

# 자연수/정수 조건의 처리

tonextpage

<https://github.com/tonextpage>

예로부터 수능에서는 미지수가 자연수 또는 정수로 제한된 조건을 제시하는 문제를 출제하였다. 자연수 또는 정수는 실수와 달리 연속성을 갖지 않기 때문에 문제에 해당 조건이 있으면 복잡한 경우 나누기가 필요하다. 복잡한 경우의 수 시험에서 한 문제에 소비되는 시간이 필연적으로 증가함을 의미하며, 경우 분류를 최적화하지 않으면 시간을 허비하게 된다. 이 칼럼에서는 자연수와 정수의 근본적인 성질로 경우 분류 및 조건 처리의 기준과 시작점을 제시할 것이다.

## 1 소인수분해

모든 자연수는 산술의 기본 정리에 따라 소수들의 곱으로 표현하는 방법, 즉 소인수분해가 유일하게 존재한다.

### 정리 1.1 (산술의 기본 정리)

모든 자연수는 유일한 소인수분해를 갖는다.

소인수분해로 얻은 소수의 곱 형태를 이용하거나, 소인수에 주목하는 방식으로 조건의 처리를 시도할 수 있다.

### 예제 1.2 (2017년 3월 학력평가 나형 21번)

자연수  $m$ 에 대하여 집합  $A_m$ 을

$$A_m = \left\{ (a, b) \mid 2^a = \frac{m}{b}, a, b \text{는 자연수} \right\}$$

라 할 때, 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

〈보기〉

ㄱ.  $A_4 = \{(1, 2), (2, 1)\}$

ㄴ. 자연수  $k$ 에 대하여  $m = 2^k$ 이면  $n(A_m) = k$ 이다.

ㄷ.  $n(A_m) = 1$ 이 되도록 하는 두 자리 자연수  $m$ 의 개수는 23이다.

풀이

ㄴ과 ㄷ에서 집합  $A_m$ 의 원소의 개수  $n(A_m)$ 에 대한 명제를 제시하고 있으므로 먼저  $n(A_m)$ 을 구해보자. 집합  $A_m$ 의 정의로부터

$$2^a = \frac{m}{b} \rightarrow m = 2^a b$$

이다.  $m$ 의 소인수분해에서 나타나는 2의 개수(지수)를  $a_m$ 이라 하고,  $b_m = m/2^{a_m}$ 이라 하자. 즉  $m$ 의 소인수분해는  $m = 2^{a_m} b_m$ 이다. 따라서 집합  $A_m$ 에서 가능한  $a$ 의 값은  $1, \dots, a_m$ 으로 모두  $a_m$ 개이다.

ㄱ.  $4 = 2^2$ 이므로  $A_4 = \{(1, 2), (2, 1)\}$ 이다. (참)

ㄴ. 위의 논의에 따라  $m = 2^k$ 이면  $n(A_m) = k$ 이다. (참)

ㄷ.  $n(A_m) = 1$ 이 되려면  $m = 2 \times (\text{홀수})$ 가 되어야 하므로 가능한 홀수는  $5, 7, 9, \dots, 49$ 로 총 23개이다. (참)  $\square$

## 2 경우 분류 (1) – 약수/배수 관계

조건으로 제시된 수의 범위와 상관없이, 문제를 푸는 일반적인 방법은 미지수나 문자 사이의 관계식을 찾는 것이다. 이때  $(\text{정수}) \times (\text{정수}) = (\text{정수})$ 의 형태로 식을 변형하면 정수 사이의 약수/배수 관계를 이용할 수 있다. 이는 정수 조건의 부정방정식을 푸는 기본 사고방식이 된다.

### 예제 2.1 (2018년 6월 고2 학력평가 나형 20번)

첫째항이  $-36$ 이고 공차가  $d$ 인 등차수열  $\{a_n\}$ 이 있다. 다음 조건을 만족하는 모든 자연수  $d$ 의 값의 합은? [4점]

(가) 모든 자연수  $n$ 에 대하여  $a_n \neq 0$ 이다.

(나)  $\sum_{k=1}^m a_k = 0$ 인 자연수  $m$ 이 존재한다.

#### 풀이

수열  $\{a_n\}$ 의 일반항은  $a_n = -36 + (n-1)d$ 이다.

(가) 모든 자연수  $n$ 에 대하여  $(n-1)d \neq 36$ 이다. 즉  $d$ 는 36의 약수가 아니다.

(나)  $\sum_{k=1}^m a_k = \frac{m}{2}(a + 1 + a_m) = \frac{m}{2}(-72 + (m-1)d)$ 에서  $(m-1)d = 72$ 이다. 즉  $d$ 는 72의 약수이다.

$d$ 는 36의 약수가 아니면서 72의 약수이므로 모든  $d$ 의 합은  $8 + 24 + 72 = 104$ 이다.  $\square$

**참고.** 수열은 정의역이 자연수 전체의 집합인 함수이다. 따라서 이 문제에서 자연수 제약 걸린 문자는  $d, n, m$ 의 세 가지이다. 자연수 조건이 주어진 경우, 수열의 항 번호도 자연수임을 적극적으로 활용하여 부정방정식을 세워야 한다.

## 3 경우 분류 (2) – 나눗셈의 나머지

나눗셈에서 나머지를 고려하는 것은 정수를 탐구하는 가장 기본적인 자세이다. 특히 나머지로 가능한 값 사이의 연산을 통해 불필요한 경우 제거에 도움이 된다. 자연수  $n$ 으로 나누었을 때 등장할 수 있는 나머지는  $0, 1, \dots, n-1$ 의  $n$ 가지이다. 이때 이 수들이 나머지임을 명시하기 위해 가로선을 그어  $\overline{0}, \overline{1}, \dots, \overline{n-1}$ 이라 하고, 집합  $\mathbb{Z}_n = \{\overline{0}, \overline{1}, \dots, \overline{n-1}\}$ 로 정의하자. 즉  $\mathbb{Z}_n$ 은  $n$ 으로 나눈 나머지의 집합이 된다. 이때  $\mathbb{Z}_n$ 의 두 원소  $\overline{x}, \overline{y}$  사이에 다음 두 연산  $\dot{+}, \dot{\times}$ 를 정의하자.

$$\overline{x} \dot{+} \overline{y} = \overline{(x+y) \bmod n}, \quad \overline{x} \dot{\times} \overline{y} = \overline{xy \bmod n}$$

여기서  $m \bmod n$ 은  $m$ 을  $n$ 으로 나눈 나머지이다. 예를 들어  $\mathbb{Z}_4 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}\}$ 에 대하여

$$\overline{2} \dot{+} \overline{3} = \overline{(2+3) \bmod 4} = \overline{1}, \quad \overline{2} \dot{\times} \overline{3} = \overline{2 \times 3 \bmod 4} = \overline{2}$$

이다. 이 방식으로 나머지끼리 먼저 계산하면 직접 계산하기 전에 빠르게 경우 분류 및 모순 판단이 가능하다.

### 예제 3.1 (2019년 10월 학력평가 나형 29번)

첫째항이 짝수인 수열  $\{a_n\}$ 은 모든 자연수  $n$ 에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 3 & (a_n \text{이 홀수인 경우}) \\ \frac{a_n}{2} & (a_n \text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킨다.  $a_5 = 5$ 일 때, 수열  $\{a_n\}$ 의 첫째항이 될 수 있는 모든 수의 합을 구하시오. [4점]

#### 풀이

$a_n$ 이 홀수이면  $a_{n+1} = a_n + 3$ 은 짝수이다. 반대로  $a_n$ 이 짝수이면  $a_{n+1}$ 은 홀수와 짝수 모두 가능하다.  $a_5 = 5$ 는 홀수이므로  $a_4$ 은 짝수이고  $a_4 = 10$ 이다.  $a_4$ 는 짝수이므로  $a_3$ 은 두 가지 경우를 고려해야 한다.

(i)  $a_3$ 이 홀수이면  $a_3 = 7$ 이다. 같은 논리로  $a_2$ 는 짝수이며  $a_2 = 14$ 이다.  $a_1$ 은 짝수이므로  $a_1 = 28$ 이다.

(ii)  $a_3$ 이 짝수이면  $a_3 = 20$ 이다. 이제  $a_2$ 에도 두 가지 경우가 있다.  $a_2$ 가 홀수이면  $a_2 = 17$ ,  $a_1 = 34$ 이다.  $a_2$ 가 짝수이면  $a_2 = 40$ ,  $a_1 = 80$ 이다.

(i), (ii)로부터 모든  $a_1$ 의 값의 합은  $28 + 34 + 80 = 142$ 이다. □

**참고.** 풀이에서는 글로 길게 썼지만, 실제 풀이에서는 간단한 수형도를 그려  $a_1$ 을 빠르게 구하면 된다.

## 4 기타 전략

몇몇 문제에서는 매우 유명한 아이디어가 등장하기도 한다. 대표적으로 수의 진법 변환을 활용한 식이 등장한다.

### 예제 4.1 (2021학년도 수능특강)

수열  $\{a_n\}$ 은  $a_1 = 1$ 이고, 모든 자연수  $n$ 에 대하여

$$\begin{cases} a_{2n} = a_n \\ a_{2n+1} = a_n + 1 \end{cases}$$

을 만족시킨다. 100 이하의 자연수  $k$ 에 대하여  $a_k = 2$ 인 모든 자연수  $k$ 의 개수는?

#### 풀이

$a_n$ 은  $n$ 을 이진수로 변환하였을 때 등장하는 1의 개수이다. (Why?)  $a_k = 2$ 임은 곧 이진수 자연수에서 등장하는 1의 개수가 단 두 개의 의미한다. 이때  $2^6 = 64 < 100$ 이고  $2^7 = 128 > 100$ 이므로 고려해야 할 이진수의 자릿수는  $2^0$ 에서  $2^6$ 까지 총 7개이다. 따라서 7개의 자리 중에서 1이 들어갈 두 자리를 고르는 경우의 수는 21이다. □

## 연습문제

### 연습문제 1 (2022학년도 수능특강)

자연수  $m$ 에 대하여 집합  $A_m$ 을

$$A_m = \{(a, b) \mid m = a \log_2 b \text{이고, } a, b \text{는 자연수}\}$$

라 할 때, 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈보기〉

ㄱ.  $A_2 = \{(1, 4), (2, 2)\}$

ㄴ. 두 자연수  $p, q$ 에 대하여  $n(A_{pq}) = n(A_p) \times n(A_q)$ 이다.

ㄷ.  $n(A_m) = 4$ 를 만족시키는 30 이하의 모든 자연수  $m$ 의 개수는 9이다.

풀이

ㄴ과 ㄷ에서 집합  $A_m$ 의 원소의 개수에 대한 명제를 제시하고 있으므로 먼저  $n(A_m)$ 을 구해보자. 집합  $A_m$ 의 정의에서

$$m = a \log_2 b \longrightarrow b = 2^{m/a}$$

이고  $a, b$  모두 자연수이므로  $m/a$ 는 자연수이다. 따라서  $a$ 는  $m$ 의 약수이고  $n(A_m)$ 은  $m$ 의 약수의 개수이다.

ㄱ.  $a$ 로 가능한 값은 1, 2이고, 이에 따른  $b$ 의 값은 각각 4, 2이다. (참)

ㄴ.  $(pq \text{의 약수의 개수}) = (p \text{의 약수의 개수}) \times (q \text{의 약수의 개수})$ 는 일반적으로 성립하지 않는다. (거짓)

ㄷ. 약수의 개수가 4가 되기 위해서는 자연수  $m$ 이 서로 다른 두 소수  $p_1, p_2$ 의 곱  $m = p_1 p_2$ 이거나 소수  $p$ 의 세제곱  $m = p^3$ 여야 한다. 30 이하의 자연수 중에서 그러한 수는 9개이다. (참)  $\square$

연습문제 2 (2022 학년도 9월 모의평가 공통 13번)

첫째항이  $-45$ 이고 공차가  $d$ 인 등차수열  $\{a_n\}$ 이 다음 조건을 만족시키도록 하는 모든 자연수  $d$ 의 값의 합은? [4점]

(가)  $|a_m| = |a_{m+3}|$ 인 자연수  $m$ 이 존재한다.

(나) 모든 자연수  $n$ 에 대하여  $\sum_{k=1}^n a_k > -100$ 이다.

풀이

증가 또는 감소만 하는 등차수열의 경향에 따라 (가)로부터  $a_m = -a_{m+3}$ 이므로, 이를 정리하면  $(2m+1)d = 90$ 이다. 이때  $2m+1$ 은 3 이상의 홀수이므로 다음과 같이 경우를 나눌 수 있다.

$2m+1$	3	5	9	15	45
$d$	30	18	10	6	2
$(m, d)$	(1, 30)	(2, 18)	(4, 10)	(7, 6)	(22, 2)

$a_m + a_{m+3} = 0$ 로부터  $a_{m+1} + a_{m+2} = 0$ 이고  $a_{m+1} < a_{m+2}$ 이므로  $a_{m+1} < 0$ 이고  $a_{m+2} > 0$ 이다. 따라서 수열  $\{a_n\}$ 은  $(m+1)$ 항까지만 음수이고 이후로는 모두 양수이다. 따라서  $\sum_{k=1}^n a_k$ 의 최솟값은

$$\sum_{k=1}^{m+1} a_k = \frac{(m+1)(a_1 + a_{m+1})}{2} = \frac{(m+1)(md - 90)}{2} = \frac{(m+1)(md - (2m+1)d)}{2} = -\frac{(m+1)^2 d}{2}$$

이다. 이 값이  $-100$ 보다 커야 하므로  $(m+1)^2 d < 200$ 이다. (가)의 각 경우를 확인하자.

$(m, d)$	(1, 30)	(2, 18)	(4, 10)	(7, 6)	(22, 2)
$(m+1)^2 d$	$120 < 200$	$168 < 200$	$250 \geq 200$	$364 \geq 200$	$1058 \geq 200$

따라서 가능한 모든 자연수  $d$ 의 합은  $30 + 18 = 48$ 이다. □

**참고.** (나)에서  $(m+1)^2 d < 200$ 을 이끌어내는 대신에 (가)에서 구한  $(m, d)$ 를 직접 대입하고 음수인 항을 나열하여 계산하는 것이 더 편하다. 90 대신엔  $(2m+1)d$ 를 대입하는 행위는 다소 발상적이기 때문이다. 그럼에도 이 풀이를 제시하는 이유는 자연수/정수 조건이 주어진 경우에 과감한 계산과 식 세우기를 강조하기 위함이다.

연습문제 3 (2021년 4월 학력평가 공통 21번)

첫째항이 자연수인 수열  $\{a_n\}$ 이 모든 자연수  $n$ 에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n - 2 & (a_n \geq 0) \\ a_n + 5 & (a_n < 0) \end{cases}$$

을 만족시킨다.  $a_{15} < 0$ 이 되도록 하는  $a_1$ 의 최솟값을 구하시오. [4점]

풀이

$a_1$ 은 자연수, 즉 양수이므로 2를 빼는 행위를 자연수 범위에서 지속하지 못하는 경우에 수열에서 음수가 등장한다. 2를 계속 빼는 연산의 결과는  $a_1$ 의 홀짝성에 좌우된다. (자연수의 나눗셈은 뺄셈의 반복임에 주목하라.) 따라서  $a_1$ 의 홀짝성에 따라 경우를 나누어 항의 부호가 바뀌는 지점을 관찰하자.

(i)  $a_1 = 2k$  ( $k$ 는 자연수)인 경우:  $a_1$ 부터  $a_k$ 까지 모두 양수이고,  $a_{k+1} = 0$ ,  $a_{k+2} = -2$ 이다.

(ii)  $a_1 = 2k - 1$  ( $k$ 는 자연수)인 경우:  $a_1$ 부터  $a_k$ 까지 모두 양수이고,  $a_{k+1} = -1$ ,  $a_{k+2} = 4$ 이다.  $(k+2)$ 항이 짝수이므로 (i)과 같은 논리로  $a_{k+4} = 0$ ,  $a_{k+5} = -2$ 이다.

(i), (ii)로부터  $a_1$ 의 홀짝성에 관계없이  $-2$ 가 등장함을 알 수 있다.  $-2$ 부터 몇 개의 항을 더 나열해보면 다음과 같다.

$$-2 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightarrow -1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 0 \rightarrow -2$$

수열  $\{a_n\}$ 은 음수가 등장하면서부터 주기성을 갖는다. 이제 각 경우에 대하여 수열에서 음수인 항을 먼저 등장하는 순서대로 나열하면 다음과 같다. (화살표 위의 숫자는 항 번호의 규칙을 나타낸다.)

(i)  $a_1 = 2k$  ( $k$ 는 자연수)인 경우:

$$a_{k+2} = -2 \xrightarrow{+3} a_{k+5} = -1 \xrightarrow{+4} a_{k+9} = -2 \xrightarrow{+3} a_{k+12} = -1 \xrightarrow{+4} a_{k+16} = -2 \rightarrow \dots$$

(ii)  $a_1 = 2k - 1$  ( $k$ 는 자연수)인 경우:

$$a_{k+1} = -1 \xrightarrow{+4} a_{k+5} = -2 \xrightarrow{+3} a_{k+8} = -1 \xrightarrow{+4} a_{k+12} = -2 \xrightarrow{+3} a_{k+15} = -1 \rightarrow \dots$$

그러므로  $a_{15} < 0$ 이면서  $a_1$ 이 최소이려면  $k + 12 = 15$ , 즉  $k = 3$ 이어야 하며, 이때  $a_1$ 의 최솟값은 5이다.  $\square$

**참고.** 공식 해설에서는  $a_1 = 1$ 부터 직접 대입하여 확인한다. 이는 답이 작기 때문에 유효한 전략이며, 약간의 문제 변형으로 무용지물이 된다. 물론 실전에서는 여러  $a_1$ 의 값을 실험해보면서 주기성을 발견하고 이를 일반화해야 한다.

연습문제 4 (2023학년도 수능 공통 15번)

모든 항이 자연수이고 다음 조건을 만족시키는 모든 수열  $\{a_n\}$ 에 대하여  $a_9$ 의 최댓값과 최솟값을 각각  $M, m$ 이라 할 때,  $M + m$ 의 값은? [4점]

(가)  $a_7 = 40$

(나) 모든 자연수  $n$ 에 대하여

$$a_{n+2} = \begin{cases} a_{n+1} + a_n & (a_{n+1} \text{이 } 3 \text{의 배수가 아닌 경우}) \\ \frac{1}{3}a_{n+1} & (a_{n+1} \text{이 } 3 \text{의 배수인 경우}) \end{cases}$$

이다.

풀이

수열  $\{a_n\}$ 의 한 항은 이전 항의 3의 배수 여부에 따라 정의된다. 따라서  $a_n$ 을 3을 나눈 나머지를 기준으로 경우를 분류하자.  $a_n$ 을 3으로 나눈 나머지를  $b_n$ 이라 하자. 아래는 수열  $\{b_n\}$ 의 귀납적 정의이다.

(i)  $b_{n+1} = 1, 2$ 이면  $b_{n+2}$ 는  $b_{n+1} + b_n$ 을 3으로 나눈 나머지이다.

(ii)  $b_{n+1} = 0$ 이면  $b_{n+2}$ 는  $a_{n+1}/3$ 을 3으로 나눈 나머지이다.

(i), (ii)에서 다음을 얻는다.

(a) 수열  $\{a_n\}$ 의 어떤 항이 3으로 나누어떨어지지 않으면 그 앞의 항도 찾아야 한다.

(b) 수열  $\{a_n\}$ 의 어떤 항이 3으로 나누어떨어지면 다음 항을 찾을 수 있다.

지금까지의 결론을 바탕으로 문제를 풀면 아래의 표로 끝난다. 표의 숫자들은  $(b_n)_{a_n}$ 의 형태로 나열되어 있다. 예를 들어  $n = 7$ 일 때, 표에서  $1_40$ 은  $a_7 = 40$ ,  $b_7 = 1$ 임을 뜻한다.

$n$	4	5	6	7	8	9
경우 1 ( $b_6 = 0$ )			$0_{120}$	$1_{40}$	$1_{160}$	$2_{200}$
경우 2 ( $b_6 = 1$ )		$0_{30}$	$1_{10}$	$1_{40}$	$2_{50}$	$0_{90}$
경우 3 ( $b_6 = 2$ )	$0_{24}$	$2_8$	$2_{32}$	$1_{40}$	$0_{72}$	$1_{24}$

$M = 200$ ,  $m = 240$ 이므로  $M + m = 2240$ 이다.

□

연습문제 5 (2022년 10월 학력평가 공통 15번)

수열  $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 $n$ 항까지의 합을  $S_n$ 이라 하자. 두 자연수  $p, q$ 에 대하여  $S_n = pn^2 - 36n + q$ 일 때,  $S_n$ 이 다음 조건을 만족시키도록 하는  $p$ 의 최솟값을  $p_1$ 이라 하자.

임의의 두 자연수  $i, j$ 에 대하여  $i \neq j$ 이면  $S_i \neq S_j$ 이다.

$p = p_1$ 일 때,  $|a_k| < a_1$ 을 만족시키는 자연수  $k$ 의 개수가 3이 되도록 하는 모든  $q$ 의 값의 합은? [4점]

풀이

주어진 조건에 의해  $S_i = S_j$ 은  $i = j$  이외의 경우에는 성립할 수 없다.  $S_i - S_j$ 를 계산하면

$$S_i - S_j = (pi^2 - 36i + q) - (pj^2 - 36j + q) = (i - j)(p(i + j) - 36)$$

이다. 이 값은  $i = j$  이외의 조건에서는 0이 될 수 없으므로  $p_1 = 5$ 이다.  $p = p_1$ 일 때, 수열  $\{a_n\}$ 은 다음과 같다.

$$\begin{cases} a_1 = S_1 = q - 31 \\ a_n = S_n - S_{n-1} = 10n - 41 \quad (n \geq 2) \end{cases}$$

항의 절댓값이 특정 값보다 작은 상황을 고려하기 위해  $\{a_n\}$ 에서 부호가 변하는 지점을 관찰하자.

$$a_2 = -21, \quad a_3 = -11, \quad a_4 = -1, \quad a_5 = 9, \quad a_6 = 19$$

에서  $|a_k| < a_1 = q - 31$ 을 만족하는 3개의  $k$ 는 절댓값이 가장 작은 세 항의 번호인 3, 4, 5가 되어야 한다. 따라서  $11 < q - 31 \leq 19$ 에서  $42 < q < 50$ 이고 이를 만족하는 모든 자연수  $q$ 의 합은  $43 + \cdots + 49 = 372$ 이다.  $\square$



연습문제 6 (2022 학년도 사관학교 공통 15번)

다음 조건을 만족시키는 모든 수열  $\{a_n\}$ 에 대하여  $a_1$ 의 최솟값을  $m$ 이라 하자.

(가) 수열  $\{a_n\}$ 의 모든 항은 정수이다.

(나) 모든 자연수  $n$ 에 대하여

$$a_{2n} = a_3 \times a_n + 1, \quad a_{2n+1} = 2a_n - a_2$$

이다.

$a_1 = m$ 인 수열  $\{a_n\}$ 에 대하여  $a_9$ 의 값은? [4점]

풀이

두 식에  $n = 1$ 을 대입하면  $a_2 = a_3 \times a_1 + 1$ ,  $a_3 = 2a_1 - a_2$ 이다.  $a_3$ 과  $a_1$ 에 대하여 정리하면

$$a_3 = \frac{2a_1 - 1}{a_1 + 1} = 2 - \frac{3}{a_1 + 1}$$

이고,  $a_3$ 은 정수이므로  $a_1 + 1$ 은 (부호를 고려한) 3의 약수이다. 따라서  $m = -4$ 이다.  $a_1 = m$ 일 때,  $a_3 = 3$ ,  $a_2 = -11$ 이므로  $a_9 = 2a_4 - a_2 = 2(a_3 \times a_2 + 1) - a_2 = -53$ 이다.  $\square$

**참고.** (정수)  $\times$  (정수) = (정수)의 형태로 변형해도 되지만, 유리식으로 변형하면 최솟값을 구하기 쉽다.

연습문제 7 (2023학년도 6월 모의평가 공통 15번)

자연수  $k$ 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 수열  $\{a_n\}$ 이 있다.

$a_1 = 0$ 이고, 모든 자연수  $n$ 에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + \frac{1}{k+1} & (a_n \leq 0) \\ a_n - \frac{1}{k} & (a_n > 0) \end{cases}$$

이다.

$a_{22} = 0$ 이 되도록 하는 모든  $k$ 의 값의 합은? [4점]

풀이

임의의 자연수  $n$ 에 대하여  $a_n$ 은  $a_1 = 0$ 에  $\frac{1}{k+1}$ 을 더하거나  $\frac{1}{k}$ 을 빼는 행위를  $(n-1)$ 번 시행하여 얻는다. 이때 주어진  $n$ 에 대하여  $a_n$ 을 얻기까지  $\frac{1}{k}$ 을 빼는 행위를  $p_n$ 회 시행했다고 하면,  $\frac{1}{k+1}$ 을 더하는 행위는  $(n-1-p_n)$ 회 시행한 것이 된다. 즉 다음 식이 성립한다.

$$a_n = \frac{n-1-p_n}{k+1} - \frac{p_n}{k}$$

$a_{22} = 0$ 으로부터

$$a_{22} = \frac{21-p_{22}}{k+1} - \frac{p_{22}}{k} = 0 \rightarrow p_{22} = \frac{21k}{2k+1}$$

이다.  $p_{22}$ 는 자연수이므로  $2k+1$ 은  $21k$ 의 약수여야 한다.  $k$ 와  $2k+1$ 은 서로소이므로  $2k+1$ 은 21의 약수이다. 따라서 가능한 자연수  $k$ 는 1, 3, 10이고 그 합은 14이다.  $\square$

연습문제 8 (2006학년도 사관학교 나형 10번)

수열의 합  $\sum_{k=1}^n 2^k$ 의 값이 65의 배수가 되도록 하는 자연수  $n$ 의 최솟값은? [3점]

---

풀이

주어진 합은  $2(2^n - 1)$ 이고 2와 65는 서로소이므로  $2^n - 1$ 이 65의 배수가 되어야 한다.  $65 = 5 \times 13$ 이므로  $2^n$ 을 5와 13으로 나눈 나머지를 관찰하자.  $2^n$ 을 5로 나눈 나머지는 2, 4, 3, 1이 순서대로 반복된다. 따라서  $n$ 은 4의 배수가 되어야 한다. 자연수  $m$ 에 대하여  $n = 4m$ 이라 하자.  $2^{4m} = 16^m = (13 + 3)^m$ 이므로  $2^{4m}$ 을 13으로 나눈 나머지는  $3^m$ 을 13으로 나눈 나머지와 같다.  $3^m$ 을 13으로 나눈 나머지는 3, 9, 1이 순서대로 반복된다. 따라서  $m$ 은 3의 배수이다. 그러므로  $n$ 은 12의 배수여야 하므로 최솟값은 12이다.  $\square$

---

연습문제 9 (2021 학년도 6월 모의평가 가형 21번)

수열  $\{a_n\}$ 의 일반항은

$$a_n = \log_2 \sqrt{\frac{2(n+1)}{n+2}}$$

이다.  $\sum_{k=1}^m a^k$ 의 값이 100 이하의 자연수가 되도록 하는 모든 자연수  $m$ 의 값의 합은? [4점]

풀이

$$a_n = \frac{1}{2}(1 + \log_2(n+1) - \log_2(n+2)) \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m a_k &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m (1 + \log_2(n+1) - \log_2(n+2)) \\ &= \frac{1}{2}(m + \log_2 2 - \log_2(m+2)) \\ &= \frac{1}{2}(m+1 - \log_2(m+2)) \end{aligned}$$

이다. 이 값이 자연수가 되려면  $m+2$ 는 2의 거듭제곱이어야 하고,  $m+1 - \log_2(m+2)$ 는 짝수여야 한다.  $m+1$ 은 홀수이므로  $m+2$ 는 2의 홀수 거듭제곱이다. 또  $m+2 \geq 2^8 = 256$ 이면 값이 100을 초과하게 된다. 따라서 가능한 자연수  $m$ 은 다음과 같다.

$m+2$	$2^3 = 8$	$2^5 = 32$	$2^7 = 128$
$m$	6	30	126
$\sum_{k=1}^m a_k$	2	13	60

구하는 모든 자연수  $m$ 의 합은 162이다.

□

연습문제 10 (2020학년도 4월 학력평가 가형 21번)

자연수  $k$ 에 대하여 집합  $A_k$ 를

$$A_k = \left\{ \sin \frac{2(m-1)}{k} \pi \mid m \text{은 자연수} \right\}$$

라 할 때, 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

〈보기〉

$$\neg. A_3 = \left\{ -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$$

ㄴ. 1이 집합  $A_k$ 의 원소가 되도록 하는 두 자리 자연수  $k$ 의 개수는 22이다.

ㄷ.  $n(A_k) = 11$ 을 만족시키는 모든  $k$ 의 값의 합은 33이다.

풀이

$\sin \frac{2(m-1)}{k} \pi = \sin \frac{2\pi}{k} (m-1)$ 이므로 집합  $A_k$ 는 좌표평면 위의 단위원  $x^2 + y^2 = 1$ 에 내접하면서 점  $(1, 0)$ 을 한 꼭짓점으로 하는 정 $k$ 각형의 꼭짓점의  $y$ 좌표의 집합이다. 이 정 $k$ 각형은  $x$ 축에 대하여 대칭이다.

$$\neg. \sin 0 = 0, \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ (참)}$$

ㄴ. 1이  $A_k$ 의 원소가 되기 위해서는 꼭짓점 중 하나가  $(0, 1)$ 이어야 하므로  $k$ 는 4의 배수여야 한다. 따라서 가능한 두 자리 자연수는 12부터 96까지 22개이다. (참)

ㄷ.  $k$ 가 4의 배수이거나 4로 나눈 나머지가 2인 수이면 정 $k$ 각형은  $y$ 축에 대하여 대칭이다. 이때  $k$ 가 4의 배수인 경우에는 점  $(-1, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(0, -1)$ 을 모두 꼭짓점이므로, 꼭짓점의  $y$ 좌표가 11가지이려면  $0 < y < 1$ 인 부분에 8개의 꼭짓점이 있어야 한다. 대칭성에 의해  $-1 < y < 0$ 인 부분에도 8개의 꼭짓점이 있어야 하므로 이때의  $k$ 는  $4 + 8 + 8 = 20$ 이다.  $k$ 를 4로 나눈 나머지가 2이면 점  $(-1, 0)$ 은 꼭짓점이고 점  $(0, 1)$ ,  $(0, -1)$ 은 꼭짓점이 아니므로  $0 < y < 1$ 인 부분과  $-1 < y < 0$ 인 부분에 각각 10개의 꼭짓점이 있어야 한다. 따라서 이때의  $k$ 는  $2 + 10 + 10 = 22$ 이다. 이외의 경우에는  $y$ 축 대칭이 아니므로 정확히 11개의 꼭짓점이 존재해야 한다. 그러므로 모든  $k$ 의 값의 합은  $20 + 22 + 11 = 53$ 이다. (거짓)  $\square$

연습문제 11 (2019학년도 6월 고2 학력평가 나형 21번)

음이 아닌 세 정수  $a, b, n$ 에 대하여

$$(a^2 + b^2 + 2ab - 4) \cos \frac{n}{4}\pi + (b^2 + ab + 2) \tan \frac{2n+1}{4}\pi = 0$$

일 때,  $a + b + \sin^2 \frac{n}{8}\pi$ 의 값은? (단,  $a \geq b$ ) [4점]

풀이

자연수  $n$ 에 대하여  $\cos \frac{n}{4}\pi$ 와  $\tan \frac{2n+1}{4}\pi$ 는 각각 8, 2의 주기를 갖는다. 이를 음이 아닌 정수  $k$ 에 대하여 다음 표와 같이 정리할 수 있다.

$n$	$8k$	$8k+1$	$8k+2$	$8k+3$	$8k+4$	$8k+5$	$8k+6$	$8k+7$
$\cos \frac{n}{4}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\tan \frac{2n+1}{4}\pi$	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1

- (i)  $n \equiv 0 \pmod{8}$ 인 경우: 이 경우 식에 무리수인  $\sqrt{2}$ 가 포함되므로 계수에 해당하는  $a^2 + b^2 + 2ab - 4$ 와  $b^2 + ab + 2$ 는 모두 0이어야 한다. 특히

$$b^2 + ab + 2 = 0 \longrightarrow b(a+b) = -2 < 0$$

에서  $b$ 는 음이 아닌 정수이므로  $b > 0$ 이다. 따라서  $a+b < 0$ 에서  $a < -b < 0$ 이므로 이는  $a$ 가 음이 아닌 정수임에 모순이다.

- (ii)  $n \equiv 2 \pmod{8}$ 인 경우:  $b^2 + ab + 2 = 0$ 이므로 (i)과 같은 논리로 이 식을 만족하는 음이 아닌 정수  $a, b$ 는 존재하지 않는다.

- (iii)  $n \equiv 4 \pmod{8}$ 인 경우:  $a^2 + b^2 + 2ab - 4 = -b^2 - ab - 2$ 에서  $a^2 + 3ab + 2b^2 = 2$ ,  $(a+b)(a+2b) = 2$ 이고  $a+b < a+2b$ 이므로  $a+b = 1$ ,  $a+2b = 2$ 에서  $(a, b) = (0, 1)$ 이다. 이는  $a \geq b$ 를 만족하지 않는다.

- (iv)  $n \equiv 6 \pmod{8}$ 인 경우:  $a^2 + b^2 + 2ab - 4 = b^2 + ab + 2$ 에서  $a(a+b) = 6$ 이고  $a < a+b$ 이므로  $(a, b) = (1, 5), (2, 1)$ 이고, 여기서  $a \geq b$ 를 만족하는 것은  $(2, 1)$ 이다.

(i)-(iv)에서  $a = 2$ ,  $b = 1$ 이고,  $\sin^2 \frac{n}{8}\pi = \sin^2 \frac{8k+4}{8}\pi = 1$ 이다. 따라서 구하는 값은  $2 + 1 + 1 = 4$ 이다.  $\square$

**참고.** 정수 조건과 삼각함수의 주기성을 동시에 생각하면 나눗셈의 나머지를 통한 경우 분류라는 아이디어는 필연적이다. 이후 무리수의 상등을 이용하여 절반의 경우의 수를 동시에 다룬다. 또한 모든 경우에서 (정수)  $\times$  (정수) = (정수)의 형태로 식을 변형하고 인수의 대소를 비교하여 약수/배수 관계를 적용한다.

연습문제 12 (2022학년도 6월 모의평가 공통 21번)

다음 조건을 만족시키는 최고차항의 계수가 1인 이차함수  $f(x)$ 가 존재하도록 하는 모든 자연수  $n$ 의 값의 합을 구하시오. [4점]

(가)  $x$ 에 대한 방정식  $(x^n - 64)f(x) = 0$ 은 서로 다른 두 실근을 갖고, 각각의 실근은 중근이다.

(나) 함수  $f(x)$ 의 최솟값은 음의 정수이다.

풀이

$n$ 이 홀수일 때 방정식  $x^n - 64 = 0$ 은 유일한 실근  $\sqrt[n]{64}$ 를 갖는다. 따라서 이차식  $f(x)$ 를 곱하더라도 방정식  $(x^n - 64)f(x) = 0$ 은 서로 다른 두 개의 중근을 가질 수 없다.  $n$ 이 짝수이면서 방정식  $x^n - 64 = 0$ 의 실근은  $\sqrt[n]{64}$ ,  $-\sqrt[n]{64}$ 로 두 개이다. 따라서 (가)를 만족시키기 위해서는

$$f(x) = (x - \sqrt[n]{64})(x + \sqrt[n]{64}) = x^2 - 2^{\frac{12}{n}}$$

이어야 한다. 함수  $f(x)$ 의 최솟값은  $-2^{\frac{12}{n}}$ 이다. 이 값이 음의 정수이므로  $n$ 이 12의 약수가 되어야 한다. (가)에서  $n$ 이 짝수이므로 가능한  $n$ 은 12의 약수 중에서 짝수인 2, 4, 6, 12이고, 합은 24이다.  $\square$

연습문제 13 (2019년 6월 고2 학력평가 가형 21번)

자연수  $n$ 에 대하여  $f(n)$ 이 다음과 같다.

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[4]{9 \times 2^{n+1}} & (n \text{이 홀수}) \\ \sqrt[4]{4 \times 3^n} & (n \text{이 짝수}) \end{cases}$$

10 이하의 두 자연수  $p, q$ 에 대하여  $f(p) \times f(q)$ 가 자연수가 되도록 하는 모든 순서쌍  $(p, q)$ 의 개수는? [4점]

풀이

$p, q$ 의 홀짝성에 따라 경우를 나누자.

- (i)  $p$ 와  $q$  모두 홀수인 경우:  $f(p) \times f(q) = \sqrt[4]{9 \times 2^{p+1}} \times \sqrt[4]{9 \times 2^{q+1}} = 3\sqrt[4]{2^{p+q+2}}$ 이므로  $p+q+2$ 는 4의 배수여야 한다.

$p+q$	$(p, q)$
2	(1, 1)
6	(1, 5), (3, 3), (5, 1)
10	(1, 9), (3, 7), (5, 5), (7, 3), (9, 1)
14	(5, 9), (7, 7), (9, 5)
18	(9, 9)

그러므로 순서쌍  $(p, q)$ 의 개수는 13이다.

- (ii)  $p$ 가 홀수  $q$ 가 짝수인 경우:  $f(p) \times f(q) = \sqrt[4]{9 \times 2^{p+1}} \times \sqrt[4]{4 \times 3^q} = \sqrt[4]{2^{p+3} \times 3^{q+2}}$ 이므로  $p+3$ 과  $q+4$  모두 4의 배수여야 한다.  $p$ 로 가능한 수는 1, 5, 9이고  $q$ 로 가능한 수는 2, 6, 10이므로 순서쌍  $(p, q)$ 의 개수는  $3 \times 3 = 9$ 이다.

- (iii)  $p$ 가 짝수,  $q$ 가 홀수인 경우: (ii)와 같은 논리로 순서쌍  $(p, q)$ 의 개수는 9이다.

- (iv)  $p$ 와  $q$  모두 짝수인 경우:  $f(p) \times f(q) = \sqrt[4]{4 \times 3^p} \times \sqrt[4]{4 \times 3^q} = 2\sqrt[4]{3^{p+q}}$ 이므로  $p+q$ 는 4의 배수여야 한다. 이 경우는 (i)의 경우와 거의 동일하므로 순서쌍  $(p, q)$ 의 개수는 13이다. ((i)의 순서쌍의 각 성분에 모두 1을 더하면 (iv)에 해당하는 순서쌍을 얻는다.)

(i)-(iv)로부터 구하는 순서쌍의 개수는 44이다. □



연습문제 14 (2018학년도 사관학교 나형 28번)

2 이상의 자연수  $n$ 에 대하여  $n^{\frac{4}{k}}$ 의 값이 자연수가 되도록 하는 자연수  $k$ 의 개수를  $f(n)$ 이라 하자. 예를 들어  $f(6) = 3$ 이다.  $f(n) = 8$ 을 만족시키는  $n$ 의 최솟값을 구하시오. [4점]

---

풀이

$n$ 의 소인수분해를  $p_1^{q_1} p_2^{q_2} \cdots p_{n_k}^{q_{n_k}}$ 라 하자. 지수에 해당하는  $q_1, \dots, q_{n_k}$ 의 최대공약수를  $d_n$ 이라 하자.  $n^{\frac{4}{k}}$ 의 값이 자연수가 되기 위해서는  $k$ 가  $4d_n$ 의 약수여야 한다. 약수의 개수가 8인 최소의 자연수는  $2^3 \times 3 = 4 \times 6 = 24$ 이므로  $d_n$ 이 6인 최소의  $n$ 은  $2^6 = 64$ 이다. □

---

**연습문제 15 (2023학년도 수능특강)**

$p > 0, q < 0$ 인 두 정수  $p, q$ 와 모든 자연수  $n$ 에 대하여 수열  $\{a_n\}$ 이

$$a_1 = 30, \quad a_{n+1} = a_n + 2pn + q$$

를 만족시킨다. 두 부등식  $a_3 > 0, a_4 < 0$ 이 모두 성립하도록 하는 정수  $p, q$ 의 모든 순서쌍  $(p, q)$ 의 개수를 구하시오.

**풀이**

먼저  $a_3$ 과  $a_4$ 를 구하자.

$$a_1 = 30 \rightarrow a_2 = 30 + 2p + q \rightarrow a_3 = 30 + 6p + 2q \rightarrow a_4 = 30 + 12p + 3q$$

$a_3 > 0$ 에서  $-q < 15 + 3p$ 이고,  $a_4 < 0$ 에서  $-q > 10 + 4p$ 이다. 두 부등식을 연립하면

$$10 + 4p < -q < 15 + 3p \rightarrow 10 + 4p < 15 + 3p \rightarrow p < 5$$

이므로  $p = 1, 2, 3, 4$ 에 대하여 가능한 순서쌍을 찾으면 다음과 같다.

$$p = 1 \rightarrow 14 < -q < 18 \rightarrow (1, -15), (1, -16), (1, -17)$$

$$p = 2 \rightarrow 18 < -q < 21 \rightarrow (2, -19), (2, -20)$$

$$p = 3 \rightarrow 22 < -q < 24 \rightarrow (3, -23)$$

$$p = 4 \rightarrow 26 < -q < 27 \rightarrow \text{가능한 } q \text{가 존재하지 않는다.}$$

따라서 구하는 순서쌍의 개수는 6이다.

□

연습문제 16 (2024학년도 수능특강)

수열  $\{a_n\}$ 이 모든 자연수  $n$ 에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} n + a_n & (a_n < n) \\ a_n - p & (a_n \geq n) \end{cases}$$

을 만족시킨다. 수열  $\{a_n\}$ 이 다음 조건을 만족시키도록 하는 모든  $p$ 의 값의 합을 구하시오.

(가)  $p$ 는 10 이하의 자연수이다.

(나)  $a_m = 0$ ,  $a_{m+4} = 0$ 인 자연수  $m$ 이 존재한다.

풀이

먼저  $a_{m+3}$ 까지는 무리없이 구할 수 있다.

$$a_m = 0 \longrightarrow a_{m+1} = m \longrightarrow a_{m+2} = 2m + 1 \longrightarrow a_{m+3} = 2m + 1 - p$$

$a_{m+3}$ 으로부터  $a_{m+4}$ 를 구하려고 시도하면 경우를 분류해야 함을 알 수 있다.

- (i)  $2m + 1 - p < m + 3$ , 즉  $m < p + 2$ 인 경우:  $a_{m+4} = 3m + 4 - p = 0$ 에서  $p = 3m + 4$ 이다.  
 $m < p + 2 = 3m + 6$ 에서  $m > -3$ 이다. 따라서 가능한 자연수  $m, p$ 의 순서쌍  $(m, p)$ 는  $(1, 7), (2, 10)$ 이다.
- (ii)  $2m + 1 - p \geq m + 3$ , 즉  $m \geq p + 2$ 인 경우:  $a_{m+4} = 2m + 1 - 2p = 0$ 에서  $p = m + \frac{1}{2}$ 이므로 이는  $p$ 가 자연수임에 모순이다.

(i), (ii)로부터 모든  $p$ 의 값의 합은 17이다.

□