)$가 모든 양수 x에 대하여

$$2f(x) + \frac{1}{x^2} f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$$

을 만족시킬 때, $\int_{\frac{1}{2}}^{2} f(x)\, dx$의 값은? [4점]

풀이 1

$\frac{1}{x} = t$라 하면 $\frac{dt}{dx} = -\frac{1}{x^2}$이므로

$$\int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{1}{x^2} f\left(\frac{1}{x}\right) dx = -\int_{2}^{\frac{1}{2}} f(t)\, dt = \int_{\frac{1}{2}}^{2} f(t)\, dt.$$

따라서 주어진 등식의 양변을 정적분하면

$$2\int_{\frac{1}{2}}^{2} f(x)\, dx + \int_{\frac{1}{2}}^{2} f(x)\, dx = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) dx = \left[\ln|x| - \frac{1}{x}\right]_{\frac{1}{2}}^{2} = 2\ln 2 + \frac{3}{2}$$

이므로 $\int_{\frac{1}{2}}^{2} f(x)\, dx = \frac{2\ln 2}{3} + \frac{1}{2}$이다. □

풀이 2

주어진 등식의 양변에 $\frac{1}{x}$을 대입하면

$$x^2 f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = x + x^2.$$

따라서 두 식을 적절히 연립하면 $f(x) = \frac{1}{3x} + \frac{2}{3x^2} - \frac{1}{3}$이므로

$$\int_{\frac{1}{2}}^{2} f(x)\, dx = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} - 1\right) dx = \frac{1}{3}\left[\ln|x| - \frac{2}{x} - x\right]_{\frac{1}{2}}^{2} = \frac{2\ln 2}{3} + \frac{1}{2}. \quad \square$$

연습문제 24 (2012학년도 6월 모의평가 가형 19번)

정의역이 $\{x \mid x > -1\}$인 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x) = \dfrac{1}{(1+x^3)^2}$이고, 함수 $g(x) = x^2$일 때,

$$\int_0^1 f(x)g'(x)\,dx = \frac{1}{6}$$

이다. $f(1)$의 값은? [4점]

풀이

$$\int_0^1 f(x)g'(x)\,dx = \Big[f(x)g(x)\Big]_0^1 - \int_0^1 f'(x)g(x)\,dx = f(1) - \int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^3)^2}\,dx$$

이고

$$\int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^3)^2}\,dx = \left[-\frac{1}{3(1+x^3)}\right]_0^1 = \frac{1}{6}$$

이므로

$$f(1) = \int_0^1 f(x)g'(x)\,dx + \int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^3)^2}\,dx = \frac{1}{3}. \quad \square$$

연습문제 25 (2020년 9월 경북교육청 가형 19번)

두 함수 $f(x) = xe^{x^2}$, $g(x) = \sin\sqrt{x}$에 대하여 $\displaystyle\int_{\frac{\pi^2}{4}}^{\pi^2} (f' \circ g)(x)g(x)g'(x)\,dx$의 값은? [4점]

풀이

곱의 순서를 적절히 바꾸어 부분적분을 적용하자.

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{\pi^2}{4}}^{\pi^2} (f' \circ g)(x)g(x)g'(x)\,dx &= \int_{\frac{\pi^2}{4}}^{\pi^2} g(x) \times (f' \circ g)(x)g'(x)\,dx \\
&= \Big[g(x)f(g(x))\Big]_{\frac{\pi^2}{4}}^{\pi^2} - \int_{\frac{\pi^2}{4}}^{\pi^2} g'(x)f(g(x))\,dx \\
&= -e - \int_{\frac{\pi^2}{4}}^{\pi^2} g'(x)f(g(x))\,dx \\
&= -e - \int_{\frac{\pi^2}{4}}^{\pi^2} g'(x)g(x)e^{\{g(x)\}^2}\,dx \\
&= -e - \left[\frac{1}{2}e^{\{g(x)\}^2}\right]_{\frac{\pi^2}{4}}^{\pi^2} \\
&= -\frac{e+1}{2} \quad \square
\end{aligned}$$

연습문제 26 (2006년 10월 학력평가 가형 28번)

$a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\,dx\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$으로 정의할 때, 옳은 내용을 ⟨보기⟩에서 모두 고른 것은? [4점]

⟨보기⟩

ㄱ. $a_1 + a_3 = \frac{1}{2}$

ㄴ. $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$

ㄷ. $\sum_{k=1}^{100} a_k = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{51}$

풀이

⟨보기⟩에서 $a_n + a_{n+2}$가 반복적으로 등장하므로 이를 먼저 생각하자.

$$\begin{aligned} a_n + a_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan^n x + \tan^{n+2} x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \tan^2 x)\tan^n x\,dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x \tan^n x\,dx = \left[\frac{\tan^{n+1} x}{n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

ㄱ. $a_1 + a_3 = \frac{1}{2}$ (참)

ㄴ. $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = (a_1 + a_3) + (a_2 + a_4) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ (참)

ㄷ. 자연수 k에 대하여 $a_{4k-3} + a_{4k-2} + a_{4k-1} + a_{4k} = \frac{1}{4k-2} + \frac{1}{4k-1}$이다. 따라서

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{100} a_k &= \sum_{k=1}^{25} (a_{4k-3} + a_{4k-2} + a_{4k-1} + a_{4k}) \\ &= \sum_{k=1}^{25} \left(\frac{1}{4k-2} + \frac{1}{4k-1}\right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{98} + \frac{1}{99}. \quad \text{(거짓)} \quad \square \end{aligned}$$

연습문제 27 (2011학년도 9월 모의평가 가형 28번)

실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 t에 대하여

$$\int_0^2 xf(tx)\,dx = 4t^2$$

을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은? [4점]

풀이

$tx = u$라 하면 $\dfrac{du}{dx} = t$이므로

$$\begin{aligned}\int_0^2 xf(tx)\,dx = 4t^2 &\longrightarrow \int_0^{2t} \frac{u}{t}f(u) \times \frac{1}{t}\,du = 4t^2 \\ &\longrightarrow \int_0^{2t} uf(u)\,du = 4t^4 \\ &\longrightarrow 4tf(2t) = 16t^3 \\ &\longrightarrow f(2t) = 4t^2, \quad f(2) = 4. \quad \square\end{aligned}$$

연습문제 28 (2014학년도 9월 모의평가 B형 30번)

두 연속함수 $f(x)$, $g(x)$가

$$g(e^x) = \begin{cases} f(x) & (0 \le x < 1) \\ g(e^{x-1}) + 5 & (1 \le x \le 2) \end{cases}$$

를 만족시키고, $\int_1^{e^2} g(x)\,dx = 6e^2 + 4$이다. $\int_1^e f(\ln x)\,dx = ae + b$일 때, $a^2 + b^2$의 값을 구하시오. (단, a, b는 정수이다.) [4점]

풀이

주어진 관계식에 $\ln x$를 대입하면

$$g(x) = \begin{cases} f(\ln x) & (1 \le x < e) \\ g\left(\dfrac{x}{e}\right) + 5 & (e \le x \le e^2) \end{cases}$$

이므로

$$\int_1^{e^2} g(x)\,dx = \int_1^e f(\ln x)\,dx + \int_e^{e^2} \left\{ g\left(\frac{x}{e}\right) + 5 \right\} dx.$$

$\dfrac{x}{e} = t$라 하면 $\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{e}$이므로

$$\begin{aligned} \int_e^{e^2} \left\{ g\left(\frac{x}{e}\right) + 5 \right\} dx &= e\int_1^e \{g(t) + 5\}\,dt = e\int_1^e g(t)\,dt + 5e^2 - 5e \\ &= e\int_1^e \{g(t) + 5\}\,dt = e\int_1^e f(\ln t)\,dt + 5e^2 - 5e. \end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned} 6e^2 + 4 = (e+1)\int_1^e f(\ln x)\,dx + 5e^2 - 5e \ &\longrightarrow (e+1)\int_1^e f(\ln x)\,dx = e^2 + 5e + 4 = (e+1)(e+4) \\ &\longrightarrow \int_1^e f(\ln x)\,dx = e + 4 \end{aligned}$$

에서 $a = 1$, $b = 4$이므로 $a^2 + b^2 = 17$이다. □

연습문제 29 (2014학년도 수능 B형 21번)

연속함수 $y = f(x)$의 그래프가 원점에 대하여 대칭이고, 모든 실수 x에 대하여

$$f(x) = \frac{\pi}{2}\int_1^{x+1} f(t)\,dt$$

이다. $f(1) = 1$일 때,

$$\pi^2\int_0^1 xf(x+1)\,dx$$

의 값은? [4점]

풀이

주어진 관계식에 의해 함수 $f(x)$는 미분가능하고, $f'(x) = \frac{\pi}{2}f(x+1)$, $f(0) = 0$이다. 원점 대칭에 의해

$$f(-1) = -f(1) = -1 \longrightarrow \frac{\pi}{2}\int_1^0 f(t)\,dt = -1 \longrightarrow \int_0^1 f(t)\,dt = \frac{2}{\pi}.$$

그러므로

$$\pi^2\int_0^1 xf(x+1)\,dx = 2\pi\int_0^1 xf'(x)\,dx = 2\pi\Big[xf(x)\Big]_0^1 - 2\pi\int_0^1 f(x)\,dx = 2(\pi-2). \quad \square$$

연습문제 30 (2017학년도 수능 가형 21번)

닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 증가하는 연속함수 $f(x)$가

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 2, \quad \int_0^1 |f(x)|\,dx = 2\sqrt{2}$$

를 만족시킨다. 함수 $F(x)$가

$$F(x) = \int_0^x |f(t)|\,dt \quad (0 \le x \le 1)$$

일 때, $\displaystyle\int_0^1 f(x)F(x)\,dx$의 값은? [4점]

풀이

$\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx < \int_0^1 |f(x)|\,dx$이므로 $f(c) = 0$을 만족시키는 c가 구간 $(0,\ 1)$에 존재한다. 함수 $f(x)$는 증가하므로 구간 $(0,\ c)$에서 $f(x) < 0$이고 구간 $(c,\ 1)$에서 $f(x) > 0$이다. 따라서 $\displaystyle\int_0^c f(x)\,dx = A,\ \int_c^1 f(x)\,dx = B$라 하면

$$\int_0^1 f(x)\,dx = A + B = 2, \quad \int_0^1 |f(x)|\,dx = -A + B = 2\sqrt{2}$$

로부터 $A = 1 - \sqrt{2},\ B = 1 + \sqrt{2}$이다. 함수 $F(x)$의 정의로부터

$$F'(x) = |f(x)| = \begin{cases} -f(x) & (0 \le x < c) \\ \ \ f(x) & (c \le x \le 1) \end{cases}$$

이므로 $F(0) = 0,\ F(c) = -A = \sqrt{2} - 1,\ F(1) = 2\sqrt{2}$이다. 그러므로

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(x)F(x)\,dx &= -\int_0^c \{-f(x)\}F(x)\,dx + \int_c^1 f(x)F(x)\,dx \\
&= -\int_0^c F'(x)F(x)\,dx + \int_c^1 f(x)\,F(x)\,dx \\
&= -\left[\frac{1}{2}\{F(x)\}^2\right]_0^c + \left[\frac{1}{2}\{F(x)\}^2\right]_c^1 \\
&= \frac{1}{2}[\{F(1)\}^2 - 2\{F(c)\}^2 + \{F(0)\}^2] \\
&= 1 + 2\sqrt{2}. \quad \square
\end{aligned}$$

연습문제 31 (2022학년도 수능특강)

실수 전체의 집합에서 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x) > 0$, $g(x) > 0$이다.
>
> (나) 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)g(x) - f(x)g'(x) = f(x)g(x)$이다.

$f(1) = g(1)$일 때, $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{g(n)}{f(n)}$의 값은? (단, n은 자연수이다.)

풀이

(가)에서 $g(x) > 0$이므로 (나)에 주어진 식의 양변을 $\{g(x)\}^2$으로 나누자.

$$\begin{aligned} f'(x)g(x) - f(x)g'(x) = f(x)g(x) &\longrightarrow \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2} = \frac{f(x)}{g(x)} \\ &\longrightarrow \left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \frac{f(x)}{g(x)} \\ &\longrightarrow e^{-x}\left[\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}' - \frac{f(x)}{g(x)}\right] = 0 \\ &\longrightarrow \left\{e^{-x}\frac{f(x)}{g(x)}\right\}' = 0 \\ &\longrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = Ce^{x} \end{aligned}$$

$f(1) = g(1)$에서 $C = e^{-1}$이다. 따라서 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{g(n)}{f(n)} = \sum_{n=2}^{\infty} e^{-n+1} = \frac{e^{-1}}{1-e^{-1}} = \frac{1}{e-1}$이다. □

연습문제 32 (2017년 5월 전북교육청 가형 30번)

열린구간 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$에서 미분가능하고 $f(0) = 1$인 함수 $f(x)$가 $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$인 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(x) > 0$
>
> (나) $\left(\frac{1}{f(x)\cos x}\right)' = \frac{x}{\cos x}$

$g(x) = \int_0^x \frac{\tan t}{f(t)} dt$라 할 때, $g(4) + \frac{1}{f(4)}$의 값을 구하시오. [4점]

풀이

$$\begin{array}{cc}
D & I \\
\frac{1}{f(t)\cos t} & \sin t \\
\searrow^{+} & \\
\frac{t}{t\cos t} & -\cos t \longrightarrow -t \\
\hline
1 & -t \\
\searrow^{-} & \\
0 & -\frac{t^2}{2}
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
g(4) &= \int_0^4 \frac{\tan t}{f(t)} dt \\
&= \int_0^4 \left\{ \sin t \times \frac{1}{f(t)\cos t} \right\} dt \\
&= \left[-\frac{1}{f(t)} + \frac{1}{2}t^2 \right]_0^4 \\
&= -\frac{1}{f(4)} + \frac{1}{f(0)} + 8
\end{aligned}$$

따라서 $g(4) + \frac{1}{f(4)} = \frac{1}{f(0)} + 8 = 9$이다. □

연습문제 33 (2022학년도 수능특강)

실수 전체의 집합에서 이계도함수가 연속인 함수 $f(x)$가

$$\int_0^{\pi} \{f''(x)+4f(x)\}\sin 2x\,dx + 2\pi^2 = 0$$

을 만족시킨다. $f(0)=1$일 때, $f(\pi)$의 값은?

풀이

$$\begin{array}{ccc} D & & I \\ \sin 2x & & f''(x) \\ & \searrow + & \\ 2\cos 2x & & f'(x) \\ & \searrow - & \\ -4\sin 2x & \xrightarrow{+} & f(x) \end{array}$$

$$\int_0^{\pi} f''(x)\sin 2x\,dx = \Big[f'(x)\sin 2x - 2f(x)\cos 2x\Big]_0^{\pi} - 4\int_0^{\pi} f(x)\sin 2x\,dx$$

$$\int_0^{\pi} \{f''(x)+4f(x)\}\sin 2x\,dx = \Big[f'(x)\sin 2x - 2f(x)\cos 2x\Big]_0^{\pi} = 2f(0)-2f(\pi)$$

따라서 $f(\pi) = f(0) - \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\pi}\{f''(x)+4f(x)\}\sin 2x\,dx = \pi^2+1$이다. □

연습문제 34 (2018년 7월 학력평가 가형 20번)

양의 실수 전체의 집합에서 미분가능한 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 양의 실수 x에 대하여 $g(x) = \int_1^x \frac{f(t^2+1)}{t}\,dt$
(나) $\int_2^5 f(x)\,dx = 16$

$g(2) = 3$일 때, $\int_1^2 xg(x)\,dx$의 값은? [4점]

풀이

(가)에서 $g(1) = 0$이고 $g'(x) = \frac{f(x^2+1)}{x}$이다.

$$\begin{array}{ccc} D & & I \\ g(x) & & x \\ & \searrow^{+} & \\ \frac{f(x^2+1)}{x} & \xrightarrow{-} & \frac{1}{2}x^2 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \int_1^2 xg(x)\,dx &= \left[\frac{1}{2}x^2 g(x)\right]_1^2 - \frac{1}{2}\int_1^2 xf(x^2+1)\,dx \\ &= 2g(2) - \frac{1}{2}g(1) - \frac{1}{2}\int_1^2 xf(x^2+1)\,dx \end{aligned}$$

$x^2+1 = t$라 하면 $\frac{dt}{dx} = 2x$이므로 $\int_1^2 xf(x^2+1)\,dx = \frac{1}{2}\int_2^5 f(t)\,dt = 8$이고 $\int_1^2 xg(x)\,dx = 2$이다. $\square$

연습문제 35 (2023학년도 수능완성)

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$와 도함수 $f'(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x) > 0,\ 2x\{f(x)\}^2 + f'(x) = 0$이다.
>
> (나) $f(0) = 1,\ f'(2) = -\dfrac{4}{25}$

$\displaystyle\int_0^2 x^3\{f(x)\}^3\,dx = \frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

풀이 1

(가)와 (나)에 $x=2$를 대입하면 $f(2) = \dfrac{1}{5}$이다.

$$
\begin{array}{ccl}
D & I & \\
-\dfrac{1}{2}x^2 & f'(x)f(x) & \\
 & \searrow + & \\
-x & \dfrac{1}{2}\{f(x)\}^2 & \longrightarrow\ -\dfrac{1}{2}x\{f(x)\}^2 = \dfrac{1}{4}f'(x) \\
\hline
1 & \dfrac{1}{4}f'(x) & \\
 & \searrow - & \\
0 & \dfrac{1}{4}f(x) &
\end{array}
$$

$$\int_0^2 x^3\{f(x)\}^3\,dx = \int_0^2 \left\{-\frac{1}{2}x^2 f'(x)f(x)\right\}dx = \left[-\frac{1}{4}x^2\{f(x)\}^2 - \frac{1}{4}f(x)\right]_0^2 = \frac{4}{25} \quad \square$$

풀이 2

$$2x\{f(x)\}^2 + f'(x) = 0 \ \longrightarrow\ -\frac{f'(x)}{\{f(x)\}^2} = 2x \ \longrightarrow\ \frac{1}{f(x)} = x^2 + C \ \longrightarrow\ f(x) = \frac{1}{x^2+C}$$

$f(0) = 1$이므로 $C = 1$이고 $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$이다. $x^2+1 = t$라 하면 $\dfrac{dt}{dx} = 2x$이므로

$$\begin{aligned}
\int_0^2 x^3\{f(x)\}^2\,dx &= \int_0^2 \frac{x^3}{(x^2+1)^3}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^5 \frac{t-1}{t^3}\,dt \\
&= \frac{1}{2}\int_1^5 \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^3}\right)dt = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{t} + \frac{1}{2t^2}\right]_1^5 = \frac{4}{25}. \quad \square
\end{aligned}$$

연습문제 36 (2023학년도 수능 미적분 29번)

세 상수 a, b, c에 대하여 함수 $f(x) = ae^{2x} + be^x + c$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)+6}{e^x} = 1$
>
> (나) $f(\ln 2) = 0$

함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $\displaystyle\int_0^{14} g(x)\,dx = p + q\ln 2$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p, q는 유리수이고, $\ln 2$는 무리수이다.) [4점]

풀이

(가)에서 극한

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)+6}{e^x} = \lim_{x \to -\infty} \{ae^x + (c+6)e^{-x} + b\}$$

이 수렴하므로 $c = -6$이고, 극한값이 1이므로 $b = 1$이다. (나)에서

$$f(x) = ae^{2x} + e^x - 6 \longrightarrow f(\ln 2) = 4a - 4 = 0 \longrightarrow a = 1$$

이므로 $f(x) = e^{2x} + e^x - 6$이다. $f(t) = 14$라 하면

$$e^{2t} + e^t - 20 = 0 \longrightarrow (e^t+5)(e^t-4) = 0 \longrightarrow e^t = 4 \longrightarrow b = \ln 4.$$

따라서

$$\int_{\ln 2}^{\ln 4} f(x)\,dx = \int_{\ln 2}^{\ln 4} (e^{2x} + e^x - 6)\,dx = \left[\frac{1}{2}e^{2x} + e^x - 6x\right]_{\ln 2}^{\ln 4} = 8 - 6\ln 2,$$

$$\int_0^{14} g(x)\,dx = (\ln 4)f(\ln 4) - (\ln 2)f(\ln 2) - \int_{\ln 2}^{\ln 4} f(x)\,dx = -8 + 34\ln 2$$

이므로 $p = -8$, $q = 34$, $p + q = 26$이다. □

연습문제 37 (2020학년도 6월 모의평가 가형 20번)

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(x) > 0$
>
> (나) $\ln f(x) + 2\displaystyle\int_0^x (x-t)f(t)\,dt = 0$

⟨보기⟩에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

⟨보기⟩

> ㄱ. $x > 0$에서 함수 $f(x)$는 감소한다.
>
> ㄴ. 함수 $f(x)$의 최댓값은 1이다.
>
> ㄷ. 함수 $F(x)$를 $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$라 할 때, $f(1) + \{F(1)\}^2 = 1$이다.

풀이

주어진 등식에 $x = 0$을 대입하면 $f(0) = 1$이다.

$$\begin{aligned}\ln f(x) + 2\int_0^x (x-t)f(t)\,dt = 0 &\longrightarrow \ln f(x) + 2x\int_0^x f(t)\,dt - 2\int_0^x tf(t)\,dt = 0\\ &\longrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} + 2\int_0^x f(t)\,dt + 2xf(x) - 2f(x) = 0\\ &\longrightarrow f'(x) = -2f(x)\int_0^x f(t)\,dt\end{aligned}$$

ㄱ. $x > 0$에서 $f(x) > 0$, $\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt > 0$이므로 $f'(x) < 0$, 즉 함수 $f(x)$는 $x > 0$에서 감소한다. (참)

ㄴ. 같은 논리로 $x < 0$에서 $f(x) > 0$, $\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt < 0$이므로 $f'(x) > 0$, 즉 함수 $f(x)$는 $x < 0$에서 증가한다. 따라서 함수 $f(x)$는 $x = 0$에서 극대이자 최대이고, 그 함숫값은 1이다. (참)

ㄷ. $F'(x) = f(x)$이므로

$$f'(x) = -2F'(x)F(x) \longrightarrow f(x) = -\{F(x)\}^2 + C \longrightarrow f(x) + \{F(x)\}^2 = C.$$

$F(0) = 0$에서 $C = 1$이고 $f(1) + \{F(1)\}^2 = 1$이다. □

참고. $f(x)$의 식을 닫힌 형태로 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}f(x) + \{F(x)\}^2 = 1 &\longrightarrow F'(x) + \{F(x)\}^2 = 1 \longrightarrow \frac{F'(x)}{1-\{F(x)\}^2} = 1\\ &\longrightarrow \frac{F'(x)}{1+F(x)} + \frac{F'(x)}{1-F(x)} = 2\\ &\longrightarrow \ln|1+F(x)| - \ln|1-F(x)| = 2x + C \quad (F(0) = 0 \implies C = 0)\\ &\longrightarrow \frac{1+F(x)}{1-F(x)} = e^{2x} \longrightarrow F(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}, \quad f(x) = \frac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}\end{aligned}$$

연습문제 38 (2019학년도 수능완성)

구간 $[0, \infty)$에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = 8$
>
> (나) $\displaystyle\int_0^1 x^2 f(x^2)\,dx = 3$

함수 $F(x)$가 $F(x) = \displaystyle\int_0^x tf(t^2)\,dt$일 때, $\displaystyle\int_0^1 F(x)\,dx$의 값은? [4점]

풀이

$F(0) = 0$, $F'(x) = xf(x^2)$이고, $t^2 = u$라 하면 $\dfrac{du}{dt} = 2t$이므로

$$F(1) = \int_0^1 tf(t^2)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^1 f(u)\,du = 4.$$

$$\begin{array}{ccc} D & & I \\ F(x) & & 1 \\ & \searrow^{+} & \\ xf(x^2) & \xrightarrow{-} & x \end{array}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 F(x)\,dx &= \Big[xF(x)\Big]_0^1 - \int_0^1 x^2 f(x^2)\,dx \\ &= F(1) - \int_0^1 x^2 f(x^2)\,dx = 1 \quad \square \end{aligned}$$

연습문제 39 (2022학년도 예비시행 미적분 29번)

함수 $f(x)=e^x+x-1$과 양수 t에 대하여 함수

$$F(x)=\int_0^x \{t-f(s)\}\,ds$$

가 $x=\alpha$에서 최댓값을 가질 때, 실수 α의 값을 $g(t)$라 하자. 미분가능한 함수 $g(t)$에 대하여 $\displaystyle\int_{f(1)}^{f(5)} \frac{g(t)}{1+e^{g(t)}}\,dt$의 값을 구하시오. [4점]

풀이

$f'(x)=e^x+1>0$로부터 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가하므로

$$F'(x)=t-f(x) \longrightarrow t-f(g(t))=0$$

이고 $g(x)$는 $f(x)$의 역함수이다. $t=f(u)$라 하면 $u=g(t)$, $\dfrac{dt}{du}=f'(u)=e^u+1$이므로

$$\int_{f(1)}^{f(5)} \frac{g(t)}{1+e^{g(t)}}\,dt=\int_1^5 \frac{u}{1+e^u}(1+e^u)\,du=\int_1^5 u\,du=\left[\frac{1}{2}u^2\right]_1^5=12. \quad \square$$

연습문제 40 (2020년 7월 학력평가 가형 19번)

실수 전체의 집합에서 $f(x) > 0$이고 도함수가 연속인 함수 $f(x)$가 있다. 실수 전체의 집합에서 함수 $g(x)$가

$$g(x) = \int_0^x \ln f(t)\,dt$$

일 때, 함수 $g(x)$와 $g(x)$의 도함수 $g'(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $g(x)$는 $x = 1$에서 극값 2를 갖는다.
>
> (나) 모든 실수 x에 대하여 $g'(-x) = g'(x)$이다.

$\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{xf'(x)}{f(x)}\,dx$의 값은? [4점]

풀이

$$g(0) = 0 \implies g'(x) = \ln f(x) \implies g''(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

(가)에서 $g(1) = 2,\ g'(1) = 0$이다. (나)에서 모든 실수 x에 대하여 $g''(x) = -g''(x)$이다.

$$\begin{array}{ccc} D & & I \\ x & & g''(x) \\ & \searrow + & \\ 1 & & g'(x) \\ & \searrow - & \\ 0 & & g(x) \end{array}$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{xf'(x)}{f(x)}\,dx = \int_{-1}^{1} xg''(x)\,dx = 2\int_0^1 xg''(x)\,dx$$

$$= 2\Big[xg'(x) - g(x)\Big]_0^1 = -4 \quad \square$$

연습문제 41 (2019학년도 수능 가형 21번)

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(-1)$의 값은? [4점]

(가) 모든 실수 x에 대하여 $2\{f(x)\}^2 f'(x) = \{f(2x+1)\}^2 f'(2x+1)$이다.

(나) $f\left(-\dfrac{1}{8}\right) = 1,\ f(6) = 2$

풀이

(가)에서 주어진 식의 양변을 부정적분하면

$$\frac{2}{3}\{f(x)\}^3 + C' = \frac{1}{6}\{f(2x+1)\}^3 \longrightarrow 4\{f(x)\}^3 + C = \{f(2x+1)\}^3\ (C = 6C').$$

$x = -\dfrac{1}{8}$부터 순차적으로 대입하면

$$\begin{aligned} x = -\frac{1}{8} &\longrightarrow \left\{f\left(\frac{3}{4}\right)\right\}^3 = 4\left\{f\left(-\frac{1}{8}\right)\right\}^3 + C = 4 + C, \\ x = \frac{3}{4} &\longrightarrow \left\{f\left(\frac{5}{2}\right)\right\}^3 = 4\left\{f\left(\frac{3}{4}\right)\right\}^3 + C = 16 + 5C, \\ x = \frac{5}{2} &\longrightarrow \{f(6)\}^3 = 4\left\{f\left(\frac{5}{2}\right)\right\}^3 + C = 64 + 21C \end{aligned}$$

이므로

$$f(6) = 2 \longrightarrow 8 = 64 + 21C \longrightarrow C = -\frac{8}{3}.$$

$x = -1$을 대입하면

$$4\{f(-1)\}^3 - \frac{8}{3} = \{f(-1)\}^3 \longrightarrow \{f(-1)\}^3 = \frac{8}{9} \longrightarrow f(-1) = \frac{2}{\sqrt[3]{9}} = \frac{2\sqrt[3]{3}}{3}. \quad \square$$

연습문제 42 (2021년 10월 학력평가 미적분 27번)

미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $x_1 < x_2$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $f(x_1) > f(x_2)$이다.
>
> (나) 닫힌구간 $[-1, 3]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 1이고 최솟값은 -2이다.

$\int_{-1}^{3} f(x)\,dx = 3$일 때, $\int_{-2}^{1} f^{-1}(x)\,dx$의 값은? [3점]

풀이

(가), (나)에서 $f(-1) = 1$, $f(3) = -2$이다.

$$\int_{-2}^{1} f^{-1}(x)\,dx = (-1)f(-1) - 3f(3) - \int_{3}^{-1} f(x)\,dx = 8 \quad \square$$

연습문제 43 (2017년 3월 학력평가 가형 21번)

구간 $[0,\,1]$에서 정의된 연속함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt \quad (0 \le x \le 1)$$

은 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $F(x) = f(x) - x$
(나) $\displaystyle\int_0^1 F(x)\,dx = e - \frac{5}{2}$

⟨보기⟩에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

⟨보기⟩

ㄱ. $F(1) = e$

ㄴ. $\displaystyle\int_0^1 xF(x)\,dx = \frac{1}{6}$

ㄷ. $\displaystyle\int_0^1 \{F(x)\}^2\,dx = \frac{1}{2}e^2 - 2e + \frac{11}{6}$

풀이 1

먼저 $F(0) = 0,\ F'(x) = f(x)$이다.

ㄱ. $\displaystyle\int_0^1 F(x)\,dx = \int_0^1 \{f(x) - x\}\,dx = F(1) - \frac{1}{2} \longrightarrow F(1) = \left(e - \frac{5}{2}\right) + \frac{1}{2} = e - 2$ (거짓)

ㄴ.

$$\int_0^1 xf(x)\,dx = \Big[xF(x)\Big]_0^1 - \int_0^1 F(x)\,dx = \frac{1}{2}$$

$$\longrightarrow \int_0^1 xF(x)\,dx = \int_0^1 \{xf(x) - x^2\}\,dx = \int_0^1 xf(x)\,dx - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \quad \text{(참)}$$

ㄷ.

$$\int_0^1 \{F(x)\}^2\,dx = \int_0^1 \{f(x) - x\}F(x)\,dx = \int_0^1 f(x)F(x)\,dx - \int_0^1 xF(x)\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}\{F(x)\}^2\right]_0^1 - \frac{1}{6} = \frac{1}{2}(e-2)^2 - \frac{1}{6} = \frac{1}{2}e^2 - 2e + \frac{11}{6} \quad \text{(참)} \quad \square$$

풀이 2

(가)에서

$$F(x) = F'(x) - x \longrightarrow F'(x) - F(x) = x \longrightarrow e^{-x}\{F'(x) - F(x)\} = xe^{-x}$$

$$\longrightarrow \{e^{-x}F(x)\}' = xe^{-x} \longrightarrow e^{-x}F(x) = \int xe^{-x}\,dx = -(x+1)e^{-x} + C.$$

$F(0) = 0$이므로 $C = 1$이고 $F(x) = e^x - x - 1$이다.

ㄱ. $F(1) = e - 2$ (거짓)

ㄴ. $\displaystyle\int_0^1 xF(x)\,dx = \int_0^1 (xe^x - x^2 - x)\,dx = \int_0^1 xe^x\,dx - \frac{5}{6} = \Big[(x-1)e^x\Big]_0^1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$ (참)

ㄷ.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \{F(x)\}^2\,dx &= \int_0^1 (e^x - x - 1)^2\,dx = \int_0^1 (e^{2x} - 2xe^x - 2e^x + x^2 + 2x + 1)\,dx \\ &= \left[\frac{1}{2}e^{2x} - 2(x-1)e^x - 2e^x\right]_0^1 + \frac{7}{3} = \frac{1}{2}e^2 - 2e + \frac{11}{6} \quad \text{(참)} \quad \square\end{aligned}$$

참고. $F(x) = f(x) - x$에서 곧바로 양변을 미분하여 $f(x) = f'(x) - x$라 할 수 없다. f의 미분가능성이 보장되지 않았기 때문이다. $F(x)$의 식을 찾고 나서야 f가 미분가능함을 알 수 있다.

연습문제 44 (2018년 4월 학력평가 가형 21번)

$\frac{3}{5} < x < 4$에서 정의된 미분가능한 함수 $f(x)$가 $f(1) = 2$이고

$$f'(x) = \frac{1 - x^2\{f(x)\}^3}{x^3\{f(x)\}^2}$$

을 만족시킨다. 함수 $f(x)$의 역함수 $g(x)$가 존재하고 미분가능할 때, 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

〈보기〉

ㄱ. $g'(2) = -\frac{4}{7}$

ㄴ. $g(x) = \frac{1}{3}x^3\{g(x)\}^3 - \frac{5}{3}$

ㄷ. $2 < g(1) < \frac{5}{2}$

풀이 1

역함수의 미분법으로부터 $g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{x^2\{g(x)\}^3}{1 - x^3\{g(x)\}^2}$이다.

ㄱ. $g(2) = 1 \longrightarrow g'(2) = \frac{2^2\{g(2)\}^3}{1 - 2^3\{g(2)\}^2} = -\frac{4}{7}$ (참)

ㄴ.

$$g'(x) = \frac{x^2\{g(x)\}^3}{1 - x^3\{g(x)\}^2} \longrightarrow g'(x) = x^2\{g(x)\}^2\{xg'(x) + g(x)\} = \{xg(x)\}^2\{xg(x)\}'$$

$$\longrightarrow g(x) = \frac{1}{3}x^3\{g(x)\}^3 + C$$

$g(2) = 1$에서 $C = -\frac{5}{3}$, $g(x) = \frac{1}{3}x^3\{g(x)\}^3 - \frac{5}{3}$이다. (참)

ㄷ.

$$g(1) = \frac{1}{3}\{g(1)\}^3 - \frac{5}{3} \longrightarrow \{g(1)\}^3 - 3g(1) - 5 = 0$$

$h(x) = x^3 - 3x - 5$라 하면 $h'(x) = 3(x+1)(x-1)$이므로 극댓값 $h(-1) < 0$, 극솟값 $h(1) < 0$을 갖는다. 따라서 방정식 $h(x) = 0$은 오직 하나의 실근 $g(1)$만을 갖는다. 이때 $h(2) < 0$, $h\left(\frac{5}{2}\right) > 0$이므로 사잇값 정리에 의해 $2 < g(1) < \frac{5}{2}$이다. (참) □

풀이 2

$$f'(x)=\frac{1-x^2\{f(x)\}^3}{x^3\{f(x)\}^2} \longrightarrow 3x^3\{f(x)\}^2f'(x)+3x^2\{f(x)\}^3=3$$

$$\longrightarrow x^3\cdot 3\{f(x)\}^2f'(x)+3x^2\cdot\{f(x)\}^3=3$$

$$\longrightarrow [x^3\{f(x)\}^3]'=3$$

$$\longrightarrow x^3\{f(x)\}^3=3x+C \quad (f(1)=2 \implies C=5)$$

$$\longrightarrow \{f(x)\}^3=\frac{3}{x^2}+\frac{5}{x^3}$$

$$\longrightarrow f(x)=\sqrt[3]{\frac{3}{x^2}+\frac{5}{x^3}}=\frac{\sqrt[3]{3x+5}}{x}$$

ㄱ. 풀이 1과 동일 (참)

ㄴ. $x^3\{f(x)\}^3=3x+5 \longrightarrow x^3\{g(x)\}^3=3g(x)+5 \longrightarrow g(x)=\frac{1}{3}\{g(x)\}^3-\frac{5}{3}$ (참)

ㄷ. $f(x)$는 감소함수이므로 $\{f(2)\}^3>\{f(g(1))\}^3=1>\left\{f\left(\frac{5}{2}\right)\right\}^3$를 확인하면 된다.

$$\{f(2)\}^3=\frac{3}{4}+\frac{5}{8}=\frac{11}{8}>1, \quad \left\{f\left(\frac{5}{2}\right)\right\}^3=\frac{12}{25}+\frac{40}{125}=\frac{100}{125}<1$$

이므로 $2<g(1)<\frac{5}{2}$이다. (참) □

연습문제 45 (2010학년도 수능 가형 29번)

실수 전체의 집합에서 이계도함수를 갖는 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$에 대하여 정적분

$$\int_0^1 \{f'(x)g(1-x) - g'(x)f(1-x)\}\,dx$$

의 값을 k라 하자. 옳은 것만을 〈보기〉에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

〈보기〉

ㄱ. $\displaystyle\int_0^1 \{f(x)g'(1-x) - g(x)f'(1-x)\}\,dx = -k$

ㄴ. $f(0) = f(1)$이고 $g(0) = g(1)$이면, $k = 0$이다.

ㄷ. $f(x) = \ln(1+x^4)$이고 $g(x) = \sin \pi x$이면, $k = 0$이다.

풀이 1

ㄱ. 정리 9.1에 의해

$$k = \int_0^1 \{f'(x)g(1-x) - g'(x)f(1-x)\}\,dx = \int_0^1 \{f'(1-x)g(x) - g'(1-x)f(x)\}\,dx$$

$$\longrightarrow \int_0^1 \{f(x)g'(1-x) - g(x)f'(1-x)\}\,dx = -k. \quad \text{(참)}$$

ㄴ.

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(1-x)g'(x)\,dx &= \Big[f(1-x)g(x)\Big]_0^1 + \int_0^1 f'(1-x)g(x)\,dx \\ &= f(0)g(1) - f(1)g(0) + \int_0^1 f'(1-x)g(x)\,dx\end{aligned}$$

에서 주어진 조건과 정리 9.1에 의해

$$f(0)g(1) = f(1)g(0), \quad \int_0^1 f'(1-x)g(x)\,dx = \int_0^1 f'(x)g(1-x)\,dx \longrightarrow k = 0. \quad \text{(참)}$$

ㄷ. ㄴ에서 $k = f(1)g(0) - f(0)g(1)$이고 $g(0) = g(1) = 0$이므로 $k = 0$. (참) □

풀이 2

ㄱ에서

$$\begin{cases} k = \displaystyle\int_0^1 \{f'(x)g(1-x) - g'(x)f(1-x)\}\,dx \\ -k = \displaystyle\int_0^1 \{f(x)g'(1-x) - g(x)f'(1-x)\}\,dx \end{cases}$$

이므로 두 식을 서로 빼면

$$\begin{aligned}2k &= \int_0^1 \{f'(x)g(1-x) - f(x)g'(1-x) + g(x)f'(1-x) - g'(x)f(1-x)\}\,dx \\ &= \Big[f(x)g(1-x) - g(x)f(1-x)\Big]_0^1 = 2f(1)g(0) - 2f(0)g(1)\end{aligned}$$

이 성립하므로 $k = f(1)g(0) - f(0)g(1)$이다. □

연습문제 46 (2011학년도 수능 가형 28번)

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 있다. 모든 실수 x에 대하여 $f(2x) = 2f(x)f'(x)$이고,

$$f(a) = 0, \quad \int_{2a}^{4a} \frac{f(x)}{x}\,dx = k \ (a > 0,\ 0 < k < 1)$$

일 때, $\displaystyle\int_{a}^{2a} \frac{\{f(x)\}^2}{x^2}\,dx$의 값을 k로 나타낸 것은? [3점]

풀이

$f(2a) = 2f(a)f'(a) = 0$. $x = 2t$라 하면 $\dfrac{dx}{dt} = 2$이므로

$$\begin{array}{ccc} D & & I \\ \dfrac{1}{t} & & 2f(t)f'(t) \\ & \searrow^{+} & \\ -\dfrac{1}{t^2} & \xrightarrow{-} & \{f(t)\}^2 \end{array}$$

$$\begin{aligned} k &= \int_{2a}^{4a} \frac{f(x)}{x}\,dx \\ &= \int_{a}^{2a} \frac{f(2t)}{t}\,dt = \int_{a}^{2a} \frac{2f(t)f'(t)}{t}\,dt \\ &= \left[\frac{\{f(t)\}^2}{t}\right]_{a}^{2a} + \int_{a}^{2a} \frac{\{f(t)\}^2}{t^2}\,dt \\ &= \int_{a}^{2a} \frac{\{f(t)\}^2}{t^2}\,dt. \quad \square \end{aligned}$$

연습문제 47 (2017학년도 9월 모의평가 가형 21번)

양의 실수 전체의 집합에서 미분가능한 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 모든 양의 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)' = x^2e^{-x^2}$
>
> (나) $g(x) = \dfrac{4}{e^2}\displaystyle\int_1^x e^{t^2} f(t)\,dt$

$f(1) = \dfrac{1}{e}$일 때, $f(2) - g(2)$의 값은? [4점]

풀이

$$
\begin{array}{cc}
D & I \\
\dfrac{f(t)}{t} & te^{t^2} \\
 & \searrow^{+} \\
t^2e^{-t^2} & \dfrac{1}{2}e^{t^2} \longrightarrow \dfrac{1}{2}t^2 \\
\hline
1 & \dfrac{1}{2}t^2 \\
 & \searrow^{-} \\
0 & \dfrac{1}{6}t^3
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
g(2) &= \frac{4}{e^4}\int_1^2 e^{t^2} f(t)\,dt = \frac{4}{e^4}\int_1^2 te^{t^2}\cdot\frac{f(t)}{t}\,dt \\
&= \frac{4}{e^4}\left[\frac{f(t)e^{t^2}}{2t} - \frac{t^3}{6}\right]_1^2 = f(2) - \frac{20}{3e^4}
\end{aligned}
$$

에서 $f(2) - g(2) = \dfrac{20}{3e^4}$이다. □

연습문제 48 (2017년 10월 전북교육청 가형 21번)

미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x) = e^x + \int_0^1 f(x+t)\,dt$이다.

(나) $f(0) = 1,\ f(1) = 2e + 3$

$\int_1^2 xf(x)\,dx - \int_0^1 xf(x)\,dx$의 값은? [4점]

풀이

$x + t = u$라 하면 $\frac{du}{dt} = 1$이므로 $\int_0^1 f(x+t)\,dt = \int_x^{x+1} f(u)\,du$이다.

$$f(x) = e^x + \int_x^{x+1} f(u)\,du \implies f'(x) = e^x + f(x+1) - f(x)$$

$$\begin{aligned}
\int_1^2 xf(x)\,dx - \int_0^1 xf(x)\,dx &= \int_0^1 (x+1)f(x+1)\,dx - \int_0^1 xf(x)\,dx \\
&= \int_0^1 (x+1)\{f'(x) + f(x) - e^x\}\,dx - \int_0^1 xf(x)\,dx \\
&= \int_0^1 (x+1)f(x)\,dx + \int_0^1 (x+1)f'(x)\,dx - \int_0^1 (x+1)e^x\,dx - \int_0^1 xf(x)\,dx \\
&= \int_0^1 f(x)\,dx + \Big[(x+1)f(x)\Big]_0^1 - \int_0^1 f(x)\,dx - \Big[xe^x\Big]_0^1 \\
&= 2f(1) - f(0) - e = 3e + 5. \quad \square
\end{aligned}$$

연습문제 49 (2022학년도 수능 미적분 30번)

실수 전체의 집합에서 증가하고 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(1)=1,\ \displaystyle\int_1^2 f(x)\,dx=\frac{5}{4}$
>
> (나) 함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $x\geq 1$인 모든 실수 x에 대하여 $g(2x)=2f(x)$이다.

$\displaystyle\int_1^8 xf'(x)\,dx=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

풀이

$g(2)=2f(1)=2\ \longrightarrow\ f(2)=2$

$$\longrightarrow \int_1^2 xf'(x)\,dx=\int_{f(1)}^{f(2)} g(x)\,dx=2f(2)-f(1)-\int_1^2 f(x)\,dx=\frac{7}{4}$$

$g(4)=2f(2)=4\ \longrightarrow\ f(4)=4$

$$\longrightarrow \int_2^4 xf'(x)\,dx=\int_{f(2)}^{f(4)} g(x)\,dx=\int_2^4 g(x)\,dx=2\int_1^2 g(2x)\,dx=4\int_1^2 f(x)\,dx=5$$

$g(8)=2f(8)=8\ \longrightarrow\ f(8)=8$

$$\longrightarrow \int_4^8 xf'(x)\,dx=\int_{f(4)}^{f(8)} g(x)\,dx=\int_4^8 g(x)\,dx=2\int_2^4 g(2x)\,d=4\int_2^4 f(x)\,dx$$

$$=4\int_{g(2)}^{g(4)} f(x)\,dx=4\left\{4g(4)-2g(2)-\int_2^4 g(x)\,dx\right\}=28$$

$$\int_1^8 xf'(x)\,dx=\frac{7}{4}+5+28=\frac{139}{4}\ \longrightarrow\ p=4,\ q=139\ \longrightarrow\ p+q=143\quad\square$$

연습문제 50 (2021학년도 수능특강)

정의역이 $\left\{x \,\middle|\, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right\}$인 함수 $f(x) = \int_0^x \tan\theta\, d\theta$가 있다. $0 < t < \frac{\pi}{2}$인 실수 t에 대하여 $0 \le x \le t$일 때 곡선 $y = f(x)$의 곡선의 길이를 $l(t)$라 하자. $\lim_{t\to\frac{\pi}{2}-}\left\{l(t) + \ln\frac{\sin t}{f'(t)}\right\}$의 값은?

풀이

$f'(x) = \tan x$이므로

$$\begin{aligned}
l(t) &= \int_0^t \sqrt{1+\{f'(u)\}^2}\,du = \int_0^t \sqrt{1+\tan^2 u}\,du = \int_0^t \sec u\,du \\
&= \int_0^t \frac{1}{\cos u}\,du = \int_0^t \frac{\cos u}{\cos^2 u}\,du = \int_0^t \frac{\cos u}{1-\sin^2 u}\,du = \frac{1}{2}\int_0^t \cos u\left(\frac{1}{1+\sin u} + \frac{1}{1-\sin u}\right)du \\
&= \frac{1}{2}\ln(1+\sin u) - \frac{1}{2}(1-\sin u) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin u}{1-\sin u}.
\end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\frac{\pi}{2}-}\left\{l(t) + \ln\frac{\sin t}{f'(t)}\right\} &= \lim_{t\to\frac{\pi}{2}-}\left\{\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin u}{1-\sin u} + \ln\frac{\sin t}{\tan t}\right\} \\
&= \lim_{t\to\frac{\pi}{2}-}\left\{\ln\frac{1+\sin u}{\cos t} + \ln(\cos t)\right\} \\
&= \lim_{t\to\frac{\pi}{2}-} \ln(1+\sin u) = \ln 2. \quad \square
\end{aligned}$$

연습문제 51 (2025학년도 수능특강)

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{xf'(x)}{1+\pi^{f'(x)}}\,dx$의 값은?

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$이다.

(나) $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=12$

(다) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx = 12$

풀이

(가)에서 $f(-x)=f(x)$이므로 $f'(-x)=-f'(x)$이다. $I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{xf'(x)}{1+\pi^{f'(x)}}\,dx$라 하면 정리 9.1에 의해

$$I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{xf'(x)}{1+\pi^{f'(x)}}\,dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{-xf'(-x)}{1+\pi^{f'(-x)}}\,dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{xf'(x)}{1+\pi^{-f'(x)}}\,dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{xf'(x)\pi^{f'(x)}}{1+\pi^{f'(x)}}\,dx$$

이므로

$$\begin{aligned}2I&=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{xf'(x)}{1+\pi^{f'(x)}}\,dx+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{xf'(x)\pi^{f'(x)}}{1+\pi^{f'(x)}}\,dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} xf'(x)\,dx\\&=\frac{\pi}{2}f\left(\frac{\pi}{2}\right)-\left(-\frac{\pi}{2}\right)f\left(-\frac{\pi}{2}\right)-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx\\&=\pi f\left(\frac{\pi}{2}\right)-2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx=12\pi-24.\end{aligned}$$

따라서 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{xf'(x)}{1+\pi^{f'(x)}}\,dx=I=6\pi-12$이다. □

연습문제 52 (2022학년도 수능특강)

정의역이 $\{x \mid x>0\}$인 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 양의 실수 x에 대하여

$$f(x)>0, \quad \{f(x)\}^2 - xf(x)f'(x) = x^4 e^{-x}$$

을 만족시킨다.

$$\int_1^2 \frac{e^{2x}\{f(2x)\}^3}{x^3}\,dx - 12\int_2^4 f(x)\,dx = \frac{e^4}{m}\{f(4)\}^2 - \frac{e^2}{2}\{f(2)\}^3$$

일 때, 자연수 m의 값을 구하시오.

풀이

$$\begin{aligned}\{f(x)\}^2 - xf(x)f'(x) = x^4e^{-x} &\longrightarrow f(x) - xf'(x) = \frac{x^4e^{-x}}{f(x)}\\ &\longrightarrow \frac{xf'(x)-f(x)}{x^2} = -\frac{x^2e^{-x}}{f(x)}\\ &\longrightarrow \left(\frac{f(x)}{x}\right)' = -\frac{x^2e^{-x}}{f(x)}\end{aligned}$$

$2x=t$라 하면 $\dfrac{dt}{dx}=2$이므로

$$\begin{array}{ccc} D & & I \\ \left\{\dfrac{f(t)}{t}\right\}^2 & & 4e^t \\ & \searrow^{+} & \\ 3\left\{\dfrac{f(t)}{t}\right\}\left\{-\dfrac{t^2e^{-t}}{f(t)}\right\} = -3e^{-t}f(t) & \xrightarrow{-} & 4e^t \end{array}$$

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{e^{2x}\{f(2x)\}^3}{x^3}\,dx &= \int_2^4 \frac{4e^t\{f(t)\}^3}{t^3}\,dt\\ &= \left[4e^t\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}^3\right]_2^4 + 12\int_2^4 f(t)\,dt\\ &= \frac{e^4}{16}\{f(4)\}^3 - \frac{e^2}{2}\{f(2)\}^3 + 12\int_2^4 f(t)\,dt.\end{aligned}$$

따라서 $m=16$이다. □

연습문제 53 (2020학년도 수능특강)

양의 실수 전체의 집합에서 미분가능하고, 역함수가 존재하는 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $1 \le x \le 8$인 모든 실수 x에 대하여 $f'(x) > 0$, $f'(x)f^{-1}(x) = \dfrac{\sqrt{(x-1)(x^2-1)}}{2}$이다.
(나) $f(3) = 2$, $f(8) = 3$

$\displaystyle\int_1^3 \frac{f(x)}{f'(f^{-1}(x))}\,dx$의 값은?

풀이

(가)에서 $x = 1$을 대입하면 $f'(1)f^{-1}(1) = 0$, $f^{-1}(1) = 0$이다. (나)에서 $f^{-1}(3) = 8$이다. 합성함수의 미분법에 의해 $(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$이므로

$$\begin{aligned}\int_1^3 \frac{f(x)}{f'(f^{-1}(x))}\,dx &= \int_1^3 f(x)(f^{-1})'(x)\,dx = \Big[f(x)f^{-1}(x)\Big]_1^3 - \int_1^3 f'(x)f^{-1}(x)\,dx \\ &= f(3)f^{-1}(3) - f(1)f^{-1}(1) - \int_1^3 \frac{\sqrt{(x-1)(x^2-1)}}{2}\,dx \\ &= 16 - \int_1^3 \frac{\sqrt{(x-1)(x^2-1)}}{2}\,dx,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_1^3 \frac{\sqrt{(x-1)(x^2-1)}}{2}\,dx &= \frac{1}{2}\int_1^3 (x-1)\sqrt{x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int_2^4 (x-2)\sqrt{x}\,dx \\ &= \left[\frac{1}{5}x^2\sqrt{x} - \frac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_2^4 = \frac{16+8\sqrt{2}}{15},\end{aligned}$$

$$\int_1^3 \frac{f(x)}{f'(f^{-1}(x))}\,dx = 16 - \frac{16+8\sqrt{2}}{15} = \frac{8(28-\sqrt{2})}{15}. \quad \square$$

연습문제 54 (2024학년도 수능완성)

실수 전체의 집합에서 연속인 이계도함수를 갖는 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f'(x) < 0$
(나) $\{f'(x)\}^2 + 3\displaystyle\int_0^x f(2t)\,dt = 9$

$f''(0) = 0$, $\{f(1)\}^2 = \{f'(1)\}^2 - \{f'(0)\}^2$, $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx = -\frac{3}{2}\left(e - \frac{1}{e}\right)^2$일 때, $\displaystyle\int_0^1 \frac{f''(x) \times f(x)}{\{f'(x)\}^2}\,dx = \frac{k}{e^2+1}$이다. 상수 k의 값을 구하시오. [4점]

풀이

$$
\begin{array}{cc}
D & I \\
f(x) & \dfrac{f''(x)}{\{f'(x)\}^2} \\
 & \searrow^{+} \\
f'(x) & -\dfrac{1}{f'(x)} \longrightarrow -1 \\
\hline
-1 & 1 \\
 & \searrow^{-} \\
0 & x
\end{array}
$$

$$\int_0^1 \frac{f''(x) \times f(x)}{\{f'(x)\}^2}\,dx = \left[-\frac{f(x)}{f'(x)} + x\right]_0^1 = \frac{f(0)}{f'(0)} - \frac{f(1)}{f'(1)} + 1$$

(나)에 $x = 0$을 대입하면 $\{f'(0)\}^2 = 9$이다. (나)의 양변을 미분하면 $2f'(x)f''(x) + 3f(2x) = 0$이므로 $x = 0$을 대입하면 $f(0) = 0$이다. $2t = u$라 하면 $\dfrac{du}{dt} = 2$이므로

$$\int_0^1 f(2t)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^2 f(u)\,du = -\frac{3}{4}\left(e - \frac{1}{e}\right)^2.$$

따라서

$$\{f'(1)\}^2 = 9 - 3\int_0^1 f(2t)\,dt = 9 + \frac{9}{4}\left(e - \frac{1}{e}\right)^2,$$

$$\{f(1)\}^2 = \{f'(1)\}^2 - \{f'(0)\}^2 = \frac{9}{4}\left(e - \frac{1}{e}\right)^2,$$

$$\frac{\{f(1)\}^2}{\{f'(1)\}^2} = \frac{\frac{9}{4}\left(e - \frac{1}{e}\right)^2}{9 + \frac{9}{4}\left(e - \frac{1}{e}\right)^2} = \frac{(e^2-1)^2}{4e^2 + (e^2-1)^2} = \frac{(e^2-1)^2}{(e^2+1)^2},$$

$$\int_0^1 \frac{f''(x) \times f(x)}{\{f'(x)\}^2}\,dx = \frac{f(0)}{f'(0)} - \frac{f(1)}{f'(1)} + 1 = 1 - \frac{e^2-1}{e^2+1} = \frac{2}{e^2+1}$$

이므로 $k = 2$이다. □

연습문제 55 (2026학년도 9월 모의평가 미적분 30번)

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$와 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$는 모든 실수 x에 대하여

$$f(x) = \ln\left(\frac{g(x)}{1 + xf'(x)}\right)$$

를 만족시킨다. $f(1) = 4\ln 2$이고

$$\int_1^2 g(x)\,dx = 34, \qquad \int_1^2 xg(x)\,dx = 53$$

일 때, $\int_1^2 xe^{f(x)}\,dx$의 값을 구하시오. [4점]

풀이

주어진 식을 $g(x)$에 대하여 정리하면

$$f(x) = \ln\left(\frac{g(x)}{1 + xf'(x)}\right) \longrightarrow g(x) = e^{f(x)}\{1 + xf'(x)\} = (x)'e^{f(x)} + x(e^{f(x)})' = (xe^{f(x)})'.$$

$$\int_1^2 g(x)\,dx = \int_1^2 (xe^{f(x)})'\,dx = \Big[xe^{f(x)}\Big]_1^2 = 2e^{f(2)} - e^{f(1)} = 2e^{f(2)} - 16$$

이므로 $e^{f(2)} = 25$이다. 따라서

$$\int_1^2 xg(x)\,dx = \int_1^2 x(xe^{f(x)})'\,dx = \Big[x^2e^{f(x)}\Big]_1^2 - \int_1^2 xe^{f(x)}\,dx = 84 - \int_1^2 xe^{f(x)}\,dx$$

에서 $\int_1^2 xe^{f(x)}\,dx = 31$이다. □