

求解网格奇点的曲率传输方法

江宸, 童伟华*

(中国科学技术大学数学科学学院 合肥 230026)
(tongwh@ustc.edu.cn)

摘要: 为了降低网格在参数化过程中产生的扭曲, 提出一种基于曲率传输求解网格奇点个数和位置的方法. 首先, 通过求解 Yamabe 方程获得网格顶点的共形缩放因子, 利用共形缩放因子的持续性确定第 1 部分的奇点, 并计算基于该奇点集合的参数化扭曲; 然后, 根据参数化扭曲确定第 2 部分的奇点, 并优化奇点的位置; 最后, 顶点曲率集中到奇点上计算出最优传输代价, 通过不断地更新奇点位置, 使上述最优传输代价达到最小, 得到最终奇点分布. 经过计算大量的网格, 实验结果表明, 与其他曲率方法以及近几年的方法相比, 利用该方法确定的奇点可以有效地降低网格参数化带来的扭曲.

关键词: 数字几何处理; 参数化; 奇点; 共形缩放因子; 最优传输
中图法分类号: TP391.41 **DOI:** 10.3724/SP.J.1089.2021.18786

Curvature Transport Method for Solving Mesh Singularities

Jiang Chen and Tong Weihua*

(School of Mathematical Sciences, University of Science and Technology of China, Hefei 230026)

Abstract: Aiming at reducing angular and area distortions induced by 3D mesh parameterization, a curvature transport-based method is presented to determine the number of cone singularities and their positions. First, the Yamabe equation is solved to obtain the conformal scaling factors and persistence. Conformal scaling persistence can figure out the first part of cone singularities, which is used to calculate distortions of the mapping. Next, the second part of cone singularities is determined by the distortion of parameterization. The positions of cone singularities are also optimized. Finally, the optimal transport cost is solved by concentrating curvature per vertex on cone singularities, and the positions of cone singularities are iteratively updated until a given threshold is satisfied. Compared with some state-of-the-art methods, the experimental results show that proposed method can efficiently reduce the distortion of parameterization.

Key words: digital geometry processing; parameterization; singularity; conformal scaling factor; optimal transport

随着数字化扫描技术的快速发展, 三维模型
表示、处理及分析等形成了一个新的研究方向, 即
数字几何处理, 在近年来得到了广泛的研究. 在数
字几何处理中, 主要的研究内容包括网格降噪^[1]、
网格参数化^[2]、网格变形^[3]、网格简化^[4]和重新网

格化^[5]等. 其中, 网格参数化在纹理映射、重新网
格化、网格变形、网格对应等领域有重要应用,
是基础性的问题. 因此, 如何提升网格参数化质
量、降低参数化扭曲一直是图形学领域的热门研
究方向.

收稿日期: 2020-11-21; 修回日期: 2021-04-13. 基金项目: 国家自然科学基金面上项目(61877056); 安徽省自然科学基金(1908085QA11). 江宸(1996—), 男, 硕士研究生, 主要研究方向为计算机图形学、数字几何处理; 童伟华(1978—), 男, 博士, 硕士生导师, 论文通讯作者, 主要研究方向为计算机辅助几何设计、计算机图形学、数字几何处理、稀疏表示与优化.

网格参数化若按拓扑分类,可大致分为平面参数化、球面参数化^[6]和高亏格曲面参数化。在平面参数化中,其可细分为固定边界参数化^[7-8]与自由边界参数化^[9]。根据目标能量的不同,其又可分为等距参数化、等积参数化和共形参数化等^[10]。一个好的参数化通常需要满足无翻转、无自交和低扭曲等要求。例如,在纹理映射应用中,若三角面片出现翻转,会导致参数化网格定向不一致,纹理将无法正确显示,即出现纹理翻转,甚至消失。网格自交会导致纹理显示重复,而高扭曲会使局部纹理严重失真。因大多数三维网格的高斯曲率均不恒等于 0,利用微分几何的相关定理可知,同时做到无翻转、无自交和无扭曲是不可能的。因此,需要评估 3 种要求对参数化网格的影响。在大多数应用中,一般需要参数化网格满足无翻转和无局部自交,而全局自交较少要求;另外,一般也不要求参数化扭曲为 0,而只要求将扭曲维持在一个较低的水平即可。

对于一般的流形曲面, Gauss-Bonnet 定理表明曲面的高斯曲率之和是拓扑不变量。因此,大多数曲面在任意的连续映射下,均无法将曲面上所有点的高斯曲率置为 0,即在曲面上任意定义向量场,该向量场必然存在不可导点,这些点就是奇点。而网格曲面上向量场为连续曲面上向量场的离散化,若向量沿着向量场环绕某个顶点一圈后产生了角度偏转,那么这个顶点就是奇点, 2π 与偏转角度之差为该奇点的锥角,锥角的大小可以大于 2π 或小于 2π 。在参数化网格中,奇点周围的三角面片存在较大的变形,为了降低参数化扭曲,沿着奇点将网格割开是目前主流的方法。因此,降低参数化扭曲的问题可以转化为寻找奇点的问题。例如,基于曲率求解 Yamabe 方程计算出共形缩放因子,再根据共形缩放因子的大小逐步往网格内添加奇点^[11];利用持续同调性的概念,找出局部极大或极小的持续临界点选为奇点^[12];基于四方向场求解整数规划,得到每个三角面片的场的定向,利用相邻面定向的跳跃确定奇点的位置^[13]等。现有基于曲率的方法容易找不到高扭曲但低曲率的奇点,而基于方向场的方法容易产生多余的奇点以及出现奇点聚集的现象,因此需要寻找更加合适的方法确定奇点的数量和分布。

本文提出了一种将曲率与参数化扭曲混合的方法来确定初始奇点分布,然后计算出该分布下对应的传输代价,再通过迭代更新奇点的位置,使传输代价近似达到最小,从而确定最终奇点的位

置。实验结果表明,本文方法能有效地找到高扭曲点,并尽可能地减少低扭曲点的产生,在相同奇点数目下,参数化扭曲保持在一个更低的水平。

1 相关工作

已有许多种求解网格奇点的方法,其中一类是基于曲率的方法。例如,基于曲率求解 Yamabe 方程,利用顶点的共形缩放因子确定奇点。Ben-Chen 等^[11]针对输入网格的拓扑初始化奇点集合,该集合包含所有的边界顶点;然后在网格上根据曲率值建立随机游走过程,得到每个初始奇点的目标曲率,并根据新旧曲率差构建 Yamabe 方程,计算出每个顶点的共形缩放因子;每次将最大和最小共形缩放因子对应的顶点加入奇点集合,然后更新曲率信息与奇点集合,再次求解 Yamabe 方程,如此反复地将顶点分次加入奇点集合,直到共形缩放因子在某个阈值以下或奇点数目达标。Vintescu 等^[12]计算出顶点的共形缩放因子后,采用了持续同调论的概念,利用长者定理^[14]计算出持续临界点,并按照顶点的持续性大小确定奇点集合。这类方法在共形参数化下有不错的表现,但共形参数化容易使参数化网格中不同三角面片的规模产生较大的差距。

又如,在网格曲面上构建向量场,利用向量场的奇异性确定网格奇点的方法。Bommes 等^[13]实现了一种贪婪的混合整数求解器,用于求解网格的 4 方向场的定向问题。由一些用户定义以及边界对齐条件的稀疏方向场开始,求解最光滑的插值 4 方向场。由于网格拓扑的因素,该 4 方向场存在奇异性,即环绕某些顶点一圈,方向场会发生 90° 的整数倍的偏转,则这些顶点将被选为奇点。然后将光滑的 4 方向场作为输入并割开网格,得到一个拓扑同胚于圆盘的新网格,且所有奇点都位于边界的整数位置。

还有一些其他的奇点求解方法。如曲面演化的方法^[15]的思想是逐渐演化曲面的度量,从原始的度量开始,逐渐将曲面摊平,将曲面面积较大部分的曲率约束为 0,然后更新度量,从而使曲率逐渐集中在一个顶点集合上,这些顶点就被选为奇点。基于投票的方法^[16]首先将网格预参数化,从参数化扭曲较大的面集合中提取初始奇点,然后对网格进行多次随机切割并参数化,每次参数化将给降低扭曲起到重要作用的点投一票,最终得票较多的点被留下,得票较少的点被过滤,从而确

定目标奇点集合. 全局最优的策略^[17]不直接使用曲率获取奇点信息, 而是利用 Fenchell-Rockafellar 对偶定理得到一个平凡的能量函数, 将困难的组合问题弱化为更简单的凸优化问题, 通过一般的余切拉普拉斯矩阵构造稀疏线性系统进行求解, 并且利用该优化问题的最小值能够得到共形参数化下网格奇点全局最优解. 该方法能确保总面积扭曲在全局范围内达到最小化, 并支持用户自定义锥角约束, 如正的锥角或在给定区间范围内的锥角, 以及凸的多边形边界等复杂的边界条件.

2 本文方法

本文方法分为预处理、求解初始奇点和优化奇点位置 3 个步骤. 在预处理阶段, 网格将被简化, 若为高亏格网格, 则需切开环柄. 求解初始奇点时, 利用网格顶点的持续同调性和预参数化来生成 2 部分的奇点. 在优化奇点位置阶段, 通过求解一个最优传输模型, 对初始奇点位置进行迭代优化, 确定最终奇点的位置. 下面先介绍本文基于曲率传输的模型.

2.1 传输模型

2.1.1 全局传输模型

为了确定最优奇点的位置, 本文设想将分散在各个顶点上的高斯曲率利用传输的方式集中到一个规模较小的点集上, 即最终状态下只有少数点有非零曲率, 其余点的曲率均为 0. 设网格的顶点集合与边集合分别为 $V = \{v_i : i = 0, 1, \dots, n-1\}$, $E = \{e_{ij} : i, j \in V, i \in N(j)\}$, 奇点集合为 $S = s_i : i = 0, 1, \dots, m-1\}$. 假设曲率只能在网格边上传输, 由于传递的曲率量可正可负, 可以将每条无向边拆分成 2 条首尾相连、方向相反的有向边, 因而每条有向边传递的曲率量都是非负的. 那么将高斯曲率集中到奇点集合 S 的全局传输能量为

$$W(R) = \sum_{e_{ij} \in E} c_{ij} (R_{ij} + R_{ji}).$$

其中, $R = \{R_{ij} \geq 0 : e_{ij} \in E\}$; $c_{ij} = c_{ji}$ 为边 e_{ij} 的传输代价, 定义为

$$c_{ij} = \left(\tan\left(\frac{\alpha_{ij}}{2}\right) + \tan\left(\frac{\beta_{ij}}{2}\right) \right) l_{ij}.$$

如图 1 所示, α_{ij} 和 β_{ij} 分别表示与边 e_{ij} 相邻的 2 个三角形中与 e_{ij} 相对的 2 个角的大小; l_{ij} 表示边 e_{ij} 的长度; R_{ij} 表示从顶点 i 到相邻顶点 j 传输的非负曲率值.

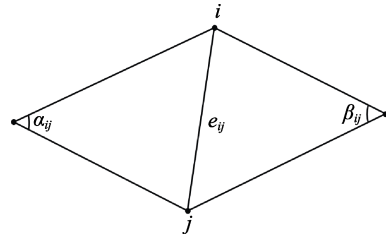


图 1 α_{ij} 和 β_{ij} 示意图

例如, 从顶点 1 到顶点 2 传输了 -0.5 的高斯曲率, 则 $R_{12} = 0$, $R_{21} = 0.5$. 由前述的假设可知, 任意非奇点最终的曲率均为 0, 要求顶点释放的曲率与接收的曲率之差刚好为该点的初始曲率, 即

$$\sum_{j \in N(i)} (R_{ij} - R_{ji}) = K_i, i \in V \setminus S.$$

因而最优的传输方案可以通过求解线性规划问题

$$E_{\text{global}}(S) = \begin{cases} \min \sum_{e_{ij} \in E} c_{ij} (R_{ij} + R_{ji}) \\ \text{s.t. } \sum_{j \in N(i)} (R_{ij} - R_{ji}) = K_i, i \in V \setminus S \\ R_{ij} \geq 0, e_{ij} \in E \end{cases} \quad (1)$$

得出. 每当给定集合 S , 均能由线性规划问题式 (1) 给出最优的传输代价. 为了确定合适的奇点分布, 只需要找到集合 S , 使 $E_{\text{global}}(S)$ 达到最小. 如果所有顶点均设为奇点, 显然有 $E_{\text{global}}(S) = 0$, 这时最优解是平凡的, 因此需要通过增加约束来获得非平凡解. 此外, 在许多参数化应用中, 通常会希望奇点的个数尽可能少, 即假设集合 S 的规模设置上限为 N , 故所求解的问题可表示为

$$E_{\text{global}} = \min_{|S| \leq N} E_{\text{global}}(S) \quad (2)$$

若将式 (1)(2) 合并, 可得

$$E_{\text{global}} = \begin{cases} \min \sum_{e_{ij} \in E} c_{ij} (R_{ij} + R_{ji}) \\ \text{s.t. } \sum_{j \in N(i)} (R_{ij} - R_{ji}) + \lambda_i = K_i, i \in V \\ R_{ij} \geq 0, e_{ij} \in E \\ \|\lambda\|_0 \leq N \end{cases}.$$

这是一个稀疏、非凸的优化问题, 求解难度较大. 如果采用暴力搜索的方式遍历奇点集合, 算法显然不能在多项式时间内找到最优解, 且时间成本高昂, 故需要寻找适当局部最优解近似代替全局最优解.

2.1.2 全局 1-邻域搜索

假设现有 N 个初始奇点, 为了优化这些奇点的位置, 本文使用全局 1-邻域搜索, 其基本思想是通过移动奇点位置比较传输能量的变化, 直到能

量达到局部最小. 具体算法如下.

输入. 奇点集合 S .

输出. 优化后的奇点集合 \tilde{S} .

Step1. 对每个 $s_i \in S$, 计算 $E_{\text{global}}(S)$:

Step1.1. 对于当前的 s_i , 遍历 s_i 的邻点 $v_i \in N(s_i)$, 将 s_i 替换为 v_i 后的奇点集合记为 S' , 计算 $E_{\text{global}}(S')$;

Step1.2. 对每个 v_i , 若 $E_{\text{global}}(S')$ 均不小于 $E_{\text{global}}(S)$, 则转 Step2; 否则, 取使 $E_{\text{global}}(S')$ 达到最小的 $v_i \in N(s_i)$, 令 $s_i = v_i$, 重新执行本步.

Step2. 若所有的 s_i 均没有被更新, 则输出 S ; 否则, 转 Step1.

该算法需要反复计算式(1), 当网格规模较大时, 线性规划的规模随之增大, 将消耗大量的运算时间. 下面对该算法进行改进.

2.1.3 局部 1-邻域搜索

为了提升线性规划的计算速度, 本文考虑控制线性规划的规模. 每个奇点对周边的顶点具有吸收曲率的效果, 而每个非奇点的曲率更倾向于被邻近的奇点吸收. 因此, 在优化奇点位置的过程中, 距离该奇点较远的顶点对当前奇点位置变化的影响可以忽略不计, 即边 e_{ij} 传输的能量 R_{ij} 近似不发生变化. 故局部传输能量可以表示为

$$E_{\text{local}}(s_k) = \begin{cases} \min \sum_{e_{ij} \in E(s_k)} c_{ij}(R_{ij} + R_{ji}) + E_r \\ \text{s.t. } \sum_{j \in N(i)} (R_{ij} - R_{ji}) = K_i, i \in V_{s_k}^\circ \setminus S \\ \sum_{\substack{j \in N(i) \\ j \in V_{s_k}}} (R_{ij} - R_{ji}) = K_i - \sum_{\substack{j \in N(i) \\ j \notin V_{s_k}}} (R_{ij}^* - R_{ji}^*), \\ i \in \partial V_{s_k} \\ R_{ij} \geq 0, e_{ij} \in E(s_k) \end{cases}$$

其中, V_{s_k} 表示奇点 s_k 的 n -邻域内所有顶点构成的集合(本文取 $n = 20$); $V_{s_k}^\circ$ 表示 V_{s_k} 的内部点; ∂V_{s_k} 表示 V_{s_k} 的边界点; $E(s_k)$ 表示在 s_k 的 n -邻域内的边集合; R_{ij}^* 表示能量 $E_{\text{global}}(S)$ 中 R_{ij} 取到的最优值; E_r 表示能量 $E_{\text{global}}(S)$ 中除 s_k 的 n -邻域内能量外其余能量的总和, 即 $E_r = \sum_{e_{ij} \in E \setminus E(s_k)} c_{ij}(R_{ij}^* + R_{ji}^*)$.

特别地, 当 s_k 的位置未发生变化时, $E_{\text{local}}(s_k) = E_{\text{global}}(S)$. 因此, 线性规划的规模得到约束, 从而提升了求解速度. 故第 2.1.2 节中的算法可以改进如下.

输入. 奇点集合 S .

输出. 优化后的奇点集合 \tilde{S} .

Step1. 对每个 $s_i \in S$, 计算 $E_{\text{global}}(S)$:

Step1.1. 对于当前的 s_i , 计算 E_r , 然后遍历 s_i 的邻点 $v_i \in N(s_i)$, 计算 $E_{\text{local}}(v_i)$;

Step1.2. 对每个 v_i , 若 $E_{\text{local}}(v_i)$ 均不小于 $E_{\text{global}}(S)$, 则转 Step2; 否则, 取使 $E_{\text{local}}(v_i)$ 达到最小的 $v_i \in N(s_i)$, 令 $s_i = v_i$, 重新执行本步.

Step2. 若所有的 s_i 均没有被更新, 则输出 S ; 否则, 转 Step1.

注意到, 该算法使用贪婪的 1-邻域搜索, 其计算结果容易受初始点的位置所影响.

2.2 预处理

对于规模较大的输入网格, 在预处理步骤中需要将网格利用二次误差度量(quadric error metrics, QEM)算法^[18]简化到合适的大小(本文设定为 10 000 个顶点), 同时保持网格的拓扑关系以及法向不发生翻转. 在简化的过程中, 每条被简化边的其中一个顶点被保留, 并同时保存该点在原网格对应的指标. 因此, 求解出简化网格的奇点后, 可以利用原网格与简化网格的指标映射获取原网格的奇点.

若网格是高亏格网格, 在简化之后还需使用基于 Reeb 图的方法^[19]求解网格的环柄, 从而保证在后续的参数化过程中沿着环柄割开的网格能够拓扑同胚于圆盘.

2.3 初始奇点的选取

为了更高效地优化网格奇点位置, 一个好的初始奇点选取策略将有效地提升最终奇点质量. 本文采用一种混合的策略确定初始奇点的位置, 分为 2 部分: 先使用 Vintescu 等^[12]基于持续同调的方法确定部分初始奇点, 然后根据当前奇点对网格进行参数化, 再根据参数化得出的扭曲确定剩余的奇点.

为了得到第 1 部分的初始奇点, 需要求解 Yamabe 方程获得共形缩放因子. Yamabe 方程的形式为 $\nabla^2 \phi = K^P - K^O$. 其中, K^O 为顶点的原始曲率; K^P 的定义为

$$K_{v_i}^P = \sum_{v_i \in V} \left(K_{v_i}^O \right) \left(\frac{\sum_{f \in T_{v_i}} (A_f / 3)}{A_M} \right) \quad (3)$$

其中, A_f 为三角面片 f 的面积; $A_M = \sum_{f \in T} A_f$ 为所有三角面片的面积之和; T_{v_i} 为与顶点 v_i 相邻的面的集合. 式(3)是一个特殊的 Poisson 方程, 在离散

情形下可以转化为求解线性方程组. 将上一步求解得到的共形缩放因子首先按照从小到大的顺序排列, 这些因子 φ_i 对应的顶点 v_i 构成有序的集合 V_φ . 在初始状态下每个顶点 v_i 均未被标记. 每次从 V_φ 中取出 φ_{\min} 最小的顶点 v_{\min} , 若 v_{\min} 的 1-邻域内的所有顶点均未被标记, 那么将 v_{\min} 标上新的记号, 并且把 v_{\min} 视为该记号的发源点; 若 v_{\min} 的 1-邻域内除了未被标记的点外, 剩余顶点只有一种记号, 则将 v_{\min} 标上相同的记号; 若 v_{\min} 的 1-邻域内存在 2 种及以上的记号, 需比较这些记号的发源点. 根据长者定理, 发源点越早出现, 则该记号将越易得以延续, 即 v_{\min} 会被标上发源点之中 φ 最小者对应的记号. 当 V_φ 中所有点被取出时, 标记的过程就中止, 此时所有的顶点均被标记, 且可以定义每种标记的持续性为 $p(m, v) = |\varphi_m - \varphi_v|$, φ_m 和 φ_v 分别为在该标记下最早和最晚被标记的顶点. 同理, 再将 φ 按照从大到小的顺序排列, 并且每次从顶点集合中取出 φ 最大的顶点, 也能够得出每种标记的持续性. 将 2 次计算得出的持续性合并, 那些持续性大于 ε 对应的发源点将被选为初始奇点, 本文取 $\varepsilon = 0.75$.

在得到第 1 部分奇点之后, 需要对网格进行预参数化. 对当前的奇点, 本文使用最小生成树生成割缝, 并将树连接到割缝上. 为了保证网格的连通性, 最小生成树算法只在切开原始网格环柄后的新网格上操作. 本文使用的参数化为尽可能刚性 (as-rigid-as-possible, ARAP) 参数化^[2], 该参数化属于等距参数化, 其特点是以最小二次共形映射 (least square conformal maps, LSCM) 参数化^[20]作为预参数化, 尽可能使每个三角面片保持刚性, 利用局部-全局交替迭代使目标二次能量达到最小. 在该参数化下, 每个三角面片 f_i 的扭曲定义为

$$d(f_i) = (\sigma_1 - 1)^2 + (\sigma_2 - 1)^2.$$

进而带面积权的参数化扭曲定义为

$$d = \frac{1}{A_M} \sum_{f_i \in F} A_{f_i} d(f_i) \quad (4)$$

其中, σ_1, σ_2 为三角面片 f_i 的雅可比矩阵的 2 个奇异值; A_{f_i} 为三角面片 f_i 的面积; A_M 为所有三角面片的面积之和. 在预参数化时, 被割开的环柄周围通常会有较大的参数化扭曲, 所以在检测大扭曲面时, 需要过滤掉与割缝相邻的三角面片. 计算出每个面 f_i 的扭曲之后, 本文通过如下算法生成第 2 部分的奇点.

输入. 每个三角面片 f_i 的扭曲 $d(f_i)$.

输出. 第 2 部分的奇点集合 \tilde{S} .

Step1. 初始化队列 $Q = \{F\}$ 和大扭曲面集合 $T = \emptyset$.

Step2. 若队列 Q 非空, 弹出队首元素, 并记为 R . 取 R 中扭曲最大的三角面片 f_{\max} , 若 $f_{\max} \notin T$, 则将 f_{\max} 加入集合 T 中. 若队列 Q 为空, 则转 Step5.

Step3. 令集合 \tilde{T} 为 R 中所有大扭曲面构成的集合, 本文选取 R 中扭曲前 10% 的面.

Step4. 将 \tilde{T} 中的面划分成各个区域, 使每个区域都是连通的. 遍历所有区域 R_i , 若其中三角面片的数量大于某个阈值 (本文选为 40), 则将 R_i 插入队列 Q 中. 遍历结束后转 Step2.

Step5. 将 \tilde{S} 置为空集, 对于每个 T 中的面 f_i , 取 f_i 中曲率最大的顶点, 并将该点加入 \tilde{S} 中. 遍历结束后输出 \tilde{S} .

2.4 奇点优化

由于共形缩放因子持续性较大的顶点均能较好地代表网格的奇点, 这些点的最优传输能量绝大多数为局部最小, 故在位置优化过程中也几乎不会改变. 因此, 为了进一步减少计算时间, 仅对第 2 部分的奇点运行第 2.1.3 节中局部 1-邻域搜索算法进行位置优化.

当奇点位置优化结束之后, 最终奇点可能会出现聚集的情况. 本文将 3-邻域范围内的多个奇点合并为一个, 尽可能地减少多余的点; 最后, 利用原网格与简化网格顶点的映射关系, 将简化网格的奇点映回原网格, 以得到原网格的奇点分布与参数化结果.

2.5 奇点求解步骤

本文方法具体求解步骤如下. 首先, 判断输入网格的顶点数目是否超过 15 000, 若超过, 则利用 QEM 算法将网格简化到 10 000 个顶点, 并保存简化前后顶点的对应关系. 若网格的亏格数大于 0, 利用文献[19]方法计算输入网格与简化网格的环柄并切开, 使网格拓扑同胚于圆盘. 然后, 利用文献[12]方法计算第 1 部分奇点. 使用最小生成树算法将所有奇点连接起来, 并将树连接到网格边界上. 将网格沿着树枝剪开, 再用 ARAP 参数化计算出每个三角面片的扭曲. 将扭曲信息作为输入, 运行第 2.3 节中的算法可以确定初始的第 2 部分奇点. 再运行第 2.1.3 节中的算法可得优化后的第 2 部分奇点. 将第 1 部分奇点与第 2 部分奇点相结合, 若某个奇点的 3-邻域范围内有其他奇点, 则将该范围内的所有奇点合并成一个. 若网格被简化, 利用网格顶点对应关系可得输入最终的奇点分布.

3 实验结果与分析

本节将给出本文混合方法计算出相关奇点的实验结果,并对各方法进行评估.本文测试了大量复杂的例子,并与 3 种主流的方法相比较,同时展示部分网格在棋盘格纹理映射下的结果.本文实验所用台式机的处理器为 Intel(R) Core(TM) i7-3770 CPU @ 3.40 GHz,内存为 8.00 GB.

3.1 与其他 3 种方法的比较

本文将与 Ben-Chen 等^[11], Vintescu 等^[12]和 Soliman 等^[17]的方法进行比较,说明本文方法的有效性.为了使对比更加公平,要求不同方法找到的奇点数量是大致相等的,差距最多不超过 2.图 2~图 7 所示为其中 6 个例子,红色球代表奇点的位置,

网格红色深浅表示每个三角面片扭曲的大小,颜色越深则扭曲越大,扭曲等于 0 为白色,扭曲大于或等于 1 为红色,扭曲大小由式(4)定义.由于文献[11]和文献[12]的曲率方法对低曲率奇点的检测不敏感,有一些能够有效地降低扭曲的奇点容易被忽略掉.如图 2b 中没有检测到头顶附近的奇点,图 3b 中在鸟的整个头部均没有检测到奇点;又如图 4b 中底座上方的中间部位、图 5b 人像的后脑勺处没有检测到奇点.与文献[17]的比较中,图 6b 中机翼根部与飞机尾部以及图 7b 中犀牛的嘴角处的扭曲情况,均体现了本文方法求解的奇点位置更为精准.由此可见,与其他 3 种方法相比,本文方法求解的奇点能使参数化扭曲达到更低的水平,具体扭曲大小如表 1~表 3 所示.

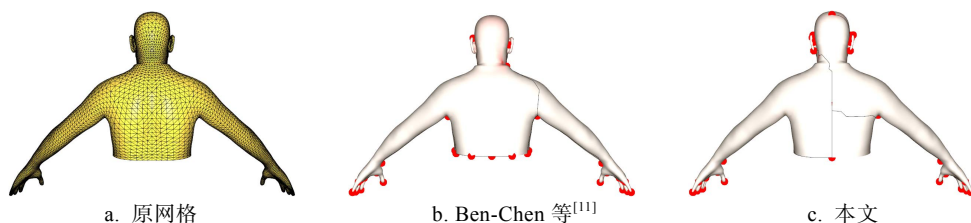


图 2 Body.off 网格中 2 种方法的参数化扭曲的比较

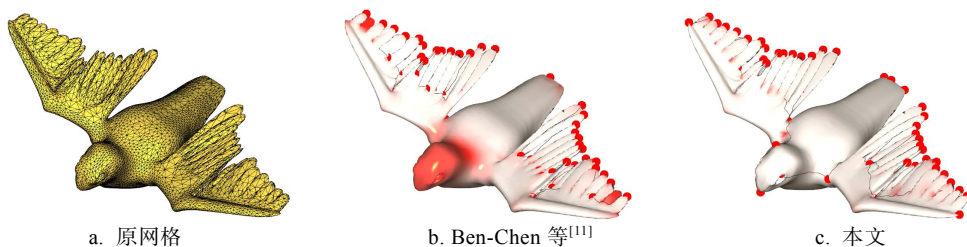


图 3 Bird.off 网格中 2 种方法的参数化扭曲的比较

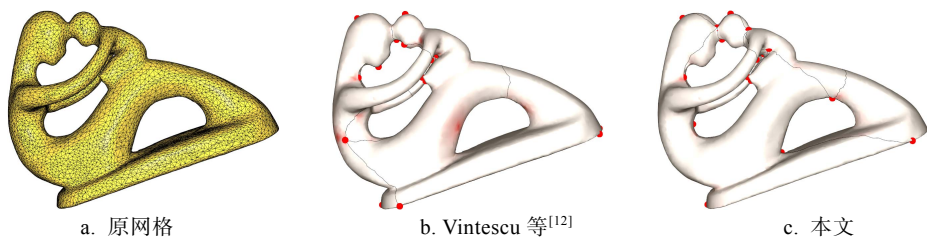


图 4 Fertilty.off 网格中 2 种方法的参数化扭曲的比较

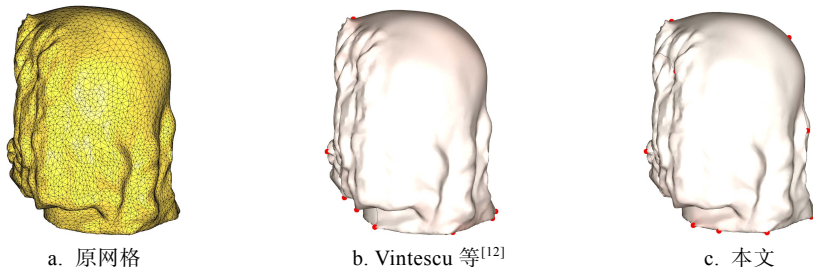


图 5 Selapis.off 网格中 2 种方法的参数化扭曲的比较

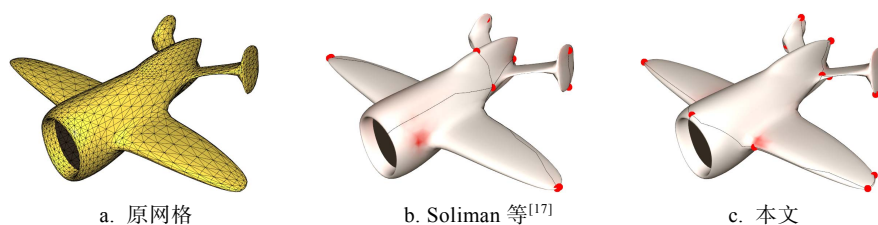


图 6 Airplane.off 网格中 2 种方法的参数化扭曲的比较

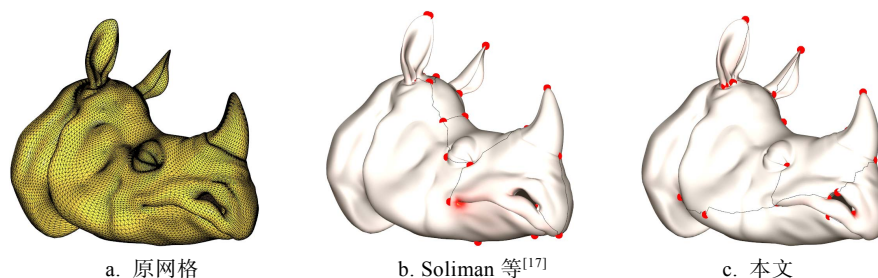


图 7 Rhino.off 网格中 2 种方法的参数化扭曲的比较

表 1 Body.off 和 Bird.off 网格中
2 种方法的参数化扭曲数值比较

网格	Ben-Chen 等 ^[11]	本文
图 2a	0.031 5	0.015 2
图 3a	0.061 7	0.019 7

表 2 Fertility.off 和 Selapis.off 网格中
2 种方法的参数化扭曲数值比较

网格	Vintescu 等 ^[12]	本文
图 4a	0.026 0	0.012 6
图 5a	0.042 1	0.016 7

表 3 Airplane.off 和 Rhino.off 网格中
2 种方法的参数化扭曲数值比较

网格	Soliman 等 ^[17]	本文
图 6a	0.039 4	0.028 7
图 7a	0.035 3	0.016 5

3.2 实验结果展示

基于本文的混合策略求解奇点方法对 7 个不同网格的奇点检测结果如图 8 所示, 其中有 4 个高亏格网格. 本文方法表现良好, 且具有鲁棒性, 面对复杂的网格也能够较稳定地找到奇点的合理位置.

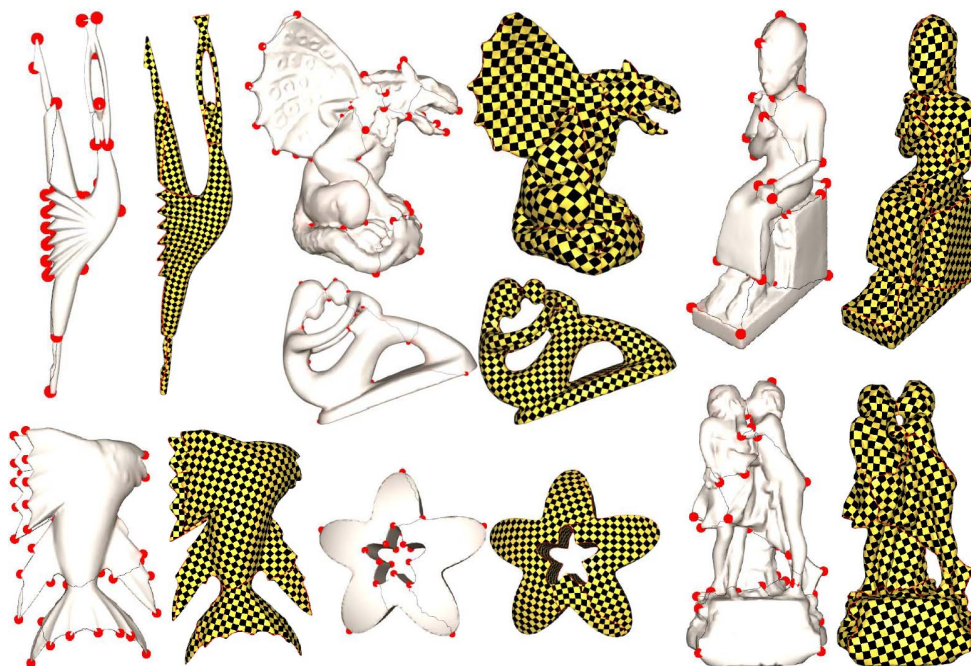


图 8 本文方法奇点检测结果展示

从棋盘格纹理映射上可看出,基于这些奇点将网格割开能使参数化扭曲保持在一个较低的水平.

3.3 本文方法评估

3.3.1 优化第 2 部分奇点位置的必要性

图 9 所示台灯模型在位置优化前奇点分布在圆盘的中心,导致圆盘的参数化扭曲较高.进行位置优化后,将靠近边缘的奇点移动到了圆盘的边缘位置,使割缝尽可能地沿着边缘割开.图 10 所示脚模型脚后跟处的奇点在优化过程后位置更加合理,同时参数化扭曲有所降低.对相应网格奇点优化前后的参数化扭曲对比如表 4 所示.

3.3.2 网格简化的必要性

如图 11 所示,网格初始顶点数目为 130 000,若无初始简化步骤,求解奇点将耗时超过 1 800 s;使用 QEM 算法简化到 10000 个顶点后,优化奇点

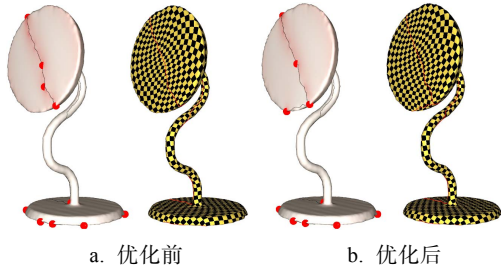


图 9 Lamp.off 网格奇点优化前后对比

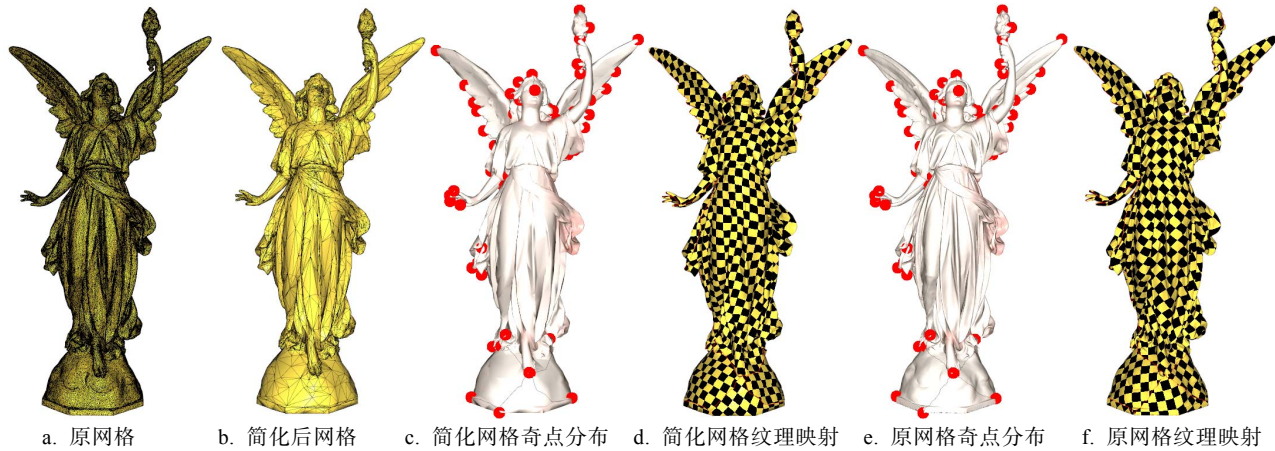


图 11 Lucy.off 网格简化前后对比

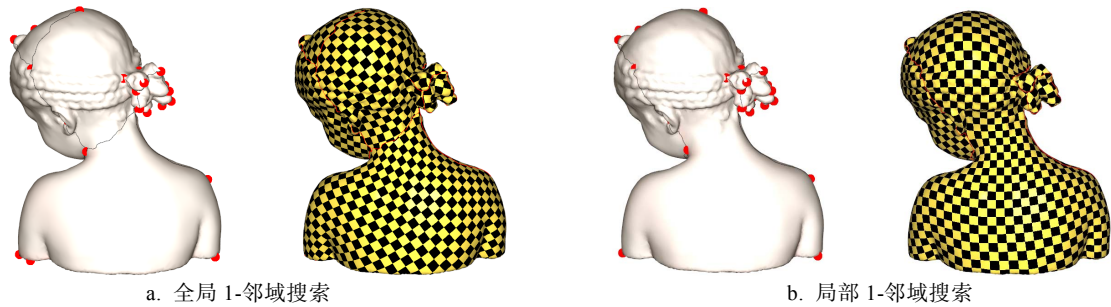


图 12 全局与局部搜索对比

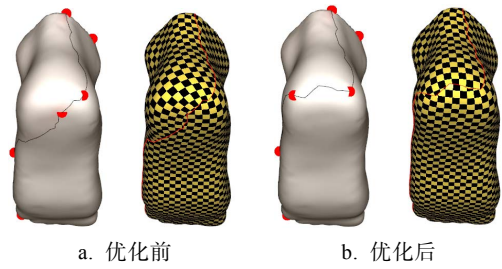


图 10 Foot.off 网格奇点优化前后对比

表 4 对 Lamp.off 和 Foot.off 网格奇点优化前后的参数化扭曲对比

网格	优化前	优化后
图 9a	0.041 2	0.034 7
图 10a	0.009 8	0.072 0

位置只需耗时 65 s.通过棋盘格纹理映射可以看出,将奇点映射回原网格后求解出的参数化质量与简化网格的参数化质量也基本相同.

3.3.3 全局 1-邻域搜索与局部 1-邻域搜索的对比

如图 12 所示,在该模型中,全局搜索与局部搜索求解出的大部分奇点位置是相同的,从棋盘格纹理映射可以看出二者的参数化效果基本相同.但在网格规模较大时,局部 1-邻域搜索的运行速度要明显快于全局 1-邻域搜索.

3.3.4 不同参数化的选择

图 13 所示为本文方法在 2 种参数化下的棋盘格映射结果. 其中单纯复形增强框架(simplicial complex augmentation framework, SCAF)参数化^[21]也是等距参数化, 能够保证参数化网格的双射性, 即无翻转、无局部、全局自交. 如图 13a 和图 14a 所示, 将计算第 2 部分奇点的参数化方法替换为 SCAF 参数化方法, 得到的棋盘格映射也有较好的质量, 说明本文方法针对一般的参数化也能够显著降低扭曲. 但 ARAP 参数化与保持全局双射的 SCAF 参数化在不同情况下各有优势. 如图 15 所示, 由于 SCAF 参数化要求参数化网格满足全局双射条件, 当网格边界上存在大量高斯曲率为负的

顶点时, 边界不交的条件更容易造成较大的参数化扭曲. 因此, 本例使用 ARAP 参数化能取得更好的结果. 但是 ARAP 参数化无法保证参数化网格无自交以及无翻转, 具体使用哪一种参数化取决于实际应用的需求.

3.3.5 时间性能

本文方法主要耗时在求解奇点时奇点位置优化的过程, 当输入网格 Bird.off 的顶点数简化到 10000 个, 局部 1-邻域搜索范围为 20 邻域时, 位置优化需要消耗 37s 左右的时间. 而将局部 1-邻域搜索范围扩大到 40 邻域时, 位置优化需要消耗 167s 左右的时间. 本文在时间性能方面没有优势, 原因在于 1-邻域搜索遍历了较多的点, 需要求解大量

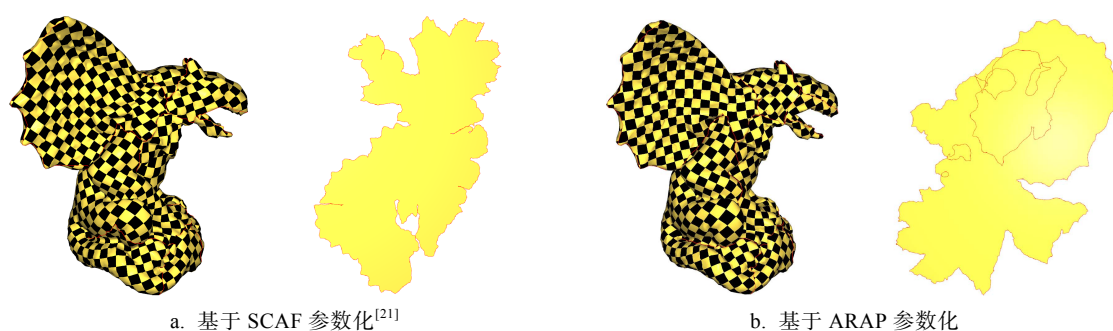


图 13 Gargoyle.off 网格在 2 种参数化下棋盘格映射结果对比

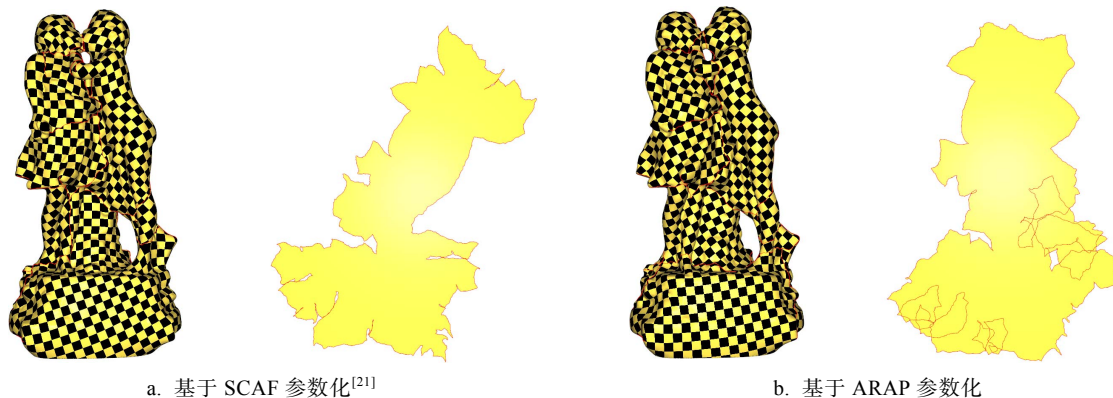


图 14 Sculpture.off 网格在 2 种参数化下棋盘格映射结果对比

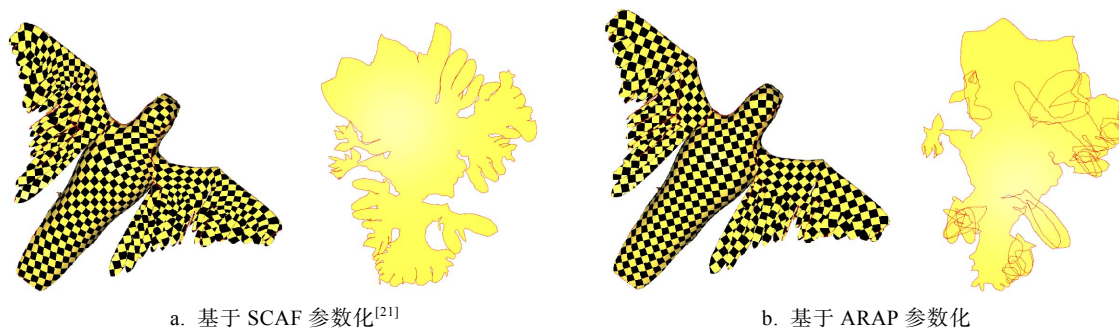


图 15 Bird.off 网格在 2 种参数化下棋盘格映射结果对比

线性规划问题. 如何设计更好的优化方法、进一步缩短运行时间也是未来的工作目标之一.

4 结 语

本文提出了一种求解网格奇点的混合方法, 能够找到基于曲率方法难以找到的关键奇点, 这些奇点对构造参数化割缝具有重要作用, 有效地降低了参数化扭曲. 同时大量的例子表明, 对于各种复杂的网格, 本文方法均能取得较好的参数化结果, 体现了其鲁棒性.

本文仍有需要改进的地方. 例如, 采用局部 1-邻域搜索时, 有可能陷入不合适的局部极小点; 构造割缝时, 本文使用最小生成树策略没有优化割缝的长度与位置, 割缝过长或没有对齐边界特征容易导致参数化质量下降, 在边界处产生较大的扭曲; 同时, 基于 Reeb 图方法每次计算出的环柄可能会有差异, 参数化结果会不尽相同; 参数化方法的选取也对最终参数网格的质量有较大影响. 如何进一步提高时间性能, 优化奇点位置搜寻策略, 也是将来研究的重要方向.

参考文献(References):

- [1] Fleishman S, Drori I, Cohen-Or D. Bilateral mesh denoising[J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2003, 22(3): 950-953
- [2] Liu L G, Zhang L, Xu Y, *et al.* A local/global approach to mesh parameterization[J]. *Computer Graphics Forum*, 2008, 27(5): 1495-1504
- [3] de Boer A, van der Schoot M S, Bijl H. Mesh deformation based on radial basis function interpolation[J]. *Computers & Structures*, 2007, 85(11-14): 784-795
- [4] DeCoro C, Tatarchuk N. Real-time mesh simplification using the GPU[C] // *Proceedings of the Symposium on Interactive 3D Graphics and Games*. New York: ACM Press. 2007: 161-166
- [5] Alliez P, Meyer M, Desbrun M. Interactive geometry remeshing[J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2002, 21(3): 347-354
- [6] Gotsman C, Gu X F, Sheffer A. Fundamentals of spherical parameterization for 3D meshes[J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2003, 22(3): 358-363
- [7] Aigerman N, Lipman Y. Hyperbolic orbifold tutte embeddings[J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2016, 35(6): Article No.217
- [8] Weber O, Zorin D. Locally injective parametrization with arbitrary fixed boundaries[J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2014, 33(4): Article No.75
- [9] Lyon M, Campen M, Bommes D, *et al.* Parametrization quantization with free boundaries for trimmed quad meshing[J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2019, 38(4): Article No.51
- [10] Floater M S, Hormann K. Surface parameterization: a tutorial and survey[C] // *Proceedings of Advances in Multiresolution for Geometric Modelling*. Heidelberg: Springer, 2005: 157-186
- [11] Ben-Chen M, Gotsman C, Bunin G. Conformal flattening by curvature prescription and metric scaling[J]. *Computer Graphics Forum*, 2008, 27(2): 449-458
- [12] Vintescu A M, Dupont F, Lavoué G, *et al.* Conformal factor persistence for fast hierarchical cone extraction[C] // *Proceedings of the European Association for Computer Graphics: Short Papers*. Aire-la-Ville: Eurographics Association Press, 2017: 57-60
- [13] Bommes D, Zimmer H, Kobbelt L. Mixed-integer quadrangulation[J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2009, 28(3): Article No.77
- [14] Edelsbrunner H, Harer J. Computational topology: an introduction[M]. Washington D C: American Mathematical Society, 2010
- [15] Myles A, Zorin D. Global parametrization by incremental flattening[J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2012, 31(4): Article No.109
- [16] Chai S M, Fu X M, Liu L G. Voting for distortion points in geometric processing[J]. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 2021, 27(4): 2469-2480
- [17] Soliman Y, Slepčev D, Crane K. Optimal cone singularities for conformal flattening[J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2018, 37(4): Article No.105
- [18] Garland M, Heckbert P S. Surface simplification using quadric error metrics[C] // *Proceedings of the 24th Annual Conference on Computer graphics and Interactive Techniques*. New York: ACM Press, 1997: 209-216
- [19] Dey T K, Fan F T, Wang Y S. An efficient computation of handle and tunnel loops via Reeb graphs[J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2013, 32(4): Article No.32
- [20] Lévy B, Petitjean S, Ray N, *et al.* Least squares conformal maps for automatic texture atlas generation[J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2002, 21(3): 362-371
- [21] Jiang Z S, Schaefer S, Panozzo D. Simplicial complex augmentation framework for bijective maps[J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2017, 36(6): Article No.186