

## 基于隐式 T 样条的曲面重构算法

童伟华 冯玉瑜 陈发来

(中国科学技术大学数学系 合肥 230026)

(tongwh@ustc.edu.cn)

**摘 要** 提出隐式 T 样条曲面,将 T 网格从二维推广到三维情形,同时利用八叉树及其细分过程,从无结构散乱点数据集构造 T 网格,利用曲面拟合模型将曲面重构问题转化为最优化问题;然后基于隐式 T 样条曲面将最优化问题通过矩阵形式表述,依据最优化原理将该问题转化成线性方程组,通过求解线性方程组解决曲面重构问题;最后结合计算实例进行讨论.该方法能较好地解决曲面重构问题,与传统张量 B 样条函数相比,能有效地减少未知控制系数与计算量.

**关键词** 隐式曲面;曲面重构;T 样条;自适应

**中图法分类号** TP391.4

## A Surface Reconstruction Algorithm Based on Implicit T-Spline Surfaces

Tong Weihua Feng Yuyu Chen Falai

(Department of Mathematics, University of Science and Technology of China, Hefei 230026)

**Abstract** In this paper, we introduce the implicit T-spline surfaces, generalize the definition of T-meshes from 2D to 3D, and construct the T-meshes from the unorganized collection of sampling points based on the octrees and subdivision. By exploiting the surface fitting models, we transform the problem of surface reconstruction to an optimization problem. Then based on the implicit T-spline surfaces, we describe the optimization problem in the matrix forms, and convert it to a linear system by the theory of optimization. By solving the linear system, we get the unknown coefficients and the reconstructed surfaces. Finally, we conclude the paper with some illustrating examples and conclusion remarks. Our method can solve the surface reconstruction problems well; ad hoc it can effectively reduce the unknown coefficients compared with the implicit tensor product B-spline functions.

**Key words** implicit surface; surface reconstruction; T-spline; adaptive

## 0 引 言

近年来,随着快速、准确的三维数字化扫描设备(如激光测距扫描仪,计算机辅助断层扫描仪,接触式探测扫描仪等)的不断涌现,使得获取实物表面的点集采样模型变得相对简单、便宜且准确.将这些采样数据集转换成几何模型的过程称为曲面重构,该技术被广泛应用于计算机辅助几何设计、计算机图形学、医学图像处理、计算机视觉等众多领域.

从数学上看,曲面重构问题是非适定问题(ill-posed Problem),即没有唯一解.而且,由于下述一些因素对重构算法的正确性、有效性、健壮性等提出严峻考验,加剧了该问题的复杂性与难度.主要因素有:

- 1) 实物样件的几何、拓扑信息未知,并且可能非常复杂,如何尽可能地恢复这些信息;
- 2) 样本集非常庞大(如斯坦福大学计算机图形学小组扫描的 Lucy 模型含有 58 241 932 个采样点),对算法的时间、空间复杂度提出巨大挑战;
- 3) 样本集的采样特性(噪声与误差、低采样密

收稿日期:2005-04-28;修回日期:2005-06-10

基金项目:国家重点基础研究发展规划项目(2004CB318000);国家杰出青年基金(60225002);国家自然科学基金(10201030 与 60473132);教育部高校青年教师奖励计划(20010358003)

度、非均匀采样)等因素。

若按曲面表示形式分类,目前曲面重构算法大致可分为 3 种:网格类方法、参数类方法和隐式类方法。

网格类方法大多基于 Voroni 图与 Delaunay 剖分,具有代表性的研究工作有 Edelsbrunner 等<sup>[1]</sup>提出的 3D -shapes 算法;Amenta 等<sup>[2]</sup>提出的 Crust 算法等。尽管该类方法可直接生成网格曲面,但重构出的曲面仅是分片线性连续,且难于处理噪声、非均匀采样等情形。

参数类曲面重构方法中具有代表性的研究工作有 Shepard 的插值方法<sup>[3]</sup>、径向基函数插值方法<sup>[4]</sup>、有限元插值方法<sup>[5]</sup>和层次 B 样条曲面插值方法<sup>[6]</sup>等。但这些算法中,或假设曲面的拓扑结构简单,或需要人为地设定参数网格。对稠密无结构散乱点数据进行参数化是非常困难的问题,研究人员对此展开了大量的研究工作<sup>[7-9]</sup>,但这一问题并未得到很好的解决。

隐式类方法基于隐式曲面,相对于其他 2 类方法具有以下优点:易于表示拓扑结构复杂的几何形体;无需对无结构散乱点数据进行参数化;隐式曲面使得许多操作变得更为简单,如 Boolean 运算、光线跟踪、Offset 操作等。其中具有代表性研究工作有 Muraki<sup>[10]</sup>引入 Blobby Model,通过求解一个非线性最优化问题来确定隐式函数;Hoppe 等<sup>[11]</sup>通过估计局部符号距离函数,取到附近点集切平面的符号距离作为隐函数;Bajaj 等<sup>[12]</sup>首先利用自适应 -shapes 进行三角化,然后在三角域上拟合分片代数曲面;Curless 等<sup>[13]</sup>使用体表示形式从多视角深度图像重构出曲面;Carr 等<sup>[14]</sup>使用全局支集的多元调和径向基函数(radial basis function, RBF)从点云数据重构出光滑的流形曲面及修复不完全采样的曲面;最近,Zhao 等<sup>[15]</sup>提出加权极小曲面模型,使用 Level Set 方法计算符号距离函数,动态拟合点云数据,但若欲得到高精度的重构结果,则需大量增加计算时间与内存消耗;Alexa 等<sup>[16]</sup>提出一套基于投影的方法,其优点是具有局部性、直接生成表面上的点,然而该方法需要在投影集上求解非线性移动最小二乘问题,易导致几何操作非常复杂;Ohtake 等<sup>[17]</sup>引入层次单位分解隐式曲面(multi-level partition of unity, MPU),设计了差自适应算法来计算符号距离函数,该方法虽然能处理稠密无结构散乱点数据集,然而其隐函数缺乏显式的表达式,难以对误差、逼近阶等进行理论分析。

本文提出一类新的隐式曲面——隐式 T 样条曲面,利用其良好的自适应性、紧支性与光滑性,给出基于该类曲面的重构算法。

## 1 隐式 T 样条曲面

在 2003 年 SIGGRAPH 会议上, Sederberg 等<sup>[18]</sup>推广了参数张量积曲面,首次提出 T 样条与 T-NURCCs,解决了在几何外形设计中拼接参数张量积曲面会导致产生过量控制点的问题。T 样条与 T-NURCCs 具有良好的自适应性,较传统的参数张量积曲面能更有效、灵活地表示曲面。在 2004 年 SIGGRAPH 会议上, Sederberg 等<sup>[19]</sup>又提出 T 样条简化与局部细分算法,进一步完善了 T 样条的理论框架。

传统参数张量积曲面通过规则的矩形网格控制点定义,而隐式张量积曲面通过空间长方体控制系数定义。作为参数张量积曲面的推广,基于点的 B 样条(point-based B-splines, PB)样条通过更为一般的控制点集定义,在其每个控制点构造基函数。T 样条作为 PB 样条的特例,通过满足一定规则的 T 网格定义,其每个控制点所定义的基函数之间满足一定的关系,从而使得 T 样条既具备传统张量积曲面的许多良好特性(如紧支性、连续性),又增强了表示形式的灵活性与有效性,较传统张量积方法更为灵活、适用于更一般的拓扑结构。特别地,该曲面很容易将不同节点序列的张量积 B 样条曲面片拼接成一片 T 样条曲面,而传统方法是难以做到的<sup>[18]</sup>。T-NURCCs 则是 T 样条与 Catmull-Clark 曲面的超集,具有局部细分的特性,该方法使用稳定的细分格式,其极限曲面是  $C^2$  连续的(除奇异点与特征点外)。

隐式曲面通过隐函数表示  $f: \mathbb{C}R^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , 其中  $\mathbb{R}$  表示实数集,则称  $S = f^{-1}(0) = \{p \mid f(p) = 0\}$  为隐式曲面。特别地,若取函数  $f$  为 T 样条函数,则称为隐式 T 样条曲面。具体地,隐式 T 样条曲面通过函数

$$f(p) = \frac{\sum_{i=1}^M c_i B_i(p)}{\sum_{i=1}^M B_i(p)}, \quad p = (x, y, z)$$

定义。其中  $c_i$  为第  $i$  个控制点处的系数;  $B_i(p)$  为基函数,可通过 T 网格生成。

将隐式 T 样条曲面应用于曲面重构的关键问

题如下:

1) 构造合理的 T 网格;

2) 确定控制系数  $c_i$ .

解决上述问题后,曲面的重构问题将迎刃而解.

## 2 三维 T 网格

借鉴 Sederberg 等<sup>[18]</sup>的二维 T 网格定义,我们将其推广到三维情形.

**定义 1.** 节点区间. 对样条控制网格的每一条边赋予非负整数值,称其为节点区间.

节点区间用于传递节点信息,其值等于相邻 2 个节点值的差. 对于第 1 个和最后一个节点,需要各增加 1 条虚边,如图 1 所示. 使用节点向量来表示 T 样条的节点信息的优点是允许给曲面赋予局部节点坐标.

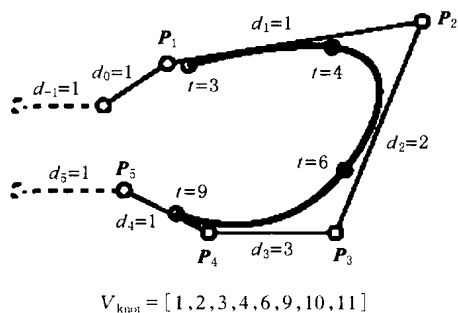


图 1 节点区间与节点向量

**定义 2.** 隐式 PB 样条曲面. 对于空间中给定的控制点集  $\{p_i\}_{i=1}^M$ , 赋予相应的控制系  $\{c_i\}_{i=1}^M$  与节点向量  $\{r_i, s_i, t_i\}_{i=1}^M$ , 则 PB 样条函数定义为

$$P(x, y, z) = \frac{\sum_{i=1}^M c_i B_i(x, y, z)}{\sum_{i=1}^M B_i(x, y, z)}, (x, y, z) \in D,$$

其中,  $B_i(x, y, z) = N_{i0}^d(x) N_{i0}^d(y) N_{i0}^d(z)$ ,  $N_{i0}^d(x), N_{i0}^d(y), N_{i0}^d(z)$  为  $d$  次 B 样条基函数; 相应节点向量  $r_i = [r_{i0}, r_{i1}, \dots, r_{id+1}]$ ,  $s_i = [s_{i0}, s_{i1}, \dots, s_{id+1}]$ ,  $t_i = [t_{i0}, t_{i1}, \dots, t_{id+1}]$ .

一般地, PB 样条的控制点之间互相独立, 无拓扑联系, 因此 PB 样条非常灵活. 然而它在实际使用中并不方便, 因为需要对每个控制点赋予节点向量, 且需仔细地选择节点序列, 以避免出现定义域空洞和不光滑现象等. 为克服这些缺陷, Sederberg 等<sup>[18]</sup>提出 PB 样条的特例——T 样条, 其控制点集满足一定的拓扑关系, 并通过 T 网格描述.

给定空间中的 T 网格之后, 依据本文算法确定

每个控制点(T 网格中的顶点)的节点向量, 按照 PB 样条函数的定义确定

$$f(x, y, z) = \frac{\sum_{i=1}^M c_i B_i(x, y, z)}{\sum_{i=1}^M B_i(x, y, z)}, (x, y, z) \in D,$$

其中  $B_i(x, y, z)$  为控制点  $p_i$  处定义的基函数, 则函数  $f$  所定义的曲面称为隐式 T 样条曲面.

粗略地讲, T 网格就是允许出现 T 接点的矩形或长方体网格. 在二维情形, 将 T 网格中平行于  $s$  和  $t$  轴的线段分别称为  $s$ -边,  $t$ -边; T 网格中的顶点称为 T 接点, 如果该顶点被 1 条  $s$ -边与 2 条  $t$ -边或者 2 条  $s$ -边与 1 条  $t$ -边共享. 对 T 网格中的每条边赋予节点区间, 并满足如下规则:

**规则 1.** 对任何面的对边节点, 其区间和必须相等. 如图 2 所示, 面  $F$  满足  $d_2 + d_6 = d_7$ ,  $e_6 + e_7 = e_8 + e_9$ .

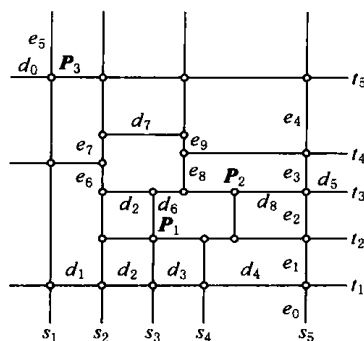


图 2 二维 T 网格

**规则 2.** 如果面中某边的 T 接点可与对边的 T 接点连成 1 条边, 从而将该面分裂成 2 个面, 且不违反规则 1, 那么该边必须被 T 网格所包含.

在三维情形, T 网格中平行于  $r$ ,  $s$  和  $t$  轴的矩形分别称为  $r$ -矩形,  $s$ -矩形和  $t$ -矩形; 若 1 个顶点称为 T 接点, 如果该顶点满足下列条件之一:

**情形 1.** 被 1 个  $r$ -矩形与 2 个  $s$ -矩形, 2 个  $t$ -矩形, 或 1 个  $s$ -矩形与 2 个  $r$ -矩形, 2 个  $t$ -矩形, 或 1 个  $t$ -矩形, 2 个  $s$ -矩形共享, 如图 3 中的接点 1 和图 4 中的接点 3 所示.

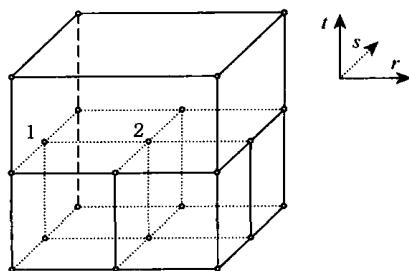


图 3 三维 T 网格 a

情形 2. 被 4 个  $r$ -矩形与 2 个  $s$ -矩形, 2 个  $t$ -矩形, 或 4 个  $s$ -矩形与 2 个  $r$ -矩形, 2 个  $t$ -矩形, 或 4 个  $t$ -矩形与 2 个  $r$ -矩形, 2 个  $s$ -矩形共享, 如图 4 中的接点 2 所示.

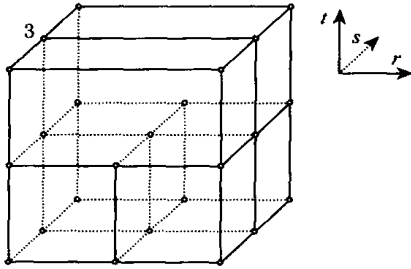


图 4 三维 T 网格  $b$

同样, 对三维 T 网格中每个面的每条边赋予节点区间, 并要求网格中每个长方体的每个面都必须满足规则 1 和规则 2.

对 T 网格中的每个控制点  $p_i$  需要计算节点向量  $r_i, s_i$  和  $t_i$ , 从而确定基函数  $B_i(x, y, z)$ . 在二维情形下, 以  $d=4$  为例, 控制点  $p_i$  的节点坐标为  $(s_{i2}, t_{i2})$ , 那么节点  $s_{i3}$  和  $s_{i4}$  通过射线  $R(\cdot) = (s_{i2} + \cdot, t_{i2})$  确定, 其值为 2 个最先与射线相交  $s$ -边的交点, 其他  $s$  和  $t$  节点的确定方法类似. 如图 2 所示点  $P_1$ , 其  $s_i = [s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 - d_8]$ ,  $t_i = [t_1 - e_0, t_1, t_2, t_3, t_4 + e_9]$ ; 点  $P_2$ , 其  $s_i = [s_3, s_3 + d_6, s_5 - d_8, s_5, s_5 + d_5]$ ,  $t_i = [t_1, t_2, t_3, t_4, t_5]$ . 类似地, 在三维情形下, 节点向量通过射线与  $r$ -矩形、 $s$ -矩形和  $t$ -矩形的交点确定.

理论上 T 网格可以是任意的, 但选取合理的剖分——采样点越密集处需插入越多控制点, 能大幅度地提高重构曲面的质量, 因此我们根据无结构散乱点数据集的采样特性构造 T 网格. 具体地, 基于八叉树结构, 对无结构散乱点数据的最小包围盒依据采样点分布情况, 如单元内样本点个数、最大细分层数等进行逐层细分, 在细分过程中构建 T 网格; 当达到最大细分层次或者单元内包含的样本点少于指定个数时, 细分过程停止. 当细分过程终止的时, 返回 T 网格的所有信息; 然后计算出所有控制点坐标及其节点向量.

不难证明该方法所生成的网格符合 T 网格定义. 通过上述方法可生成比较合理的 T 网格, 特别是对于自适应采样的数据集.

### 3 数学模型

#### 3.1 曲面重构

一般地, 曲面重构问题可陈述为: 对空间  $R^3$  中的真实曲面  $S$  进行采样, 可得到无结构散乱点集  $P = \{p_1, p_2, \dots, p_U\}$  及对应的法向量  $N = \{n_1, n_2, \dots, n_U\}$ , 其中法向量用于给曲面向向. 我们的目标是: 根据采样点集  $P$  与法向量  $N$ , 确定曲面  $S$  以最大的程度逼近未知曲面  $S$ . 用数学语言表述如下: 需要寻找函数  $f: R^3 \rightarrow R$ , 使得  $f(p_u) = 0$  且  $f(p_u) n_u$ , 其中  $u = 1, 2, \dots, U$ .

从数学上看, 该问题是病态问题, 即解是不唯一的. 因此, 如果期望从众多解中找到满意解, 就需要建立合适的数学模型.

#### 3.2 最优化模型

为寻求满意解, 自然想到建立合适的优化模型, 从而在某种意义下确定唯一解. 具体地, 将曲面重构问题转述为最优化问题

$$F(c) = L(c) + \lambda_1 N(c) + \lambda_2 G(c) \quad \min(1)$$

其中,  $c$  表示函数所有未知系数  $\{c_i\}_{i=1}^M$ ;  $\lambda_1$  表示法向项权值;  $\lambda_2$  表示规则项权值;  $L(c)$  表示刻画原曲面  $S$  与目标曲面  $S$  之间的代数距离

$$L(c) = \sum_{u=1}^U [f(p_u)]^2 \quad (2)$$

$p_u = (p_x, p_y, p_z) \in R^3$ ;  $N(c)$  反映原曲面  $S$  与目标曲面  $S$  之间的法向偏差

$$N(c) = \sum_{u=1}^U [f(p_u) - n_u]^2 = \sum_{u=1}^U [f_x(p_u) - n_{ux}]^2 + \sum_{u=1}^U [f_y(p_u) - n_{uy}]^2 + \sum_{u=1}^U [f_z(p_u) - n_{uz}]^2 \quad (3)$$

$n_u = (n_{ux}, n_{uy}, n_{uz})$ ;  $G(c)$  表示光滑项或规则项,

$$G(c) = \int (f_{xx}^2 + f_{yy}^2 + f_{zz}^2 + 2f_{xy}^2 + 2f_{xz}^2 + 2f_{yz}^2) dx dy dz \quad (4)$$

使得目标曲面保持紧致, 其详细解释见文献[20].

若取  $f$  为 T 样条函数, 那么  $F(c)$  是关于所有未知系数  $c$  的二次目标函数. 依据最优化原理, 可通过求解线性方程组得到所有未知系数  $c$ .

## 4 曲面重构算法

下面给出式(1)的矩阵表示形式,依据最优化原理,将该问题转化成线性方程组,并通过求解该线性方程组得到所有未知系数,从而解决曲面重构问题.

### 4.1 $L(c)$ 项的矩阵形式

$L(c)$  项可写成

$$L(c) = \sum_{u=1}^U [f(p_u)]^2 = [c_1 \dots c_M] \cdot \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & \dots & L_{1M} \\ L_{21} & L_{22} & & L_{2M} \\ \dots & & & \dots \\ L_{M1} & L_{M2} & \dots & L_{MM} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \dots \\ c_M \end{bmatrix} \quad (5)$$

其中,  $s, t = 1, 2, \dots, M$ ,

$$L_{st} = \sum_{u=1}^U \frac{B_s(p_u) \cdot B_t(p_u)}{\left( \sum_{i=1}^M B_i(p_u) \right)^2}.$$

### 4.2 $N(c)$ 项的矩阵形式

$N(c)$  项可写成

$$N(c) = \sum_{u=1}^U f(p_u) \cdot n_u^2 = [c_1 \dots c_M] \cdot \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} & \dots & N_{1M} \\ N_{21} & N_{22} & & N_{2M} \\ \dots & & & \dots \\ N_{M1} & N_{M2} & \dots & N_{MM} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \dots \\ c_M \end{bmatrix} \quad (6)$$

其中,  $s, t = 1, 2, \dots, M$ ;

$$N_{st} = \sum_{u=1}^U (d_{su} \cdot d_{tu} + e_{su} \cdot e_{tu} + f_{su} \cdot f_{tu}),$$

$$d_{su} = \frac{\partial \left( \frac{B_s(p_u)}{\sum_{i=1}^M B_i(p_u)} \right)}{\partial x}, d_{tu} = \frac{\partial \left( \frac{B_t(p_u)}{\sum_{i=1}^M B_i(p_u)} \right)}{\partial x},$$

$$e_{su} = \frac{\partial \left( \frac{B_s(p_u)}{\sum_{i=1}^M B_i(p_u)} \right)}{\partial y}, e_{tu} = \frac{\partial \left( \frac{B_t(p_u)}{\sum_{i=1}^M B_i(p_u)} \right)}{\partial y},$$

$$f_{su} = \frac{\partial \left( \frac{B_s(p_u)}{\sum_{i=1}^M B_i(p_u)} \right)}{\partial z}, f_{tu} = \frac{\partial \left( \frac{B_t(p_u)}{\sum_{i=1}^M B_i(p_u)} \right)}{\partial z},$$

$$b_s = \sum_{u=1}^U (d_{su} \cdot n_{ux} + e_{su} \cdot n_{uy} + f_{su} \cdot n_{uz}).$$

为便于计算,可将  $d_{su}, d_{tu}, e_{su}, e_{tu}, f_{su}$  和  $f_{tu}$  展开,如

$$d_{su} = \left\{ \frac{\partial B_s(p_u)}{\partial x} \cdot \left( \sum_{i=1}^M B_i(p_u) \right) - B_s(p_u) \cdot \left( \sum_{i=1}^M \frac{\partial B_i(p_u)}{\partial x} \right) \right\} \left\{ \left( \sum_{i=1}^M B_i(p_u) \right)^2 \right\}.$$

### 4.3 $G(c)$ 项的矩阵形式

$G(c)$  项可写成

$$G(c) = (f_{xx}^2 + f_{yy}^2 + f_{zz}^2 + 2f_{xy}^2 + 2f_{xz}^2 + 2f_{yz}^2) dx dy dz = [c_1 \dots c_M] \cdot \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & \dots & G_{1M} \\ G_{21} & G_{22} & & G_{2M} \\ \dots & & & \dots \\ G_{M1} & G_{M2} & \dots & G_{MM} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \dots \\ c_M \end{bmatrix} \quad (7)$$

其中,  $s, t = 1, 2, \dots, M$ ,

$$G_{st} = o_{st} + p_{st} + q_{st} + 2u_{st} + 2v_{st} + 2w_{st},$$

$$o_{st} = \frac{\partial^2 \left( \frac{B_s(p)}{\sum_{i=1}^M B_i(p)} \right)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 \left( \frac{B_t(p)}{\sum_{i=1}^M B_i(p)} \right)}{\partial x^2} dx dy dz,$$

$$p_{st} = \frac{\partial^2 \left( \frac{B_s(p)}{\sum_{i=1}^M B_i(p)} \right)}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 \left( \frac{B_t(p)}{\sum_{i=1}^M B_i(p)} \right)}{\partial y^2} dx dy dz,$$

$$q_{st} = \frac{\partial^2 \left( \frac{B_s(p)}{\sum_{i=1}^M B_i(p)} \right)}{\partial z^2} \cdot \frac{\partial^2 \left( \frac{B_t(p)}{\sum_{i=1}^M B_i(p)} \right)}{\partial z^2} dx dy dz,$$

$$u_{st} = \frac{\partial^2 \left( \frac{B_s(p)}{\sum_{i=1}^M B_i(p)} \right)}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial^2 \left( \frac{B_t(p)}{\sum_{i=1}^M B_i(p)} \right)}{\partial x \partial y} dx dy dz,$$

$$v_{st} = \frac{\partial^2 \left( \frac{B_s(p)}{\sum_{i=1}^M B_i(p)} \right)}{\partial x \partial z} \cdot \frac{\partial^2 \left( \frac{B_t(p)}{\sum_{i=1}^M B_i(p)} \right)}{\partial x \partial z} dx dy dz,$$

$$w_{st} = \frac{\partial^2 \left( \frac{B_s(p)}{\sum_{i=1}^M B_i(p)} \right)}{\partial y \partial z} \cdot \frac{\partial^2 \left( \frac{B_t(p)}{\sum_{i=1}^M B_i(p)} \right)}{\partial y \partial z} dx dy dz.$$

注意到上述项均为有理函数的积分,而若采用三维高斯积分,将会大大提高计算量.在一般情形下,  $B_i(p)$  变化较小,因此实际计算中,可以将有理项的分母忽略,从而将积分项转化成张量积形式,以减少计算量.

#### 4.4 矩阵复合 因目标函数

$$F(c) = L(c) + {}_1N(c) + {}_2G(c),$$

故该最优化问题可通过

$$\frac{\partial F(c)}{\partial c} = 0 \Rightarrow \frac{\partial L(c)}{\partial c} + {}_1\frac{\partial N(c)}{\partial c} + {}_2\frac{\partial G(c)}{\partial c} = 0$$

求解,或写成

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1M} \\ A_{21} & A_{22} & & A_{2M} \\ \dots & & & \dots \\ A_{M1} & A_{M2} & \dots & A_{MM} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \dots \\ c_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}_1b_1 \\ \dots \\ {}_Mb_M \end{bmatrix} \quad (8)$$

其中,  $s, t = 1, 2, \dots, M$ ;  $A_{st} = L_{st} + {}_1N_{st} + {}_2G_{st}$ .

#### 4.5 求解复合矩阵

对于一般线性方程组,有许多有效的数值解法,如对规模较小的方程组  $M = 2000$ ,可选用高斯消去法或 LU 分解法.若矩阵 A 正定,则可选用更为有效的 Cholesky 分解法;若矩阵是奇异的或数值奇异的,则使用 QR 分解或 SVD 分解法.

对于大规模的稀疏线性方程组,应采用更为有效的数值算法.因为 T 样条继承了 B 样条的局部支集性质,所以系数矩阵  $(A_{st})_{s,t=1}^M$  是稀疏矩阵,特别是当 T 网格剖分密集的时,我们推荐使用稳定双共

扼梯度方法或广义最小冗余法,结合不完全分解预条件方法<sup>[21]</sup>,来求解线性方程组(8).

### 5 实例与讨论

隐式曲面的常用可视化方法包括多边形化、等值面提取、光线跟踪、体绘制等<sup>[22]</sup>.本文选用 Bloomenthal 的多边形化算法,该算法不仅简单且具有良好的连续性.对于高质量的绘制,推荐自适应多边形化算法<sup>[23-25]</sup>或光线跟踪算法<sup>[26]</sup>.

#### 1) 均匀稠密采样

以具有多连通分支的数据集为例,其取 2 个不相交圆环,如图 5 所示,按照参数均匀采样得到 16 000 个样本点,利用第 4 节中的基于隐式 T 样条曲面重构算法,取最大细分层数为 5,样条阶数为 4,每个单元指定样本数为 12 及 2 个种子点,计算结果如图 6 和 7 所示.

#### 2) 均匀稀疏采样

以均匀稀疏采样数据集为例,其为如图 8 所示实物的采样数据集,取最大细分层数为 6,样条阶数为 4,每个单元指定样本数为 8,计算结果如图 9 和 10 所示.

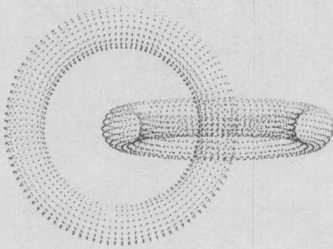


图 5 双圆环的 16 000 个样本点

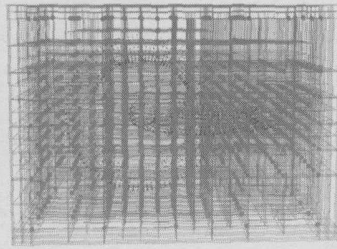


图 6 双圆环相应的 T 网格

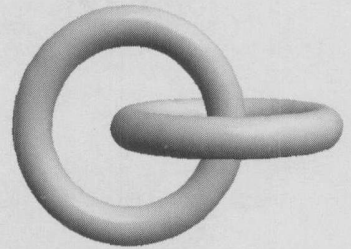


图 7 重构出的双圆环曲面

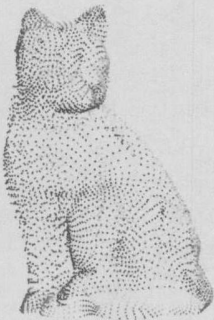


图 8 猫外表面的 4 539 个样本点

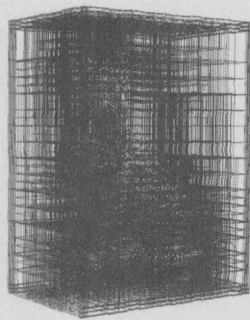


图 9 猫相应的 T 网格

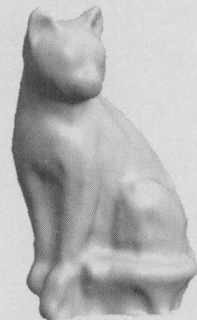


图 10 重构出的猫外表面

#### 3) 自适应采样

以自适应采样数据集为例,其为如图 11 所示实物的采样数据集,取最大细分层数为 6,样条阶数为 4,每个单元指定样本数为 8,它们的计算结果如图 12 和 13 所示.

#### 4) 不完全或非均匀(非自适应)采样

以非均匀采样数据集为例,其为实物的采样数据集,模型左半部分密集采样,右半部分稀疏采样,如图 14 所示,取最大细分层数为 6,样条阶数为 4,每个单元指定样本数为 32,它们的计算结果如图 15

和 16 所示.

使用隐式 T 样条曲面较隐式张量积 B 样条曲面能有效减少未知控制系数个数与计算量:

a. 以 2 个不相交圆环为例(如图 5 所示),若采样同样的细分方法,隐式张量积 B 样条需要求解 4 680(缩减后为 3 047)个未知系数,而隐式 T 样条曲面只需求解 1 781 个未知系数;

b. 以均匀稀疏采样集(如图 8 所示),若采样同样的细分方法,隐式张量积 B 样条需要求解 27 900(缩减后为 12 986)个未知系数,而隐式 T 样条曲面只需求解 4 811 个未知系数.

然而,因隐式 T 样条曲面的支集不均匀且含有理项,导致部分区域所重构出的曲面不够理想.

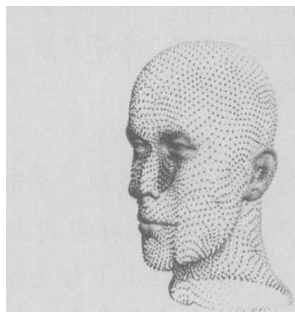


图 11 人头模型的 6737 个样本点

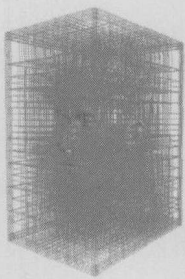


图 12 人头模型相应的 T 网格



图 13 重构出的人头模型曲面

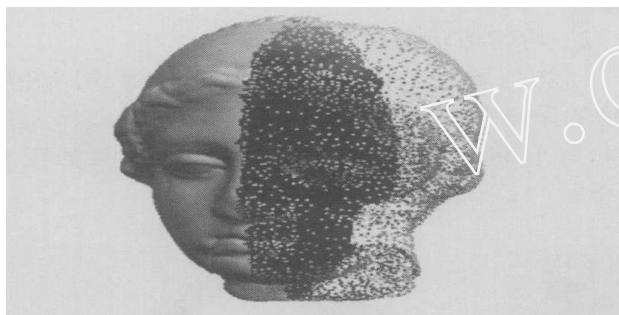


图 14 Igea 模型的 16000 个样本点

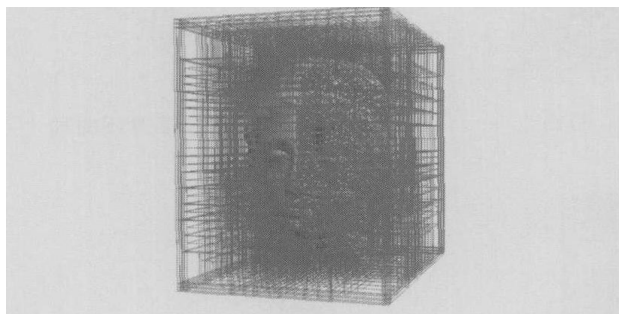


图 15 Igea 模型相应的 T 网格

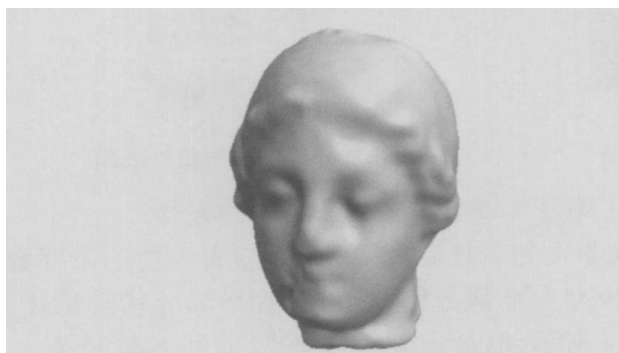


图 16 重构出的 Igea 模型

## 6 小 结

本文算法能较好地解决曲面重构问题,特别是能有效地减少未知控制系数与计算量(较传统张量积 B 样条函数),得到较紧凑的隐式曲面表示形式.然而仍然存在如下一些问题,有待进一步研究:

- 1) 给定空间中一点,如何快速确定隐式 T 样条曲面中所有的基函数,其支集包含该点;
- 2) 如何构造更为合理的 T 网格,以提高重构曲面的质量;
- 3) 如何快速地计算隐式 T 样条基函数的三维积分.

## 参 考 文 献

- [1] Edelsbrunner H, Mücke E P. Three-dimensional alpha shapes [J]. ACM Transactions on Graphics, 1994, 13(1): 43-72
- [2] Amenta N, Bern M, Kamvysselis M. A new Voronoi-based surfaces reconstruction algorithm [C] //Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series, ACM SIGGRAPH, Orlando, Florida, 1998: 415-422
- [3] Shepard D. A two dimensional interpolation function for irregular spaced data [C] //Proceeding of the 23rd ACM National Conference, Washington D C, 1968: 517-524
- [4] Powell M J D. A review of algorithms for thin plate spline interpolation in two dimensions [C] //Proceedings of the International Workshop, Advanced Topics in Multivariate Approximation, Montecatini Terme, 1995: 303-322

- [5] Hoschek J, Lasser D. Fundamentals of computer aided geometric design [M]. Wellesley: A K Peters, 1993: 399-421
- [6] Forsy D, Bartels R. Surface fitting with hierarchical splines [J]. ACM Transactions on Graphics, 1995, 14(2): 134-161
- [7] Ma Y, Kruth J. Parameterization of randomly measured points for least squares fitting of B-spline curves and surfaces [J]. Computer-Aided Design, 1995, 27(9): 663-675
- [8] Krishnamurthy V, Levoy M. Fitting smooth surfaces to dense polygon meshes [C] //Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series, ACM SIGGRAPH, New Orleans, Louisiana, 1996: 313-324
- [9] Eck M, Hoppe H. Automatic reconstruction of B-spline surfaces of arbitrary topological type [C] //Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series, ACM SIGGRAPH, New Orleans, Louisiana, 1996: 325-334
- [10] Muraki S. Volumetric shape description of range data using "Blobby Model" [C] //Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series, ACM SIGGRAPH, Los Angeles, California, 1991: 227-235
- [11] Hoppe H, deRose T, Duchamp T, *et al.* Surface reconstruction from unorganized points [C] //Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series, ACM SIGGRAPH, Chicago, Illinois, 1992: 71-78
- [12] Bajaj C L, Bernardini F, Xu G. Automatic reconstruction of surfaces and scalar fields from 3D scans [C] //Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series, ACM SIGGRAPH, Los Angeles, California, 1995: 109-118
- [13] Curless B, Levoy M. A volumetric method for building complex models from range images [C] //Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series, ACM SIGGRAPH, New Orleans, Louisiana, 1996: 303-312
- [14] Carr J C, Beatson R K, Cherrle J B, *et al.* Reconstruction and representation of 3D objects with radial basis functions [C] //Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series, ACM SIGGRAPH, Los Angeles, California, 2001: 67-76
- [15] Zhao H, Osher S. Visualization, analysis and shape reconstruction of unorganized data sets [M] //Osher S, Paragios N eds. Geometric Level Set Methods in Imaging, Vision and Graphics. New York: Springer-Verlag, 2003
- [16] Alexa M, Behr J, *et al.* Point set surfaces [C] //Proceedings of the conference on Visualization, San Diego, California, 2001: 21-28
- [17] Ohtake Y, Belyaev A G. Dual primal mesh optimization for polygonized implicit surfaces [C] //Proceedings of the 7th ACM Symposium on Solid Modeling and Applications, Saarbrücken, 2002: 171-178
- [18] Sederberg T W, Zheng J, Bakenov A, *et al.* T-splines and T-NURCCs [C] //Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series, ACM SIGGRAPH, San Diego, California, 2003: 477-484
- [19] Sederberg T W, Cardon D L, Finnigan G T, *et al.* T-spline simplification and local refinement [C] //Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series, ACM SIGGRAPH, Los Angeles, California, 2004: 276-283
- [20] Jüttler B, Felis A. Least-squares fitting of algebraic spline surfaces [J]. Advances in Computational Mathematics, 2002, 17(1): 135-152
- [21] Golub G, van Loan C F. Matrix computations [M]. 3rd ed. Baltimore: John Hopkins University Press, 1996
- [22] Bloomenthal J, Bajaj C, Blinn J, *et al.* Introduction to implicit surfaces [M]. Burlington: Morgan Kaufmann, 1997
- [23] Ju T, Losasso F, Schaefer S, *et al.* Dual contouring of hermite data [C] //Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series, ACM SIGGRAPH, San Antonio, Texas, 2002: 339-346
- [24] Ohtake Y, Belyaev A, Alexa M, *et al.* Multi-level partition of unity implicits [C] //Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series, ACM SIGGRAPH, San Diego, California, 2003: 463-470
- [25] Ronald J B, Suffer K G, Kevin G. Visualization of implicit surfaces [J]. Computer and Graphics, 2001, 25(1): 89-107
- [26] Hart J C. Sphere tracing: A geometric method for the antialiased ray tracing of implicit surfaces [J]. The Visual Computer, 1996, 12(10): 527-545



童伟华 男,1978年生,博士,讲师,主要研究方向为计算机图形学、计算机辅助几何设计。



冯玉瑜 男,1940年生,教授,博士生导师,主要研究方向为多变量逼近论、计算机辅助几何设计(fengyy@ustc.edu.cn)。



陈发来 男,1966年生,博士,教授,博士生导师,主要研究方向为计算机辅助几何设计、计算机图形学(chenfl@ustc.edu.cn)。