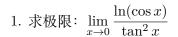
## "数学外卖"高等数学组期中讲座讲义

## 刘欣晨 解淑涵 黄泽昕 王一诺 杨瑞灵 赵思铭

October 27th



2. 求极限: 
$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$$

3. 求极限: 
$$\lim_{n\to\infty} \left( \sqrt[3]{n^3 + n^2 + n} - \sqrt{n^2 + n} \right)$$

4. 求极限: 
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}$$

5. 求极限:

$$\lim_{x \to \infty} x^2 \left[ \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x - e + \frac{e}{2x} \right]$$

6. 当  $x \to 0$  时, 判断下列函数的无穷小的阶数

A.
$$\sqrt{1 + \arcsin x} - \sqrt{1 + x}$$
 B. $\sqrt{1 + 2x} - x - 1$  C. $x(\tan x - x)$  D. $e^{5x^4 - 2x} - 1$ 

7. 设 f(x) 是定义在区间 [a,b] 上的函数, 试用  $\Leftrightarrow$  或  $\Leftarrow$  连接下列命题, 以表达命题的强弱 关系。

- a. *f*(*x*) 连续
- b. f(x) 可微 c. f(x) 可导 d. f(x) 连续可微
- e. *f*(*x*) 一致连续
- f. f(x) 有界 g.  $\forall x_1, x_2 \in [a, b], |f(x_1) f(x_2)| \le \frac{3}{2}|x_1 x_2|$ 。

8. 若函数 f(x) 在  $(-\infty, +\infty)$  上恰好有三个间断点  $x_1 < x_2 < x_3, \varphi(x)$  是在  $(-\infty, +\infty)$ 上单调递减的连续函数,则复合函数  $f(\varphi(x))$  在  $(-\infty, +\infty)$  上 ( )。

- A. 至多有三个间断点
- B. 恰好有 3 个间断点
- C. 有多于 3 个间断点但不会有无穷多个间断点
- D. 可能有无穷多个间断点

9. 设 
$$f(x) = (x^2 - x - 2)|x^3 - x|$$
,不可导点的个数是 \_\_\_\_\_

- 10. 设函数  $f(x) = \ln x + \frac{1}{x}$ 。求: (1) 求 f(x) 的最小值

  - (2) 设数列  $\{x_n\}$  满足  $\ln x_n + \frac{1}{x_{n+1}} < 1$ 。证明  $\lim_{n \to \infty} x_n$  存在,并求此极限
- 11. 证明:  $x < \arcsin x < \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ , 其中 0 < x < 1
- 12. 设 y = f(x) 由方程  $\begin{cases} x = t^2 t \\ y^3 + 3ty + 1 = 0 \end{cases}$  确定,求  $\frac{d^2y}{dx^2}|_{t=0}$ .
- 14. 设  $f(x) = (\arcsin x)^2$ ,求  $f^{(n)}(0)$ 。
- 15. 设  $\xi_a$  为函数  $f(x) = \arctan x$  在区间 [0,a] 上使用 Lagrange 中值定理时的中值,求  $\lim_{x\to 0^{+}} \frac{\xi_a}{a}$ .
- 16. 设 f(x) 在 [0,1] 上连续,在 (0,1) 上可导,且 f(0) = f(1) = 0,f(0.5) = 1 证明:
  - (1) 存在  $\xi \in (0.5, 1)$ ,使  $f(\xi) = \xi$
  - (2) 对于任意实数  $\lambda$ ,一定存在  $\eta \in (0,\xi)$ ,使得  $f'(\eta) \lambda(f(\eta) \eta) = 1$ .
- 17. 设函数 f(x) 在 [0,1] 上连续,且 f(0) = f(1)。证明:  $\forall n \geq 2, n \in \mathbb{N}, \exists \xi \in (0,1),$  使得  $f(\xi) = f(\xi + \frac{1}{n}).$
- 18. 设 f(x) 在 [a,b] 上连续,在 (a,b) 内二阶可导 (b>a>0),证明:存在  $\xi\in(a,b)$  使得  $f(b) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(a) = \frac{(b-a)^2}{4}f''(\xi).$

