

TU DRESDEN

FORTGESCHRITTENENPRAKTIKUM

PRAKTIKUMSBERICHT

Positronen-Emissions-Tomographie

Autoren:

Toni EHMCKE
Christian SIEGEL

Betreuer:

Carsten BITTRICH

Dresden, 14. November 2015

Inhaltsverzeichnis

1	Aufgabenstellung	2
2	Physikalische Grundlagen	2
3	Durchführung	2
3.1	Theoretischer Teil	2
3.2	Kalibriermessungen	2
3.2.1	Messung einer Quelle bekannter Aktivität bei mittiger Quellposition	2
3.2.2	Messung bei Positionen direkt an den Detektoren	4
3.2.3	Schwerpunktsdiagramme	5
3.3	Tomografische Messungen	6
3.3.1	Messung einer Quellkonfiguration, Phantom isotroper Dichteverteilung	6
3.3.2	Messung einer Quellkonfiguration, Phantom isotroper Dichteverteilung	8
3.3.3	Messung mit einer Punktquelle, Phantom an-/insotroper Dichteverteilung	10
3.3.4	Radon-Transformation als Rekonstruktionsverfahren: Ein Rechenbeispiel	12
4	Auswertung	13
5	Literatur	14

1 Aufgabenstellung

2 Physikalische Grundlagen

3 Durchführung

3.1 Theoretischer Teil

3.2 Kalibriermessungen

3.2.1 Messung einer Quelle bekannter Aktivität bei mittiger Quellposition

Zunächst haben wir eine Quelle in mittigem Abstand zu den beiden Detektoren vermessen. Die Quelle hatte am 29.10.2015 eine Aktivität $A = 1,02 \text{ MBq}$.

Daraus sollten die Energiefenster der beiden Detektoren sowie das Koinzidenzzeitfenster bestimmt werden. Die Energiepeaks werden um 511 keV erwartet, was einem Kanal von 2402 für Detektor A und 1868 für Detektor B entspricht. Das Zeitfenster erwarten wir aufgrund technischer Effekte (bspw. Totzeit) und einer gewollten erhöhten Verzögerung im Bereich einiger zehn Nanosekunden.

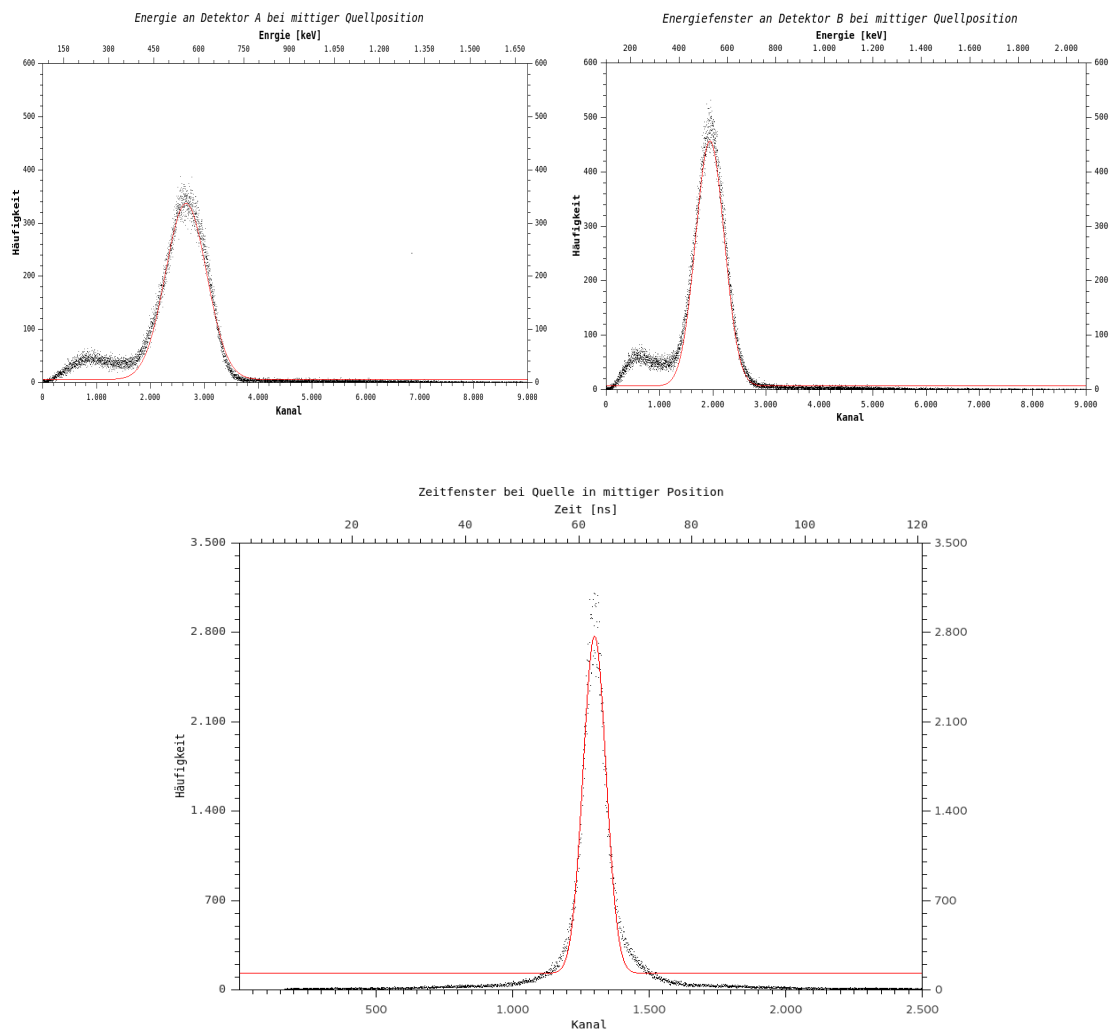


Tabelle 2: Kalibrationsmessung bei Quelle mittig zwischen den Detektoren A und B

Wie man an den oberen beiden Diagrammen von Tabelle 2 sieht, stimmt diese Erwartung mit einer leichten Verschiebung nach rechts gut überein. Dies kann dem statistischen Charakter von

Kernzerfällen und den Wegen (verändert ua. durch Compton-Streuung für Photonen, freiwerdende Bremsstrahlung für Positronen), die die Positronen und letztlich die Photonen zurücklegen zugeordnet werden. Andererseits unterliegen die Detektormessungen und die Umrechnung der Kanäle in Energien einem Fehler, da die Kanäle diskret sind und nur bestimmte Energien detektieren können, was dazu führt, dass Energien zwischen zwei Kanälen verloren gehen. Die Umrechnung der Kanäle in Energien und Zeit erfolgt mittels folgender, uns gegebener Formeln des Musters $G = a + b \cdot K$, wobei K die Kanalnummer meint und a bzw. b Parameter sind:

$$\begin{aligned} E_A &= (81 \pm 31) + (0,179 \pm 0,012)K_A \\ E_B &= (100 \pm 40) + (0,220 \pm 0,021)K_B \\ \Delta t &= (-0,014 \pm 0,0192) + (0,0483 \pm 0,00002)K_t \end{aligned}$$

Die Fehler für die Umrechnung von Kanälen in physikalische Einheiten lassen sich leicht über die gauß'sche Fehlerfortpflanzung bestimmen und belaufen sich betreffend der Diagramme in 2 auf:

$$\Delta(\Delta t) = 0,03 \text{ ns}; \Delta E_A = 44,84 \text{ keV}; \Delta E_B = 44,00 \text{ keV}$$

Um Messungen vorzunehmen, müssen jetzt die Fenster für Energie und Koinzidenzzeit bestimmt werden. Dies geschieht über Gauß-Fits in den Diagrammen von Tabelle 2. Dann bestimmt man das FWHM und zieht es von den Maximumpositionen ab. Damit ergeben sich die Fenster zu:

$$K_A \in [2217, 3101], K_B \in [1629, 2264], K_t \in [1252, 1351]$$

$$E_A \in [478, 636] \text{ keV}, E_B \in [458, 598] \text{ keV}, \Delta t \in [60, 65] \text{ ns}$$

Daraus ergibt sich eine Koinzidenzauflösungszeit von $\tau = (4,77 \pm 0,02) \text{ ns}$, welche auf eine Abschätzung der zufälligen Koinzidenzen führt. Mithilfe der gegebenen Positronenemissionswahrscheinlichkeit für ^{22}Na können wir die Zahl der Zerfälle berechnen, die keine Positronen emittieren. Im schlimmsten Fall würden alle diese Zerfälle einen Beitrag zufälliger Koinzidenzen beisteuern, was zehn Prozent der gemessenen Ereignisse ausmacht. Bei ^{22}Na bestehen diese restlichen Prozesse aus γ -Quanten mit einer Energie von 1275 keV. Diese kann man vor allem in den späteren Messungen, die direkt an den Detektoren gemacht wurden, erkennen. (Siehe Abbildung 1) Einen Großteil dieser Ereignisse schließen wir jedoch durch die Kalibrierung und die Setzung der Zeitfenster aus, sodass der Einfluss keine 10% mehr ausmacht. Deshalb ist die Zahl der zufälligen Koinzidenzen besser abschätzbar über die Standardabweichung im Zusammenhang mit dem Anteil der Prozesse, die beim Zerfall keine Positronen emittieren. Hierfür ergibt sich die Zahl der zufälligen Koinzidenzen zu $N = 147$.

Koinzidenznachweiseffektivität

Mit diesen Informationen lassen sich nun die Koinzidenznachweiseffektivitäten der verwendeten Detektoren A und B berechnen. Gegeben sind zunächst folgende Formeln für die Zählrate wahrer Koinzidenzen:

$$\dot{N}_K = \left(\frac{\Omega_{min}}{2\pi} \right) A P_\beta \varepsilon_A \varepsilon_B \quad (1)$$

$$\dot{N}_Z = \left(\frac{2\tau A \Omega_{min}}{\pi} \right) \dot{N}_K \quad (2)$$

Dabei sind $\varepsilon_{A/B}$ die Nachweiseffektivitäten der Detektoren, P_β die Positronenemissionswahrscheinlichkeit und Ω_{min} der Raumwinkel des Detektors, der am weitesten von der Quelle entfernt ist. \dot{N}_Z ist die Zählrate zufälliger Koinzidenzen. Setzt man die Gleichungen 1 und 2 ineinander ein, erhält man folgende Gleichung für die Nachweiseffektivitäten:

$$\varepsilon_A \varepsilon_B = \frac{\pi^2 \dot{N}_Z}{A^2 P_\beta \tau \Omega_{min}^2} \text{ mit } \Omega_{min} = \frac{4a^2}{(D-b)^2} \text{ und } \dot{N}_Z = \frac{N_Z}{\tau}$$

Da die Nachweiseffektivität pro Detektor zu bestimmen ist, kann man $\varepsilon_A \simeq \varepsilon_B$ annehmen und erhält:

$$\varepsilon_{A/B} = \frac{\pi(D-b)^2}{4Aa^2} \frac{1}{\tau} \sqrt{\frac{N_{Z,A/B}}{P_\beta}}$$

Für den Fehler erhält man bei fehlerlos angenommenen b , D , a und A folgendes:

$$\varepsilon_{A/B} = \frac{\pi(D-b)^2 N_Z^{1/2}}{8a^2 A \tau P_\beta^{1/2}} \cdot \sqrt{\left(\frac{\Delta N_Z}{N_Z}\right)^2 + \left(\frac{2\Delta\tau}{\tau}\right)^2 + \left(\frac{\Delta P_\beta}{P_\beta}\right)^2}$$

Die übrigen Daten können aus der Arbeitsanweisung extrahiert werden:

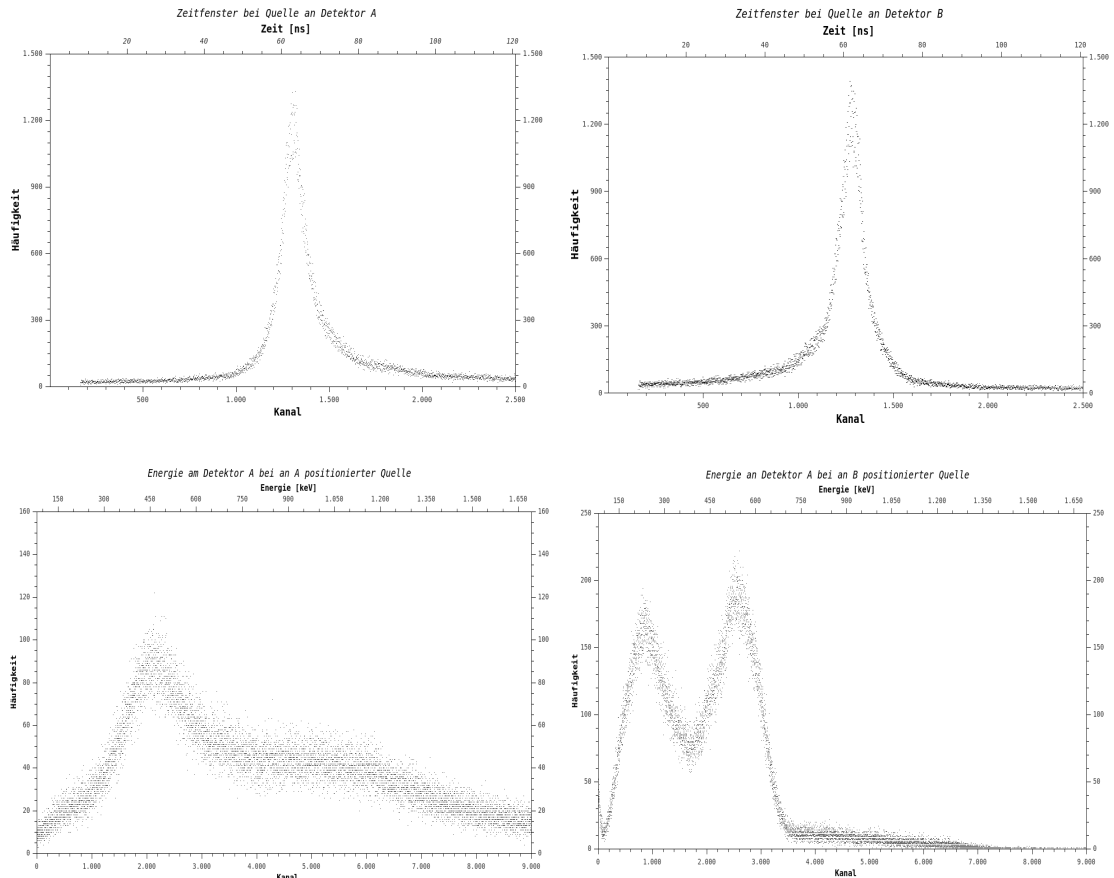
$$D = 386 \text{ mm}, b = 25 \text{ mm}, a = 54 \text{ mm}, P_\beta = 0,90382 \pm 0,00021$$

Damit erhalten wir für die Detektoren folgende Nachweiseffektivitäten:

$$\varepsilon_A = 2, \varepsilon_B = 1$$

3.2.2 Messung bei Positionen direkt an den Detektoren

Als nächstes soll der Abstand der beiden Detektoren zueinander bestimmt werden. Hierfür erfolgen Messungen, bei denen die Kalibrierquelle direkt an den Detektoren positioniert wird. Wie oben angedeutet, sieht man in den nachfolgenden Diagramme auch die Detektionen von den Photonen der Zerfallsreihe mit nur 10% Wahrscheinlichkeit, eben jenen Prozessen, die nicht die gewollte Positronenemission erzeugen. Besonders gut fällt dies dort auf, wo die Quelle wirklich direkt am Detektor liegt nicht und nicht am gegenüberliegenden. Am gegenüberliegenden Detektor sieht man jeweils zwei große Peaks von denen einer im niedrigeren Energiebereich als dem erwarteten liegen. Dies ist auch nachvollziehbar, da alle gestreuten und durch Bremsstrahlung erzeugten Photonen mitgezählt werden.



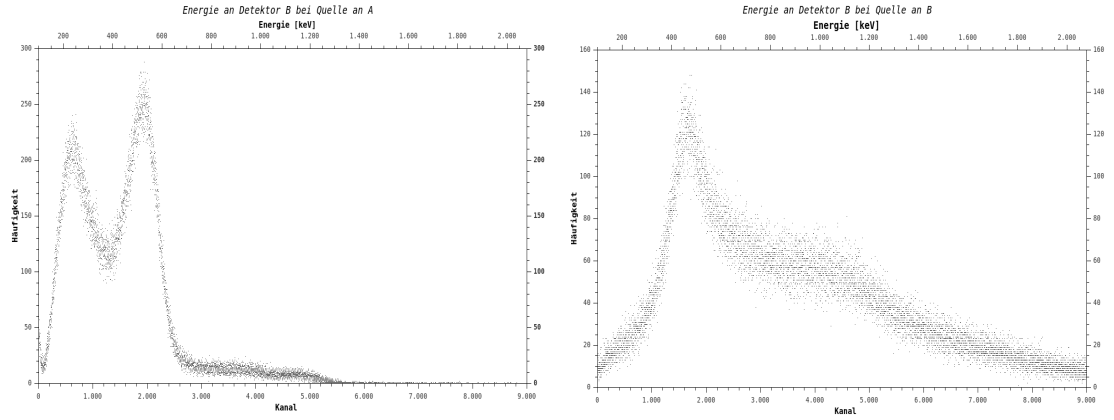


Abbildung 1: Gegenüberstellung der Messungen mit der Quelle an Det. A (links) und Det. B (rechts). Aus den Zeitdiagrammen, die auf den ersten Blick sehr ähnlich sind, kann man über einen Gauß-Fit die Peak-Positionen, das heißt, die Maxima, bestimmen. Diese wird verwendet, um die Laufzeitdifferenz und damit letztlich den Abstand zwischen den Detektoren A und B zu bestimmen. Die Zeitpeaks liegen bei $\Delta t_A = 63,35 \text{ ns}$ und $\Delta t_B = 61,80 \text{ ns}$. Mit der Formel $l = c \cdot \Delta T$ ergibt sich $l = 46,5 \text{ cm}$. Dieser Wert ist größer als der, der uns in der Aufgabenstellung verraten wurde und weicht um 20% ab. Dies liegt daran, dass das Delay des Detektors A nicht bestimmt wurde. Rechnet man dieses heraus, kann man sicher auf den von 38,6cm gelangen.

3.2.3 Schwerpunktsdiagramme

Als nächstes sind die Schwerpunktsdiagramme zu betrachten. Es wurden drei von Detektor A erstellt. Einmal als die Quelle an Detektor B positioniert wurde, danach an Detektor A und einmal mittig zwischen beiden.

In Abbildung 2 kann gegenüber 4 ein schwächeres Muster erkannt werden. Gegenüber Abbildung 4 ist in beiden deutlich die Kristallstruktur erkennbar. Diese stellt sich durch die vielen Maximumflecken dar. Gekennzeichnet werden die Kristalle durch ein rotes Gitter, welches vom PC über die Bilder gelegt wurde. Dieses kennzeichnet die 8x8-Matrix.

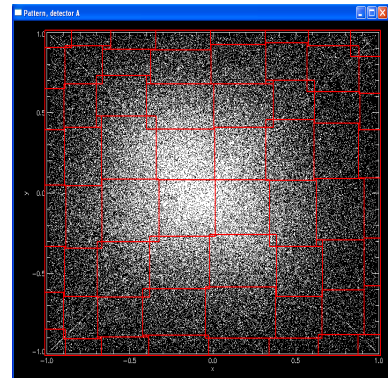
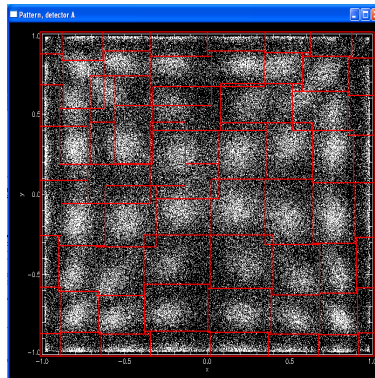
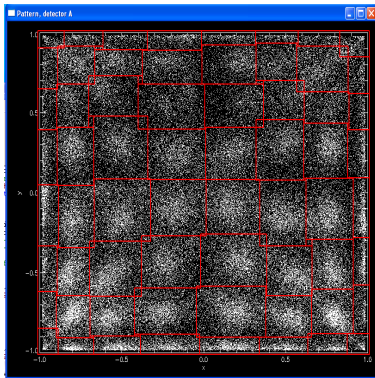


Abbildung 2: Messung bei Quelle an Detektor B

Abbildung 3: Messung bei Quelle in der Mitte

Abbildung 4: Messung bei Quelle an Detektor A

Bei der Messung an Quelle A zeigt sich auch deutlich, wie die Kristalle geschnitten wurden. So finden hier an den Einschnitten keine Reflexionen statt und die Strahlung kann sich kugelförmig ausbreiten und als großer kreisförmiger Hotspot detektiert werden. Es können allerdings auch vier Dreiecke beobachtet werden, welche durch die Kristallstruktur erzeugt wurden. Im Bild der Messung des Detektors A während sich die Quelle an Detektor B befand ist weiterhin erkennbar, dass wide-

erwartend die Intensität in der oberen Bildhälfte schwächer ist als in der unteren. Die Schwächung sollte normalerweise in der unteren Hälfte auftreten, da hier eine Glasplatte Strahlung abschirmt. Das heißt, das Bild muss um 180° gedreht sein. Sehr schön sind in den Abbildungen 2 und 4 auch die Verzerrungen sichtbar, die durch die Projektion der kugelförmigen Ausbreitung der Strahlung auf eine ungekrümmte Ebene entstehen.

3.3 Tomografische Messungen

3.3.1 Messung einer Quellkonfiguration, Phantom isotroper Dichteverteilung

Hauptversuch

Untersuchung des Einflusses verschiedener Filter

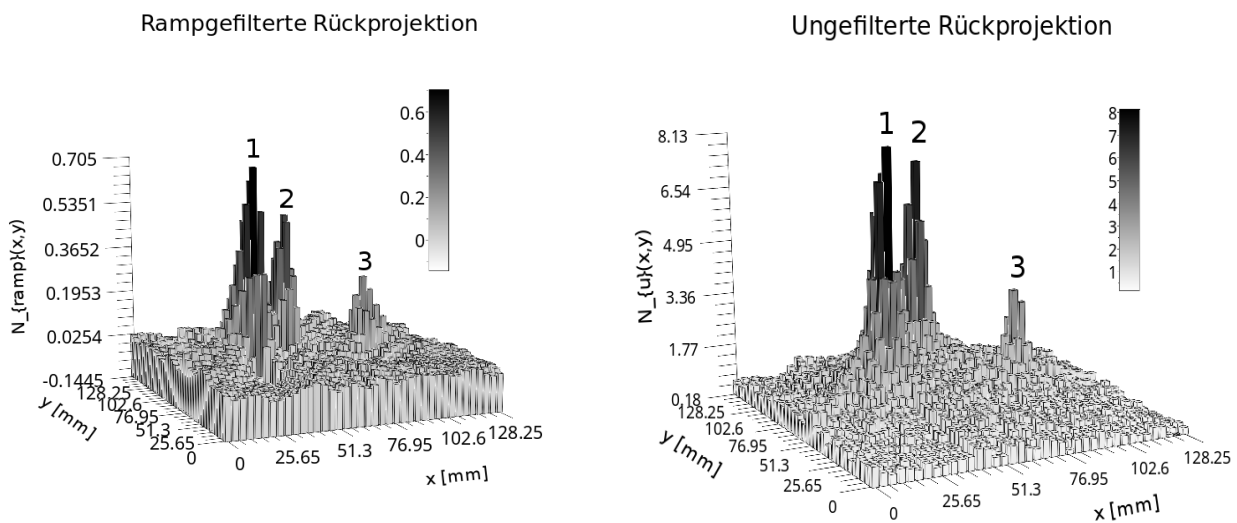
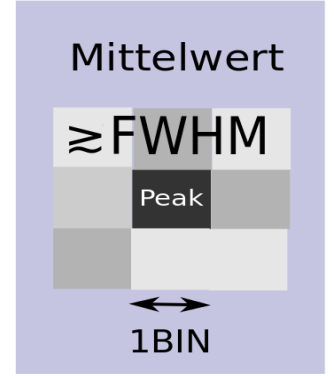


Abbildung 5: Gefilterte und Ungefilterte Rückprojektion der Aktivitätsverteilung

Der verwendete Rampfilter kann als eine Faltung des Sinogramms $p(s, \theta)$ mit einer Filterfunktion $h(s)$ zu einem festen Winkel θ dargestellt werden. Das heißt man addiert zu einem festen Wert von $p(s, \theta)$ die umliegenden Funktionswerte innerhalb eines Bereiches von 13 BINs mit einem (negativen) Gewicht. Weitere Eigenschaften dieses Filters werden im Abschnitt (3.3.4) dargestellt. Man beobachtet, dass durch diese Faltung im Vergleich zur ungefilterten Rückprojektion ein höheres Untergrundrauschen in Bereichen mit geringer Aktivität entsteht, da insbesondere auch die Skala einen kleineren Bereich ($N_{ramp}(x, y) \in [-0,14, 0,7]$, $N_u(x, y) \in [0,18, 8,13]$) abdeckt. Allerdings fallen die Peaks durch die Faltung beim Rampfilter deutlich schneller ab (negative Bereiche um Maximum), wodurch man sie besser lokalisieren kann. Aus diesem Grund wird im Folgenden der gefilterte Datensatz für die quantitative Auswertung verwendet.

Quantitative Auswertung

Zunächst werden die Positionen (x_i, y_i) ($i = 1, 2, 3$) der 3 Quellen im verschlossenen Plastikbehälter bestimmt. Dafür wird die in Abbildung (5) visualisierte Rückprojektion $N(x, y)$ verwendet, die durch Auslesen der in `Matrix_reco.txt` enthaltenen Messwertmatrix entstanden ist. Der erste Eintrag sei als Koordinatenursprung gewählt. 1 BIN des Rekonstruktionsrasters entspricht 3,375 mm. Die Positionen der Quellen werden mit den lokalen Maxima $N(x_i, y_i)$ der Aktivitätsverteilung identifiziert. Anschließend quantifiziert man die Aktivität jeder einzelnen Quelle, indem man die rückprojizierten Verteilung über einen kleinen Bereich um die Peaks mittelt. Bezeichne diesen Mittelwert mit $\bar{N}(x_i, y_i)$. Im Rahmen dieser Auswertung wurde ein quadratischer Bereich gewählt, in welchem Werte anzutreffen waren, die in der Nähe des FWHM (=Full Width Half Maximum) lagen. Dieses Vorgehen wird durch die nebenstehende Abbildung visualisiert.



Mittels einfacher Verhältnisbildung können unter Vorgabe einer Referenzaktivität A_{ref} nun unbekannte Aktivitäten innerhalb der Verteilung berechnet werden. Dabei wurde die stärkste Aktivität mit $A_0 \equiv A(t_0 = 01.02.2010) = (363 \pm 11)$ kBq angegeben. Mit dem Aktivitätsgesetz kann man nun berechnen:

$$A_{ref} \equiv A(t = 29.10.2015) = A_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t-t_0}{T_{1/2}}} = (79 \pm 3) \text{ kBq} \quad (3)$$

Wobei die Halbwertszeit $T_{1/2}(^{22}\text{Na}) = (2,6027 \pm 0,0010)$ a verwendet wurde, sowie folgende Fehlerformel:

$$\left(\frac{\Delta A_{ref}}{A_{ref}}\right)^2 = \left(\frac{\Delta A_0}{A_0}\right)^2 + \left(\ln(2) \cdot \frac{\Delta T_{1/2}}{T_{1/2}}\right)^2 \quad (4)$$

Bezeichnet man $A_{ref} \propto \bar{N}_{ref} \equiv \bar{N}(x_1, y_1)$ als rückprojizierte Aktivität der Referenzquelle, so erhält man für die unbekannten Aktivitäten $A_i \propto \bar{N}(x_i, y_i)$:

$$A_i = A_{ref} \cdot \frac{\bar{N}(x_i, y_i)}{\bar{N}_{ref}} \quad (5)$$

$$\left(\frac{\Delta A_i}{A_i}\right)^2 = \left(\frac{\Delta A_{ref}}{A_{ref}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta \bar{N}(x_i, y_i)}{\bar{N}(x_i, y_i)}\right)^2 + \left(\frac{\Delta \bar{N}_{ref}}{\bar{N}_{ref}}\right)^2 \quad (6)$$

Hierbei wurden die Fehler der rückprojizierten Aktivitäten als Standardabweichungen des Mittelwertes gesetzt, die sich beim obigen Mittelvorgang ergab: $\Delta \bar{N}(x_i, y_i) = \sigma(\bar{N})$. Die systematischen Fehler des PET-Scanners waren leider nicht bekannt. Zusammenfassend ergeben sich folgende Resultate:

Peak # i	x_i [mm]	y_i [mm]	Peakmaximum $N(x_i, y_i)$	Peakmittel $\bar{N}(x_i, y_i)$	A_i [kBq]
1	$37 \pm 3,4$	$64 \pm 3,4$	0,705	$0,50 \pm 0,05$	$79 \pm 2,4$
2	$64 \pm 3,4$	$94 \pm 3,4$	0,4933	$0,36 \pm 0,03$	$57 \pm 7,4$
3	$91 \pm 3,4$	$64 \pm 3,4$	0,2837	$0,20 \pm 0,02$	$31 \pm 4,1$

Abbildung 6: Aktivitäts- und Positionsbestimmung der unbekannten Quellverteilung

Da die Peaks eine gewisse Breite haben, die sich in der gefilterten Darstellung über etwa drei BINs erstreckt, wurde ein Ortsfehler von einem BIN angenommen. Diese Ortsunbestimmtheit in Verbindung mit den diskreten Messwerten führt zu einer Begrenzung der Ortsauflösung. Das heißt, dass es einen minimalen Abstand d_{min} zwischen zwei Peaks gibt, unterhalb dessen man sie nicht mehr unterscheiden kann. In der Optik bestimmt man Auflösungen mit Hilfe des heuristischen

Rayleigh-Kriteriums, das besagt, dass der Mindestabstand zweier Lichtquellen gleich dem Abstand des Minimums erster Ordnung vom Zentrum des Beugungsmusters ist. Dieses Kriterium ist hier nicht anwendbar, da wir nicht zwangsläufig klar identifizierbare Minima haben. Aus diesem Grund wurde die oben erläuterte Variante mit der Halbwertsbreite hier erneut angewendet: Der minimale Abstand zwischen zwei (identischen) Maxima entspricht der doppelten Distanz der Peakmitte zur Position der Halbwertsbreite. Folgende Abbildung verdeutlicht dies:

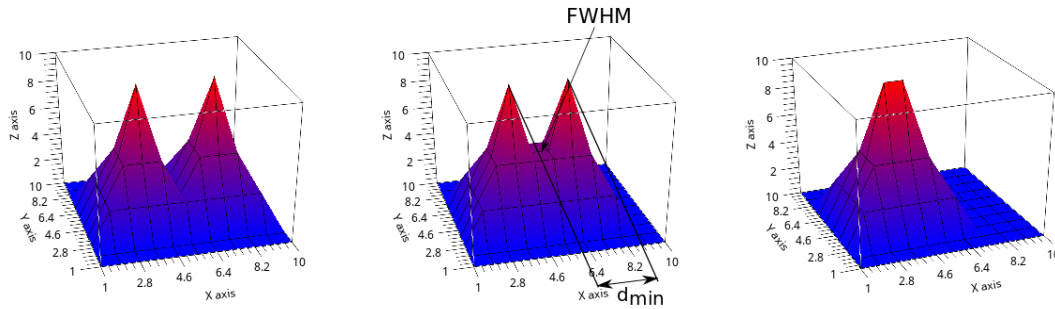


Abbildung 7: Kriterium zur Unterscheidung zweier Peaks

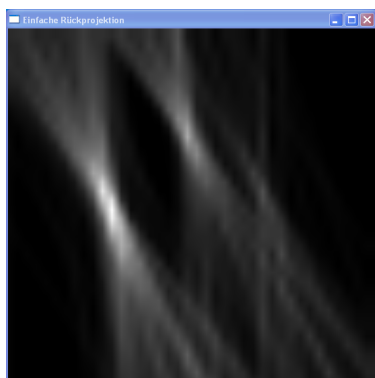
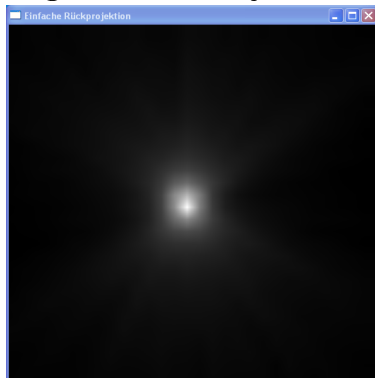
In der ungefilterten Darstellung war die Halbwertsbreite bereits innerhalb von einem BIN erreicht, wodurch sich eine Ortsauflösung von ungefähr $d_{min} = 2 \text{ BIN} = 6,75 \text{ mm}$ ergibt.

3.3.2 Messung einer Quellkonfiguration, Phantom isotroper Dichteverteilung

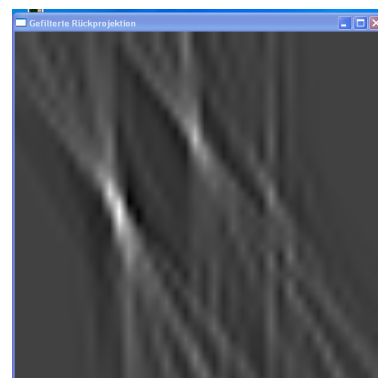
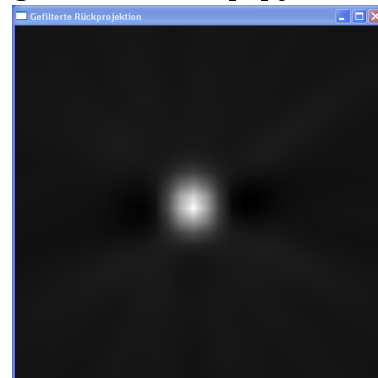
Hauptversuch

Als nächsten wurde eine Messung mit unbekannter Quellverteilung gestartet. Die Energie- und das Zeitfenster entsprechen den oben bestimmten Intervallen.

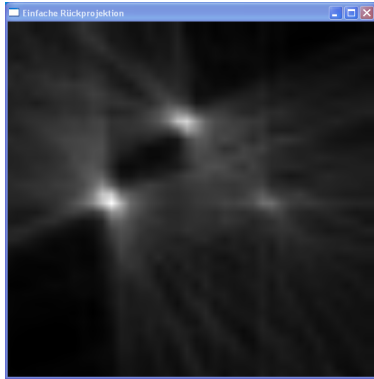
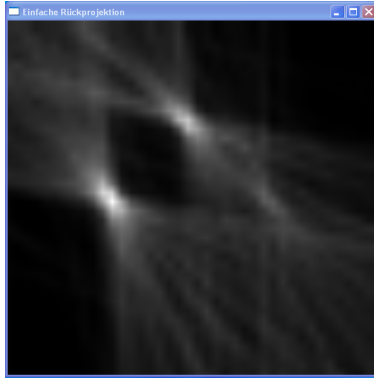
ungefilterter Projektion



gefilterte Rückprojektion



ungefilterter Projektion



gefilterte Rückprojektion

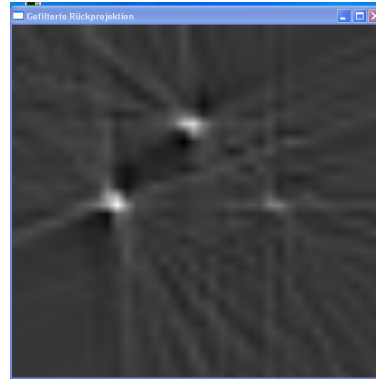
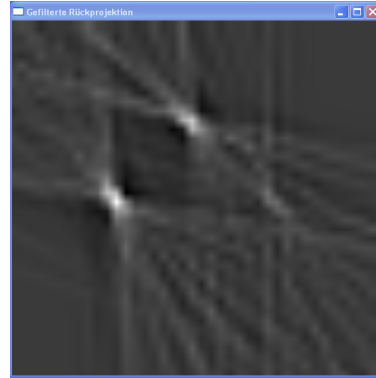
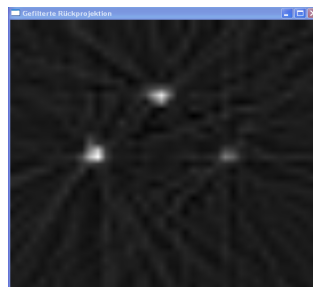


Abbildung 8: Screenshots der Bildenstehung der gefilterten (rechts) und ungefilterten (links) Rückprojektion

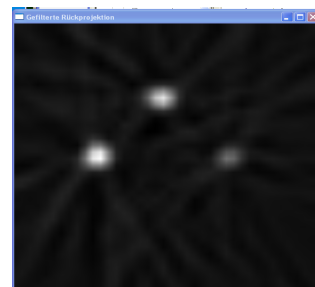
Untersuchung des Einflusses verschiedener Filter



ungefilterte Rückprojektion



Rampf-Filter



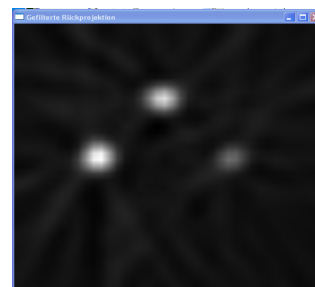
Hanning-weighted-Filter



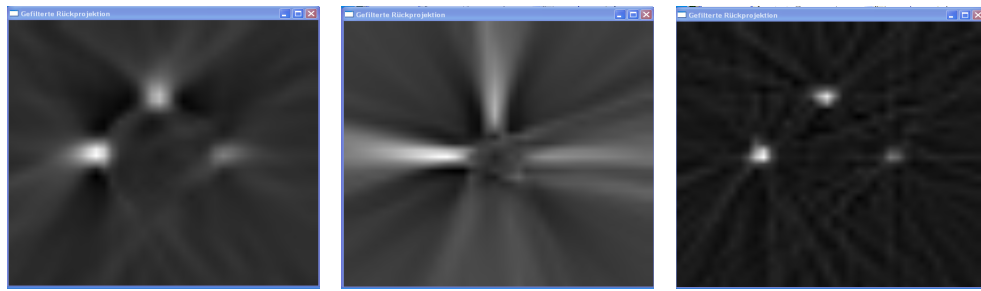
Middle-Filter



Rauschfilter bei Dimension 3



Rauschfilter bei Dimension 13



Rauschfilter bei Dimension 25

Rauschfilter bei Dimension 36

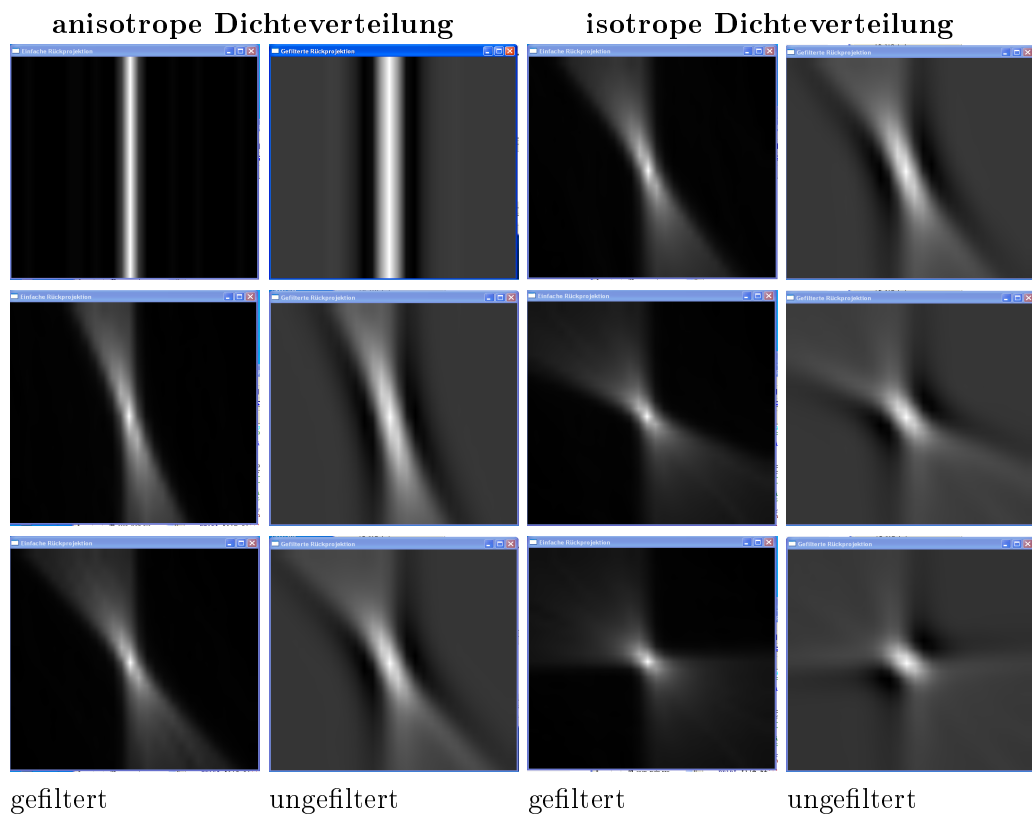
Shepp-Logan-Filter

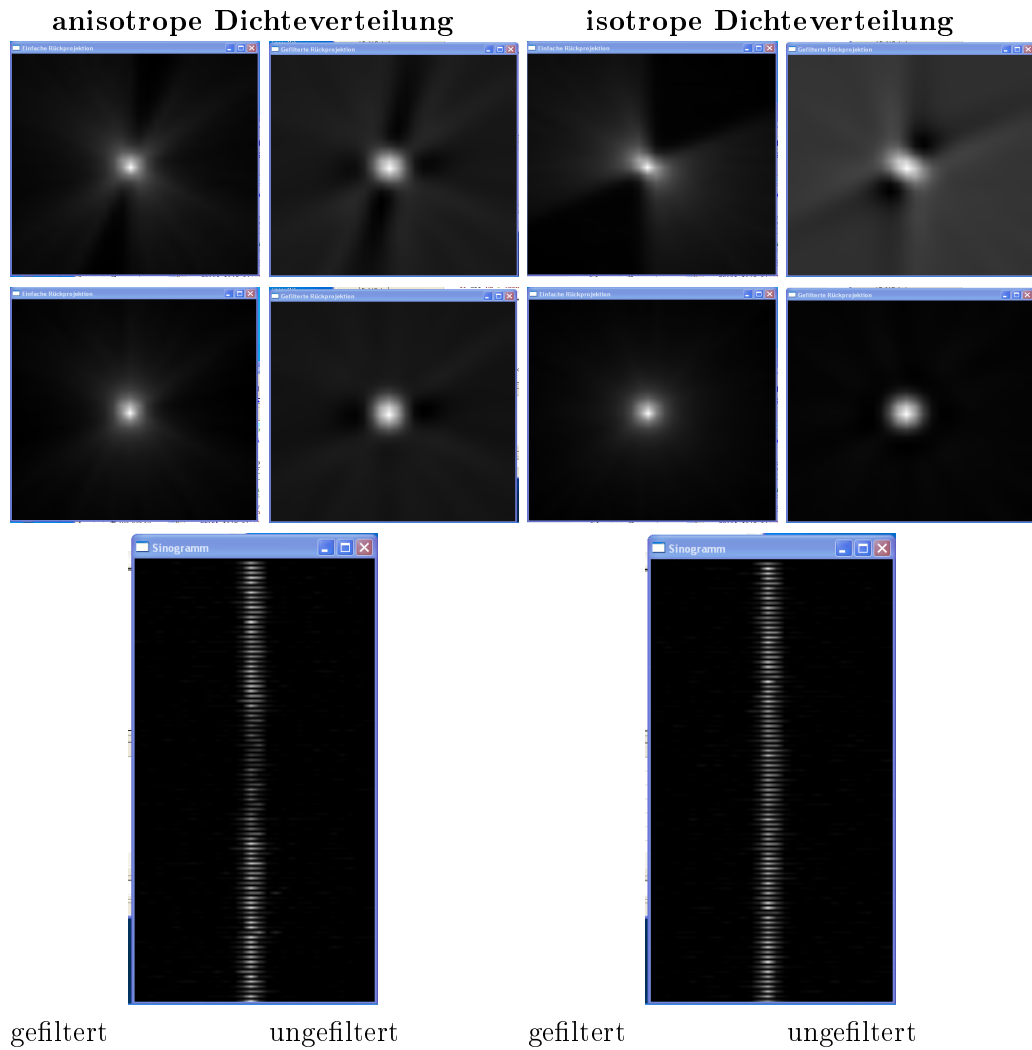
Der Standardwert der Dimension ist 13.

3.3.3 Messung mit einer Punktquelle, Phantom an-/isotroper Dichteverteilung

Qualitative Gegenüberstellung an-/isotroper Dichteverteilung

Nun sollen eine isotrope und eine anisotrope Dichteverteilung des Quellbehältnisses untersucht werden. In der nachstehenden Tabelle ist die Entwicklung der Rückprojektionen protokolliert. Man kann hier früh erkennen, dass die gefilterten Bilder die Quelle schärfer abbilden als die ungefilterten. Besonders sind allerdings die Screenshots der abgeschlossenen Messung und die fertigen Sinogramme. Bei der isotropen Messung kann man klar die isotrope erkennen. Die Intensität im Sinogramm ist kontinuierlich gleich, ebenso ist in der gefilterten Rückprojektion kein Schatten mehr erkennbar.





Demgegenüber stehen die Bilder der anisotropen Messung. Man erkennt hier in der Mitte des Sinogramms eine dunklere Stelle und in den abgeschlossenen Rückprojektionen sieht man rechts und links dunklere Stellen, die das Halo unterbrechen. Uns wurde bekanntgegeben, dass nur auf einer Seite eine Anisotropie eingesetzt wurde. Wir sehen diese Unterbrechung jedoch sowohl links als auch rechts. Das bedeutet, dass man in der Praxis nicht mit Sicherheit sagen, wo sich ein festerer Stoff wie zum Beispiel ein Knochen befindet.

Gegenüberstellung der registrierten Ereigniszahlen und Ermittlung einer Korrekturfunktion

Als nächstes schaut man sich die registrierten und auch tatsächlich für die Rückprojektion verwendeten Ereignisdaten an. Zunächst folgt in Abbildung 9 die Darstellung der Ereigniszahlen über den Winkel. Man sieht, wie sich die Werte um eine gedachte, konstante Linie herum verteilen und damit die Isotropie. In der nachfolgenden Abbildung 10 sieht man im Gegenteil dazu deutlich die Anisotropie, gekennzeichnet durch eine Mulde, die demnach auszeichnet, dass die Dichte des Materials hier größer war, da weniger Ereignisse gezählt werden.

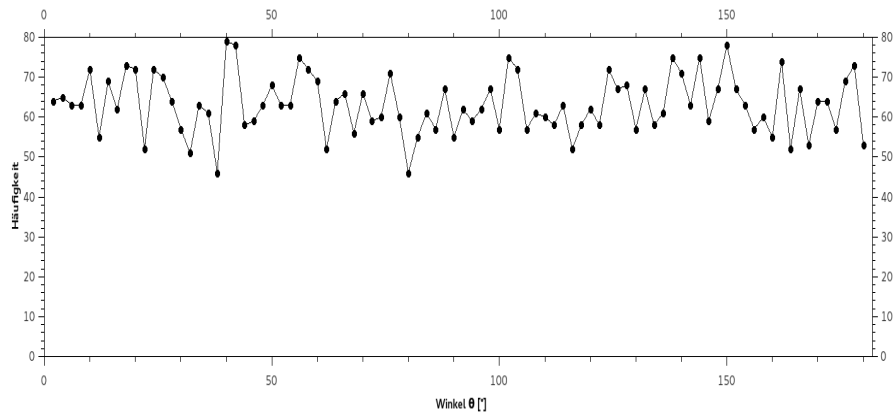


Abbildung 9: Plot der registrierten Ereigniszahlen

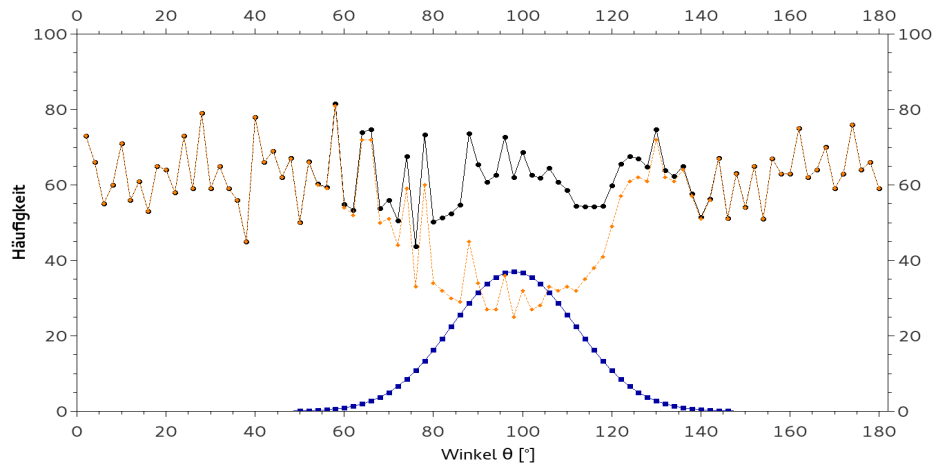


Abbildung 10: registrierte Ereignisse (gelb), korrigierte Ereigniszahlen (schwarz) und Korrekturfunktion (blau)

Diese Mulde, die wie eine Art Tal irgendwie gaußförmig aussieht, kann man durch eine Korrekturfunktion auf das konstante Niveau anheben. So hat jedes Material seine eigene Korrekturfunktion. In Abbildung 10 erkennt man, dass die schwarze Kurve wieder ungefähr um eine konstante Kurve verteilt. Die Korrekturfunktion und insbesondere ihre Parameter sind durch ausprobieren entstanden. Die Funktion sieht folgendermaßen aus:

$$K(\theta) = \frac{A}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\theta-\Delta\theta}{\sigma}\right)^2} \text{ mit folgenden Parametern } \sigma = 14^\circ, A = 1300^\circ \text{ und } \Delta\theta = 98^\circ$$

3.3.4 Radon-Transformation als Rekonstruktionsverfahren: Ein Rechenbeispiel

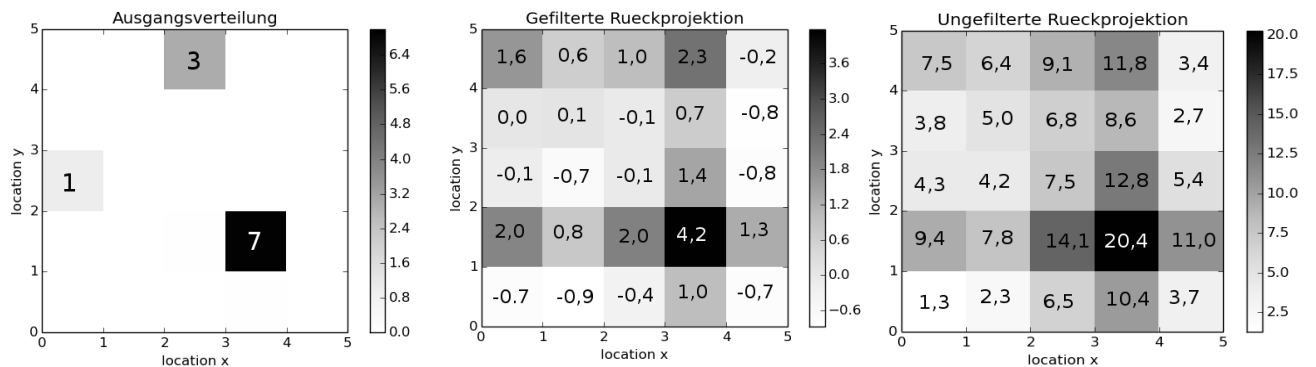


Abbildung 11: Theoretisches Beispiel für Radon-Transformation

4 Auswertung

5 Literatur