第 30 卷 第 12 期
2018 年 12 月
计算机辅助设计与图形学学报
Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics
Vol.30 No.12
Dec. 2018

插值曲率线与特征线的 B 样条曲面构造

王 飞, 陈发来*, 童伟华

(中国科学技术大学数学科学学院 合肥 230026)
(chenfl@ustc.edu.cn)

摘 要: 插值三维线框模型的曲面构造是几何建模中的一个重要研究问题. 对于给定的三维线框模型, 利用 B 样条乘积理论、微分几何的基础知识以及薄板样条能量, 提出一种构造插值三维线框模型的 B 样条曲面的算法. 首先将线框模型中的曲线分为曲率线(曲面以该线为曲率线)、特征线(曲面在该线处为 G^0 连续)及光滑拼接线(曲面在该线处为 G^1 连续), 并对于曲率线及光滑拼接线推导了B样条曲面控制顶点所满足的条件; 然后利用薄板样条能量求解出满足约束条件的光顺 B 样条曲面. 上述算法能够构造出更光顺的曲面, 被广泛地应用于 B 样条曲面构造领域. 通过对若干模型进行测试, 结果验证了文中算法的正确性与有效性.

关键词: 曲率线; 特征线; B 样条曲面; 薄板样条能量
中图法分类号: TP391.41 **DOI:** 10.3724/SP.J.1089.2018.17201

Construction of B-spline Surfaces Interpolating Curvature and Feature Curves

Wang Fei, Chen Falai*, and Tong Weihua

(*School of Mathematical Sciences, University of Science and Technology of China, Hefei* 230026)

Abstract: Construction of surfaces interpolating 3D curve network is an important research problem in geometric modeling. Given a 3D curve network, a new method is proposed to interpolate the curve network by using the product of two B-spline functions, the fundamental knowledge of differential geometry and the thin-plate-spline energy optimization. The curve segments are specified into three categories: curvature lines of the B-spline surface, feature lines across which the B-spline surface is G^0 continuous, and smooth lines at which the B-spline surface is G^1 continuous. We derive constraint conditions of the control points of the B-spline surface at the curvature lines and smooth lines. Then the B-spline surface patches are constructed by minimizing the thin-plate-spline energy together with the curvature line and smooth constraints. That is fair surfaces using above method which is widely used in the construction of B-spline surfaces. We perform experiments on several models. The results demonstrate the correctness and effectiveness of our method.

Key words: line of curvature; feature line; B-spline surface; thin-plate-spline energy

曲面上的曲率线是一种内在的几何特征，是曲面上极为重要的一类曲线，在微分几何中起着非常重要的作用. 曲率线可以指导曲面分析，广泛应用于几何设计、形状识别以及曲面绘制等领域. 目前已有很丰富的关于曲率线的研究成果. Martin[1-2]提出了主曲面的概念，系统地研究了带曲率线边界的曲面片的性质，并给出只要边界线满足位置和标架匹配方程，曲面片就能构造出来的

收稿日期: 2018-03-30; 修回日期: 2018-05-21. 基金项目: 国家自然科学基金(11571338, 61877056). 王 飞(1990—), 男, 硕士研究生, 主要研究方向为计算机图形学; 陈发来(1966—), 男, 博士, 教授, 博士生导师, 论文通讯作者, 主要研究方向为 CAGD&CG; 童伟华(1978—), 男, 博士, 副教授, 硕士生导师, 主要研究方向为 CAGD&CG.

结论. Alourdas 等[3]提出一种构造 B 样条曲面上曲率线网的方法. Che 等[4]和 Zhang 等[5]研究了隐式曲面的曲率线的分析和计算方法及其微分几何性质. 李宏坤等[6]对 NURBS 曲面的曲率线积分进行了系统的公式推导, 并利用 NURBS 曲面的离散法向量有效地简化了曲面第二基本量的计算, 加速了 Euler 法迭代求解曲率线微分方程的计算过程. 李彩云等[7]提出一种插值曲率线的直纹面可展设计方法. 刘羽[8]给出插值一条任意参数曲线, 且以其为公共曲率线的各类可展参数曲面束的统一表达式. Li 等[9]提出以给定曲线为曲率线的参数曲线族的构造方法, 其中曲面的形状可以由 2 个控制函数来控制. 后来, Li 等[10]又提出一种过给定曲线为曲率线的可展曲面的设计方法.

给定三维线框网格(线框模型), 构造插值该网格的曲面是几何建模中一个基本问题. Farin 等[11]针对该问题专门设计了特定的曲面重建框架, 并在网格曲线和顶点之间近似实现了所需的连续性. Krishnamurthy 等[12]给出一种用户交互的方法产生多边形网络, 通过 B 样条曲面拟合该网络生成最终的曲面. Pan 等[13]给出一个基于曲率流场对齐的自动曲面重建的框架, 但这是一种几何近似方法, 不能严格保证曲面的光滑性与光顺性. Krishnamurthy 等[12]的方法首先利用稠密的三角网格逼近初始曲面, 然后将三角网格拓扑结构映射到四边形网格拓扑结构, 最后通过 B 样条曲面分片拟合使得拼接处满足 G^1 连续; 该方法虽然严格保证曲面的 G^1 连续, 但其涉及拓扑结构的映射变换, 过程比较复杂. 鉴于上述两方面的问题, 本文提出插值曲率线和特征线的 B 样条曲面构造算法, 即构造的 B 样条曲面以给定曲线段为曲率线, 以给定曲线段为特征线(即曲面在该曲线处为 G^0 连续), 并在其他曲线及顶点(特征点除外, 即只需满足 G^0 连续的顶点)处为 G^1 连续. 首先对于输入的三维线框模型进行 B 样条曲线拟合, 得到需要的边界曲线网; 其次修正边界曲线网, 确定所有约束条件, 包括顶点 G^1 连续拼接条件、边 G^1 连续拼接条件及曲率线条件, 转为相应的 B 样条曲面控制顶点约束; 最后通过求解带约束的薄板样条能量模型, 得到最终插值曲率线和特征线的 B 样条曲面. 本文通过若干实例验证了文中算法的有效性.

1 预备知识

首先给出一些基本的定义与记号.

1.1 B 样条曲线曲面

设 p 是一个正整数, $\Gamma=(t_i)$ 是一个非递减的实数序列, 其中, p, Γ 分别是 B 样条基函数的次数和节点向量. 本文中, B 样条基函数的节点向量选取为

$$\Gamma=\left\{t_0,\cdots,t_p,t_{p+1},\cdots,t_n,t_{n+1},\cdots,t_{n+p+1}\right\}=\left\{\underbrace{0,\cdots,0}_{p+1},t_{p+1},\cdots,t_n,\underbrace{1,\cdots,1}_{p+1}\right\}.$$

(1) B 样条曲线

$$\boldsymbol{C}(t)=\sum_{i=0}^{n}\boldsymbol{p}_i N_i^p(t),\ t\in\left[t_p,t_{n+1}\right] \tag{1}$$

其中, $\boldsymbol{p}_i\in\mathbb{R}^3(i=0,1,\cdots,n)$; $N_i^p(t)$ 是 B 样条基函数, 由 Cox-de Boor 递推公式定义,

$$N_i^p(t)=\frac{t-t_i}{t_{i+p}-t_i}N_i^{p-1}(t)+\frac{t_{i+p+1}-t}{t_{i+p+1}-t_{i+1}}N_{i+1}^{p-1}(t) \tag{2}$$

$$N_i^1(t)=\begin{cases}1,\ t\in\left[t_i,t_{i+1}\right)\\0,\ \text{otherwise}\end{cases}, \text{并规定}\ \frac{0}{0}=0.$$

(2) B 样条曲面

$$\boldsymbol{P}(u,v)=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\boldsymbol{p}_{i,j}N_i^p(u)N_j^q(v) \tag{3}$$

其中, $\boldsymbol{p}_{i,j}\in\mathbb{R}^3(i=0,1,\cdots,m;\ j=0,1,\cdots,n)$. 节点向量 $\boldsymbol{U}=\{u_0,\cdots,u_p,u_{p+1},\cdots,u_m,u_{m+1},\cdots,u_{m+p+1}\}$, $\boldsymbol{V}=\{v_0,\cdots,v_q,v_{q+1},\cdots,v_n,v_{n+1},\cdots,v_{n+q+1}\}$. 本文取 $u_0=u_1=\cdots=u_p=v_0=v_1=\cdots=v_q=0$, $u_{m+1}=\cdots=u_{m+p+1}=v_{n+1}=\cdots=v_{n+q}=1$.

1.2 曲率线条件

如果曲线在每一点的切向量方向都是其所在曲面的主方向, 则此曲线称为曲面上的曲率线[14]. 计算曲面上的曲率线的一种常用方法是求解非线性偏微分方程, 而对于其反问题, 即对于已知曲线求以该曲线为曲率线边界的曲面, 是本文考虑的主要问题. 下面给出在微分几何中一条边界曲线为曲率线的等价条件.

定理 **1**[14]. 曲面上的一条曲线是曲率线的充分必要条件是: 曲面沿该曲线的法向量的导数与该曲线的切向平行.

基于张量积 B 样条曲面的表达式(3), 根据定理 1, 并利用 Weingarten 映射[14]得到如下命题.

命题 **1**. 给定一条空间 B 样条曲线 $\boldsymbol{C}(t)$, 式(3)以其为曲率线边界当且仅当

$$LF-ME=0 \tag{4}$$

其中, $E=\boldsymbol{P}_u\cdot\boldsymbol{P}_u$, $F=\boldsymbol{P}_u\cdot\boldsymbol{P}_v$, $L=\dfrac{(\boldsymbol{P}_u,\boldsymbol{P}_v,\boldsymbol{P}_{uu})}{\left\|\boldsymbol{P}_u\times\boldsymbol{P}_v\right\|}$, $M=$

$\dfrac{(\boldsymbol{P}_u,\boldsymbol{P}_v,\boldsymbol{P}_{uv})}{\|\boldsymbol{P}_u\times\boldsymbol{P}_v\|}$. E, F 和 L, M 分别为 B 样条曲面 $\boldsymbol{P}(u,v)$ 的第一、二基本型量.

证明. 不妨记 B 样条曲面 $\boldsymbol{P}:\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$ 上的 B 样条曲线 $\boldsymbol{C}:u=u(t),v=v(t)$, 曲线 $\boldsymbol{C}$ 的法向量场为 $\boldsymbol{n}(u(t),v(t))$. 由定理 1 和 Weingarten 映射得

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{n}(u(t),v(t))}{\mathrm{d}t}\parallel\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}(u(t),v(t))}{\mathrm{d}t},$$

即存在函数 $\lambda(t)$ 满足

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{n}(u(t),v(t))}{\mathrm{d}t}=\lambda(t)\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}(u(t),v(t))}{\mathrm{d}t}.$$

利用复合函数求导公式, 有

$$\boldsymbol{n}_u(u,v)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\boldsymbol{n}_v(u,v)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\lambda(t)\left(\boldsymbol{r}_u(u,v)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\boldsymbol{r}_v(u,v)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right),$$

上式两边同时点乘因子 $\boldsymbol{r}_u(u,v)$, 得到

$$\left(\boldsymbol{r}_u(u,v)\cdot\boldsymbol{n}_u(u,v)\right)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\left(\boldsymbol{r}_u(u,v)\cdot\boldsymbol{n}_v(u,v)\right)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\lambda(t)\left(\left(\boldsymbol{r}_u(u,v)\cdot\boldsymbol{r}_u(u,v)\right)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\left(\boldsymbol{r}_u(u,v)\cdot\boldsymbol{r}_v(u,v)\right)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right),$$

即 $-L\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}-M\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\lambda\left(E\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+F\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)$.

由于 u, $v(0\leqslant u,v\leqslant 1)$ 的任意性, 要使得上述等式成立, 则对应项应成比例, 即 $\dfrac{L}{E}=\dfrac{M}{F}$.　　证毕.

1.3　公共顶点 G^1 连续拼接条件

设 B 样条曲面片集 $(\boldsymbol{S}_i)_{i=0}^r$ 具有公共顶点 $\boldsymbol{P}$. $\boldsymbol{A}_i(i=0,1,\cdots,r$ 是在边界线上与顶点 $\boldsymbol{P}$ 有边相连的控制顶点, $\boldsymbol{D}_i(i=0,1,\cdots,r)$ 是边界线上与控制顶点 $\boldsymbol{A}_i$ 有边相连的控制顶点, $\boldsymbol{B}_i(i=0,1,\cdots,r)$ 是 B 样条曲面片 $\{\boldsymbol{S}_i\}_{i=0}^r$ 内部与控制顶点 $\boldsymbol{A}_i$ 及 $\boldsymbol{A}_{i+1}$ 都有边相连的控制顶点, 如图 1 所示.

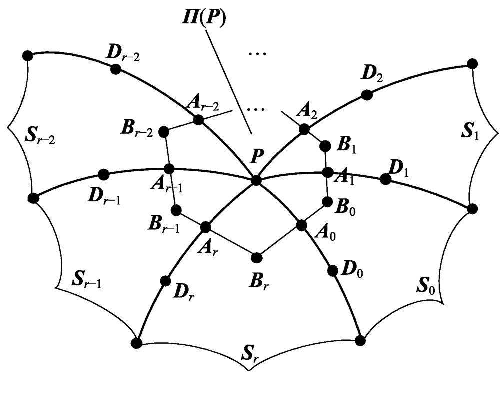


图 1　曲面片交于公共顶点 $\boldsymbol{P}$

实现曲面片在公共顶点 $\boldsymbol{P}$ 处的 G^1 连续拼接[15]的步骤如下:

Step1. 确定公共顶点 $\boldsymbol{P}$ 处切平面的法向量.

设 $\boldsymbol{n}_i(\boldsymbol{P})(i=0,1,\cdots,r)$ 是曲面片 $\boldsymbol{S}_i$ 在 $\boldsymbol{P}$ 处的单位法向量, 可以按照如下方式

$$\boldsymbol{n}(\boldsymbol{P})=\frac{\sum_{i=0}^{r}\omega_i\boldsymbol{n}_i(\boldsymbol{P})}{\left\|\sum_{i=0}^{r}\omega_i\boldsymbol{n}_i(\boldsymbol{P})\right\|}\tag{5}$$

确定曲面片族 $\{\boldsymbol{S}_i\}_{i=0}^r$ 在顶点 $\boldsymbol{P}$ 的公共法向量. 其中, $\omega_i>0$ 是权重因子, 满足 $\left\|\sum_{i=0}^{r}\omega_i\boldsymbol{n}_i(\boldsymbol{P})\right\|\neq 0$. 此时, 切平面 $\boldsymbol{\Pi}(\boldsymbol{P})$ 可以由 $\boldsymbol{P}$ 与 $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{P})$ 确定.

Step2. 确定切向点 $\boldsymbol{A}_i(i=0,1,\cdots,r)$.

将所有的控制顶点 $\boldsymbol{A}_i(i=0,1,\cdots,r)$ 映射到切平面 $\boldsymbol{\Pi}(\boldsymbol{P})$. 为了记号简明, 此处依然使用 $\boldsymbol{A}_i$ 表示映射后的切向点. 设 $\boldsymbol{R}_i=\boldsymbol{A}_i-\boldsymbol{P}$, 则存在常数 α_i 满足

$$\boldsymbol{R}_{i+1}+\boldsymbol{R}_{i-1}=\alpha_i\boldsymbol{R}_i\tag{6}$$

设 $\rho_i=\|\boldsymbol{R}_i\|$, 式(6)两边叉乘 $\boldsymbol{R}_i$, 有

$$\rho_i\sin\theta_i=\rho_{i-1}\sin\theta_{i-1}\tag{7}$$

其中, θ_i 是 $\boldsymbol{R}_i$ 与 $\boldsymbol{R}_{i+1}$ 的夹角. 由式(6)(7)有

$$\begin{cases}\rho_{i+1}=\dfrac{\sin\theta_{i-1}}{\sin\theta_i}\rho_{i-1}\\ \alpha_i=\dfrac{\rho_{i-1}\sin(\theta_{i-1}+\theta_i)}{\rho_i\sin\theta_i}\end{cases}\tag{8}$$

当 r 是偶数时, ρ_0 和 ρ_1 可以任意选择; 当 r 是奇数时, 仅 ρ_0 可以任意选择.

Step3. 确定扭矢点 $\boldsymbol{B}_i(i=0,1,\cdots,r)$.

设 $\boldsymbol{V}_i=\boldsymbol{B}_i-\boldsymbol{P}$, $\hat{\boldsymbol{R}}_i=\boldsymbol{D}_i-\boldsymbol{A}_i$.

$$\boldsymbol{V}_i+\boldsymbol{V}_{i-1}=\left(2+\frac{\beta_i}{5}\right)\boldsymbol{R}_i+\frac{2}{5}\alpha_i\hat{\boldsymbol{R}}_i\tag{9}$$

其中, α_i 由式(8)确定, β_i 可取为权函数 $\gamma(v)$[15]中的参数 c.

2　插值曲率线与特征线的 B 样条曲面构造

本节详细阐述构造插值三维线框模型的 B 样条曲面的算法.

输入三维线框模型, 目标是构造插值线框模型的 B 样条曲面. 本文算法的处理流程如图 2 所示. 首先对于输入的三维线框模型进行 B 样条曲线拟合, 得到需要的边界曲线网; 然后修正边界曲线网, 使得在满足 G^1 连续的顶点处的切向量共面(特征点除外, 即只需满足 G^0 连续的顶点); 再确定所有约束条件, 包括顶点 G^1 连续拼接条件、边 G^1 连续拼接条件及曲率线条件, 转为相应的 B 样条曲面控制顶点约束; 最后通过求解带约束的薄板样条

能量模型，得到最终插值曲率线和特征线的 B 样条曲面．图 3 所示为一个利用本文算法构造 B 样条曲面的例子，每个 B 样条曲面片的控制顶点个数为 15×15．蓝色、红色、紫色边界线分别为特征线、曲率线和 G^1 连续拼接线(下文所有图中边界线颜色与此处表示相同的含义).

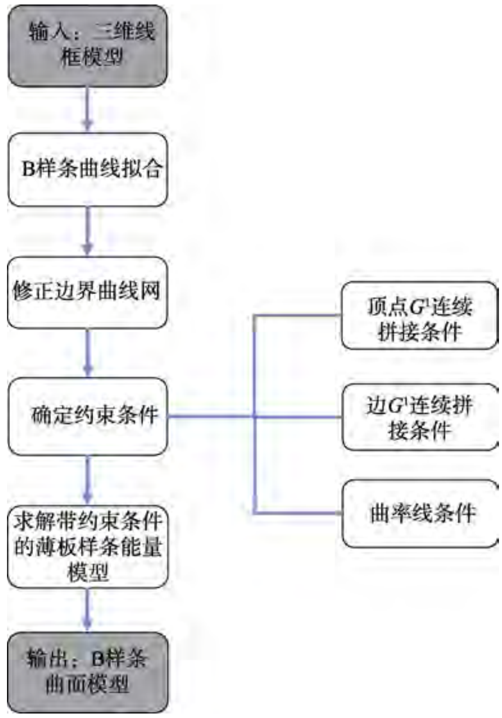


图 2　本文算法的简要流程图

a. 输入三维线框模型　　b. B 样条曲线拟合　　c. 最终结果模型

图 3　Wine-glass 模型的 B 样条曲面构造示意图

本文算法是一种局部构造格式，要求输入的线框模型的顶点的最大度为 5．用双 5 次的 B 样条曲面，取两端插值、内部是单节点的节点向量.

2.1　B 样条曲线拟合

对于线框模型中的每段曲线，通过采样获得有序点集；然后通过 B 样条曲线进行拟合，得到边界曲线网.

曲线拟合问题[16]：给定有序点集 $\{y_i\}_{i=0}^m$，寻找曲线 $f(t)$，满足 $y_i = f(t_i)+\varepsilon_i$ 且 $\sum\limits_{i=0}^{m}|\varepsilon_i| \to \min$．其中，$\varepsilon_i$ 称为残差，$y_i \in \mathbb{R}^3$，$f(t)$ 是曲线拟合函数，本文使用弦长参数化.

设拟合函数 $f(t)$ 取式(1)的表示形式，有序点集 $\{y_i\}_{i=0}^m \doteq \{(u_i,v_i,w_i)^{\mathrm{T}}\}_{i=0}^m \doteq \boldsymbol{Y}$，则 B 样条曲线拟合问题可描述为寻找 B 样条曲线 $\boldsymbol{C}(t)$ 的节点向量 $\{t_i\}_{i=0}^m \doteq \boldsymbol{T}$ 和控制顶点 $\{(x_i,y_i,z_i)^{\mathrm{T}}\}_{j=0}^n \doteq \boldsymbol{P}$，使之极小化最小二乘误差 Q，即 $\min Q = \min\|\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{PN}\|_2^2$．其中，

$$\boldsymbol{N}=\begin{pmatrix} N_0^p(t_0) & N_0^p(t_1) & \cdots & N_0^p(t_m) \\ N_1^p(t_0) & N_1^p(t_1) & \cdots & N_1^p(t_m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ N_n^p(t_0) & N_n^p(t_1) & \cdots & N_n^p(t_m) \end{pmatrix}.$$

容易看出，上述优化问题的解依赖于 B 样条曲线的控制顶点 $\{\boldsymbol{p}_j\}_{j=0}^n \doteq \{(x_i,y_i,z_i)^{\mathrm{T}}\}_{j=0}^n$ 和节点向量 $\boldsymbol{T}=\{t_i\}_{i=0}^m$ 的选取．为简化计算，本文中的节点向量取 $\boldsymbol{T}=\{0=t_0=\cdots t_p<t_{p+1}<\cdots<t_n<t_{n+1}=\cdots t_{n+p+1}=1\}$；其中，$t_{j+1}-t_j=\dfrac{1}{n-p+1}$，$j=p,\cdots,n$．则该优化问题转化为求解关于控制顶点 $\{\boldsymbol{p}_j\}_{j=0}^n$ 的线性方程组 $\dfrac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial \boldsymbol{P}}=0$，即

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} \tag{10}$$

其中，$\boldsymbol{P}=(x_0,\cdots,x_n,y_0,\cdots,y_n,z_0,\cdots,z_n)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{b}=(u_0,\cdots,u_m,v_0,\cdots,v_m,w_0,\cdots,w_m)^{\mathrm{T}}$，

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{N} & & \\ & \boldsymbol{N} & \\ & & \boldsymbol{N} \end{pmatrix}.$$

2.2　修正边界曲线网

由于输入线框模型中既有满足 G^1 连续拼接的顶点，又有特征点(满足 G^0 连续拼接)．对于 G^1 连续拼接的顶点，各曲面片在顶点处的切向量共面是必要条件．所以，首先须对边界曲线网进行修正，保证该必要条件成立.

设 $\{\boldsymbol{S}_i\}_{i=1}^r$ 是一族共顶点 $\boldsymbol{P}$ 的 B 样条曲面．$\boldsymbol{A}_i(i=1,\cdots,r)$ 是在公共边界上与顶点 $\boldsymbol{P}$ 相邻的控制顶点，如图 4 所示.

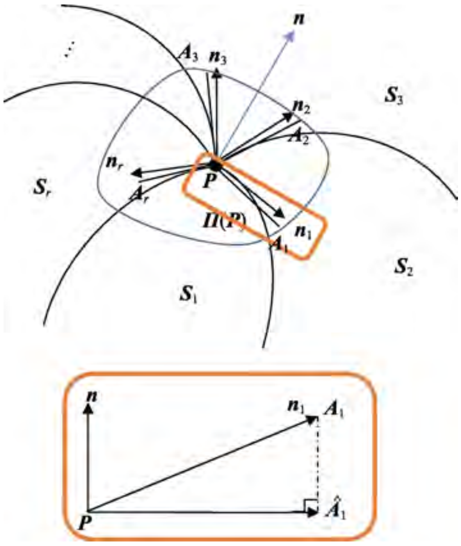


图 4　修正边界曲线

对 G^1 连续拼接的顶点, 按照如下步骤修正边界曲线网[15]:

Step1. 确定顶点 $\boldsymbol{P}$ 处切平面的法向量 $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{P})$.

设 $\boldsymbol{n}_i(\boldsymbol{P})$ 是曲面片 $\boldsymbol{S}_i$ 在顶点 $\boldsymbol{P}$ 处的单位法向量. 为了计算方便, 按

$$\boldsymbol{n}(\boldsymbol{P})=\frac{\sum_{i=1}^{r}\boldsymbol{n}_i(\boldsymbol{P})}{r} \tag{11}$$

确定曲面片族 $\{\boldsymbol{S}_i\}_{i=1}^{r}$ 在顶点 $\boldsymbol{P}$ 的公共法向量. 其中, $\boldsymbol{n}_i(\boldsymbol{P})=\boldsymbol{PA}_i\times\boldsymbol{PA}_{i+1}, i=(1,\cdots,r)\bmod r$. 切平面 $\boldsymbol{\varPi}(\boldsymbol{P})$ 可以由 $\boldsymbol{P}$ 与 $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{P})$ 确定.

Step2. 修正控制顶点 $\boldsymbol{A}_i(i=1,\cdots,r)$.

将所有的控制顶点 $\boldsymbol{A}_i(i=1,\cdots,r)$ 投影到切平面 $\boldsymbol{\varPi}(\boldsymbol{P})$, 通过

$$\begin{cases}\boldsymbol{A}_i\hat{\boldsymbol{A}}_i \parallel \boldsymbol{n}(\boldsymbol{P}) \\ \boldsymbol{P}\hat{\boldsymbol{A}}_i \parallel \boldsymbol{n}(\boldsymbol{P})\end{cases};i=1,\cdots,r \tag{12}$$

确定投影点 $\hat{\boldsymbol{A}}_i(i=1,\cdots,r)$, 利用式(6)(7)确定修正后的控制顶点. 为了简明记号, 仍记为 $\boldsymbol{A}_i(i=1,\cdots,r)$.

2.3　曲率线、光滑拼接约束条件

本文处理的三维线框模型涉及 3 类曲线: 特征线(曲面在该线处为 G^0 连续)、曲率线和光滑拼接线(曲面在该线处为 G^1 连续). 下面给出确定顶点 G^1 连续拼接条件、边 G^1 连续拼接条件, 以及曲率线条件对应 B 样条曲面的控制顶点所需满足的约束条件的方法.

2.3.1　顶点 G^1 连续拼接条件

图 5 所示为线框模型顶点度为 r 的 G^1 连续拼接条件.

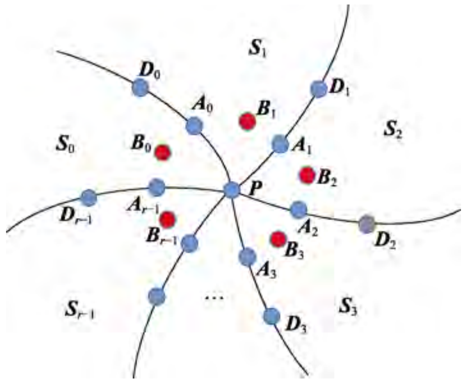


图 5　顶点度为 r 的 G^1 连续拼接约束示意图

由第 1.3 节和 2.2 节知, 设 $\boldsymbol{V}_i=\boldsymbol{B}_i-\boldsymbol{P}$, $\hat{\boldsymbol{R}}_i=\boldsymbol{D}_i-\boldsymbol{A}_i$. 顶点 G^1 连续拼接条件 [15]为

$$\boldsymbol{V}_i=\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{r-1}(-1)^j\left(\left(2+\frac{\beta_{i+j+1}}{5}\right)\boldsymbol{R}_{i+j+1}+\frac{2}{5}\alpha_{i+j+1}\hat{\boldsymbol{R}}_{i+j+1}\right) \tag{13}$$

其中, $i=0,1,\cdots,r-1$; r 是奇数. 或

$$\begin{cases}\boldsymbol{V}_i=\left(2+\dfrac{\beta_i}{5}\right)\boldsymbol{R}_i-\boldsymbol{V}_{i-1} \\ \displaystyle\sum_{j=0}^{r-1}(-1)^j\left(\left(2+\frac{\beta_i}{5}\right)\boldsymbol{R}_i+\frac{2}{5}\alpha_j\hat{\boldsymbol{R}}_i\right)=0\end{cases} \tag{14}$$

其中, $i=0,1,\cdots,r-1$; r 是偶数.

通过求解方程组式(13)和式(14)确定相关的控制顶点(图 5 中红色点), 以满足顶点 G^1 连续拼接.

2.3.2　边 G^1 连续拼接条件

对于曲面 $\boldsymbol{S}_1(u,v)$, $\boldsymbol{S}_2(w,v)$, 其公共边界为 $\boldsymbol{\varPhi}(v)=\boldsymbol{S}_1(0,v)=\boldsymbol{S}_2(0,v), v\in[0,1]$, 如图 6 所示. 如果 $\boldsymbol{S}_1(u,v)$ 和 $\boldsymbol{S}_2(w,v)$ 在 $\boldsymbol{\varPhi}(v)$ 上的每一点都有一致的切平面, 则称两曲面在公共边界线 $\boldsymbol{\varPhi}(v)$ 处为 G^1 连续[17].

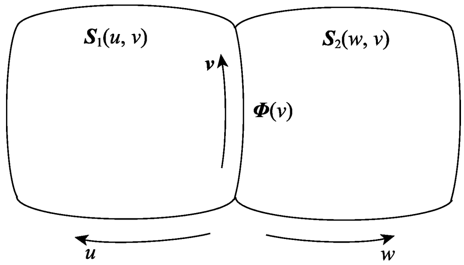


图 6　相邻两曲面片的拼接

本文通过估计两曲面在公共边界线上的法向量的方法, 来确定光滑拼接线约束对应 B 样条曲面的控制顶点(图 7 中黄色点)所满足的条件.

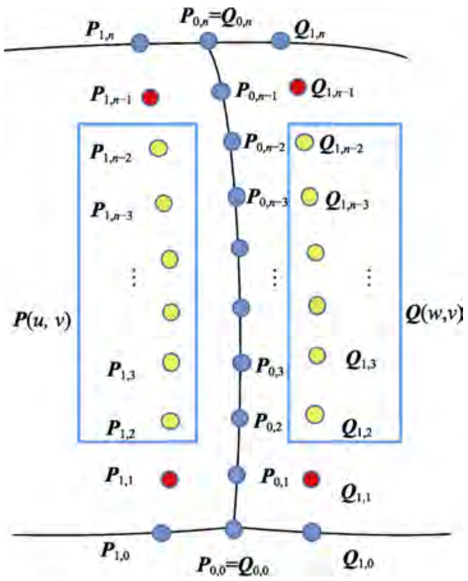


图 7 G^1 连续拼接约束示意图

给定 2 张双 p 次样条曲面 $\boldsymbol{S}_1(u,v)$, $\boldsymbol{S}_2(w,v)$ 的边界曲线

$$\begin{cases} \boldsymbol{S}_1(u,0)=\sum\limits_{i=0}^{n}\boldsymbol{P}_{i,0}N_i^p(u) \\ \boldsymbol{S}_1(u,1)=\sum\limits_{i=0}^{n}\boldsymbol{P}_{i,n}N_i^p(u) \\ \boldsymbol{S}_1(0,v)=\sum\limits_{i=0}^{n}\boldsymbol{P}_{0,j}N_j^p(v) \\ \boldsymbol{S}_1(1,v)=\sum\limits_{j=0}^{n}\boldsymbol{P}_{n,j}N_j^p(v) \\ \boldsymbol{S}_2(w,0)=\sum\limits_{i=0}^{n}\boldsymbol{Q}_{i,0}N_i^p(w) \\ \boldsymbol{S}_2(w,1)=\sum\limits_{i=0}^{n}\boldsymbol{Q}_{i,n}N_i^p(w) \\ \boldsymbol{S}_2(0,v)=\sum\limits_{j=0}^{n}\boldsymbol{Q}_{0,j}N_j^p(v) \\ \boldsymbol{S}_2(1,v)=\sum\limits_{j=0}^{n}\boldsymbol{Q}_{n,j}N_j^p(v) \end{cases} \tag{15}$$

其中, $N_j^p(u), N_j^p(v), N_j^p(w), j=0,1,\cdots,n$ 是定义在节点向量 $\boldsymbol{T}=\{0=t_0=\cdots t_p<t_{p+1}<\cdots<t_n<t_{n+1}=\cdots t_{n+p+1}=1\}$ ($t_{j+1}-t_j=\dfrac{1}{n-p+1}$, $j=p,\cdots,n$)上的 p 次 B 样条基函数. 确定光滑拼接线约束对应 B 样条曲面控制顶点所满足的条件的步骤如下:

Step1. 通过 Coons 曲面

$$\boldsymbol{S}(s,t)=(1-s)\cdot\boldsymbol{S}(0,t)+s\cdot\boldsymbol{S}(1,t)+(1-t)\cdot\boldsymbol{S}(s,0)+ t\cdot\boldsymbol{S}(s,1)-(1-s\quad s)\begin{pmatrix}\boldsymbol{S}(0,0) & \boldsymbol{S}(0,1)\\ \boldsymbol{S}(1,0) & \boldsymbol{S}(1,1)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1-t\\ t\end{pmatrix} \tag{16}$$

插值边界线式(15)确定初始曲面 $\boldsymbol{S}_1(u,v)$, $\boldsymbol{S}_2(w,v)$, 即对于参数对

$$\begin{cases}(u,v)=\left(\dfrac{i}{n-p+1},\dfrac{j}{n-p+1}\right), i,j=0,1,\cdots,n\\ (w,v)=\left(\dfrac{i}{n-p+1},\dfrac{j}{n-p+1}\right), i,j=0,1,\cdots,n\end{cases};$$

B 样条曲面 $\boldsymbol{S}_1(u,v)$, $\boldsymbol{S}_2(w,v)$ 确定了初始的控制顶点 $\boldsymbol{P}_{1,j}^0$, $\boldsymbol{Q}_{1,j}^0$, $j=2,\cdots,n-2$.

Step2. 由

$$\begin{cases}\boldsymbol{n}_1(v)=\dfrac{\partial\boldsymbol{S}_1(u,v)}{\partial u}\Big|_{u=0}\times\dfrac{\partial\boldsymbol{S}_1(u,v)}{\partial v}\Big|_{u=0}\\ \boldsymbol{n}_2(v)=\dfrac{\partial\boldsymbol{S}_2(w,v)}{\partial w}\Big|_{w=0}\times\dfrac{\partial\boldsymbol{S}_2(w,v)}{\partial v}\Big|_{w=0}\end{cases} \tag{17}$$

根据 B 样条乘积理论[18], 得到曲面 $\boldsymbol{S}_1(u,v)$, $\boldsymbol{S}_2(w,v)$ 在公共边界线 $\boldsymbol{\Phi}(v)$ 的法向 $\boldsymbol{n}_1(v)$ 和 $\boldsymbol{n}_2(v)$ 的 B 样条表达式为

$$\begin{cases}\boldsymbol{n}_1(v)=p^2\sum\limits_{k=0}^{(p+2)(n-p)+2p}\boldsymbol{P}_kN_k^{2p-1}(v)\\ \boldsymbol{n}_2(v)=p^2\sum\limits_{k=0}^{(p+2)(n-p)+2p}\boldsymbol{Q}_kN_k^{2p-1}(v)\end{cases} \tag{18}$$

式(17)中,

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\boldsymbol{S}_1(u,v)}{\partial u}\Big|_{u=0}=p\sum\limits_{j=0}^{n}\dfrac{\boldsymbol{P}_{1,j}-\boldsymbol{P}_{0,j}}{t_{p+1}-t_1}N_j^p(v)\\ \dfrac{\partial\boldsymbol{S}_1(u,v)}{\partial v}\Big|_{u=0}=p\sum\limits_{j=0}^{n-1}\dfrac{\boldsymbol{P}_{0,j+1}-\boldsymbol{P}_{0,j}}{t_{j+p+1}-t_1}N_j^{p-1}(v)\\ \dfrac{\partial\boldsymbol{S}_2(w,v)}{\partial w}\Big|_{w=0}=p\sum\limits_{j=0}^{n}\dfrac{\boldsymbol{Q}_{1,j}-\boldsymbol{Q}_{0,j}}{t_{p+1}-t_1}N_j^p(v)\\ \dfrac{\partial\boldsymbol{S}_2(w,v)}{\partial v}\Big|_{w=0}=p\sum\limits_{j=0}^{n-1}\dfrac{\boldsymbol{Q}_{0,j+1}-\boldsymbol{Q}_{0,j}}{t_{j+p+1}-t_1}N_j^{p-1}(v)\end{cases};$$

不妨记

$$\begin{cases}\boldsymbol{H}_j^1\doteq\dfrac{\boldsymbol{P}_{1,j}-\boldsymbol{P}_{0,j}}{t_{p+1}-t_1}, \quad j=0,1,\cdots,n\\ \boldsymbol{H}_j^2\doteq\dfrac{\boldsymbol{P}_{0,j+1}-\boldsymbol{P}_{0,j}}{t_{j+p+1}-t_1}, \quad j=0,1,\cdots,n-1\\ \boldsymbol{G}_j^1\doteq\dfrac{\boldsymbol{Q}_{1,j}-\boldsymbol{Q}_{0,j}}{t_{p+1}-t_1}, \quad j=0,1,\cdots,n\\ \boldsymbol{G}_j^2\doteq\dfrac{\boldsymbol{Q}_{0,j+1}-\boldsymbol{Q}_{0,j}}{t_{j+p+1}-t_1}, \quad j=0,1,\cdots,n-1\end{cases}.$$

式(18)中, 基函数 $N_k^{2p-1}(v)$ 定义在节点向量

$$\overline{\boldsymbol{T}}=\Big\{\underbrace{0,\cdots0}_{2p},\underbrace{t_{p+1},\cdots,t_{p+1}}_{p+2},\cdots,\underbrace{t_n,\cdots,t_n}_{p+2},\underbrace{1,\cdots1}_{2p}\Big\}\text{上,}$$

$$\begin{cases}\boldsymbol{P}_k=\dfrac{1}{C_{2p-1}^p}\sum\limits_{P\in\Pi}\sum\limits_{j_1}\sum\limits_{j_2}\alpha_{j_1,p}(k)\alpha_{j_2,p-1}(k)\boldsymbol{H}_{j_1}^1\times\boldsymbol{H}_{j_2}^2\\ \boldsymbol{Q}_k=\dfrac{1}{C_{2p-1}^p}\sum\limits_{P\in\Pi}\sum\limits_{j_1}\sum\limits_{j_2}\alpha_{j_1,p}(k)\alpha_{j_2,p-1}(k)\boldsymbol{G}_{j_1}^1\times\boldsymbol{G}_{j_2}^2\end{cases} \tag{19}$$

P 是集合 $I=\{1,\cdots,2p-1\}$ 中 p 元子集合, Π 是 I 集合所有可能的 p 元子集, $\alpha_{j_1,p}(k)$, $\alpha_{j_2,p-1}(k)$ 是离散 B 样条函数.

Step3. 将曲面 $\boldsymbol{S}_1(u,v)$, $\boldsymbol{S}_2(w,v)$ 在边界线 $\boldsymbol{\Phi}(v)$ 的法向 $\boldsymbol{n}_1(v)$, $\boldsymbol{n}_2(v)$ 平均化, 得到两曲面在该线的公共法向

$$\boldsymbol{n}(v)=\frac{\boldsymbol{n}_1(v)-\boldsymbol{n}_2(v)}{2} \tag{20}$$

将式(18)代入式(20), 化简得

$$\boldsymbol{n}(v)=p^2\sum_{k=0}^{(p+2)(n-p)+2p}\left(\frac{\boldsymbol{P}_k-\boldsymbol{Q}_k}{2}\right)N_k^{2p-1}(v) \tag{21}$$

Step4. 将式(18)中的法向 $\boldsymbol{n}_1(v)$, $\boldsymbol{n}_2(v)$ 使用式(21)代替, 利用 B 样条乘积理论[18], 对应控制顶点相等, 得到满足光滑拼接线约束对应 B 样条曲面控制顶点 $\boldsymbol{P}_{1,j}$, $\boldsymbol{Q}_{1,j}\,(j=2,\cdots,n-2)$ (图 7 中黄色点)的约束条件

$$\begin{cases}\overline{\boldsymbol{P}}_k=\dfrac{\boldsymbol{P}_k-\boldsymbol{Q}_k}{2},\\[2mm] \overline{\boldsymbol{Q}}_k=\dfrac{\boldsymbol{P}_k-\boldsymbol{Q}_k}{2},\end{cases} k=0,1,\cdots,(p+2)(n-p)+2p \tag{22}$$

其中, $\overline{\boldsymbol{P}}_k$, $\overline{\boldsymbol{Q}}_k$ 分别是关于控制顶点 $\boldsymbol{P}_{1,j}$, $\boldsymbol{Q}_{1,j}$, $j=(2,\cdots,n-2)$ 的关系式. 具体表达式同式(19).

所以, 曲面 $\boldsymbol{S}_1(u,v)$ 中光滑拼接线约束对应 B 样条曲面控制顶点 $\boldsymbol{P}_{1,j}\,(j=2,\cdots,n-2)$ 的约束条件为

$$\overline{\boldsymbol{P}}_k=\frac{\boldsymbol{P}_k-\boldsymbol{Q}_k}{2},\ k=0,1,\cdots,(p+2)(n-p)+2p \tag{23}$$

该约束条件本质上是关于控制顶点 $\boldsymbol{P}_{1,j}$ 的线性方程组, 该方程组一定有解, 其中一个显然的解是 $\boldsymbol{P}_{1,j}=\dfrac{\boldsymbol{P}_{1,j}^0-\boldsymbol{Q}_{1,j}^0}{2}+\boldsymbol{P}_{0,j}$, $j=2,\cdots,n-2$.

注: 其他满足光滑拼接的 B 样条曲面的相关控制顶点约束条件, 可以类似确定.

2.3.3　插值曲率线条件

双 p 次 B 样条曲面 $\boldsymbol{P}(u,v),(u,v)\in[0,1]^2$, 其四条 B 样条边界线为

$$\begin{cases}\boldsymbol{r}_i(u)=\displaystyle\sum_{j=0}^{n}\boldsymbol{p}_j^iN_j^p(u),u\in[0,1],i=1,3\\ \boldsymbol{r}_i(v)=\displaystyle\sum_{j=0}^{n}\boldsymbol{p}_j^iN_j^p(v),u\in[0,1],i=2,4\end{cases}.$$

其中, 控制顶点 $\boldsymbol{p}_j^i\in\mathbb{R}^3,i=1,2,3,4;j=0,1,\cdots,n.$ $N_j^p(u),N_j^p(v)(j=0,1,\cdots,n)$ 是定义在节点向量 $\boldsymbol{T}=\{0=t_0=\cdots t_p<t_{p+1}<\cdots<t_n<t_{n+1}=\cdots t_{n+p+1}=1\}$ 上的 p 次B样条基函数. 下面导出该B样条曲面以边界线 $\boldsymbol{r}_1(u)$ 为曲率线的约束条件.

由命题 1 知, B 样条曲线 $\boldsymbol{r}_1(u)$ 是该 B 样条曲面的曲率线的充分必要条件是 $LF-ME=0$. 将式(3)代入并令 $v=0$, 即得

$$[\boldsymbol{P}_{uu}\cdot(\boldsymbol{P}_u\times\boldsymbol{P}_v)](\boldsymbol{P}_u\cdot\boldsymbol{P}_v)=[\boldsymbol{P}_{uv}\cdot(\boldsymbol{P}_u\times\boldsymbol{P}_v)](\boldsymbol{P}_u\cdot\boldsymbol{P}_u) \tag{24}$$

其中,

$$\begin{cases}\boldsymbol{P}_u=p\displaystyle\sum_{i=0}^{m-1}\frac{\boldsymbol{p}_{i+1,0}-\boldsymbol{p}_{i,0}}{u_{i+p+1}-u_{i+1}}N_i^{p-1}(u)\doteq p\sum_{i=0}^{m-1}\boldsymbol{A}_iN_i^{p-1}(u)\\ \boldsymbol{P}_v=p\displaystyle\sum_{i=0}^{m}\frac{\boldsymbol{p}_{i,1}-\boldsymbol{p}_{i,0}}{v_{p+1}-v_1}N_i^p(u)\doteq p\sum_{i=0}^{m}\boldsymbol{B}_iN_i^p(u)\\ \boldsymbol{P}_{uu}=p(p-1)\displaystyle\sum_{i=0}^{m-2}\frac{1}{u_{i+p+1}-u_{i+1}}\left(\frac{\boldsymbol{p}_{i+2,0}-\boldsymbol{p}_{i+1,0}}{u_{i+p+2}-u_{i+2}}-\right.\\ \left.\dfrac{\boldsymbol{p}_{i+1,0}-\boldsymbol{p}_{i,0}}{u_{i+p+1}-u_{i+1}}\right)N_i^{p-2}(u)\doteq p(p-1)\displaystyle\sum_{i=0}^{m-2}\boldsymbol{C}_iN_i^{p-2}(u)\\ \boldsymbol{P}_{uv}=p^2\displaystyle\sum_{i=0}^{m-1}\frac{1}{v_{p+1}-v_1}\left(\frac{\boldsymbol{p}_{i+1,1}-\boldsymbol{p}_{i+1,0}-\boldsymbol{p}_{i,1}+\boldsymbol{p}_{i,0}}{u_{i+p+1}-u_{i+1}}\right)\\ N_i^{p-1}(u)\doteq p^2\displaystyle\sum_{i=0}^{m-1}\boldsymbol{D}_iN_i^{p-1}(u)\end{cases} \tag{25}$$

利用 B 样条乘积理论[18]与式(25)可得关系式

$$\begin{cases}\boldsymbol{P}_u\cdot\boldsymbol{P}_u=p^2\displaystyle\sum_{i=0}^{m_1}\overline{\boldsymbol{A}_i}N_i^{2p-2}(u)\\ \boldsymbol{P}_u\cdot\boldsymbol{P}_v=p^2\displaystyle\sum_{i=0}^{m_2}\overline{\boldsymbol{B}_i}N_i^{2p-1}(u)\\ \boldsymbol{P}_u\times\boldsymbol{P}_v=p^2\displaystyle\sum_{i=0}^{m_3}\overline{\boldsymbol{C}_i}N_i^{2p-1}(u)\\ \boldsymbol{P}_{uv}\cdot(\boldsymbol{P}_u\times\boldsymbol{P}_v)=p^4\displaystyle\sum_{i=0}^{m_5}\overline{\boldsymbol{E}_i}N_i^{3p-2}(u)\\ \boldsymbol{P}_{uu}\cdot(\boldsymbol{P}_u\times\boldsymbol{P}_v)=p^3(p-1)\displaystyle\sum_{i=0}^{m_4}\overline{\boldsymbol{D}_i}N_i^{3p-3}(u)\end{cases} \tag{26}$$

其中, 参数 $\overline{\boldsymbol{A}_i},\overline{\boldsymbol{B}_i},\overline{\boldsymbol{C}_i},\overline{\boldsymbol{D}_i},\overline{\boldsymbol{E}_i},m_1,m_2,m_3,m_4,m_5$ 可由 B 样条乘积公式[18]确定. 下面给出 $\overline{\boldsymbol{B}_i}$ 和 m_2 的具体表达式, 其他参数的表达式类似. 不妨记

$$\begin{cases}f_1(u)=\boldsymbol{P}_u=p\displaystyle\sum_{i=0}^{m-1}\boldsymbol{A}_iN_i^{p-1}(u)\\ f_2(u)=\boldsymbol{P}_v=p\displaystyle\sum_{i=0}^{m}\boldsymbol{B}_iN_i^p(u)\end{cases},$$

其节点向量分别为

$$\boldsymbol{U}_1=\{\underbrace{0,\cdots,0}_{p},u_{p+1},\cdots,u_n,\underbrace{1,\cdots,1}_{p}\},$$

$$\boldsymbol{U}_2=\{\underbrace{0,\cdots,0}_{p+1},u_{p+1},\cdots,u_n,\underbrace{1,\cdots,1}_{p+1}\}.$$

则由 B 样条乘积理论[18]有

$$f_1(u)\cdot f_2(u)=p^2\sum_{k=0}^{(p+2)(n-p)+2p}\boldsymbol{h}_kN_i^{2p-1}(u),$$

其中, 基函数 $N_i^{2p-1}(u)$ 定义在节点向量 $\overline{\boldsymbol{U}}$ 上,

$$\bar{U}=\left\{\underbrace{0,\cdots,0}_{2p},\underbrace{u_{p+1},\cdots,u_{p+1}}_{p+2},\cdots,\underbrace{u_n,\cdots,u_n}_{p+2},\underbrace{1,\cdots,1}_{2p}\right\}=$$

$$\{\bar{u}_0,\bar{u}_1,\cdots,\bar{u}_{(p+2)(n-p)+4p}\},$$

$$\boldsymbol{h}_k=\frac{1}{C_{2p-1}^{p-1}}\sum_{P\in\Pi}\sum_{j_1}\sum_{j_2}\alpha_{j_1,p-1,\boldsymbol{U}_1,u^P}(k)\cdot$$

$$\alpha_{j_2,p,\boldsymbol{U}_2,u^Q}(k)\boldsymbol{A}_{j_1}\cdot\boldsymbol{B}_{j_2},$$

$$u^P=\{\cdots,\bar{u}_k,\bar{u}_{k+p_1},\cdots,\bar{u}_{k+p_{p-1}},\bar{u}_{k+2p-2},\cdots\},$$

$$u^Q=\{\cdots,\bar{u}_k,\bar{u}_{k+q_1},\cdots,\bar{u}_{k+q_p},\bar{u}_{k+2p-2},\cdots\},$$

$P=\{p_1,\cdots,p_{p-1}\}$ 是集合 $I=\{1,\cdots,2p-1\}$ 中 $p-1$ 元子集合，$Q=\{q_1,\cdots,q_p\}=I-P$，Π 是 I 集合所有可能的 $p-1$ 元子集，$\alpha_{j_1,p-1,\boldsymbol{U}_1,u^P}(k),\alpha_{j_2,p,\boldsymbol{U}_2,u^Q}(k)$ 是离散 B 样条函数.

所以，$\overline{\boldsymbol{B}_i}=\boldsymbol{h}_k,m_2=(p+2)(n-p)+2p$.

因此，插值曲率线条件式(24)可转化为关于控制顶点 $\boldsymbol{p}_{i+2,0}$，$\boldsymbol{p}_{i+1,0}$，$\boldsymbol{p}_{i+1,1}$，$\boldsymbol{p}_{i,0}$，$\boldsymbol{p}_{i,1}$ 的表达式. 即

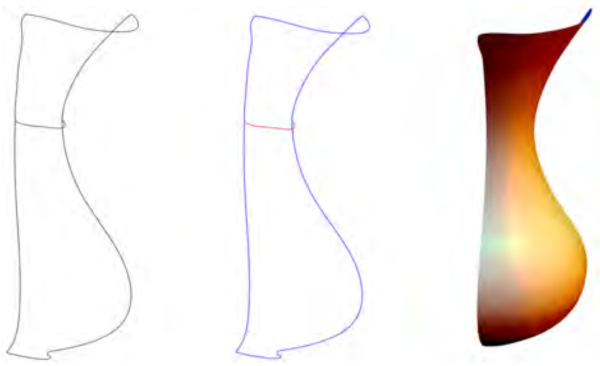
$$\sum_{i=0}^{\bar{m}}\left[(p-1)\bar{\boldsymbol{P}}_i-p\tilde{\boldsymbol{P}}_i\right]N_i^{5p-4}(u)=0 \qquad (27)$$

由于 $\{N_i^{5p-4}(u)\}$ 是样条空间的一组基，因此式(27)等价于

$$(p-1)\bar{\boldsymbol{P}}_i-p\tilde{\boldsymbol{P}}_i=0,(i=0,1,\cdots,\bar{m}) \qquad (28)$$

其中，$\bar{\boldsymbol{P}}_i$，$\tilde{\boldsymbol{P}}_i$，$\bar{m}$ 由 $\overline{\boldsymbol{A}_i}$，$\overline{\boldsymbol{B}_i}$，$\overline{\boldsymbol{C}_i}$，$\overline{\boldsymbol{D}_i}$，$\overline{\boldsymbol{E}_i}$ 以及 m_1，m_2，m_3，m_4，m_5 确定.

图 8 所示为 2 张带公共曲率线边界的 B 样条曲面片的拼接结果，每个 B 样条曲面的控制顶点数为 10×10.



a. 输入三维线框模型　b. B 样条曲线拟合　c. 最终结果模型

图 8　1/4-vase 模型的 B 样条曲面构造示意图

2.4　插值曲率线与特征线的 B 样条曲面的构造算法

设 $\boldsymbol{S}_k$，$\boldsymbol{S}_{k+1}$，$\boldsymbol{S}_l$ 和 $\boldsymbol{S}_{l+1}$ 是相邻的 4 片 B 样条曲面. 边界线 $\boldsymbol{\Gamma}_i$ 是曲率线，$\boldsymbol{\Gamma}_j$ 是 G^1 连续拼接线，顶点 $\boldsymbol{P}$ 处满足 G^1 光滑拼接，如图 9 所示.

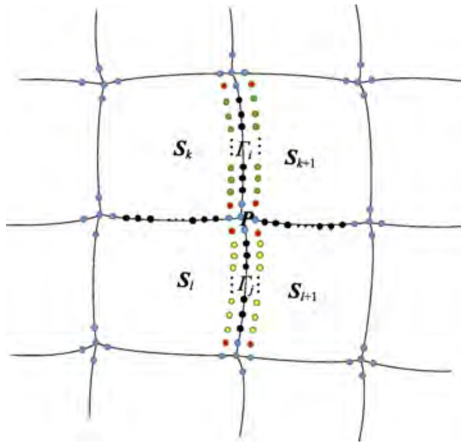


图 9　满足约束条件的 B 样条曲面构造示意图

基于第 2.1 节~第 2.3 节的讨论，通过顶点 G^1 连续拼接约束条件式(13)和式(14)，确定相应的 B 样条曲面控制顶点(图 9 中红色点). 对于边 G^1 连续拼接约束条件式(23)，插值曲率线约束条件式(28)，对应的 B 样条曲面控制顶点分别为图 9 中红色点、黄色点和绿色点. 通过求解带约束条件的薄板能量模型式

$$E(\boldsymbol{P}(u,v))=\min\int_0^1\int_0^1\left(\left\|\boldsymbol{P}_{uu}(u,v)\right\|^2+2\left\|\boldsymbol{P}_{uv}(u,v)\right\|^2+\left\|\boldsymbol{P}_{vv}(u,v)\right\|^2\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v, \qquad (29)$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\bar{\boldsymbol{P}}_k=\dfrac{\boldsymbol{P}_k-\boldsymbol{Q}_k}{2},\ k=0,1,\cdots,(p+2)(n-p)+2p\\(p-1)\hat{\boldsymbol{P}}_1-p\tilde{\boldsymbol{P}}_i=0,\ i=0,1,\cdots,\bar{m}\end{cases}$$

构造插值曲率线和特征线的 B 样条曲面. 其中，$\bar{\boldsymbol{P}}_k$，$\boldsymbol{P}_k$，$\boldsymbol{Q}_k$，$\hat{\boldsymbol{P}}_i$，$\tilde{\boldsymbol{P}}_i$ 和 $\bar{m}$ 确定的详细过程见第 2.2.2 节与第 2.2.3 节.

算法 1. 插值曲率线和特征线的 B 样条曲面的构造.

输入. 初始三维线框模型.

输出. 插值曲率线与特征线的 B 样条曲面.

Step1. 对输入的三维线框模型进行 B 样条曲线拟合，即求解方程组式(10)，得到边界曲线网 $\{\boldsymbol{\Gamma}_k^1\}_{k=0}^{l_1}$.

Step2. 将边界曲线网中的曲线分为曲率线 $\{\boldsymbol{\Gamma}_k^2\}_{k=0}^{l_2}$ (B 样条曲面以该线为曲率线)、特征线 $\{\boldsymbol{\Gamma}_k^2\}_{k=0}^{l_2}$ (B 样条曲面在该线处为 G^0 连续)，以及光滑拼接线 $\{\boldsymbol{\Gamma}_k^3\}_{k=0}^{l_3}$ (B 样条曲面在该线处为 G^1 连续). $l_1+l_2+l_3+2=l$.

Step3. 修正边界曲线网，即对满足 G^1 连续拼接的顶点求解式(12)、式(6)和式(7)，更新相应的控制顶点.

Step4. 求解方程组式(13)和式(14)，确定满足顶点 G^1 连续拼接约束的 B 样条曲面的控制顶点(图 9 中的红色点).

Step5. 推导满足边 G^1 连续拼接条件和插值曲率线条件对应 B 样条曲面的控制顶点的约束条件式(23)与式(28).

Step6. 对每个面片求解带约束条件的薄板样条能量模型式(29), 得到最终的插值曲率线与特征线的 B 样条曲面模型.

3　实验结果与分析

使用 C++语言和 Matlab 实现了本文中的所有算法, 数值实验都是在一台 Intel® Core™ i7-5500 2.40 GHz CPU, 8 GB RAM 的计算机上运行的.

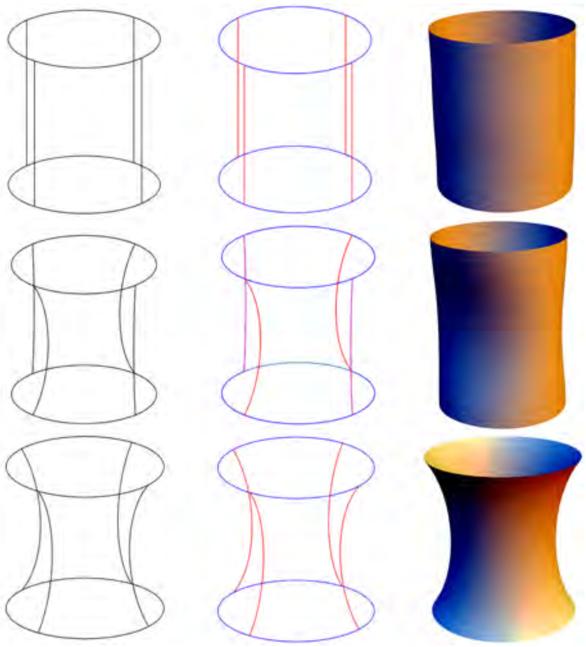
3.1　参数选取

本文中, B 样条曲线的次数为 $p=5$, B 样条曲面的次数为 $p\times q=5\times5$, 控制顶点数量为 $n\times n$, n 的取值取决于初始模型的规模.

3.2　实验结果

为了验证本文算法的有效性, 对不同规模的输入模型进行了实验.

对于不同类型的边界曲线, 其对结果的影响是不同的. 如图 10 所示, 3 行的上下边界都是特征线, 第 1 行 4 条中间边界线均取为直的曲率线, 第 2 行的相对 2 个边界线选取相同类型的线型(红色为曲率线, 紫色为光滑拼接线), 第 3 行 4 条中间曲线均取为 30 rad 的曲率线. 图 10 中, 每个 B 样条曲面的次数为 13×13.



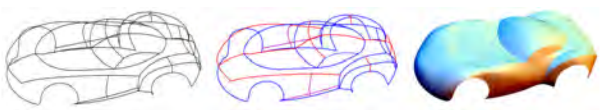
a. 输入三维线框模型　b. B 样条曲线拟合　c. 最终结果模型

图 10　Cylinder 模型的 B 样条曲面构造示意图

对于不同规模的输入模型, 本文算法都有比较好的结果. 图 8, 图 10 分别有 2 片和 4 片 B 样条曲面, 图 11~图 14 分别有 26, 32, 38 和 52 片 B 样条曲面, 图 3 有 58 片 B 样条曲面.

a. 输入三维线框模型　b. B 样条曲线拟合　c. 最终结果模型

图 11　Torso 模型的 B 样条曲面构造示意图



a. 输入三维线框模型　b. B 样条曲线拟合　c. 最终结果模型

图 12　Roadster 模型的 B 样条曲面构造示意图

a. 输入三维线框模型　b. B 样条曲线拟合　c. 最终结果模型

图 13　Dog-head 模型的 B 样条曲面构造示意图

a. 输入三维线框模型　b. B 样条曲线拟合　c. 最终结果模型

图 14　Taxi 模型的 B 样条曲面构造示意图

3.3　算法运行时间

本文算法主要由两部分构成: 一是初始的 B 样条曲线拟合过程, 需要求解一个最小二乘问题; 二是插值曲率线和特征线的 B 样条曲面构造算法. 算法的核心是求解带非线性约束的二次优化问题. 容易看出, 后者中迭代求解非线性方程组[19]是本文算法的主要瓶颈, 占用了比较多的运行时间. 表 1 所示为本文算法对于不同模型求解的运行时间, 可以看出, 目前的代码运行速度还不够理想(部分原因是因为本文使用 C++, Matlab 和 Mathematica 混合编程迭代求解非线性方程组导致的), 未来可以研究对其进行加速.

表 1 数值实验的运行时间

输入模型	B 样条曲面片数	B 样条曲面次数	B 样条曲面控制顶点数	运行时间/s
1/4-vase	2	5×5	10×10	1.58
Cylinder	4	5×5	13×13	2.95
Torso	26	5×5	13×13	21.02
Roadster	32	5×5	14×14	29.46
Dog-head	38	5×5	14×14	43.39
Taxi	52	5×5	15×15	68.12
Wine-glass	58	5×5	15×15	83.35

4 结 语

本文给出了 B 样条曲面的边界曲线为曲率线所需满足的条件，并基于该条件、G^1 连续条件、特征线条件以及薄板样条能量模型，提出构造插值三维线框模型的 B 样条曲面的算法. 首先对于输入的三维线框模型进行 B 样条曲线拟合，得到需要的边界曲线网；然后修正边界曲线网，确定所有约束条件，包括顶点 G^1 连续拼接条件、边 G^1 连续拼接条件及曲率线条件，转为相应的 B 样条曲面控制顶点约束；最后通过求解带约束的薄板样条能量模型，得到最终插值曲率线和特征线的 B 样条曲面. 实验表明，本文算法是正确有效的.

然而，本文算法也存在一些问题，有待进一步的研究. 首先，因为文中曲率线条件是一个关于控制顶点的非线性方程组，需要通过非线性最小二乘迭代求解，所以得到的是近似解. 因此，曲率线条件不能精确满足，是近似曲率线. 此外，本文算法的运行速度还不够理想，需要进一步的加速处理：一方面，可以研究更快地求解非线性方程组的算法；另一方面，算法实现上可以考虑纯 C++编程实现，并考虑使用 GPU 并行技术来加速求解二次方程组.

参考文献(References):

[1] Martin R R. Prinicpal patches for computational geometry[D]. Gambridge: University of Cambridge, 1982

[2] Martin R R. Principal patches - a new class of surface patch based on differential geometry[C] //Proceedings of Eurographics. Aire-la-Ville: Eurographics Association Press, 1983, 83: 47-55

[3] Alourdas P G, Hottel G, Tuohy S T. A design and interrogation system for modelling with rational B-spline[J]. Faring Lines, 1990, 1: 555-565

[4] Che W J, Paul J C, Zhang X P. Lines of curvature and umbilical points for implicit surfaces[J]. Computer Aided Geometric Design, 2007, 24: 395-409

[5] Zhang X P, Che W J, Paul J C. Computing lines of curvature for implicit surfaces[J]. Computer Aided Geometric Design, 2009, 26: 923-940

[6] Li Hongkun, Wang Guojin, Liu Ligang. B-spline expression of integral curvature line on NURBS surface[J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2006, 18(3): 390-395(in Chinese)
(李宏坤，王国瑾，刘利刚. NURBS 曲面上积分曲率线的 B 样条表示[J]. 计算机辅助设计与图形学学报，2006，18(3): 390-395)

[7] Li Caiyun, Xiang Xin, Zhu Chungang. Design of a ruled developable surface through the line of curvature[J]. Journal of Image and Graphics, 2016, 21(4): 527-531(in Chinese)
(李彩云，项 昕，朱春钢. 插值曲率线的直纹面可展设计[J]. 中国图象图形学报, 2016, 21(4):527-531)

[8] Liu Yu. Inverse design of all kinds of surfaces with constraints and curve reduction approximation[D]. Hangzhou: Zhejiang University, 2012(in Chinese)
(刘 羽. 带约束的各类曲面逆向设计和曲线降阶逼近[D]. 杭州：浙江大学, 2012)

[9] Li C Y, Wang R H, Zhu C G. Parametric representation of a surface pencil with a common line of curvature[J]. Computer-Aided Design, 2011, 43: 1110-1117

[10] Li C Y, Wang R H, Zhu C G. An approach for designing a developable surface through a given line of curvature[J]. Computer-Aided Design, 2013, 45: 621-627

[11] Farin G, Hansford D. Discrete coons patches[J]. Computer Aided Geometric Design, 1999, 16: 691-700

[12] Krishnamurthy V, Levoy M. Fitting smooth surfaces to dense polygon meshes[C] //Proceedings of the 23rd Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques. New York: ACM Press, 1996: 313-324

[13] Pan H, Liu Y, Sheffer A, *et al*. Flow aligned surfacing of curve networks[J]. ACM Transactions on Graphics, 2015, 34(4): Article No.127

[14] Mei Xiangming, Huang Jingzhi. Differential geometry[M]. Beijing: Higher Education Press, 2003(in Chinese)
(梅向明，黄敬之. 微分几何[M]. 北京：高等教育出版社, 2003)

[15] Shi X Q, Wang T J, Yu P Q. A practical construction of G^1 smooth biquintic B-spline surfaces over arbitrary topology[J]. Computer-Aided Design, 2004, 36: 413-424

[16] Borges C F, Pastva T. Total least squares fitting of Bézier and B-spline curves to ordered data[J]. Computer Aided Geometric Design, 2002, 19: 275-289

[17] Wang Guojin, Wang Guozhao, Zheng Jianmin. Computer aided geometric design[M]. Beijing: Higher Education Press, 2001: 18-55(in Chinese)
(王国瑾，汪国昭，郑建民. 计算机辅助几何设计[M]. 北京：高等教育出版社, 2001: 18-55)

[18] Mørken K. Some identities for products and degree raising of splines[J]. Constructive Approximation, 1991, 7: 195-208

[19] Zheng Zhoushun, Po Lo. A iterative method of solving the nonlinear least square problem[J]. Mathematical Theory and Applications, 2002, 22(1): 43-45(in Chinese)
(郑洲顺，普 乐. 非线性最小二乘问题的一种迭代解法[J]. 数学理论与应用, 2002, 22(1): 43-45)