TP1 :Systèmes linéaires et réseau hydraulique

Lucas Deregnaucourt
Tonglin Yan

25 Ocrobre 2019

Table des matières

Introduction

Ce TP nous permet d'étudier la modélisation mathématique d'un réseau hydraulique. Tout d'abord, nous transformons la loi de noeuds en un système matriciel. Par les méthodes que nous avons étudiées en cours, nous résolvons ce système en choisissant une certaine entrée et une certaine sortie. Finalement, nous généralisons ce problème en appliquant la méthode entre n'importe quelle entrée et sortie.

Chapitre 1

Aspects théoriques et modélisation

1.1 Modèle $A\underline{p} = \underline{0}$

Nous modélisons ce système à l'aide de la loi de noeuds :

$$\forall i \in [\![0, n-1]\!], \sum_{j \neq i} q_{ij} = 0$$

Nous pouvons réecrire la loi de noeuds sous la forme $A\underline{p} = \underline{0}$ avec

$$A = \begin{pmatrix} \sum_{j\neq 0} c_{0j} & -c_{01} & \cdots & -c_{0(n-1)} \\ -c_{10} & \sum_{j\neq 1} c_{1j} & \cdots & -c_{1(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -c_{(n-1)0} & -c_{(n-1)1} & \cdots & \sum_{j\neq(n-1)} c_{(n-1)j} \end{pmatrix}$$

Car $\forall i \in [\![0, n-1]\!]$, on a

$$(A\underline{p})_i = \sum_{j\neq i} c_{ij}x_i - c_{i1}x_1 - \cdots - c_{i(n-1)}x_{(n-1)}$$

$$(A\underline{p})_i = \sum_{j\neq i} c_{ij}x_i - \sum_{j\neq i} c_{ij}x_j$$

$$(A\underline{p})_i = \sum_{j\neq i} c_{ij}(x_i - x_j)$$

$$(A\underline{p})_i = 0 \Longleftrightarrow \sum_{j\neq i} q_{ij} = 0$$

Or $c_{ij} = c_{ji} \geq 0$, donc A est symétrique. Et puis

$$
\begin{aligned}
A\underline{x} \cdot \underline{x} &= \sum_{i=0}^{n-1} (Ax)_i x_i \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} (\sum_{j=0}^{n-1} A_{ij} x_j) x_i \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} (\sum_{j \neq i} A_{ij} x_j) x_i + \sum_{i=0}^{n-1} (A_{ii} x_i) x_i \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j \neq i} (-c_{ij}) x_j x_i + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j \neq i} c_{ij} x_i x_i \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j \neq i} c_{ij} (x_i^2 - x_i x_j) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j \neq i} c_{ij} (\frac{1}{2} x_i^2 + \frac{1}{2} x_i^2 - x_i x_j + \frac{1}{2} x_j^2 - \frac{1}{2} x_j^2) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j \neq i} c_{ij} (\frac{1}{2} x_i^2 - x_i x_j + \frac{1}{2} x_j^2 + \frac{1}{2} x_i^2 - \frac{1}{2} x_j^2) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j \neq i} c_{ij} (x_i - x_j)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j \neq i} c_{ij} (x_i^2 - x_j^2)
\end{aligned}
$$

On sait que

$$
S = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j \neq i} c_{ij} (x_i^2 - x_j^2) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \gamma(i,j) c_{ij} (x_i^2 - x_j^2) = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i \neq j} c_{ij} (x_i^2 - x_j^2)
$$

Alors

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j \neq i} c_{ij} (x_i^2 - x_j^2) + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i \neq j} c_{ij} (x_i^2 - x_j^2) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j \neq i} c_{ij} (x_i^2 - x_j^2) + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j \neq i} c_{ji} (x_j^2 - x_i^2) \text{ Or } c_{ij} = c_{ji} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j \neq i} c_{ij} (x_i^2 - x_j^2 + x_j^2 - x_i^2) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Ainsi

$$\begin{aligned} A\underline{x} \cdot \underline{x} &= \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j\neq i} c_{ij}(x_i - x_j)^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j\neq i} c_{ij}(x_i^2 - x_j^2) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j\neq i} c_{ij}(x_i - x_j)^2 + \frac{1}{2}S \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j\neq i} c_{ij}(x_i - x_j)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

1.2 Modèle $\widetilde{A}\underline{p} = \widetilde{b}$

1.2.1 Méthode d'élimination 1

Le système $A\underline{p} = \underline{0}$ est transformé à $\widetilde{A}\underline{p} = \widetilde{b}$ en appliquant la première méthode avec

$$\widetilde{A} = \begin{array}{cl} \left(\begin{array}{ccccccc} \sum_{j\neq 0} c_{0j} & -c_{01} & \cdots & -c_{0e} & -c_{0s} & \cdots & -c_{0(n-1)} \\ -c_{10} & \sum_{j\neq 1} c_{1j} & \cdots & -c_{1e} & -c_{1s} & \cdots & -c_{1(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -c_{(n-1)0} & -c_{(n-1)1} & \cdots & -c_{(n-1)1} & -c_{(n-1)1} & \cdots & \sum_{j\neq (n-1)} c_{(n-1)j} \end{array}\right) & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow \text{ligne } e \\ \leftarrow \text{ligne } s \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

$$\widetilde{b} = \begin{array}{cl} \left(\begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ E \\ S \\ \vdots \\ 0 \end{array}\right) & \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \text{ligne } e \\ \leftarrow \text{ligne } s \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

Propriété de matrice $\widetilde{A}$

— Symétrie : il est évident que $\widetilde{A}$ n'est pas symétrique.

— Inversible :

$$det(\widetilde{A}) = \begin{vmatrix} \sum_{j\neq 0} c_{0j} & -c_{01} & \cdots & -c_{0e} & -c_{0s} & \cdots & -c_{0(n-1)} \\ -c_{10} & \sum_{j\neq 1} c_{1j} & \cdots & -c_{1e} & -c_{1s} & \cdots & -c_{1(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -c_{(n-1)0} & -c_{(n-1)1} & \cdots & -c_{(n-1)1} & -c_{(n-1)1} & \cdots & \sum_{j\neq(n-1)} c_{(n-1)j} \end{vmatrix}$$
$$= \prod_{i\neq e, i\neq s}^{n-1} \sum_{j\neq i} c_{ij}$$

Si pour $\forall i \in \{0, \cdots, n-1\} \setminus \{e, s\}$, $\sum_{j\neq i} c_{ij} \neq 0$, alors $det(\widetilde{A}) \neq 0$, $\widetilde{A}$ est inversible. Si $\exists i \in \{0, \cdots, n-1\} \setminus \{e, s\}$, $\sum_{j\neq i} c_{ij} = 0$, alors $det(\widetilde{A}) = 0$, $\widetilde{A}$ est non inversible. Dans ce cas là, on ne peut pas résoudre ce système.

— Définie positive :

$$\begin{aligned} \widetilde{A}\underline{x} \cdot \underline{x} &= \sum_{i=0}^{n-1} (\widetilde{A}x)_i x_i \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} (\sum_{j=0}^{n-1} \widetilde{A}_{ij} x_j) x_i \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} (\sum_{j\neq i} \widetilde{A}_{ij} x_j) x_i + \sum_{i=0}^{n-1} (\widetilde{A}_{ii} x_i) x_i \\ &= \sum_{i=0, i\neq e, i\neq s}^{n-1} \sum_{j\neq i} (-c_{ij} x_j) x_i + \underbrace{\sum_{j\neq e} (-\underbrace{c_{ej}}_{=0} x_j) x_e}_{=0} + \underbrace{\sum_{j\neq s} (-\underbrace{c_{sj}}_{=0} x_j) x_s}_{=0} + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j\neq i} c_{ij} x_i x_i \\ &= \sum_{i=0, i\neq e, i\neq s}^{n-1} \sum_{j\neq i} (-c_{ij} x_j) x_i + \sum_{i=0, i\neq e, i\neq s}^{n-1} \sum_{j\neq i} c_{ij} x_i x_i + x_e^2 + x_s^2 \\ &= \sum_{i=0, i\neq e, i\neq s}^{n-1} \sum_{j\neq i} c_{ij} (x_i^2 - x_i x_j) + x_e^2 + x_s^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=0, i\neq e, i\neq s}^{n-1} \sum_{j\neq i} c_{ij} (x_i - x_j)^2 + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{i=0, i\neq e, i\neq s}^{n-1} \sum_{j\neq i} c_{ij} (x_i^2 - x_j^2)}_{=0} + x_e^2 + x_s^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=0, i\neq e, i\neq s}^{n-1} \sum_{j\neq i} c_{ij} (x_i - x_j)^2 + x_e^2 + x_s^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Donc, la matrice $\widetilde{A}$ est positive.
Puisque nous avons montré que la matrice $\widetilde{A}$ est non symétrique, inversible et positive, nous pouvons utiliser la méthode de Cramer, la méthode de Gauss et la factorisation QU, c'est-à-dire la décomposition LU et la décomposition avec pivotage.

1.2.2 Méthode d'élimination 2

Le système $A\underline{p} = \underline{0}$ est transformé à $\widetilde{A}\underline{p} = \widetilde{b}$ en appliquant la deuxième méthode avec

$$\widetilde{A} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \sum_{j\neq 0} c_{0j} & -c_{01} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & -c_{0(n-1)} \\ -c_{10} & \sum_{j\neq 1} c_{1j} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & -c_{1(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -c_{(n-1)0} & -c_{(n-1)1} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \sum_{j\neq(n-1)} c_{(n-1)j} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow \text{ligne } e \\ \leftarrow \text{ligne } s \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\widetilde{b} = \begin{pmatrix} -\widetilde{A}_{0e}E - \widetilde{A}_{0s}E \\ \vdots \\ E \\ S \\ \vdots \\ -\widetilde{A}_{(n-1)e}E - \widetilde{A}_{(n-1)s}E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{0e}E + c_{0s}E \\ \vdots \\ E \\ S \\ \vdots \\ c_{(n-1)e}E + c_{(n-1)s}E \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \text{ligne } e \\ \leftarrow \text{ligne } s \\ \\ \\ \end{array}$$

Propriété de matrice $\widetilde{A}$

— Symétrie : il est évident que $\widetilde{A}$ est symétrique.
— Inversible :

$$det(\widetilde{A}) = \begin{vmatrix} \sum_{j\neq 0} c_{0j} & -c_{01} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & -c_{0(n-1)} \\ -c_{10} & \sum_{j\neq 1} c_{1j} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & -c_{1(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -c_{(n-1)0} & -c_{(n-1)1} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \sum_{j\neq(n-1)} c_{(n-1)j} \end{vmatrix}$$
$$= \prod_{i\neq e, i\neq s}^{n-1} \sum_{j\neq i} c_{ij}$$

Si pour $\forall i \in \{0, \cdots, n-1\} \setminus \{e, s\}$, $\sum_{j \neq i} c_{ij} \neq 0$, alors $det(\widetilde{A}) \neq 0$, $\widetilde{A}$ est inversible. Si $\exists i \in \{0, \cdots, n-1\} \setminus \{e, s\}$, $\sum_{j \neq i} c_{ij} = 0$, alors $det(\widetilde{A}) = 0$, $\widetilde{A}$ est non inversible. Dans ce cas là, on ne peut pas résoudre ce système.

— Définie positive :

$$\begin{aligned}
\widetilde{A}\underline{x} \cdot \underline{x} &= \sum_{i=0}^{n-1} (\widetilde{A}x)_i x_i \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} (\sum_{j=0}^{n-1} \widetilde{A}_{ij} x_j) x_i \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} (\sum_{j \neq i} \widetilde{A}_{ij} x_j) x_i + \sum_{i=0}^{n-1} (\widetilde{A}_{ii} x_i) x_i \\
&= \sum_{i=0, i\neq e, i \neq s}^{n-1} \sum_{j \neq i} (-c_{ij} x_j) x_i + \underbrace{\sum_{j \neq e} (-\underbrace{c_{ej}}_{=0} x_j) x_e}_{=0} + \underbrace{\sum_{j \neq s} (-\underbrace{c_{sj}}_{=0} x_j) x_s}_{=0} + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j \neq i} c_{ij} x_i x_i \\
&= \sum_{i=0, i\neq e, i \neq s}^{n-1} \sum_{j \neq i} (-c_{ij} x_j) x_i + \sum_{i=0, i\neq e, i \neq s}^{n-1} \sum_{j \neq i} c_{ij} x_i x_i + x_e^2 + x_s^2 \\
&= \sum_{i=0, i\neq e, i \neq s}^{n-1} \sum_{j \neq i, j \neq e,, j \neq s} c_{ij} (x_i^2 - x_i x_j) + x_e^2 + x_s^2 \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=0, i\neq e, i \neq s}^{n-1} \sum_{j \neq i, j \neq e,, j \neq s} c_{ij} (x_i - x_j)^2 + x_e^2 + x_s^2 \geq 0
\end{aligned}$$

Donc, la matrice $\widetilde{A}$ est positive.

Puisque nous avons prouvé que la matrice $\widetilde{A}$ est symétrique, inversible, nous pouvons utiliser la méthode de Cramer, la décomposition LU, la décomposition avec pivotage et la factorisation QU. Bien que la matrice soit symétrique, nous ne montrer qu'elle est positive, donc, nous ne pouvons pas utiliser la méthode de Cholesky.

Chapitre 2

Implémentation et résolution

2.1 Constuction de la matrice A

Pour construire A, nous utilisons la fonction generateMatriceReseau qui elle-même utilise le fichier reseauSimpleA.data ou ReseauGrandA.data. Avec les données fournie dans reseuSimpleA.data, nous obtenons la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Nous remarquons ici que A est bien symétrique. Nous avons ensuite décidé d'implémenter l'algorithme d'élimination 1 qui nous donne une matrice $\widetilde{A}$ non symétrique.

2.2 Comparaison de deux méthodes sur un réseau simple puis sur un grand réseau

Etant donné que la matrice $\widetilde{A}$ est non symétrique, nous avons choisi d'utiliser la décomposition avec pivotage. Cette méthode sera ici comparée à la méthode de Cramer qui consiste à calculer la solution comme suit :

$$p_i = \frac{det(\underline{\widetilde{a}}_1|...|\underline{\widetilde{a}}_{i-1}|\underline{\widetilde{b}}|\underline{\widetilde{a}}_{i+1}|...|\underline{\widetilde{a}}_n)}{det(\widetilde{A})}$$

La méthode de décomposition avec pivotage consiste à triangulariser le système en utilisant l'élimination de Gauss. Pour ce faire, on crée dans un premier temps une matrice $E^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -L_{21}^{(2)} & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -L_{31}^{(2)} & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ -L_{n1}^{(2)} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $L_{i1}^{(2)} = \frac{A_{i1}}{A_{11}}$, $i \geq 2$. On obtient ainsi $\widetilde{A}^{(2)} = E^{(2)}\widetilde{A}$ et $\widetilde{\underline{b}}^{(2)} = E^{(2)}\widetilde{\underline{b}}$. Le système $\widehat{A}\underline{p} = \widetilde{\underline{b}}$ est équivalent au système obtenu $\widetilde{A}^{(2)}\underline{p} = \widetilde{\underline{b}}^{(2)}$. La création de ce nouveau système nous a permis d'éliminer l'inconnue p_1 des équations 2 à n. Il ne nous reste alors plus qu'à répéter l'opération pour éliminer l'inconnue $\underline{p_2}$ des équations 3 à n en prenant cette fois-ci non pas $\widetilde{A}_{11}$ comme pivot mais $\widehat{A}_{22}$ et ainsi de suite afin d'obtenir un système triangulaire facile à résoudre. Nous nous retrouvons à la fin avec un système de la forme $U\underline{p} = \widetilde{\underline{b}}^{(3)}$ où $U = \widetilde{A}^{(n)}$ est une matrice triangulaire supérieure. Cette équation est simple à résoudre en utilisant l'algorithme de remontée.

L'exécution du code avec l'une puis l'autre méthode nous permet d'affirmer que ces deux méthodes nous donnent strictement le même résultat. Cependant, la méthode de Cramer met une à deux secondes avant que le résultat ne s'affiche, alors que c'est instantané en utilisant la factorisation avec pivotage.

Pour continuer notre démarche de comparaison, nous générons cette fois-ci un grand réseau aléatoire en exécutant le code genReseau.py. Notre méthode met à peine une seconde à s'exécuter, ce qui est satisfaisant au vu de la complexité du réseau, et le résultat obtenu semble cohérent. Quant à la méthode de Cramer, après vingt longues minutes à espérer un quelconque résultat, nous nous sommes résolus à laisser tomber l'affaire. La différence est beaucoup plus radicale lorsque le réseau devient plus complexe. Celà est du au fait que plus le nombre de tuyaux est grand, plus la matrice $\widetilde{A}$ est grande et plus le déterminant est long à calculer.