WMMSE Algorithm Derivation

下面给出 WMMSE 算法从速率最大化问题到加权均方误差问题的详细推导过程。为了便于说明，我们以单载波、多用户干扰信道为例（注意这里的推导思路同样适用于 RIS 辅助的 LEO–UAV 系统，只是在信道模型上会更复杂）。

---

1. 原始速率最大化问题

对于第 u 个用户，其接收信号模型可以写为

$$y_u = \underbrace{\boldsymbol{h}_u^T \boldsymbol{w}_u s_u}_{\text{目标信号}} + \underbrace{\sum_{v \neq u} \boldsymbol{h}_u^T \boldsymbol{w}_v s_v}_{\text{干扰}} + n_u,$$

其中

- $\boldsymbol{w}_u$ 为用户 u 的波束成形向量，
- $\boldsymbol{h}_u$ 为用户 u 的有效信道，
- s_u 为发送信号，
- n_u 为噪声。

用户 u 的信噪比（SINR）为

$$\gamma_u = \frac{|\boldsymbol{h}_u^T \boldsymbol{w}_u|^2}{\sum_{v \neq u} |\boldsymbol{h}_u^T \boldsymbol{w}_v|^2 + \sigma^2}.$$

因此，该用户的速率为

$$R_u = \log_2(1 + \gamma_u).$$

全系统的速率最大化问题写为

$$\max_{\{\boldsymbol{w}_u\}} \sum_{u=1}^{U} \log_2(1+\gamma_u) \quad \text{s.t.} \quad \sum_{u=1}^{U} \|\boldsymbol{w}_u\|^2 \le P_{\max}.$$

由于 γ_u 是 $\boldsymbol{w}_u$ 的非凸函数，上述问题是非凸优化问题。

---

2. 引入均衡器与均方误差

引入每个用户的线性接收均衡器 g_u，对接收到的信号进行处理，估计出的信号为

$$\hat{s}_u = g_u y_u.$$

定义第 u 个用户的均方误差（MSE）为

$$e_u = \mathbb{E}\left\{|s_u - g_u y_u|^2\right\}.$$

将 y_u 的表达式代入并展开，得到

$$e_u = \underbrace{\left|1 - g_u \boldsymbol{h}_u^T \boldsymbol{w}_u\right|^2}_{\text{误差项1}} + \underbrace{\sum_{v \ne u} |g_u \boldsymbol{h}_u^T \boldsymbol{w}_v|^2}_{\text{干扰项}} + |g_u|^2 \sigma^2.$$

对于固定的波束成形向量 $\{\boldsymbol{w}_u\}$ 与噪声水平，针对每个 u 的 g_u 可求解使 e_u 最小的最优均衡器，这个最优均衡器为

$$g_u^\star = \frac{\boldsymbol{h}_u^T \boldsymbol{w}_u}{\sum_{v=1}^{U} |\boldsymbol{h}_u^T \boldsymbol{w}_v|^2 + \sigma^2}.$$

将 $g_u^\star$ 代入 e_u 后，经过一些推导可以证明（这是信息论中的经典结果）：

$$e_u^\star = \frac{1}{1+\gamma_u}.$$

这就建立了最小均方误差与 SINR 之间的关系，是 WMMSE 方法的核心所在。

---

3. 构造加权均方误差目标函数

为了将速率最大化问题转化为等价的 MSE 优化问题，引入权重 $\lambda_u > 0$ 并构造下列目标函数：

$$J = \sum_{u=1}^{U} \left(\lambda_u e_u - \log \lambda_u \right).$$

在给定 $\{\boldsymbol{w}_u\}$ 和 g_u 的条件下，对于每个用户 u，固定其他变量，优化 λ_u 可得最优解为

$$\lambda_u^\star = \frac{1}{e_u^\star}.$$

将最优 $\lambda_u^\star$ 代入目标函数，得到

$$J^\star = \sum_{u=1}^{U} \left(\frac{e_u^\star}{e_u^\star} - \log \frac{1}{e_u^\star} \right) = \sum_{u=1}^{U} \left(1 + \log e_u^\star \right).$$

又因为 $e_u^\star = \frac{1}{1+\gamma_u}$，所以

$$1 + \log e_u^\star = 1 - \log(1 + \gamma_u).$$

因此

$$J^\star = U - \sum_{u=1}^{U} \log(1 + \gamma_u).$$

最小化 J 与最大化 $\sum_u \log(1 + \gamma_u)$ 等价（常数 U 不影响最优解），从而原问题转化为

$$\min_{\{\boldsymbol{w}_u, g_u, \lambda_u\}} \sum_{u=1}^{U} (\lambda_u e_u - \log \lambda_u) \quad \text{s.t.} \quad \sum_{u=1}^{U} \|\boldsymbol{w}_u\|^2 \le P_{\max}.$$

---

4. 交替优化求解步骤

由于上述目标函数在 $\boldsymbol{w}_u$、g_u 以及 λ_u 上均非凸，但对每个变量单独固定其他变量时问题是凸

的，因此可采用交替优化（Block Coordinate Descent）方法进行求解。具体步骤如下：

1. **初始化**：随机初始化所有波束成形向量 $\{\boldsymbol{w}_u\}$。
2. **更新均衡器** g_u
   对于每个 u，在固定 $\{\boldsymbol{w}_u\}$ 的情况下，最优均衡器为
   $$g_u^\star = \frac{\boldsymbol{h}_u^T \boldsymbol{w}_u}{\sum_{v=1}^U |\boldsymbol{h}_u^T \boldsymbol{w}_v|^2 + \sigma^2}.$$
3. **更新权重** λ_u
   利用最优均方误差 $e_u^\star$（通过 $g_u^\star$ 计算得到），更新权重为
   $$\lambda_u^\star = \frac{1}{e_u^\star}.$$
4. **更新波束成形向量** $\boldsymbol{w}_u$
   在固定 g_u 和 λ_u 后，对每个 u 求解下列凸优化问题：
   $$\min_{\{\boldsymbol{w}_u\}} \sum_{u=1}^U \lambda_u e_u \quad \text{s.t.} \quad \sum_{u=1}^U \|\boldsymbol{w}_u\|^2 \leq P_{\max}.$$
   这一步通常需要借助拉格朗日乘子法或二次规划求解。
5. **迭代**：重复步骤 2–4，直到目标函数收敛或达到预设迭代次数。

---

5. 总结

- **关键关系**：
  通过引入均衡器 g_u 得到 MSE e_u，并证明最优 MSE 与 SINR 的关系为
  $$e_u^\star = \frac{1}{1+\gamma_u}.$$
- **目标函数构造**：
  构造加权 MSE 目标函数

$$J = \sum_{u=1}^{U} (\lambda_u e_u - \log \lambda_u)$$

并证明最小化 J 与最大化 $\sum_u \log(1+\gamma_u)$ 等价。

- **交替优化**:
  分别对 g_u、λ_u 和 $\boldsymbol{w}_u$ 进行交替更新，直至收敛。

这一推导过程为 WMMSE 算法提供了理论基础，其核心在于将原来的速率最大化问题转换为一个关于均方误差的优化问题，再通过引入权重使得两者目标一致，进而利用交替优化方法求得近似全局最优解。

以上即为 WMMSE 算法的详细推导步骤。