

# 索网和膜结构的最小曲面分析

易发安<sup>1</sup>, 胡加珠<sup>2</sup>, 岳艳芳<sup>2</sup>

(1. 同济大学建筑设计研究院同远公司, 上海 200092; 2. 东南大学土木工程学院, 南京 210096)

**摘 要:** 数学上, 最小曲面指的是(在给定边界条件下的)面积最小曲面。而在索膜结构分析中, 最小曲面指的是具有某种力学特征的能量最小曲面。推导了等应力膜索网分析模型的应变、应力关系, 对索膜结构的能量最小曲面进行了分析。根据曲面的能量函数, 论文分析比较了对应相同能量极值的两种曲面(等力密度曲面与等拉力曲面)的力学特性以及两种曲面存在时对应的不同边界条件。

**关键词:** 索膜结构; 最小曲面; 能量方法; 力密度法; 边界条件

**中图分类号:** TU383, TU393.3 **文献标识码:** A

## THE MINIMAL SURFACE ANALYSIS OF CABLE-NETS AND FABRIC STRUCTURES

YI Fa-an<sup>1</sup>, HU Jia-zhu<sup>2</sup>, YUE Yan-fang<sup>2</sup>

(1. Institute of Architecture Research and Design, Tongji Univniversity, Shanghai 200092, China;

2. College of Civil Engineering, Southeast University, Nanjing 210096, China)

**Abstract:** Mathematic minimal surface is a surface of minimal area under prescribed boundary condition. Engineering minimal surface, however, refers to a surface of minimal energy with some mechanic attributes. In this paper, the strain and stress equations of cable net model for equivalent stress membrane analysis are developed and the minimal energy surface of cable and membrane structures is analyzed. The mechanic attributes and different boundary conditions of two available minimal surfaces, equivalent force density surface and equivalent tension surface, are compared.

**Key words:** cable-membrane structure; minimal surface; energy method; force density method; boundary condition

### 1 引言

众多研究表明, 索膜结构形状分析的力密度法和能量方法是两种本质上一致的方法<sup>[1]</sup>并且所求的曲面均为最小曲面。因此, 采用力密度法和能量方法的索膜结构的形状分析实际上就是对它们最小曲面的分析。关于最小曲面的分析, 最初是一个纯

数学问题, 它所寻求的解为一在给定边界条件下曲面面积最小的曲面。但是, 边界复杂使得精确的数学求解各种最小曲面有较大困难。工程实践中索膜结构的边界条件变化多端且多数没有固定规律, 因此数学分析方法在工程分析上有较大的局限性。有限元法, 将一个连续解问题理想化为一离散解问题, 是求解最小曲面的一种常用的较好方法。文[2]

收稿日期: 2002-12-22; 修改日期: 2003-06-03

作者简介: 易发安(1972), 男, 上海人, 国家一级注册结构工程师(E-mail: tj-tongyuan@vip.sina.com);

胡加珠(1977), 男, 江西兴国, 硕士生, 主要从事张拉结构研究(E-mail: jhtw6@mizzou.edu)

岳艳芳(1979), 女, 河南安阳人, 硕士生, 从事结构工程研究(E-mail: yueyanfang@seu.edu.cn)

将三角形面单元等价于只有三条边的线形三角形单元,使得平面内三顶点具有六个自由度的问题转化为只有边长度变化三个自由度的问题。在此基础上,文章根据基于能量极值原理的动力松弛法求得了索膜结构的最小曲面。文[3]将膜离散成一个三角形平面膜单元的集合体,通过建立膜面积与离散三角单元顶点坐标的函数,求得了最小曲面。文[4]用 B 样条曲面代替实际曲面,建立了 Terzopoulos 提出的“变形能量函数”与样条曲面控制点坐标之间的函数,利用数学上的优化方法求得了满足各种几何和非几何条件的最小能量曲面。本文对索和膜结构的能量最小曲面进行了分析,归纳两种具有不同力学特点的最小曲面为能量相同的极值曲面,比较了两种曲面存在时的不同边界。

## 2 等应力膜索网分析模型索元与面单元的应力应变关系

在膜结构的分析中,可以将膜等效成为三角形网格或四边形网格的索网<sup>[5]</sup>。文[2]建立了膜结构索网分析模型中面单元与边界“索元”的等价应力、应变关系(式(1))及刚度方程。在此工作的基础上,本文推导了如下的等应力膜索网分析模型索元与面单元的应力应变关系:

$$\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_x \cdot \cos^2 \mathbf{q}_i + \mathbf{e}_y \cdot \sin^2 \mathbf{q}_i + \mathbf{g}_{xy} \cdot \sin \mathbf{q}_i \cdot \cos \mathbf{q}_i \quad (1)$$

式(1)中  $i = 1, 2, 3$  时表示三角形的三边。

等应力状态的膜面单元的应力向量:

$$\{\mathbf{s}\} = [\mathbf{s}_x \quad \mathbf{s}_y \quad \mathbf{s}_{xy}]^T = [\mathbf{s}_0 \quad \mathbf{s}_0 \quad 0]^T = \{\mathbf{s}_0\} \quad (2)$$

在这样的一个平面应力状态下应力、应变有如下的关系:

$$\mathbf{e}_x = \frac{1}{E}(\mathbf{s}_0 - m\mathbf{s}_0) = \mathbf{e}_y, \quad \mathbf{g}_{xy} = 0, \quad \mathbf{s}_0 = \frac{E \cdot \mathbf{e}_x}{(1-m)} \quad (3)$$

参照(1)、(2)两式可得出索单元与面单元的变形与应变关系:

$$\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_x \cdot \cos^2 \mathbf{q}_i + \mathbf{e}_y \cdot \sin^2 \mathbf{q}_i = \frac{d_i}{l_i} \quad (4)$$

由(3)、(4)可得:

$$\begin{aligned} \frac{d_i}{l_i} &= \mathbf{s}_0 \frac{(1-m)}{E} (\cos^2 \mathbf{q}_i + \sin^2 \mathbf{q}_i) = \mathbf{s}_0 \frac{(1-m)}{E} \\ \Rightarrow E \frac{d_i}{l_i} &= \mathbf{s}_0 (1-m) \end{aligned} \quad (5)$$

根据以上推导,我们可得出:等应力的膜结构中,索网计算模型中的索元处于一拉力相等(均为  $A_c \cdot \mathbf{s}_0 (1-m)$ ,  $A_c$  为索的横截面积)的受力状态。

## 3 最小曲面分析

### 3.1 张拉结构的能量形式

在进行张拉结构的分析时,能量方法为解决张拉结构的找形问题提供了较好的思路。参照总势能的形式,文[6]提出如下的能量表达式:

$$E(P) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^M Q_j \|P^k - P^{kj}\|_j^2 \quad (6)$$

$Q_j$  指的是结构某一受力状态中第  $j$  个单元的力密度值(可定义为:  $Q_j = T_j / L_j$ ,  $T_j, L_j$  分别为单元的拉力和单元长度),  $k$  和  $k_j$  分别表示第  $j$  单元的两个端点,  $M$  是结构单元总数。 $\|P^k - P^{kj}\|_j$  表达式为:

$$\|P^k - P^{kj}\|_j = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (x_i^k - x_i^{kj})^2} \quad (7)$$

它表示的是单元的长度。  $P^k = [x_1^k, x_2^k, x_3^k]^T$ ,  $x_i (i = 1, 2, 3)$  表示节点  $X$ 、 $Y$ 、 $Z$  的三个坐标值。在确定的力密度值  $Q_j$  条件下,式(6)的含义为结构的能量随着结构的单元长度的平方和线性变化。对(6)作如下变换:

$$\begin{aligned} E(P) &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^M Q_j \|P - P^{kj}\|_j^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^M \frac{T_j}{\|P^k - P^{kj}\|_j} \|P - P^{kj}\|_j^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^M T_j \|P^k - P^{kj}\|_j \end{aligned} \quad (8)$$

式中力密度  $Q_j = \frac{T_j}{\|P^k - P^{kj}\|_j}$ ,  $T_j$  为索单元的拉力。

因此,式(6)  $E(P)$  有另外的一种含义,在确定的  $T_j$  值条件下,结构的能量随着结构的单元长度之和线性变化。

### 3.2 两类最小曲面 - 等拉力曲面与等力密度曲面

按照最小曲面的定义  $E(P)$  应取得一能量极小值,这时  $E(P)$  对其变量即点的坐标的偏导  $\frac{\partial E(P)}{\partial x_i^k}$  应

为零。对于同一研究对象,针对  $E(P)$  的两种不同的表达式即  $E(P) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^M T_j \|P^k - P^{kj}\|_j$  和

$$E(P) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^M Q_j \|P^k - P^{kj}\|_j^2$$

,当结构中所有的索元的拉力  $T_j$ 、力密度  $Q_j$  分别取不变值时,我们可以得

到不同的最小曲面<sup>[5]</sup>：

(1) 对于索段拉力  $T_j$  相等的曲面即等拉力曲面，结构的能量为：

$$E(P) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^M T_j \|P^k - P^{kj}\|_j \quad (9)$$

$$= \frac{T_j}{2} \sum_{j=1}^M \sqrt{\sum_{i=1}^3 (x_i^k - x_i^{kj})^2} = \frac{T_j I}{2}$$

式中： $I = \sum_{j=1}^M \sqrt{\sum_{i=1}^3 (x_i^k - x_i^{kj})^2}$  为所有索元长度之和，文[5]为  $I = \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^3 \sqrt{(x_i^k - x_i^{kj})^2}$ ，有误。因  $T_j$  为恒量，故求能量  $E(P)$  极值即为求  $I$  极值，对  $k(k=1,2,\dots,M)$  点的坐标变量  $x_I(I=1,2,3)$  求偏导：

$$\frac{\partial I}{\partial x_I^k} = \sum_{j=1}^M \frac{(x_I^k - x_I^{kj})}{\sqrt{\sum_{i=1}^3 (x_i^k - x_i^{kj})^2}}$$

$$= \sum_{j=1}^M \frac{Q_j (x_I^k - x_I^{kj})}{T_j} = \frac{1}{T_j} \sum_{j=1}^M Q_j (x_I^k - x_I^{kj}) \quad (10)$$

$I=1,2,3$

能量取得极值时(10)式应等于零，由此可得：

$$\sum_{j=1}^M Q_j (x_I^k - x_I^{kj}) = 0 \text{ 为节点的平衡条件，这说明能量}$$

极值曲面满足平衡条件为合理的形状求解。任何合理的形状求解都必须满足节点的平衡条件

$$\sum_{j=1}^M Q_j (x_I^k - x_I^{kj}) = 0, \text{ 在所有合理的形状求解中，若}$$

$T_j$  为恒量，根据以上式子反推我们可得

$$\frac{\partial E(P)}{\partial x_I^k} = \frac{\partial I}{\partial x_I^k} = 0 \text{ 即这样一个曲面的能量及索段长}$$

度之和取得极值。以上分析表明，等拉力曲面是能量最小曲面的一个解，这个解满足结构的平衡条件，对应的是所有的索段长度之和最小曲面。

(2) 对于所有索段力密度值  $Q_j$  相等的曲面即等力密度曲面，结构的能量为：

$$E(P) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^M Q_j \|P^k - P^{kj}\|_j^2 \quad (11)$$

$$= \frac{Q_j}{2} \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^3 (x_i^k - x_i^{kj})^2 = \frac{Q_j L}{2}$$

式中： $L = \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^3 (x_i^k - x_i^{kj})^2$  为所有索段的长度平方

和。因  $Q_j$  为恒量，故求能量  $E(P)$  极值即为求  $L$  极值，对  $k(k=1,2,\dots,M)$  点的坐标变量  $x_I(I=1,2,3)$  求偏导：

$$\frac{\partial L}{\partial x_I^k} = 2 \sum_{j=1}^M (x_I^k - x_I^{kj}) = 2M_k x_I^k - 2 \sum_{j=1}^M x_I^{kj}$$

$$= 2 \sum_{j=1}^M Q_j (x_I^k - x_I^{kj}) \quad , \quad I=1,2,3 \quad (12)$$

能量取得极值时(12)式应等于零，由此可得：

$$\sum_{j=1}^M Q_j (x_I^k - x_I^{kj}) = 0, \text{ 为节点的平衡条件，这说明能}$$

量极值曲面满足平衡条件为合理的形状求解。任何合理的形状求解都必须满足节点的平衡条件：

$$\sum_{j=1}^M Q_j (x_I^k - x_I^{kj}) = 0 \Rightarrow M_k x_I^k = \sum_{j=1}^M x_I^{kj} \quad (13)$$

在所有合理的形状求解中，若  $Q_j$  为恒量，根据以

上式子反推我们可知  $\frac{\partial E(P)}{\partial x_I^k} = \frac{\partial L}{\partial x_I^k} = 0$  即这样一个

曲面的能量及索段长度平方和取得极值。各符号的含义与(1)相同。以上分析表明，等力密度曲面也是能量最小曲面的一个解，对应的是所有的索段长度平方和最小曲面。

## 4 最小曲面数值算例分析与比较

在 3.2 中我们已经分析了，等拉力曲面与等力密度曲面是两种取得能量极值的曲面。虽然两种曲面都取得能量的极小值，但两者有无数值上的差异呢？在实际的应用中，两种曲面是否都可行还是各有条件限制呢？关于以上问题，本章按照等力密度和等拉力曲面的求解方法做了如下的数值分析。

### 例 1：极对称索网

本例取自文[7]内圆半径为 1.2 外圆半径为 10，两者标高差为 6。等力密度找形结果：图 1(b)中力密度值为 10。图 1(b)、(c)所示的是按照文[5]的方法的等拉力找形结果，并将迭代计算停止的控制量设为单元受力与平均值的偏差小于单元受力的 0.1%，在计算结果中经过 15 次迭代达到计算要求，最大的单元受力偏差为 5.982046E-01。根据图 1(c)所示，我们可以得出这样的结论，对于这样一个极对称的索网(或膜结构)，等拉力计算的结果将会出现这样一个状况，随着计算精度的提高单元会更多的集中地布置于帐篷的顶部，为不合理的形状求解。这样的结果与等拉力曲面所具有的所有单元

长度之和最小的这一特点是相符合的。

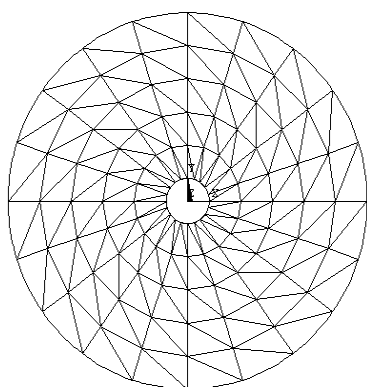


图 1(a) 几何布置(俯视)

Fig.1(a) The topology of cable net (aerial view)

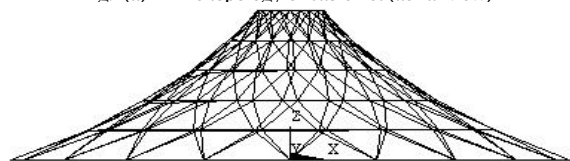


图 1(b) 等力密度找形结果(侧视)

Fig.1(b) Form finding by equivalent density (side view)

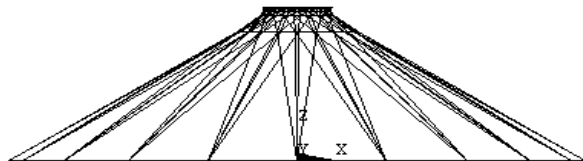


图 1(c) 等拉力找形结果(侧视)

Fig.1(c) Form finding by equivalent tension (side view)

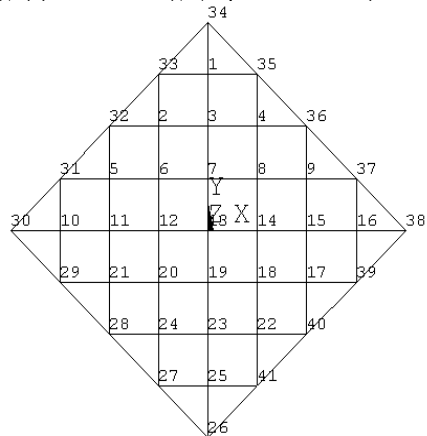


图 2(a) 等力密度找形结果(俯视)

Fig.2(a) Form finding by equivalent density (aerial view)

例 2: 刚性边界的索网(边界所有节点均刚性固定)

本例取自文[8], 点 26~41 的坐标确定, 其中 26(0,-160,20), 30(-160,0,0), 34(0,160,20), 38(160,0,0)。刚性边界的索网在进行等拉力计算时不会出现例 1 中类似的情况(图 2(b)), 但是从图 3 两种计

算的结果比较可以看出等拉力和等力密度计算结果之间的差别: 除刚性边界点和中心点外, 各点的 X、Y 坐标值都发生了向中心点靠近的位移(非对称轴上点)或仅发生沿对称轴方向位移。

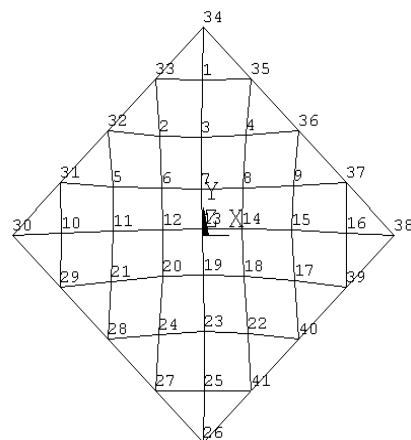


图 2(b) 等拉力找形结果(俯视)

Fig.2(b) Form finding by equivalent tension (aerial view)

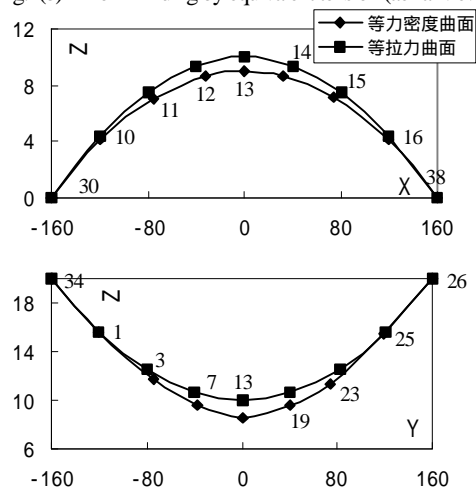


图 3 沿 X、Y 方向中心网格点坐标比较

Fig.3 The X, Y coordinates of center points

例 3: 非刚性边界索网

本算例取自文[9], 只有四个角点固定, 1(-20,-20,-4), 5(20,-20,4), 21(-20,20,4), 25(20,20,-4)。非刚性边界索网按力密度法计算, 边界索单元的拉力与索网内单元的拉力值要有较大的差别(考虑平衡条件可知)。在膜结构中, 边界单元的较大拉力值可以通过加劲索来控制。如图 4(a)所示边界单元与索网内单元的力密度比值为 10:1, 图 4(b)所示为等力密度的找形结果。据平衡条件, 非刚性边界的等拉力分析结果显然将是不实用的。按照等拉力曲面是所有单元长度之和为最小的曲面可以预见, 计算迭代的结果将是所有不与边界点连结的单元都将集中于中心点, 实际的计算也证明了这一点。

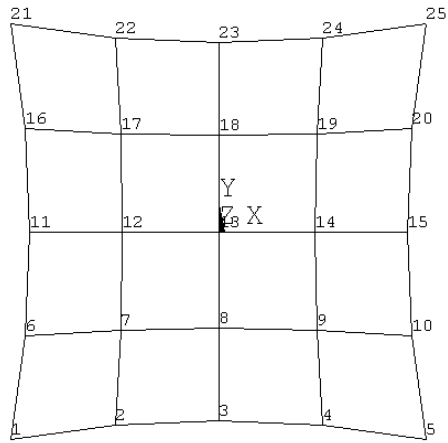


图 4(a) 非等力密度找形结果

Fig.4(a) Form finding by non-equivalent density

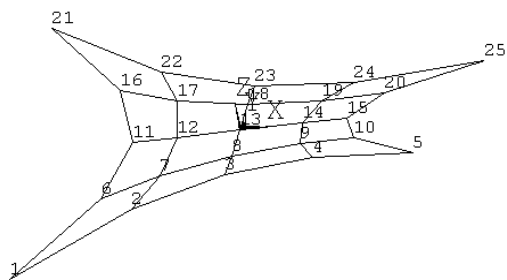


图 4(b) 等力密度找形结果

Fig.4(b) Form finding by equivalent tension

# 参考文献：

- [1] Tibert G. Deployable tensegrity structures for space applications [D]. Dept. of Mechanics, Royal Institute of Technology, 2002.
- [2] W J Lewis, P D Gosling. Stable minimal surfaces in form-finding of lightweight tension structures[J]. International Journal of Space Structures, 1993, 8(3): 149-166.
- [3] L Grundig. Minimal surfaces for finding forms of structural membranes[J]. Computers & Structures, 1988, 30(3): 679-683.
- [4] 宋德军, 朱心雄. 用能量优化方法构造 N 边域曲面[J]. 工程图学学报, 1998, 1: 41-47.  
Song Dejun, Zhu Xinxiong. The construction of N side surface by energy optimization[J]. Journal of Engineering Graphics, 1998, 1: 41-47. (in Chinese)
- [5] 张其林, 编著. 索和膜结构[M]. 上海: 同济大学出版社, 2002.  
Zhang Qilin. Cable and membrane structures [M]. Shanghai: Tongji University Press, 2002. (in Chinese)
- [6] Connelly R. Rigidity and energy[M]. Inventiones Mathematicae, 1982, 66(1): 11-33.
- [7] 张其林, 张莉. 膜结构形状确定的三类问题及其求解 [J]. 建筑结构学报, 2000, 21(5): 33-40.  
Zhang Qilin, Zhang Li. Three form finding problems of membranes [J]. Journal of Building Structures, 2000, 21(5): 33-40. (in Chinese)
- [8] G R Monforton and N M El-Hakim. Analysis of truss-cable structures[J]. Computers & Structures, 1980, 11: 327-335.
- [9] Krishna Prem. Cable-suspended roofs [M]. McGraw-Hill, Inc., 1978.