计算方法 (A)

童伟华 管理科研楼 1205 室 [1]
E-mail: tongwh@ustc.edu.cn

[1] 数学科学学院 中国科学技术大学

2022-2023 学年第一学期 MATH2001.05

函数逼近

函数逼近问题

如何寻找简单的函数 $\varphi(x)$ 去近似地代替一个复杂的函数 $f(x)$, 其中近似代替又称为**逼近**, 函数 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 分别称为**被逼近**和**逼近**函数.

函数逼近目的

- 使得一些常用的操作, 譬如函数求值、微分甚至积分, 可以变得更容易执行.
- 利用函数的部分信息, 譬如函数值表, 重建或恢复一个函数.

例 9.1

在区间 $[-1,1]$ 上, 确定具有最低次数的多项式 $p(x)$ 使得 $|p(x)-\arccos(x)|\leqslant 10^{-7}$ 成立. 更一般地, 给定函数 $f(x)$ 和正数 ε, 确定多项式 $p(x)$, 使在区间 $[a,b]$ 上有 $|p(x)-f(x)|\leqslant\varepsilon$.

例 9.2

通过观察或测量函数 $f(x)$ 得到一组离散数据:

$$\{(x_i, y_i) \mid i = 1, 2, \ldots, n\},$$

在函数空间 $\Phi = \mathrm{span}\{\varphi_i(x) \mid j = 1, 2, \ldots, m\}$ 中选择 $\varphi(x) = \sum_{j=1}^{m} c_j \varphi_j(x)$ 使得逼近误差最小，即

$$\min_{\varphi\in\Phi} \sum_{i=1}^{n} \left| y_i - \varphi(x_i) \right|^2 = \min_{c_1, c_2, \cdots, c_m \in \mathbb{R}} \sum_{i=1}^{n} \left| y_i - \sum_{j=1}^{m} c_j \varphi_j(x_i) \right|^2.$$

在逼近问题中几乎都涉及到从一个集合中选择一个元素，使它在某种意义上*接近*该集合外的一个预先给定的元素. 因此，若要确切的描述逼近问题，需要明确两个元素之间的*距离*是如何度量的.

在统一的框架下描述逼近问题，引入赋范线性空间.

§9.1.1 赋范线性空间

定义 9.1

设集合 V 是实数域 $\mathbb{R}$ 上的线性空间，如果 V 中任意一个元素 f 都按某一法则对应一个实数，记作 $\|f\|$，并且它满足下列条件:

(1) **正定性**: $\|f\| \geqslant 0, \quad \forall f \in V$; $\|f\| = 0$ 当且仅当 $f = 0$ 成立;
(2) **齐次性**: $\|cf\| = |c|\|f\|, \quad \forall c \in \mathbb{R}, \forall f \in V$;
(3) **三角不等式**: $\|f+g\| \leqslant \|f\| + \|g\|, \quad \forall f, g \in V$.

上述对应关系可视为 $V \to \mathbb{R}$ 的映射，称为线性空间 V 的***范数***，并简记为 $\|\cdot\|$. 定义了范数的线性空间称为***赋范线性空间***.

例 9.3

记 $\mathbb{R}^n$ 为 n 维线性空间, 在 $\mathbb{R}^n$ 中定义

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \left(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2\right)^{1/2}, \quad \forall \mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n.$$

易验证 $\|\cdot\|_2$ 满足条件 (1) ~ (3). 因此, $\mathbb{R}^n$ 按 $\|\cdot\|_2$ 构成一赋范线性空间. 另外, 不难验证 $\mathbb{R}^n$ 还可按如下范数

$$\|\mathbf{x}\|_1 = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|, \quad \forall \mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n,$$

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_n|\}, \quad \forall \mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n,$$

分别构成不同的赋范线性空间. 更一般地, 在 $\mathbb{R}^n$ 中定义

$$\|\mathbf{x}\|_p = (|x_1|^p + |x_2|^p + \cdots + |x_n|^p)^{1/p}, \quad \forall \mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n,$$

构成向量 $\mathbf{x}$ 的*p-范数*, 前面的范数分别对应 $p = 1, 2, \infty$ 的情形.

§9.1.1 赋范线性空间

例 9.4

记 $C[a,b]$ 为区间 $[a,b]$ 上连续函数的全体，按通常的函数加法与数乘运算构成线性空间. 在 $C[a,b]$ 中定义

$$\|f\|_\infty = \max_{a\leqslant x\leqslant b} |f(x)|, \quad \forall f \in C[a,b].$$

易验证 $\|\cdot\|_\infty$ 满足条件 (1) ~ (3). 因此, $C[a,b]$ 按 $\|\cdot\|_\infty$ 构成一赋范线性空间, 范数 $\|\cdot\|_\infty$ 称为**一致范数**或 **Chebyshev 范数**.

例 9.5

记 $C^r[a,b]$ 为区间 $[a,b]$ 上 r 次连续可微函数的全体. 定义 $C^r[a,b]$ 的范数

$$\|f\|_\infty = \max_{x\in[a,b]} \left\{|f(x)|, |f'(x)|, \cdots, |f^{(r)}(x)|\right\}, \quad \forall f \in C^r[a,b].$$

显然, $C[a,b]$ 是 $C^r[a,b]$ 的一个特殊情形.

例 9.6

记 $L^p[a,b]$ 为区间 $[a,b]$ 上所有满足

$$\int_a^b |f(x)|^p \, \mathrm{d}x < +\infty, \quad p \geqslant 1,$$

的 Lebesgue 可积函数 f 构成的函数类 (Lebesgue 积分是 Riemann 积分的推广). 因区间 $[a,b]$ 上所有的连续函数都是 Riemann 可积的, 故 $C[a,b] \subset L[a,b]$. 在 $L^p[a,b]$ 中定义

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p \, \mathrm{d}x \right)^{1/p}, \quad \forall f \in L^p[a,b], \tag{1}$$

可以证明 $\|\cdot\|_p$ 是 $L^p[a,b]$ 的一个范数. 注意, 在 $L^p[a,b]$ 中约定: 将几乎处处相等的两个可测函数 f, g 视为同一函数.

§9.1.2 距离

定义 9.2

在赋范线性空间 V 中, 定义函数

$$d(f,g)=\|f-g\|,\quad \forall f,g\in V,$$

称为 f 与 g 之间的**距离**. 不难验证 $d(f,g)$ 满足距离定义所要求的条件:

(1) **正定性**: $d(f,g)\geqslant 0,\quad \forall f\in V$; $d(f,g)=0$ 当且仅当 $f=g$ 成立;
(2) **对称性**: $d(f,g)=d(g,f),\quad \forall f,g\in V$;
(3) **三角不等式**: $d(f,g)\leqslant d(f,h)+d(h,g),\quad \forall f,g,h\in V$.

§9.1.2 距离

引理 9.1

在赋范线性空间 V 中, 加法, 数乘和范数都是距离 $d(f, g)$ 下的连续函数.

§9.1.3 最佳逼近

设 X 是赋范线性空间, M 是 X 的非空子集, 我们希望从 M 中选取元素逼近 X 中的元素, M 称为 X 的一个**逼近集合**.

定义 9.3

对于 $x \in X$, 如果有元素 $m^* \in M$ 使得

$$\|x - m^*\| = \inf_{m \in M} \|x - m\| \triangleq d(x, M),$$

则称 m^* 为子集 M 逼近 x 的**最佳逼近元**, 记为 $m^* \in \mathcal{B}_M(x)$, 其中

$$\mathcal{B}_M(x) \triangleq \left\{ m \in M : \|x - m\| = d(x, M) \right\}$$

表示由 M 逼近 x 的最佳逼近元构成的集合, 用 $\#\mathcal{B}_M(x)$ 表示最佳逼近元的个数.

§9.1.3 最佳逼近

有了最佳逼近元的定义之后, 自然地会产生以下问题:

- 存在性, 即是否有 $\#\mathcal{B}_M(x) \geqslant 1$;
- 唯一性, 即是否有 $\#\mathcal{B}_M(x) \leqslant 1$;
- 最佳逼近元应具有什么特征;
- 最佳逼近元的构造及其应用.

§9.1.4 存在性与唯一性

定义 9.4

X 的一个子集 M 称为**列紧的**，如果 M 中的每个点列都有一个收敛于 M 中一点的子序列.

定理 9.1

设 M 是 X 的列紧子集，则对于任意的 $x \in X$，存在最佳逼近元 $m^* \in M$.

推论 9.1

若 M 是 X 的线性子空间，且 $\dim(M) < +\infty$，则对任意的 $x \in X$，存在最佳逼近元 $m^* \in M$.

§9.1.4 存在性与唯一性

定义 9.5

设 M 是赋范线性空间 X 的非空子集, 称 M 是**凸集**, 如果对任意的 $m_1, m_2 \in M$, $t \in (0,1)$, 均有 $t * m_1 + (1-t) * m_2 \in M$ 成立. 进一步, 若 $m_1 \neq m_2$, 均有 $t * m_1 + (1-t) * m_2 \in M^\circ$ 成立 (M° 表示集合 M 的内部), 则称 M 是**严格凸集**.

定义 9.6

如果赋范线性空间 X 按某一范数 $\|\cdot\|$ 的闭球 $B(x,r)$ 是严格凸集, 则称该范数 $\|\cdot\|$ 是**严格凸的**.

§9.1.4 存在性与唯一性

定理 9.2

设 M 是 X 的列紧子集，且 M 是严格凸集，则对任意的 $x \in X$，存在唯一的最佳逼近元 $m^* \in M$.

推论 9.2

若 M 是 X 的线性子空间，且 $\dim(M) < +\infty$，X 的范数 $\|\cdot\|$ 是严格凸的，则对任意的 $x \in X$，存在唯一的最佳逼近元 $m^* \in M$.

§9.2.1 内积空间

为了描述向量的长度、正交等几何性质，需要引入内积.

定义 9.7

设集合 V 是实数域 $\mathbb{R}$ 上的线性空间，如果 V 中任意一对元素 f, g 都按某一法则对应一个实数，记作 (f,g)，并且满足下列条件:

(1) **对称性**: $(f,g) = (g,f), \quad \forall f, g \in V;$

(2) **线性性**:

$$(\lambda f + \mu g, h) = \lambda(f,h) + \mu(g,h), \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall f, g, h \in V;$$

(3) **正定性**: $(f,f) \geqslant 0, \quad \forall f \in V;\ (f,f) = 0 \Leftrightarrow f = 0,$

则称二元实函数 $(\cdot,\cdot)$ 是线性空间 V 上的一个**内积**. 定义了内积的线性空间 V 称为**内积空间**.

例 9.7

在 $\mathbb{R}^n$ 空间中，任取一组标准正交基 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n$，则

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n,$$

其中 $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$，$\mathbf{y} = y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + \cdots + y_n\mathbf{e}_n$.

例 9.8

在 $L^2[a,b]$ 空间中, 定义

$$(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x, \quad \forall f,g \in L^2[a,b]. \tag{2}$$

易验证 $(\cdot,\cdot)$ 满足条件 $(1) \sim (3)$. 因此, $L^2[a,b]$ 按 $(\cdot,\cdot)$ 构成一内积空间.

§9.2.2 内积的性质

命题 9.3

(Cauchy-Schwarz 不等式) 设 V 是内积空间, 则有

$$|(f,g)| \leqslant \sqrt{(f,f)\cdot(g,g)}, \quad \forall f,g\in V.$$

若在内积空间 V 中定义

$$\|f\| = \sqrt{(f,f)}, \quad \forall f\in V,$$

则有

$$\begin{aligned}\|f+g\|^2 &= (f+g,f+g) = (f,f)+2(f,g)+(g,g)\\ &\leqslant (f,f)+2\sqrt{(f,f)\cdot(g,g)}+(g,g) = (\|f\|+\|g\|)^2,\end{aligned}$$

即 $\|f+g\| \leqslant \|f\|+\|g\|$. 易验证, $\|\cdot\|$ 构成 V 的一个范数, 称 $\|\cdot\|$ 是*内积诱导的范数*.

§9.2.2 内积的性质

命题 9.4

(平行四边形等式) 设 V 是内积空间, 则有

$$\|f+g\|^2+\|f-g\|^2=2(\|f\|^2+\|g\|^2).$$

在内积空间中, 若 f 与 g 的内积为零, 即 $(f,g)=0$, 则称 f 与 g 是**正交**的. 此时, $\|f+g\|^2=\|f\|^2+\|g\|^2$, 类似于欧式空间中的勾股定理.

§9.2.3 最佳逼近

在内积空间中讨论最佳逼近问题.

定义 9.8

设 V 是内积空间, $M \subset V$ 为有限维子空间. 对于 $x \in V$, 如果有元素 $m^* \in M$ 使得

$$\|x - m^*\| = \inf_{m \in M} \|x - m\| \triangleq d(x, M),$$

则称 m^* 为子集 M 逼近 x 的**最佳逼近元**, 将所有 M 中 x 的最佳逼近元构成的集合记作 $\mathcal{B}_M(x)$, 这里 $\|\cdot\|$ 是 V 内积诱导的范数.

存在唯一性定理.

定理 9.5

对于任意的 $x \in V$, 存在唯一的最佳逼近元 $m^* \in M$.

§9.2.4 特征与表示

刻画内积空间最佳逼近元的特征性质.

定理 9.6

对任意的 $x \in V$, 则 $m^* \in M$ 为 x 的最佳逼近元的充分必要条件是 $x - m^*$ 与 M 中的任意元素正交, 即

$$(x - m^*, m) = 0, \quad \forall m \in M.$$

定理9.6的几何意义: x 在 M 中的正交投影 m^* 即为 x 的最佳逼近元. 利用该定理, 最佳逼近元的距离可表示为:

$$d(x, M)^2 = (x, x) - (x, m^*). \tag{3}$$

§9.2.4 特征与表示

设 M 是 X 的 n 维线性子空间, M 有一组基: $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$, 那么 x 的最佳逼近元 m^* 可表示为 $m^* = \sum_{i=1}^{n} c_i^* \varphi_i$. 利用定理9.6, m 分别取 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$, 可得

$$\sum_{i=1}^{n} (\varphi_i, \varphi_j)\, c_i^* = (x, \varphi_j), \quad j = 1, 2, \cdots, n, \tag{4}$$

称式 (4) 为最佳逼近元的*法方程组*.

§9.2.4 特征与表示

引入记号

$$G=\begin{pmatrix}(\varphi_1,\varphi_1) & (\varphi_1,\varphi_2) & \cdots & (\varphi_1,\varphi_n)\\ (\varphi_2,\varphi_1) & (\varphi_2,\varphi_2) & \cdots & (\varphi_2,\varphi_n)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ (\varphi_n,\varphi_1) & (\varphi_n,\varphi_2) & \cdots & (\varphi_n,\varphi_n)\end{pmatrix},\ \mathbf{c}^*=\begin{pmatrix}c_1^*\\ c_2^*\\ \vdots\\ c_n^*\end{pmatrix},\ \mathbf{b}=\begin{pmatrix}(x,\varphi_1)\\ (x,\varphi_2)\\ \vdots\\ (x,\varphi_n)\end{pmatrix},$$

则法方程组可写成 $G\,\mathbf{c}^*=\mathbf{b}$.

基于 $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ 的线性无关性, 容易证明矩阵 G 是正定的. 因此, 法方程组的解存在且唯一.

§9.2.4 特征与表示

若 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$ 构成 M 的一组正交基，则 G 是一个对角矩阵，法方程组可以直接解出，最佳逼近元 m^* 显式地表示为

$$m^* = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x, \varphi_i)}{(\varphi_i, \varphi_i)} \varphi_i, \tag{5}$$

称式 (5) 为 x 的**广义 Fourier 展开**，φ_i 的系数为**广义 Fourier 系数**。

§9.2.4 特征与表示

利用 $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ 的正交性, 可知式 (3) 等价于

$$\|x-m^*\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^n (c_i^*)^2\|\varphi_i\|^2, \quad c_i^* = \frac{(x,\varphi_i)}{(\varphi_i,\varphi_i)}.$$

在上式中, 若令 $n\to\infty$, 则得 **Bessel 不等式**:

$$\sum_{i=1}^\infty (c_i^*)^2\|\varphi_i\|^2 \leqslant \|x\|^2.$$

特别地, 若最佳逼近元序列收敛于 x, 则上述不等式变成等式, 称为**广义 Parseval 等式**.

定理 9.7

任何 n 维内积空间 M 都存在正交基.

通过如下算法构造正交基 $e_1, e_2, \cdots, e_n$:

(1) $e_1 = \varphi_1$;

(2) $e_i = \varphi_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{(\varphi_i, e_j)}{(e_j, e_j)} e_j, \quad j = 2, \cdots, n.$

上述算法称为 **Gram-Schmidt 正交化**, 是一个非常重要的构造性算法.

函数的最佳多项式逼近问题, 即连续情形的最佳平方逼近问题.

记 $L^2_\rho[a,b]$ 是区间 $[a,b]$ 上满足

$$\int_a^b \rho(x)f^2(x)\,\mathrm{d}x < +\infty$$

的 Lebesgue 可积函数 f 构成的函数类, 其中称非负函数 $\rho(x)$ 为**权函数**, 如果 $\rho(x)$ 满足:

(1) 对于非负整数 n, 积分 $\displaystyle\int_a^b \rho(x)x^n\,\mathrm{d}x$ 存在且有限;

(2) 对于非负连续函数 $g(x)$, 若有 $\displaystyle\int_a^b \rho(x)g(x)\,\mathrm{d}x = 0$, 则 $g(x)\Big|_{[a,b]} \equiv 0$.

显然, 当 $\rho(x)\equiv 1$ 时, 即为 $L^2[a,b]$.

§9.3.1 最佳平方逼近多项式

在 $L^2_\rho[a,b]$ 中, 定义

$$(f,g)=\int_a^b \rho(x)f(x)g(x)\,\mathrm{d}x,\quad \forall f,g\in L^2_\rho[a,b],$$

$$\|f\|=\sqrt{(f,f)},\quad \forall f\in L^2_\rho[a,b].$$

不难验证, $(\cdot,\cdot)$ 与 $\|\cdot\|$ 分别构成 $L^2_\rho[a,b]$ 的内积与范数.

§9.3.1 最佳平方逼近多项式

记 $\mathbb{P}_n[x]$ 为所有次数不超过 n 的多项式构成的空间，则 $\mathbb{P}_n[x]$ 是 $L^2_\rho[a,b]$ 的 $n+1$ 维子空间.

利用定理9.5知，对任意的 $f \in L^2_\rho[a,b]$，存在唯一的 n 次多项式

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i x^i \in \mathbb{P}_n[x],$$

使得 $\|f-p\|$ 取到最小值，即*最佳平方逼近多项式*.

多项式 $p(x)$ 的系数可由如下法方程确定:

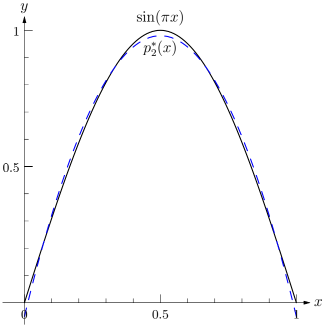
$$\sum_{i=0}^{n}(x^j, x^i)\, c_i = (f, x^j), \quad j = 0, 1, \cdots, n, \tag{6}$$

其中

$$(x^j, x^i) = \int_a^b \rho(x) x^{i+j}\, \mathrm{d}x, \quad (f, x^j) = \int_a^b \rho(x) f(x) x^j\, \mathrm{d}x.$$

例 9.9

设 $f(x) = \sin(\pi x)$, 求 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上的二次最佳平方逼近多项式.



当 $[a,b]=[0,1]$, $\rho(x)=1$ 时, 法方程组 (6) 的系数矩阵是

$$H=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \cdots & \frac{1}{2n+1} \end{pmatrix},$$

H 称为希尔伯特 (Hilbert) 矩阵. 当 n 较大时, 可以证明 H 是病态的. 因此, 对于许多实际问题来说, 通过法方程来确定函数的最佳平方逼近多项式是有困难的.

如果能找到 $\mathbb{P}_n[x]$ 的一组正交基, 即正交多项式, 那么法方程组 (6) 的系数矩阵就是对角矩阵, 线性方程组便可直接求解, 即式 (5), 从而保证了计算的可靠性. 另外, 正交多项式本身在数值积分, 微分方程, 数学物理方法, 编码理论等领域也有重要的应用.

§9.3.2 正交多项式

定义 9.9

定义在 $[a,b]$ 上的函数系 $\{g_l(x)\}_{l=0}^n$ 称为 $\mathbb{P}_n[x]$ 的一组***正交多项式基***, 如果它满足以下条件

(1) $g_l(x)$ 是 l 次多项式, 即

$$g_l(x) = a_l x^l + a_{l-1}x^{l-1} + \cdots + a_0,\ a_l \neq 0;$$

(2) $(g_i, g_j) = 0,\ \forall i \neq j;\quad (g_i, g_i) > 0,\ i = 0, 1, \cdots, n,$

其中 $g_l(x)$ 称为l ***次正交多项式***. 进一步, 若有 $(g_i, g_i) = 1,\ i = 0, 1, \cdots, n$, 则称 $\{g_l(x)\}_{l=0}^n$ 是 $[a,b]$ 上 $\mathbb{P}_n[x]$ 一组***规范正交多项式基***.

利用正交性, 对于任意的 k 次多项式 $p_k(x)$, 则有

$$(p_k, g_l) = 0, \quad l > k.$$

令 $g_l^*(x) = g_l(x)/a_l$, $l = 0, 1, \cdots, n$, 称 $\{g_l^*(x)\}_{l=0}^n$ 为 $[a, b]$ 上 $\mathbb{P}_n[x]$ 一组**首项系数为 1 的正交多项式基**.

如何计算正交多项式?

定理 9.8

正交多项式基 $\{g_l^*(x)\}_{l=0}^n$ 有递推公式:

$$\begin{cases} g_0^*(x) = 1, \quad g_1^*(x) = x - \dfrac{(xg_0^*, g_0^*)}{(g_0^*, g_0^*)}, \\ g_k^*(x) = (x - a_k)g_{k-1}^*(x) - b_k g_{k-2}^*(x), \quad k = 2, 3, \cdots, n, \end{cases} \tag{7}$$

其中 $a_k = \dfrac{(xg_{k-1}^*, g_{k-1}^*)}{(g_{k-1}^*, g_{k-1}^*)}$, $b_k = \dfrac{(xg_{k-1}^*, g_{k-2}^*)}{(g_{k-2}^*, g_{k-2}^*)}$.

§9.3.2 正交多项式

定理 9.9

若 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上任一连续函数，与 $g_0^*(x), g_1^*(x), \cdots, g_n^*(x)$ 都正交，则 $f(x)$ 在 (a,b) 中至少变号 $n+1$ 次或者恒等于零.

推论 9.3

若 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上任一连续函数, $p(x)$ 是 $f(x)$ 的 n 次最佳平方逼近多项式，则 $p(x)$ 在 (a,b) 中至少 $n+1$ 个点插值于 $f(x)$.

§9.3.2 正交多项式

与一般的多项式不同，正交多项式的零点具有很好的性质.

定理 9.10

区间 $[a,b]$ 上的 l 次正交多项 $g_l^*(x)$ 恰有 l 个互异的实根，并且全部位于 $[a,b]$ 的内部.

勒让德 (Legendre) 多项式

设 $\rho(x) \equiv 1$, 区间 $[-1,1]$ 上 $\mathbb{P}_n(x)$ 的正交基 $\{P_k(x)\}_{k=0}^n$, 称 $P_k(x)$ 为**勒让德多项式**.

$P_k(x)$ 的解析表达式:

$$P_k(x) = \frac{1}{2^k k!}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\left[(x^2-1)^k\right], \quad k = 0, 1, \cdots, n. \tag{8}$$

递推计算公式:

$$P_{k+1}(x) = \frac{2k+1}{k+1}xP_k(x) - \frac{k}{k+1}P_{k-1}(x), \quad k = 1, 2, \cdots, n. \tag{9}$$

当 k 为偶数时, $P_k(x)$ 为偶函数; 当 k 为奇数时, $P_k(x)$ 为奇函数.

第一类切比雪夫 (Chebyshev) 多项式

设 $\rho(x)=(1-x^2)^{-1/2}$, 区间 $[-1,1]$ 上 $\mathbb{P}_n(x)$ 的正交基 $\{T_k(x)\}_{k=0}^n$, 称 $T_k(x)$ 为**第一类切比雪夫多项式**.

$T_k(x)$ 的解析表达式:

$$T_k(x)=\cos(k\arccos x),\quad k=0,1,\cdots,n. \tag{10}$$

递推计算公式:

$$\begin{cases} T_{k+1}(x)=2xT_k(x)-T_{k-1}(x), & k=1,2,\cdots,n, \\ T_0(x)=1, \quad T_1(x)=x. \end{cases} \tag{11}$$

$T_k(x)$ 是首项系数为 2^{k-1} 的 k 次多项式, 且 T_{2k} 只含 x 的偶次幂, T_{2k-1} 只含 x 的奇次幂.

第二类切比雪夫 (Chebyshev) 多项式

设 $\rho(x) = (1-x^2)^{1/2}$, 区间 $[-1,1]$ 上 $\mathbb{P}_n(x)$ 的正交基 $\{U_k(x)\}_{k=0}^n$, 称 $U_k(x)$ 为**第二类切比雪夫多项式**.

$U_k(x)$ 的解析表达式:

$$U_k(x) = \frac{\sin[(k+1)\arccos x]}{\sqrt{1-x^2}}, \quad k = 0, 1, \cdots, n. \tag{12}$$

递推计算公式:

$$\begin{cases} U_{k+1}(x) = 2xU_k(x) - U_{k-1}(x), \quad k = 1, 2, \cdots, n, \\ U_0(x) = 1, \quad U_1(x) = 2x. \end{cases} \tag{13}$$

拉盖尔 (Laguerre) 多项式

设 $\rho(x) = e^{-x}$, 区间 $[0, +\infty)$ 上 $\mathbb{P}_n(x)$ 的正交基 $\{L_k(x)\}_{k=0}^n$, 称 $L_k(x)$ 为**拉盖尔多项式**.
$L_k(x)$ 的解析表达式

$$L_k(x) = e^x \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}(x^k e^{-x}), \quad k = 0, 1, \cdots, n. \tag{14}$$

递推计算公式:

$$\begin{cases} L_{k+1}(x) = (2k+1-x)L_k(x) - k^2 L_{k-1}(x), & k = 1, 2, \cdots, n, \\ L_0(x) = 1, \quad L_1(x) = 1 - x. \end{cases} \tag{15}$$

埃尔米特 (Hermite) 多项式

设 $\rho(x)=e^{-x^2}$, 区间 $(-\infty,+\infty)$ 上 $\mathbb{P}_n(x)$ 的正交基 $\{H_k(x)\}_{k=0}^n$, 称 $H_k(x)$ 为**埃尔米特多项式**.

$H_k(x)$ 的解析表达式

$$H_k(x)=(-1)^n e^{x^2}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}(e^{-x^2}),\quad k=0,1,\cdots,n. \tag{16}$$

递推计算公式:

$$\begin{cases} H_{k+1}(x)=2xH_k(x)-2kH_{k-1}(x), & k=1,2,\cdots,n, \\ L_0(x)=1,\quad L_1(x)=2x. \end{cases} \tag{17}$$

§9.4.1 周期函数的最佳平方逼近

傅立叶 (Fourier) 大胆断言: "任何" 周期函数都可以表示为三角函数级数的形式, 即*傅立叶级数*. 对于非周期信号, 傅立叶指出可用三角函数的加权积分来表示, 即*傅立叶变换*.

傅立叶分析作为最基本的数学工具, 被广泛应用于信号的时频域分析、谱分析、微分方程求解等.

连续情形的傅立叶级数.

考虑区间 $[0,T)$ 上的平方可积函数空间 $L^2[0,T)$, 使用式 (2) 定义的内积及其诱导的范数. 若规定 $f(x)=f(x-T), \forall x\in\mathbb{R}$, 则可将 $L^2[0,T)$ 中的任一函数延拓为实数域 $\mathbb{R}$ 上周期为 T 的函数.

在此意义下, $L^2[0,T)$ 称为*周期为 T 的平方可积函数空间*.

若取 $[0,T)$ 上的逼近函数空间 $M=\mathrm{span}\{\varphi_0,\varphi_1,\cdots,\varphi_{2n}\}$, 其中

$$\varphi_0=\frac{1}{2},\varphi_{2k}=\cos k\omega x,\varphi_{2k-1}=\sin k\omega x,\quad k=1,2,\cdots,n,\omega=\frac{2\pi}{T}.$$

容易验证三角多项式函数系 $\{\varphi_i\}_{i=0}^{2n}$ 构成 M 的一组正交基.

利用定理9.5和9.6知, 对于任意的函数 $f(x)\in L^2[0,T)$, 存在唯一的最佳平方逼近元 $f_n(x)\in M$, 且有

$$f_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k\cos k\omega x+b_k\sin k\omega x\right),$$

其中

$$\begin{aligned}a_k&=\frac{(f,\varphi_{2k})}{(\varphi_{2k},\varphi_{2k})}=\frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos k\omega x\,\mathrm{d}x,\quad k=0,1,\cdots,n,\\ b_k&=\frac{(f,\varphi_{2k-1})}{(\varphi_{2k-1},\varphi_{2k-1})}=\frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin k\omega x\,\mathrm{d}x,\quad k=0,1,\cdots,n.\end{aligned}\tag{18}$$

由数学分析中的 Fourier 级数理论知, 最佳平方逼近三角多项式 $f_n(x)$ 恰好是 $f(x)$ 的 Fourier 级数的部分和, 而 a_k, b_k 为 Fourier 系数. 此外, 利用 Fourier 级数的收敛性定理可得:

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\| = 0,$$

即 $f_n(x)$ 平方收敛到 $f(x)$.

§9.4.1 周期函数的最佳平方逼近

利用 Euler 公式 $e^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$, Fourier 级数可以写成复数形式

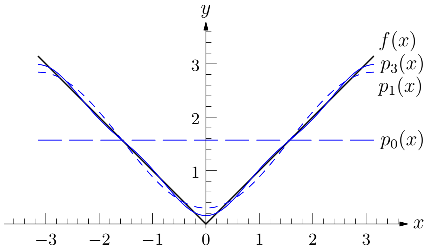
$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{\mathrm{i}k\omega x},$$

其中

$$c_k = \frac{1}{T}\int_0^T f(x) e^{-\mathrm{i}k\omega x}\,\mathrm{d}x.$$

例 9.10

设 $f(x) = |x|$, 求 $f(x)$ 在区间 $[-\pi, \pi]$ 上的 n 次最佳平方逼近三角多项式.



离散情形的傅立叶级数.

设 $f(x) \in L^2[0,T)$, 已知 $f(x)$ 在一系列等距离散点上的值, 即

$$f_k = f(x_k), \quad x_k = \frac{kT}{n}, \quad k = 0, 1, 2, \cdots, n-1.$$

明显地, $(f_0, f_1, \cdots, f_{n-1})^{\mathrm{T}} \in \mathbb{C}^n$. 在 $L^2[0,T)$ 上定义离散的内积和诱导的拟范数

$$(f, g) = \sum_{k=0}^{n-1} f_k \cdot \bar{g}_k, \quad \forall f, g \in L^2[0,T),$$

$$\|f\| = \sqrt{(f, f)}, \quad \forall f \in L^2[0,T).$$

§9.4.2 离散傅立叶变换

利用公式 (5) 及 $\{1, e^{\mathrm{i}\omega x}, e^{\mathrm{i}2\omega x}, \cdots, e^{\mathrm{i}(m-1)\omega x}\}$ 的正交性, 即

$$(e^{\mathrm{i}jx}, e^{\mathrm{i}lx}) = \sum_{k=0}^{n-1} e^{\mathrm{i}(j-l)\omega x_k} = \begin{cases} 0, & j \neq l, \\ n, & j = l, \end{cases}$$

则 $f(x)$ 的离散数据 $\{(x_k, f_k)\}_{k=0}^{n-1}$ 在空间 $M = \mathrm{span}\{1, e^{\mathrm{i}\omega x}, e^{\mathrm{i}2\omega x}, \cdots, e^{\mathrm{i}(m-1)\omega x}\}$ 的最佳平方逼近元为

$$s_m(x) = \sum_{l=0}^{m-1} g_l e^{\mathrm{i}l\omega x}, \quad g_l = \frac{(f, e^{\mathrm{i}l\omega x})}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f_k e^{-\mathrm{i}l\omega x_k}.$$

§9.4.2 离散傅立叶变换

当 $m=n$ 时，插值条件 $s_n(x_k)=f(x_k), k=0,1,\cdots,n-1$ 成立，称 $s_n(x)$ 为 $f(x)$ 的$n-1$ *次插值三角多项式*.

利用插值三角多项式的系数与样本值之间的关系，来定义离散傅立叶变换及其逆变换.

定义 9.10

设有向量 $\mathbf{f} = (f_0, f_1, \cdots, f_{n-1})^{\mathrm{T}} \in \mathbb{C}^n$, 称向量

$$\mathbf{g} = (g_0, g_1, \cdots, g_{n-1})^{\mathrm{T}} \in \mathbb{C}^n$$

为向量 $\mathbf{f}$ 的**离散傅立叶变换** (Discrete Fourier Transform, DFT), 其中

$$g_l = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f_k e^{-\mathrm{i}2\pi lk/n}, \quad l = 0, 1, \cdots, n-1.$$

反之, 称向量 $\mathbf{f}$ 为向量 $\mathbf{g}$ 的**离散傅立叶逆变换**, 即

$$f_j = \sum_{k=0}^{n-1} g_l e^{\mathrm{i}2\pi jk/n}, \quad j = 0, 1, \cdots, n-1.$$

§9.4.2 离散傅立叶变换

离散傅立叶变换可写成

$$
\begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_{n-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} \rho^0 & \rho^0 & \rho^0 & \cdots & \rho^0 \\ \rho^0 & \rho^1 & \rho^2 & \cdots & \rho^{n-1} \\ \rho^0 & \rho^2 & \rho^4 & \cdots & \rho^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho^0 & \rho^{n-1} & \rho^{2(n-1)} & \cdots & \rho^{(n-1)^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{n-1} \end{pmatrix}
$$

$$
\iff \mathbf{g} = F_n \mathbf{f},
$$

其中 $\rho = e^{-\mathrm{i}2\pi/n}$, 称 F_n 为**傅立叶变换矩阵**.

§9.4.2 离散傅立叶变换

F_n 是对称矩阵, 且除了第一行 (列) 外, 矩阵的每一行 (列) 元素之和为零.

F_n 满足 $F_n\overline{F_n^{\mathrm{T}}} = I/n$, 即 $F_n/\sqrt{n}$ 是酉阵.

傅立叶变换矩阵 F_n 的逆为

$$F_n^{-1} = n\overline{F_n} = \begin{pmatrix} \rho^0 & \rho^0 & \rho^0 & \cdots & \rho^0 \\ \rho^0 & \rho^{-1} & \rho^{-2} & \cdots & \rho^{-(n-1)} \\ \rho^0 & \rho^{-2} & \rho^{-4} & \cdots & \rho^{-2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho^0 & \rho^{-(n-1)} & \rho^{-2(n-1)} & \cdots & \rho^{-(n-1)^2} \end{pmatrix},$$

即离散傅立叶逆变换的矩阵表示.

§9.4.2 离散傅立叶变换

在许多工程领域, 利用计算机进行 Fourier 分析的主要方法是离散傅立叶变换.

不难看出, 计算离散傅立叶变换需要 n^2 次乘法, $n(n-1)$ 次加法及 n 次除法, 故时间复杂度为 $O(n^2)$. 当 N 很大时, 运算量会变得相当大, 即使用高速计算机, 也需要花费大量的时间.

快速傅立叶变换 (Fast Fourier Transform, FFT) 算法, 使得算法时间复杂度降为 $O(n\log n)$, 被评为二十世纪的十大算法之一!

§9.4.3 快速傅立叶变换

快速傅立叶变换采用分而治之 (Divide and conquer) 策略.

下面介绍一种常用的逐次分半算法. 若 $n = 2m$ 为偶数, 记 $\omega_n = e^{-i2\pi/n}$, 多项式 $p(z) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f_k z^k$, 则

$$g_l = p(\omega_n^l), \quad l = 0, 1, \cdots, n-1,$$

即计算向量 $\mathbf{f}$ 的离散傅立叶变换等价于求多项式 $p(z)$ 在 n 个点 $\{1, \omega_n, \omega_n^2, \cdots, \omega_n^{n-1}\}$ 处的值.

§9.4.3 快速傅立叶变换

将 $p(x)$ 的系数按偶次项和奇数项分开，构造多项式

$$p_0(z)=\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}f_{2k}z^k,\quad p_1(z)=\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}f_{2k+1}z^k,$$

则

$$p(z)=\frac{p_0(z^2)+z\,p_1(z^2)}{2}.$$

问题转化为求 $p_0(z)$ 和 $p_1(z)$ 在 $\{1,\omega_n^2,\omega_n^4,\cdots,\omega_n^{2(n-1)}\}$ 的值.

利用单位根的性质有

$$\omega_n^{2k} = e^{-\mathrm{i}2\pi(2k)/n} = e^{-\mathrm{i}2\pi k/m} = \omega_m^k, \quad k = 0, 1, \cdots, n-1,$$

故前面的集合仅有 m 个不同的值, 即 $\{1, \omega_m, \omega_m^2, \cdots, \omega_m^{m-1}\}$.

对于 $k = 0, 1, \cdots, m-1$, 有

$$\begin{aligned} g_k &= p(\omega_n^k) = \frac{p_0(\omega_n^{2k}) + \omega_n^k p_1(\omega_n^{2k})}{2} = \frac{p_0(\omega_m^k) + \omega_n^k p_1(\omega_m^k)}{2}, \\ g_{k+m} &= p(\omega_n^{k+m}) = \frac{p_0(\omega_n^{2k+n}) + \omega_n^{k+m} p_1(\omega_n^{2k+n})}{2} = \frac{p_0(\omega_m^k) - \omega_n^k p_1(\omega_m^k)}{2}. \end{aligned} \tag{19}$$

$p(z)$ 的求值问题可划分成两个子问题解决, 即 $p_0(z)$ 和 $p_1(z)$ 的求值问题.

§9.4.3 快速傅立叶变换

假设 n 是 2 的幂次方, 反复应用上述策略, 快速傅立叶算法.

Algorithm 9.1 Fast Fourier Transform Algorithm

function FFT(**f**)
  $n \leftarrow length[\mathbf{f}]$; ▷ n is a power of 2
  if $n = 1$ **then return f**;
  $\omega_n \leftarrow e^{-i2\pi/n}$;
  $\omega \leftarrow 1$;
  $\mathbf{f}^0 \leftarrow (f_0, f_2, \cdots, f_{n-2})$;
  $\mathbf{f}^1 \leftarrow (f_1, f_3, \cdots, f_{n-1})$;
  $\mathbf{g}^0 \leftarrow \mathrm{FFT}(\mathbf{f}^0)$; ▷ Apply FFT to even coefficients
  $\mathbf{g}^1 \leftarrow \mathrm{FFT}(\mathbf{f}^1)$; ▷ Apply FFT to odd coefficients
  for $k \leftarrow 0$ to $n/2 - 1$ **do**
    $g_k \leftarrow (\mathbf{g}_k^0 + \omega \mathbf{g}_k^1)/2$; ▷ Synthesize coefficients using Eq. (9.26)
    $g_{k+n/2} \leftarrow (\mathbf{g}_k^0 - \omega \mathbf{g}_k^1)/2$;
    $\omega \leftarrow \omega\omega_n$;
  end for
  return g;
end function

假设 $n = 2^h$, 记 $C[n]$ 是计算具有 n 个分量的向量 $\mathbf{f}$ 的离散傅立叶变换所需的运算次数, 可以证明:

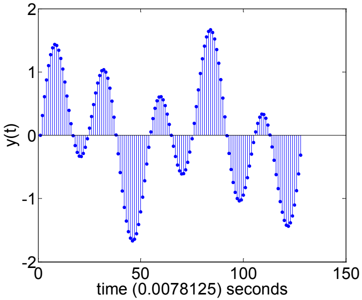
$$C[n] \leqslant 4 \cdot 2^h h = 4n \log_2(n),$$

即快速傅立叶变换算法的时间复杂度为 $O(n \log n)$.

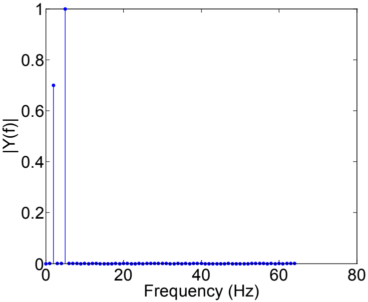
§9.4.3 快速傅立叶变换

例 9.11

$$f(t) = 0.7\sin(2\pi \times 2t) + \sin(2\pi \times 5t)$$



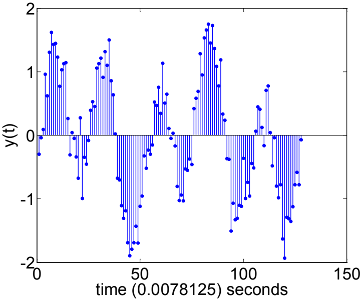
(a) 时间域上的输入信号



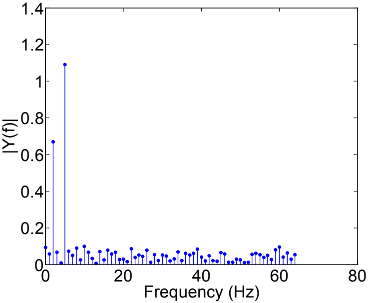
(b) 频率域上的能量分布

例 9.12

$f(t) = 0.7\sin(2\pi \times 2t) + \sin(2\pi \times 5t)$ + 噪音



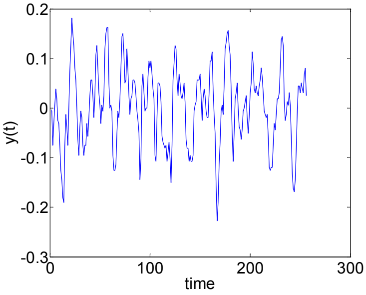
(c) 时间域上的输入信号



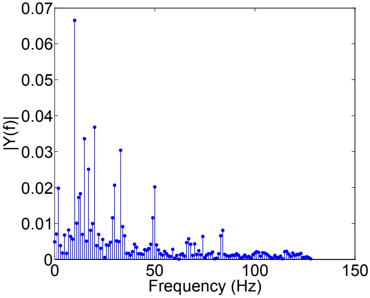
(d) 频率域上的能量分布

例 9.13

信号的去噪与重建



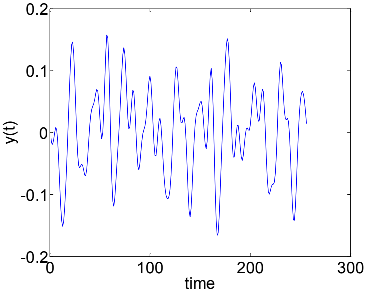
(e) 时间域上的输入信号



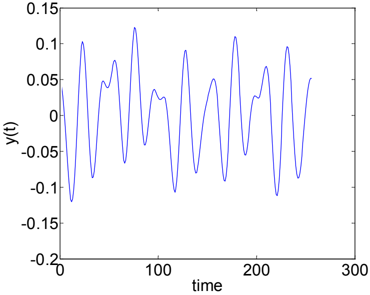
(f) 频率域上的能量分布

例 9.14

信号的去噪与重建



(g) 重建信号，使用前 25% 的系数



(h) 重建信号，使用前 12.5% 的系数

连续情形的最佳一致逼近问题.

在函数空间 $C[a,b]$ 上, 引入一致范数

$$\|f\|_\infty = \max_{x\in[a,b]} \big|f(x)\big|, \quad \forall f \in C[a,b],$$

逼近集合 M 取 $n+1$ 维多项式空间 $\mathbb{P}_n[x]$. 对于任意的 $f \in C[a,b]$, 如果存在 $p^* \in \mathbb{P}_n[x]$ 使得

$$\|f - p^*\|_\infty = \inf_{p\in\mathbb{P}_n[x]} \|f - p\|_\infty \triangleq d(f, \mathbb{P}_n[x]),$$

则称 p^* 为函数 f 的**最佳一致逼近多项式**. 由推论 (9.1) 知, 最佳一致多项式 p^* 是存在的.

§9.5.2 最佳一致逼近多项式的特征

最佳一致逼近多项式具有的特征是什么? **切比雪夫交错定理**.

考虑误差函数

$$e^*(x) = f(x) - p^*(x), \quad x \in [a, b].$$

定义 $e^*(x)$ 的极值点集, 即

$$\mathcal{L}_M = \{x \in [a, b] : |e^*(x)| = \|e^*\|_\infty\}.$$

p^* 是 f 的最佳一致逼近多项式的充分条件是: 不存在多项式 $p \in \mathbb{P}_n[x]$ 使得

$$[f(x) - p^*(x)]p(x) > 0, \qquad \forall x \in \mathcal{L}_M. \tag{20}$$

相反地, 可以证明条件 (20) 亦为 p^* 是 f 的最佳一致逼近多项式的必要条件.

§9.5.2 最佳一致逼近多项式的特征

考虑更为一般的最佳一致逼近问题, 即

$$\arg\min_{p\in\mathbb{P}_n[x]}\left\{\max_{x\in\mathcal{L}}\left|f(x)-p(x)\right|\right\}, \tag{21}$$

其中 $\mathcal{L}$ 是区间 $[a,b]$ 的任意闭子集.

定理 9.11

对任意的 $f\in C[a,b]$, $p^*\in\mathbb{P}_n[x]$, 记 $e^*(x)=f(x)-p^*(x)$, $\mathcal{L}_M=\left\{x\in\mathcal{L}:|e^*(x)|=\|e^*\|_\infty\right\}$, 则 p^* 是式 (21) 的解的充分必要条件是不存在多项式 $p\in\mathbb{P}_n[x]$ 使得条件 (20) 成立.

§9.5.2 最佳一致逼近多项式的特征

最佳逼近元的误差应在整个逼近区间上均匀分布, 即误差函数的最大值与最小值大小相等, 符号相反, 且交错分布.

定义 9.11

设 $g \in C[a,b]$, 称满足 $a \leqslant x_0 < x_1 < \cdots < x_k \leqslant b$ 的点集 $\{x_i\}_{i=0}^{k}$ 为 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上的**交错点组**, 如果它满足

$$g(x_i) = (-1)^i \sigma \|g\|_\infty, \quad i = 0, 1, \cdots, k,$$

其中 $\sigma = 1$ 或 $\sigma = -1$, 并称 x_i 为交错点.

定理 9.12

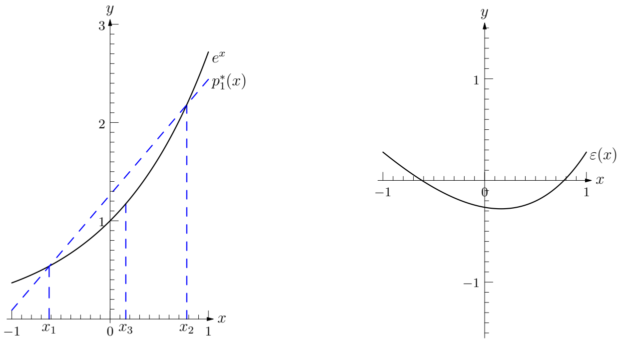
(切比雪夫交错定理) 设函数 $f \in C[a,b]$ 且 $f \notin \mathbb{P}_n[x]$, 则 p^* 是 f 的 n 次最佳一致逼近多项式的充分必要条件是 $f - p^*$ 在 $[a,b]$ 上存在有 $n+2$ 个点组成的交错点组, 即有 $a \leqslant x_0 < x_1 < \cdots < x_{n+1} \leqslant b$ 使得

$$f(x_i) - p^*(x_i) = (-1)^i \sigma \|f - p^*\|_\infty, \quad i = 0, 1, \cdots, n+1.$$

§9.5.2 最佳一致逼近多项式的特征

例 9.15

试在线性函数空间中求 e^x 在区间 $[-1,1]$ 上的最佳一致逼近多项式.



交错点组往往是不唯一的，且计算交错点组是一个困难的问题.

但是，在一些特殊的情况下，交错点组中的个别点可以被很快确定.

推论 9.4

设 p^* 是 f 的 n 次最佳一致逼近多项式，如果 f 在区间 $[a,b]$ 上有 $n+1$ 阶导数，且 f^{n+1} 在 $[a,b]$ 上不变号 (恒正或恒负)，则 $f-p^*$ 的交错点组有且仅有 $n+2$ 个交错点，且区间 $[a,b]$ 的端点属于 $f-p^*$ 的交错点组.

§9.5.2 最佳一致逼近多项式的特征

例 9.16

设 $f(x) = \sqrt{x}$, 求 $f(x)$ 在区间 $[1/4, 1]$ 上的一次最佳一致逼近多项式.

§9.5.3 唯一性与 $d(f,\mathbb{P}_n[x])$ 的下界

定理 9.13

(唯一性定理) 设函数 $f\in C[a,b]$, 则 f 用空间 $\mathbb{P}_n[x]$ 的元素所做的最佳一致逼近是唯一的.

定理 9.14

(de la Vallée-Poussin 定理) 设函数 $f\in C[a,b]$, 若存在多项式 $p\in\mathbb{P}_n[x]$, 使得 $f-p$ 在 $[a,b]$ 上至少 $n+2$ 个点 $x_0,x_1,\cdots,x_{n+1}$ 处的取值正负相间, 则

$$d(f,\mathbb{P}_n[x])\geqslant\delta=\min_{0\leqslant i\leqslant n+1}|f(x_i)-p(x_i)|.$$

§9.5.4 最佳一致逼近多项式的求解

在一般情况下，求解最佳一致逼近多项式是很困难的，通常只能是近似计算. 一种常用的方法是 Remez 算法.

设函数 $f(x)$ 的 n 次最佳一致逼近多项式为 $p^*(x)$，那么 $f-p^*$ 在 $[a,b]$ 上存在 $n+2$ 个交错点 $\{x_i\}_{i=0}^{n+1}$，使得

$$p^*(x_i) - f(x_i) = (-1)^i\mu, \quad i = 0, 1, \cdots, n+1, \qquad (22)$$

其中 $p^*(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i^* x^i, \mu = \sigma d(f, \mathbb{P}_n[x])$.
如果交错点 $\{x_i\}_{i=0}^{n+1}$ 一旦确定，那么通过线性方程组 (22) 可求出 p^* 的系数 $c_0^*, c_1^*, \cdots, c_n^*$ 和最佳逼近值 $d(f, \mathbb{P}_n[x])$.

§9.5.4 最佳一致逼近多项式的求解

寻找交错点 $\{x_i\}_{i=0}^{n+1}$ 并非一件容易的事, Remez 采用逐次逼近策略提出一种近似算法.

具体步骤如下:

(1) 设定精度 $\varepsilon > 0$, 在 $[a,b]$ 上任选 $n+2$ 个初始点 $a \leqslant x_0^0 < x_1^0 < \cdots < x_{n+1}^0 \leqslant b$ 作为初始交错点, 代入式 (22), 求得 $p^0(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} c_i^0 x^i$ 及 μ^0.

(2) 设第 l 步的交错点为 $\{x_i^l\}_{i=0}^{n+1}$, 逼近多项式 $p^l(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} c_i^l x^i$, 逼近误差为 μ^l, 记

$$\eta^l \triangleq \max_{x\in[a,b]} |f(x) - p^l(x)| = |f(\hat{x}) - p^l(\hat{x})|,$$

如果 $\eta^l - |\mu^l| < \varepsilon$, 则算法结束, $p^l(x)$ 作为最佳一致逼近多项式 p^* 的近似; 否则, 利用 $\hat{x}$ 替换交错点 $\{x_i^l\}_{i=0}^{n+1}$ 中的某一点, 得到新的交错点 $\{x_i^{l+1}\}_{i=0}^{n+1}$, 规则如下:

1. 当 $\hat{x} \in (x_i^l, x_{i+1}^l)$ 时, 若 $f(\hat{x}) - p^l(\hat{x})$ 与 $f(x_i^l) - p^l(x_i^l)$ 同号, 则用 $\hat{x}$ 替换 x_i^l; 否则用 $\hat{x}$ 替换 x_{i+1}^l.
2. 当 $\hat{x} < x_0^l$ 时, 若 $f(\hat{x}) - p^l(\hat{x})$ 与 $f(x_0^l) - p^l(x_0^l)$ 同号, 则用 $\hat{x}$ 替换 x_0^l; 否则新的交错点为 $\{\hat{x}, x_0^l, \cdots, x_n^l\}$.
3. 当 $\hat{x} > x_{n+1}^l$ 时, 若 $f(\hat{x}) - p^l(\hat{x})$ 与 $f(x_{n+1}^l) - p^l(x_{n+1}^l)$ 同号, 则用 $\hat{x}$ 替换 x_{n+1}^l; 否则新的交错点为 $\{x_1^l, \cdots, x_{n+1}^l, \hat{x}\}$.

(3) 将新的交错点 $\{x_i^{l+1}\}_{i=0}^{n+1}$ 代入式 (22), 求得

$$p^{l+1}(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i^{l+1} x^i$$ 及 μ^{l+1}. 令 $l \leftarrow l+1$, 返回步骤 (2).

§9.5.4 最佳一致逼近多项式的求解

优点: Remez 算法是收敛的, 且对于许多函数, 收敛速度甚至是二次的; 对于初值的选取也不太敏感.

缺点: Remez 算法的计算量是比较大的.

近似求解方法, 其中有一类重要的方法是: 使用切比雪夫多项式.

§9.6.1 切比雪夫多项式的性质

切比雪夫多项式 $T_k(x)$ 是区间 $[-1,1]$ 上的多项式空间 $\mathbb{P}_n(x)$ 关于权函数 $\rho(x)=(1-x^2)^{-1/2}$ 的一组正交基, 即

$$T_k(x)=\cos(k\arccos x),\quad x\in[-1,1],$$

$$\int_{-1}^{1}\frac{T_m(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & m\neq n,\\ \pi/2, & m=n\neq 0,\\ \pi, & m=n=0.\end{cases}$$

$T_k(x)$ 在 $[-1,1]$ 恰有 k 个不同的实根

$$x_i=\cos\frac{(2i-1)\pi}{2k},\quad i=1,2,\cdots,k.$$

$T_0 = 1$	$1 = T_0$
$T_1 = x$	$x = T_1$
$T_2 = 2x^2 - 1$	$x^2 = (T_0 + T_2)/2$
$T_3 = 4x^3 - 3x$	$x^3 = (3T_1 + T_3)/4$
$T_4 = 8x^4 - 8x^2 + 1$	$x^4 = (3T_0 + 4T_2 + T_4)/8$
$T_5 = 16x^5 - 20x^3 + 5x$	$x^5 = (10T_1 + 5T_3 + T_5)/16$
$T_6 = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$	$x^6 = (10T_0 + 15T_2 + 6T_4 + T_6)/32$
$T_7 = 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x$	$x^7 = (35T_1 + 21T_3 + 7T_5 + T_7)/64$
$T_8 = 128x^8 - 256x^6 + 160x^4 - 32x^2 + 1$	$x^8 = (35T_0 + 56T_2 + 28T_4 + 8T_6 + T_8)/128$
$T_9 = 256x^9 - 576x^7 + 432x^5 - 120x^3 + 9x$	$x^9 = (126T_1 + 64T_3 + 36T_5 + 9T_7 + T_9)/256$
$\vdots$	$\vdots$

Table: $\{T_i(x)\}_{i=0}^n$ 与 $\{x^i\}_{i=0}^n$ 之间的相互线性表示

§9.6.1 切比雪夫多项式的性质

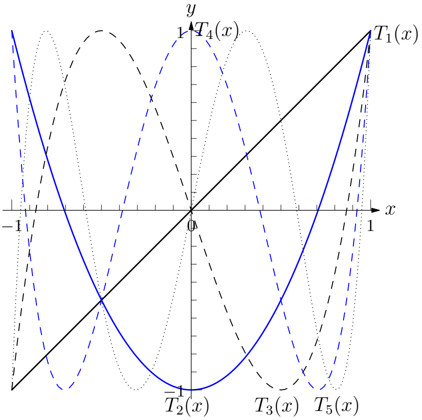


Figure: 切比雪夫多项式

§9.6.2 最小零偏差问题

考虑区间 $[-1,1]$ 上空间 $\mathbb{P}_{n-1}[x]$ 对 $f(x)=x^n$ 的最佳一致逼近问题，即求 $p_{n-1}^* \in \mathbb{P}_{n-1}[x]$，使得

$$\|f-p_{n-1}^*\| = \min_{p_{n-1}\in\mathbb{P}_{n-1}[x]} \|x^n - p_{n-1}\|,$$

其中 $\|f\| = \max\limits_{x\in[-1,1]} |f(x)|$.
若记 $\mathbb{P}_n^1[x]$ 为所有首项系数为 1 的 n 次多项式的全体，则前述问题等价于求 $p_n^* \in \mathbb{P}_n^1[x]$，使得

$$\|p_n^* - 0\| = \min_{p_n\in\mathbb{P}_n^1[x]} \|p_n - 0\|.$$

因此，该问题亦称为**最小零偏差问题**.

§9.6.2 最小零偏差问题

切比雪夫多项式 $T_k(x)$ 在 $n+1$ 个点

$$x_i = \cos\frac{i\pi}{n}, \quad i = 0, 1, \cdots, n,$$

处符号交错并取到最大值 1 或最小值 -1，且 $T_k(x)$ 是首项系数为 2^{n-1} 的多项式，故可大胆猜测 $p_n^*(x) = 2^{1-n}T_n(x)$.

定理 9.15

对于任意的 $p_n \in \mathbb{P}_n^1[x]$，有

$$\|p_n\| = \max_{x\in[-1,1]} |p_n(x)| \geqslant \|2^{1-n}T_n(x)\| = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

当且仅当 $p_n(x) = 2^{1-n}T_n(x)$ 时，等号成立.

§9.6.3 插值余项极小化问题

设函数 $f(x) \in C^{n+1}[-1,1]$, 若取 $n+1$ 个互不相同的节点 $-1 < x_0 < x_1 < \cdots < x_n < -1$, 构造 $f(x)$ 的 n 次插值多项式 $q_n(x)$, 则有

$$\|f - q_n\| \leqslant \frac{\|f^{(n+1)}\|}{(n+1)!} \max_{x\in[-1,1]} |(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)|.$$

问题: 如何选取节点 x_i, $i = 0, 1, \cdots, n$ 使得插值余项尽可能的小, 等价于寻找多项式

$$p_{n+1}(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n) \in \mathbb{P}^1_{n+1}[x],$$

使其在区间 $[-1,1]$ 的零偏差最小.

当节点取 $n+1$ 次切比雪夫多项式的零点时，即

$$x_{i-1}=\cos\frac{(2i-1)\pi}{2n+2},\quad i=1,2,\cdots,n+1,$$

$\|p_{n+1}(x)\|$ 取到最小值，为

$$\|f-q_n\|\leqslant\frac{\|f^{(n+1)}\|}{(n+1)!}\cdot 2^{-n}\|T_{n+1}\|=\frac{\|f^{(n+1)}\|}{2^n(n+1)!}.$$

当 $f^{(n+1)}(x)$ 在 $[-1,1]$ 上变化不大时，取切比雪夫多项式的零点作为插值节点，此时 $q_n(x)$ 可视为 $f(x)$ 的近似最佳逼近多项式.

§9.6.3 插值余项极小化问题

如果插值区间为 $[a,b]$ 时，利用仿射变换

$$t=[a+b+(b-a)x]/2,$$

插值节点可取为

$$x_{i-1}=\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}\cos\frac{(2i-1)\pi}{2n+2},\quad i=1,2,\cdots,n+1.$$

如何用切比雪夫多项式级数来逼近函数.

对于任意的 $f \in C[-1,1]$, 取权函数 $\rho(x) = (1-x^2)^{-1/2}$, 可按空间 $L^2_\rho[-1,1]$ 的内积构造 n 次最佳平方逼近多项式

$$S_n(x) = c_0 \frac{T_0(x)}{2} + \sum_{i=1}^{n} c_i T_i(x),$$

其中

$$c_i = \frac{(f, T_i)}{(T_i, T_i)} = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{f(x) T_i(x)}{\sqrt{1-x^2}} \, \mathrm{d}x, \quad i = 0, 1, \cdots, n,$$

称 $S_n(x)$ 为函数 $f(x)$ 按切比雪夫多项式展开的部分和. 可以证明:

$$\lim_{n\to\infty} \|f - S_n\|_2^2 = \lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} \frac{[f(x) - S_n(x)]^2}{\sqrt{1-x^2}} \, \mathrm{d}x = 0.$$

如果 $f \in C^1[-1,1]$, 那么

$$\lim_{n\to\infty} \|f - S_n\|_\infty = \lim_{n\to\infty} \max_{x\in[-1,1]} |f(x) - S_n(x)| = 0,$$

即 $S_n(x)$ 一致收敛于 $f(x)$.

如果 $f \in C^r[-1,1]$, 那么存在由 f 和 r 决定的常数 c, 使得

$$|c_i| \leqslant \frac{c}{i^r}, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

对于足够光滑的函数 f, 随着 i 的增大, 它的切比雪夫多项式展开系数 c_i 迅速趋于零.

对于截断的展开式 $S_n(x)$, 如果 $c_{n+1} \neq 0$ 且系数 c_i 迅速趋于零, 那么

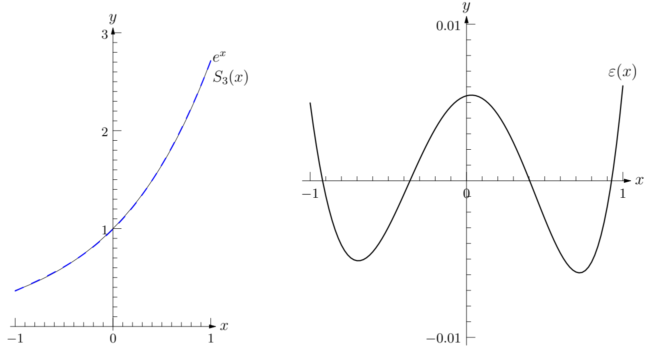
$$f(x) - S_n(x) = \sum_{i=n+1}^{\infty} c_i T_i(x) \approx c_{n+1} T_{n+1}(x),$$

而 $T_{n+1}(x)$ 恰好有 $n+2$ 个相等的极大和极小值, 故 $S_n(x)$ 相似于最佳一致逼近多项式.

§9.6.4 切比雪夫逼近问题

例 9.17

设 $f(x) = e^x$, 求 $f(x)$ 在区间 $[-1, 1]$ 上的三次最佳平方逼近切比雪夫多项式.



§9.6.5 多项式降阶逼近问题

多项式作为一类常用的函数被广泛的使用, 具有简单、高效等优点.

当多项式的次数较高时, 譬如 $n \geqslant 20$, 容易出现出不稳定, 强震荡等现象, 计算效率降低.

想法: 用低次的多项式去逼近高次的多项式.

§9.6.5 多项式降阶逼近问题

多项式 $p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ 的低次逼近可按以下步骤计算:

(1) 利用表1, 将多项式 $p_n(x)$ 写成切比雪夫多项式级数的形式, 即

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i T_i(x);$$

(2) 取切比雪夫多项式级数的前 m 项, 记为

$$q_m(x) = \sum_{i=0}^{m} c_i T_i(x);$$

(3) 再利用表1, 将多项式 $q_n(x)$ 写成幂级数的形式, 即

$$q_m(x) = \sum_{i=0}^{m} \hat{a}_i x^i.$$

例 9.18

设 $f(x)=e^{-x}$, 其 Taylor 展开式的前 10 项为

$$e^{-x}\approx p_9(x)\triangleq 1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^9}{9!},$$

利用表1, 多项式 $p_9(x)$ 可以写成 Chebyshev 多项式级数的形式, 即

$$\begin{aligned}p_9(x)\approx{}&1.2661\times T_0(x)-1.1303\times T_1(x)+0.2715\times T_2(x)-0.0443\times T_3(x)\\&+0.005474\times T_4(x)-0.000543\times T_5(x)+0.000045\times T_6(x)\\&-0.000003198\times T_7(x)+0.0000001992\times T_8(x)-0.00000001104\times T_9(x).\end{aligned}$$

容易看出, 随着 k 增大, $T_k(x)$ 的系数迅速变小, 又因 $|T_k(x)|\leqslant 1$, 故可略去次数较高的 $T_k(x)$ 项. 此时, 逼近多项式的次数显著降低了, 从而大大节省了计算工作量.

若要求 $[-1,1]$ 上逼近 e^{-x} 的绝对误差不超过 0.00005 的多项式，可只取 $T_5(x)$ 以前的项作近似，即

$$
\begin{aligned}
S_5(x) &\approx 1.2661\times T_0(x)-1.1303\times T_1(x)+0.2715\times T_2(x)-0.0443\times T_3(x)\\
&\quad +0.005474\times T_4(x)-0.000543\times T_5(x)\\
&=1.000045-1.000022x+0.499199x^2-0.166488x^3+0.043794x^4-0.008687x^5.
\end{aligned}
$$

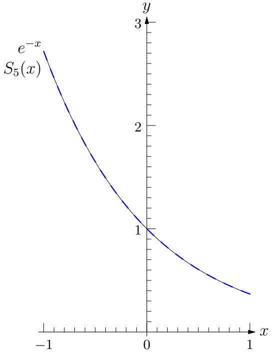
而若直接按 Taylor 展开式截断到含有 x^5 的项，则有

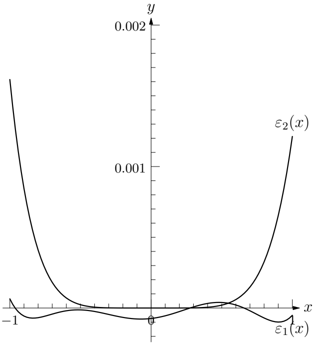
$$p_5(x)\triangleq 1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^5}{5!},$$

此时，$|e^{-x}-p_5(x)|\leqslant 1/6!+1/7!+\cdots\approx 0.0016$，约为前者绝对误差的 33 倍.

两种多项式逼近的误差分布:

$$\varepsilon_1(x) = e^{-x} - S_5(x), \quad \varepsilon_2(x) = e^{-x} - p_5(x).$$





定理 9.16

(维尔斯特拉斯第一定理) 设 $f(x)$ 是区间 $[a,b]$ 上的连续函数, 则对任意 $\varepsilon > 0$, 存在多项式 $p(x)$, 使得

$$\|f-p\| = \max_{x\in[a,b]} |f(x)-p(x)| < \varepsilon$$

成立.

该定理告诉我们可以用多项式按预先指定的精度来一致逼近连续函数, 即多项式函数空间是连续函数空间的稠密子集.

§9.7.1 连续函数的多项式逼近

构造性的证明是伯恩斯坦 (Bernstein) 给出的，他引进了如下的伯恩斯坦多项式:

$$B_n(f;x)=\sum_{i=0}^{n} f(\frac{i}{n})\binom{n}{i}x^i(1-x)^{n-i},\quad x\in[0,1].$$

明显地，$B_n(f;x)$ 是区间 $[0,1]$ 上的 n 次多项式.

可以证明：对于任意的函数 $f(x)\in C[0,1]$，当 $n\to\infty$，伯恩斯坦多项式 $B_n(f;x)$ 一致收敛于 $f(x)$.

一般的区间 $[a,b]$，可通过仿射变换 $y=(x-a)/(b-a)$ 转化为区间 $[0,1]$ 来证明.

对于周期函数, 有类似的结论.

定理 9.17

(维尔斯特拉斯第二定理) 设 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上以 2π 为周期的连续函数, 则对任意 $\varepsilon>0$, 存在三角多项式 $t(x)$, 使得

$$\|f-t\| = \max_{x\in(-\infty,+\infty)} |f(x)-t(x)| < \varepsilon$$

成立.

可以证明: 维尔斯特拉斯第一定理与第二定理是相互等价的.

§9.7.2 逼近的阶

为了描述收敛速度的快慢，需要引入连续模和光滑模的概念.

定义 9.12

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，其中 I 是有限或无限，开或不开均可以．对于 $h>0$，称

$$\omega(f;h) \triangleq \sup_{x,x+t\in I,|t|<h} |f(x+t)-f(x)|$$

为 $f(x)$ 在区间 I 上的**连续模**.

连续性模的几何意义是：当 x_1, x_2 的距离小于 h 时，$f(x)$ 在 x_1, x_2 的值相差不会超过 $\omega(f;h)$.

$\omega(f;h)$ 是 $[0,+\infty)$ 上的非负单调增函数.

函数 $f(x)$ 在 I 上一致连续的充分必要条件是 $\lim_{h\to 0+} \omega(f;h)=0$.

§9.7.2 逼近的阶

若记 $\Delta_h f(x) = f(x+h) - f(x)$ 是函数 f 在点 x 的步长为 h 的一阶向前差分，那么

$$\Delta_h^r f(x) \triangleq \Delta_h(\Delta_h^{r-1} f(x)) = \sum_{i=0}^{r} (-1)^{r-i} \binom{r}{i} f(x+ih)$$

称为 f 在点 x 步长为 h 的 r 阶向前差分.

定义 9.13

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的连续函数，称

$$\omega_r(f;h) \triangleq \sup_{x, x+rt \in [a,b], |t|<h} |\Delta_t^r f(x)|$$

为 $f(x)$ 在区间 I 上的r ***阶光滑模***. 当 $r=1$ 时，r 阶光滑模就是连续模.

§9.7.2 逼近的阶

$\omega_r(f;h)$ 是 h 的增函数, 连续函数, 且 $\omega_r(f;0)=0$. 不难证明:

$$\omega_r(f;h) \leqslant 2^{r-1}\omega(f;h) \leqslant 2^r\|f\|_\infty.$$

当 $f(x)\in C^r[a,b]$ 时, 有

$$\omega_r(f;h) \leqslant h^r\|f^{(r)}\|_\infty,$$

以及 $\lim\limits_{h\to 0}\omega_r(f;h)/h^r=0$ 的充分必要条件是 $f(x)\in\mathbb{P}_r[x]$.

对于 $f(x) \in C[a,b]$, 函数 f 的 n 次最佳一致多项式逼近误差记为

$$E_n(f) = \min_{p_n \in \mathbb{P}_n[x]} \|f - p_n\|_\infty.$$

对于 $f(x) \in C_{2\pi}$, 函数 f 的 n 次最佳一致三角多项式逼近误差记为

$$E_n^*(f) = \min_{t_n \in \mathbb{T}_n[x]} \|f - t_n\|_\infty,$$

其中

$$\mathbb{T}_n[x] \triangleq \left\{ \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \;\middle|\; a_0, a_k, b_k \in \mathbb{R} \right\}.$$

由维尔斯特拉斯第一和第二定理知, 数列 $\{E_n(f)\}_{n=0}^\infty$ 和 $\{E_n^*(f)\}_{n=0}^\infty$ 均收敛于 0.

§9.7.2 逼近的阶

定理 9.18

(Jackson 定理) 设 $f(x) \in C_{2\pi}$, 则存在常数 C 使得

$$E_n^*(f) \leqslant C\omega\left(f; \frac{1}{n}\right), \quad n = 1, 2, \cdots,$$

以及

$$E_n^*(f) \leqslant C\omega_2\left(f; \frac{1}{n}\right),$$

成立.

若函数 f 有更高阶的连续导数, 则 $E_n^*(f)$ 有更快的收敛速度.

定理 9.19

设 $f(x) \in C_{2\pi}$, 且具有 r 阶的连续导数, 则存在常数 C_r 使得

$$E_n^*(f) \leqslant \frac{C_r}{n^r}\omega\left(f^{(r)}, \frac{1}{n}\right), \quad n = 1, 2, \cdots,$$

成立.

若已知 $E_n^*(f)$ 的收敛速度, 则可反过来估计函数的连续模和光滑模.

定义 9.14

设 $f(x)$ 是区间 I 上的函数, 若 $f(x)$ 满足

$$|f(x)-f(y)| \leqslant C|x-y|^{\alpha}, \quad \forall x,y \in I,$$

其中 $C,\alpha \in \mathbb{R}$ 是正常数, 则称 $f(x)$ 满足**李普希茨条件**, 记作 $f \in \mathrm{Lip}_C\alpha$ 或 $f \in \mathrm{Lip}\alpha$.

§9.7.3 被逼近函数的性质

定理 9.20

设 $f(x) \in C_{2\pi}$，则存在常数 $C_r (r = 1, 2, \cdots)$ 使得

$$\omega_r(f, h) \leqslant C_r h^r \sum_{0 \leqslant n \leqslant h^{-1}} (n+1)^{r-1} E_n^*(f), \quad h > 0,$$

成立.

定理 9.21

(Bernstein 逆定理) 设 $f(x) \in C_{2\pi}$，则 $f \in Lip\alpha\, (0 < \alpha < 1)$ 的充分必要条件是

$$E_n^*(f) = O(n^{-\alpha}).$$

于代数多项式的连续函数类的最佳逼近有类似的定量理论，但与基于三角多项式的最佳逼近理论有不同的性态.

在函数逼近论中，还有许多非常重要的课题，譬如宽度，熵，最优恢复，样条函数的逼近理论等.

多变量的函数逼近理论，目前虽然有了一些结果，但是还很不完善.

在应用方面，近些年来流行的小波分析，压缩感知，深度学习等都大量用到了函数逼近理论，使得它成为一门经久不衰的学科.

Thanks for your attention!