

线代：矩阵与行列式

许可 吴佳骏

1 行列式

(1)

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 5 & -3 \end{vmatrix}$$

求 $-2A_{31} - 4A_{32} + A_{34}$ 。

(2) 已知行列式 $\det(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = -2$, 求行列式 $\det(3\alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 - \alpha_2, \alpha_3 + \alpha_1)$ 。

(3) 计算 n 阶行列式, 其中 $a_i \neq 0 (2 \leq i \leq n)$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_n \\ c_2 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ c_3 & 0 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_n & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

(4) 计算 n 阶行列式, 其中 $a_i \neq 0 (1 \leq i \leq n)$

$$|A| = \begin{vmatrix} x_1 - a_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 - a_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & x_3 - a_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n - a_n \end{vmatrix}$$

(5) 计算 n 阶行列式:

$$\begin{vmatrix} a_1 + b & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 + b & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n + b \end{vmatrix}$$

(6) 计算下列行列式的值

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}$$

2 矩阵

(1) 设 A^* 为 3 阶方阵 A 的伴随矩阵, 若 $|A| = -8$, 则 $|(\frac{1}{4}A)^* + 4A^{-1}| =$

(2)

若方阵 A, B 满足 $(AB)^2 = E$, 则 $(BA)^2 = E$;

若方阵 A, B 均不可逆, 则 $A + B$ 必不可逆;

若方阵 A, B 均不可逆, 则 AB 必不可逆。

则上述说法中正确的个数是 () 个。

(3) 设 $A = (a_{ij})$ 是 3 阶非零实方阵, $|A|$ 为 A 的行列式, A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式。若 $a_{ij} + A_{ij} = 0 (i, j = 1, 2, 3)$, 求 $|A|$ 。

(4) 设 A 为 $n \times m$ 矩阵, B 为 $m \times n$ 矩阵, 如果 $E_n - AB$ 可逆, 证明: $E_m - BA$ 也可逆, 并求 $(E_m - BA)^{-1}$ 。

(5) 设 n 阶方阵 A 满足 $A^2 - 2A - 3E = O$, 证明 $R(A + E) + R(A - 3E) = n$ 。

(6) 设 A 为 n 阶方阵, 且 α 为 n 维列向量, 若 $R(A) = R(A|\alpha)$, 则线性方程

(A) $Ax = \alpha$ 必有无穷多解;

(B) $Ax = \alpha$ 必有唯一解;

(C) $\begin{pmatrix} A & a \\ a^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = O$ 仅有零解;

(D) $\begin{pmatrix} A & a \\ a^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = O$ 必有非零解。

(7) 当 a 何值时, 线性方程组

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + ax_2 + x_3 = a \\ x_1 + x_2 + ax_3 = a^2 \end{cases}$$

无解, 有唯一解和无穷多解, 并在无穷多解时求出其通解。