

TP2 :Problèmes aux valeurs propres et vibrations des ponts

Lucas Deregnaucourt
Tonglin Yan

15 Décembre 2019

Table des matières

1 Aspects théoriques et modélisation	3
1.1 Vérification des propriétés	3
1.2 Remodélisation du système	5
1.3 Propriétés de ω^2 et \underline{d} :	5
1.4 Bonus	6
2 Aspects théoriques	7
2.1 Pont simple	7
2.2 Pont Colbert, Dieppe	8
3 Conclusion	11

Introduction

Ce TP nous permet d'étudier la modélisation de la structure d'un pont. En appliquant le PFD, on obtient une relation entre la masse au noeud et le coefficient de raideur entre deux noeuds. A l'aide de cette équation, on modélise le système suivant $\omega^2 \mathbb{M} \underline{d} = \mathbb{K} \underline{d}$ afin de trouver $\lambda = \omega^2$ et \underline{d} . Ensuite, par les propriétés de \mathbb{M} et de \mathbb{K} , l'équation peut s'écrire sous la forme $\omega^2 \underline{d} = \tilde{\mathbb{K}} \tilde{\underline{d}}$. En utilisant l'algorithme de l'énoncé et la méthode du cours, on obtient les valeurs propres puis on les affine. Enfin, on observe les déformations du pont à l'aide du module matplotlib.

Chapitre 1

Aspects théoriques et modélisation

1.1 Vérification des propriétés

Dans cette section, on cherche à modéliser le problème sous la forme suivante : $\omega^2 \mathbb{M} \underline{d} = \mathbb{K} \underline{d}$ et vérifier les propriétés de \mathbb{M} et de \mathbb{K} .

Soient $\underline{p}_1 = [0, 0, 0]$ et $\underline{p}_2 = [1, 0, 0]$ deux jonctions. On a alors

$$\begin{aligned}\underline{u}_{12} &= \frac{\underline{p}_1 - \underline{p}_2}{\|\underline{p}_1 - \underline{p}_2\|_2} \\ &= \frac{[-1, 0, 0]}{\|[-1, 0, 0]\|_2} \\ &= \frac{[-1, 0, 0]}{1} \\ &= [-1, 0, 0]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\underline{u}_{21} &= \frac{\underline{p}_2 - \underline{p}_1}{\|\underline{p}_2 - \underline{p}_1\|_2} \\ &= \frac{[1, 0, 0]}{\|[1, 0, 0]\|_2} \\ &= [1, 0, 0]\end{aligned}$$

On sait que $\underline{D}_i = \underline{d}_i \cos(\omega t)$ avec \underline{d}_i un vecteur constant. On calcule la dérivée de \underline{D}_i avec $\dot{\underline{D}}_i = -\underline{d}_i \omega \sin(\omega t)$ et la dérivée seconde avec $\ddot{\underline{D}}_i = -\underline{d}_i \omega^2 \cos(\omega t)$. Maintenant, en appliquant le PFD, on a

$$\begin{aligned}-m_i \underline{d}_i \omega^2 \cos(\omega t) &= -\sum_j k_{ij} ((\underline{d}_i \cos(\omega t) - \underline{d}_j \cos(\omega t)) \cdot \underline{u}_{ij}) \underline{u}_{ij}, \quad \forall i, j \in \{1, 2\}^2 \\ \Leftrightarrow -m_i \underline{d}_i \omega^2 \cos(\omega t) &= -\sum_j k_{ij} ((\underline{d}_i - \underline{d}_j) \cos(\omega t) \cdot \underline{u}_{ij}) \underline{u}_{ij} \\ \Leftrightarrow m_i \underline{d}_i \omega^2 &= \sum_j k_{ij} ((\underline{d}_i - \underline{d}_j) \cdot \underline{u}_{ij}) \underline{u}_{ij}\end{aligned}$$

Comme $i \in \{1, 2\}$, on obtient les deux équations suivantes :

$$\begin{aligned}
 m_1 \underline{d}_1 \omega^2 &= \sum_{j=1}^2 k_{1j} ((\underline{d}_1 - \underline{d}_j) \cdot \underline{u}_{1j}) \underline{u}_{1j} \\
 &= k_{11} (\underbrace{(\underline{d}_1 - \underline{d}_1) \cdot \underline{u}_{11}) \underline{u}_{11}}_{=0} + k_{12} ((\underline{d}_1 - \underline{d}_2) \cdot \underline{u}_{12}) \underline{u}_{12} \\
 &= k_{12} ((\underline{d}_1 - \underline{d}_2) \cdot \underline{u}_{12}) \underline{u}_{12} \\
 &= k_{12} ((\underbrace{\underline{d}_1 \cdot \underline{u}_{12}}_{=d_{11} \times (-1) + d_{12} \times 0 + d_{13} \times 0} - \underbrace{\underline{d}_2 \cdot \underline{u}_{12}}_{=d_{21} \times (-1) + 0 + 0}) \underline{u}_{12} \\
 &= k_{12} (-d_{11} + d_{21}) \underline{u}_{12} \\
 &= [k_{12} d_{11}, 0, 0] - [k_{12} d_{21}, 0, 0] \\
 &= [k_{12} d_{11} - k_{12} d_{21}, 0, 0] \\
 \Leftrightarrow m_1 \begin{pmatrix} d_{11} \\ d_{12} \\ d_{13} \end{pmatrix} \omega^2 &= \begin{pmatrix} k_{12} d_{11} - k_{12} d_{21} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 m_2 \underline{d}_2 \omega^2 &= \sum_{j=1}^2 k_{2j} ((\underline{d}_2 - \underline{d}_j) \cdot \underline{u}_{2j}) \underline{u}_{2j} \\
 &= k_{21} ((\underline{d}_2 - \underline{d}_1) \cdot \underline{u}_{21}) \underline{u}_{21} + k_{22} (\underbrace{(\underline{d}_2 - \underline{d}_2) \cdot \underline{u}_{22}) \underline{u}_{22}}_{=0} \\
 &= k_{21} ((\underline{d}_2 - \underline{d}_1) \cdot \underline{u}_{21}) \underline{u}_{21} \\
 &= k_{21} ((\underbrace{\underline{d}_2 \cdot \underline{u}_{21}}_{=d_{21} \times 1 + d_{22} \times 0 + d_{23} \times 0} - \underbrace{\underline{d}_1 \cdot \underline{u}_{21}}_{=d_{11} \times 1 + 0 + 0}) \underline{u}_{21} \\
 &= k_{21} (d_{21} - d_{11}) \underline{u}_{21} \\
 &= [k_{21} d_{21}, 0, 0] - [k_{21} d_{11}, 0, 0] \\
 &= [k_{21} d_{21} - k_{21} d_{11}, 0, 0] \\
 \Leftrightarrow m_2 \begin{pmatrix} d_{21} \\ d_{22} \\ d_{23} \end{pmatrix} \omega^2 &= \begin{pmatrix} k_{21} d_{21} - k_{21} d_{11} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 \text{On pose } \underline{d} = \begin{pmatrix} d_{11} \\ d_{12} \\ d_{13} \\ d_{21} \\ d_{22} \\ d_{23} \end{pmatrix}, \mathbb{M} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_2 \end{pmatrix} &\text{ et } \mathbb{K} = \begin{pmatrix} k_{12} & 0 & 0 & -k_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_{21} & 0 & 0 & k_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

On obtient ainsi un système correspondant aux équations ci-dessus.

$$\begin{aligned}
 \omega^2 \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{11} \\ d_{12} \\ d_{13} \\ d_{21} \\ d_{22} \\ d_{23} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} k_{12} & 0 & 0 & -k_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_{21} & 0 & 0 & k_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{11} \\ d_{12} \\ d_{13} \\ d_{21} \\ d_{22} \\ d_{23} \end{pmatrix} \\
 \Leftrightarrow \omega^2 \mathbb{M} \underline{d} &= \mathbb{K} \underline{d}
 \end{aligned}$$

Il est évident que \mathbb{M} est une matrice diagonale avec $\mathbb{M}_{ii} > 0$ car la masse est définie positive,

alors elle est bien symétrique. De plus, \mathbb{K} est symétrique car les coefficients de raideur k_{ij} et k_{ji} sont égaux $\forall i \neq j$.

1.2 Remodélisation du système

D'après la première section, on a le système

$$\omega^2 \mathbb{M} \underline{d} = \mathbb{K} \underline{d}$$

Maintenant, on cherche à transformer le système ci-dessus sous la forme

$$\omega^2 \tilde{\underline{d}} = \tilde{\mathbb{K}} \tilde{\underline{d}}$$

Sachant que \mathbb{M} est diagonale, on factorise \mathbb{M} en $\mathbb{M} = \mathbb{M}^{\frac{1}{2}} \mathbb{M}^{\frac{1}{2}}$ avec $\mathbb{M}^{\frac{1}{2}}$ symétrique. Alors le système devient

$$\begin{aligned} & \omega^2 \mathbb{M} \underline{d} = \mathbb{K} \underline{d} \\ \Leftrightarrow & \omega^2 \mathbb{M}^{\frac{1}{2}} \mathbb{M}^{\frac{1}{2}} \underline{d} = \mathbb{K} \underline{d} \\ \Leftrightarrow & \underbrace{\omega^2 \mathbb{M}^{-\frac{1}{2}} \mathbb{M}^{\frac{1}{2}} \mathbb{M}^{\frac{1}{2}}}_{Id} \underline{d} = \mathbb{M}^{-\frac{1}{2}} \mathbb{K} \underline{d} \\ \Leftrightarrow & \underbrace{\omega^2 \mathbb{M}^{\frac{1}{2}}}_{\tilde{\underline{d}}} \underline{d} = \underbrace{\mathbb{M}^{-\frac{1}{2}} \mathbb{K} \mathbb{M}^{-\frac{1}{2}}}_{\tilde{\mathbb{K}}} \underbrace{\mathbb{M}^{\frac{1}{2}}}_{\tilde{\underline{d}}} \underline{d} \end{aligned}$$

En posant $\tilde{\underline{d}} = \mathbb{M}^{\frac{1}{2}} \underline{d}$ et $\tilde{\mathbb{K}} = \mathbb{M}^{-\frac{1}{2}} \mathbb{K} \mathbb{M}^{-\frac{1}{2}}$, on obtient le nouveau système

$$\omega^2 \tilde{\underline{d}} = \tilde{\mathbb{K}} \tilde{\underline{d}}$$

Ensuite, on veut montrer que $\tilde{\mathbb{K}}$ est symétrique. Il faut donc montrer que $\tilde{\mathbb{K}}^t = \tilde{\mathbb{K}}$.

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{K}}^t &= (\mathbb{M}^{-\frac{1}{2}} \mathbb{K} \mathbb{M}^{-\frac{1}{2}})^t \\ &= \mathbb{M}^{-\frac{t}{2}} \mathbb{K}^t \mathbb{M}^{-\frac{t}{2}} \\ &= \mathbb{M}^{-\frac{1}{2}} \mathbb{K} \mathbb{M}^{-\frac{1}{2}} \quad (\mathbb{K} \text{ et } \mathbb{M}^{-\frac{t}{2}} \text{ symétriques}) \\ &= \tilde{\mathbb{K}} \end{aligned}$$

Donc $\tilde{\mathbb{K}}$ est symétrique.

1.3 Propriétés de ω^2 et \underline{d} :

Sachant que $\mathbb{K} \underline{y} \cdot \underline{y} \geq 0 \quad \forall \underline{y} \in \mathbb{R}^n$, alors \mathbb{K} est bien définie positive. On pose $\forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n$, le produit scalaire :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{K}} \underline{x} \cdot \underline{x} &= \mathbb{M}^{-\frac{1}{2}} \mathbb{K} \mathbb{M}^{-\frac{1}{2}} \underline{x} \cdot \underline{x} \\ &= (\mathbb{M}^{-\frac{1}{2}} \mathbb{K} \mathbb{M}^{-\frac{1}{2}} \underline{x}, \underline{x}) \\ &= (\mathbb{K} \mathbb{M}^{-\frac{1}{2}} \underline{x}, \underbrace{\mathbb{M}^{-\frac{t}{2}}}_{\mathbb{M}^{-\frac{t}{2}} = \mathbb{M}^{-\frac{1}{2}} \text{ car } \mathbb{M}^{\frac{1}{2}} \text{ est symétrique}} \underline{x}) \\ &= (\mathbb{K} \mathbb{M}^{-\frac{1}{2}} \underline{x}, \mathbb{M}^{-\frac{1}{2}} \underline{x}) \end{aligned}$$

On pose $\underline{y} = \mathbb{M}^{-\frac{1}{2}}\underline{x}$, alors $\tilde{\mathbb{K}}\underline{x} \cdot \underline{x} = (\mathbb{K}\mathbb{M}^{-\frac{1}{2}}\underline{x}, \mathbb{M}^{-\frac{1}{2}}\underline{x}) = (\mathbb{K}\underline{y}, \underline{y}) = \mathbb{K}\underline{y} \cdot \underline{y} \geq 0$. Donc $\tilde{\mathbb{K}}$ est symétrique définie positive. $\lambda = \omega^2$ est la valeur propre de \mathbb{K} , on a alors

$$(\tilde{\mathbb{K}}\underline{x} \cdot \underline{x}) = (\omega^2 \underline{x} \cdot \underline{x}) = \omega^2 |\underline{x}|^2 \geq 0$$

Or $|\underline{x}|^2$ est positive donc $\omega^2 \geq 0$.

Etant donné que $\tilde{\mathbb{K}}$ est symétrique on a, d'après le théorème spectral, que ω^2 est réel et que $\underline{d} \in \mathbb{R}^n$

1.4 Bonus

On suppose que $(\omega_1^2, \underline{d}^1)$ et $(\omega_2^2, \underline{d}^2)$ sont deux solutions de $\omega^2 \mathbb{M} \underline{d} = \mathbb{K} \underline{d}$ avec $\omega_1^2 \neq \omega_2^2$. On cherche à montrer que $\mathbb{M} \underline{d}^1 \cdot \underline{d}^2 = 0$.

Par l'hypothèse, on a

$$\begin{cases} \omega_1^2 \mathbb{M} \underline{d}^1 = \mathbb{K} \underline{d}^1 \\ \omega_2^2 \mathbb{M} \underline{d}^2 = \mathbb{K} \underline{d}^2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{M} \underline{d}^1 \cdot \underline{d}^2 &= \left(\frac{1}{\omega_1^2} \mathbb{K} \underline{d}^1, \underline{d}^2 \right) \\ &= \left(\frac{1}{\omega_1^2} \underline{d}^1, \underbrace{\mathbb{K}^t}_{\mathbb{K}^t = \mathbb{K}} \underline{d}^2 \right) \\ &= \left(\frac{1}{\omega_1^2} \underline{d}^1, \mathbb{K} \underline{d}^2 \right) \\ &= \left(\frac{1}{\omega_1^2} \underline{d}^1, \omega_2^2 \mathbb{M} \underline{d}^2 \right) \\ &= \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2} (\underline{d}^1, \mathbb{M} \underline{d}^2) \\ &= \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2} \left(\underbrace{\mathbb{M}}_{\mathbb{M}^t = \mathbb{M}} \underline{d}^1, \underline{d}^2 \right) \\ &\Leftrightarrow \left(1 - \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2} \right) (\mathbb{M} \underline{d}^1, \underline{d}^2) = 0 \end{aligned}$$

Or $\omega_1^2 \neq \omega_2^2$, donc $1 - \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2} \neq 0$ et donc on a $\mathbb{M} \underline{d}^1 \cdot \underline{d}^2 = 0$.

Chapitre 2

Aspects théoriques

L'objectif est de modéliser de façon relativement simplifiée un pont afin de calculer ses différents modes propres et de visualiser ses déformations en fonction du mode choisi. Un pont est alors modélisé comme étant une structure composée d'arcs et de noeuds. Certains de ces noeuds sont des fixations, ils ne sont donc pas mobiles, et une masse est assignée à chaque jonction.

Nous utilisons pour calculer ces modes la méthode de la puissance inverse avec déflation, c'est-à-dire que nous cherchons les solutions de l'équation vue précédemment :

$$\omega^2 \mathbb{M} \underline{d} = \mathbb{K} \underline{d}$$

Cette méthode consiste simplement à déterminer la plus petite des valeurs propres en module puis, à partir de cette dernière, nous déterminons la deuxième plus petite valeur propre en module et nous itérons. Les valeurs propres ainsi obtenues sont ensuite affinées afin d'améliorer la précision de nos solutions et par conséquent la modélisation des déformations.

2.1 Pont simple

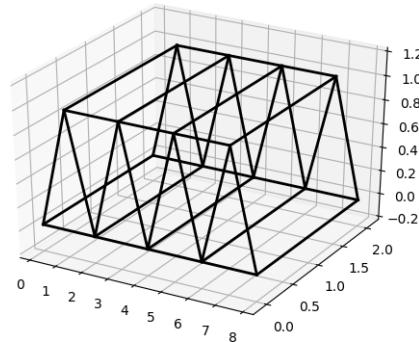


FIGURE 2.1 – Pont simple en situation normale

Voici la visualisation du pont simple en situation normale, c'est-à-dire sans déformation. Voyons ce qu'il se passe pour les deux premiers modes :

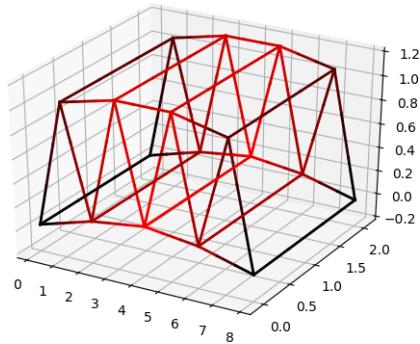


FIGURE 2.2 – Pont simple, mode 1

Pour le premier mode, nous pouvons voir que le tablier fait un mouvement de haut en bas avec une déformation plus accentuée au niveau du centre de ce dernier.

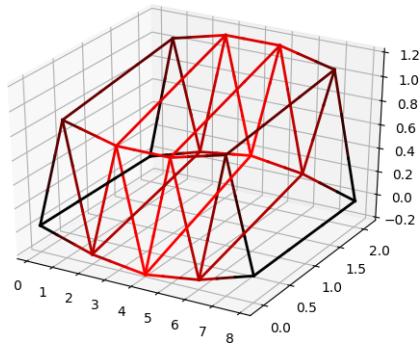


FIGURE 2.3 – Pont simple, mode 2

Quant au deuxième mode, nous observons un basculement du tablier de gauche à droite, ce qui engendre un léger étirement du pont.

2.2 Pont Colbert, Dieppe



FIGURE 2.4 – Pont Colbert, Dieppe

Bien que son style nous rappelle celui de la tour Eiffel, ce pont a été conçu par l'ingénieur Paul Alexandre qui a reçu la médaille d'argent à l'exposition universelle de 1900. Cette réalisation,

très moderne à l'époque où elle fut conçue, reste encore singulière de nos jours puisque ce pont tournant à rotation hydraulique est le seul de ce type encore en fonctionnement en Europe. Voici notre modélisation simplifiée de ce dernier :

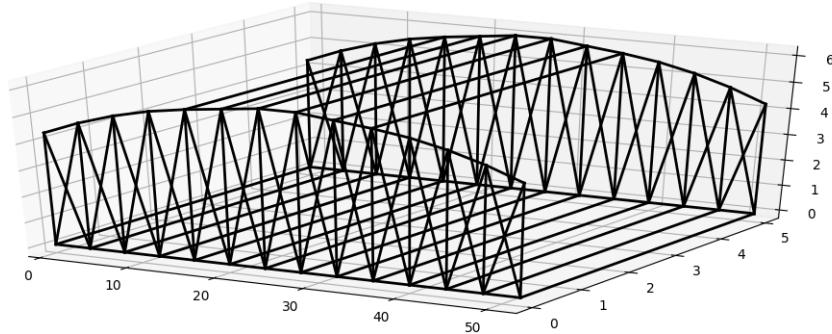


FIGURE 2.5 – Notre pont en situation normale

Nous nous sommes ici aussi limités à la visualisation des deux premiers modes, surtout que ces derniers sont considérablement plus long à calculer que pour le pont simple.

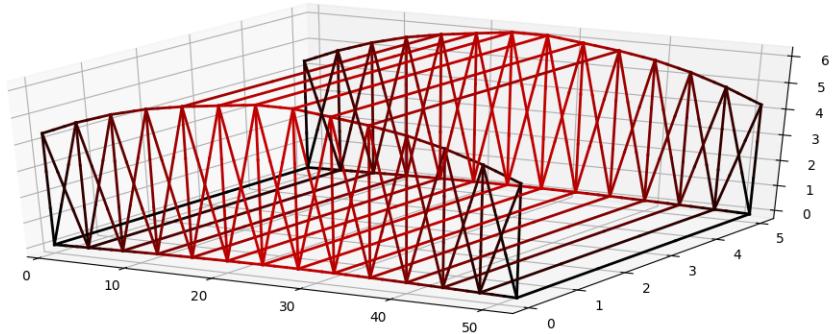


FIGURE 2.6 – Notre pont, mode 1

Il y a une déformation du tablier similaire à celle du pont simple. Notre pont semble cependant avoir une structure plus solide car la déformation est beaucoup moins forte.

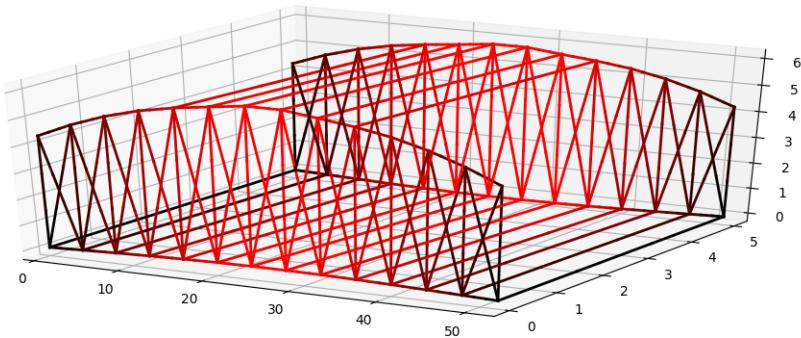


FIGURE 2.7 – Notre pont, mode 2

Les effets sur notre pont sont là aussi similaires à ceux sur le pont simple. En effet, on constate que le pont bascule de gauche à droite tout en s'étirant légèrement.

Chapitre 3

Conclusion

Lors de ce TP, nous avons calculé les modes propres du pont simple puis de notre modélisation simplifiée du pont Colbert afin d'observer leurs effets. Chaque mode a ses particularités, engendrant des oscillations verticales, transversales ou encore de torsion plus ou moins fortes. Cependant, le modèle que nous avons utilisé admet certaines limites : nous avons attribué la même masse à chaque jonction et la même raideur à chaque arc, ce qui nous semble assez loin de la réalité. De plus le temps d'exécution est plutôt long lorsque l'on veut calculer au moins une dizaine de modes propres de notre pont. Celà est probablement dû à la complexité de l'algorithme qui augmente considérablement lorsque l'on augmente le nombre de noeuds du pont.