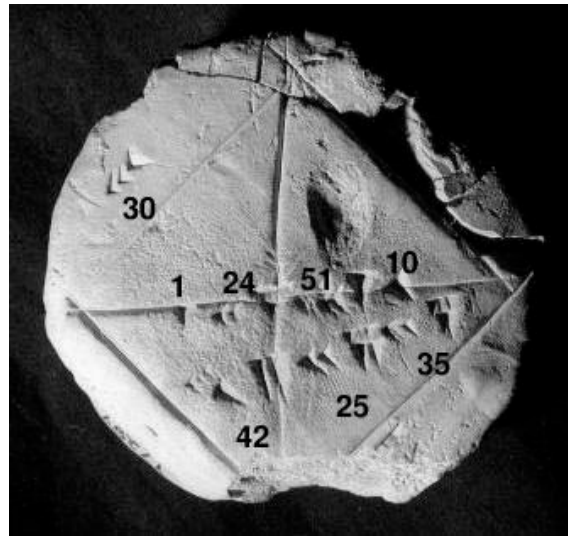


# 计算方法 (A)



童伟华 管理科研楼1205室

E-mail: [tongwh@ustc.edu.cn](mailto:tongwh@ustc.edu.cn)

中国科学技术大学 数学科学学院

<http://math.ustc.edu.cn/>





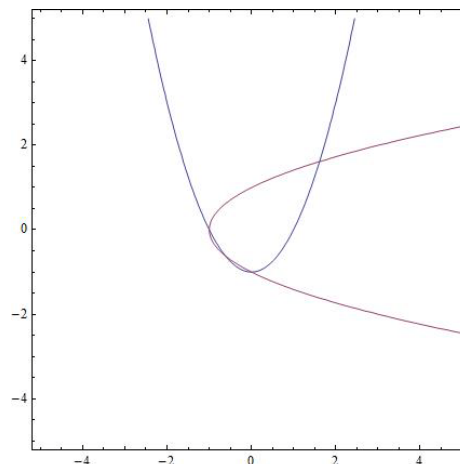
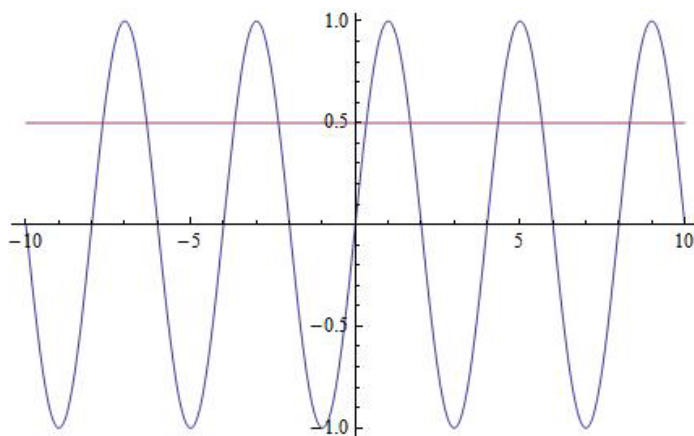
# 第四章 非线性方程求根

# 非线性方程求根

- 非线性科学是当今科学发展的一个重要研究方向
- 非线性方程的求根非常复杂
- 例如：

$$\begin{cases} \sin(\frac{\pi}{2}x) = y \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{无穷组解}$$

$$\begin{cases} y = x^2 + a \\ x = y^2 + a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 & \text{无解} \\ a = \frac{1}{4} & \text{一个解} \\ a = 0 & \text{两个解} \\ a = -1 & \text{四个解} \end{cases}$$



# 非线性方程求根

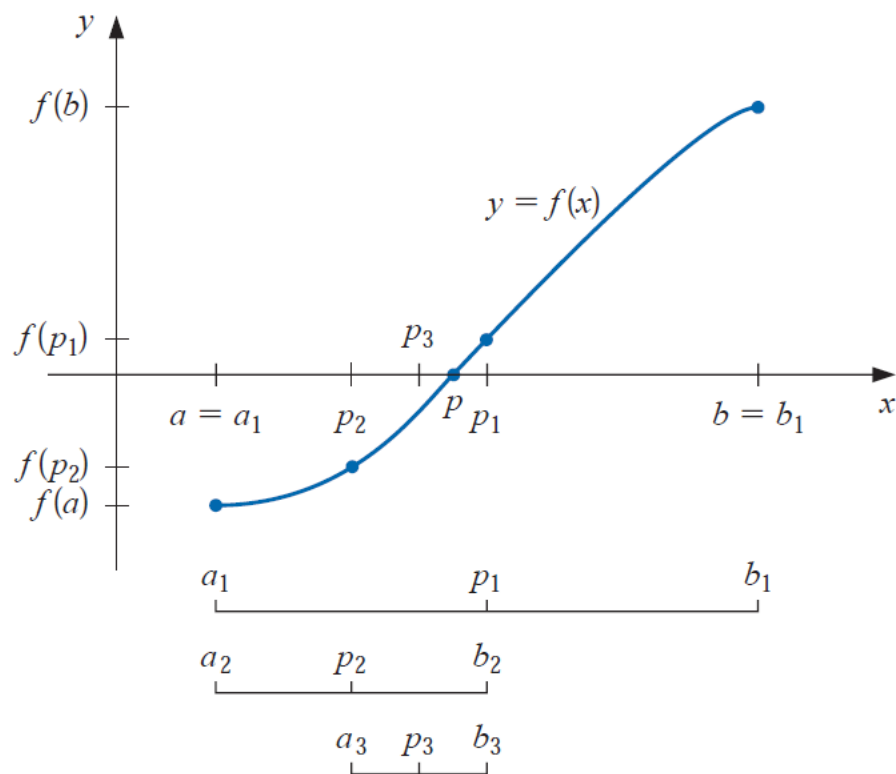


- 非线性方程的根通常不止一个，很难找到所有的解
- 非线性方程求根，通常需要给定初始值或求解范围，用迭代法求解
- （介值定理）设  $f(x)$  是区间  $[a, b]$  上的一个连续函数，那么  $f(x)$  取到  $f(a)$  与  $f(b)$  之间的任何一个值，即如果  $y$  是  $f(a)$  与  $f(b)$  之间的一个数，那么存在一个数  $c \in [a, b]$  使得  $f(c) = y$   
（推论）  $f(a) \cdot f(b) < 0 \Rightarrow \exists x, s.t., f(x) = 0$

# 对分法



- 基于微积分中的介值定理，对区间  $[a, b]$  不断进行细分，缩小搜索区间
- 停止标准： $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon_1$  或  $|f(x)| < \varepsilon_2$



## ■ 对分算法

---

### Algorithm 6 Bisection Algorithm

---

**Input:**

$f(x), a, b, M, \delta, \varepsilon$   
1:  $u \leftarrow f(a);$   
2:  $v \leftarrow f(b);$   
3:  $e \leftarrow b - a;$   
4: **if**  $\text{sign}(u) == \text{sign}(v)$  **then**  
5:     **return false;**  
6: **end if**  
7: **for**  $k = 1$  **to**  $M$  **do**  
8:      $e \leftarrow e/2;$   
9:      $c \leftarrow a + e;$   
10:     $w \leftarrow f(c);$   
11:    **if**  $|e| < \delta$  **or**  $|w| < \varepsilon$  **then**  
12:     **return true;**  
13:    **end if**  
14:    **if**  $\text{sign}(u) \neq \text{sign}(v)$  **then**  
15:      $b \leftarrow c;$   
16:      $v \leftarrow w;$   
17:    **else**  
18:      $a \leftarrow c;$   
19:      $u \leftarrow w;$   
20:    **end if**  
21: **end for**  
22: **return false;**

**Output:**

$a, b, u, v$

---

# 迭代法



- 基本思想：将方程  $f(x)=0$  转换成等价形式  $x=\varphi(x)$ ，给定初值  $x_0$ ，构造迭代序列：

$$x_{k+1} = \varphi(x_k), k = 1, 2, \dots$$

若迭代收敛，即

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(x_k) = x^*,$$

则有  $f(x^*)=0$

- 基本问题：

- 如何构造迭代格式？
- 是否收敛？收敛速度？
- 收敛的条件？（例如是否与初值相关？）

■ **定理：** 设  $\varphi(x)$  在区间  $[a,b]$  上的连续，如果  $\varphi(x)$  满足

(1) 当  $x \in [a,b]$  时，有  $a \leq \varphi(x) \leq b$ ；

(2)  $\varphi(x)$  在  $[a,b]$  上可导，并且存在正数  $L < 1$ ，使对任意的  $x \in [a,b]$ ，都有  $|\varphi'(x)| \leq L$ ，

则存在唯一的点  $x^* \in [a,b]$ ，使得  $x^* = \varphi(x^*)$  成立，而且迭代格式  $x_{k+1} = \varphi(x_k)$  对于任意的初值  $x_0 \in [a,b]$  均收敛于  $\varphi(x)$  的不动点  $x^*$ ，并有误差估计公式

$$|x^* - x_k| \leq \frac{L^k}{1-L} |x_1 - x_0|.$$

■ **构造迭代格式的要害：**

- 等价形式  $x = \varphi(x)$  满足  $|\varphi'(x)| < 1$ ；
- 初始值取自  $x^*$  的充分小邻域；



# 迭代法



■ 定义：设迭代格式  $x_{k+1} = \varphi(x_k)$  收敛到  $\varphi(x)$  的不动点  $x^*$ ，

记  $e_k = x_k - x^*$ ，若  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p} = C > 0$ ，则称该迭代格式为  $p$

阶收敛的，其中  $C$  称为渐进误差常数

# Newton迭代法



- 将函数  $f(x)$  在  $x_0$  处做Taylor展开:

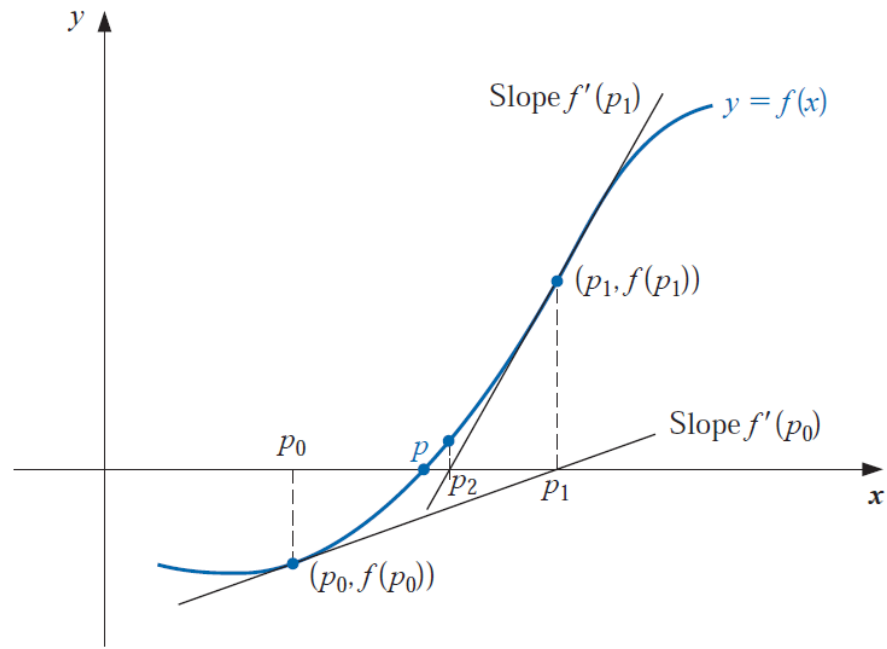
$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots$$

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \approx 0$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

- Newton迭代格式:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 1, 2, \dots$$



# Newton迭代法



- **(收敛性)** 设  $f(x) \in C^2[a, b]$ ,  $x^*$  为  $f(x)$  的单根, 则存在  $\delta > 0$ ,  $C > 0$ , 使得对任意的初值  $x_0 \in (x^* - \delta, x^* + \delta)$ , Newton迭代法是2阶收敛的, 即有  $|x_{n+1} - x^*| \leq C |x_n - x^*|^2$  ( $n \geq 0$ ).
- **(重根情形)** 若  $f(x) \in C^{m+1}[a, b]$ ,  $x^*$  为  $f(x)$  的  $m$  重根, 则存在  $\delta > 0$ ,  $C > 0$ , 使得对任意的初值  $x_0 \in (x^* - \delta, x^* + \delta)$ , Newton迭代法1阶收敛的, 即有  $|x_{n+1} - x^*| \leq C |x_n - x^*|$  ( $n \geq 0$ ).
- **修正:**

$$x_{k+1} = x_k - \frac{mf(x_k)}{f'(x_k)} \quad \Rightarrow \quad |x_{n+1} - x^*| \leq C |x_n - x^*|^2 \quad (n \geq 0).$$

$$\left. \begin{array}{l} \mu(x) = \frac{f(x)}{f'(x)} \\ f(x) = (x - x^*)^m p(x) \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)f'(x_k)}{[f'(x_k)]^2 - f(x_k)f''(x_k)}$$

# Newton迭代法



## ■ Newton迭代算法

---

### Algorithm 7 Newton's Algorithm

---

**Input:**

$f(x), x_0, M, \delta, \varepsilon$

1:  $v \leftarrow f(x_0);$

2: **if**  $|v| < \varepsilon$  **then**

3:     **return true;**

4: **end if**

5: **for**  $k = 1$  **to**  $M$  **do**

6:      $x_1 \leftarrow x_0 - v/f'(x_0);$

7:      $v \leftarrow f(x_1);$

8:     **if**  $|x_1 - x_0| < \delta$  **or**  $|v| < \varepsilon$  **then**

9:         **return true;**

10:     **end if**

11:      $x_0 \leftarrow x_1;$

12: **end for**

13: **return false;**

**Output:**

$x_0, v$

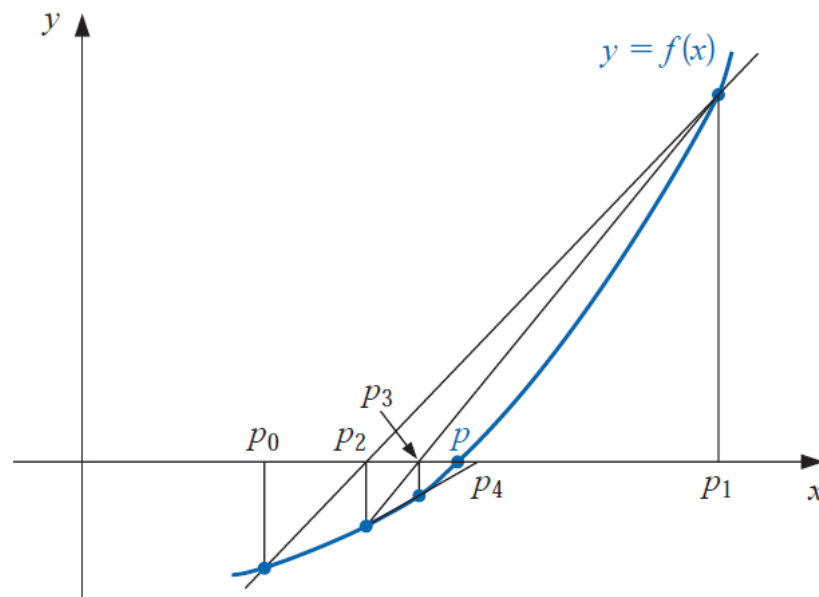
---

# 弦截法



- Newton法：需要求导数
- 思想：用差商代替导数
- 弦截法迭代格式：

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$



# 弦截法



- **(收敛性)** 设  $f(x) \in C^2[a, b]$ ,  $x^*$  为  $f(x)$  的单根, 则存在  $\delta > 0$ ,  $C > 0$ , 使得对任意的初值  $x_0 \in (x^* - \delta, x^* + \delta)$ , 弦截法收敛, 收敛阶为  $(1 + \sqrt{5})/2$ , 即有

$$|x_{n+1} - r| \leq C |x_n - r|^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \quad (n \geq 0).$$

## ■ 弦截迭代算法

---

### Algorithm 8 Secant Algorithm

---

**Input:**

$f(x), a, b, M, \delta, \varepsilon$

```
1:  $u \leftarrow f(a)$ ;  
2:  $v \leftarrow f(b)$ ;  
3: for  $k = 2$  to  $M$  do  
4:   if  $|u| > |v|$  then  
5:      $a \leftrightarrow b$ ;  
6:      $u \leftrightarrow v$ ;  
7:   end if  
8:    $s \leftarrow (b - a)/(v - u)$ ;  
9:    $b \leftarrow a$ ;  
10:   $v \leftarrow u$ ;  
11:   $a \leftarrow a - u * s$ ;  
12:   $u \leftarrow f(a)$ ;  
13:  if  $|u| < \varepsilon$  or  $|b - a| < \delta$  then  
14:    return true;  
15:  end if  
16: end for  
17: return false;
```

**Output:**

$x_0, v$

---

# 非线性方程组的Newton方法



## ■ 考虑二阶非线性方程组

$$\begin{cases} f_1(x, y) = 0 \\ f_2(x, y) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f_1(x_0, y_0) + (x - x_0) \frac{\partial f_1(x_0, y_0)}{\partial x} + (y - y_0) \frac{\partial f_1(x_0, y_0)}{\partial y} \approx 0 \\ f_2(x_0, y_0) + (x - x_0) \frac{\partial f_2(x_0, y_0)}{\partial x} + (y - y_0) \frac{\partial f_2(x_0, y_0)}{\partial y} \approx 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x_0, y_0)}{\partial x} & \frac{\partial f_1(x_0, y_0)}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2(x_0, y_0)}{\partial x} & \frac{\partial f_2(x_0, y_0)}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -f_1(x_0, y_0) \\ -f_2(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

## ■ Newton迭代格式:

$$J(x_k, y_k) \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f_1(x_k, y_k) \\ -f_2(x_k, y_k) \end{pmatrix}, \quad \Delta x = x_{k+1} - x_k, \quad \Delta y = y_{k+1} - y_k$$



# 非线性方程组的Newton方法



## ■ 对于一般的 $n$ 阶非线性方程组

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad F(X) = 0, F = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T, X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$$

## ■ Newton迭代格式:

$$X_{k+1} = X_k - \frac{F(x_k)}{F'(x_k)} = X_k - (J(X_k))^{-1} F(X_k) \Leftrightarrow J(X_k)(X_{k+1} - X_k) = -F(X_k)$$

$$J(X) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$