

# 直接多重打靶法 在轨迹优化方面的应用<sup>①</sup>

屈 香 菊

(北京航空航天大学)

**摘 要** 本文采用基于多重打靶技术的参数优化方法,以美国航天飞机轨道器为例,选取了几种目标函数和约束条件,对其最佳再入轨迹进行了计算。将计算结果与美国航天飞机的实际再入轨迹作了比较,并对文中采用的算法和程序的适用性进行了小结。

**关键词** 轨迹优化,最优控制,数值方法。

## 引 言

在大气中飞行的飞行器的轨迹优化问题,是求解多种约束条件下的动态优化问题。近年来,对于求解这种问题,以寻求精确、省时、收敛性好、编程简单的数值解为目的,国外已发表了许多有关文章。其中介绍的基于多重打靶技术的参数优化方法,是求解这类问题的一种有效方法<sup>[1][2]</sup>。本文以美国航天飞机数据为例,选取了3种目标函数,设立了4种计算情况,对最佳再入轨迹进行了计算,并与实际再入轨迹进行了比较。

## 1 数学模型

### 1.1 问题的描述

#### 1.1.1 状态方程

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \quad t \in [0, T] \quad (1)$$

式中:  $x \in R^n$  为状态变量,  $u \in R^m$  为控制变量,  $f \in R^n$  为  $n$  维向量函数,  $t$  为时间,  $T$  为末端时间。

#### 1.1.2 约束条件

考虑到编程方便和节省机时,将通常遇到的各种约束形式分别处理。

##### a. 控制变量的约束

<sup>①</sup> 本文于1991年1月2日收到。

$$l_1 \leq u(t) \leq h_1 \quad (2)$$

式中:  $l_1, h_1$  亦为  $m'$  维向量。

b. 状态变量的约束范围

$$l_2 \leq x(t) \leq h_2 \quad (3)$$

式中:  $l_2, h_2$  亦为  $n$  维向量。

c. 控制变量和状态变量的组合参数的约束条件, 一般可描述为

$$c(x(t), u(t)) \geq 0 \quad (4)$$

式中:  $c$  为向量函数。

d. 终端状态的约束条件

$$x^f(T) = x^f \quad (5)$$

式中:  $x^f(T) \in R^f$  为  $f$  维向量,  $1 \leq f \leq n$ 。

### 1.1.3 目标函数

优化指标的一般形式取为

$$J = \int_0^T F(x(t), u(t), t) dt + T_0(x(T)) \quad (6)$$

一般的轨迹优化问题, 可归结为求解满足约束条件式(2)至式(5)情况下, 使性能指标式(6)取极大(或极小)的问题。为使下文书写简单, 将此问题用[P1]表示。

## 1.2 化为参数优化问题

1.2.1 第一步, 固定积分区间, 将目标函数化为 Mayer 问题, 为此引入新的时间变量  $\tau \in [0, 1]$ , 设终端时间  $T$  为可变参数, 定义

$$t = T\tau \quad (7)$$

并引入增广状态变量  $x_{n+1}$  及状态方程

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_{n+1} &= T \cdot F(x(t), u(t), t) \\ x_{n+1}(0) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

则目标函数化为

$$J = J(X(1)) \quad (9)$$

式中:  $X(1) = [x_1(1), x_2(1), \dots, x_{n+1}(1)]^T$

将式(7)代入状态方程式(1)及约束条件式(2)至式(5)中, [P1]问题中的自变量  $t$  换为  $\tau$ , 积分区间变为  $[0, 1]$ 。

### 1.2.2 第二步,采用直接多重打靶法将问题化为参数优化问题。

在参数优化之前,首先引进增广状态变量,将式(3)和式(4)形式的约束化为对增广状态变量的终端状态的约束形式。例如,式(3)中的第  $j$  个方程可表示为

$$\left. \begin{aligned} h_{2j} - x_j(\tau) &\geq 0 \\ x_j(\tau) - l_{2j} &\geq 0 \end{aligned} \right\} \quad 1 \leq j \leq n \quad (10)$$

以式(10)第一式为例,设

$$e_j(\tau) = h_{2j} - x_j(\tau) \geq 0 \quad (11)$$

则  $e_j(\tau) \geq 0$  等价于

$$E_j = - \int_0^1 [\min(e_j, 0)]^2 d\tau \geq 0 \quad (12)$$

引进增广状态变量

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_{n+j} &= - [\min(e_j, 0)]^2 \\ x_{n+j}(0) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

则式(11)中  $e_j \geq 0$  就化为  $E_j = x_{n+j}(1) \geq 0$

同理对式(4)形式的约束  $c_i(\tau) \geq 0$ , 引进积分

$$E_i = - \int_0^1 [\min(c_i(\tau), 0)]^2 d\tau \geq 0 \quad (14)$$

定义

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_{n+i} &= - [\min(c_i(\tau), 0)]^2 \\ x_{n+i}(0) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

约束条件式(4)则化为

$$E_i = x_{n+i}(1) \geq 0 \quad (16)$$

经上述转换后,一般的轨迹优化问题化为[P2]:

$$\left. \begin{aligned} J &= J(X(1)) \\ \dot{X} &= f(t, X(t), u(t)) \\ X'(1) &= X' \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

其中:  $X$  为向量, 由状态变量及前面引入的增广状态变量构成;  $u$  为控制向量;  $f$  表示终端时刻;  $l_1$  和  $h_1$  分别代表限定的控制变量的下、上界。

将[P2]问题化为一般的非线性规划问题(NLP)的具体步骤如下<sup>[1][3]</sup>:

- a. 将固定时间区间  $[0, 1]$  作  $m$  等分, 得到节点  $\tau_i = i/m, i = 0, 1, \dots, m$ 。
- b. 控制规律参数化, 引入一组向量  $q_i \in R^n, i = 0, 1, \dots, m$ , 定义  $u(\tau) = u_i(q_0, q_1, \dots, q_m, \tau)$  是插值函数, 本文计算中取线性插值函数

$$u_i(\tau) = q_i + c_i(\tau - \tau_i), \quad \tau \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$$

其中:  $c_i = (q_{i+1} - q_i) / (\tau_{i+1} - \tau_i), i = 0, 1, \dots, m-1$

- c. 选一组向量  $s_i \in R^n, i = 0, 1, \dots, m$ , 作为节点  $\tau_i$  上状态变量  $X(\tau_i)$  的估计值, 形成  $m$  个段上的  $m$  个初值问题, 即

$$\left. \begin{aligned} \dot{X}(\tau) &= f(\tau, X(\tau), u(\tau), T) \\ X(s_i, u, T, \tau_i) &= s_{i+1}, i = 0, 1, \dots, m-1 \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

上式即为状态变量在节点上应满足的匹配条件。

- d. 化为(NLP)问题。经以上三步, 将[P2]问题化为一般的有约束的参数最优化问题[P3]:

$$\left. \begin{aligned} \min F(y) \\ G_1(s_0, s_1, \dots, s_m, q_0, q_1, \dots, q_m, T) &= 0 \\ G_2(s_0, s_1, \dots, s_m, q_0, q_1, \dots, q_m, T) &\geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

式中:  $F(y) = J(X(1)), y \in R^n, y^T = [s_0^T, s_1^T, \dots, s_m^T, q_0^T, q_1^T, \dots, q_m^T, T]$  为优化变量;  $G_1$  为向量函数, 是等式约束条件, 包括终端状态变量的约束条件及状态变量在节点上的匹配条件;  $G_2$  为向量函数, 是不等式约束条件, 本文中代表控制变量的约束条件。

### 1.3 (NLP)问题的求解

用增广拉格朗日算法求解[P3]时采用的罚函数形式为<sup>[4]</sup>

$$J_i = F(y) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m_1} \sigma_i r_i^2(y, \theta_i) \quad (20)$$

式中:

$$r_i = \begin{cases} g_i(y) - \theta_i, & i = 1, 2, \dots, k_e \\ \min[g_i(y) - \theta_i, 0], & i = k_e + 1, \dots, m_1 \end{cases} \quad (21)$$

式中:  $g_i$  为  $[G_1^T \ G_2^T]$  的第  $i$  个分量,  $k_e$  为等式约束个数,  $m_1$  为约束条件的个数。

迭代步骤如下:

- a. 给定初值  $y^0, \theta^0$  和  $\sigma_i^0$ . 设  $\theta^0 = 0, \sigma_i^0$  的确定是使罚函数项和  $F^0(y)$  同量级。
- b. 对于确定的  $\theta_i$  和  $\sigma_i$ , 用 DFP 方法求解目标函数  $J_i$  的无约束极值问题。
- c. 将  $y$  看成  $\theta_i$  的函数, 从第二步得到的  $y$  值开始, 等式约束, 用 Newton—Raphson 方法求目标函数相对于  $\theta_i$  的极小值, 得到新的  $\theta_i$  值; 对于不等式约束,  $\theta_i$  的选取, 是使拉格朗日乘子  $\lambda_i = \sigma_i \theta_i$  为正。
- d. 如果约束项收敛得很慢, 增加相应的权因子  $\sigma_i$ 。
- e. 若不满足收敛条件则转入 b 项。

## 2 算 例

本文以美国航天飞机轨道器数据为例, 根据航天飞机再入特点, 设立了4种计算情况, 对其相应的最佳再入轨迹进行计算<sup>[5]</sup>。

### 2.1 4种计算情况的设立

本文共设立4种计算情况: 第一种为目标函数是最远航程, 限定终端高度; 第二种为目标函数是最大横向机动距离, 限定终端高度; 第三种情况为驻点处总加热量最小, 限定终端高度; 第四种情况, 目标函数仍为使驻点处总加热量最小, 但同时限定终端高度、横向距离和终端速度。对于4种计算情况都限定最大迎角为  $40^\circ$ 。

### 2.2 运动方程

在平静大气假设下, 将航天飞机轨道器视为质点, 考虑了地球旋转和曲率影响时, 在航迹轴系中, 飞行器作无动力、无侧滑滑翔飞行时, 质心的动力学方程为<sup>[6]</sup>

$$\left. \begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= -\frac{Q_R}{m} - g_0 \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 \sin \theta + \omega_0^2 r \cos \varphi \\ &\quad \times (\sin \theta \cos \varphi - \cos \theta \sin \psi_s \sin \varphi) \\ \frac{d\theta}{dt} &= \frac{Y}{mV} \cos \gamma_s - \frac{g_0}{V} \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 \cos \theta + \frac{1}{r} V \cos \theta + 2\omega_0 \cos \psi_s \cos \varphi \\ &\quad + \frac{\omega_0^2}{V} r \cos \varphi (\cos \theta \cos \varphi + \sin \theta \sin \psi_s \sin \varphi) \\ \frac{d\psi_s}{dt} &= \frac{-Y}{mV \cos \theta} \sin \gamma_s - \frac{1}{r} V \cos \theta \cos \psi_s \operatorname{tg} \varphi - 2\omega_0 (\sin \varphi \\ &\quad - \operatorname{tg} \theta \sin \psi_s \cos \varphi) - \frac{\omega_0^2 r}{V \cos \theta} \cos \varphi \cos \psi_s \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

运动学方程为

$$\frac{dr}{dt} = V \sin \theta$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{1}{r} V \cos \theta \sin \psi_s \\ \frac{d\lambda}{dt} &= \frac{V}{r \cos \varphi} \cos \theta \cos \psi_s \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

式中:  $m$  为质量,  $V$  为对地速度,  $Y$  为升力,  $Q_R$  为阻力,  $\theta$  为航迹倾角,  $\psi_s$  为航向角,  $\gamma_s$  为绕速度矢量的滚转角,  $r$  为质心距地心的距离,  $r_0$  为地球的平均半径,  $\lambda$  为经度(从 Greenwich 子午线算起, 东经为正),  $\varphi$  为纬度(从赤道算起, 北纬为正),  $g_0$  为地球表面处的引力加速度,  $\omega_0$  为地球的自转角速度。

## 2.3 目标函数

### 2.3.1 最大航程

如图1所示, 设  $Q$  点为起始点在地球表面的投影,  $P$  点为末端点在地球表面上的投影, 航程是指通过点  $Q$  和  $P$  的大圆的弧长,  $Q$  点和  $P$  点的坐标分别表示为  $Q(\lambda_0, \varphi_0)$ ,  $P(\lambda_f, \varphi_f)$ 。根据球面三角形的余弦定理有

$$\cos n = \sin \varphi_0 \sin \varphi_f + \cos \varphi_0 \cos \varphi_f \cos(\lambda_f - \lambda_0) \quad (24)$$

根据初始解估计,  $\varphi_f$  不是很大,  $\lambda_f - \lambda_0$  在  $180^\circ$  左右, 据此, 将式(24)展开得  $n$  的近似表达式

$$n = \sqrt{(\varphi_0 + \varphi_f)^2 + \cos \varphi_{sj} (\lambda_f - \lambda_0 - \pi)^2} + \pi \quad (25)$$

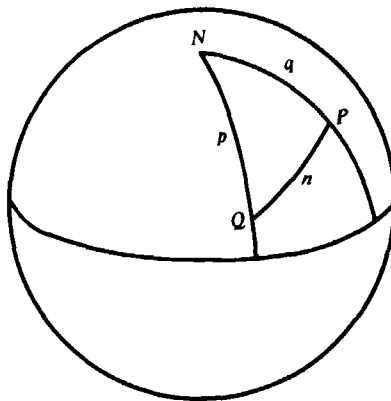


图1 航程的球面表示

作为目标函数可将式(25)中的常数项  $\pi$  去掉, 得

$$J = \sqrt{(\varphi_0 + \varphi_f)^2 + \cos \varphi_{sj} (\lambda_f - \lambda'_0)^2} \quad (26)$$

其中:

$$\lambda'_0 = \lambda_0 + \pi, \varphi_{sj} = \frac{1}{2}(\varphi_0 + \varphi_f)$$

### 2.3.2 横向距离最大

横向最大机动距离是衡量航天飞机再入过程中, 选择着陆场地的机动能力的一个重要指标, 这一目标函数用纬度角  $\varphi_f$  表示, 即

$$J = \varphi_f \quad (27)$$

### 2.3.3 总加热量最小

本文提到的热流, 是指单位时间内, 在单位面积上传给飞行器的热量; 总加热量是指驻点处热流对时间的积分。

按照 Lees 法得驻点处的热流近似公式为<sup>[7]</sup>

$$q_s = \frac{k}{R} \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^n \left( \frac{V}{V_0} \right)^m \quad (28)$$

式中:  $k$  为常数, 与壁温有关,  $R$  为飞行器头部半径,  $\rho_0$  和  $V_0$  分别为参考密度和参考速度。 $n$  和  $m$  取决于流态, 对于层流  $n = \frac{1}{2}$ ,  $m = 3$ , 此时, 式(28)可表示为

$$q_s = c \rho^{1/2} V^3 \quad (29)$$

本文计算中, 近似取  $c$  为常数, 目标函数为

$$J = c \int_0^T \rho^{1/2}(t) V^3(t) dt \quad (30)$$

## 2.4 约束条件

### 2.4.1 控制变量的约束

控制变量取迎角  $\alpha$  和绕速度矢量的滚转角  $\gamma_s$ 。计算中限制

$$\alpha \leq \alpha_{\max} = 40^\circ \quad (31)$$

### 2.4.2 终端状态的限制

第一、第二和第三种计算情况的末端条件为

$$h(T) = h_f = 39\,624 \text{ m} \quad (32)$$

式中:  $T$  表示终端时间,  $h_f$  指限定的终端高度。

第四种计算情况的末端条件为

$$h(T) = h_f = 39\,624 \text{ m} \quad (33)$$

$$\varphi(T) = \varphi_f = 34^\circ \quad (34)$$

$$V(T) = V_f = 1\,287.6 \text{ m/s} \quad (35)$$

$\varphi_f$  和  $V_f$  分别代表终端纬度和速度。

## 2.5 原始数据

地球参数、大气模型、气动数据、结构参数及初始条件取自参考文献[4][8]。

## 2.6 计算结果

图2至图7中,给出了4种情况下的计算结果和美国航天飞机的实际飞行结果(实际飞行结果为 STS—4 飞行数据)。图中曲线标号“0”代表实际飞行结果;“1”、“2”、“3”和“4”分别代表第一、第二、第三和第四种情况的计算结果。

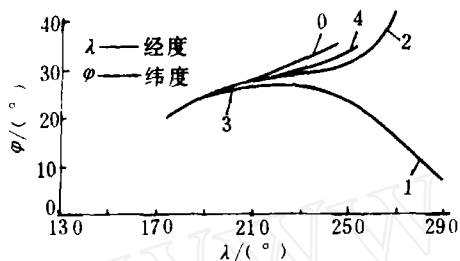


图 2 经—纬度关系

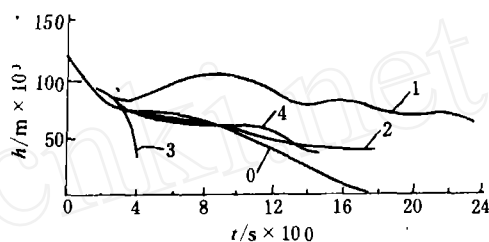


图 3 高度  $h$  随时间的变化

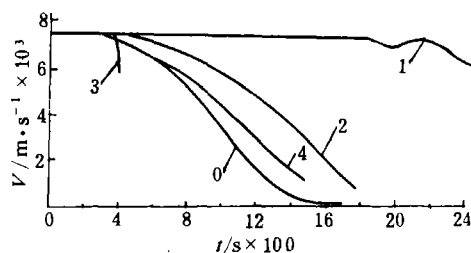


图 4 速度  $V$  随时间的变化

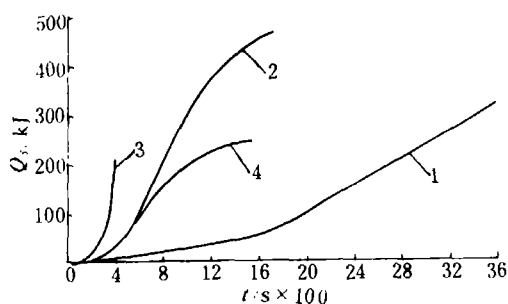


图 5 驻点处的加热量随时间的变化

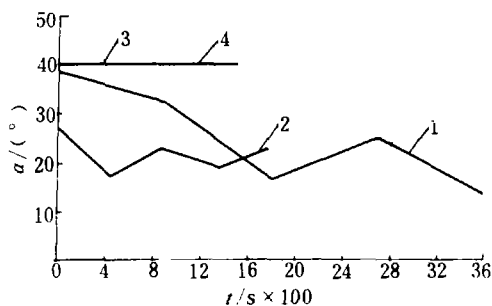


图 6 迎角  $\alpha$  随时间的变化

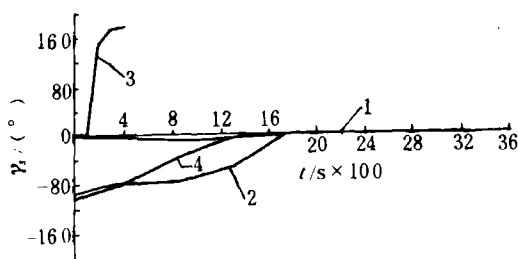


图 7  $\gamma$  随时间的变化



### 3 小 结

#### 3.1 从计算结果得到的几点看法

3.1.1 从图1知,对第一种情况和第二种情况,计算结果表明,美国航天飞机具有相当大的滑翔飞行范围,说明在设计上充分考虑了选择着陆场地的机动性。

3.1.2 第三种情况的计算结果表明,按此种情况的标准(目标函数)和条件(约束条件)来选取航天飞机的再入轨迹与实际情况相差甚远。①状态变量有急剧变化,因此可能超过过载的限制。②最大热流 $(\frac{dQ}{dt})_{\max}$ 较其它几种情况大大增加,因而可能超过限定的最大值。③在终端高度上仍具有很大的速度,说明在着陆前,巨大的能量没有消耗,不能安全着陆。所以按此标准选取航天飞机的再入轨迹是不合适的。

3.1.3 4种计算情况与美国航天飞机的实际再入轨迹相比较,第四种计算情况较其它3种更接近实际。这表明,实际再入轨迹在确保末端着陆状态条件下,使总加热量最小,可能是选择再入轨迹考虑的一个重要因素。

#### 3.2 对于本文算法的几点看法

3.2.1 基于多重打靶技术的参数优化方法,对于求解航天飞机的最佳再入轨迹问题,是一种比较有效的方法。

3.2.2 优化变量的初值中,终端时间  $T$  对收敛性影响比较明显。

3.2.3 由于以下两个原因,初值的选取很重要:①初值选取不合适,可能收敛点不是所要求的极值点;②初值选取不合适,会使迭代次数增加,计算机时延长。

### 参 考 文 献

- 1 王培德 *et al.* 一类最佳飞行轨迹的计算. 航空学报, 1988; 9(1)
- 2 Pierson B L. Optimal Aircraft Landing—Approach Trajectories; A Comparison of two Dynamic Models. IFAC Control Application of Nonlinear Programming and Optimization, 1985
- 3 Bock H G, Plitt K J. A Multiple Shooting Algorithm for Direct Solution of Optimal Control. IFAC 9th Triennial World Congress, 1984
- 4 David G H *et al.* Hypersonic Vehicle Trajectory Optimization, AD A 101 538
- 5 屈香菊. 用直接打靶法求解航天飞机的最佳再入轨迹: [硕士论文]. 北京: 北京航空航天大学, 1989
- 6 肖业伦. 飞行器运动方程. 航空工业出版社, 1987
- 7 Jeng Shengchern. Optimal Lift Bank Modulation for Three-Dimensional Reentry Trajectories with Heat Constraint. Acta. Astronautica 1988; 17(3)
- 8 赵梦熊. 航天系统工程. 航空部628所, 1986

(下转第39页)

## DYNAMIC MODEL OF ELASTIC VEHICLES FLYING IN ATMOSPHERIC TURBULENCE

Zhu Xiaoping ,Chen Shilu

(*Northwestern Polytechnic University* )

**Abstract** In this paper, a dynamic model of elastic vehicles flying in atmospheric turbulence is presented, which is based on large aspect ratio, sweptback wing airplane and axis symmetrical missile respectively. The affect of unsteady aerodynamic forces and aerodynamic coupling action between rigid motion and elastic vibration are considered in the model. The state —space equation of motion is also given in this paper .

**Key words** atmospheric turbulence, elastic vehicle, dynamic model.

(上接第21页)

## THE APPLICATION OF THE MULTIPLE SHOOTING ALGORITHM TO TRAJECTORY OPTIMIZATION

Qu Xiangju

(*Beijing University of Aeronautics and Astronautics*)

**Abstract** In the paper, a parameter optimization method is used on the basis of the multiple shooting technique to calculate optimal trajectories. Choosing American shuttle orbiter as example, we calculate the optimal reentry trajectories with several performance indices and constraints. The calculated results are discussed comparing with the actual reentry flight trajectory of the shuttle orbiter. The effectiveness of the method and program is summarized.

**Key words** trajectory optimization, optimal control, numerical method.