

Física Computacional: Laboratorio 1b

Briozzo Gaston, Escobares Cristhian Daniel

Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación -
Universidad Nacional de Córdoba

27 de abril de 2021

Resumen

El objetivo de este trabajo es el estudio de sistemas caóticos mediante la implementación de métodos numéricos, haciendo énfasis en el análisis de espectros de potencias y diagramas de fases. Para esto, se escribieron en Fortran 90 una serie de programas para resolver la evolución temporal de dos sistemas caóticos; una ecuación logística y un péndulo doble.

1. Introducción

Desde el punto de vista de la mecánica, se dice que un sistema es caótico cuando, dados dos estados iniciales arbitrariamente similares, estos se apartan exponencialmente entre sí al evolucionar en el tiempo. Si graficamos las trayectorias de ambos estados en el espacio de las fases del sistema, siendo $\vec{x}_1(t)$ y $\vec{x}_2(t)$ la posición de cada uno en función del tiempo, podemos ver que la distancia entre ellos, $d(t) = |\vec{x}_1(t) - \vec{x}_2(t)|$ presenta un crecimiento exponencial dado por el exponente de Lyapunov:

$$d(t) = e^{t\lambda} \quad (1)$$

De esta forma, pequeñas variaciones en las condiciones iniciales producen enormes

cambios en su comportamiento futuro, haciendo posible explicar, pero prácticamente imposible predecir, la evolución del sistema para largos intervalos de tiempo. Podemos definir entonces al caos como el comportamiento no periódico de sistemas dinámicos que son extremadamente sensibles a variaciones en las condiciones iniciales. Generalmente, los sistemas caóticos incluyen rangos de estabilidad, también llamados islas de estabilidad, donde presenta un comportamiento periódico y regular, y rangos de fluctuaciones caóticas que resultan impredecibles.

El comportamiento caótico solo se presenta en sistemas no invertibles donde las ecuaciones de evolución son no lineales, por lo que pueden presentar respuestas ape-

riódicas y aparentemente aleatorias. Consideremos la siguiente ecuación logística:

$$x(t + h) = r \cdot x(t) \cdot (1 - x(t)) \quad (2)$$

Aquí, $x(t)$ es el valor de una dada función y r es el parámetro variable. Podemos comprobar que, para distintos valores de r , el sistema presentará dinámicas considerablemente distintas.

Por ejemplo, para $0 < r < 3$, el sistema resulta estacionario a tiempo largos. En este régimen, $x(t)$ tiende exponencialmente a un valor fijo x_0 , siendo indistinguible de este para tiempos mayores al 'transitorio', característico del sistema.

Cuando r se aproxima a 3, x_0 se divide en dos valores distintos a los cuales $x(t)$ se aproxima exponencialmente, alternando entre uno y otro en cada ciclo. Cuando esto pasa, decimos que la respuesta se "bifurca".

A medida que r aumenta, el sistema se bifurca progresivamente, duplicando en cada bifurcación el número de valores a los cuales tiende $x(t)$ a tiempos largos. El sistema recorre todos estos valores en orden antes de regresar al primero, de modo que su período también se duplica.

Al mismo tiempo, la distancia entre bifurcaciones sucesivas decrece entre una y la siguiente, de forma tal que el número de estas tiende a infinito para valores finitos de r . En este punto, cuando la frecuencia del sistema se anula, aparece el caos.

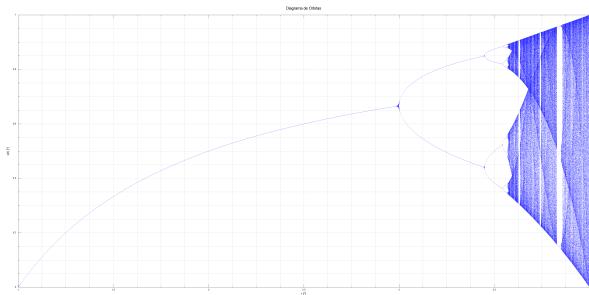


Figura 1: Caos y bifurcaciones

Otro ejemplo de sistema caótico es el péndulo doble. Se llama 'tiempo de flip' al tiempo necesario para que el valor absoluto de alguno de los ángulos del péndulo sea mayor a π , partiendo ambos desde el reposo. Haciendo un mapeo del tiempo de flip en función de los ángulos iniciales es posible evidenciar el comportamiento caótico de estos sistemas.

2. Resultados y Discusión

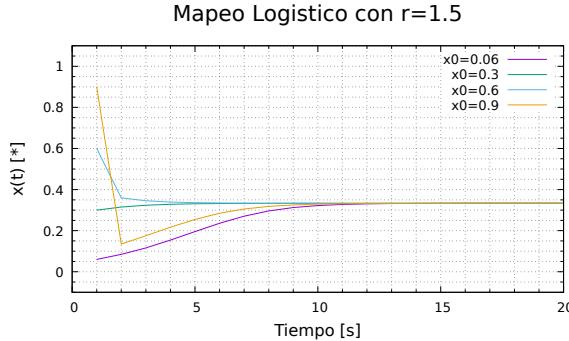
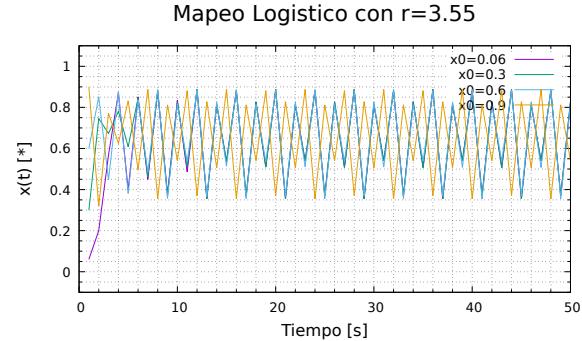
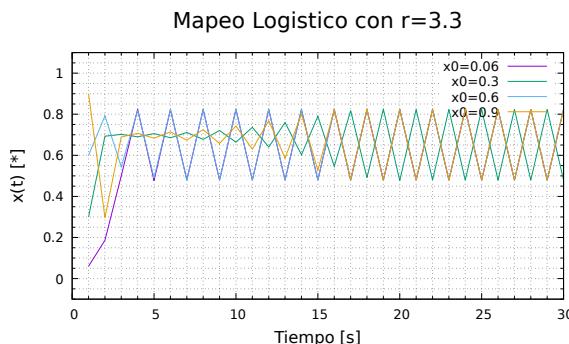
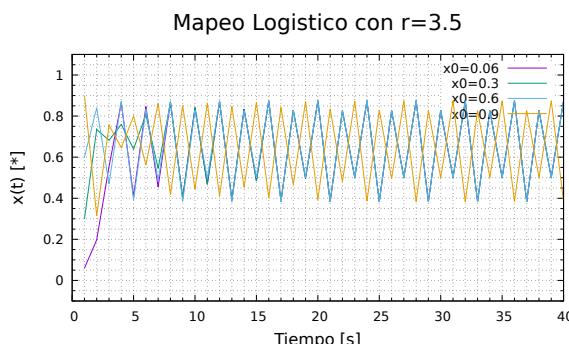
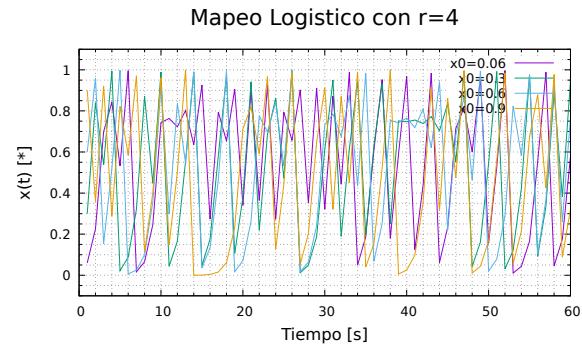
2.1. Ecuación Logística

Partiendo de la Ecuación 2, se calculó la evolución del sistema para los distintos valores iniciales $x(0) = \{0,06; 0,3; 0,6; 0,9\}$, hasta el tiempo $t = 500h$, tomando un step size $h = 1s$. Este procedimiento se repitió para $r = \{1,5; 3,3; 3,5; 3,55; 4\}$.

2.1.1. Trayectoria

Las trayectorias obtenidas se muestran en las Figuras 2, 3, 4, 5 y 6.

2.1 Ecuación Logística

Figura 2: Mapeo Logístico con $r = 1.5$.Figura 5: Mapeo Logístico con $r = 3.55$.Figura 3: Mapeo Logístico con $r = 3.3$.Figura 4: Mapeo Logístico con $r = 3.5$.Figura 6: Mapeo Logístico con $r = 4$.

En las primeras cuatro figuras podemos observar que, a tiempos largos, el sistema presenta respuestas periódicas estacionarias independientes de su estado inicial. El tiempo necesario para que el comportamiento del sistema evoluciones a este estado, conocido como transitorio, depende claramente del estado inicial, aunque no es posible determinar su relación con el parámetro r .

Vemos que, para $r = 1.5$, $x(t)$ tiende exponencialmente a una misma constante para todas las condiciones iniciales. En éste régimen, el período del sistema es nulo, aunque también puede tomárselo igual al período de muestreo h . A medida que r aumenta, podemos observar que período del

2.1 Ecuación Logística

sistema se duplica progresivamente, tomando valores iguales a $h \cdot 2^n$, con n entero. Finalmente, para $r = 4$, el período tiende a infinito, por lo que obtenemos una respuesta caótica.

2.1.2. Espectro de Potencia

Empleando el método fftw, se calculó el espectro de potencias de la trayectoria tomando como condición inicial $x(0) = 0,6$, para los valores de r empleados en la sección anterior.

Sin descartar el transitorio, los resultados obtenidos se muestran en la Figura 7. Por su parte, los resultados obtenidos descartando el transitorio se encuentran en la Figura 8.

Puede verse, comparando ambas figuras, que al no descartar el transitorio aparece una mayor contribución de las frecuencias bajas en el espectro, dado que el sistema todavía no alcanzó su régimen estacionario. Al descartarlo, la contribución de la mayoría de las frecuencias se hace despreciable y aparecen picos bien definidos.

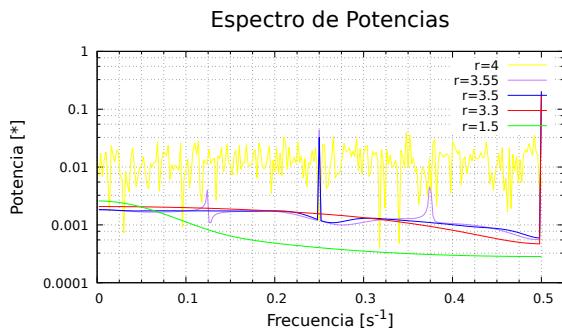


Figura 7: Espectro de potencia sin descartar el transitorio. Se consideraron un total de 500 pasos.

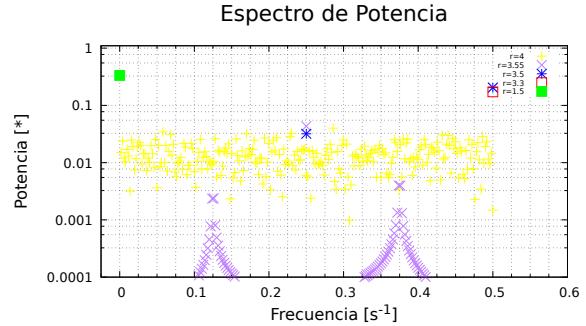


Figura 8: Espectro de potencia descartando el transitorio. Se descartó un transitorio de 500 pasos y se consideraron los 500 pasos siguientes.

Definiremos la frecuencia de resonancia del sistema f_r como

$$f_r = \frac{1}{h} \quad (3)$$

Podemos notar que, si nos encontramos en una “rama” de orden n , la menor frecuencia que compone el espectro de respuesta estará dada por

$$f_n = \frac{f_r}{2^n} \quad (4)$$

Las demás frecuencias que lo conforman serán múltiplos enteros de esta, es decir, sus armónicos. De esta forma, el espectro resulta es una serie de picos equiespaciados. Finalmente, al arribar el caos se pierde esta estructura dando lugar a picos de frecuencia aparentemente aleatoria y, apropiadamente, caótica.

La transformada de Fourier necesita un set de datos periódicos, pero también vale para conjuntos finitos, ya que se puede elegir al ‘período’ como el intervalo total de medición. Lo que se hace es ‘repetir’ el set

2.1 Ecuación Logística

de datos para obtener un conjunto periódico.

Por ello, al no elegir un múltiplo entero del período, los últimos puntos del conjunto no completan el período y sólo se repiten cuando se repite el set de datos completo, por lo que en la transformada de Fourier aparecen componentes cercanas a la frecuencia del conjunto completo. Esto no sucede en la transformada del caos, ya que es no periódico.

Todo esto puede verse en la Figura 9. Además, en la Figura 10 se puede ver la transformada correcta, por lo que hay que tener el cuidado de que la cantidad de datos del set a transformar, sea un múltiplo del período, ya que la diferencia de apenas un dato, puede generar una transformada no representativa.

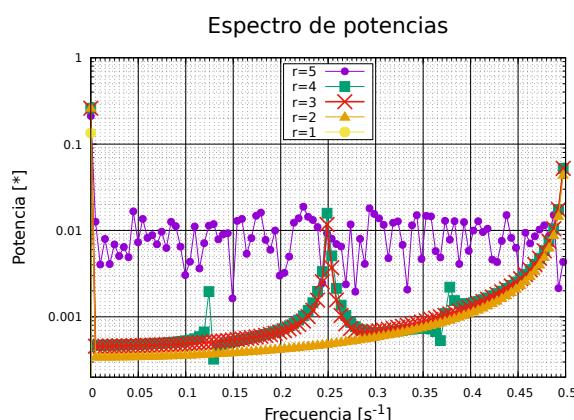


Figura 9: Espectro de potencia descartando el transitorio. Se descartó un transitorio de 299 pasos y se consideraron los 201 pasos siguientes.

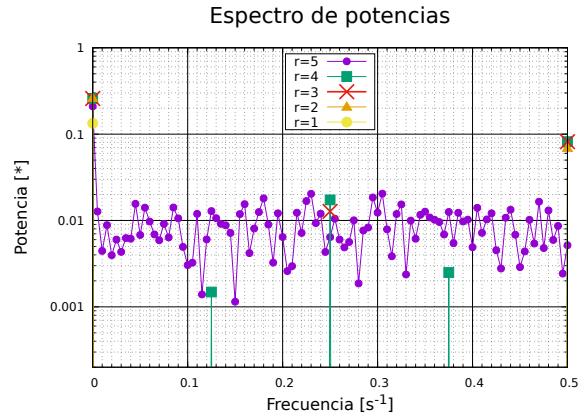


Figura 10: Espectro de potencia descartando el transitorio. Se descartó un transitorio de 300 pasos y se consideraron los 200 pasos siguientes.

2.1.3. Histograma

Para la condición inicial $x(0) = 0,6$ y tomando $r = 4$, se hizo evolucionar el sistema un total de 10300 pasos. Los primeros 300 se consideraron parte del transitorio, por lo que fueron descartados. Los valores adoptados por $x(t)$ durante este período se encuentran en la Figura 11.

Podemos notar que es mucho mas probable encontrar al sistema próximo a los valores 0 y 1 que a cualquier otro valor entre estos. Sin embargo, en ningún momento se lo ha observado adoptar valores fuera de este rango.

Esto se debe a que, como puede verse en la Figura 12, para el dominio $(0, 1)$, la imagen de la Ecuación 2 es también este mismo intervalo, para $r = 4$.

2.1 Ecuación Logística

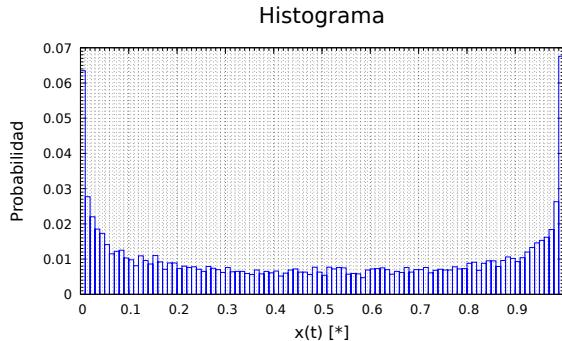


Figura 11: Histograma normalizado para $r = 4$. Se dividió el intervalo entre 0 y 1 en 100 segmentos idénticos, se descartó un transitorio de 300 y se compararon 10000 valores de x_i .

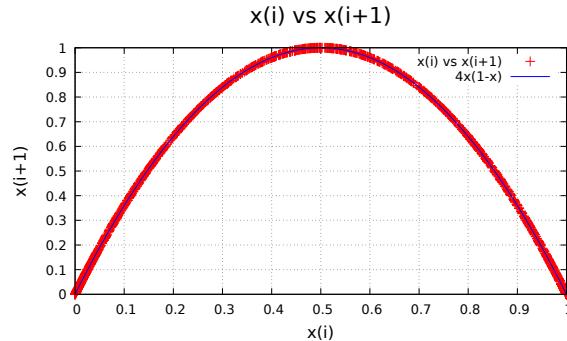


Figura 12: Ecuación Logística. $r = 4$, transitorio de 300 y $n = 10000$.

Además, la pendiente es positiva para valores cercanos a 0, por lo que tienden a alejarse de este valor, lo mismo para valores cercanos a 1, ya que la pendiente es negativa.

Esto puede asociarse con el diagrama de flujo en sistemas dinámicos, en los cuales $x(i) = 0$ y $x(i) = 1$ son puntos de equilibrio inestables, por lo que es más probable encontrar valores cerca de dichos puntos, algo que claramente se ve en el histograma.

2.1.4. Diagrama de órbitas

Es posible distinguir entre una respuesta aleatoria y una respuesta caótica a partir de estudio de la relación entre $x(i)$ y $x(i + 1)$.

Podemos comprobar que, en este caso, el gráfico de la Figura 12 se corresponde a la ecuación logística con que estamos trabajando.

De esta forma, concluimos que si la señal que medimos es caótica, esto deberá verse reflejado en el diagrama de fases $x(i)$ vs $x(i + 1)$, mientras que si se debe a ruido, no veremos ningún patrón en dicho diagrama.

El diagrama de las órbitas, es decir, los distintos valores que puede tomar x_i al alcanzarse el régimen estacionario en función del parámetro variable r , se encuentra expresado en la Figura 13.

Podemos ver que existen regiones del diagrama de órbitas donde, para un mismo r , existen infinitos valores de x_i que están permitido. Estas son las regiones caóticas del sistema.

2.1 Ecuación Logística

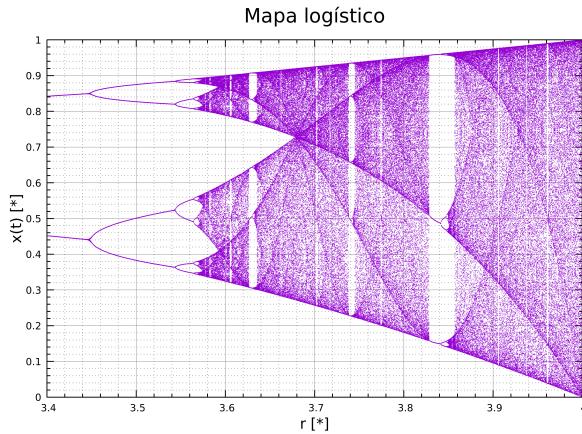


Figura 13: Diagrama de Orbitas. Se tomaron un total de 10000 valores equiespaciados para r entre 3,4 y 4. Para cada uno se descartó un transitorio de 300 pasos y se consideraron los siguientes 300. Este mismo gráfico, pero con un total de 100000 valores equiespaciados puede descargarlo [acá](#), se recomienda abrir la imagen con Okular, ya que el visor predeterminado de Ubuntu tarda 5-10 minutos en cargar el gráfico.

Al mismo tiempo, existen valores de r para los cuales solo un número discreto de valores de x_i son accesibles. Estas regiones del diagrama de fases, donde la respuesta del sistema presenta un período que se duplica en función del parámetro variable r , son las conocidas como “Islas de Estabilidad”. Aquí, la respuesta del sistema se ramifica exponencialmente, requiriendo variaciones cada vez más pequeñas de r , convergiendo al caos cuando el período diverge para un valor finito de r .

Observando la Figura 14, podemos comprobar la estructura fractal que presenta el diagrama de órbitas. Vemos que este resulta autosimilar, repitiéndose patrones y proporcionando una medida que nos desplazamos por él.

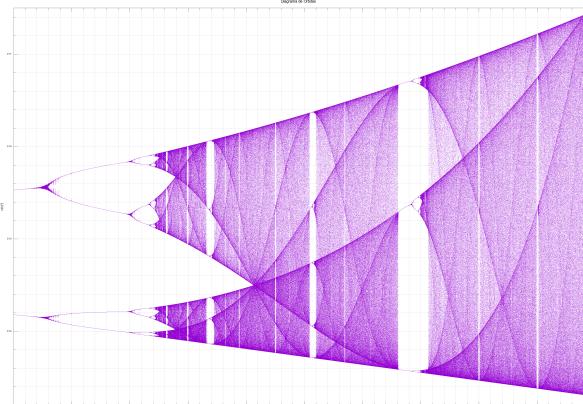


Figura 14: Diagrama de Orbitas. Se tomaron un total de 9800 valores equiespaciados para r entre 3,847 y 3,8568. Para cada uno se descartó un transitorio de 300 pasos y se consideraron los siguientes 1500.

Ya que el diagrama de órbitas contiene infinitas líneas podemos suponer que su longitud total es infinita. Sin embargo, dada su autosimilitud, concluimos que el área cubierta por este es nula. Esto nos aproxima a la noción de que los fractales tienen dimensión no entera; una línea infinita que ocupa un área nula.

2.1.5. Exponente de Lyapunov

A un dado valor del parámetro variable r , cuando el número n de mediciones tiende a infinito, el exponente de Lyapunov λ puede calcularse como sigue:

$$\lambda = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |r - 2rx_i| \quad (5)$$

Como el tiempo de cálculo es finito, entonces elegimos un n muy grande. El exponente de Lyapunov fue calculado en función de r a partir de esta ecuación, obteniéndose la Figura 15.

2.2 Péndulo Doble

Nótese que λ es negativo en las regiones periódicas del sistema, donde su respuesta tiende exponencialmente a valores fijos. Esto se condice con la Ecuación 1.

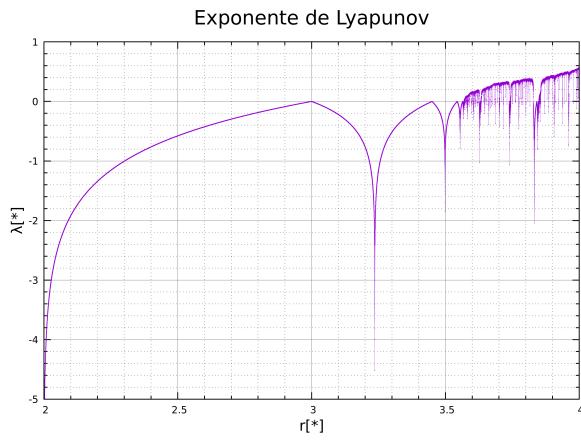


Figura 15: Exponente de Lyapunov. Se dividió el intervalo de r entre 2 y 4 en 100000 secciones idénticas, para cada una de las cuales se calculó λ según la Ec 5, descartando un transitorio de 300 y tomando $n = 1500$.

Por otro lado, vemos que los valores de r para los cuales el exponente se anula son aquellos donde se producen las bifurcaciones en el diagrama de órbitas. El régimen caótico, por su parte, se presenta para valores positivos del exponente de Lyapunov, como cabe esperarse.

También podemos notar que existen valores de r para los cuales λ tiende a menos infinito. Estos puntos se llaman 'súper estables' [1], ya que son los más alejados al caos.

2.2. Péndulo Doble

2.2.1. Trayectorias

Tomando los parámetros $\alpha = m_2/m_1 = 1/3$, $\beta = L_2/L_1 = 1/2$ y $\gamma = g/L_1 = 1/2s^{-2}$, se hizo evolucionar el sistema para los siguientes conjuntos de condiciones iniciales, con los ángulos expresados en radianes:

$$\begin{aligned} \theta_1(0) &= 0, \quad \theta_2(0) = 0 \\ \omega_1(0) &= 0,332s^{-1}, \quad \omega_2(0) = 0,845s^{-1} \\ & \\ \theta_1(0) &= 0, \quad \theta_2(0) = 0 \\ \omega_1(0) &= \sqrt{1,125}s^{-1}, \quad \omega_2(0) = 0s^{-1} \end{aligned}$$

Nótese que ambas condiciones se corresponden con las energías $E = -0,6m_1L_1^2s^{-2}$ y $E = 0$ respectivamente. Las trayectorias obtenidas se muestran en las Figuras 16 y 17, las posiciones angulares de ambos péndulos en función del tiempo se muestran en las Figuras 18 y 19, y las velocidades angulares en función del tiempo en las Figuras 20 y 21.

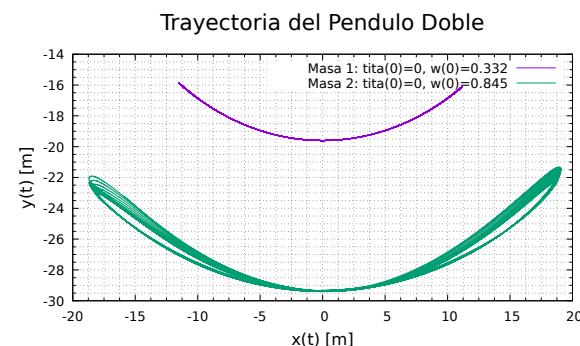


Figura 16: Trayectoria del péndulo doble para $E = -0,6m_1L_1^2s^{-2}$.

2.2 Péndulo Doble

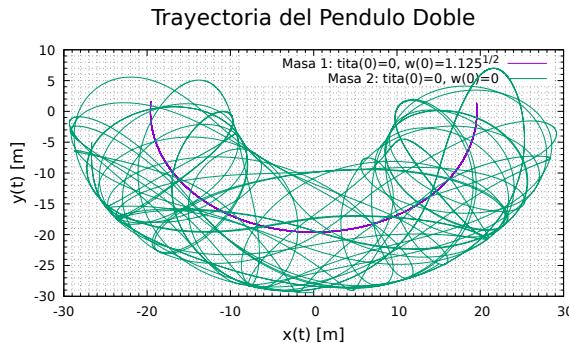


Figura 17: Trayectoria del péndulo doble para $E = 0$.

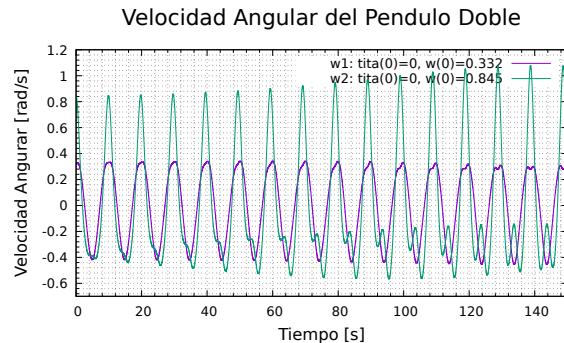


Figura 20: Velocidad angular del péndulo doble para $E = -0,6m_1L_1^2s^{-2}$.

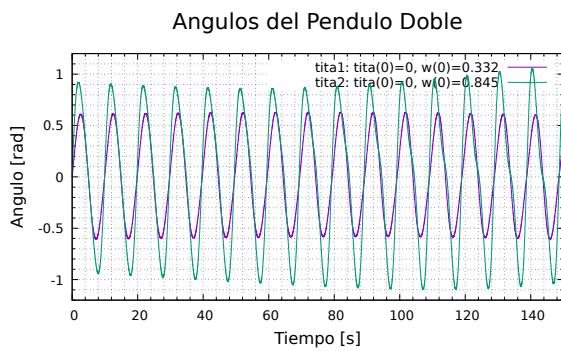


Figura 18: Ángulos del péndulo doble para $E = -0,6m_1L_1^2s^{-2}$.

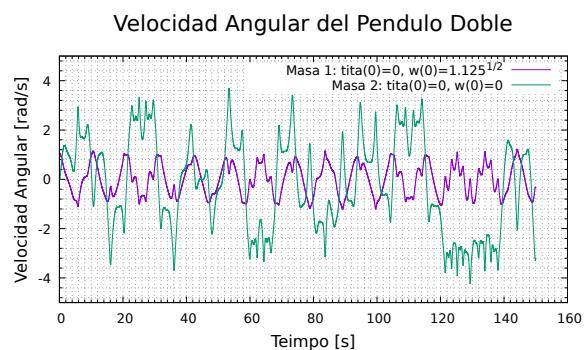


Figura 21: Velocidad angular del péndulo doble para $E = 0$.

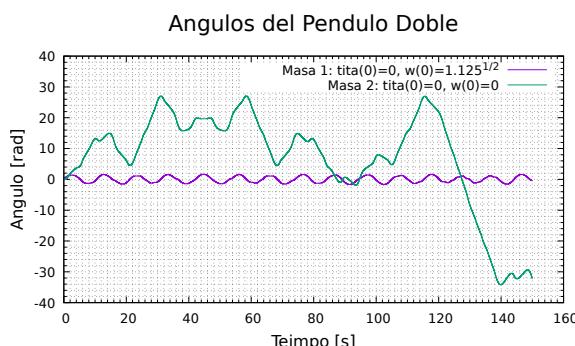


Figura 19: Ángulos del péndulo doble para $E = 0$.

En todos los casos, se dejó evolucionar al sistema entre 0 y 150 segundos, dividiendo dicho intervalo en 10^5 particiones idénticas para realizar los pasos de integración.

Podemos comprobar que para bajas energías la respuesta del sistema es mucho mas homogénea que para altas energías, donde su naturaleza caótica resulta evidente. Esta observación se ve respaldada por los gráficos de los ángulos y las velocidades angulares de ambos sistemas en función del tiempo.

2.2 Péndulo Doble

2.2.2. Espectro de potencia

Se consideraron ahora dos sistemas con energías $E = -0,745m_1L_1^2s^{-2}$ y $E = 0$, correspondientes a las siguientes condiciones iniciales:

$$\theta_1(0) = 0, \quad \theta_2(0) = 0 \\ \omega_1(0) = \sqrt{0,0075}s^{-1}, \quad \omega_2(0) = 0s^{-1}$$

y

$$\theta_1(0) = 0, \quad \theta_2(0) = 0 \\ \omega_1(0) = \sqrt{1,125}s^{-1}, \quad \omega_2(0) = 0s^{-1}$$

Se dejó evolucionar a ambos sistemas para tiempos entre 0 y 1200 segundos, dividiendo dicho intervalo en $8 \cdot 10^5$ secciones idénticas para realizar los pasos de integración.

Se tomó la transformada de Fourier de los datos obtenidos para las posiciones angulares de ambos péndulos en función del tiempo. Para esto, se empleó la subrutina fftw3 provista por la cátedra. Los espectros de potencia resultantes se muestran en la Figura 22.

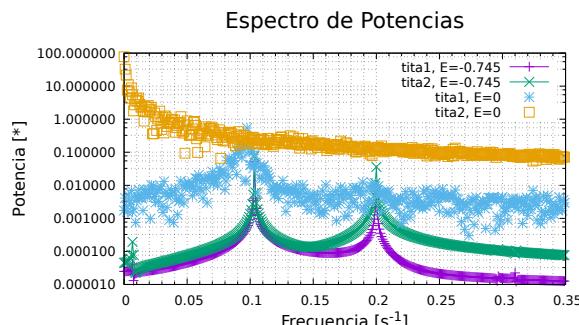


Figura 22: Espectro de potencias del péndulo doble.

Nótese que, para bajas energías, la frecuencia predominante del espectro de potencias se corresponde con la frecuencia característica del péndulo ideal dada por la primer masa, de la forma

$$f_r = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{L}{g}} \quad (6)$$

A medida que la energía del sistema aumenta, vemos dicha frecuencia toma menos relevancia, hasta que todas las frecuencias tienen un aporte comparable en el espectro de potencias, lo que nos indica que llegamos al régimen caótico.

2.2.3. Tiempo de flip

Se realizó una grilla de 601 por 601 valores equiespaciados de θ_1 y θ_2 entre -3 y 3 radianes, que se tomaron como condiciones iniciales partiendo del reposo:

$$\omega_1(0) = \omega_2(0) = 0$$

El sistema se dejó evolucionar partiendo de cada conjunto de condiciones iniciales para tiempos entre 0 y 10000 segundos, dividiendo dicho intervalo en 10^8 particiones idénticas para realizar los pasos de integración. Se tomaron los siguientes parámetro:

$$\frac{m_1}{m_2} = 1; \quad \frac{L_1}{L_2} = 1; \quad \frac{g}{L_1} = 1s^{-2}$$

Para cada conjunto de condiciones iniciales se calculó el tiempo de flip, es decir, el tiempo necesario para que el valor absoluto de alguno de los ángulos del péndulo sea mayor a π . Los resultados obtenidos se expresan en las Figuras 23 y 24.

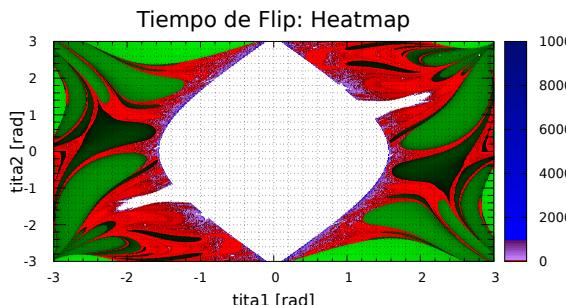


Figura 23: Heatmap del tiempo de flip. En verde, se muestran los tiempos entre 0 y 10 segundos, en rojo entre 10 y 100, en violeta entre 100 y 1000, azul entre 1000 y 10000 y blanco para tiempos mayores a 10000.

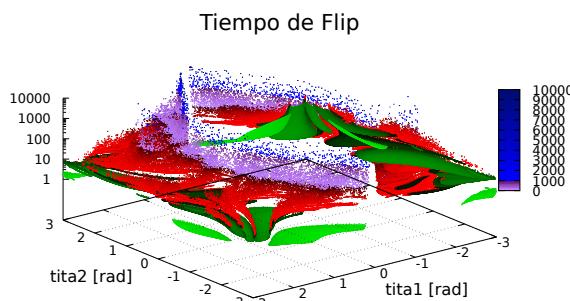


Figura 24: Tiempo de flip. En verde, se muestran los tiempos entre 0 y 10 segundos, en rojo entre 10 y 100, en violeta entre 100 y 1000, azul entre 1000 y 10000 y blanco para tiempos mayores a 10000.

Los gráficos de estas figuras evidencian la naturaleza caótica del péndulo doble.

3. Conclusión

Se observó que sistemas simples pueden exhibir comportamientos complejos cuando son no lineales ni invertibles. En estos

sistemas, que se dicen caóticos, existe una hipersensibilidad a las condiciones iniciales, de forma tal que pequeñas variaciones en éstas pueden provocar que el comportamiento evolucione de formas drásticamente diferentes.

Al mismo tiempo, el caos puede desaparecer repentinamente, dando lugar a períodos de orden más alto, conocidos como islas de estabilidad. Las observaciones evidencian la relación entre caos y fractales, que se hacen presentes en el diagrama de fases del sistema.

Las observaciones coinciden en que el período del sistema se duplica progresivamente al aumentar el parámetro variable r , resultando en un decaimiento exponencial de la frecuencia, que llega a ser cero al alcanzarse el régimen caótico.

El tiempo característico en el cual ambas soluciones se 'separan', es la inversa del exponente de Lyapunov, es decir $1/\lambda$. Hasta dicho tiempo, se puede realizar predicciones aproximadas del estado futuro (cercano) del sistema, razón por la cual el pronóstico del clima de mañana es más confiable que el pronóstico de la semana que viene, ya que el clima es un sistema caótico. Por lo que, si un sistema es caótico, esto no implica que sea totalmente impredecible y que gobierne el azar, sino lo contrario, que es un sistema determinista, pero sumamente dependiente de las condiciones iniciales.

Referencias

- [1] Guillermo Abramson. *SISTEMAS DINÁMICOS 2002 - CAOS*. 2002. URL: <https://fisica.cab.cnea.gov.ar/estadistica/abramson/>

REFERENCIAS



UNC

Universidad
Nacional
de Córdoba



FAMAF

Facultad de Matemática,
Astronomía, Física y
Computación

notes / 2002 – chaos . pdf (visitado
18-04-2021).