1 위상공간의 정의

정의 1.1 (위상공간)

집합 X의 부분집합들의 모임 $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$가 다음 조건을 만족할 때, $\mathcal{T}$를 X의 **위상(topology)**라 하고 $(X, \mathcal{T})$를 **위상 공간**이라 한다.

(1) $\varnothing, X \in \mathcal{T}$

(2) 임의의 집합족 $\{U_\alpha\} \subset \mathcal{T}$에 대하여 $\bigcup_\alpha U_\alpha \in \mathcal{T}$이다.

(3) 임의의 유한 집합족 $\{U_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{T}$에 대하여 $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{T}$이다.

정의 1.1에서 $\mathcal{T}$의 원소를 **열린집합(open set)**이라 한다. 반대로 C의 여집합 $X \setminus C$가 열린집합이면 C를 **닫힌집합(closed set)**이라 한다.

예시 1.2 (비이산 위상과 이산 위상)

집합 X에 대하여

(1) $\{\varnothing, X\}$로 구성된 위상을 X의 **비이산 위상(indiscrete topology)**이라 한다.

(2) X의 모든 부분집합의 집합 $\mathcal{P}(X)$로 구성된 위상을 X의 **이산 위상(discrete topology)**이라 한다.

정리 1.3 (닫힌집합의 기본 성질)

위상공간 X에 대하여 다음이 성립한다.

(1) $\varnothing$, X는 닫힌집합이다.

(2) 임의의 닫힌집합족 $\{C_\alpha\}$에 대하여 $\bigcap_\alpha C_\alpha$은 닫힌집합이다.

(3) 임의의 유한 닫힌집합족 $\{C_i\}_{i=1}^n$에 대하여 $\bigcup_{i=1}^n C_i$는 닫힌집합이다.

증명.

(1) $\varnothing = X \setminus X$이고 $X = X \setminus \varnothing$이므로 $\varnothing$과 X는 닫힌집합이다.

(2) 닫힌집합족 $\{C_\alpha\}$에 대하여 $C_\alpha = X \setminus U_\alpha$인 열린집합 U_α를 선택하자. 드모르간 법칙에 의해

$$\bigcap_\alpha C_\alpha = \bigcup_\alpha X \setminus U_\alpha = X \setminus \bigcup_\alpha U_\alpha$$

이고 $\bigcup_\alpha U_\alpha$는 열린집합이므로 $\bigcap_\alpha C_\alpha$는 닫힌집합이다.

(3) 유한 닫힌집합족 $\{C_i\}_{i=1}^n$에 대하여 $C_i = X \setminus U_i$인 열린집합 U_i를 선택하자. 드모르간 법칙에 의해

$$\bigcup_{i=1}^n C_i = \bigcup_{i=1}^n X \setminus U_i = X \setminus \bigcap_{i=1}^n U_i$$

이고 $\bigcap_{i=1}^n U_i$는 열린집합이므로 $\bigcup_{i=1}^n C_i$는 닫힌집합이다. □

참고. 정리 **??**에 의해 위상을 닫힌집합을 설정하여 정의할 수 있음을 알 수 있다.

연습문제 1 (여유한위상)

집합 X에 대하여 집합족 $\mathcal{T}_f$를 다음과 같이 정의하자.

$$\mathcal{T}_f = \{U \in X \mid X \setminus U \text{가 유한집합이거나 } X \text{ 전체이다.}\}$$

$\mathcal{T}_f$가 X의 위상임을 보여라. 이 위상을 X의 **여유한위상(finite complement topology)**라 한다.

풀이

$X \setminus \varnothing = X$이고 $X \setminus X = \varnothing$은 유한집합이므로 $\varnothing, X \in \mathcal{T}$이다. $\mathcal{T}_f$의 임의의 부분집합족 $\{U_\alpha\}$에 대하여 집합

$$X \setminus \bigcup_\alpha U_\alpha = \bigcap_\alpha X \setminus U_\alpha$$

는 유한집합(U_α 중 유한집합이 존재하는 경우)이거나 X 전체(모든 U_α가 X인 경우)이므로 $\bigcup_\alpha U_\alpha \in \mathcal{T}_f$이다. $\mathcal{T}_f$의 임의의 유한 부분집합족 $\{U_i\}_{i=1}^n$에 대하여 집합

$$X \setminus \bigcup_{i=1}^n U_i = \bigcup_{i=1}^n X \setminus U_i$$

는 유한집합(모든 U_α가 X의 진부분집합인 경우)이거나 X 전체(U_i 중 하나가 X인 경우)이므로 $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{T}_f$이다. 그러므로 정의에 의해 $\mathcal{T}_f$는 X의 위상이다.

연습문제 2 (2009학년도 기출)

위상공간 X의 부분집합 A의 내부(interior)와 경계(boundary)를 각각 $\mathrm{Int}(A)$, $\mathrm{Bd}(A)$라고 할 때, 다음은 희수가 $\mathrm{Int}(A) = A - \mathrm{Bd}(A)$임을 증명한 답안이다.

> **(경우 1)** A가 열린 집합(open set)일 때 : 집합 A의 외부(exterior)를 $\mathrm{Ext}(A)$라 하면 $\mathrm{Int}(A) = A$이므로 $\mathrm{Bd}(A) \subset \mathrm{Ext}(A)$이다. 따라서 $A - \mathrm{Bd}(A) = A = \mathrm{Int}(A)$이다.
> **(경우 2)** A가 닫힌 집합(closed set)일 때 : 이 경우 집합 A의 폐포(closure) $\overline{A}$는 A와 같으므로 $A = \overline{A} = \mathrm{Int}(A) \cup \mathrm{Bd}(A)$이다. 그런데 일반적으로 집합 B, C에 대하여 $D = B \cup C$이면 $B = D - C$이므로 $\mathrm{Int}(A) = A - \mathrm{Bd}(A)$이다.

희수의 답안을 보고 옳게 말한 학생을 ⟨보기⟩에서 모두 고른 것은? [2.5점]

⟨보기⟩

(현정) 희수가 맞게 풀었네.

(기태) 위와 같이 (경우 1)과 (경우 2)로 나누어 증명하는 것은 옳지 않아.

(수연) '$D = B \cup C$이면 $B = D - C$'는 일반적으로 성립하지 않아.

(영호) $\mathrm{Int}(A) = A$인 경우는 $\mathrm{Bd}(A) \subset \mathrm{Ext}(A)$이 아니라 $\mathrm{Bd}(A) = \varnothing$이야.
