

TP1
Méthodes numériques pour les EDO

Lucas Dregnaucourt
Tonglin YAN

Mars 2020

Table des matières

1	Modèle de Verhulst	3
1.1	Partie théorique	3
1.1.1	Problème de Cauchy	3
1.1.2	Méthodes	4
1.1.2.1	Montrons que ce schéma correspond à la méthode de RK	4
1.1.2.2	Déterminons les valeurs en assurant l'ordre max	5
1.1.2.3	Stabilité et ordre de la méthode à 2 pas	6
1.2	Partie pratique	8
1.2.1	Initialisation pour la méthode de MultiPas	8
1.2.2	Comparaison de la simulation des trois méthodes	8
1.2.3	Comparaison de la convergence des trois méthodes	9
2	Modèle compartimenté pour étudier l'impact de la vaccination	11
2.1	Partie théorique	11
2.1.1	Equations du modèle finale	11
2.1.2	Unicité de la solution	11
2.2	Partie pratique	12
2.2.1	Commentaire sur les résultats obtenus	12
2.2.2	Politique de vaccination dépendante du temps	13

Introduction

Dans ce TP, nous nous intéressons aux modèles mathématiques associés aux équations différentielles ordinaires (EDO) d'un sujet on ne peut plus d'actualité : l'épidémiologie . Nous appliquons trois méthodes (méthode d'Euler, méthode de Runge-Kutta et méthode à 2 pas) pour résoudre les EDO et nous terminons ce tp par un modèle compartimenté en épidémiologie pour l'évolution de population.

Chapitre 1

Modèle de Verhulst

1.1 Partie théorique

1.1.1 Problème de Cauchy

Rappel : Théorème de Cauchy-lipschitz
Nous allons considérer le système suivant

$$\begin{cases} y'(t) = \lambda y(t)(1 - y(t)) & \text{pour } t \geq 0 \\ y(0) = y_0 \in]0, 1[\end{cases}$$

Posons $f(t, y(t)) = \lambda y(t)(1 - y(t))$. Il est évident que cette fonction est bien définie et continue par rapport à ses deux variables t et $y(t)$. Montrons que $f(t, y(t))$ est lipschitzienne par rapport à sa 2^{ième} variable, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \exists M > 0 \text{ tel que } \forall (t, y_1) \in \mathbb{R}^2, \forall (t, y_2) \in \mathbb{R}^2, \\ |f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))| \leq M|y_1 - y_2| \end{aligned}$$

Soient $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} |f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))| &= |\lambda y_1(t)(1 - y_1(t)) - \lambda y_2(t)(1 - y_2(t))| \\ &= |\lambda(y_1 - y_1^2 - y_2 + y_2^2)| \\ &= |\lambda((y_1 - y_2) - (y_1^2 - y_2^2))| \\ &= |\lambda(y_1 - y_2)(1 - y_1 - y_2)| \\ &= |\lambda|(1 - y_1 - y_2)|(y_1 - y_2)| \end{aligned}$$

Si $y(t) \in]0, 1[$, alors $|1 - y_1 - y_2| \in]0, 1[$, d'où $|\lambda|(1 - y_1 - y_2) \in]0, \lambda[$. Donc

$$|f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))| \leq M|y_1 - y_2| \text{ avec } M = |\lambda|$$

La condition de lipschitz globale est vérifiée donc il existe une unique solution.

1.1. PARTIE THÉORIQUE

A l'aide de la technique de séparation de variables, nous avons

$$\begin{aligned}
 \frac{dy}{dt} &= \lambda y(t)(1 - y(t)) \\
 \Leftrightarrow \frac{dy}{y(t)(1 - y(t))} &= \lambda dt \\
 \Leftrightarrow \int \frac{1}{y(1 - y)} dy &= \int \lambda dt \\
 \Leftrightarrow \int \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{1 - y} \right) dy &= \lambda t + c \\
 \Leftrightarrow \ln(|y|) - \ln(|1 - y|) &= \lambda t + c \\
 \Leftrightarrow e^{\ln(|y|) - \ln(|1 - y|)} &= e^{\lambda t + c} \\
 \Leftrightarrow \frac{y}{1 - y} &= e^{\lambda t} e^c \\
 \Leftrightarrow y &= \frac{e^{\lambda t} e^c}{e^{\lambda t} e^c + 1}
 \end{aligned}$$

De plus, nous savons que $y(0) = y_0$, nous deduisons ainsi que $e^c = \frac{y_0}{1 - y_0}$, d'où

$$\begin{aligned}
 y &= \frac{e^{\lambda t} \frac{y_0}{1 - y_0}}{e^{\lambda t} \frac{y_0}{1 - y_0} + 1} \\
 &= \frac{e^{\lambda t} y_0}{e^{\lambda t} y_0 + 1 - y_0} \\
 &= \frac{y_0}{y_0 + (1 - y_0)e^{-\lambda t}}
 \end{aligned}$$

1.1.2 Méthodes

1.1.2.1 Montrons que ce schéma correspond à la méthode de RK

Nous souhaitons tout d'abord étudier le schéma

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t (c_1 k_{n,1} + c_2 k_{n,2})$$

$$\text{où } \begin{cases} k_{n,1} = f(t_n, y_n) \\ k_{n,2} = f(t_n + \frac{\Delta t}{2}, y_n + \Delta t a k_{n,1}) \end{cases}$$

Dans ce système, on a $y_{n+1} = y_n + \Delta t (c_1 k_{n,1} + c_2 k_{n,2})$ qui correspond à une méthode de Runge-Kutta $\forall i \in \{1, 2\}$

$$y_{n+1} = y_n + h_n (c_1 f(t_{n,1}, y_{n,1}) + c_2 f(t_{n,2}, y_{n,2}))$$

$$\begin{aligned}
 \text{avec } y_{n,i} &= y_n + h_n \sum_{j=1}^r a_{i,j} f(t_{n,j}, y_{n,j}) \\
 x_{n,i} &= x_n + h_n \theta_i
 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} f(t_{n,1}, y_{n,1}) &= f(t_n, y_n) \\ f(t_{n,2}, y_{n,2}) &= f(t_n + \frac{\Delta t}{2}, y_n + \Delta t a_{n,1}) \end{cases} \\
 \begin{cases} t_{n,1} &= t_n + \Delta t \theta_1 = t_n \\ t_{n,2} &= t_n + \Delta t \theta_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \theta_1 &= 0 \\ \theta_2 &= \frac{1}{2} \end{cases} \\
 \begin{cases} y_{n,1} &= y_n \\ y_{n,2} &= y_n + \Delta t a_{n,1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_{n,1} &= y_n \\ y_{n,2} &= y_n + \Delta t a f(\underbrace{t_n}_{t_{n,1}}, \underbrace{y_n}_{y_{n,1}}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{1,1} = 0 &\text{et } a_{1,2} = 0 \\ a_{2,1} = a &\text{et } a_{2,2} = 0 \end{cases}$$

D'où le tableau de Butcher associé à ce système :

$$\begin{array}{c|cc} \theta_1 = 0 & 0 & 0 \\ \theta_2 = \frac{1}{2} & a & 0 \\ \hline & c_1 & c_2 \end{array}$$

TABLE 1.1 – Tableau de Butcher

1.1.2.2 Déterminons les valeurs en assurant l'ordre max

Pour une méthode à un pas, On a une convergence à l'ordre k au moins si et seulement si

$$\forall j \in \{0, \dots, k-1\}, \frac{\partial^j \Phi(t, y, \Delta t)}{\partial \Delta t^j} \Big|_{\Delta t=0} = \frac{1}{j+1} \frac{d^j f}{dt^j}(t, y(t))$$

Pour $j = 0$, nous retournons la condition sur la consistance : $c_1 + c_2 = 1$.

Pour $j = 1$, nous commençons par le calcul de $\frac{d}{dt}f(t, y(t))$.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}f(t, y(t)) &= \frac{\partial}{\partial t}f(t, y(t)) \frac{dt}{dt} + \frac{\partial}{\partial y}f(t, y(t)) \underbrace{\frac{dy}{dt}}_{y'(t)} \\ &= \frac{\partial}{\partial t}f(t, y(t)) + \frac{\partial}{\partial y}f(t, y(t))y'(t) \\ &= \frac{\partial}{\partial t}f(t, y(t)) + \frac{\partial}{\partial y}f(t, y(t))f(t, y(t)) \end{aligned}$$

Pour $\Phi(t, y, \Delta t) = c_1 f(t_n, y_n) + c_2 f(t_{n,2}, y_{n,2})$, avec $\begin{cases} t_{n,2} &= t_n + \frac{1}{2}\Delta t \\ y_{n,2} &= y_n + \Delta t a f(t_{n,1}, y_{n,1}) \end{cases}$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \Delta t}\Phi(t, y, \Delta t) &= c_2 \left(\frac{\partial}{\partial t}f(t_{n,2}, y_{n,2}) \underbrace{\frac{\partial t_{n,2}}{\partial \Delta t}}_{=\frac{1}{2}} + \frac{\partial}{\partial y}f(t_{n,2}, y_{n,2}) \underbrace{\frac{\partial y_{n,2}}{\partial \Delta t}}_{=af(t_{n,1}, y_{n,1})=af(t_n, y_n)} \right) \\ &= c_2 \left(\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t}f(t_{n,2}, y_{n,2}) + af(t_n, y_n) \frac{\partial}{\partial y}f(t_{n,2}, y_{n,2}) \right) \\ \frac{\partial}{\partial \Delta t}\Phi(t, y, \Delta t) \Big|_{\Delta t=0} &= c_2 \left(\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y}f(t, y) + af(t, y) \frac{\partial}{\partial y}f(t, y) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \begin{cases} c_2(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}f(t,y) + af(t,y)\frac{\partial}{\partial y}f(t,y)) = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial t}f(t,y) + \frac{\partial}{\partial y}f(t,y)f(t,y)) \\ c_1 + c_2 = 1 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} c_2 = 1 \\ c_2 a = \frac{1}{2} \\ c_1 + c_2 = 1 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 1 \\ a = \frac{1}{2} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Ces conditions garantissent d'avoir une méthode d'ordre 2 au moins. On peut aussi montrer que la méthode n'est pas d'ordre 3. Elle est donc strictement d'ordre 2.

1.1.2.3 Stabilité et ordre de la méthode à 2 pas

Nous étudions la méthode à 2-pas suivante :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{\Delta t}{2}(3f_n - f_{n-1}) \text{ où } f_k = f(t_k, y_k)$$

Nous déterminons tout d'abord $\begin{cases} \alpha(t) = t^{n+1} - t^n \\ \beta(t) = \frac{3}{2}t^n - \frac{1}{2}t^{n-1} \end{cases}$.

Stabilité : La méthode est stable théoriquement si et seulement si toutes les racines de $\alpha(t)$ sont de module inférieur ou égal à 1.

$$t^{n+1} - t^n = 0 \Leftrightarrow t^n(t - 1) = 0$$

Les racines de $\alpha(t)$ sont 1 et 0. Donc, la méthode est théoriquement stable.

Ordre : Posons

$$\epsilon_n = \frac{1}{h} \sum_{k=0}^r \alpha_k y(t_{n+k}) - \sum_{k=0}^r \beta_k \underbrace{f(t_{n+k}, y(t_{n+k}))}_{y'(t_{n+k})}$$

Si $I = O(h^p)$, alors la méthode est d'ordre p.

Avec le développement limité, nous avons

$$y(t_{n+k}) = y(t_n + kh) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(hk)^i y^{(i)}(t_n)}{i!} (1)$$

$$y'(t_{n+k}) = y'(t_n + kh) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(hk)^i y^{(i+1)}(t_n)}{i!} (2)$$

1.1. PARTIE THÉORIQUE

Nous remplaçons $y(t_{n+k})$ par (1) et $y'(t_{n+k})$ par (2),

$$\begin{aligned}
 \epsilon_n &= \frac{1}{h} \sum_{k=0}^r \alpha_k \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(hk)^i y^{(i)}(t_n)}{i!} - \sum_{k=0}^r \beta_k \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(hk)^i y^{(i+1)}(t_n)}{i!} \\
 &= \frac{1}{h} \sum_{k=0}^r \alpha_k (y(t_n) + hk y'(t_n) + \frac{(hk)^2}{2} y''(t_n) + \dots) - \beta_k (y'(t_n) + hk y''(t_n) + \frac{(hk)^2}{2} y^{(3)}(t_n) + \dots) \\
 &= \frac{1}{h} \underbrace{\sum_{k=0}^r \alpha_k y(t_n)}_{\alpha(1)} + h^{(0)} \left(\underbrace{\sum_{k=0}^r \alpha_k k}_{\alpha'(1)} - \underbrace{\sum_{k=0}^r \beta_k}_{\beta(1)} \right) y'(t_n) + h^{(1)} \left(\sum_{k=0}^r \frac{\alpha_k k^2}{2} - \sum_{k=0}^r \beta_k k \right) y''(t_n) \\
 &\quad + \sum_{i \geq 2} h^{(i)} \left(\sum_{k=0}^r \alpha_k \frac{k^{(i+1)}}{(i+1)!} - \sum_{k=0}^r \beta_k \frac{k^{(i)}}{(i)!} \right) y^{(i+1)}(t_n) \\
 \epsilon_n &= \frac{1}{h} T_{-1} y(t_n) + T_0 y'(t_n) + \sum_{i \geq 1} h^i T_i y^{(i+1)}(t_n)
 \end{aligned}$$

où

$$T_i = \sum_{k=0}^r \alpha_k \frac{k^{(i+1)}}{(i+1)!} - \sum_{k=0}^r \beta_k \frac{k^{(i)}}{(i)!}$$

Ordre 1 au moins :

$$\begin{aligned}
 T_{-1} = T_0 = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha(1) = 0 \\ \alpha'(1) - \beta(1) = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha(1) = 1^{n+1} - 1^n = 0 \\ \alpha'(1) = (n+1)1^n - n1^{(n-1)} = 1 \\ \beta(1) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Ordre 2 au moins :

$$\begin{aligned}
 T_1 = 0 &\Leftrightarrow \sum_{k=0}^2 \alpha_k \frac{k^2}{2!} - \sum_{k=0}^2 \beta_k k = 0 \\
 &\Leftrightarrow -\frac{1}{2} + 2 - \frac{3}{2} = 0
 \end{aligned}$$

$$\text{avec } \alpha_0 = 0, \alpha_1 = -1, \alpha_2 = 1, \beta_0 = -\frac{1}{2}, \beta_1 = \frac{3}{2}, \beta_2 = 0$$

Ordre 3 au moins :

$$\begin{aligned}
 T_2 = 0 &\Leftrightarrow \sum_{k=0}^3 \alpha_k \frac{k^3}{3!} - \sum_{k=0}^3 \beta_k \frac{k^2}{2!} = 0 \\
 &\Leftrightarrow -\frac{1}{6} + \frac{8}{6} - \frac{3}{4} = \frac{5}{12} \neq 0
 \end{aligned}$$

1.2. PARTIE PRATIQUE

Donc, la méthode est strictement d'ordre 2.

En ce qui concerne f , il faut le calculer 2 fois à chaque itération $n \geq 2$ avec cette méthode puisqu'il faut calculer f_n et f_{n-1} .

1.2 Partie pratique

Nous nous intéresserons ici aux méthodes d'Euler, Runge-Kutta et multi-pas afin de simuler et d'étudier le modèle de Verlhust $f(t, y) = \lambda y(1 - y)$.

1.2.1 Initialisation pour la méthode de MultiPas

La méthode à 2-pas étudiée est conceptuellement assez similaire de celle à 1 pas sauf qu'au lieu de n'avoir besoin que de l'itération précédente pour obtenir la suivante, nous avons ici besoin des deux précédentes. C'est pourquoi nous initialisons la méthode de MultiPas en utilisant la méthode de RK que nous stockons dans p_1 . Nous initialisons aussi $p_0 = y_0$, $p_2 = 0$ et $f_0 = f(0, p_0)$. Les itérations de la méthode seront stockées ensuite dans p_2 , la solution prendra la valeur de p_1 , f_0 prendra la valeur $f(t, p_1)$, puis p_0 prendra la valeur de p_1 qui lui-même prendra celle de p_2 et on recommence la boucle.

1.2.2 Comparaison de la simulation des trois méthodes

Pour chaque comparaison, nous aurons de gauche à droite : Euler, RK et MultiPas.

Voici les graphiques que nous obtenons pour $\lambda = 1$:

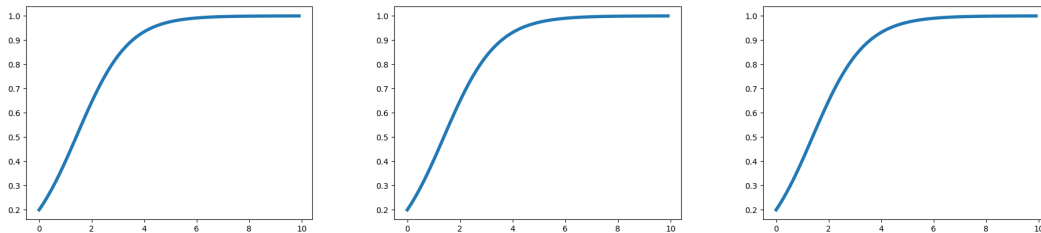
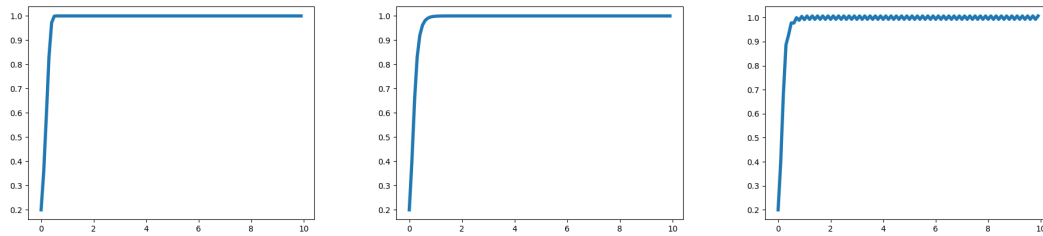
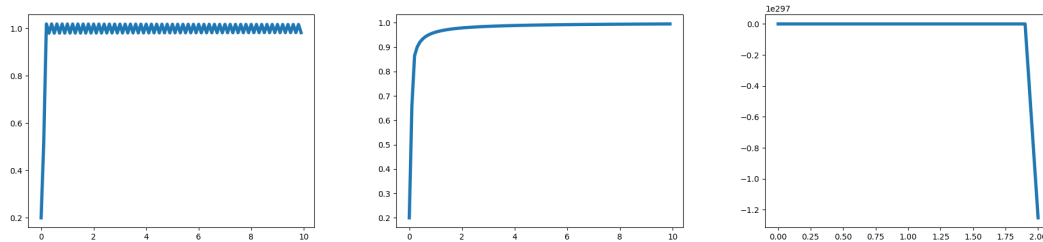


FIGURE 1.1 – Méthodes pour lambda=1

Nous pouvons voir que les simulations sont identiques. De plus, le temps d'exécution est négligeable pour les trois méthodes. Cependant, des différences vont être visibles pour $\lambda = 10$, mais surtout pour $\lambda = 20$:

FIGURE 1.2 – Méthodes pour $\lambda=10$

Il est clair que toutes les méthodes convergent plus rapidement ici que pour $\lambda = 1$. Bien que les méthodes d'Euler et RK nous donnent des courbes similaires, celle de la méthode MultiPas oscille une fois la limite atteinte pour une raison qui nous est inconnue.

FIGURE 1.3 – Méthodes pour $\lambda=20$

C'est pour des λ assez grands que nous appercevons les limites de ce modèle. En effet, la courbe de la méthode d'Euler oscille une fois la limite atteinte comme celle de la méthode MultiPas précédemment qui d'ailleurs est ici la plus aberrante. En effet, elle semble partir de la limite puis redescend brutalement, ce qui est totalement absurde. Seule la courbe de la méthode RK est cohérente.

Reprenons $\lambda = 1$ et comparons les convergences de ces méthodes.

1.2.3 Comparaison de la convergence des trois méthodes

Voici les courbes obtenues :

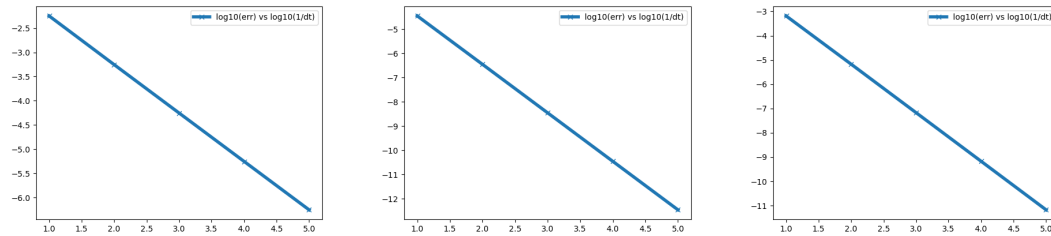


FIGURE 1.4 – Convergences des méthodes

Il est clair, au vu des courbes mais aussi du temps d'exécution, que les méthodes RK et MultiPas convergent plus rapidement que la méthode d'Euler. De plus, la méthode d'Euler est moins précise puisqu'on obtient une erreur pour $dt = 10^{-4}$ d'ordre 10^{-7} tandis qu'elle est d'ordre 10^{-13} pour RK et 10^{-12} pour MultiPas. Cette différence est aussi constatable pour tous les dt testés.

Au final, la méthode la plus fiable semble être la méthode RK.

Chapitre 2

Modèle compartimenté pour étudier l'impact de la vaccination

2.1 Partie théorique

2.1.1 Equations du modèle finale

Le modèle compartimenté nous permet d'obtenir ce système :

$$\begin{cases} N'_s = N_s(-cnb - p(N_i + B_i + A_i + S_i) - vn_s) + cA_s + cA_i + cA_r \\ B'_s = N_scnb + B_s(-cba - p(N_i + B_i + A_i + S_i) - vb_s) \\ A'_s = B_scba + A_s(-cas - p(N_i + B_i + A_i + S_i) - va_s) \\ S'_s = A_scas + S_s(-m - p(N_i + B_i + A_i + S_i) - vs_s) \\ N'_i = N_i(-cnb - (mn_i + rn_i + N_sp)) + N_sp(B_i + A_i + S_i) \\ B'_i = N_icnb + B_i(-cba - (mb_i + rb_i) + B_sp) + B_sp(N_i + A_i + S_i) \\ A'_i = B_icsba + A_i(-cas - (ma_i + ra_i) + A_sp) + A_sp(N_i + B_i + S_i) \\ S'_i = A_icas + S_i(-m - (ms_i + rs_i) + S_sp) + S_sp(N_i + B_i + A_i) \\ N'_r = -N_rcnb + rn_iN_i + vn_sN_s \\ B'_r = N_rcnb - B_rcba + rb_iB_i + vb_sB_s \\ A'_r = B_rcba - A_rcas + ra_iA_i + va_sA_s \\ S'_r = A_rcas - S_rm + rs_iS_i + vs_sS_s \\ N'_x = N_x + mn_iN_i \\ B'_x = B_x + mb_iB_i \\ A'_x = A_x + ma_iA_i \\ S'_x = S_x + ms_iS_i \end{cases}$$

2.1.2 Unicité de la solution

\underline{F} est clairement linéaire de \mathbb{R}^{16} dans \mathbb{R}^{16} . Elle est donc infiniment continuellement dérivable, donc de classe C^∞ . On déduit ainsi que sa dérivée est finie et donc que \underline{F} est localement lipschitzienne partout. On peut finalement

2.2. PARTIE PRATIQUE

conclure que, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, la solution est unique.

2.2 Partie pratique

2.2.1 Commentaire sur les résultats obtenus

Voici les graphiques que nous obtenons lorsqu'aucune politique de vaccination n'est mise en place :

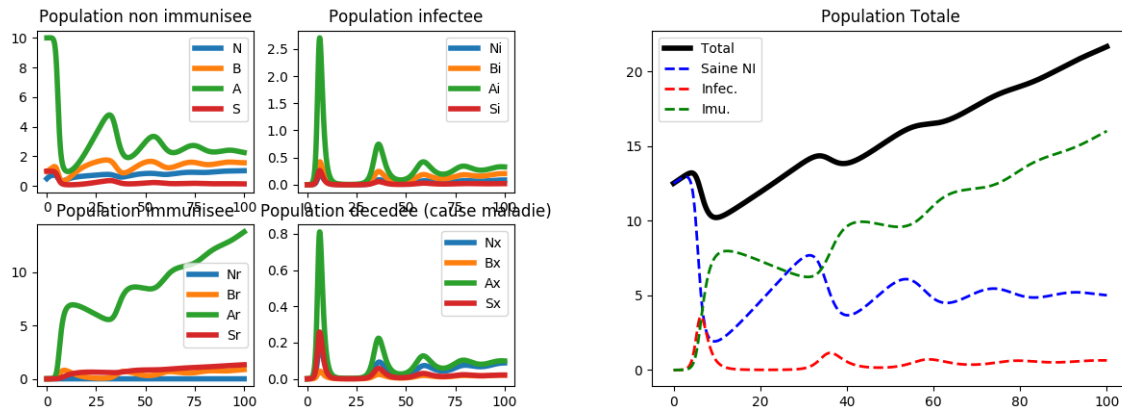


FIGURE 2.1 – évolution sans vaccin

Nous pouvons remarquer ici qu'il y a de plus en plus d'individus immunisés, notamment chez les adultes. Cependant, la population devra faire face à plusieurs piques d'épidémie, dont le premier qui est très conséquent, et donc de décès avant d'arriver à une situation stable. On peut voir sur le graphique de droite que le début de la crise serait catastrophique puisqu'entre un quart et un tiers de la population décèderait lors du premier pique, ce qui n'est pas envisageable. De plus, seulement environ 65% de la population est immunisée à la fin de la simulation. C'est pourquoi la mise en place d'une politique de vaccination est primordiale.

Voyons maintenant ce que donne la politique de vaccination suivante :

$$\begin{cases} vns = 1.0 \\ vbs = 0.8 \\ vas = 0.2 \\ vss = 0.0 \end{cases}, \text{ c'est-à-dire que l'on vaccine}$$

20% des adultes, 80% des enfants, 100% des bébés et aucune personne âgée pour une durée $Tf = 10$:

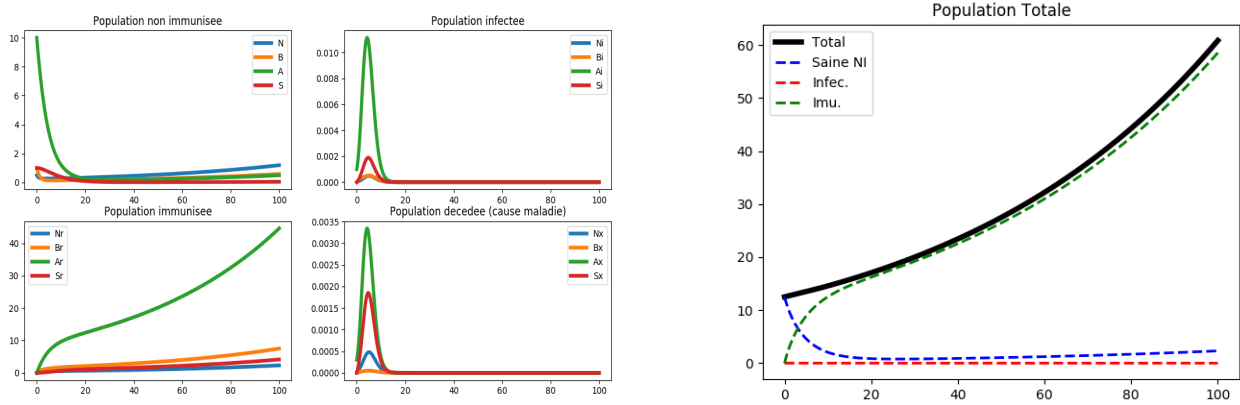


FIGURE 2.2 – première proposition de politique de vaccination

Dès le premier coup d'œil, nous pouvons déjà dire que ce scénario est strictement supérieur au précédent. En effet, il n'y a plus qu'un seul pique d'épidémie qui, de plus, est beaucoup moins impactant au vu du graphique de droite puisque la population totale augmente toujours. De plus, la quasi-totalité de la population, qui est trois fois supérieure à celle de la simulation précédente, est immunisée à la maladie. Cependant, cette politique de vaccination ne dépend pas du temps, ce qui peut être gênant lorsque les ressources sont limitées.

2.2.2 Politique de vaccination dépendante du temps

Nous proposons la politique suivante :

$$\begin{cases} vns = 1 \\ vbs = 0.8 \\ vas = 0.2 \\ vss = 1 \end{cases} \quad \text{si } t \leq Tf = 10, \text{ sinon } \begin{cases} vns = 0.8 \\ vbs = 0.2 \\ vas = 0.2 \\ vss = 0.2 \end{cases} . \text{ Autrement dit, il}$$

faudrait d'abord vacciner les personnes les plus sensibles à la maladie (bébés, enfants et seniors) puis, si possible, vacciner le reste de la population (adultes). Une fois la durée Tf dépassée, on continue à beaucoup vacciner les bébés qui restent très fragiles et légèrement le reste de la population afin d'effectuer des « rappels ». Voici ce que nous obtenons :

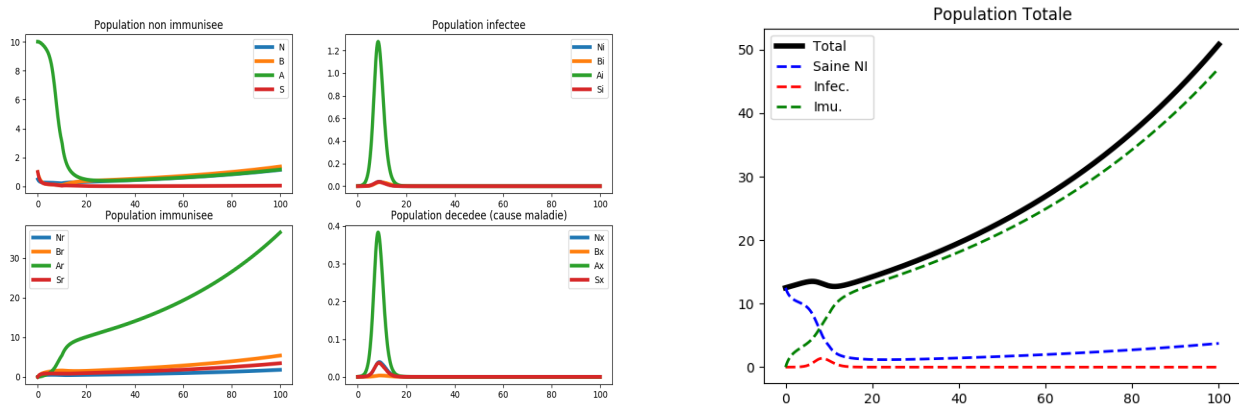


FIGURE 2.3 – proposition de politique de vaccination dépendante du temps

Cette politique de vaccination semble moins efficace que la précédente, ce qui est logique puisqu'elle dépend du temps, mais n'est pas ridicule pour autant. En effet, bien qu'il y ait beaucoup de décès chez les adultes et un peu chez les seniors, presque aucun enfant et aucun bébé n'est décédé lors du premier et seul pique d'épidémie. La population totale ainsi que la proportion d'individus immunisés à la fin de la simulation sont tout à fait satisfaisantes. Si la période de vaccination n'est pas assez longue, il se peut que le système immunitaire des individus ne soit pas tout à fait opérationnel et qu'ils soient donc, malgré la vaccination, infectés. Cela aurait ainsi comme conséquence notable une forte hausse de la mortalité et une proportion moins élevée d'individus immunisés.

Conclusion

Ce TP nous aura essentiellement permis de comprendre, de façon très simplifiée, comment nous pouvions simuler la propagation d'une maladie ainsi que ses effets (mortalité) sur une population en utilisant des outils de modélisation mathématique et numérique. Nous avons tout d'abord pu constater que le modèle de Verlhust ainsi que les méthodes d'Euler, RK et MultiPas sont loin d'être parfaits et infaillibles, mais nous permettent d'avoir une idée sur la tendance de la maladie. Nous avons ensuite mis en évidence, à l'aide d'un modèle plus élaboré prenant en compte l'âge des individus mais aussi le taux de vaccinations ainsi que la mortalité naturelle, la nécessité d'instaurer une politique de vaccination afin de limiter la mortalité mais aussi la morbidité au sein de la population. Nous avons alors proposé une politique de vaccination dépendante du temps privilégiant la vaccination des individus les plus fragiles qui s'avère être plutôt efficace.