

TU DRESDEN

FORTGESCHRITTENENPRAKTIKUM

PRAKTIKUMSBERICHT

Positronen-Emissions-Tomographie

Autoren:

Toni EHMCKE
Christian SIEGEL

Betreuer:

Carsten BITTRICH

Dresden, 15. November 2015

Inhaltsverzeichnis

1	Aufgabenstellung	2
1.1	Radon-Transformation als Rekonstruktionsverfahren: Ein Rechenbeispiel	2
1.2	Kalibriermessungen	2
1.2.1	Messung einer Quelle bekannter Aktivität bei mittiger Quellposition	2
1.2.2	Messung bei Positionen direkt an den Detektoren	2
1.3	Tomografische Messungen	2
1.3.1	Messung einer Quellkonfiguration, Phantom isotroper Dichteverteilung	2
1.3.2	Messung mit einer Punktquelle, Phantom an-/isotroper Dichteverteilung	2
2	Physikalische Grundlagen	2
2.1	Grundkonzept eines PET-Scanners	2
2.2	Koinzidenzmessungen	3
2.3	Detektoraufbau	4
2.3.1	Szintillationsdetektoren	4
2.3.2	Modifiziertes Anger-Prinzip	4
3	Durchführung	5
3.1	Radon-Transformation als Rekonstruktionsverfahren: Ein Rechenbeispiel	5
3.2	Kalibriermessungen	7
3.2.1	Messung einer Quelle bekannter Aktivität bei mittiger Quellposition	7
3.2.2	Messung bei Positionen direkt an den Detektoren	9
3.2.3	Schwerpunktsdiagramme	10
3.3	Tomografische Messungen	11
3.3.1	Messung einer Quellkonfiguration, Phantom isotroper Dichteverteilung	11
3.3.2	Messung mit einer Punktquelle, Phantom an-/isotroper Dichteverteilung	17
4	Auswertung	19
5	Literatur	20

1 Aufgabenstellung

Im Versuch wurden folgende Aufgabenstellungen bearbeitet:

1.1 Radon-Transformation als Rekonstruktionsverfahren: Ein Rechenbeispiel

Es soll anhand einer willkürlich vorgegebenen theoretischen Quellverteilung in Matrixform die Radon-Transformation nachvollzogen und das Ergebnis in einer Graustufendarstellung visualisiert werden.

1.2 Kalibriermessungen

1.2.1 Messung einer Quelle bekannter Aktivität bei mittiger Quellposition

Es soll das Energie- und Koinzidenzzeitfenster für die spätere Messung durch die Verwendung einer Referenzquelle in mittiger Position bestimmt werden. Weiterhin wird die Koinzidenzauflösungszeit, die Koinzidenznachweiseffektivität und der Anteil zufälliger Koinzidenzen ermittelt. Weiterhin sollen Schwerpunktdiagramme entstehen, welche verdeutlichen, auf welche Bereiche der Detektormatrix die ionisierende Strahlung fällt.

1.2.2 Messung bei Positionen direkt an den Detektoren

Die obige Messung wird noch einmal für die Position der Quelle direkt vor den Detektoren wiederholt, um einen Vergleich des Schwerpunktdiagramms zu erhalten und um den Detektorabstand zu bestimmen

1.3 Tomografische Messungen

1.3.1 Messung einer Quellkonfiguration, Phantom isotroper Dichteverteilung

Anhand einer unbekannten Quellverteilung mit gleichmäßiger Dichteverteilung soll die Bildentstehung nachvollzogen und der Einfluss verschiedener Filter untersucht werden. Anschließend soll ein geeigneter Filter gewählt werden, mit dessen Hilfe die Quellpositionen, die Quellaktivitäten und die Ortsauflösung des PET-Scans ermittelt werden.

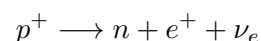
1.3.2 Messung mit einer Punktquelle, Phantom an-/isotroper Dichteverteilung

Eine Punktquelle wird in der Mitte des Probenhalters platziert, um den Einfluss der Dichteverteilung des umgebenden Materials zu untersuchen, um ein Modell für den menschlichen Körper zu erhalten, welcher ebenfalls eine anisotrope Dichteverteilung aufweist. Auf Grundlage dieser Messung soll eine Korrekturfunktion ermittelt werden, die diese Dichteschwankungen ausgleicht.

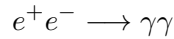
2 Physikalische Grundlagen

2.1 Grundkonzept eines PET-Scanners

Die **Positronen-Emissions-Tomographie** ist ein bildgebendes Verfahren zur in vivo-Beschreibung von biochemischen und physiologischen Prozessen. Sie ist dadurch ein Beispiel für ein **funktionelles** Bildgebungsverfahren, das dazu dient, um Stoffwechselprozesse und Blutflüsse im menschlichen Körper zu überwachen, ohne dabei chirurgische Maßnahmen in Erwägung ziehen zu müssen. Dem Patienten wird dabei ein β^+ -Strahler (ein sogenannter **Tracer**) mit einer Halbwertszeit in der Dimension von mehreren Minuten bis Stunden, welcher den physiologischen Vorgang im Körper begleitet und sich in bestimmten Strukturen anreichert. Die Tracer haben einen Protonenüberschuss, wodurch in Atomkernen der Traceratome folgende Kernreaktion stattfindet:



Die entstandenen Positronen (Ruheenergie $E_0 = 511 \text{ keV}$) annihilieren innerhalb weniger Millimeter mit Hüllenelektronen des umliegenden Gewebes zu zwei Photonen der Energie E_{γ_1} und E_{γ_2} :



Im Schwerpunktsystem des Lepton-Antilepton-Paares stehen die Impulse kollinear, wodurch der Gesamtimpuls verschwindet. Aufgrund der Viererimpulserhaltung muss auch der Impuls des entstandenen Photonenpaares verschwindet, wodurch sich in etwa ein 180° Winkel zwischen ihnen ergibt und ihre Energie unter Vernachlässigung der kinetischen Energie der einfallenden Teilchen ungefähr gleich der Summe der Ruheenergien des Elektron-Positron-Paares ist, d.h. $E_{\gamma_1} = E_{\gamma_2} \approx 511 \text{ keV}$. Das ist auch der Energiewert, bei dem wir später der Peak des Energiespektrums erwarten. Hieraus können wir ein Kriterium für die Wahl eines geeigneten Tracers ableiten: Je geringer die maximale Energie des emittierten Positrons, desto geringer ist die Entfernung des Annihilationsort vom Emissionsort und desto geringer sind die Abweichungen des 180° -Winkels und des Energiepeaks der Photonen. Dadurch werden Fehlerquellen bei der Lokalisierung des Tracers minimiert.

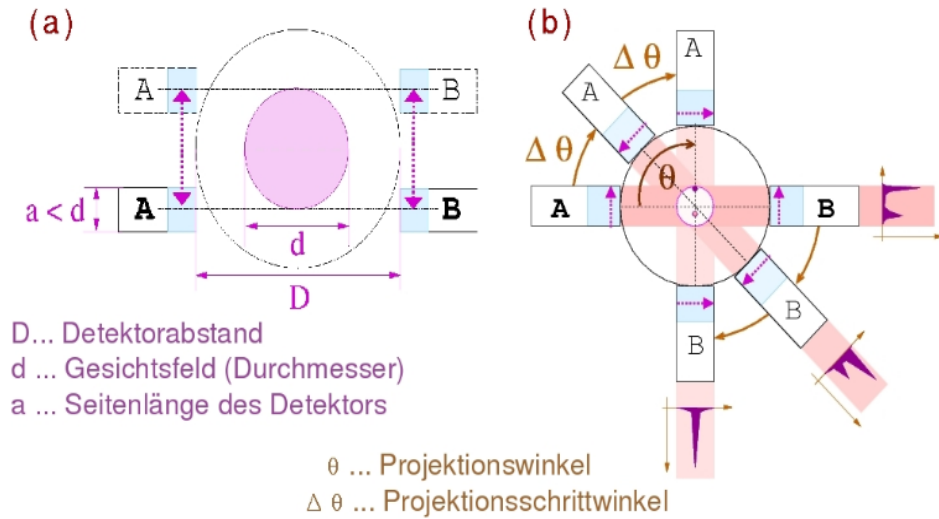


Abbildung 1: Funktionsprinzip eines PET-Scanners[02]

Die beiden Annihilationsphotonen der (ausgedehnten) Quellverteilung werden anschließend von zwei gegenüberliegenden Detektoren registriert. Dadurch erhalten wir die auf der Verbindungsline integrierte (**Radon-Transformierte**) Aktivitätsverteilung, indem wir die Detektoren nun unter verschiedenen Winkeln um die Quellen rotieren. Mit Hilfe dieser Daten kann die Ausgangsverteilung über eine inverse Koordinaten-Transformation rekonstruiert werden.[02]

2.2 Koinzidenzmessungen

Da die gleichzeitig emittierten, also zeitlich korrelierten, Photonen in zwei verschiedenen Detektoren registriert werden, zwischen den zwei Zählsignalen aber immer eine gewisse Zeitdifferenz $\Delta t(1,2)$ existieren wird, definiert man das **Koinzidenzzeitfenster** $[\Delta t_{min}, \Delta t_{max}]$ als Intervall von Zeitdifferenzen zwischen zwei Messereignissen 1 und 2, die man noch als zeitlich korrelierte Ereignisse akzeptiert, d.h. Messereignis 1 und 2 sind (im Idealfall) zeitlich korreliert genau dann wenn: $\Delta t(1,2) \in [\Delta t_{min}, \Delta t_{max}]$. Diese Ereignisse nennt man **wahre Koinzidenzen**. Die Länge des intervalls nennt man **Koinzidenzauflösungszeit**. Das Zeitintervall wird durch die Kalibrationsmessung im ersten experimentellen Teil durch Erstellen eines Histogramms von Zeitunterschieden bestimmt. Leider werden in der Praxis durch dieses Zeitfenster auch Ereignisse nachgewiesen, die physikalisch nicht korreliert sind. Diese nennt man **zufällige Koinzidenzen** und sie gilt es herauszufiltern.[02]

Dies wird näher in Abschnitt (3.2.1) diskutiert.

2.3 Detektoraufbau

2.3.1 Szintillationsdetektoren

Zum Nachweis der Annihilationsphotonen wird ein sogenannter **Szintillationsdetektor** verwendet. Dieser besteht aus einem geeignet präparierten anorganischen Kristall, in dem die einfallenden hochenergetischen Primärphotonen durch Wechselwirkung (Photoeffekt, Compton-Streuung und Paarbildung) mit den Hüllenelektronen angeregte Zustände erzeugen, welche beim Abregen niederenergetische Sekundärphotonen im Bereich des sichtbaren Lichts erzeugen. Dabei ist die Anzahl proportional zur Energie, die im Detektor deponiert wurde. In reinen Kristallen hat man das Problem, dass die Sekundärphotonen erneut Elektronen-Loch-Paare erzeugen können, wodurch die Photonen absorbiert werden und der Kristall somit für das entstandene Licht nicht transparent ist. Dieses Problem löst man, indem man den Kristall geeignet dotiert, d.h. man bringt Störstellen in das Gitter ein, wodurch neue Energietermine (**Aktivatorterme**) entstehen. Rekombiniert nun ein Elektron aus einem solchen Term, entsteht ein Photon, das zu langwellig ($\lambda = 300 - 350 \text{ nm}$) ist, um vom Kristall absorbiert zu werden.

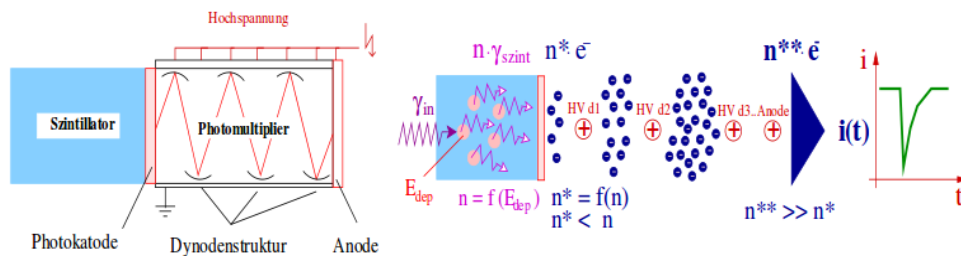


Abbildung 2: Aufbau eines Szintillationsdetektors[03]

Diese Photonen gelangen nun zu einem **Photomultiplier**, welcher aus einer Photokathode und einer Dynodenstruktur besteht. Die Sekundärphotonen schlagen durch Photoeffekt Elektronen aus der Kathode, welche in einem elektrischen Feld der Dynoden beschleunigt werden. Treffen diese auf eine Dynode, so werden aus dieser weitere Elektronen herausgeschlagen, wodurch die Elektronenzahl exponentiell mit der Dynodenzahl steigt. Der dadurch entstandene Stromfluss kann nun an einer Anode gemessen werden.[03]

2.3.2 Modifiziertes Anger-Prinzip

Würde man die Szintillator-Kristalle einzeln an Photomultiplier koppeln, würde das örtliche Auflösungsvermögen der Messapparatur von der Größe der Multiplier begrenzt werden. Da diese aber technisch nicht beliebig klein konstruiert werden können, koppelt man mehrere Szintillatoreinheiten an einen Multiplier, indem man den Kristall durch unterschiedlich tiefe Einschnitte in eine Matrix einteilt. Im konkreten Experiment wurden 4 Photomultiplier mit einer 8x8-Szintillator-Matrix verbunden. Mit Hilfe der Einschnitte gelangen die entstehenden Sekundärphotonen über totale Reflexion auf mehrere Multiplier, an denen sie einen Stromimpuls mit einer Amplitude A_i erzeugen. Die im Detektor deponierte Energie des einfallenden Photons ist dabei proportional zur Summe aus allen Stromamplituden.

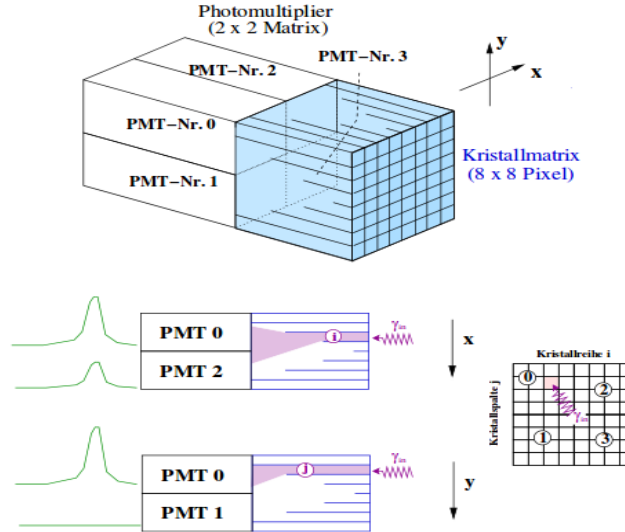


Abbildung 3: Darstellung des verwendeten Blockdetektors: Vier Photomultiplier sind mit einer 8x8-Kristallmatrix aus Szintillatorkristallen verbunden[03]

Der Ort des einfallenden Teilchens wird nun über Schwerpunktbildung rekonstruiert: Je 'mittiger' das Teilchen auf den Detektor trifft, desto besser werden die Sekundärephotonen auf alle vier Multiplier verteilt, wodurch in allen annähernd die gleiche Amplitude gemessen wird, d.h. es gilt: $A_0 \cong A_1 \cong A_2 \cong A_3$, was wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit mit der Koordinate $(x = 0, y = 0)$ identifizieren. In diesem Koordinatensystem erhalten wir nun die Orte der einfallenden Teilchen:

$$x = \frac{(A_2 + A_3) - (A_0 + A_1)}{\sum_{i=0}^3 A_i} ; y = \frac{(A_0 + A_2) - (A_1 + A_3)}{\sum_{i=0}^3 A_i}$$

3 Durchführung

Bevor wir mit der Aufnahme der Messdaten beginnen, machen wir noch einige theoretische Vorüberlegungen:

3.1 Radon-Transformation als Rekonstruktionsverfahren: Ein Rechenbeispiel

Im Folgenden soll die durch die Auswertungssoftware durchgeführte (diskrete) Radon-Transformation anhand einer willkürlich gewählten Aktivitätsverteilung $N(x, y)$ nachvollziehbar dargestellt werden. Da der Ort (x, y) technisch nicht als kontinuierliche Variable implementiert werden kann, genügt die Betrachtung der Ausgangsverteilung als eine Matrix $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$ mit endlichen Dimensionen, deren Einträge die Aktivität am jeweiligen Ort repräsentieren. Zunächst bestimmt man das sogenannte **Sinogramm** $p(s, \theta)$, indem man das Koordinatensystem um einen Winkel θ dreht und dann die Verteilung $N(x'(s, \theta), y'(s, \theta))$ zu einem bestimmten Ort s , welcher ohne Beschränkung der Allgemeinheit mit der x-Koordinate des gedrehten Systems identifiziert werden kann, entlang der neuen y-Achse integriert. Was wir erhalten, ist eine Projektion der Ausgangsverteilung auf die gedrehte x-Achse. Diese Konstruktion wirkt künstlich, ist aber letztlich genau das, was bei einem PET-Scan geschieht: Rotiert man die Detektoren um eine Quelle, so misst man für jeden festen Winkel genau die oben beschriebene Projektion der Quellverteilung auf die Detektorfläche.

Numerisch simulieren wir diese Hin-Transformation dadurch, dass über die einzelnen Einträge in den Spalten ($\theta = 0^\circ$), den Zeilen ($\theta = 90^\circ$) und den Diagonalen ($\theta = 45^\circ, 135^\circ$) von \mathbf{I} summiert wird. Da die Matrix 9 Diagonalen besitzt, sie allerdings analog zu den Zeilen und Spalten in 5 Teile

'zerschnitten' werden müsste, müssen die so erhaltenen Diagonalsummen $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{1 \times 9}$ durch Multiplikation einer Wichtungsmatrix $\mathbf{W}_{Proj} \in \mathbb{R}^{9 \times 5}$ multipliziert werden, um die unterschiedlichen 'Flächenanteile' der Diagonalen an der 'Gesamtfläche' der Matrix zu berücksichtigen. Dadurch wird das Sinogramm insgesamt zu einer Matrix $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{4 \times 5}$, deren Zeilen die Variation des Winkels θ und deren Spalten die Änderung des Ortes s repräsentieren.

Nach erfolgreicher Hintransformation wird nun der Einfluss eines **Ramp-Filters** untersucht. Dieser Filter wird durch eine Filterfunktion $h(s)$ modelliert, die folgenden Eigenschaften genügt:

- (i) $\lim_{s \rightarrow 0} h(s) = \infty$
- (ii) $\lim_{|s| \rightarrow \infty} h(s) = 0$
- (iii) $\forall s \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : h(s) < 0$
- (iv) h ist symmetrisch

Man findet folgenden formalen analytischen Ausdruck für $h[01]$

$$h(s) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi^2 s^2} & s \neq 0 \\ \frac{\delta(s)}{\pi^2 |s|} & s = 0 \end{cases}$$

Damit erhält man das gefilterte Sinogramm $p_f(s, \theta)$ durch die Faltung der Filterfunktion mit dem ermittelten Sinogramm:

$$p_f(s, \theta) := (p(\cdot, \theta) * h)(s) = \int_{-\infty}^{\infty} p(s', \theta) \cdot h(s - s') ds' \quad (1)$$

Da die mathematischen Objekte im vorliegenden Fall von diskreter Natur sind, wird die Filterfunktion durch einen Vektor:

$$\mathbf{H} = (0, \dots, 0, -b_d, -b_{d-1}, \dots, -b_1, a, -b_1, \dots, -b_{d-1}, -b_d, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{5 \times 1}, \forall j = 1, \dots, d : b_j, a > 0$$

modelliert, der offenbar den Eigenschaften (ii) - (iv) genügt. Dabei wird d die **Dimension** des Filters genannt, die anschaulich angibt, wie viele linke und rechte Nachbarn eines Eintrages der Sinogrammmatrix man zu diesem gewichtet dazuaddiert. Diese Operation entspricht der Faltung in (1) und kann durch eine geeignete Matrixmultiplikation von \mathbf{P} mit \mathbf{H} dargestellt werden. Wobei \mathbf{P} noch mit d Nullspalten links und rechts erweitert werden muss (analog \mathbf{H}), damit die Einträge am Rand der Matrix 'Nullnachbarn' erhalten. Das liefert uns die gefilterte Matrix $\mathbf{P}_f \in \mathbb{R}^{4 \times 5}$.

Nach der Filterprozedur wird jetzt die inverse Transformation durchgeführt. Das heißt, man iteriere jetzt durch die Zeilen von \mathbf{P} bzw. \mathbf{P}_f , die die Sinogrammwerte zu den verschiedenen Winkeln θ repräsentieren, und verteile diese gleichmäßig(!) auf die Zeilen, Spalten und Diagonalen. Erneut sind die Diagonalen gesondert zu behandeln, indem man die betreffenden Zeilen mit einer Wichtungsmatrix $\mathbf{W}_{InvProj} \in \mathbb{R}^{5 \times 9}$ multipliziert. Die Rückprojektion erhält man nun durch Addition der so entstandenen 4 Matrizen, wobei die Diagonalmatrizen nur mit einem Wichtungsfaktor von 0,5 eingehen. Das Ergebnis der gefilterten und ungefilterten Rückprojektion anhand eines vorgegebenen Beispiels mit einem Rampfilter der Dimension $d = 1$ wird im Folgenden dargestellt:

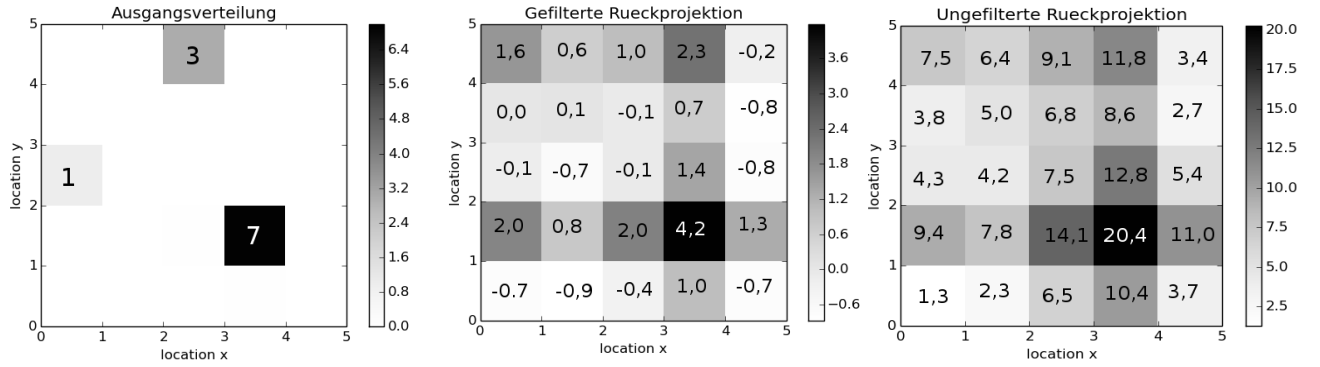


Abbildung 4: Theoretisches Beispiel für Radon-Transformation

Die Berechnung und Darstellung erfolgte über ein selbst geschriebenes `python`-Skript, das den oben beschriebenen Algorithmus realisiert. Wir sehen, dass trotz der Einfachheit des Beispiels enorme Abweichungen zwischen Ausgangsverteilung und Rückprojektion entstehen: Bis auf den größten Peak bei $(x = 3, y = 1)$ alle Maxima leicht versetzt rückprojiziert wurden. Dies liegt zum einen an der Diskretisierung des Problems und zum anderen besitzt selbst die über das Fourier-Scheiben-Theorem durchgeführte Rücktransformation keine exakte Lösung, da ein divergentes Integral darin auftritt, das auf einen endlichen Integrationsbereich heruntergebrochen werden muss.[02] Der Ramp-Filter führt dazu, dass die Peaks schneller abfallen und somit besser lokalisiert werden können, was sich bei der späteren quantitativen Auswertung noch als nützlich erweisen wird.

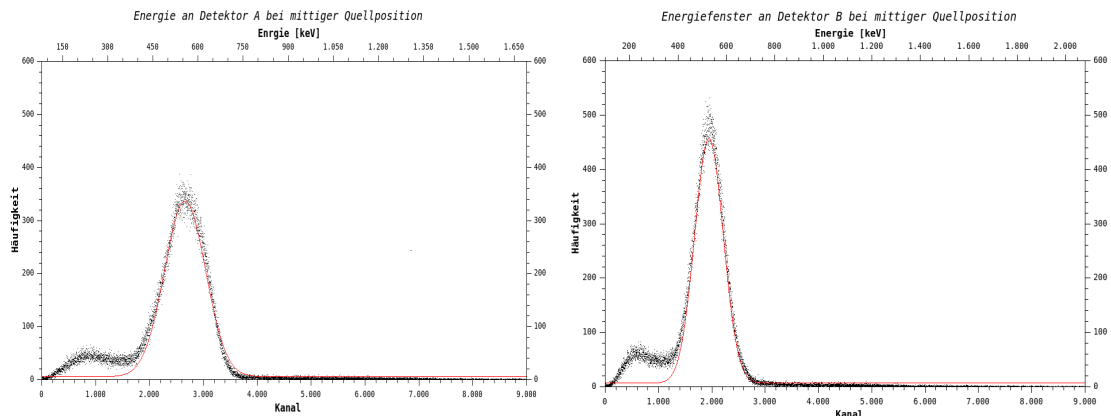
3.2 Kalibriermessungen

Bevor wir die eigentlich Messdaten aufnehmen könnten, musste die Messapparatur kalibriert werden:

3.2.1 Messung einer Quelle bekannter Aktivität bei mittlerer Quellposition

Zunächst haben wir eine Quelle in mittigem Abstand zu den beiden Detektoren vermessen. Die Quelle hatte am 29.10.2015 eine Aktivität $A = 1,02 \text{ MBq}$.

Daraus sollten die Energiefenster der beiden Detektoren sowie das Koinzidenzzeitfenster bestimmt werden. Die Energiepeaks werden um 511 keV erwartet, was einem Kanal von 2402 für Detektor A und 1868 für Detektor B entspricht. Das Zeitfenster erwarten wir aufgrund technischer Effekte (bspw. Totzeit) und einer gewollten erhöhten Verzögerung im Bereich einiger zehn Nanosekunden.



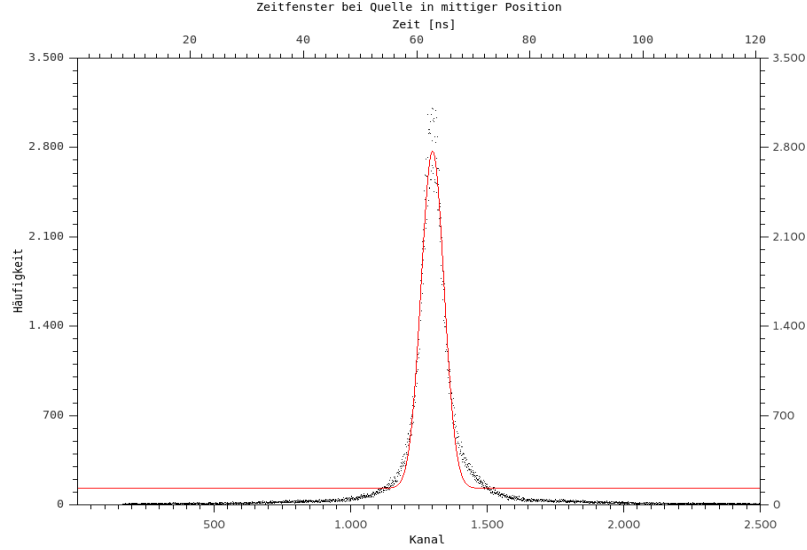


Tabelle 2: Kalibrationsmessung bei Quelle mittig zwischen den Detektoren A und B

Wie man an den oberen beiden Diagrammen von Tabelle 2 sieht, stimmt diese Erwartung mit einer leichten Verschiebung nach rechts gut überein. Dies kann dem statistischen Charakter von Kernzerfällen und den Wegen (verändert ua. durch Compton-Streuung für Photonen, freiwerdende Bremsstrahlung für Positronen), die die Positronen und letztlich die Photonen zurücklegen zugeordnet werden. Andererseits unterliegen die Detektormessungen und die Umrechnung der Kanäle in Energien einem Fehler, da die Kanäle diskret sind und nur bestimmte Energien detektieren können, was dazu führt, dass Energien zwischen zwei Kanälen verloren gehen. Die Umrechnung der Kanäle in Energien und Zeit erfolgt mittels folgender, uns gegebener Formeln des Musters $G = a + b \cdot K$, wobei K die Kanalnummer meint und a bzw. b Parameter sind:

$$\begin{aligned} E_A &= (81 \pm 31) + (0,179 \pm 0,012)K_A \\ E_B &= (100 \pm 40) + (0,220 \pm 0,021)K_B \\ \Delta t &= (-0,014 \pm 0,0192) + (0,0483 \pm 0,00002)K_t \end{aligned}$$

Die Fehler für die Umrechnung von Kanälen in physikalische Einheiten lassen sich leicht über die gauß'sche Fehlerfortpflanzung bestimmen und belaufen sich betreffend der Diagramme in 2 auf:

$$\Delta(\Delta t) = 0,03 \text{ ns}; \Delta E_A = 44,84 \text{ keV}; \Delta E_B = 44,00 \text{ keV}$$

Um Messungen vorzunehmen, müssen jetzt die Fenster für Energie und Koinzidenzzeit bestimmt werden. Dies geschieht über Gauß-Fits in den Diagrammen von Tabelle 2. Dann bestimmt man das FWHM und zieht es von den Maximumpositionen ab. Damit ergeben sich die Fenster zu:

$$K_A \in [2217, 3101], K_B \in [1629, 2264], K_t \in [1252, 1351]$$

$$E_A \in [478, 636] \text{ keV}, E_B \in [458, 598] \text{ keV}, \Delta t \in [60, 65] \text{ ns}$$

Daraus ergibt sich eine Koinzidenzauflösungszeit von $\tau = (4,77 \pm 0,02) \text{ ns}$, welche auf eine Abschätzung der zufälligen Koinzidenzen führt. Mithilfe der gegebenen Positronenemissionswahrscheinlichkeit für ^{22}Na können wir die Zahl der Zerfälle berechnen, die keine Positronen emittieren. Im schlimmsten Fall würden alle diese Zerfälle einen Beitrag zufälliger Koinzidenzen beisteuern, was zehn Prozent der gemessenen Ereignisse ausmacht. Bei ^{22}Na bestehen diese restlichen Prozesse aus γ -Quanten mit einer Energie von 1275 keV. Diese kann man vor allem in den späteren Messungen, die direkt an den Detektoren gemacht wurden, erkennen. (Siehe Abbildung 5) Einen Großteil dieser

Ereignisse schließen wir jedoch durch die Kalibrierung und die Setzung der Zeitfenster aus, sodass der Einfluss keine 10% mehr ausmacht. Deshalb ist die Zahl der zufälligen Koinzidenzen besser abschätzbar über die Standardabweichung im Zusammenhang mit dem Anteil der Prozesse, die beim Zerfall keine Positronen emittieren. Hierfür ergibt sich die Zahl der zufälligen Koinzidenzen zu $N = 147$.

Koinzidenznachweiseffektivität

Mit diesen Informationen lassen sich nun die Koinzidenznachweiseffektivitäten der verwendeten Detektoren A und B berechnen. Gegeben sind zunächst folgende Formeln für die Zählrate wahrer Koinzidenzen:

$$\dot{N}_K = \left(\frac{\Omega_{min}}{2\pi} \right) A P_\beta \varepsilon_A \varepsilon_B \quad (2)$$

$$\dot{N}_Z = \left(\frac{2\tau A \Omega_{min}}{\pi} \right) \dot{N}_K \quad (3)$$

Dabei sind $\varepsilon_{A/B}$ die Nachweiseffektivitäten der Detektoren, P_β die Positronenemissionswahrscheinlichkeit und Ω_{min} der Raumwinkel des Detektors, der am weitesten von der Quelle entfernt ist. \dot{N}_Z ist die Zählrate zufälliger Koinzidenzen. Setzt man die Gleichungen 2 und 3 ineinander ein, erhält man folgende Gleichung für die Nachweiseffektivitäten:

$$\varepsilon_A \varepsilon_B = \frac{\pi^2 \dot{N}_Z}{A^2 P_\beta \tau \Omega_{min}^2} \text{ mit } \Omega_{min} = \frac{4a}{(D-b)^2} \text{ und } \dot{N}_Z = \frac{N_Z}{\tilde{t}}$$

Da die Nachweiseffektivität pro Detektor zu bestimmen ist, kann man $\varepsilon_A \simeq \varepsilon_B$ annehmen und erhält:

$$\varepsilon_{A/B} = \sqrt{\frac{\pi^2 N_Z}{A^2 \Omega_{min}^2 P_\beta \tau \tilde{t}_{A/B}}}$$

Für den Fehler erhält man bei fehlerlos angenommenen b, D, und a folgendes:

$$\Delta \varepsilon_{A/B} = \varepsilon_{A/B} \cdot \sqrt{\left(\frac{\Delta P_\beta}{P_\beta} \right)^2 + \left(\frac{2\Delta A}{A} \right)^2 + \left(\frac{\Delta \tau}{\tau} \right)^2 + \left(\frac{\Delta \tilde{t}_{A/B}}{\tilde{t}_{A/B}} \right)^2}$$

Die verwendeten Daten sind folgende:

$$D = 386 \text{ mm}, b = 25 \text{ mm}, a = 54 \text{ mm}, P_\beta = 0,90382 \pm 0,00021, \tilde{t}_B = (230,4 \pm 0,1) \text{ s}, \tilde{t}_A = (314 \pm 7) \text{ s}$$

Damit erhalten wir für die Detektoren folgende Nachweiseffektivitäten:

$$\varepsilon_A = (46,4 \pm 3) \%, \varepsilon_B = (54,2 \pm 3) \%$$

Diese Nachweiseffektivität ist für einen Versuchsplatz angemessen gut, im Vergleich zu in Krankenhäusern verwendeten Geräten, welche mit einer Effektivität von 80% arbeiten.

3.2.2 Messung bei Positionen direkt an den Detektoren

Als nächstes soll der Abstand der beiden Detektoren zueinander bestimmt werden. Hierfür erfolgen Messungen, bei denen die Kalibrierquelle direkt an den Detektoren positioniert wird. Wie oben angedeutet, sieht man in den nachfolgenden Diagramme auch die Detektionen von den Photonen der Zerfallsreihe mit nur 10% Wahrscheinlichkeit, eben jenen Prozessen, die nicht die gewollte Positronenemission erzeugen. Besonders gut fällt dies dort auf, wo die Quelle wirklich direkt am Detektor liegt nicht und nicht am gegenüberliegenden. Am gegenüberliegenden Detektor sieht man jeweils zwei große Peaks von denen einer im niedrigeren Energiebereich als dem erwarteten liegen. Dies ist auch nachvollziehbar, da alle gestreuten und durch Bremsstrahlung erzeugten Photonen mitgezählt werden.

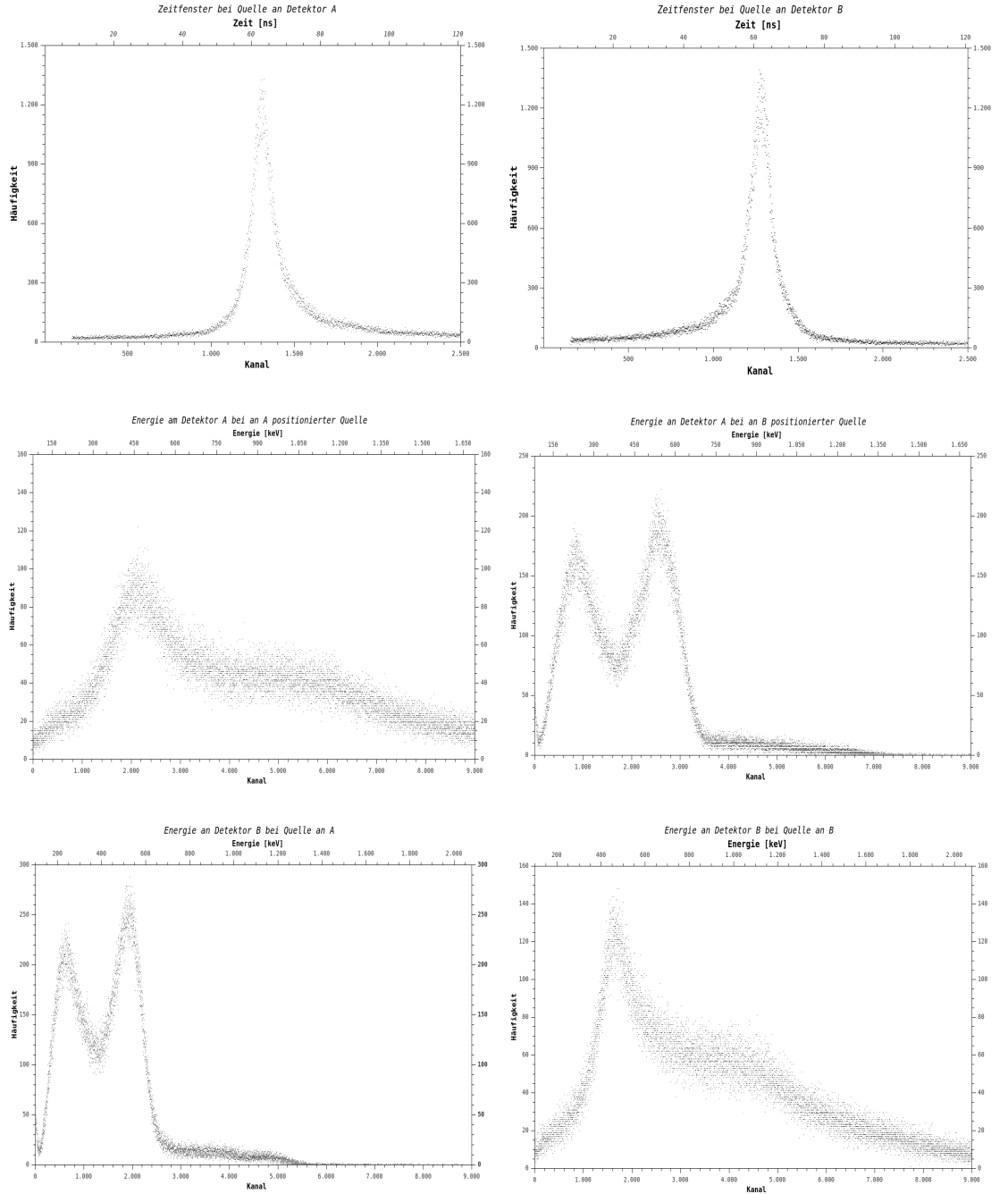


Abbildung 5: Gegenüberstellung der Messungen mit der Quelle an Det. A (links) und Det. B (rechts). Aus den Zeitdiagrammen, die auf den ersten Blick sehr ähnlich sind, kann man über einen Gauß-Fit die Peak-Positionen, das heißt, die Maxima, bestimmen. Diese wird verwendet, um die Laufzeitdifferenz und damit letztlich den Abstand zwischen den Detektoren A und B zu bestimmen. Die Zeitpeaks liegen bei $\Delta t_A = 63,35 \text{ ns}$ und $\Delta t_B = 61,80 \text{ ns}$. Mit der Formel $l = c \cdot \Delta T$ ergibt sich $l = 46,5 \text{ cm}$. Dieser Wert ist größer als der, der uns in der Aufgabenstellung verraten wurde und weicht um 20% ab. Dies liegt daran, dass das Delay des Detektors A nicht bestimmt wurde. Rechnet man dieses heraus, kann man sicher auf den von 38,6cm gelangen.

3.2.3 Schwerpunktsdiagramme

Als nächstes sind die Schwerpunktsdiagramme zu betrachten. Es wurden drei von Detektor A erstellt. Einmal als die Quelle an Detektor B positioniert wurde, danach an Detektor A und einmal

mittig zwischen beiden.

In Abbildung 6 kann gegenüber 8 ein schwächeres Muster erkannt werden. Gegenüber Abbildung 8 ist in beiden deutlich die Kristallstruktur erkennbar. Diese stellt sich durch die vielen Maximumflecken dar. Gekennzeichnet werden die Kristalle durch ein rotes Gitter, welches vom PC über die Bilder gelegt wurde. Dieses kennzeichnet die 8x8-Matrix.

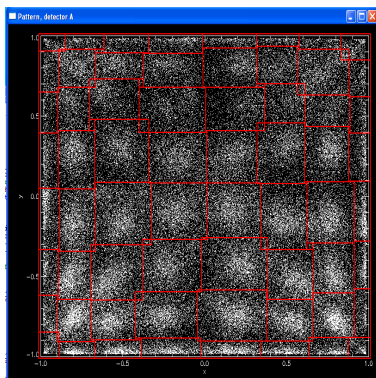


Abbildung 6: Messung bei Quelle an Detektor B

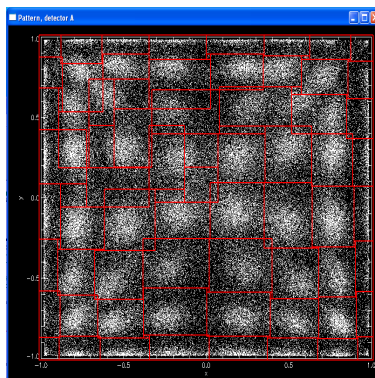


Abbildung 7: Messung bei Quelle in der Mitte

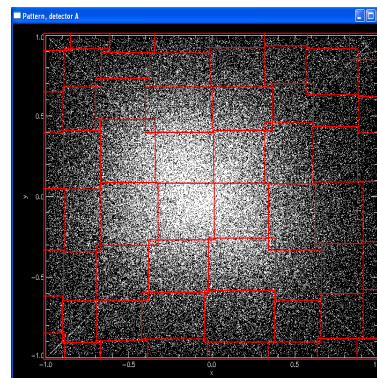


Abbildung 8: Messung bei Quelle an Detektor A

Bei der Messung an Quelle A zeigt sich auch deutlich, wie die Kristalle geschnitten wurden. So finden hier an den Einschnitten keine Reflexionen statt und die Strahlung kann sich kugelförmig ausbreiten und als großer kreisförmiger Hotspot detektiert werden. Es können allerdings auch vier Dreiecke beobachtet werden, welche durch die Kristallstruktur erzeugt wurden. Im Bild der Messung des Detektors A während sich die Quelle an Detektor B befand ist weiterhin erkennbar, dass widererwartend die Intensität in der oberen Bildhälfte schwächer ist als in der unteren. Die Schwächung sollte normalerweise in der unteren Hälfte auftreten, da hier eine Glasplatte Strahlung abschirmt. Das heißt, das Bild muss um 180° gedreht sein. Sehr schön sind in den Abbildungen 6 und 8 auch die Verzerrungen sichtbar, die durch die Projektion der kugelförmigen Ausbreitung der Strahlung auf eine ungekrümmte Ebene entstehen.

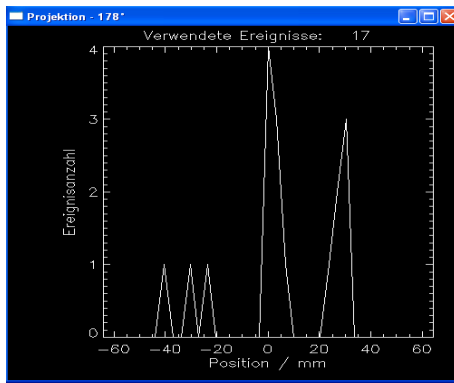
3.3 Tomografische Messungen

Kommen wir nun zur eigentlichen Messung und der Auswertung der erhaltenen Daten:

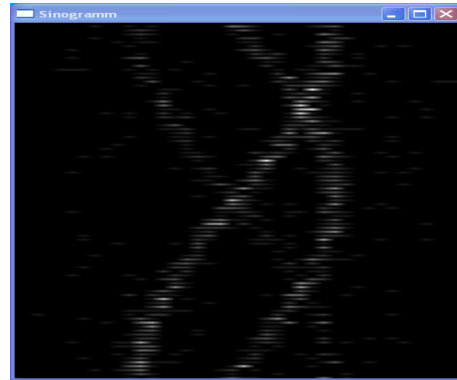
3.3.1 Messung einer Quellkonfiguration, Phantom isotroper Dichteverteilung

Hauptversuch

Als nächsten wurde eine Messung mit unbekannter Quellverteilung gestartet. Die Energie- und das Zeitfenster entsprechen den oben bestimmten Intervallen. Der Detektor fährt dann unter gewissen Winkeln θ die $30 \text{ BIN} = 101,25 \text{ mm}$ breite s-Achse mit einer Geschwindigkeit von 22 mm/s ab. Dabei wird für gewisse Positionen die Anzahl der Konzidenzereignisse in Abhängigkeit der s-Koordinate aufgenommen. Dies wird für alle Winkel im Abstand von 2° Schritten wiederholt, wodurch das Sinogramm entsteht, welches in folgender Abbildung dargestellt wird:



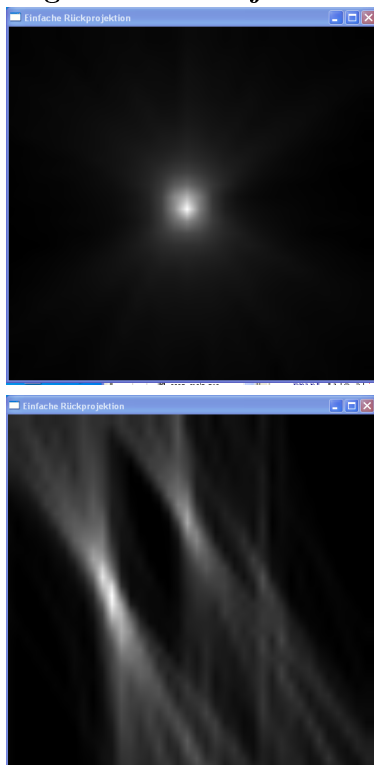
Koinzidenzereigniszahl zu festem Winkel



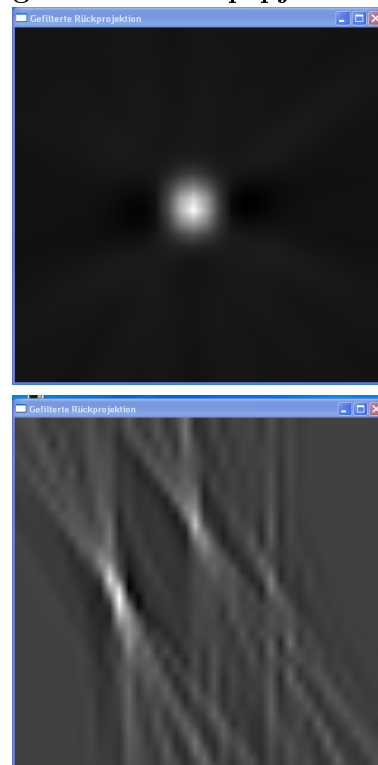
Sinogramm - horizontal: s ; vertikal: θ ;
Helligkeit: Ereigniszahl

Dabei entspricht jeder Graph der linken Art einer in Graustufen dargestellte Linie im Sinogramm. Die so erhaltenen Daten können nun genutzt werden, um eine inverse Radon-Transformation auf sie anzuwenden, um die ursprüngliche Quellverteilung zu erhalten. Aus jeder 'Zeile' des Sinogramms können wir nun analog zum Vorgehen im Abschnitt (4) eine rückprojizierte Matrix extrahieren, die man zur Gesamtückprojektion aufsummiert. Je mehr Winkel der Detektor abfährt, desto mehr Summanden enthält die Rückprojektion und desto klarer wird das Bild. Bevor man die inverse Transformation durchführt, kann noch ein Filter auf das Sinogramm angewendet werden. Im konkreten Experiment lag eine Verteilung, die aus drei Punktquellen bestand, vor, welche in der folgenden Bilderserie schrittweise rekonstruiert wurde. Weiterhin wurde ein Ramp-Filter mit Dimension $d = 13$ verwendet, um einen direkten Vergleich zu haben:

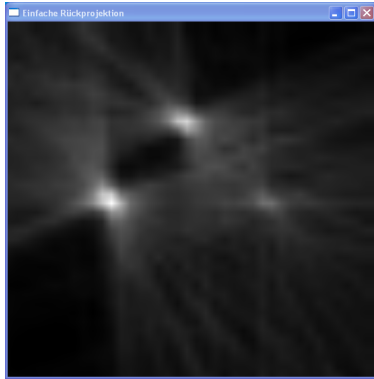
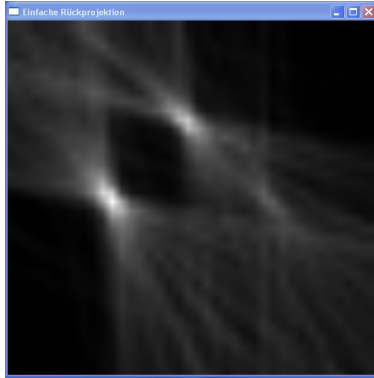
ungefilterter Projektion



gefilterte Rückprojektion



ungefilterter Projektion



gefilterte Rückprojektion

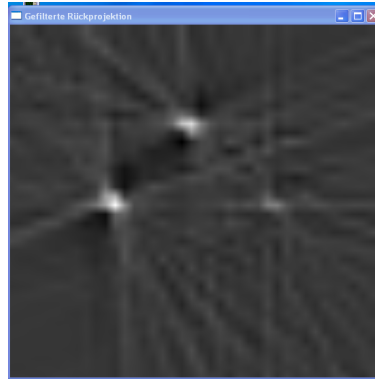
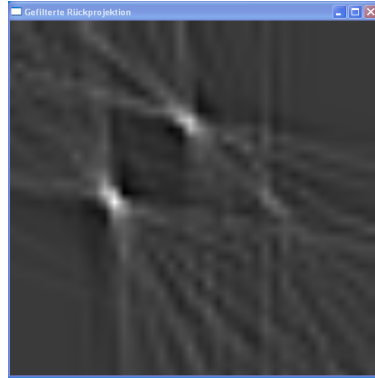


Abbildung 9: Screenshots der Bildenstehung der gefilterten (rechts) und ungefilterten (links) Rückprojektion

Untersuchung des Einflusses verschiedener Filter

Wie man in der zuvorgehenden Rekonstruktion bereits gesehen hat, haben Filter einen Einfluss auf den Kontrast und die Lokalisierung der hellen Peaks in der Rückprojektion. Deshalb wurde in einer Offline-Nachbearbeitung die Anwendung verschiedenster Filter getestet:



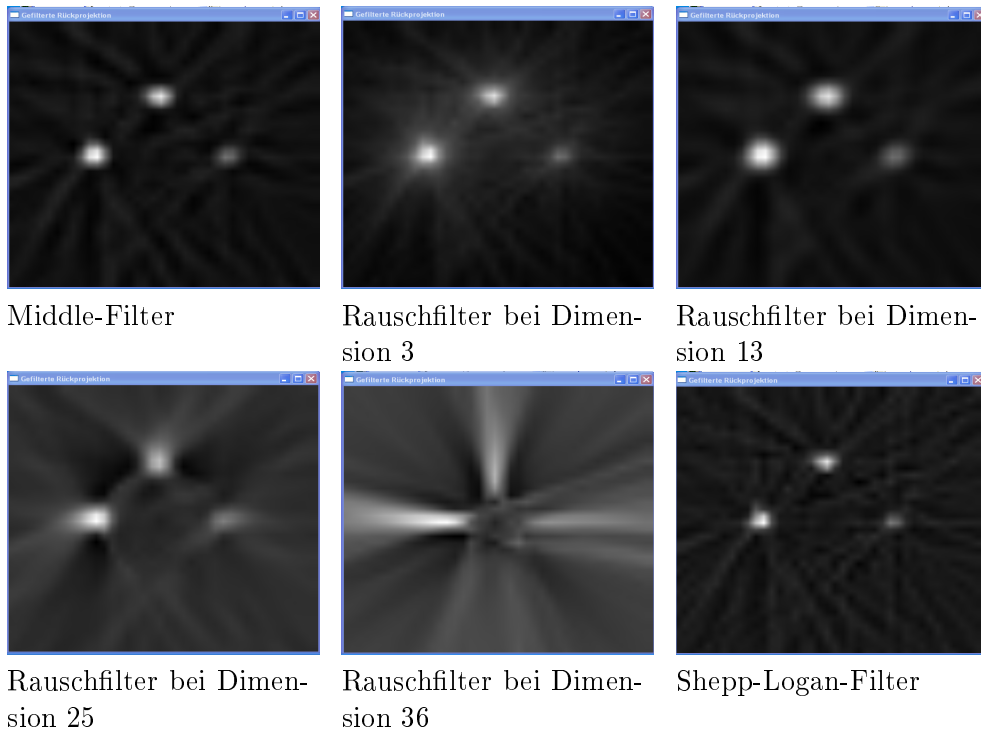
ungefilterte Rückprojektion



Ramp-Filter



Hanning-weighted-Filter



Der Hanning-Weighted-, der Middle- und der Rauschfilter heben allesamt die strahlförmigen Strukturen, die von den Quellen ausgehen hervor und lassen die Quellen selbst etwas 'verwaschener' wirken. Dadurch heben sie sich zwar besser vom Untergrund ab, lassen sich allerdings schwerer lokalisieren. Außerdem bilden sich dunkle Bereiche um die Peaks. Dadurch könnte ihre Anwendung in der Praxis dann von Bedeutung sein, wenn es darum geht, kompliziertere Quellverteilungen zu analysieren, bei denen eine exakte Lokalisierung der Peaks nicht vordergründig ist. Weiterhin wurde der Einfluss der Dimension beim Rauschfilter untersucht: Je größer diese wurde, desto verwaschener wurde das Bild bis zur vollkommenen Unkenntlichkeit.

Ganz im Gegensatz zum Ramp-Filter und dem Shepp-Logan-Filter: Sie erzeugen beide ein recht scharfes Bild der Peaks. Um dies besser zu analysieren betrachten wir die Messwerte des Ramp-Filters verglichen mit der ungefilterten Variante in einer 3D-Darstellung:

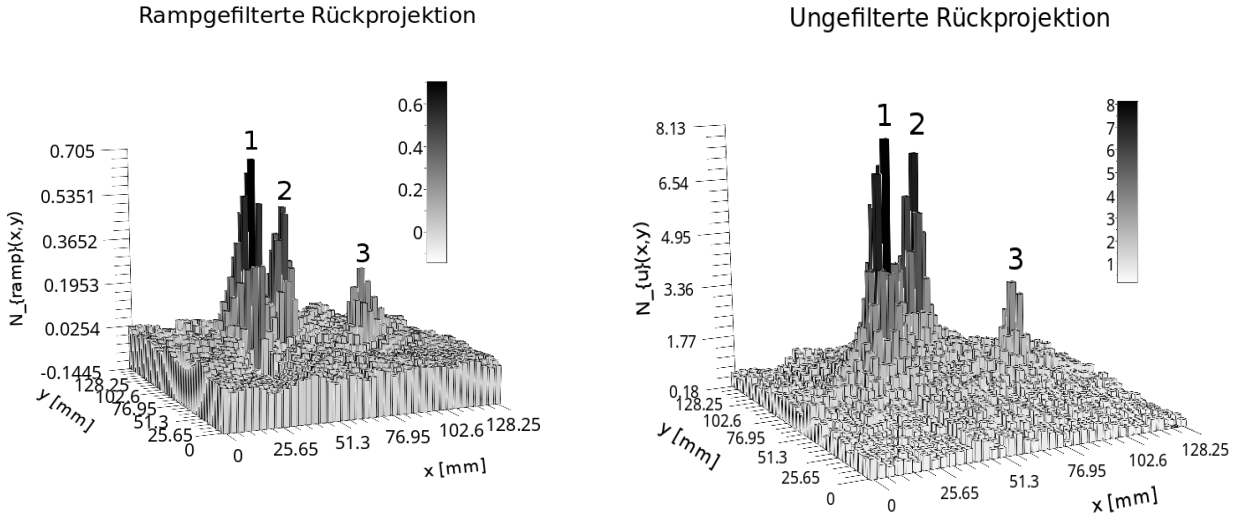


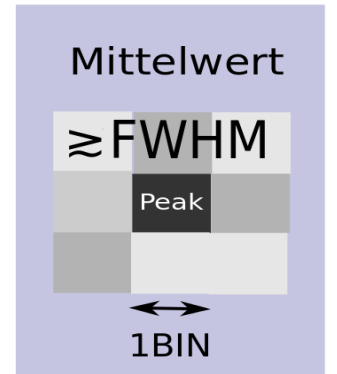
Abbildung 10: Gefilterte und Ungefilterte Rückprojektion der Aktivitätsverteilung

Der verwendete Rampfilter kann, wie im Abschnitt (4) bereits ausführlich aufgeführt, als eine Faltung des Sinogramms $p(s, \theta)$ mit einer Filterfunktion $h(s)$ zu einem festen Winkel θ dargestellt werden. Das heißt man addiert zu einem festen Wert von $p(s, \theta)$ die umliegenden Funktionswerte innerhalb eines Bereiches von $d = 13$ BINs mit einem (negativen) Gewicht. Man beobachtet, dass durch diese Faltung im Vergleich zur ungefilterten Rückprojektion ein höheres Untergrundrauschen in Bereichen mit geringer Aktivität entsteht, da insbesondere auch die Skala einen kleineren Bereich ($N_{ramp}(x, y) \in [-0,14, 0,7]$, $N_u(x, y) \in [0,18, 8,13]$) abdeckt. Allerdings fallen die Peaks deutlich schneller ab (negative Bereiche um Maximum), wodurch man sie besser lokalisieren kann. Aus diesem Grund wird im Folgenden der gefilterte Datensatz für die quantitative Auswertung verwendet.

Quantitative Auswertung

Zunächst werden die Positionen (x_i, y_i) ($i = 1, 2, 3$) der 3 Quellen im verschlossenen Plastikbehälter bestimmt. Dafür wird die in Abbildung (10) visualisierte Rückprojektion $N(x, y)$ verwendet, die durch Auslesen der in `Matrix_reco.txt` enthaltenen Messwertmatrix entstanden ist. Der erste Eintrag sei als Koordinatenursprung gewählt. 1 BIN des Rekonstruktionsrasters entspricht 3,375 mm. Die Positionen der Quellen werden mit den lokalen Maxima $N(x_i, y_i)$ der Aktivitätsverteilung identifiziert.

Anschließend quantifiziert man die Aktivität jeder einzelnen Quelle, indem man die rückprojizierten Verteilung über einen kleinen Bereich um die Peaks mittelt. Bezeichne diesen Mittelwert mit $\bar{N}(x_i, y_i)$. Im Rahmen dieser Auswertung wurde ein quadratischer Bereich gewählt, in welchem Werte anzutreffen waren, die in der Nähe des FWHM (=Full Width Half Maximum) lagen. Dieses Vorgehen wird durch die nebenstehende Abbildung visualisiert.



Mittels einfacher Verhältnisbildung können unter Vorgabe einer Referenzaktivität A_{ref} nun unbekannte Aktivitäten innerhalb der Verteilung berechnet werden. Dabei wurde die stärkste Aktivität mit $A_0 \equiv A(t_0 = 01.02.2010) = (363 \pm 11)$ kBq angegeben. Mit dem Aktivitätsgesetz kann man nun berechnen:

$$A_{ref} \equiv A(t = 29.10.2015) = A_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t-t_0}{T_{1/2}}} = (79 \pm 3) \text{ kBq} \quad (4)$$

Wobei die Halbwertszeit $T_{1/2}(^{22}\text{Na}) = (2,6027 \pm 0,0010)$ a verwendet wurde, sowie folgende Fehlerformel:

$$\left(\frac{\Delta A_{ref}}{A_{ref}}\right)^2 = \left(\frac{\Delta A_0}{A_0}\right)^2 + \left(\ln(2) \cdot \frac{\Delta T_{1/2}}{T_{1/2}}\right)^2 \quad (5)$$

Bezeichnet man $A_{ref} \propto \bar{N}_{ref} \equiv \bar{N}(x_1, y_1)$ als rückprojizierte Aktivität der Referenzquelle, so erhält man für die unbekannten Aktivitäten $A_i \propto \bar{N}(x_i, y_i)$:

$$A_i = A_{ref} \cdot \frac{\bar{N}(x_i, y_i)}{\bar{N}_{ref}} \quad (6)$$

$$\left(\frac{\Delta A_i}{A_i}\right)^2 = \left(\frac{\Delta A_{ref}}{A_{ref}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta \bar{N}(x_i, y_i)}{\bar{N}(x_i, y_i)}\right)^2 + \left(\frac{\Delta \bar{N}_{ref}}{\bar{N}_{ref}}\right)^2 \quad (7)$$

Hierbei wurden die Fehler der rückprojizierten Aktivitäten als Standardabweichungen des Mittelwertes gesetzt, die sich beim obigen Mittelvorgang ergab: $\Delta \bar{N}(x_i, y_i) = \sigma(\bar{N})$. Die systematischen Fehler des PET-Scanners waren leider nicht bekannt. Zusammenfassend ergeben sich folgende Resultate:

Peak # i	x_i [mm]	y_i [mm]	Peakmaximum $N(x_i, y_i)$	Peakmittel $\bar{N}(x_i, y_i)$	A_i [kBq]
1	$37 \pm 3,4$	$64 \pm 3,4$	0,705	$0,50 \pm 0,05$	$79 \pm 2,4$
2	$64 \pm 3,4$	$94 \pm 3,4$	0,4933	$0,36 \pm 0,03$	$57 \pm 7,4$
3	$91 \pm 3,4$	$64 \pm 3,4$	0,2837	$0,20 \pm 0,02$	$31 \pm 4,1$

Abbildung 11: Aktivitäts- und Positionsbestimmung der unbekannten Quellverteilung

Da die Peaks eine gewisse Breite haben, die sich in der gefilterten Darstellung über etwa drei BINs erstreckt, wurde ein Ortsfehler von einem BIN angenommen. Diese Ortsunbestimmtheit in Verbindung mit den diskreten Messwerten führt zu einer Begrenzung der Ortsauflösung. Das heißt, dass es einen minimalen Abstand d_{min} zwischen zwei Peaks gibt, unterhalb dessen man sie nicht mehr unterscheiden kann. In der Optik bestimmt man Auflösungen mit Hilfe des heuristischen *Rayleigh-Kriteriums*, das besagt, dass der Mindestabstand zweier Lichtquellen gleich dem Abstand des Minimums erster Ordnung vom Zentrum des Beugungsmusters ist. Dieses Kriterium ist hier nicht anwendbar, da wir nicht zwangsläufig klar identifizierbare Minima haben. Aus diesem Grund wurde die oben erläuterte Variante mit der Halbwertsbreite hier erneut angewendet: Der minimale Abstand zwischen zwei (identischen) Maxima entspricht der doppelten Distanz der Peakmitte zur Position der Halbwertsbreite. Folgende Abbildung verdeutlicht dies:

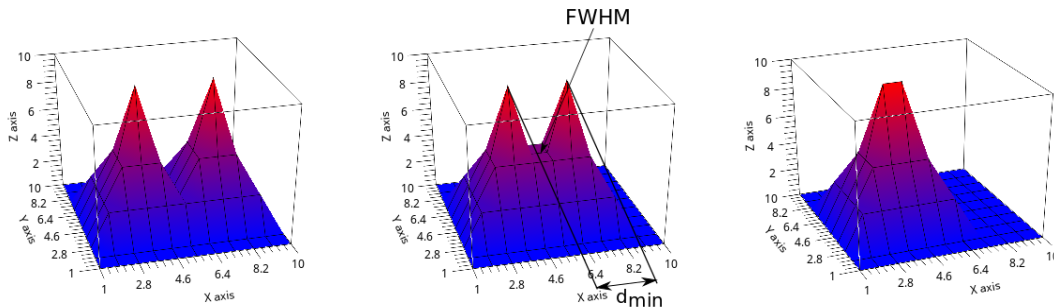


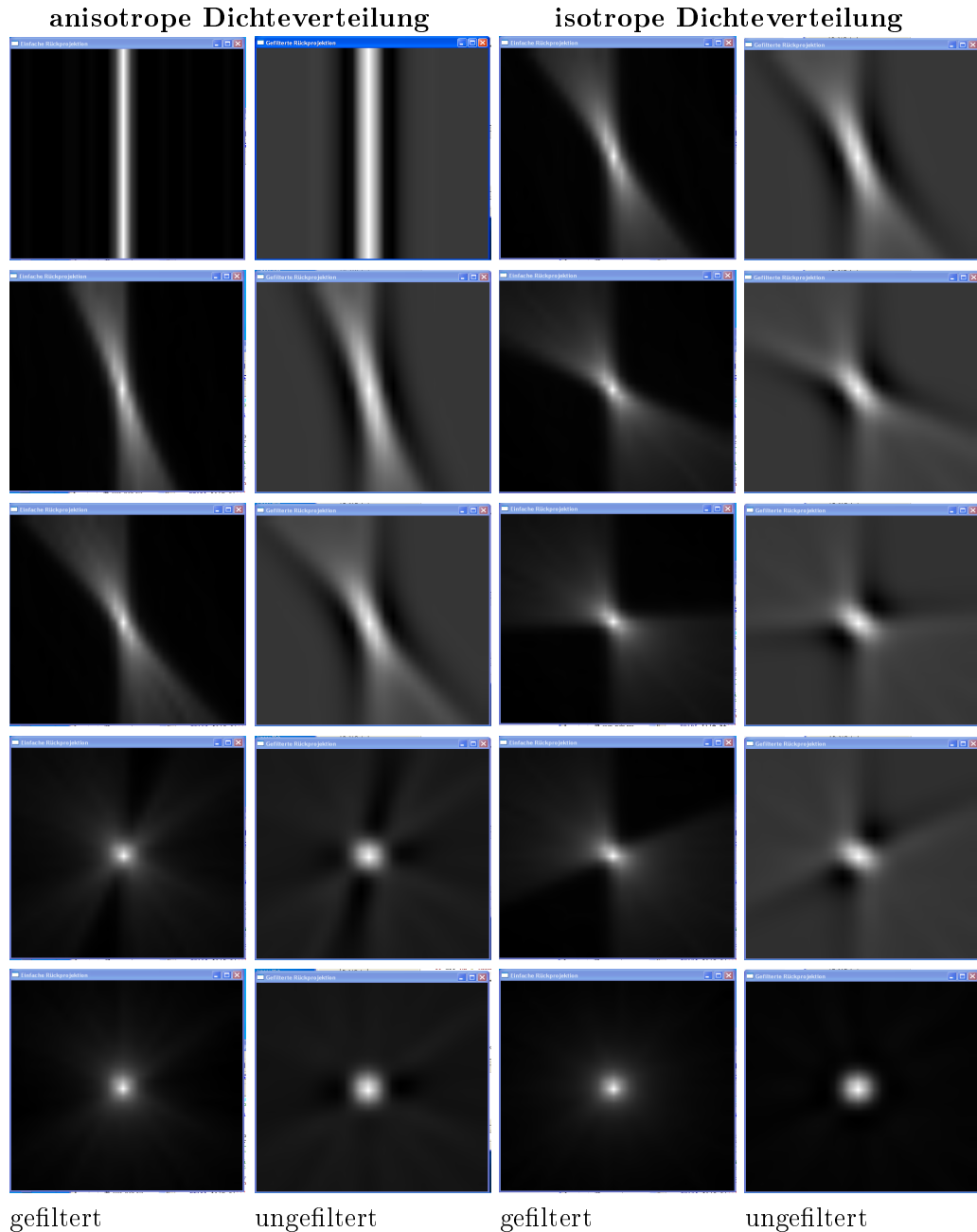
Abbildung 12: Kriterium zur Unterscheidung zweier Peaks

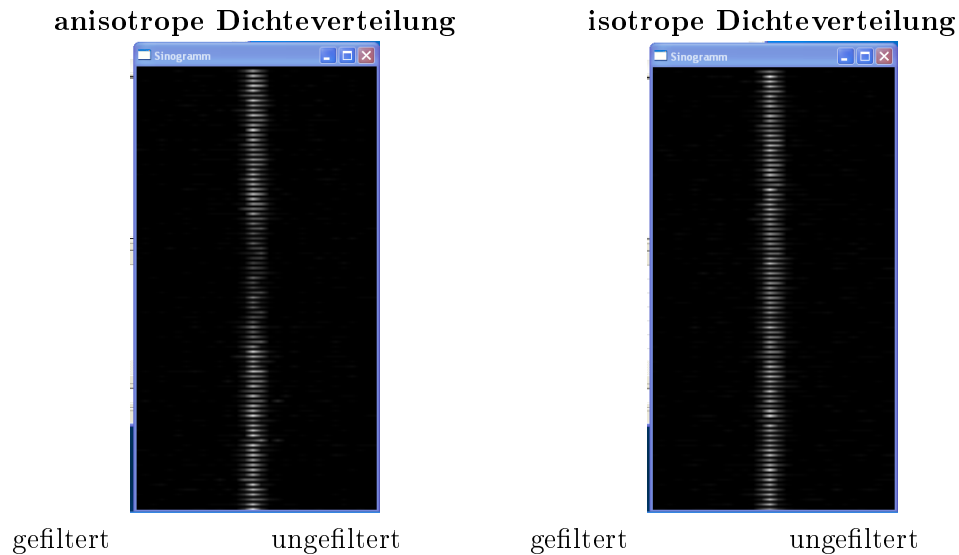
In der ungefilterten Darstellung war die Halbwertsbreite bereits innerhalb von einem BIN erreicht, wodurch sich eine Ortsauflösung von ungefähr $d_{min} = 2 \text{ BIN} = 6,75 \text{ mm}$ ergibt.

3.3.2 Messung mit einer Punktquelle, Phantom an-/isotroper Dichteverteilung

Qualitative Gegenüberstellung an-/isotroper Dichteverteilung

Nun sollen eine isotrope und eine anisotrope Dichteverteilung des Quellbehältnisses untersucht werden. In der nachstehenden Tabelle ist die Entwicklung der Rückprojektionen protokolliert. Man kann hier früh erkennen, dass die gefilterten Bilder die Quelle schärfer abbilden als die ungefilterten. Besonders sind allerdings die Screenshots der abgeschlossenen Messung und die fertigen Sinogramme. Bei der isotropen Messung kann man klar die isotrope erkennen. Die Intensität im Sinogramm ist kontinuierlich gleich, ebenso ist in der gefilterten Rückprojektion kein Schatten mehr erkennbar.





Demgegenüber stehen die Bilder der anisotropen Messung. Man erkennt hier in der Mitte des Sinogramms eine dunklere Stelle und in den abgeschlossenen Rückprojektionen sieht man rechts und links dunklere Stellen, die das Halo unterbrechen. Uns wurde bekanntgegeben, dass nur auf einer Seite eine Anisotropie eingesetzt wurde. Wir sehen diese Unterbrechung jedoch sowohl links als auch rechts. Das bedeutet, dass man in der Praxis nicht mit Sicherheit sagen, wo sich ein festerer Stoff wie zum Beispiel ein Knochen befindet.

Gegenüberstellung der registrierten Ereigniszahlen und Ermittlung einer Korrekturfunktion

Als nächstes schaut man sich die registrierten und auch tatsächlich für die Rückprojektion verwendeten Ereignisdaten an. Zunächst folgt in Abbildung 13 die Darstellung der Ereigniszahlen über den Winkel. Man sieht, wie sich die Werte um eine gedachte, konstante Linie herum verteilen und damit die Isotropie. In der nachfolgenden Abbildung 14 sieht man im Gegenteil dazu deutlich die Anisotropie, gekennzeichnet durch eine Mulde, die demnach auszeichnet, dass die Dichte des Materials hier größer war, da weniger Ereignisse gezählt werden.

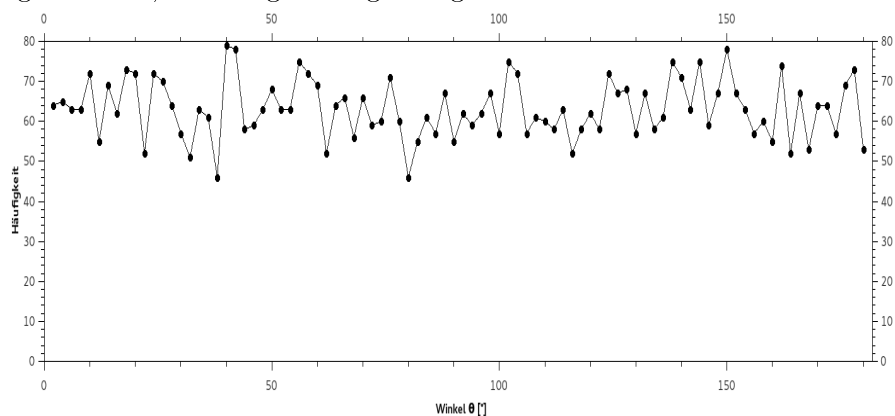


Abbildung 13: Plot der registrierten Ereigniszahlen

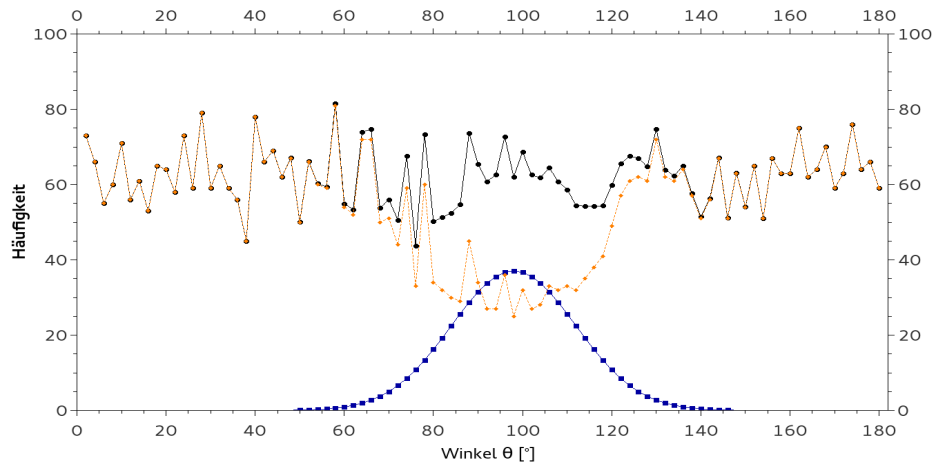


Abbildung 14: registrierte Ereignisse (gelb), korrigierte Ereigniszahlen (schwarz) und Korrekturfunktion (blau)

Diese Mulde, die wie eine Art Tal irgendwie gaußförmig aussieht, kann man durch eine Korrekturfunktion auf das konstante Niveau anheben. So hat jedes Material seine eigene Korrekturfunktion. In Abbildung 14 erkennt man, dass die schwarze Kurve wieder ungefähr um eine konstante Kurve verteilt. Die Korrekturfunktion und insbesondere ihre Parameter sind durch ausprobieren entstanden. Die Funktion sieht folgendermaßen aus:

$$K(\theta) = \frac{A}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\theta-\Delta\theta}{\sigma}\right)^2} \text{ mit folgenden Parametern } \sigma = 14^\circ, A = 1300^\circ \text{ und } \Delta\theta = 98^\circ$$

4 Auswertung

5 Literatur

Literatur

- [01] Y.Weï; G.Wang: *An Intuitive Discussion on the Ideal Ramp Filter in Computed Tomography*.
Iowa, 02/2004
- [02] IKTP TU Dresden : *PET - Positronen-Emissions-Tomographie*
- [03] T.Würschig : *Aufbau eines Versuchsplatzes für die Positronen-Emissions-Tomographie*