

TU DRESDEN

FORTGESCHRITTENENPRAKTIKUM

PRAKTIKUMSBERICHT

Positronen-Emissions-Tomographie

Autoren:

Toni EHMCKE
Christian SIEGEL

Betreuer:

Carsten BITTRICH

Dresden, 13. November 2015

Inhaltsverzeichnis

1	Aufgabenstellung	2
2	Physikalische Grundlagen	2
3	Durchführung	2
3.1	Theoretischer Teil	2
3.2	Kalibriermessungen	2
3.2.1	Messung einer Quelle bekannter Aktivität bei mittiger Quellposition	2
3.2.2	Messung bei Positionen direkt an den Detektoren	2
3.2.3	Schwerpunktsdiagramme	3
3.3	Tomografische Messungen	4
3.3.1	Messung einer Quellkonfiguration, Phantom isotroper Dichteverteilung	4
3.3.2	Messung einer Quellkonfiguration, Phantom isotroper Dichteverteilung	6
3.3.3	Messung mit einer Punktquelle, Phantom an-/insotroper Dichteverteilung	8
3.3.4	Radon-Transformation als Rekonstruktionsverfahren: Ein Rechenbeispiel	10
4	Auswertung	11
5	Literatur	12

1 Aufgabenstellung

2 Physikalische Grundlagen

3 Durchführung

3.1 Theoretischer Teil

3.2 Kalibriermessungen

3.2.1 Messung einer Quelle bekannter Aktivität bei mittiger Quellposition

Zunächst haben wir eine Quelle in mittigem Abstand zu den beiden Detektoren vermessen. Die Quelle hatte am 29.10.2015 eine Aktivität $A = 1,02 \text{ MBq}$.

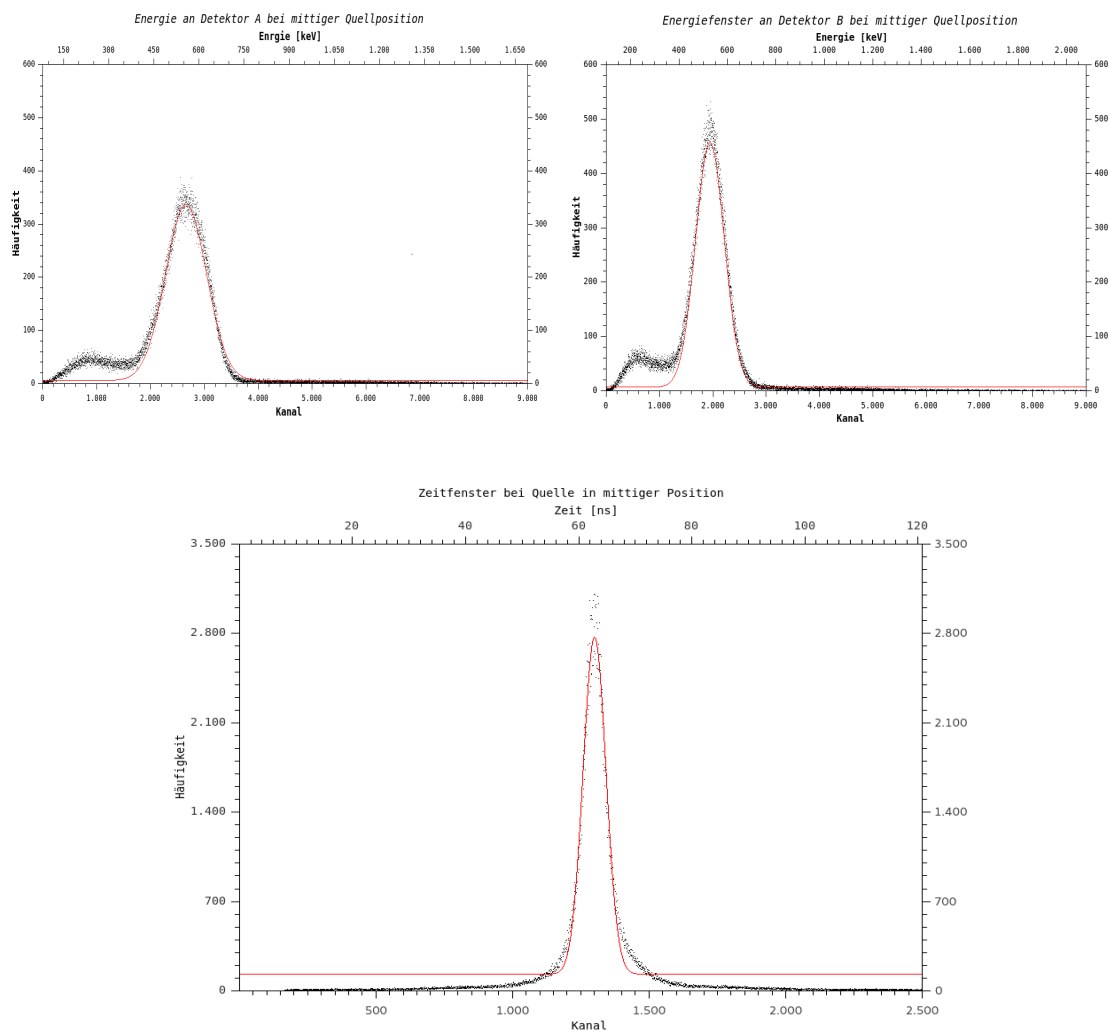


Tabelle 2: Kalibrationsmessung bei Quelle mittig zwischen den Detektoren A und B

3.2.2 Messung bei Positionen direkt an den Detektoren

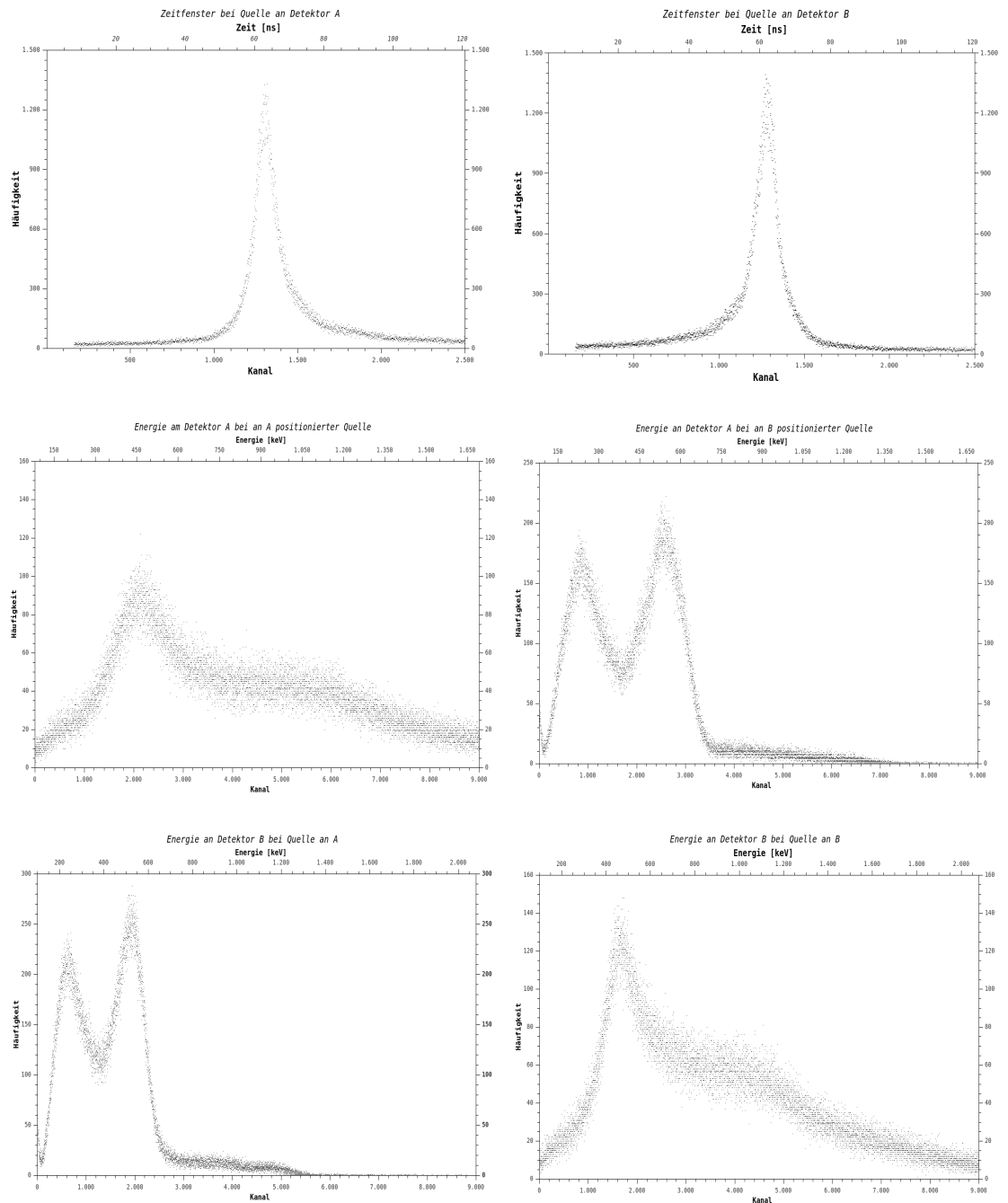


Abbildung 1: Gegenüberstellung der Messungen mit der Quelle an Det. A (links) und Det. B (rechts)

3.2.3 Schwerpunktsdiagramme

Als nächstes sind die Schwerpunktsdiagramme zu betrachten. Es wurden drei von Detektor A erstellt. Einmal als die Quelle an Detektor B positioniert wurde, danach an Detektor A und einmal mittig zwischen beiden.

In Abbildung 2 kann gegenüber 4 ein schwächeres Muster. Gegenüber Abbildung 4 ist sogar deutlich, die Kristallstruktur erkennbar.

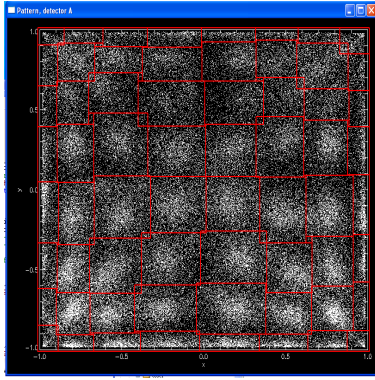


Abbildung 2: Messung bei Quelle an Detektor B

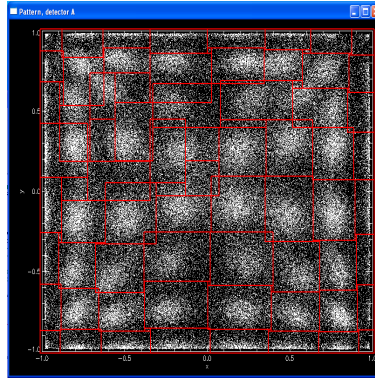


Abbildung 3: Messung bei Quelle in der Mitte

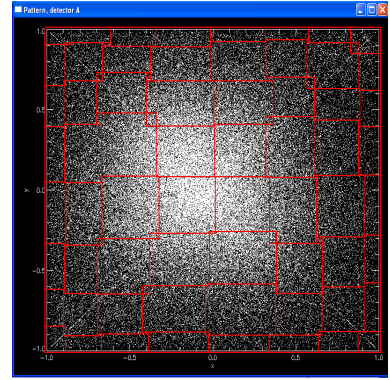


Abbildung 4: Messung bei Quelle an Detektor A

3.3 Tomografische Messungen

3.3.1 Messung einer Quellkonfiguration, Phantom isotroper Dichteverteilung

Hauptversuch

Untersuchung des Einflusses verschiedener Filter

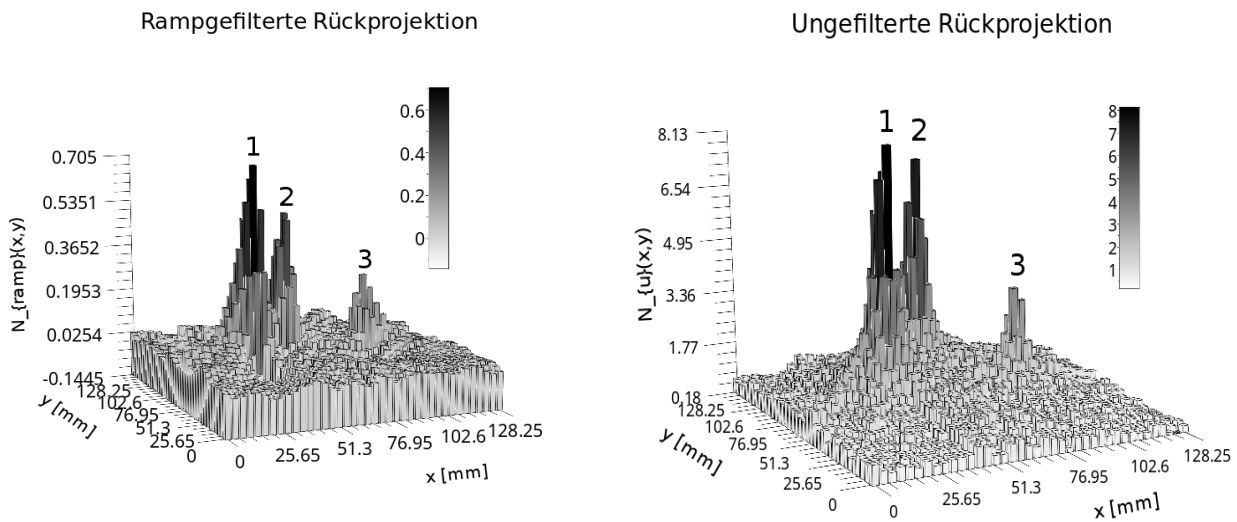


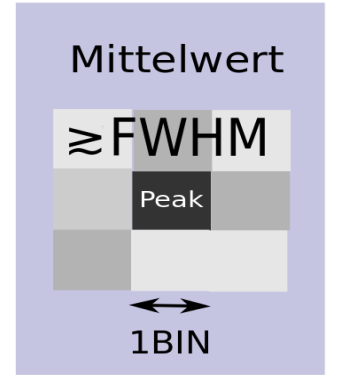
Abbildung 5: Gefilterte und Ungefilterte Rückprojektion der Aktivitätsverteilung

Der verwendete Rampfilter kann als eine Faltung des Sinogramms $p(s, \theta)$ mit einer Filterfunktion $h(s)$ zu einem festen Winkel θ dargestellt werden. Das heißt man addiert zu einem festen Wert von $p(s, \theta)$ die umliegenden Funktionswerte innerhalb eines Bereiches von 13 BINs mit einem (negativen) Gewicht. Weitere Eigenschaften dieses Filters werden im Abschnitt (3.3.4) dargestellt. Man beobachtet, dass durch diese Faltung im Vergleich zur ungefilterten Rückprojektion ein höheres Untergrundrauschen in Bereichen mit geringer Aktivität entsteht, da insbesondere auch die Skala einen kleineren Bereich ($N_{ramp}(x, y) \in [-0,14, 0,7]$, $N_u(x, y) \in [0,18, 8,13]$) abdeckt. Allerdings fallen die Peaks durch die Faltung beim Rampfilter deutlich schneller ab (negative Bereiche um Maximum), wodurch man sie besser lokalisieren kann. Aus diesem Grund wird im Folgenden der gefilterte Datensatz für die quantitative Auswertung verwendet.

Quantitative Auswertung

Zunächst werden die Positionen (x_i, y_i) ($i = 1, 2, 3$) der 3 Quellen im verschlossenen Plastikbehälter bestimmt. Dafür wird die in Abbildung (5) visualisierte Rückprojektion $N(x, y)$ verwendet, die durch Auslesen der in `Matrix_reco.txt` enthaltenen Messwertmatrix entstanden ist. Der erste Eintrag sei als Koordinatenursprung gewählt. 1 BIN des Rekonstruktionsrasters entspricht 3,375 mm. Die Positionen der Quellen werden mit den lokalen Maxima $N(x_i, y_i)$ der Aktivitätsverteilung identifiziert.

Anschließend quantifiziert man die Aktivität jeder einzelnen Quelle, indem man die rückprojizierten Verteilung über einen kleinen Bereich um die Peaks mittelt. Bezeichne diesen Mittelwert mit $\bar{N}(x_i, y_i)$. Im Rahmen dieser Auswertung wurde ein quadratischer Bereich gewählt, in welchem Werte anzutreffen waren, die in der Nähe des FWHM (=Full Width Half Maximum) lagen. Dieses Vorgehen wird durch die nebenstehende Abbildung visualisiert.



Mittels einfacher Verhältnisbildung können unter Vorgabe einer Referenzaktivität A_{ref} nun unbekannte Aktivitäten innerhalb der Verteilung berechnet werden. Dabei wurde die stärkste Aktivität mit $A_0 \equiv A(t_0 = 01.02.2010) = (363 \pm 11)$ kBq angegeben. Mit dem Aktivitätsgesetz kann man nun berechnen:

$$A_{ref} \equiv A(t = 29.10.2015) = A_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t-t_0}{T_{1/2}}} = (79 \pm 3) \text{ kBq} \quad (1)$$

Wobei die Halbwertszeit $T_{1/2}(^{22}\text{Na}) = (2,6027 \pm 0,0010)$ a verwendet wurde, sowie folgende Fehlerformel:

$$\left(\frac{\Delta A_{ref}}{A_{ref}}\right)^2 = \left(\frac{\Delta A_0}{A_0}\right)^2 + \left(\ln(2) \cdot \frac{\Delta T_{1/2}}{T_{1/2}}\right)^2 \quad (2)$$

Bezeichnet man $A_{ref} \propto \bar{N}_{ref} \equiv \bar{N}(x_1, y_1)$ als rückprojizierte Aktivität der Referenzquelle, so erhält man für die unbekannten Aktivitäten $A_i \propto \bar{N}(x_i, y_i)$:

$$A_i = A_{ref} \cdot \frac{\bar{N}(x_i, y_i)}{\bar{N}_{ref}} \quad (3)$$

$$\left(\frac{\Delta A_i}{A_i}\right)^2 = \left(\frac{\Delta A_{ref}}{A_{ref}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta \bar{N}(x_i, y_i)}{\bar{N}(x_i, y_i)}\right)^2 + \left(\frac{\Delta \bar{N}_{ref}}{\bar{N}_{ref}}\right)^2 \quad (4)$$

Hierbei wurden die Fehler der rückprojizierten Aktivitäten als Standardabweichungen des Mittelwertes gesetzt, die sich beim obigen Mittelvorgang ergab: $\Delta \bar{N}(x_i, y_i) = \sigma(\bar{N})$. Die systematischen Fehler des PET-Scanners waren leider nicht bekannt. Zusammenfassend ergeben sich folgende Resultate:

Peak # i	x_i [mm]	y_i [mm]	Peakmaximum $N(x_i, y_i)$	Peakmittel $\bar{N}(x_i, y_i)$	A_i [kBq]
1	$37 \pm 3,4$	$64 \pm 3,4$	0,705	$0,50 \pm 0,05$	$79 \pm 2,4$
2	$64 \pm 3,4$	$94 \pm 3,4$	0,4933	$0,36 \pm 0,03$	$57 \pm 7,4$
3	$91 \pm 3,4$	$64 \pm 3,4$	0,2837	$0,20 \pm 0,02$	$31 \pm 4,1$

Abbildung 6: Aktivitäts- und Positionsbestimmung der unbekannten Quellverteilung

Da die Peaks eine gewisse Breite haben, die sich in der gefilterten Darstellung über etwa drei BINs erstreckt, wurde ein Ortsfehler von einem BIN angenommen. Diese Ortsunbestimmtheit in Verbindung mit den diskreten Messwerten führt zu einer Begrenzung der Ortsauflösung. Das heißt, dass es einen minimalen Abstand d_{min} zwischen zwei Peaks gibt, unterhalb dessen man sie nicht

mehr unterscheiden kann. In der Optik bestimmt man Auflösungen mit Hilfe des heuristischen *Rayleigh-Kriteriums*, das besagt, dass der Mindestabstand zweier Lichtquellen gleich dem Abstand des Minimums erster Ordnung vom Zentrum des Beugungsmusters ist. Dieses Kriterium ist hier nicht anwendbar, da wir nicht zwangsläufig klar identifizierbare Minima haben. Aus diesem Grund wurde die oben erläuterte Variante mit der Halbwertsbreite hier erneut angewendet: Der minimale Abstand zwischen zwei (identischen) Maxima entspricht der doppelten Distanz der Peakmitte zur Position der Halbwertsbreite. Folgende Abbildung verdeutlicht dies:

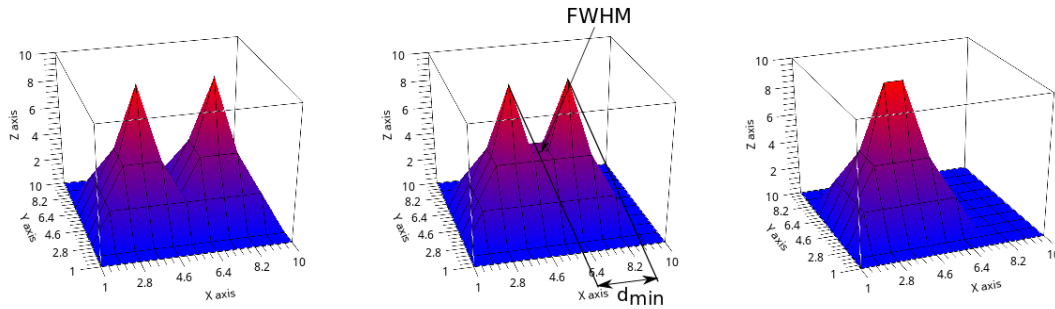


Abbildung 7: Kriterium zur Unterscheidung zweier Peaks

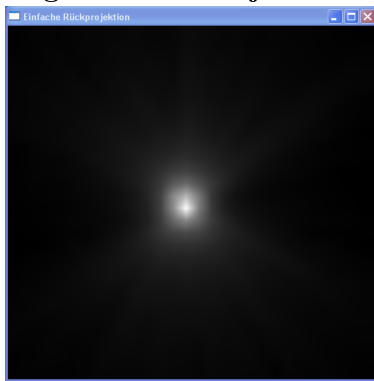
In der ungefilterten Darstellung war die Halbwertsbreite bereits innerhalb von einem BIN erreicht, wodurch sich eine Ortsauflösung von ungefähr $d_{min} = 2 \text{ BIN} = 6,75 \text{ mm}$ ergibt.

3.3.2 Messung einer Quellkonfiguration, Phantom isotroper Dichteverteilung

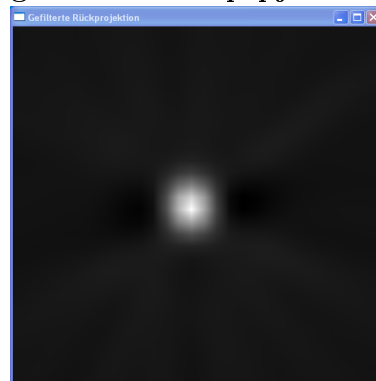
Hauptversuch

Als nächsten wurde eine Messung mit unbekannter Quellverteilung gestartet. Die Energie- und das Zeitfenster entsprechen den oben bestimmten Intervallen.

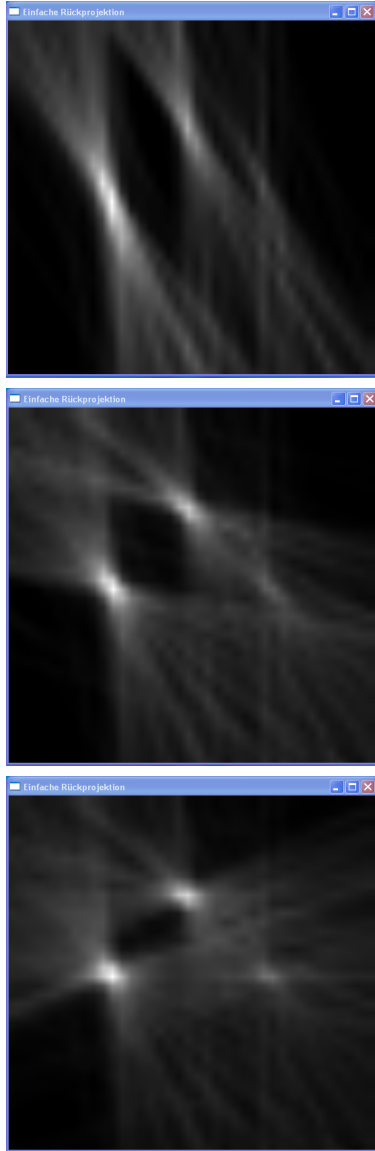
ungefilterter Projektion



gefilterte Rückprojektion



ungefilterter Projektion



gefilterte Rückprojektion

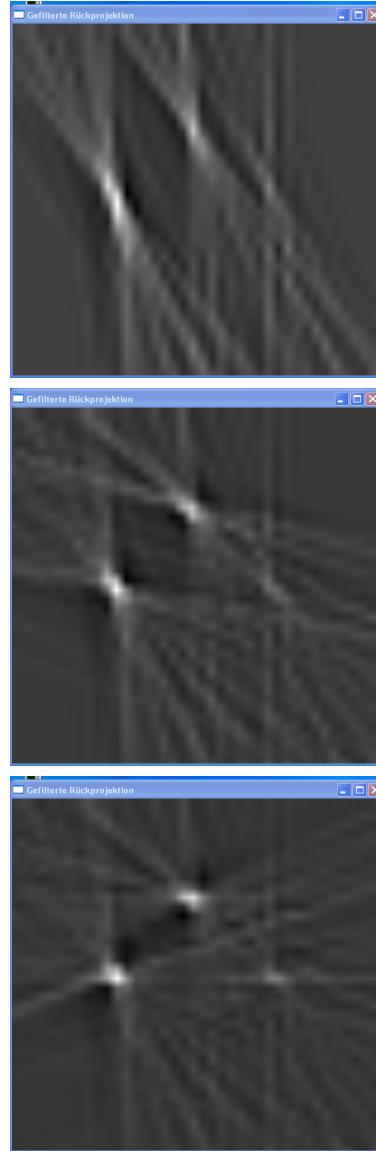
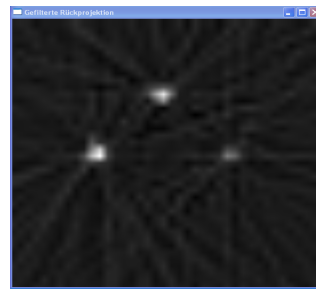


Abbildung 8: Screenshots der Bildenstehung der gefilterten (rechts) und ungefilterten (links) Rückprojektion

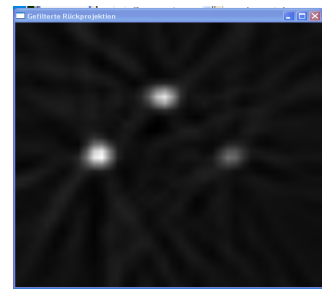
Test, Test **Untersuchung des Einflusses verschiedener Filter**



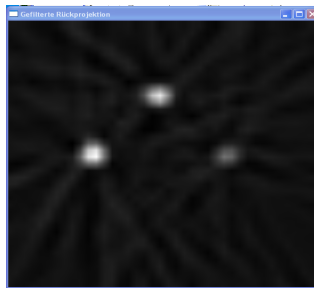
ungefilterten Rückprojektion



Rampf-Filter



Hanning-weighted-Filter



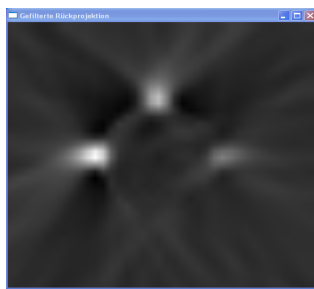
Middle-Filter



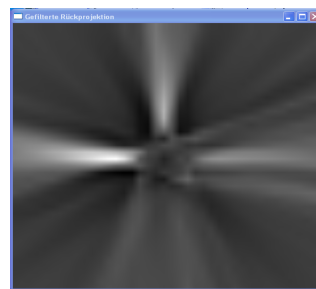
Rauschfilter bei Dimension 3



Rauschfilter bei Dimension 13



Rauschfilter bei Dimension 25



Rauschfilter bei Dimension 36

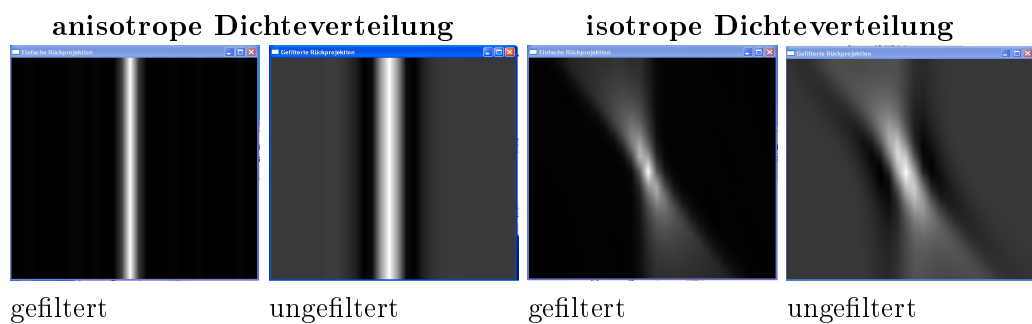


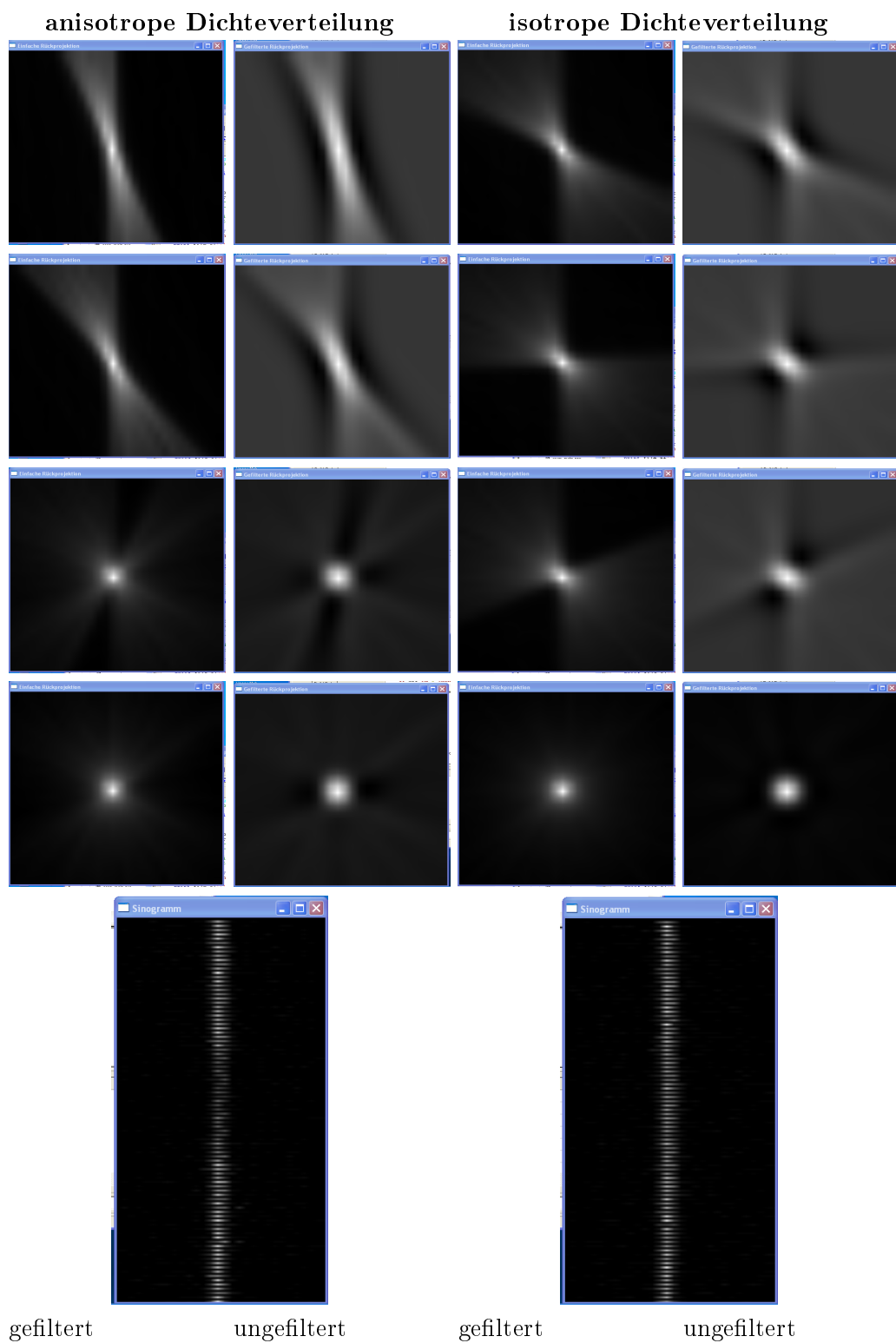
Shepp-Logan-Filter

Die Abbildungen drei bis elf zeigen die Anwendung verschiedener Filter auf die ungefilterte Rückprojektion, wobei der Standardwert der Dimension 13 ist.

3.3.3 Messung mit einer Punktquelle, Phantom an-/insotroper Dichteverteilung

Qualitative Gegenüberstellung an-/isotroper Dichteverteilung





Gegenüberstellung der registrierten Ereigniszahlen und Ermittlung einer Korrekturfunktion

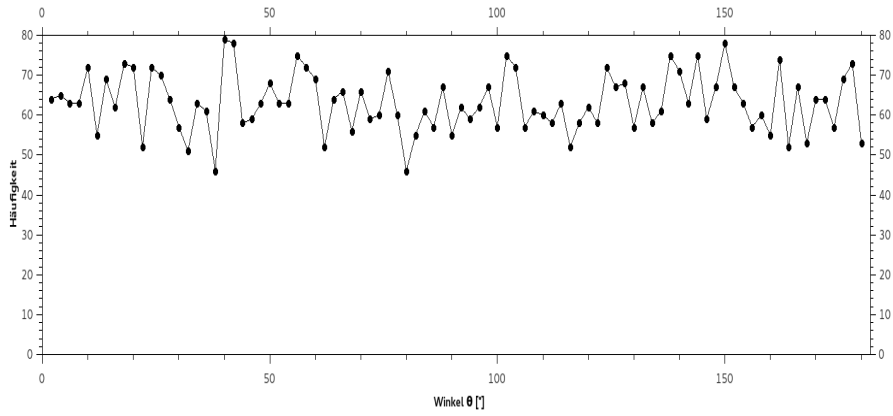


Abbildung 9: Plot der registrierten Ereigniszahlen

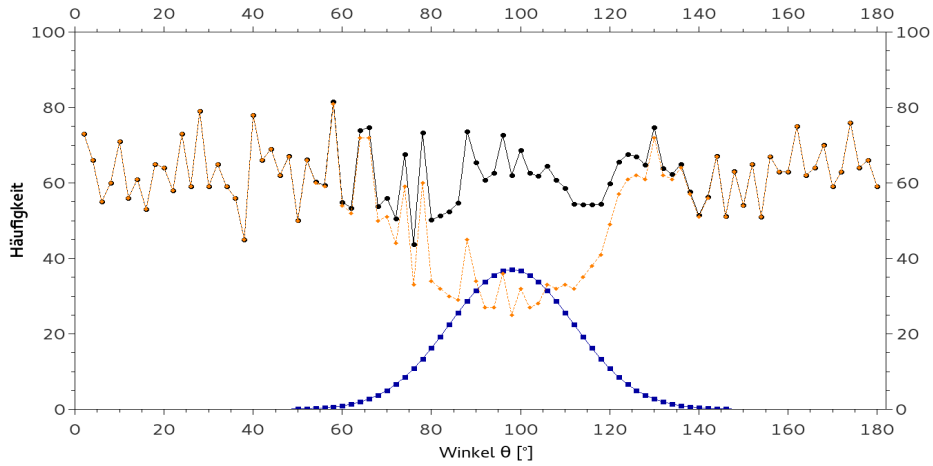


Abbildung 10: registrierte Ereignisse (gelb), korrigierte Ereigniszahlen (schwarz) und Korrekturfunktion (blau)

Die Korrekturfunktion, die man sich anhand der gelben Kurve ausdenken könnte, ist eine Gauß-Funktion, die ihr Maximum gerade im Minimum der erfassten Daten hat. Sie sieht folgendermaßen aus:

$$K(\theta) = \frac{A}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\theta-\Delta\theta}{\sigma}\right)^2} \text{ mit folgenden Parametern } \sigma = 14^\circ, A = 1300^\circ \text{ und } \Delta\theta = 98^\circ$$

3.3.4 Radon-Transformation als Rekonstruktionsverfahren: Ein Rechenbeispiel

Im Folgenden soll die durch die Auswertungssoftware durchgeführte (diskrete) Radon-Transformation anhand einer willkürlich gewählten Aktivitätsverteilung $N(x, y)$ nachvollziehbar dargestellt werden. Da der Ort (x, y) technisch nicht als kontinuierliche Variable implementiert werden kann, genügt die Betrachtung der Ausgangsverteilung als eine endliche Matrix $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$, deren Einträge die Aktivität am jeweiligen Ort repräsentieren. Zunächst bestimmt man das sogenannte **Sinogramm** $p(s, \theta)$, indem man das Koordinatensystem um einen Winkel θ dreht und dann die Verteilung $N(x'(s, \theta), y'(s, \theta))$ zu einem bestimmten Ort s , welcher ohne Beschränkung der Allgemeinheit mit der x-Koordinate des gedrehten Systems identifiziert werden kann, entlang der neuen y-Achse integriert. Was wir erhalten, ist eine Projektion der Ausgangsverteilung auf die gedrehte x-Achse. Diese Konstruktion wirkt künstlich, ist ab letztlich genau das, was bei einem PET-Scan geschieht: Rotiert man einen PET-Detektor um eine Quelle, so misst man für jeden festen Winkel genau diese Projektion der Quellverteilung auf die Detektorfläche. Numerisch simulieren wir diese Hin-Transformation dadurch, dass über die einzelnen Einträge in den Spalten ($\theta = 0^\circ$), den Zeilen ($\theta = 90^\circ$) und den Diagonalen

($\theta = 90^\circ, 135^\circ$) von \mathbf{I} summiert wird. Da jedoch 9 Diagonaleinträge existieren, müssen die so erhaltenen Einträge durch Multiplikation einer Wichtungsmatrix $\mathbf{W}_h \in \mathbb{R}^{9 \times 5}$ multipliziert werden, um die unterschiedlichen Flächenanteile der Diagonalen an der "Gesamtfläche" der Matrix zu berücksichtigen.

Nach erfolgreicher Hintransformation wird nun der Einfluss eines **Ramp-Filters** der Dimension 1 untersucht. Dieser Filter wird durch eine Filterfunktion $h(s)$, welche im Nullpunkt einen sehr großen Wert annimmt und die für $|s| \rightarrow \infty$ gegen 0 konvergiert, allerdings gleichzeitig der Bedingung $\forall s \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : h(s) < 0$ genügt. Man findet folgenden formalen analytischen Ausdruck für h :

$$h(s) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi^2 s^2} & s \neq 0 \\ \frac{\delta(s)}{\pi^2 |s|} & s = 0 \end{cases}$$

Damit erhält man das gefilterte Sinogramm $p_f(s, \theta)$ mit:

$$p_f(s, \theta) := (p(\cdot, \theta) * h)(s) = \int_{-\infty}^{\infty} p(s', \theta) \cdot h(s - s') ds'$$

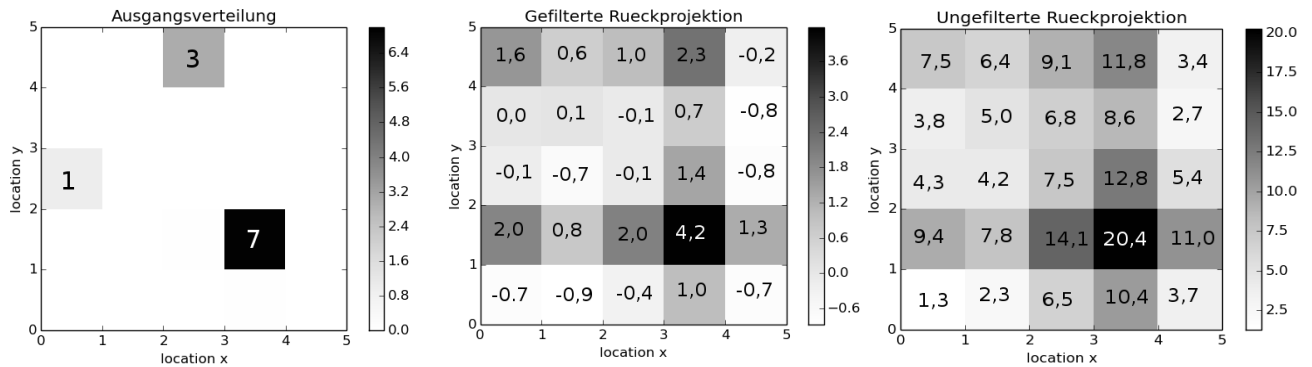


Abbildung 11: Theoretisches Beispiel für Radon-Transformation

4 Auswertung

5 Literatur