第38卷第2期 中国科学技术大学学报 Vol. 38, No. 2
2008年2月 JOURNAL OF UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY OF CHINA Feb. 2008

文章编号:0253-2778(2008)02-0130-08

有理S曲面片与有理三角Bézier曲面片的相互转换

李秀英,童伟华,冯玉瑜

(中国科学技术大学数学系,安徽合肥 230026)

摘要:采用重新参数化方法研究有理S曲面片与有理三角Bézier曲面片之间的相互转换问题.通过演算与证明,得到它们之间相互转换的公式,即得到用三角Bézier曲面片的控制点与权来表示S曲面片控制点与权的显式表达式,及其相反的公式.此外,给出了转换的算法与具体算例,显示了该方法的有效性.

关键词:有理S曲面片;有理三角Bézier曲面片;转换

中图分类号:TP391.72;O241.5 **文献标识码**:A

AMS Subject Classification (2000): Primary 41A10; Secondary 68U27

Conversion between rational S-patches and rational triangular Bézier patches

LI Xiu-ying, TONG Wei-hua, FENG Yu-yu

(*Department of Mathematics, University of Science and Technology of China, Hefei* 230026, *China*)

Abstract: The conversion problem between rational S-patches and rational triangular Bézier patches was investigated with the reparametrization method. The explicit conversion formulas of control points and weights between S-patches and rational triangular Bézier patches were presented. Algorithms and numerical examples were also provided to illustrate the efficiency of this method.

Key words: rational S-patch; rational triangular Bézier patch; conversion

0 引言

曲面曲线造型是CAGD/CAM的核心内容,虽然三角与矩形Bézier曲面片是使用最广泛、最成功的两种曲面表示形式,但是在实际应用中也常会遇到构造拓扑上既非三角形也非矩形的曲面片.因此,近年来在凸n边形上构造曲面片已成为人们研究的热点之一.在文献[1]中,Loop等首次引入S曲面片的定义,并研究了它的一些性质.

在同一CAD/CAM系统中,常常仅包含一种曲面表示形式.然而为了使用不同的CAD/CAM系统,就有必要讨论不同曲面表示形式之间的相互转换问题[2].目前,三角Bézier曲面片与矩形Bézier曲面片之间的相互转换已有不少工作,文献[3]实现了从四边Bézier曲面到三角Bézier曲面的转化,并且给出了三角Bézier曲面控制点的计算公式;文献[4]把三角形看成退化的四边形,并且给出了Bézier控制点的精确公式;文献[5]利用升阶和差分算子实现了三角Bézier曲面片和四边Bézier曲面片之间的转换;文献[6]用Polar形式实现的三角Bézier曲面片和四边Bézier曲面片之间的相互转换,并且给出用原曲面的Polar形式直接生成新控制点的公

收稿日期:2007-01-22;**修回日期**:2007-04-02

基金项目:国家重点基础研究发展(973)计划(2004CB318000)和国家自然科学基金(60533060,60473132)资助.

作者简介:李秀英,女,1981年生,硕士.研究方向:计算机辅助几何设计.

通讯作者:冯玉瑜,教授. E-mail: fengyy@ustc.edu.cn

式.本文则研究了有理 S 曲面片与有理三角 Bézier 曲面片之间的相互转换问题,得到具体的显式转换表达式,并给出了算法和算例.

1　预备知识

为了简化表述,我们首先给出与 S 曲面片相关的符号和定义.

1.1　凸 n 边形的重心坐标及其简单性质

设 D 是以 $Q_1,\cdots,Q_n$ 为顶点的凸 n 边形,参见图 1,在 u,v 平面上 Q_i 的坐标为 (u_i,v_i), $i=1,2,\cdots,n$, $Q(u,v)$ 是凸多边形 D 内的任意一点.令

$$\alpha_k(Q)=A(Q_{k-1}Q_kQ_{k+1})\prod_{i,i+1\neq k}A(Q_iQ_{i+1}Q),\quad(1)$$

$$\beta_k(Q)=\frac{\alpha_k(Q)}{\sum_{j=1}^{n}\alpha_j(Q)},k=1,2,\cdots,n.\quad(2)$$

式中,$A(Q_iQ_jQ_k)$ 表示以 Q_i,Q_j,Q_k 为顶点的三角形面积,并约定 $Q_{-1}=Q_n$, $Q_{n+1}=Q_1$.为便于表述,我们称 $\beta(Q)=(\beta_1(Q),\beta_2(Q),\cdots,\beta_n(Q))\in\mathbb{R}^n$ 是点 Q 关于凸多边形 D 的重心坐标[7],$\mathbb{R}$ 表示实数集.

不难验证 $\beta(Q)$ 具有以下性质:

(Ⅰ) $|\beta(Q)|:=\sum_{i=1}^{n}\beta_i=1$.

(Ⅱ) $\beta_i(Q)>0$, $i=1,2,\cdots,n$,当 Q 点在多边形 D 的内部时.

(Ⅲ) $\beta_k(Q)=0$,当 $Q\in$ 边 $\overline{Q_iQ_{i+1}}$, $k\neq i,i+1$.

(Ⅳ) $\beta_k(Q_j)=\delta_{k,j}$, $k,j=1,2,\cdots,n$.

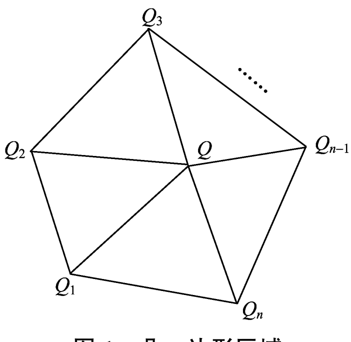

图 1　凸 n 边形区域

Fig. 1　The convex n-polygon domain

1.2　有理单纯 S 曲面片的定义

设在凸多边形 D 上的 n 边单纯 S 曲面片的定义为

$$S(u,v)=\sum_{\tau_1+\cdots+\tau_n=d}\binom{d}{\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_n}\beta_1^{\tau_1}\cdots\beta_n^{\tau_n}P_{\tau_1\cdots\tau_n}.$$

式中,$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$ 是 (u,v) 关于凸多边形 D 的重心坐标;d 和 $P_{\tau_1\cdots\tau_n}$ $(\tau_1+\tau_2+\cdots+\tau_n=d)$ 分别为 n 边单纯 S 曲面片的层数和控制点,详见文献[7,8];$S(u,v)$ 是次数为 $(n-2)d$ 的曲面片.特别地,当 $n=3$ 时,$S(u,v)$ 就是次数为 d 的三角 Bézier 曲面片.

因为任意的 n 边 S 曲面片都可以表示成 n 边单纯 S 曲面片[7],所以我们在此仅需考虑 n 边单纯 S 曲面片即可(仍简称为 S 曲面片).设 d 层的有理单纯 S 曲面片定义为

$$S(u,v)=\frac{\sum_{\tau_1+\cdots+\tau_n=d}\binom{d}{\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_n}\beta_1^{\tau_1}\cdots\beta_n^{\tau_n}w_{\tau_1\cdots\tau_n}P_{\tau_1\cdots\tau_n}}{\sum_{\tau_1+\cdots+\tau_n=d}\binom{d}{\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_n}\beta_1^{\tau_1}\cdots\beta_n^{\tau_n}w_{\tau_1\cdots\tau_n}}.\quad(3)$$

式中,$P_{\tau_1\cdots\tau_n}\geqslant0$, $w_{\tau_1\cdots\tau_n}\geqslant0$ $(\tau_1+\tau_2+\cdots+\tau_n=d)$,分别是有理 S 曲面片的控制点和权.依据 β_i 的定义式(2)知,$S(u,v)$ 可表示为分子,分母都为 $(n-2)d$ 次的多项式有理函数.

1.3　多指标符号

本文采用标准多指标符号来简化表达式[9],记 $\tau:=(\tau_1,\cdots,\tau_n)$, $\sigma:=(\sigma_1,\cdots,\sigma_n)\in\mathbb{Z}_+^n$; $\alpha:=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\in\mathbb{R}^n$,其中 $\mathbb{Z}_+^n$ 表示非负整数集合,定义

$$|\tau|:=\tau_1+\tau_2+\cdots+\tau_n;$$

$$\tau!:=\tau_1!\tau_2!\cdots\tau_n!;$$

$$\alpha^\tau:=\alpha_1^{\tau_1}\alpha_2^{\tau_2}\cdots\alpha_n^{\tau_n};$$

$$\binom{\tau}{\sigma}:=\begin{cases}\prod_{i=1}^{n}\binom{\tau_i}{\sigma_i}, & \text{当 }\sigma_i\leqslant\tau_i,i=1,2,\cdots,n;\\ 0, & \text{其他情况};\end{cases}$$

$$\binom{n}{\tau}:=\frac{n!}{\tau!(n-|\tau|)!}.\quad(4)$$

利用多指标符号,有理 S 曲面片式(3)可表示为

$$S(u,v)=\frac{\sum_{|\tau|=d}\binom{d}{\tau}\beta^\tau(u,v)w_\tau P_\tau}{\sum_{|\tau|=d}\binom{d}{\tau}\beta^\tau(u,v)w_\tau},\quad(5)$$

再依据 α_i 和 β_i 的定义(式(1)和式(2)),从式(5)可得 $S(u,v)$ 的表达式为

$$S(u,v)=\frac{\sum_{|\tau|=d}\binom{d}{\tau}\alpha^\tau(u,v)w_\tau P_\tau}{\sum_{|\tau|=d}\binom{d}{\tau}\alpha^\tau(u,v)w_\tau}.\quad(6)$$

2　有理 S 曲面片转换为有理三角 Bézier 曲面片

2.1　问题的提出

设 $S(u,v)$ 是定义在凸 n 边形 D 上的 d 层有理 S

曲面,$S(u,v)$的表达式为式(6),式中,$P_\tau,w_\tau(|\tau|=d)$分别为有理S曲面片的控制点与权,并记$Q(u,v)$关于凸多边形D的重心坐标为$(\beta_1(u,v),\beta_2(u,v),\cdots,\beta_n(u,v))$. 若给定三角形区域$\triangle_{A_1A_2A_3}\subset D$,其顶点为$A_i=(x_i,y_i)$,$i=1,2,3$,则S曲面片$S(u,v)$限制在$\triangle_{A_1A_2A_3}$上的部分可表示为$(n-2)d$次的有理三角Bézier曲面片

$$P(s,t)=\frac{\sum\limits_{i+j+k=(n-2)d} w_{ijk}Q_{ijk}B_{ijk}^{(n-2)d}(s,t)}{\sum\limits_{i+j+k=(n-2)d} w_{ijk}B_{ijk}^{(n-2)d}(s,t)},\quad(7)$$

式中,$\{Q_{ijk}\}$,$\{w_{ijk}\}$分别为$P(s,t)$的控制顶点和权;

$$B_{ijk}^m(s,t)=\binom{m}{i,j,k}s^it^j(1-t-s)^k,i+j+k=m\quad(8)$$

为Bernstein基函数;$(s,t,1-s-t)$为点$Q(u,v)$相对于三角形$\triangle_{A_1A_2A_3}$的重心坐标. 显然(u,v)与(s,t)有如下关系:

$$(u,v)=s(x_1,y_1)+t(x_2,y_2)+(1-s-t)(x_3,y_3).\quad(9)$$

我们的目标是利用已知的$S(u,v)$控制点P_τ和权$w_\tau(|\tau|=d)$来表示有理三角Bézier曲面片$P(s,t)$的控制点Q_{ijk}和权$w_{ijk}(i+j+k=(n-2)d)$.

2.2 有理S曲面片在$\triangle_{A_1A_2A_3}$上的表示

设ξ_l,η_l分别表示$\triangle_{Q_{l+1}Q_lQ_{l-1}}$与$\triangle_{QQ_lQ_{l+1}}$的面积,$l=1,2,\cdots,n$,则有

$$\xi_l=\frac{[(u_{l+1}-u_l)(v_{l-1}-v_l)-(u_{l-1}-u_l)(v_{l+1}-v_l)]}{2},\quad(10)$$

$$\eta_l=\frac{[(v_{l+1}-v_l)(u-u_l)+(u_l-u_{l+1})(v-v_l)]}{2}.\quad(11)$$

利用(u,u)和(s,t)的关系式(9)得到

$$\eta_l=a_ls+b_lt+c_l,\quad l=1,2,\cdots,n.\quad(12)$$

式中,

$$\left.\begin{aligned}a_l&=\frac{1}{2}[(v_{l+1}-v_l)(x_1-x_3)+\\&(u_l-u_{l+1})(y_1-y_3)],\\b_l&=\frac{1}{2}[(v_{l+1}-v_l)(x_2-x_3)+\\&(u_l-u_{l+1})(y_2-y_3)],\\c_l&=\frac{1}{2}[(v_{l+1}-v_l)(x_3-u_l)+\\&(u_l-u_{l+1})(y_3-v_l)].\end{aligned}\right\}\quad(13)$$

令$a=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$,$b=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$,$c=(c_1,c_2,\cdots,c_n)$,$\xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$,$\eta=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)\in\mathbb{R}^n$,则有

$$\eta=as+bt+c.\quad(14)$$

依据$\alpha_i(u,v)$的定义式(1)、式(11)和式(13)得

$$\alpha_i(u,v)=\xi_i\prod_{l\neq i,i-1}\eta_l,\quad(15)$$

从而有

$$\alpha^\tau(u,v)=\xi^\tau\prod_{l=1}^n\eta^{|\tau|-\tau_l-\tau_{l+1}}=\xi^\tau\eta^{g(\tau)}.\quad(16)$$

式中,

$$g(\tau)=(g_1(\tau),\cdots,g_n(\tau))\in\mathbb{Z}_+^n,$$
$$g_l(\tau)=|\tau|-\tau_l-\tau_{l+1}.\quad(17)$$

在叙述本节的主要定理前,我们先证明引理2.1.

引理 2.1 设$r+l+m=n$,则有

$$s^rt^l=\sum_{i+j+k=n}\frac{\binom{i}{r}\binom{j}{l}}{\binom{n}{r,l,m}}B_{ijk}^n(s,t).$$

证明

$$\begin{aligned}s^rt^l&=s^rt^l(s+t+1-s-t)^m=\\&\sum_{i+j+k=m}\frac{m!}{i!j!k!}s^{r+i}t^{l+j}(1-s-t)^k=\\&\sum_{i+j+k=n}\frac{m!}{(i-r)!(j-l)!k!}s^it^j(1-s-t)^k=\\&\sum_{i+j+k=n}\frac{\binom{i}{r}\binom{j}{l}}{\binom{n}{r,l,m}}B_{ijk}^n(s,t).\end{aligned}$$

□

定理 2.2 设定义在凸n边形D上的有理S曲面片$S(u,v)$,当它限制在$\triangle_{A_1A_2A_3}$上时,则该曲面片可以表为$(n-2)d$次的有理三角Bézier曲面片$P(s,t)$,并且$P(s,t)$的控制点Q_{ijk}和权w_{ijk},可由已知的$S(u,v)$控制点P_τ和权w_τ表示:

$$w_{ijk}Q_{ijk}=\sum_{|\tau|=d}b_{ijk}^\tau P_\tau w_\tau,\quad(18)$$

$$w_{ijk}=\sum_{|\tau|=d}b_{ijk}^\tau w_\tau.\quad(19)$$

式中,

$$b_{ijk}^\tau=\binom{d}{\tau}\xi^\tau\cdot$$

$$\sum_{\mu+\nu+\sigma=g(\tau)}D_{\mu,\nu}\frac{\binom{i}{|\mu|}\binom{j}{|\nu|}}{\binom{(n-2)d}{|\mu|,|\nu|,(n-2)d-|\mu|-|\nu|}},\quad(20)$$

$$D_{\mu,\nu}=\binom{g(\tau)}{\mu,\nu,\sigma}a^{\mu}b^{\nu}c^{\sigma}. \tag{21}$$

式中，$i+j+k=(n-2)d$；$S(u,v)$见式(6)；$P(s,t)$见式(7)；$a,b,c\in\mathbb{R}^n$ 见式(13)；$\mu,\nu,\sigma,g(\tau)\in\mathbb{Z}_+^n$；$g(\tau)$见式(17).

证明　利用式(16)和式(14)可得

$$\alpha^{\tau}=\xi^{\tau}\eta^{g(\tau)}=\xi^{\tau}(as+bt+c)^{g(\tau)}=$$

$$\xi^{\tau}\sum_{\mu+\nu+\sigma=g(\tau)}\binom{g(\tau)}{\mu,\nu,\sigma}a^{\mu}b^{\nu}c^{\sigma}s^{|\mu|}t^{|\nu|}. \tag{22}$$

式中，$\mu,\nu,\sigma\in\mathbb{Z}_+^n$；

$$\binom{g(\tau)}{\mu,\nu,\sigma}:=\frac{g(\tau)!}{\mu!\nu!\sigma!}=\prod_{l=1}^{n}\binom{g_l(\tau)}{\mu_l,\nu_l,\sigma_l}. \tag{23}$$

若令

$$D_{\mu,\nu}:=\binom{g(\tau)}{\mu,\nu,\sigma}a^{\mu}b^{\nu}c^{\sigma},$$

利用引理 2.1,则有

$$\alpha^{\tau}=\xi^{\tau}\sum_{\mu+\nu+\sigma=g(\tau)}D_{\mu,\nu}\cdot$$

$$\sum_{i+j+k=(n-2)d}\left\{\frac{\binom{i}{|\mu|}\binom{j}{|\nu|}}{\binom{(n-2)d}{|\mu|,|\nu|,(n-2)d-|\mu|-|\nu|}}\cdot B_{ijk}^{(n-2)d}(s,t)\right\}. \tag{24}$$

将式(24)代入式(6)便得到 $S(u,v)$限制在$\triangle_{A_1A_2A_3}$上的表示形式,其中分子的表达式为

$$\sum_{|\tau|}\binom{d}{\tau}\xi^{\tau}\sum_{\mu+\nu+\sigma=g(\tau)}D_{\mu,\nu}\cdot\sum_{i+j+k=(n-2)d}\left\{\frac{\binom{i}{|\mu|}\binom{j}{|\nu|}}{\binom{(n-2)d}{|\mu|,|\nu|,(n-2)d-|\mu|-|\nu|}}\cdot B_{ijk}^{(n-2)d}(s,t)P_{\tau}w_{\tau}\right\}=$$

$$\sum_{i+j+k=(n-2)d}\Big(\sum_{|\tau|=d}b_{ijk}^{\tau}P_{\tau}w_{\tau}\Big)B_{ijk}^{(n-2)d}(s,t), \tag{25}$$

式中，b_{ijk}^{τ}如式(20)和式(21)所示. 分母的表达式是类似的. 与式(21)式比较,即证明了式(18)和式(19),定理证毕.　□

3　有理三角 Bézier 曲面片转换为有理 S 曲面片

3.1　问题的提出

设 $P(s,t)$为定义在三角形$\triangle_{A_1A_2A_3}$上的 m 次的有理三角 Bézier 曲面片,其表达式为

$$P(s,t)=\frac{\sum_{i+j+k=m}w_{ijk}P_{ijk}B_{ijk}^{m}(s,t)}{\sum_{i+j+k=m}w_{ijk}B_{ijk}^{m}(s,t)}. \tag{26}$$

式中，P_{ijk}，w_{ijk}($i+j+k=m$)分别为有理三角 Bézier 曲面片 $P(s,t)$的控制顶点和权. $\triangle_{A_1A_2A_3}$ 的顶点分别为 $A_i=(x_i,y_i)$，$i=1,2,3$. $(s,t,1-s-t)$为点 $Q(u,v)$相对于三角形$\triangle_{A_1A_2A_3}$的重心坐标，B_{ijk}^{m}($i+j+k=m$)为 Bernstein 基函数. 取凸 n 边形区域 $D\subset\triangle_{A_1A_2A_3}$，$D$ 的顶点按顺时针依次为 Q_i ($i=1,\cdots,n$)，并指定有理 S 曲面片的层数为 d. 我们的目标是在区域 D 上将有理三角 Bézier 曲面片 $P(s,t)$表示成为 d 层的有理 S 曲面片

$$S(u,v)=\frac{\sum_{|\tau|=d}\binom{d}{\tau}\beta^{\tau}(u,v)P_{\tau}w_{\tau}}{\sum_{|\tau|=d}\binom{d}{\tau}\beta^{\tau}(u,v)w_{\tau}}. \tag{27}$$

式中，P_{τ}，w_{τ}，$|\tau|=d$ 分别为其控制顶点和权. 为此,我们只需求出 $S(u,v)$的控制顶点 P_{τ} 和权 w_{τ} 即可.

3.2　有理三角 Bézier 曲面片在区域 *D* 上的表示

首先,我们将 $P(s,t)$和 $S(u,v)$写成齐次化形式：

$$\hat{P}(s,t)=\sum_{i+j+k=m}\hat{P}_{ijk}B_{ijk}^{m}(s,t), \tag{28}$$

式中，$\hat{P}_{ijk}=(w_{ijk}P_{ijk},w_{ijk})$；

$$\hat{S}(u,v)=\sum_{|\tau|=d}\binom{d}{\tau}\beta^{\tau}(u,v)\hat{P}_{\tau}, \tag{29}$$

式中，$\hat{P}_{\tau}=(w_{\tau}P_{\tau},w_{\tau})$.

在证明本节主要定理前,我们先证明如下引理：

引理 3.1　设凸 n 边形 D 的顶点依次为 $Q_i=(u_i,v_i)$，$i=1,2,\cdots,n$(见图 1)，D 内的点 $Q(u,v)$相对于 D 的重心坐标为$(\beta_1(u,v),\beta_2(u,v),\cdots,\beta_n(u,v))$，则对于任意线性函数 L 有

$$L(Q)=\sum_{k=1}^{n}\beta_k(u,v)L(Q_k).$$

特别的，

$$(u,v)=\sum_{k=1}^{n}\beta_k(u,v)Q_k.$$

证明　设 L 为任意线性函数,令

$$M(Q)=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k(Q)(L(Q)-L(Q_k)),$$

$$P=(1-\lambda)Q_i+\lambda Q_{i+1},0\leqslant\lambda\leqslant 1.$$

在边 Q_iQ_{i+1}上,则有

$$M(P)=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k(P)(L(P)-L(Q_k)),$$

$$L(P)=(1-\lambda)L(Q_i)+\lambda L(Q_{i+1}).$$

依据式(1)和式(2)的重心坐标定义知:

$$\alpha_k(P)=A(Q_{k-1}Q_kQ_{k+1})\prod_{j,j+1\neq k}A(Q_jQ_{j+1}P),$$

式中,$A(Q_{k-1}Q_kQ_{k+1})$表示三角形$\triangle_{Q_{k-1}Q_kQ_{k+1}}$的面积.显然有$\alpha_k(P)=0,k\neq i,i+1$,所以

$$M(P)=\alpha_i(P)(L(P)-L(Q_i))+\alpha_{i+1}(P)(L(P)-L(Q_{i+1}))=\prod_{j\neq i-1,i,i+1}A(Q_jQ_{j+1}P)G(P),$$

式中,

$$G(P)=A(Q_{i-1}Q_iQ_{i+1})A(Q_{i+1}Q_{i+2}P)(L(P)-L(Q_i))+A(Q_iQ_{i+1}Q_{i+2})A(Q_{i-1}Q_iP)(L(P)-L(Q_{i+1})).$$

又因为$P=(1-\lambda)Q_i+\lambda Q_{i+1}$,所以

$$A(Q_{i+1}Q_{i+2}P)=(1-\lambda)A(Q_iQ_{i+1}Q_{i+2}),$$
$$A(Q_{i-1}Q_iP)=\lambda A(Q_{i-1}Q_iQ_{i+1}).$$

将上式代入$G(P)$可得

$$\begin{aligned}G(P)=&(1-\lambda)A(Q_{i-1}Q_iQ_{i+1})A(Q_iQ_{i+1}Q_{i+2})\cdot\\&(L(P)-L(Q_i))+\lambda A(Q_{i-1}Q_iQ_{i+1})\cdot\\&A(Q_iQ_{i+1}Q_{i+2})(L(P)-L(Q_{i+1}))=\\&A(Q_{i-1}Q_iQ_{i+1})A(Q_iQ_{i+1}Q_{i+2})\cdot\\&[L(P)-(1-\lambda)L(Q_{i+1})-\lambda L(Q_i)]=0.\end{aligned}$$

因此$M(P)=0$.依据P的定义知:区域D的每条边界都与$M(Q)$有无穷多个交点,故多边形的每条边界都是$M(Q)$的线性因子.而$M(Q)$的次数为$n-1$,所以$M(Q)\equiv 0$,即$\sum_{k=1}^{n}\alpha_k(Q)(L(Q)-L(Q_k))=0$.

从而有

$$\sum_{k=1}^{n}\alpha_k(Q)L(Q)=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k(Q)L(Q_k).$$

因此

$$L(Q)=\frac{\sum_{k=1}^{n}\alpha_k(Q)L(Q_k)}{\sum_{k=1}^{n}\alpha_k(Q)}=\sum_{k=1}^{n}\beta_k(Q)L(Q_k).$$

特别的,若令$L_1(Q)=u,L_2(Q)=v$,则有

$$(u,v)=\sum_{k=1}^{n}\beta_k(u,v)Q_k.\qquad\square$$

定理 3.2 设在凸n边形区域$D\subset\triangle_{A_1A_2A_3}$上,当$d\geqslant m$时,则有理三角曲面片$P(s,t)$可表示成为$d$层的有理 S 曲面片$S(u,v)$,且有

$$(P_\tau w_\tau,w_\tau)=\sum_{|\sigma|=d-m}\left\{\frac{\binom{m}{\lambda}\binom{d-m}{\sigma}}{\binom{d}{\tau}}\cdot B_m[\hat{P}](\underbrace{Q_1\cdots Q_1}_{\lambda_1}\cdots\underbrace{Q_n\cdots Q_n}_{\lambda_n})\right\}=\sum_{|\sigma|=d-m}\frac{\binom{m}{\lambda}\binom{d-m}{\sigma}}{\binom{d}{\tau}}\prod_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{3}r_i^{(j)}E_i\right)^{\lambda_j}\hat{P}_{000},\tag{30}$$

式中,$P(s,t)$与$S(u,v)$使用齐次化形式,见式(28)和式(29);$B_m[\hat{P}]((\mu_1,\nu_1),\cdots,(\mu_m,\nu_m))$是$\hat{P}(s,t)$的 blossoming 在$(\mu_i,\nu_i)(i=1,\cdots,m)$的值;$\tau,\sigma,\lambda\in\mathbb{Z}_+{}^n$,$|\lambda|=m$,$|\tau|=d$;$(r_1^{(j)},r_2^{(j)},r_3^{(j)})$是$Q_j$对于$\triangle_{A_1A_2A_3}$的重心坐标,$j=1,2,\cdots,n$;$E_i$是平移算子,其定义为

$$E_1f_{ijk}=f_{i+1,j,k},\ E_2f_{ijk}=f_{i,j+1,k},\ E_3f_{ijk}=f_{i,j,k+1}.$$

证明 因为点$Q(u,v)\in D\subset\triangle_{A_1A_2A_3}$,所以$Q(u,v)$相对于$\triangle_{A_1A_2A_3}$的重心坐标$(s,t,1-s-t)$与$(u,v)$有以下关系:

$$(u,v)=sA_1+tA_2+(1-s-t)A_3,$$

从而s,t可用(u,v)的线性函数来表示.

事实上有

$$\left.\begin{aligned}s(u,v)&=\zeta_1u+\zeta_2v+\zeta_3,\\t(u,v)&=\varepsilon_1u+\varepsilon_2v+\varepsilon_3.\end{aligned}\right\}\tag{31}$$

式中,$\zeta_1=\frac{y_2-y_3}{\triangle}$,$\zeta_2=\frac{x_3-x_2}{\triangle}$,$\zeta_3=\frac{x_2y_3-x_3y_2}{\triangle}$,$\varepsilon_1=\frac{y_3-y_1}{\triangle}$,$\varepsilon_2=\frac{x_1-x_3}{\triangle}$,$\varepsilon_3=\frac{x_3y_1-x_1y_3}{\triangle}$,这儿$\triangle$表示 2 倍的$\triangle_{A_1A_2A_3}$面积.

将式(31)代入式(28),整理$\hat{P}(s,t)$的分子可得

$$\begin{aligned}\hat{R}(u,v)\equiv&\hat{P}(s(u,v),t(u,v))=\\&\sum_{i+j+k=m}\binom{m}{ijk}(\zeta_1u+\zeta_2v+\zeta_3)^i(\varepsilon_1u+\varepsilon_2v+\varepsilon_3)^j\cdot\\&(1-(\zeta_1+\varepsilon_1)u-(\zeta_2+\varepsilon_2)v-\zeta_3-\varepsilon_3)^k\hat{P}_{ijk},\end{aligned}$$

显然$\hat{R}(u,v)$是关于(u,v)的m次多项式.

设$V^{n-1}=\{(t_1,t_2,\cdots,t_n)\mid t_i\geqslant 0,i=1,\cdots,n,\sum_{i=1}^{n}t_i=1\}$是$n-1$维的单形,在它上面定义仿射变换$\pi:V^{n-1}\to D$如下:

$$\pi(t_1,t_2,\cdots,t_n)=t_1Q_1+\cdots+t_nQ_n.$$

利用引理 3.1 可得:

$$(u,v)=\pi(\beta_1(u,v),\cdots,\beta_n(u,v)),$$

因而

$$\hat{P}(s,t)=\hat{R}(u,v)=$$

$$(\hat{R}\circ\pi)(\beta_1(u,v),\cdots,\beta_n(u,v)) = \sum_{|\lambda|=m}\binom{m}{\lambda}\beta^{\lambda}(u,v)\hat{P}_{\lambda} \equiv \hat{S}(u,v).$$

从而,我们可将 $\hat{P}(s,t)$ 表示成为在 D 上的 m 层有理 S 曲面片,为具体求出 $\hat{S}(u,v)$ 的控制点 $\hat{P}_{\lambda}$,则可利用 $\hat{P}(s,t)$ 的 blossoming 对偶泛函性质及三角域上对偶泛函表达式[9],即得

$$\hat{P}_{\lambda} = B_m[\hat{P}](\underbrace{Q_1\cdots Q_1}_{\lambda_1}\cdots\underbrace{Q_n\cdots Q_n}_{\lambda_n}) = \prod_{j=1}^{n}(r_1^{(j)}E_1 + r_2^{(j)}E_2 + r_3^{(j)}E_3)^{\lambda_j}\hat{P}_{000}.$$

至此,我们已经可将 (m,m) 次的有理三角曲面 $P(s,t)$ 在 D 上表示成为 m 层的 S 曲面片. 进一步的,为计算 $d>m$ 层的 S 曲面片,则仅需将 m 层的 S 曲面片升层为 d 层 S 曲面片,然后利用 d 层的控制点和权 $\hat{P}_{\tau}=(w_{\tau}P_{\tau},w_{\tau})$, $|\tau|=d$ 来表示,得到

$$\hat{P}_{\tau} = (w_{\tau}P_{\tau},w_{\tau}) = \sum_{|\sigma|=d-m}\frac{\binom{m}{\lambda}\binom{d-m}{\sigma}}{\binom{d}{\tau}}B_m[\hat{P}](\underbrace{Q_1\cdots Q_1}_{\lambda_1}\cdots\underbrace{Q_n\cdots Q_n}_{\lambda_n}) = \sum_{|\sigma|=d-m}\frac{\binom{m}{\lambda}\binom{d-m}{\sigma}}{\binom{d}{\tau}}\cdot\prod_{j=1}^{n}(r_1^{(j)}E_1 + r_2^{(j)}E_2 + r_3^{(j)}E_3)^{\lambda_j}\hat{P}_{000},$$

即为式(30),定理证毕. □

下面对于 $d=m$ 时,我们具体给出计算阵列 $\hat{P}_{\tau}=(P_{\tau},w_{\tau})$, $|\tau|=m$ 的算法:

算法　(Ⅰ)计算 $\hat{P}(u,v)$ 的 blossoming:

```
for l=0 to m do
  for i=0 to m-l do
    for j=0 to m-l-i do
      k←m-l-i-j
      P_ijk^(0) ←P̂_ijk
      P_ijk^(l) ←s(μ_l,ν_l)P_{i+1,j,k} +t(μ_l,ν_l)P_{i,j+1,k} +
           (1-s(μ_l,ν_l)-t(μ_l,ν_l))P_{i,j,k+1}
    end do
  end do
end do
```

$$B_m[\hat{P}]((\mu_1,\nu_1),(\mu_2,\nu_2),\cdots,(\mu_m,\nu_m)) \leftarrow P_{000}^{(m)}$$

(Ⅱ)计算 $\hat{P}_{\tau}=(P_{\tau}w_{\tau},w_{\tau})$, $|\tau|=m$,

$$\hat{P}_{\tau} \leftarrow B_m[\hat{P}](\underbrace{Q_1,\cdots,Q_1}_{k_1},\cdots,\underbrace{Q_n,\cdots,Q_n}_{k_n})$$

而当 $d<m$ 时,m 次有理三角 Bézier 片在区域 D 上并不一定能表示成 d 层的有理 S 曲面片. 因此对于这种情形,可以利用逼近的方法来计算近似的 S 曲面片表示,在此不再赘述.

4　例子

我们通过具体的算例来说明如何将有理 S 曲面片转换为有理三角 Bézier 曲面片及其相反过程.

例 4.1　设给定五边形区域 D,其中 D 的顶点按顺时针排列依次为 $A_1=(0,2)$, $A_2=(1,2)$, $A_3=(2,1)$, $A_4=(2,0)$, $A_5=(0,0)$,见图 2. 在 D 上定义 $d=2$ 层 S 曲面片 $S(u,v)$,其控制点与权分别为 $\{P_{\tau},w_{\tau}\}$,简记为 $\bar{P}_{\tau}=(P_{\tau},w_{\tau})$,具体取值为

$$\begin{pmatrix}\bar{P}_{00002}\\ \bar{P}_{00011}\\ \bar{P}_{00020}\\ \bar{P}_{00101}\\ \bar{P}_{00110}\\ \bar{P}_{00200}\\ \bar{P}_{01001}\\ \bar{P}_{01010}\\ \bar{P}_{01100}\\ \bar{P}_{02000}\\ \bar{P}_{10001}\\ \bar{P}_{10010}\\ \bar{P}_{10100}\\ \bar{P}_{11000}\\ \bar{P}_{20000}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0.5 & 1.2\\ 2 & 0 & 0 & 1\\ 1.309 & 0.951 & 1 & 1.2\\ 2.309 & 0.951 & 0.5 & 0.8\\ 2.168 & 1.902 & 0 & 1\\ 0.5 & 1.539 & 1 & 1.2\\ 1.5 & 1.539 & 1 & 1.2\\ 1.809 & 2.49 & 0.4 & 1\\ 1 & 378 & 0 & 1\\ -0.309 & 0.951 & 0.4 & 0.8\\ 0.691 & 0.951 & 1 & 1.5\\ 1 & 1.902 & 1 & 1.2\\ 0.191 & 2.49 & 0.2 & 1\\ -0.618 & 1.902 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

见图 3.

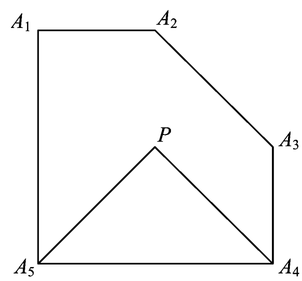

图 2　曲面片的定义域

Fig. 2　The domains of the surfaces

图 3　带控制网的有理 S 曲面片

Fig. 3　The rational S-patch with control nets

在 D 内取定三角区域 $\triangle_{A_5A_4P}$，其中 $P=(1,1)$，见图 2. 依据定理 2.2，我们知道 $S(u,v)$ 限制在 $\triangle_{A_5A_4P}$ 上的曲面片可以表示成为 6 次的有理三角 Bézier 曲面片，其控制点与权分别为 $\{P_{ijk},w_{ijk}\}$，简记为 $\bar{P}_{ijk}=(P_{ijk},w_{ijk})$，其中 $i+j+k=6$，通过计算可得

$$\begin{pmatrix} \bar{P}_{006} \\ \bar{P}_{015} \\ \bar{P}_{024} \\ \bar{P}_{033} \\ \bar{P}_{042} \\ \bar{P}_{051} \\ \bar{P}_{060} \\ \bar{P}_{105} \\ \bar{P}_{114} \\ \bar{P}_{123} \\ \bar{P}_{132} \\ \bar{P}_{141} \\ \bar{P}_{150} \\ \bar{P}_{204} \\ \bar{P}_{213} \\ \bar{P}_{222} \\ \bar{P}_{231} \\ \bar{P}_{240} \\ \bar{P}_{303} \\ \bar{P}_{312} \\ \bar{P}_{321} \\ \bar{P}_{330} \\ \bar{P}_{402} \\ \bar{P}_{411} \\ \bar{P}_{420} \\ \bar{P}_{501} \\ \bar{P}_{510} \\ \bar{P}_{600} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9932 & 1.3567 & 0.6044 & 27.2 \\ 1.1899 & 1.1966 & 0.6171 & 27.2667 \\ 1.3839 & 1.0048 & 0.5914 & 26.2667 \\ 1.5727 & 0.77769 & 0.51589 & 24.16 \\ 1.7483 & 0.5142 & 0.3844 & 21.2267 \\ 1.8962 & 0.2296 & 0.2059 & 18.1333 \\ 2 & 0 & 0 & 16 \\ 0.8520 & 1.1393 & 0.6108 & 38.3333 \\ 1.0532 & 0.9723 & 0.6216 & 38.6933 \\ 1.2483 & 0.7712 & 0.5869 & 37.56 \\ 1.4381 & 0.5316 & 0.4927 & 34.84 \\ 1.6166 & 0.2590 & 0.3310 & 31.0933 \\ 1.7692 & 0 & 0.1154 & 27.7333 \\ 0.7063 & 0.9072 & 0.5823 & 52.56 \\ 0.9157 & 0.7345 & 0.5906 & 53.6267 \\ 1.1155 & 0.5255 & 0.5438 & 52.6489 \\ 1.3113 & 0.2752 & 0.4254 & 49.4133 \\ 1.4976 & 0 & 0.2275 & 45.0133 \\ 0.5549 & 0.6625 & 0.5084 & 69.8 \\ 0.7771 & 0.4870 & 0.5169 & 72.3067 \\ 0.9851 & 0.2691 & 0.4573 & 71.8133 \\ 1.1887 & 0 & 0.3113 & 67.84 \\ 0.30915 & 0.4090 & 0.3799 & 89.5467 \\ 0.6324 & 0.2358 & 0.3972 & 94.6667 \\ 0.8533 & 0 & 0.3251 & 94.5067 \\ 0.2042 & 0.1630 & 0.1971 & 112 \\ 0.4737 & 0 & 0.2368 & 126.6 \\ 0 & 0 & 0 & 144 \end{pmatrix}$$

结果见图 4，图 5.

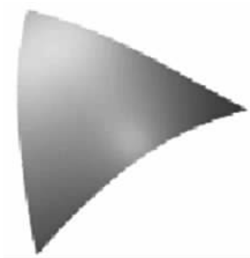

图 4　区域 $\triangle_{A_5A_4P}$ 上的有理三角 Bézier 曲面片

Fig. 4　The rational triangular Bézier patch on the domain $\triangle_{A_5A_4P}$

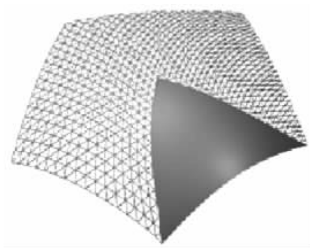

图 5　有理 S 曲面片与有理三角 Bézier 曲面片（填充部分）

Fig. 5　The rational S-patch and rational triangular Bézier patch (filled part)

例 4.2　设给定三角形区域 $\triangle_{A_5BP}$，其中 $A_5=(0,0)$，$B=(4,0)$，$P=(0,4)$，见图 6. 在 $\triangle_{A_5BP}$ 上定义 2 阶的有理三角 Bézier 曲面片 $P(s,t)$，其控制顶点与权分别为 $\{P_{ijk},w_{ijk}\}$，其中 $i+j+k=2$，具体取值为

$$\begin{pmatrix} P_{200} \\ P_{110} \\ P_{020} \\ P_{011} \\ P_{002} \\ P_{101} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1.5 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1.5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1.5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} w_{200} \\ w_{110} \\ w_{020} \\ w_{011} \\ w_{002} \\ w_{101} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1.2 \\ 1 \\ 0.8 \\ 1 \\ 1.2 \end{pmatrix},$$

见图 7.

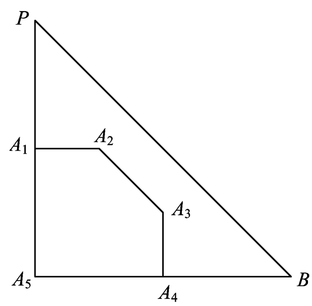

图 6　曲面片的定义域

Fig. 6　The domains of the surfaces

在 $\triangle_{A_5BP}$ 内取定五边形区域 D，其中 D 的顶点按顺时针排列依次为 $A_1=(0,2)$，$A_2=(1,2)$，$A_3=(2,1)$，$A_4=(2,0)$，$A_5=(0,0)$，见图 6. 依据定理

图 7　带控制网的有理三角 Bézier 曲面片

Fig. 7　The rational triangular Bézier patch with control nets

3.2,我们知道 $P(s,t)$ 限制在 D 上的曲面片可以表示成为 $d=2$ 层的有理 S 曲面片,其控制点与权分别为 $\{P_\tau, w_\tau\}$,简记为 $\bar{P}_\tau=(P_\tau, w_\tau)$,其中 $|\tau|=2$,通过计算可得

$$\begin{pmatrix} \bar{P}_{00002} \\ \bar{P}_{00011} \\ \bar{P}_{00020} \\ \bar{P}_{00101} \\ \bar{P}_{00110} \\ \bar{P}_{00200} \\ \bar{P}_{01001} \\ \bar{P}_{01010} \\ \bar{P}_{01100} \\ \bar{P}_{02000} \\ \bar{P}_{10001} \\ \bar{P}_{10010} \\ \bar{P}_{10100} \\ \bar{P}_{11000} \\ \bar{P}_{20000} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0.5455 & 0 & 1.2727 & 1.1 \\ 1 & 0 & 1.2727 & 1.1 \\ 0.5217 & 0.2609 & 1.3913 & 1.15 \\ 0.9767 & 0.2326 & 1.3256 & 1.075 \\ 0.9756 & 0.4634 & 1.3171 & 1.025 \\ 0.2609 & 0.5217 & 1.3913 & 1.15 \\ 0.7143 & 0.4762 & 1.3810 & 1.05 \\ 0.7160 & 0.7160 & 1.3457 & 1.0125 \\ 0.4634 & 0.9756 & 1.3171 & 1.0125 \\ 0 & 0.5455 & 1.2727 & 1.1 \\ 0.4762 & 0.4762 & 1.3810 & 1.05 \\ 0.4762 & 0.7143 & 1.3810 & 1.05 \\ 0.2326 & 0.9767 & 1.3256 & 1.075 \\ 0 & 1 & 1.2727 & 1.1 \end{pmatrix}$$

结果见图 8,图 9.

图 8　凸 5 边形 *D* 上的有理 S 曲面片

Fig. 8　The rational S-patch on the convex 5-polygon *D*

5　结论

本文研究了有理 S 曲面片与有理三角 Bézier 曲面片之间的相互转换问题. 当有理 S 曲面片转换为有理三角 Bézier 曲面片时,有理三角 Bézier 曲面片的控制点与权可以通过有理 S 曲面片的控制点与权表示出来;而当有理三角 Bézier 曲面片转换为有理 S 曲面片时,若 $d \geqslant m$,则有理三角 Bézier 曲面片可以表示为 d 层的有理 S 曲面片,且可以通过有理三角 Bézier 曲面片的 blossoming 算法得到有理 S 曲面片的控制点与权.

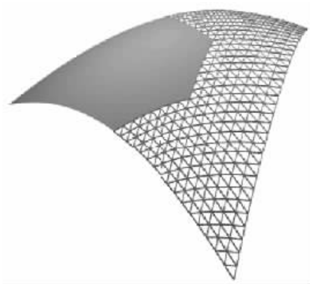

图 9　有理三角 Bézier 曲面片与有理 S 曲面片(填充部分)

Fig. 9　The rational triangular Bézier patch and rational S-patch (filled part)

参考文献(References)

[1] Loop C T, Derose T D. A multisided generalization of Bézier surfaces[J]. ACM Transaction on Graphics, 1989, 8(3): 204-234.

[2] 王国瑾, 汪国昭, 郑建民. 计算机辅助几何设计[M]. 北京: 高等教育-施普林格出版社, 2001: 264-286.

[3] Goldman R, Filip D. Conversion from Bézier rectangles to Bézier triangles[J]. Computer Aided Design, 1987, 19(1): 25-27.

[4] Hu S M. Conversion of a triangular Bézier patch into three rectangular Bézier patches[J]. Computer Aided Geometric Design, 1996, 13(3): 219-226.

[5] WANG Jun. Conversion between Bézier rectangles and Bézier triangles[J]. Mathematica Numberica Sinica, 1993, 15(1): 5-15.
王俊. Bézier 曲面在三角域和矩形域上的互换[J]. 计算数学, 1993, 15(1): 5-15.

[6] LIU Z P, WANG R H. Conversion between triangular and rectangular Bézier surfaces[J]. Journal of Mathematical Research and Exposition, 2006, 26(3): 525-530.
刘志平, 王仁宏. 三角 Bézier 曲面和四边 Bézier 曲面之间的相互转化[J]. 数学研究与评论, 2006, 26(3): 525-530.

[7] Goldman R. Pyramid Algorithms: A Dynamic Programming Approach to Curve and Surface for Geometric Modeling[M]. New York: Elsevier, 2003.

[8] Goldman R. Multisided array of control points for multiside Bézier patches [J]. Computer Aided Geometric Design, 2004, 21(3): 243-261.

[9] Feng Y, Kozak J. The theorem on the B-B polynomial defined on a simplex in the blossoming form[J]. Journal of Computational Mathematics, 1996, 14(1): 64-70.