Número Complejo

Prof. Tongo Huang

Material para 5H2 - 2025

Introducción

Los números complejos surgieron en el siglo XVI como respuesta a problemas matemáticos irresolubles con números reales, especialmente al resolver ecuaciones cúbicas. Gerolamo Cardano fue pionero al trabajar con raíces cuadradas de números negativos, aunque las consideraba "imposibles". Rafael Bombelli formalizó su uso y estableció reglas para operar con ellos.

En el siglo XVIII, Leonhard Euler introdujo el símbolo i para representar $\sqrt{-1}$ y descubrió la famosa fórmula $e^{i\pi} + 1 = 0$, que conecta números complejos con trigonometría y cálculo. Carl Friedrich Gauss consolidó su importancia al demostrar el Teorema Fundamental del Álgebra, que asegura que toda ecuación polinómica tiene solución en los números complejos. Además, Gauss propuso el "plano complejo", donde se representan gráficamente.

Inicialmente vistos con escepticismo, los números complejos son hoy fundamentales en ciencia e ingeniería. Se utilizan en física para describir ondas y vibraciones, en ingeniería eléctrica para analizar circuitos y en procesamiento de señales. Su desarrollo refleja la creatividad matemática y su capacidad para resolver problemas.

¡Los números complejos amplían nuestro entendimiento del mundo y tienen aplicaciones en innumerables campos!

Unidad imaginaria

Consideremos ahora la ecuación $x^2 + 1 = 0$ o sea $x^2 = -1$. Ya sabemos que no existe ningún número real cuyo cuadrado sea negativo. Por lo tanto, en el conjunto de los números reales, el conjunto solución de la ecuación es el conjunto vacío. Necesitamos ampliar el conjunto numérico para que esta ecuación admita solución no vacía. Esto sugiere "agregar nuevos números": $\sqrt{-1}$ y $-\sqrt{-1}$.

La expresión $\sqrt{-1}$ se llama unidad imaginaria y la escribimos: $\boxed{i = \sqrt{-1}}$. Ahora sí podemos obtener números que verifiquen la ecuación:

$$x^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = i \quad \text{o} \quad x = -i$$

La unidad imaginaria "i "verifica la ecuación anterior, o sea:

$$i^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad i^2 = -1$$

De lo anterior observamos que la expresión i la podemos considerar como un número. Obviamente no es un número real, pues el cuadrado de i es negativo.

Resolvamos algunas ecuaciones:

1. $x^2 + 4 = 0$

$$x^2 = -4 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{-4} \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{4(-1)} \quad \Rightarrow$$

$$x = \pm\sqrt{4}\sqrt{-1} \quad \Rightarrow \quad x = \pm 2i$$

Por lo tanto, $S = \{2i, -2i\}$.

2. $x^2 - 6x + 58 = 0$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 232}}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{6 \pm \sqrt{-196}}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{6 \pm \sqrt{196 \cdot (-1)}}{2} \quad \Rightarrow$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{196} \cdot \sqrt{-1}}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{6 \pm 14i}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{6}{2} \pm \frac{14i}{2} \Rightarrow x = 3 \pm 7i$$

Por lo tanto, $S = \{3 + 7i, 3 - 7i\}$.

3. $x^3 + 6x^2 + 25x = 0$

$$x\left(x^2 + 6x + 25\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ o \\ x^2 + 6x + 25 = 0 \end{cases}$$

$$x = -\frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4(1)(25)}}{2(1)} \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{-6 \pm \sqrt{36 - 100}}{2} \quad \Leftrightarrow x = -\frac{-6 \pm \sqrt{-64}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = -\frac{-6 \pm \sqrt{64 \cdot (-1)}}{2} \Leftrightarrow \quad x = -\frac{-6 \pm \sqrt{64} \cdot \sqrt{-1}}{2} \Leftrightarrow \quad x = -\frac{-6 \pm 8i}{2}$$

Dividimos cada término del numerador entre 2:

$$x = -3 \pm 4i$$
$$x = -3 \pm 4i$$

Por lo tanto, $S = \{0, -3 + 4i, -3 - 4i\}$.

Actividad 1

Resolver en $\mathbb{C}$ las siguientes ecuaciones.

a) $2x^2 - 6x + 5 = 0$

b) $x^2 - 6x + 5 = 0$

c) $x^3 + 3x^2 + 3x = 0$

Notación binómica

La forma general de los números complejos es:

$$\boxed{z = a + bi \quad , \quad a \in \mathbb{R}, \quad b \in \mathbb{R}, \quad i = \sqrt{-1}}$$

Esta expresión del número complejo se llama notación binómica. El número real a es la componente real (o parte real) del número complejo z. El número real b es la componente imaginaria (o parte imaginaria) del número complejo z. Respectivamente se los anota:

$$\mathrm{Re}(z) = a \quad y \quad \mathrm{Im}(z) = b$$

Si $b = 0$ el complejo z es un número complejo real. Si $a = 0$ el complejo z es un número complejo imaginario puro.

¿Qué sucede si $a = b = 0$

Actividad 2

Determina la parte real y la parte imaginaria de los siguientes números complejos:

$$z_0 = -2 + i, \quad z_1 = 5 - i, \quad z_2 = 2, \quad z_3 = 2 + 3i, \quad z_4 = -3i, \quad z_5 = \frac{4 + 6i}{2}, \quad z_6 = \frac{12 - 6i}{3}$$

Ejemplo

$\mathrm{Re}(z_0) = -2 \quad y \quad \mathrm{Im}(z_0) = 1$

Igualdad de números complejos

De la lista anterior, hay dos complejos que presentan componentes reales iguales y componentes imaginarias también iguales, diremos que son números complejos iguales.

Dados los números $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$

$$\boxed{a + bi = c + di \quad \Leftrightarrow \quad a = c \quad y \quad b = d}$$

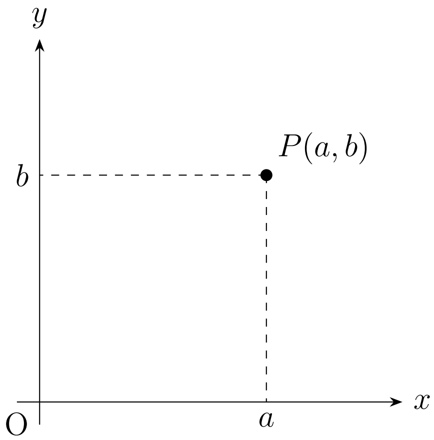
Representación geométrica de los números complejos

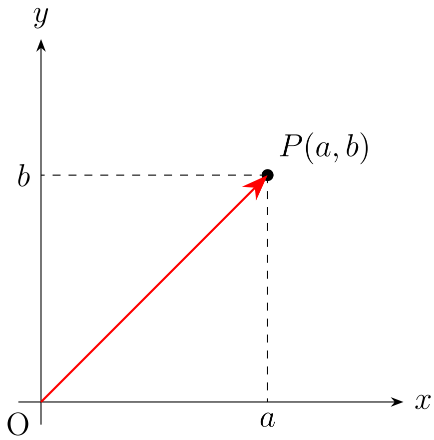
Un número complejo está determinado cuando se conoce su parte real y su parte imaginaria; es decir el complejo está definido cuando se identifican sus dos componentes que son además números reales.

Así al complejo $z = a + bi$ le podemos asociar la pareja de número reales (a, b) que lo determinan.

A este par ordenado (a, b) lo podemos representar en un sistema de ejes coordenados cartesianos, en donde en el eje de abscisas indicamos la componente real a y en el eje de ordenadas, la componente imaginaria b del complejo.

De esta forma, a cada número complejo $z = a + bi$ le asignamos un único punto del plano de coordenadas (a, b), y recíprocamente a cada punto del plano (a, b) le corresponde un único complejo $z = a + bi$. Se establece así una función biyectiva (uno a uno) entre los números complejos y los puntos del plano.





Representación del número complejo $z = a + bi$ en el plano complejo, mediante el afijo $P(a, b)$ (punto asociado al número complejo).

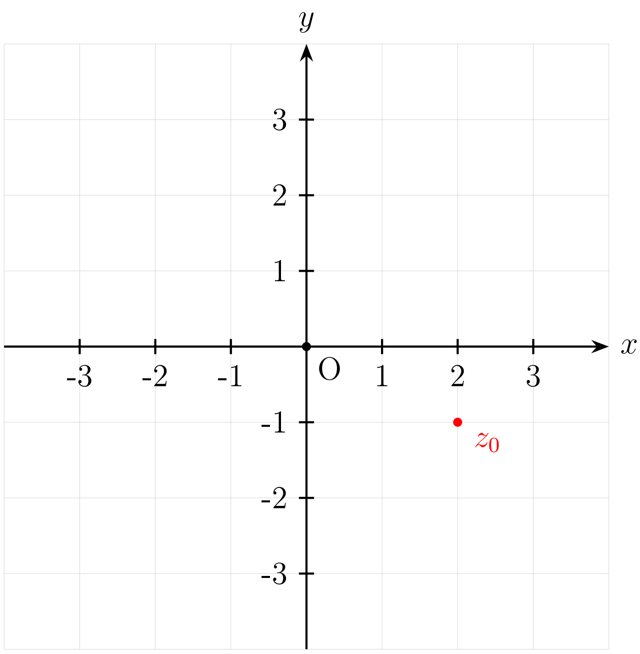
Nombramos: Ox es el eje real y Oy es el eje imaginario.
$P(a, b)$ es el afijo del complejo $z = a + bi$ y $\overrightarrow{OP}$ es el vector asociado a $z = a + bi$.

Todo complejo z, además de su representación binómica $z = a + bi$, admite una **representación cartesiana** $\boxed{z = (a, b)}$.

Actividad 3

Representar gráficamente en el siguiente sistema de ejes cartesianos los afijos de los complejos:

$$z_0 = 2 - i, \quad z_1 = 2+i, \quad z_2 = -i, \quad z_3 = 3, \quad z_4 = -2-2i, \quad z_5 = 2i-1, \quad \text{y} \quad z_6 = \frac{5-6i}{2}$$



Operaciones con números complejos

1. Adición

Sumemos los números complejos: $z_1 = 5 - 2i \quad \text{y} \quad z_2 = -1 + 3i$

$$(5-2i)+(-1+3i) = (5-1)+(-2i+3i)$$
$$z_1 + z_2 = 4 + i$$

En general:

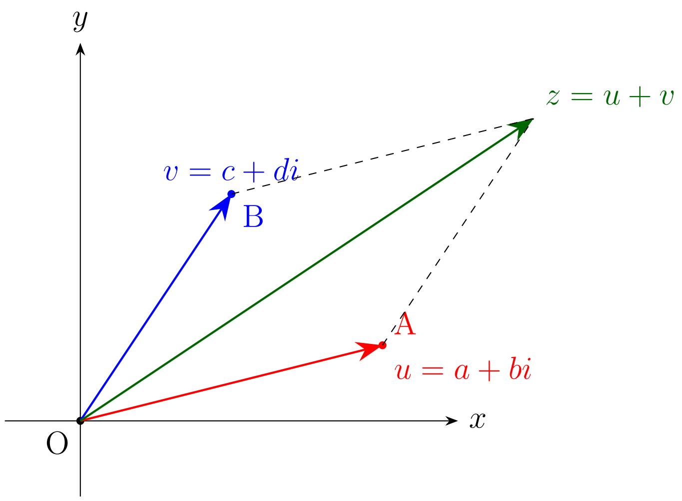
$$u = a+bi\ ,\ v = c+di \text{ son números complejos}$$
$$\boxed{(a+bi)+(c+di) = (a+c)+(b+d)i}$$

Esto nos muestra que la suma de dos complejos es un número complejo, ya que los números $(a+c)$ y $(c+d)$ son reales.

- La componente real del complejo suma es la suma de las partes reales de los sumandos
- La componente imaginaria del complejo suma es la suma de las partes imaginarias de los sumandos.

Representación geométrica del vector suma

Sean los complejos $u = a+bi$ y $v = c+di$. Representaremos u y v a través de los vectores $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ respectivamente. El complejo $z = u+v$ es una suma vectorial y se obtiene utilizando la regla del paralelogramo. Es decir, $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OP}$. Resulta que $z = (a+c)+(b+d)i$ lo que implica que las coordenadas del punto P son $(a+b, c+d)$.



Representación geométrica del vector suma.

Ejemplo

Dados los complejos $z = 4-2i \quad \text{y} \quad w = -3-i$, calcular $z+w$

$$z+w = (4-2i)+(-3-i) = (4-3)+(-2-1)i = 1-3i$$

Actividad 4

Dados los complejos $z_1 = 3 - 2i$, $z_2 = -1 + 3i$, $z_3 = 1 + 2i$, $z_4 = -3 + 2i$, calcula:

1. $z_1 + z_2 =$
2. $z_2 + z_1 =$
3. $z_1 + z_4 =$
4. $z_2 + z_3 =$
5. $z_2 + z_4 =$
6. $z_3 + z_4 =$

2. Sustracción

Definición: w es la diferencia de dos complejos z_1 y z_2

$$\boxed{z_1 - z_2 = w \quad \Leftrightarrow \quad w + z_2 = z_1}$$

Tomemos: $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$

Debemos hallar $w = \alpha + \beta i$ (o sea α y β) que cumpla con la condición impuesta en la definición:

$$(\alpha + \beta i) + (c + di) = (a + bi) \Leftrightarrow (\alpha + c) + (\beta + d)i = (a + bi) \Rightarrow \begin{cases} \alpha + c = a \Leftrightarrow \alpha = a - c \\ \beta + d = b \Leftrightarrow \beta = b - d \end{cases}$$

Por lo tanto:

$$z_1 = a + bi \ , \ z_2 = c + di \text{ son números complejos}$$
$$\boxed{w = (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i}$$

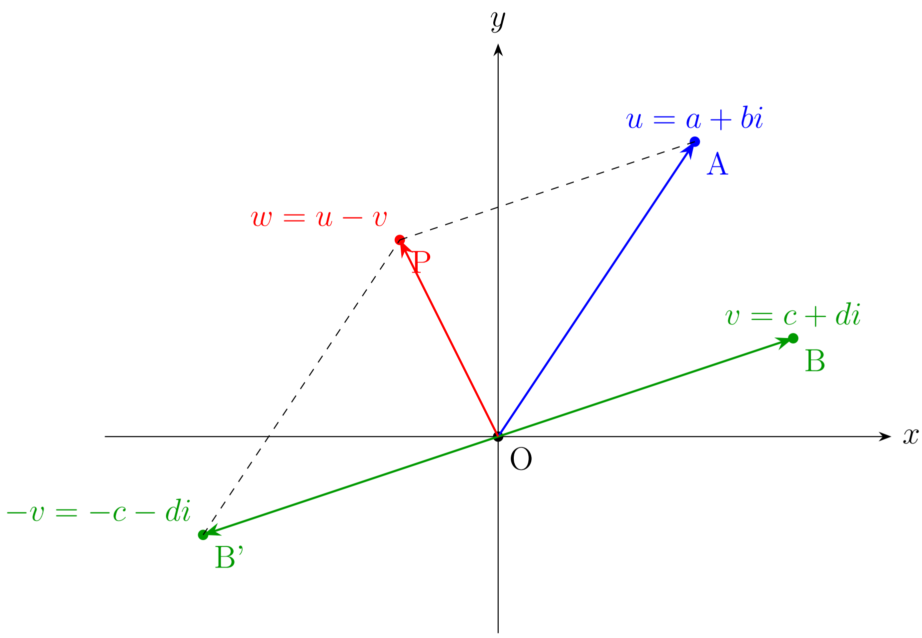
Representación geométrica del vector diferencia

Como el complejo $w = u - v$ se obtiene sumando al complejo u el opuesto de v, la representación del complejo w es el vector $\overrightarrow{OP}$.

En este caso:

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB'}$

en donde B' es el simétrico de B respecto de O.



Representación geométrica del vector diferencia.

Ejemplo

Dados los complejos $z = 4 - 2i$ y $w = -3 - i$, calcular $z - w$

$$\begin{aligned} z - w &= (4 - 2i) - (-3 - i) = (4 - 2i) + (3 + i) \\ &= (4 + 3) + (-2 + 1)i = 7 - i \end{aligned}$$

Actividad 5

Dados los complejos $z_1 = 3 - 2i$, $z_2 = -1 + 3i$, $z_3 = 1 + 2i$, $z_4 = -3 + 2i$, calcula:

1. $z_1 - z_2 =$
2. $z_2 - z_1 =$
3. $z_1 - z_3 =$
4. $z_1 - z_4 =$
5. $z_3 - z_4 =$
6. $z_4 - z_1 =$

3. Multiplicación

Dados los complejos: $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 4 - i$, $z_3 = 2 - 3i$

Al multiplicar z_1 y z_2, aplicamos la propiedad *distributiva*:

$$\begin{aligned} (2 + 3i).(4 - i) &= 2{,}4 + 2(-i) + 3i{,}4 + 3i(-i) = \\ = 8 - 2i + 12i - 3i^2 &= 8 - 2i + 12i + 3 = 11 + 10i \end{aligned}$$

Recordar: $i^2 = -1 \Rightarrow -3i^2 = -3 \cdot (-1) = 3$

Entonces $z_1 \cdot z_2 = 11 + 10i$

Si multiplicamos z_1 y z_3:

$$\begin{aligned} (2 + 3i).(2 - 3i) &= 2{,}2 + 2(-3i) + 3i{,}2 + 3i(-3i) = \\ &= 4 - 6i + 6i - 9i^2 = 4 - 6i + 6i + 9 = 4 + 9 \end{aligned}$$

obtenemos: $z_1 \cdot z_3 = 13$

En general:

$$z_1 = a + bi \ , \ z_2 = c + di \text{ son números complejos}$$

$$\boxed{(a + bi).(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i}$$

Actividad 6

Dados los complejos $z_1 = 2 + 2i$, $z_2 = -1 + 3i$, $z_3 = 2$, $z_4 = i$, calcula:

a) $z_1 \cdot z_2 =$

b) $z_1 \cdot z_1 =$

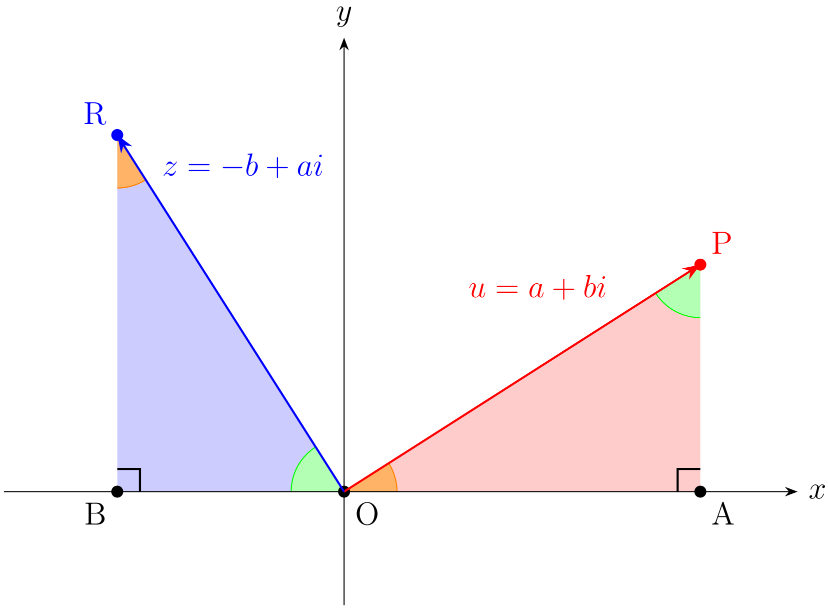
c) $z_2 \cdot z_3 =$

d) $z_1 \cdot z_4 =$

e) $z_2 \cdot z_4 =$

f) $z_3 \cdot z_4 =$

Representación geométrica del vector $z = u \cdot i$



Representación geométrica del vector producto $z = u \cdot i$.

Si consideramos los números complejos: $u = a + bi$, $z = u \cdot i$ podemos obtener su expresión binómica: $z = (a + bi)i \Rightarrow z = ai + bi^2 \Rightarrow z = -b + ai$. Al complejo u le asignamos el afijo $P(a, b)$ y al complejo z el punto $R(-b, a)$.

Vamos a ver qué relación existe entre los vectores $\overrightarrow{OP}$ y $\overrightarrow{OR}$.

$$\text{Como } O\overset{\triangle}{A}P = R\overset{\triangle}{B}O \Rightarrow \begin{cases} \boxed{\overline{OP} = \overline{OR}} \\ P\widehat{O}A = O\widehat{R}B \end{cases}$$

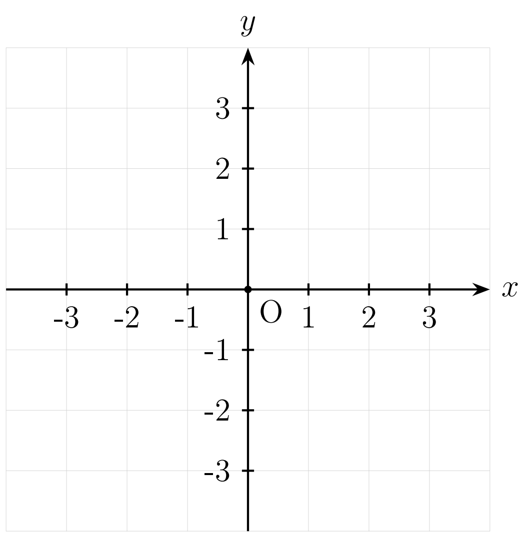
$$\left.\begin{array}{l} O\widehat{R}B + B\widehat{O}R = \alpha + \beta = 90^\circ \\ R\widehat{O}P = 180^\circ - (\alpha + \beta) \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{R\widehat{O}P = 90^\circ}$$

Las conclusiones señaladas nos muestran que el vector $\overrightarrow{OR}$ se obtiene de aplicar al vector $\overrightarrow{OP}$ una rotación de centro O y ángulo 90° antihorario.

Actividad 7

Dados los complejos de la actividad anterior y los productos obtenidos, graficar los afijos de:

- z_1
- z_2
- z_3
- z_4
- $z_1 \cdot z_4$
- $z_2 \cdot z_4$
- $z_3 \cdot z_4$
- $z_4 \cdot z_4$



Conjugado de un número complejo

El conjugado del complejo $z = a + bi$ es $\boxed{\bar{z} = a - bi}$.

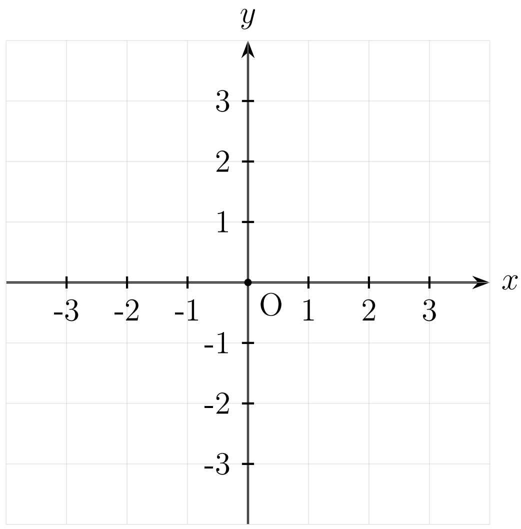
Ejemplo: $z = 3 - 2i \quad \Rightarrow \quad \bar{z} = 3 + 2i$

Actividad 8

1. Completa y grafica con los afijos de cada complejo y su respectivo conjugado:

$$\begin{aligned} z_1 &= 3 - 2i & \Rightarrow \quad \bar{z_1} &= \\ z_2 &= -2 + i & \Rightarrow \quad \bar{z_2} &= \\ z_3 &= 2i & \Rightarrow \quad \bar{z_3} &= \\ z_4 &= 1 & \Rightarrow \quad \bar{z_4} &= \end{aligned}$$

2. Qué observación puedes realizar acerca de los afijos de cada complejo y su conjugado.



Actividad 9

Demostrar las siguientes propiedades de los complejos conjugados, sean $z = a + bi$, $w = c + di$

a) $z + \bar{z} = 2a$

b) $z - \bar{z} = 2b$

c) $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$

d) $\bar{z} + \bar{w} = \overline{z + w}$

e) $\bar{z} \cdot \bar{w} = \overline{z \cdot w}$

f) $k \cdot \bar{z} = \overline{k \cdot z}, k \in \mathbb{R}$

Práctico

1. Dados los números complejos: $z_1 = 1 - 5i, \quad z_2 = -4i, \quad z_3 = -3i + 5, \quad z_4 = -3.$

   a) Indicar la componente real y la componente imaginaria de cada complejo.

   b) Representar los complejos y sus conjugados en ejes coordenados.

2. Dados: $z_1 = 2 + i, \quad z_2 = 5 - 4i, \quad z_3 = -3i, \quad z_4 = -1 + 3i.$

   Hallar los complejos en la forma binómica $(a + bi)$:

   a) $z_1 + z_2 =$

   b) $z_1 - z_4 + z_3 =$

   c) $z_2 \cdot z_3 =$

   d) $z_1 - z_4 \cdot z_1 =$

   e) $z_2 \cdot z_2 - z_4 =$

   f) $z_3 - z_4 \cdot i =$

   g) $3z_2 + (z_3 + z_4)i =$

   h) ${z_3}^2 + z_1 - 4 + 3i =$

3. Calcula las siguientes potencias de complejos y luego redacta cómo calcular el resultado de una potencia de base i y exponente natural n. Intenta formalizarlo (explicar el patrón, la regularidad).

   a) $i^0 =$

   b) $i^1 =$

   c) $i^2 =$

   d) $i^3 =$

   e) $i^4 =$

   f) $i^5 =$

   g) $i^6 =$

   h) $i^7 =$

   i) $i^8 =$

   j) $i^{15} =$

   k) $i^{20} =$

   l) $i^{28} =$

   m) $i^{30} =$

   n) $i^{40} =$

   ñ) $i^{137} =$

4. En cada caso hallar a y b para que: (*usar igualdad de números complejos*)

   a) $(a - 2) + 2bi = 8 - 6i$

   b) $a + (b + 4)i = 3a + 2b + 6i$

   c) $(a - 3)^2 - 7bi = 4$

   d) $a + b + abi = 5 + 4i$

   e) $(a^2 - 1) + bi = 3 - 5b$

   f) $1 - a + (b - 5)i = (a - 3b) + 6ai$

5. Dado $z = (9 - k^2) + (k^2 + 3k)\, i$. Hallar k para que el complejo sea:

   a) imaginario puro

   b) real

   c) $z = (8, 4)$

   d) $\mathrm{Re}(z) = 5$ y $\mathrm{Im}(z) = -2$

6. Dados: $z = -2i + 4, \ w = -3i, \ u = -2 + i$. Hallar en la forma $(a + bi)$:

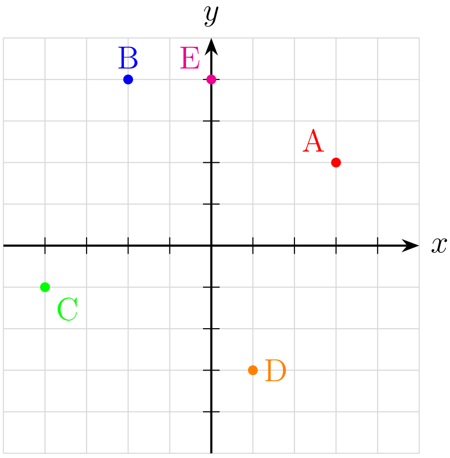
   a) $z \cdot \bar{w}$

   b) $\bar{u} - zi^7$

   c) $\bar{z} + w - ui^2$

d) $3 \cdot z - \overline{2 \cdot u} + 5 \cdot \bar{w}$

7. Observa los puntos graficados en el plano complejo y completa la tabla indicando las coordenadas de los afijos y su notación binómica $(a + bi)$.



Punto	**Coordenadas**	**Notación Binómica**
A	(,)	
B	(,)	
C	(,)	
D	(,)	
E	(,)	

8. Dados los puntos $A(4, -1)$ y $B(-5, -2)$, y los vectores OA y OB asociados a los complejos z y w respectivamente, representar gráficamente:

a) $z + w$

b) $z - w$

c) $w - z$

d) $z + \bar{w}$

e) $\bar{z} + w$

f) $\bar{z} + \bar{w}$

g) $\overline{z + w}$

h) $-z - w$

i) $2z + w$

j) $z \cdot w$

9. Resolver en $\mathbb{C}$ las siguientes ecuaciones:

a) $x^2 + 4 = 0$

b) $x^2 + x + 1 = 0$

c) $(x^2 + 1)^2 = 16$

d) $(x^2 - 9)(2x - 9) = 0$

e) $x^2 - 10x + 29 = 0$

f) $2x^3 + 4x^2 + 3x = 0$

10. Hallar los complejos z y w en la forma $(a + bi)$ tales que:

a) $\begin{cases} 3z - 5w = -7 + 8i \\ iz - 2w = -5 + 3i \end{cases}$

b) $\begin{cases} z + w = 3i \\ z - 3w = -4 - i \end{cases}$