

Методы оптимизации

Лекции

Основные понятия, постановка задачи. Линейное, евклидово, банахово пространства. Пространство R^n .

Безусловная оптимизация. Теорема Ферма. Непрерывность и дифференцируемость. Необходимые и достаточные условия оптимума (со второй производной). Численные методы. Проблема сходимости. Методы спуска (градиентный спуск, покоординатный спуск, метод сопряженных направлений). Метод Ньютона.

Оптимизация с ограничениями. Функция Лагранжа. Теорема Люстерника, лемма о тройке. Теорема Хана-Банаха. Конечномерный случай. Теорема о седловой точке.

Выпуклая оптимизация. Выпуклые множества и функции. Теоремы отделимости. Конус, его свойства. Выпуклая оптимизация. Основная задача. Функция Лагранжа. Теорема о седловой точке. Условия регулярности. Теорема Куна-Таккера. Метод штрафных функций. Поиск решения в невыпуклых задачах.

Линейная оптимизация. Основная задача. Двойственность. Теорема существования решения. Теорема двойственности. Симплекс-метод, его модификации

Динамическое программирование. Общая схема и примеры.

Теория игр. Общая постановка. Матричная игра, ее анализ. Теорема Неймана. Поиск чистых и смешанных стратегий. Связь с линейной оптимизацией.

Приложение методов оптимизации и оптимального управления. Метод Кротова построения минимизирующих последовательностей. Принцип максимума Понтрягина. Задачи оптимального управления. Максимизация полезности при ограничении дохода. Задача оптимизации производства. Макроописание экономической динамики. Модель Солоу, ее обобщение с учетом технологического прогресса. Модель Рамсея.

Лабораторные работы или ИДЗ.

Лабораторная 1.

Найти минимум функции в пространстве R^n двумя методами:

$$f_0(x) = \frac{1}{2}(x^T A x) + b x, \quad A - \text{положительно определенная матрица, } x - \text{вектор. Размерность} - 6.$$

- 1) градиентный метод;
- 2) метод Ньютона.

Лабораторная 2.

Функция оптимизации как в лабораторной работе 1 с ограничением вида $f(x) \leq 0$ при $f(x) = c \cdot x + d$ и с условием, что решение в лабораторной работе 1 не подчиняется ограничению.

Лабораторная 3.

Функция оптимизации как в лабораторной работе 1 с ограничением вида $f(x) \leq 0$ при $f(x) = \|x - x_0\| - r$ и с условием, что решение в лабораторной работе 1 не подчиняется ограничению.

Лабораторная 4.

Аналог лабораторной работы 3 с произвольной квадратной матрицей A 6-го порядка.

Примечание. Для этой лабораторной в качестве минимизируемой функции преподаватель может предложить студентам разные непрерывно дифференцируемые функции с параметрами.

Лабораторная 5.

Линейная оптимизация. Оптимизация производства. Решение симплекс-методом задачи:

$$c \cdot x \rightarrow \max$$

$$Ax \leq b$$

$$x \geq 0.$$

Матрица A неотрицательна и имеет размерность 8×6 . Векторы b , c неотрицательны. Ищется оптимальное решение (симплекс-метод), В двойственной задаче ищется допустимое и оптимальное решения.

Лабораторная 6.

Матричная игра с матрицей размерности 6×8 . Вычисление верхней и нижней цен игры. Поиск равновесного решения в смешанных стратегиях.

Данные для решения задач студент конструирует самостоятельно. Преподаватель отслеживает неповторяемость вариантов.

Все вычисления выполняются студентами с применением компьютерных вычислительных пакетов. Выбор компьютерного пакета остается за студентом с условием, что основные этапы вычислений выделены и проверяемы.

Отчет представляется в развернутом виде электронно и/или в кратком виде на бумаге. Важным элементом отчета является устное объяснение основных шагов вычислений.

Сдача всех лабораторных означает допуск к экзамену/зачету. Итоговая оценка определяется сдачей теоретического материала в виде коллоквиумов.

Вопросы коллоквиумов

К1

1. Теорема Ферма.
2. Необходимое условие минимума функции со второй производной.
3. Достаточное условие минимума функции.
4. Метод градиентного спуска. Сходимость.
5. Метод Ньютона. Применение к поиску минимума функции.

К2

6. Общая задача условной оптимизации. Функция Лагранжа. Теорема о седловой точке.
7. Выпуклая оптимизация. Т. отделимости. Т. Куна-Таккера.
8. Линейная оптимизация. Прямая и двойственная задачи. Теорема двойственности.
9. Теорема существования решения. Задача об оптимизации производства.
10. Угловые точки. Симплекс-метод.
11. Матричная игра. Теорема Неймана о смешанных стратегиях.
12. Поиск смешанных стратегий. Т. о связи с линейной оптимизацией.

Литература

Сухарев А.Г. Курс методов оптимизации [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Федоров В.В.— Электрон. текстовые данные.— М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011.— 367 с.— Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/17283>.— ЭБС «IPRbooks»

Струченков В.И. Методы оптимизации в прикладных задачах [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Струченков В.И.— Электрон. текстовые данные.— М.: СОЛОН-ПРЕСС, 2009.— 315 с.— Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/8722>.— ЭБС «IPRbooks»

<http://fdo.tusur.ru/?43877>. Мультимедийный учебник «Методы оптимизации», 2015.

Аббасов М.Э. Методы оптимизации: Учебное пособие. СПб.: Издательство “ВВМ”, 2014. 64 с.

Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Физматлит, 2010.

Измаилов А.Ф. Численные методы оптимизации [Электронный ресурс]/ Измаилов А.Ф., Солодов М.В.— Электрон. текстовые данные.— М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008.— 321 с.— Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/25191>.— ЭБС «IPRbooks»

Нурминский Е.А. Методы оптимизации. Курс лекций. Изд-во ДВФУ, 2013.

Соколов А.В. Методы оптимальных решений. Общие положения. Математическое программирование. Том 1 [Электронный ресурс]/ Соколов А.В., Токарев В.В.— Электрон. текстовые данные.— М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011.— 562 с.— Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/12922>.— ЭБС «IPRbooks»

Токарев В.В. Методы оптимальных решений. Многокритериальность. Динамика. Неопределенность. Том 2 [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Токарев В.В.— Электрон. текстовые данные.— М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011.— 415 с.— Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/12923>.— ЭБС «IPRbooks»

Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономической теории. М.: Айрис-пресс, 2002.

Замков О.О, Толстопятенко А.В., Черемных Ю.Н. Математические методы в экономике. М., Дело и сервис, 2004.

<http://bigor.bmstu.ru/?cnt/?doc=MO/base.cou>. Методы оптимизации (базовый курс)

<http://lib.mexmat.ru/> Электронная библиотека ММФ МГУ, М.: МГУ, 2015.