第 4 章　叠　　加

§4.1　插　值　法

在叙述下面的问题之前，我们先讲以下几点.

(1)给定 n 个不同的横坐标

$$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$$

和 n 个对应的纵坐标

$$y_1,\ y_2,\ y_3,\ \cdots, y_n$$

这就给出了平面上 n 个不同的点

$$(x_1, y_1),\ (x_2, y_2),\ (x_3, y_3), \cdots,\ (x_n, y_n),$$

我们要找一个函数 $f(x)$，使得它在给定横坐标处的值刚好就是对应的纵坐标：

$$f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2, f(x_3) = y_3, \cdots, f(x_n) = y_n.$$

换言之，就是要找一条方程为 $y=f(x)$ 的曲线，使它恰好通过上面给出的那 n 个点. 见图 4.1. 这就是所谓插值的问题.

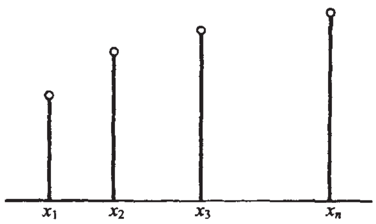

图 4.1　插值

让我们探讨一下这个问题的背景，这样可以提高我们对它的兴趣，从而增加我们解决问题的可能性.

(2)当我们在考虑一个量 y 依赖于另一个量 x 的时候，就可能会出现插值问题．让我们考虑一个具体的例子：设 x 表示温度，而 y 表示等压下一根均匀金属棒的长度．金属棒在任何温度 x 下都有一个确定的长度 y 与之对应，这就是我们所说的 y 依赖于 x，或 y 是 x 的函数，记为 $y=f(x)$．物理学家在实地研究 y 对 x 的依赖时，是把金属棒置于不同的温度

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\cdots,x_n$$

之下，并对每一温度测得金属棒的长度，设它们分别为

$$y_1,\ y_2,\ y_3,\cdots,y_n,$$

当然，物理学家也很想知道在那些他还不曾有机会观察到的温度 x 下金属棒的长度 y 是多少？也就是说，物理学家想在这 n 次观察的基础上知道函数 $y=f(x)$ 在整个自变量 x 变化范围内的变化情况——这样他就提出了一个插值的问题．

(3)让我们在这里插上一句，实际上物理学家的问题是比较复杂的．他所测得的值 $x_1,y_1,x_2,y_2,\cdots,x_n,y_n$ 并不可能是所要测的量的"真正的值"，因为测量不可避免的会有误差．所以它的曲线不必通过测得的这些点，而只要很靠近这些点就行了．

此外，在通常情况下我们还要区别下面两种情形：即那个未曾观察的横坐标 x（物理学家想要知道对应于它的纵坐标 y）是在两头两个观察值（即图 4.1 的 x_1 和 x_n）的区间内，或在这个区间外：前一种情形，我们称之为*内插*，而后一种情形，称为*外插*（一般我们认为内插较外插更为可靠．）

不过，让我们暂时先别管这个区别以及这一小段提到的别的那些话，还是言归正传，回到(1)和(2)的主题去．

(4)第(1)段里提出的问题是非常不确定的：因为通过 n 个给定点的曲线可以有无穷多条．物理学家单凭他那 n 次观察数据本身，无法去确定这些曲线里的那一条比其他各条更合适．因此如果物理学家决定要画一条曲线，除了他的 n 次观察外，他必须还要有一些理由才行——是些什么理由呢？

这样，关于插值的问题便引出了一个更一般的问题（这使它变得更加有意思了）：是什么提供了，或证明了由已知观察数据和思想背景到一种数学表示式的过渡呢？这是一个重要的哲学问题——然而，它并不是那种能有圆满解答的重要哲学问题，所以我们还是转向插值问题的别的方面吧.

(5)我们很自然地把第(1)段里提出的问题转换成去找出一条过 n 个给定点的最简单的曲线. 可是，这样一变，问题不但还是不确定的，反而更含糊了. 因为所谓“简单”是很难有客观标准的，每个人都可以根据自己的嗜好、立场、背景、思想和习惯去判断什么是“简单”.

不过，在我们现在这个问题里却可以给出“简单”的一种解释，它是大家能够接受的，并且可由此导出一个确定的有用的数学公式. 首先，我们认为加法、减法和乘法是最简单的运算. 其次，我们认为函数值可以通过最简单的运算去计算的函数是最简单的函数. 基于这样两个观点，我们必然认为多项式是最简单的函数. 多项式的一般形状是

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n,$$

其函数值可以由给定的系数 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 和自变量 x 的值通过三种最简单的运算计算出来. 如果我们假定 $a_n \neq 0$，则多项式是 n 阶的.

最后，对于两个不同阶数的多项式，我们认为阶数低的那一个更简单些. 如果我们按照这样的观点，那么求通过 n 个定点的最简单的曲线的问题就变成一个确切的问题，即多项式插值问题，我们可以将它陈述如下：

给定 n 个不同的数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，和另外 n 个数 $y_1, y_2, \cdots, y_n$，求一个阶数最低的多项式 $f(x)$，它满足下列 n 个条件

$$f(x_1) = y_1,\ f(x_2) = y_2, \cdots, f(x_n) = y_n.$$

§4.2 一个特殊情形

如果我们对所提的问题还束手无策，那么不妨改变一下数据试试. 比方说，我们可以让某一个给定的纵坐标固定，而让其余的减小，这样我们就能发现一个特殊情形，它似乎比较好处理一些. 我们不必限制横坐标，可以假定横坐标是任意 n 个不同的数

$$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n,$$

但选一组特别简单的纵坐标，它们分别是，

$$0, 1, 0, \cdots, 0$$

（这就是说，除了对应于横坐标 x_2 的纵坐标等于 1 外，其余的纵坐标都等于 0，见图 4.2）

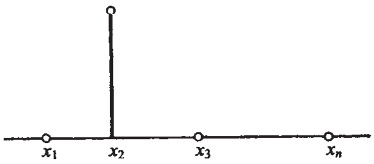

图 4.2 一个特殊情形

根据多项式的一条有趣的性质：在 $n-1$ 个给定点上取值为 0 的多项式（即有 $n-1$ 个不同的根 $x_1, x_3, x_4, \cdots, x_n$）一定能被下列 $n-1$ 个因子整除

$$x-x_1, x-x_3, x-x_4, \cdots, x-x_n,$$

$$x-x_1, x-x_3, x-x_4, \cdots, x-x_n,$$

因此也一定能被这 $n-1$ 个因子的乘积整除，因而它至少是 $n-1$ 阶的. 如果多项式的阶数达到了最低的可能的阶数 $n-1$，则它的形状必定是

$$f(x) = C(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)\cdots(x-x_n),$$

其中 C 是某个常数.

我们已经用了全部数据吗？没有，对应于横坐标 x_2 的纵坐标 1 还没有用到，把它也考虑进来，便得

$$f(x_2) = C(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)\cdots(x_2 - x_n) = 1,$$

从这个方程里可算得 C，把算得的 C 值代进 $f(x)$ 的表达式，便得

$$f(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_3)(x - x_4)\cdots(x - x_n)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)\cdots(x_2 - x_n)},$$

显然，这个多项式在所有给定的横坐标处都取所要求的值，至此，我们已经成功地解决了特殊情形下的多项式插值问题.

§4.3 组合特殊情形以得出一般情形的解

我们有幸碰见了这样一个易于处理的特殊情形. 为了保住这一幸运，我们现在应当考虑怎样去充分利用所得到的解.

稍稍改变一下所得到的解，我们便可处理一个略微推广了的特殊情形：对于给定的横坐标

$$x_1,\ x_2, x_3, \cdots,\ x_n,$$

我们让对应的纵坐标分别是

$$0, y_2, 0, \cdots, 0,$$

用 y_2 这个因子去乘 §4.2 得到的表达式

$$y_2 \frac{(x - x_1)(x - x_3)(x - x_4)\cdots(x - x_n)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)\cdots(x_2 - x_n)},$$

我们就可以得出取上述那些数值的多项式.

在这个表达式中，横坐标 x_2 跟其他那些横坐标不一样，它扮演了一个特别的角色，但是 x_2 本身并没有什么特殊之处，我们也可以让别的横坐标来扮演它的角色. 这样，如果对于横坐标

$$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n,$$

我们让相应的纵坐标取下列 n 行中的任意一行

$$
\begin{gathered}
y_1, 0, 0, \cdots, 0 \\
0, y_2, 0, \cdots, 0 \\
0, 0, y_3, \cdots, 0 \\
\vdots \\
0, 0, 0, \cdots, y_n
\end{gathered}
$$

那么就可以写出一个 $n-1$ 阶多项式的表达式，使得它在相应的横坐标处取的值就是这一行规定的值.

上面我们概述了问题在 n 种不同特殊情形下的解法. 你能把它们组合起来去得出一般情形的解吗？这当然是能做到的，把前面得到的那 n 个表达式加起来：

$$
\begin{aligned}
f(x) = {} & y_1 \frac{(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)\cdots(x-x_n)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)\cdots(x_1-x_n)} \\
& + y_2 \frac{(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)\cdots(x-x_n)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)\cdots(x_2-x_n)} \\
& + y_3 \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)\cdots(x-x_n)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)\cdots(x_3-x_n)} \\
& \cdots\cdots \\
& + y_n \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_1)(x_n-x_2)(x_n-x_3)\cdots(x_n-x_{n-1})}
\end{aligned}
$$

结果便得到一个阶数不超过 $n-1$ 的多项式，它满足条件

$$
f(x_i) = y_i,\ i = 1, 2, 3, \cdots, n,
$$

这一点由 $f(x)$ 表达式的结构，便可以一眼看出来.

（还有什么问题吗?）

§4.4 数学模型

插值问题的上述解法，是拉格朗日* 提出来的，它可以发展成

---

* L. de Lagrange(1736—1813)，18 世纪著名的法国天文学家和数学家.