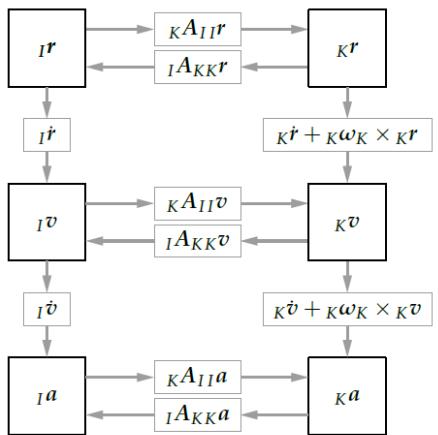
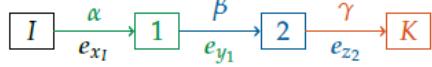


## Introduction- Basic things

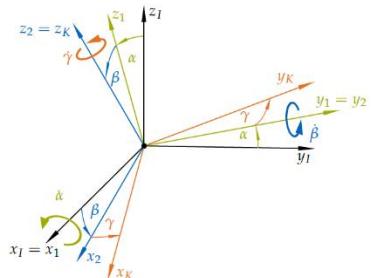


$$A_x(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad A_y(\beta) = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix} \quad A_z(\gamma) = \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$I^r \xrightarrow{A_x(\alpha)} 1^r \xrightarrow{A_y(\beta)} 2^r \xrightarrow{A_z(\gamma)} K^r$$

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \end{aligned}$$



$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \begin{bmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & I \end{bmatrix}^T = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \begin{bmatrix} A & D & G \\ B & E & H \\ C & F & I \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} A &= (ei - fh) & D &= -(bi - ch) & G &= (bf - ce) \\ B &= -(di - fg) & E &= (ai - cg) & H &= -(af - cd) \\ C &= (dh - eg) & F &= -(ah - bg) & I &= (ae - bd) \end{aligned}$$

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_y & u_z \\ v_y & v_z \end{vmatrix} \cdot \mathbf{i} - \begin{vmatrix} u_x & u_z \\ v_x & v_z \end{vmatrix} \cdot \mathbf{j} + \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} \cdot \mathbf{k}$$

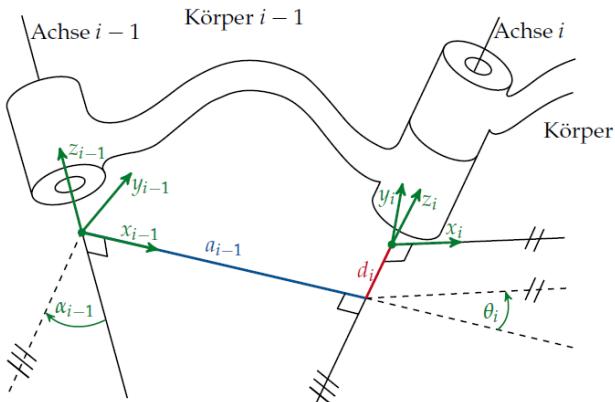
$$\begin{aligned} \tilde{\omega}r &= \omega \times r \\ \tilde{\omega}r &= \tilde{r}^T \omega = \omega \times r \\ {}_0 \tilde{\omega} &= A_{0k} k \tilde{\omega} A_{k0} \end{aligned} \quad k \tilde{\omega} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

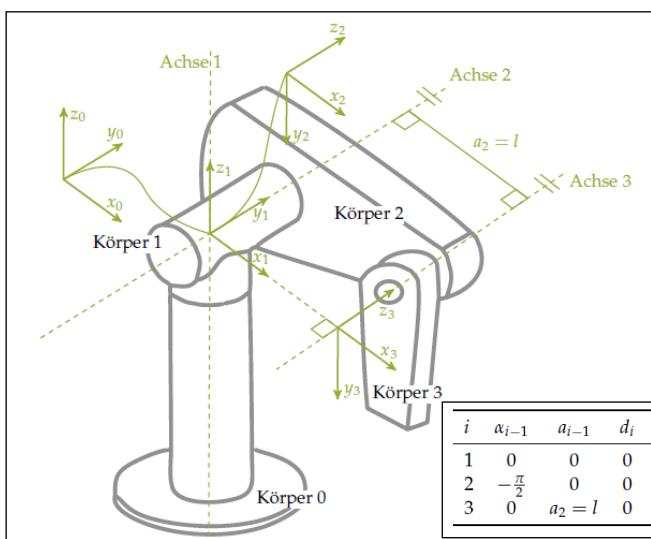
## KINEMATIK

### Denavit-Hartenberg Konvention (DH – Transformation)



$$\begin{pmatrix} j^r_{jp} \\ 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} jA_i & jr_{ji} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}}_{jD_i} \underbrace{\begin{pmatrix} ir_{ip} \\ 1 \end{pmatrix}}_{iz_p} \quad {}_0 D_3 = {}_0 D_1 {}_1 D_2 {}_2 D_3.$$

### Example DH - Transformation



$$1. \text{ Rotation } -\theta_i \text{ um } z_i: D_1 = \begin{pmatrix} A_z(-\theta_i) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}$$

$$2. \text{ Translation } -d_i \text{ entlang } z_i: D_2 = \begin{pmatrix} E & e_z d_i \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}$$

$$3. \text{ Translation } -a_{i-1} \text{ entlang } x_{i-1}: D_3 = \begin{pmatrix} E & e_x a_{i-1} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}$$

$$4. \text{ Rotation } -\alpha_{i-1} \text{ um } x_{i-1}: D_4 = \begin{pmatrix} A_x(-\alpha_{i-1}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}$$

Somit ergibt sich die resultierende homogene Transformation zu:

$$\begin{aligned} {}_{i-1} D_i &= D_4 D_3 D_2 D_1 \\ &= \left( A_x^T(\alpha_{i-1}) A_z^T(\theta_i) \quad A_x^T(\alpha_{i-1})(a_{i-1} e_x + d_i e_z) \right) \\ &= \begin{pmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ s\theta_i c\alpha_{i-1} & c\theta_i c\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} d_i \\ s\theta_i s\alpha_{i-1} & c\theta_i s\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1} d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$${}_1 D_2 = \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c q_2 & -s q_2 & 0 \\ s q_2 & c q_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{0} \right) = \begin{pmatrix} c q_2 & -s q_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s q_2 & -c q_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$${}_2 D_3 = \begin{pmatrix} c q_3 & -s q_3 & 0 & l \\ s q_3 & c q_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Teil-Transformation  ${}_1 D_3$  berechnet sich damit zu:

$${}_1 D_3 = {}_1 D_2 {}_2 D_3 = \begin{pmatrix} c q_2 c q_3 & -c q_2 s q_3 - s q_2 c q_3 & 0 & c q_2 l \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -c q_2 s q_3 - s q_2 c q_3 & -c q_2 c q_3 + s q_2 s q_3 & 0 & -s q_2 l \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Mit den Additionstheoremen

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

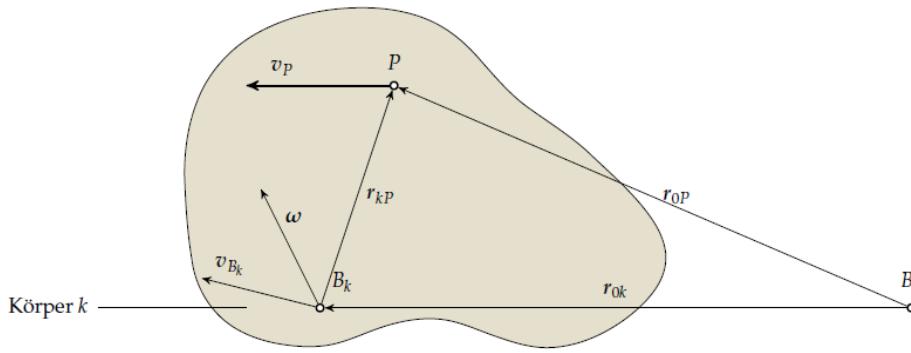
$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

einfach sich das Ergebnis zu:

$${}_1 D_3 = \begin{pmatrix} c q_{23} & -s q_{23} & 0 & c q_2 l \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s q_{23} & -c q_{23} & 0 & -s q_2 l \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## Direkte kinematik

jj



$$\begin{aligned}
 \tilde{\omega} &= \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} \\
 {}_0v_p &:= {}_0\dot{r}_p + A_{0k}{}_k\dot{r}_{kp} \\
 {}_k\dot{v}_p &= {}_k\dot{v}_k + A_{k0}\dot{A}_{0k}{}_k\dot{r}_{kp} + A_{0k}{}_k\ddot{r}_{kp} \\
 {}_k\ddot{v}_p &= {}_k\ddot{v}_k + {}_k\tilde{\omega}{}_k\ddot{r}_{kp} + {}_k\ddot{r}_{kp} \\
 {}_k\ddot{a}_p &:= {}_0\ddot{v}_p = {}_0\ddot{a}_k + \ddot{A}_{0k}{}_k\dot{r}_{kp} + 2\ddot{A}_{0k}{}_k\dot{r}_{kp} + A_{0k}{}_k\ddot{r}_{kp} \\
 {}_k\ddot{a}_p &= {}_k\ddot{a}_k + A_{k0}\dot{A}_{0k}{}_k\dot{r}_{kp} + 2A_{k0}A_{0k}{}_k\dot{r}_{kp} + {}_k\ddot{r}_{kp} \\
 {}_k\ddot{a}_p &= {}_k\ddot{a}_k + ({}_k\ddot{\omega} + {}_k\tilde{\omega}{}_k\tilde{\omega}){}_k\dot{r}_{kp} + 2{}_k\tilde{\omega}{}_k\dot{r}_{kp} + {}_k\ddot{r}_{kp}
 \end{aligned}$$

### Singularitäten

Ist die Jacobi-Matrix  $J_w$  singulär, kann das Newton-Verfahren nicht zur Lösung der inversen Kinematik verwendet werden, da  $J_w$  nicht invertiert, bzw. das Gleichungssystem  $J_w \Delta q = \Delta w$  nicht gelöst werden kann. In diesem Fall verschwindet die Determinante der Jacobi-Matrix, es gilt  $\det(J_w) = 0$ .

$$\begin{aligned}
 {}_iJ_{R,i,[k,l]} &:= \frac{\partial_i \omega_{i,[k]}}{\partial q_{[l]}} = {}_iA_{v(i),[k,m]} v(i) J_{R,v(i),[m,l]} \\
 &\quad + \underbrace{\frac{\partial_i A_{v(i),[k,m]}}{\partial q_{[l]}} v(i) \omega_{v(i),[m]} + \frac{\partial_i \omega_{v(i),[k]}}{\partial q_{[l]}}}_{:= {}_iJ_{R,rel,i,[k,l]}} \\
 {}_iJ_{T,O_i,[k,l]} &:= \frac{\partial_i v_{i,[k]}}{\partial q_{[l]}} = {}_iA_{v(i),[k,m]} v(i) J_{TqO_i,v(i),[m,l]} \\
 &\quad + \underbrace{\frac{\partial_i A_{v(i),[k,m]}}{\partial q_{[l]}} v(i) v_{v(i),[m]} + \frac{\partial_i v_{v(i),[k]}}{\partial q_{[l]}}}_{:= {}_iJ_{T,rel,i,[k,l]}}
 \end{aligned}$$

**Relative Größen für Drehgelenke** Bei Drehgelenken ist der DH-Parameter  $d_i$  eine feste, durch die Konstruktion vorgegebene Größe, während  $\theta_i = q_i$  als Variable den Freiheitsgrad des Gelenks rend  $\theta_i$  ein fester Konstruktionsparameter ist. Für die kinematischen Größen erhält man:

Aus (2.2.24) folgen unmittelbar die Drehmatrix und Relativverschiebung:

$${}_{v(i)}r_{v(i)i} = A_x^T(\alpha_{i-1})(e_z d_i + e_x a_{i-1}) = \begin{pmatrix} a_{i-1} \\ -\sin(\alpha_{i-1})d_i \\ \cos(\alpha_{i-1})d_i \end{pmatrix} = \text{konstant!} \quad (2.3.29)$$

$${}_iA_{v(i)} = A_z(q_i) A_x(\alpha_{i-1})$$

Die übrigen Größen werden durch Differentiation berechnet:

$${}_{v(i)}v_{v(i)i} = {}_{v(i)}\omega_{v(i)} \times {}_{v(i)}r_{v(i)i} = {}_{v(i)}\tilde{r}_{v(i)i} {}_{v(i)}v_{v(i)}$$

$${}_i\omega_{v(i)i} = e_z \dot{q}_i$$

$${}_iJ_{R,rel,i,[k,l]} = \begin{cases} 1 & \text{für } l = i \wedge k = 3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$${}_iJ_{T,rel,i,[k,l]} = {}_iA_{v(i)} \left( {}_{v(i)}\tilde{r}_{v(i)i} {}_{v(i)}v_{v(i)} J_{R,v(i)} \right)$$

$${}_{v(i)}r_{v(i)i} = A_x^T(\alpha_{i-1})(e_z d_i + e_x a_{i-1}) = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{i-1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{:= {}_{v(i)}r_{v(i)i,0} = \text{konstant!}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -\sin(\alpha_{i-1}) \\ \cos(\alpha_{i-1}) \end{pmatrix}}_{:= {}_{v(i)}\Delta r_{v(i)}(q_i)} q_i \quad (2.3.36)$$

$${}_iA_{v(i)} = A_z(\theta_i) A_x(\alpha_{i-1}) = \text{konstant!} \quad (2.3.37)$$

$${}_{v(i)}v_{v(i)i} = A_x^T(\alpha_{i-1})e_z \dot{q}_i + {}_{v(i)}\omega_{v(i)} \times {}_{v(i)}r_{v(i)i} \quad (2.3.38)$$

$${}_i\omega_{v(i)i} = 0 \quad (2.3.39)$$

$${}_iJ_{R,rel,i} = 0 \quad (2.3.40)$$

$${}_iJ_{T,rel,i,[k,l]} = {}_iA_{v(i)} \left( {}_{v(i)}\tilde{r}_{v(i)i} {}_{v(i)}v_{v(i)} J_{R,v(i)} \right)_{[k,l]} + \begin{cases} ({}_iA_{v(i)} A_x^T(\alpha_{i-1})e_z)_{[k]} & \text{für } l=i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.3.41)$$

$${}_iJ_{T,rel,i,[k,l]} = {}_iA_{v(i)} \left( {}_{v(i)}\tilde{r}_{v(i)i} {}_{v(i)}v_{v(i)} J_{R,v(i)} \right)_{[k,l]} + \begin{cases} ({}_iA_{v(i)} A_x^T(\alpha_{i-1})e_z)_{[k]} & \text{für } l=i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.3.42)$$

$${}_iJ_{T,rel,i,[k,l]} = {}_iA_{v(i)} \left( {}_{v(i)}\tilde{r}_{v(i)i} {}_{v(i)}v_{v(i)} J_{R,v(i)} \right)_{[k,l]} + \begin{cases} ({}_iA_{v(i)} A_x^T(\alpha_{i-1})e_z)_{[k]} & \text{für } l=i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.3.43)$$

## Inverse kinematik

$$\dot{w} = \frac{\partial w(q)}{\partial q} \dot{q} = J_w \dot{q}.$$

Position des Endeffektors  $w_d^T = (x \ y)$  (grüner Punkt), gesucht sind die Gelenkwinkel  $q^T = (\theta_1 \ \theta_2)$ .

### 2.4.2 Numerische Lösung

#### Lösung auf Lageebene

Das einfachste numerische Verfahren besteht in einer iterativen Lösung der nichtlinearen Gleichung  $w_d = w(q)$  ausgehend von einem geeigneten Anfangswert  $q_0$ . Einfach und gut geeignet ist das Newton-Raphson Verfahren, das jedoch im klassischen Fall nur für nichtredundante Roboter, also für  $(\dim(q) = \dim(w))$  anwendbar ist.

Das Verfahren geht von einer linearen Approximation von (2.4.1) aus:

$$w(q_0 + \Delta q) \approx w(q_0) + \frac{\partial w}{\partial q} \Delta q \quad (2.4.31)$$

Diese Gleichung wird so lange iterativ gelöst, bis die Näherung der Lösung  $q$  den Anforderungen an die Genauigkeit  $\epsilon > 0$  genügt. Mit der Bezeichnung  $J_w = \frac{\partial w}{\partial q}$  für die Jacobi-Matrix der Arbeitsraum-Koordinaten lautet der Algorithmus:

Setze Startlösung  $q_0$

Setze Index  $k = 0$

wiederhole

Löse  $w_d - w(q_k) = J_w(q_k) \Delta q$  nach  $\Delta q$

Setze  $q_{k+1} = q_k + \Delta q$

Setze  $k \leftarrow k + 1$

bis  $\|\Delta q\| < \epsilon$ :

## DINAMIK

Nach dem Prinzip von D'ALEMBERT leisten die in einem System wirkenden Zwangskräfte keine Arbeit:

$$\int_S (apdm - dF^e)^T \delta r_p = \int_S (dF^z)^T \delta r_p = 0 \quad (3.2.6)$$

$$\sum_{i=1}^{N_{\text{körper}}} \left\{ \begin{pmatrix} J_{TO_i} \\ J_{Ri} \end{pmatrix}^T \left( L_{O_i} + m_i \tilde{r}_{Si} a_i - M_{O_i}^e \right) \right\} = \mathbf{0} \quad \begin{array}{l} \text{Rotacional} \rightarrow \text{en base a Si (mismo sólido)} \\ \text{Translacional} \rightarrow \text{en base a SO (eje inercial)} \end{array}$$

$${}_1\dot{\mathbf{p}}_1 = m_1 ({}_1\mathbf{a}_1 + ({}_1\dot{\mathbf{w}}_1 + {}_1\tilde{\mathbf{w}}_1 {}_1\tilde{\mathbf{w}}_1) {}_1\mathbf{r}_{S1}) \quad {}_1\dot{\mathbf{p}}_1 = {}_0\mathbf{A}_1^T {}_0\mathbf{a}_{S1} m_1 \quad {}_1\dot{\mathbf{L}}_1^0 = {}_1\mathbf{I}_1^0 {}_1\dot{\mathbf{w}}_1 + {}_1\tilde{\mathbf{w}}_1 {}_1\mathbf{I}_1^0 {}_1\mathbf{w}_1$$

$${}_2\mathbf{a}_2 = ({}_2\dot{\mathbf{v}}_2) + {}_2\mathbf{w}_2 \times {}_2\mathbf{v}_2 \quad {}_2\mathbf{v}_2 = {}_2\mathbf{A}_1 ({}_1\dot{\mathbf{r}}_{12} + {}_1\mathbf{w}_1 \times {}_1\mathbf{r}_{12}) \quad T = \sum_i \left( \frac{1}{2} m_i v_i^T v_i + m_i v_i^T \tilde{\omega}_i r_{iS_i} + \frac{1}{2} \omega_i^T I_i^o \omega_i \right)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right)^T - \left( \frac{\partial L}{\partial q} \right)^T = Q_{NK} \quad T = \frac{1}{2} \dot{q}^T \underbrace{\left( \sum_i m_i J_{TO_i}^T J_{TO_i} + m_i J_{TO_i}^T \tilde{r}_{Si}^T J_{Ri} + m_i J_{Ri}^T \tilde{r}_{Si} J_{TO_i} + J_{Ri}^T I^o J_{Ri} \right)}_{\mathbf{M}} \dot{q} \quad V = \sum_i (-m_i g^T r_{Si})$$

$$M\ddot{q} + \dot{M}\dot{q} - \underbrace{\left[ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{q}} (\dot{q}^T M \dot{q}) \right]^T - Q_G}_{h} = Q_{NK} \quad M(q)\ddot{q} + h(q, \dot{q}) = Q_u$$

## Motor

Die Bewegungsgleichung des Motors ist durch

$$U = RI + Li + k_M \omega_M \quad I = \frac{1}{R}(U - k_M \omega_M) \quad M_M = k_M I$$

## BAHNUNG und OPTIMALE TRAJEKTORIEN

**Definition 4.1.1.** Die *Bahn* ist der Geometrischer Ort der Punkte, entlang derer sich das System bewegt. Sie kann im Arbeits- oder Konfigurationsraum angegeben werden.

**Definition 4.1.2.** Die *Trajektorie* ist der Zeitverlauf der Zustandsgrößen. Sie beinhaltet die geometrische Bahn gemeinsam mit der zeitlichen Information, wie diese Bahn abgefahren wird.

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0$$

$$H(x_{\text{opt}}, u_{\text{opt}}, \lambda_{\text{opt}}, t) \leq H(x_{\text{opt}}, u, \lambda_{\text{opt}}, t) \quad (5.3.16)$$

$$\Phi = \int_{t_a}^{t_e} f(x(t), \dot{x}(t), t) dt \rightarrow \min!$$

Zusammengefasst lauten die Optimalitätsbedingungen:

1. HAMILTON'sche kanonische DGLn:

$$\dot{x}^T = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = a \quad (5.3.17)$$

$t_a, t_e$  sind gegeben

$$\dot{\lambda}^T = -\frac{\partial H}{\partial x} \quad (5.3.18)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right) = 0$$

2. Randwerte

$$x(t_a) = x_a \quad (5.3.19)$$

$$\delta \Phi = \int_{t_a}^{t_e} \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x} dt$$

$$x(t_e) = x_e \quad (5.3.20)$$

3. Die Stellgröße minimiert die HAMILTON-Funktion:

$$H(x_{\text{opt}}, u_{\text{opt}}, \lambda_{\text{opt}}, t) \leq H(x_{\text{opt}}, u, \lambda_{\text{opt}}, t)$$

$$\Phi = \Phi_e(t_e) + \int_{t_a}^{t_e} f(x, u, t) dt \rightarrow \min!$$

$$x(t_a) = x_a$$

$$x(t_e) = x_e$$

$$\dot{x} = a(x, u, t) \quad \forall t \in [t_a, t_e]$$

$$u \in \mathcal{U} \quad (\text{Beschränkung für } u, \text{ z.B. } u_{\min} \leq u \leq u_{\max})$$

$$t_a \text{ ist fest} \quad t_e \text{ kann frei sein}$$

- Bei freier, d.h. nicht vorgegebene Endzeit gilt:  $\left( \frac{\partial \Phi_e}{\partial t} + H \right) \Big|_{t_e} = 0$

- Bei einer fest vorgegebenen Endzeit kann  $\left( \frac{\partial \Phi_e}{\partial t} + H \right) \Big|_{t_e}$  beliebige Werte annehmen

Die HAMILTON-Funktion  $H(x, u, \lambda, t) = f(x, u, t) + \lambda(t)^T a(x, u, t)$

### TABLA DE DERIVADAS

Funciones elementales		Funciones compuestas	
Función $f(x)$	Derivada $f'(x)$	Función $f(u)$ con $u = u(x)$	Derivada $f'(x) = f'(u)u'(x)$
$f(x) = k$	$f'(x) = 0$		
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$		
$f(x) = x^p \ p \in \mathbb{R}$	$f'(x) = px^{p-1}$	$f(u) = u^p \ p \in \mathbb{R}$	$f'(u) = pu^{p-1}u'$
$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \frac{1}{x}$	$f(x) = \ln u$	$f'(x) = \frac{u'}{u}$
$f(x) = \log_a x$	$f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$	$f(x) = \log_a u$	$f'(x) = \frac{u'}{u \ln a}$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$	$f(u) = e^u$	$f'(u) = e^u u'$
$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \ln a$	$f(u) = a^u$	$f'(u) = a^u \ln a u'$
$f(x) = g(x)^{h(x)}$	$f'(x) = h(x)g(x)^{h(x)-1}g'(x) + g(x)^{h(x)}\ln g(x)h'(x)$		
$f(x) = \sen x$	$f'(x) = \cos x$	$f(x) = \sen u$	$f'(x) = \cos u u'$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sen x$	$f(x) = \cos u$	$f'(x) = -\sen u u'$
$f(x) = \tg x$	$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tg^2 x$	$f(x) = \tg u$	$f'(x) = \frac{u'}{\cos^2 u} = (1 + \tg^2 u)u'$
$f(x) = \arcsen x$	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$f(x) = \arcsen u$	$f'(x) = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$f(x) = \arccos x$	$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$f(x) = \arccos u$	$f'(x) = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$f(x) = \arctg x$	$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$	$f(x) = \arctg u$	$f'(x) = \frac{u'}{1+u^2}$
$f(x) = \sh x$	$f'(x) = \ch x$	$f(x) = \sh u$	$f'(x) = \ch u u'$
$f(x) = \ch x$	$f'(x) = \sh x$	$f(x) = \ch u$	$f'(x) = \sh u u'$
$f(x) = \th x$	$f'(x) = \frac{1}{\ch^2 x} = 1 - \th^2 x$	$f(x) = \th u$	$f'(x) = \frac{u'}{\ch^2 u} = (1 - \th^2 u)u'$
$f(x) = \arg \sh x$	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$f(x) = \arg \sh u$	$f'(x) = \frac{u'}{\sqrt{1+u^2}}$
$f(x) = \arg \ch x$	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$f(x) = \arg \ch u$	$f'(x) = \frac{u'}{\sqrt{u^2-1}}$
$f(x) = \arg \th x$	$f'(x) = \frac{1}{1-x^2}$	$f(x) = \arg \th u$	$f'(x) = \frac{u'}{1-u^2}$

$$u = \ln x \rightarrow du = \frac{1}{x} dx$$

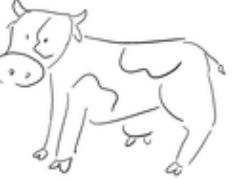
$$dv = x^2 \rightarrow v = \frac{x^3}{3}$$

$$\int x^2 \ln x \, dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3} \int \frac{x^3}{x} \, dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 \, dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{9} x^3 =$$

$$= \frac{x^3}{3} \left( \ln x - \frac{1}{3} \right) + C$$

$$\int u \cdot dv = uv - \int v \, du$$

u =  v =  u' =  v' =  du =  dv = 



Mithilfe der DH-Parameter können die relativen Transformationen direkt angeschrieben werden

$${}_0\mathbf{D}_1 = \begin{pmatrix} cq_1 & -sq_1 & 0 & 0 \\ sq_1 & cq_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$${}_1\mathbf{D}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -q_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$${}_2\mathbf{D}_3 = \begin{pmatrix} cq_3 & -sq_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l \\ -sq_3 & -cq_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

Und man erhält:

$${}_0\mathbf{D}_3 = \begin{pmatrix} cq_1cq_3 - sq_1sq_3 & -cq_1sq_3 - sq_1cq_3 & 0 & q_2sq_1 \\ sq_1cq_3 + cq_1sq_3 & cq_1cq_3 - sq_1sq_3 & 0 & -q_2cq_1 \\ 0 & 0 & 1 & l \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$= \begin{pmatrix} cq_{13} & -sq_{13} & 0 & q_2sq_1 \\ sq_{13} & cq_{13} & 0 & -q_2cq_1 \\ 0 & 0 & 1 & l \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (7)$$

Und den gesuchten Vektor, sowie die Drehmatrix  ${}_0\mathbf{A}_3$

$${}_0\mathbf{r}_{0,TCP} = \begin{pmatrix} \ell(cq_1sq_3 + sq_1cq_3) + q_2sq_1 \\ \ell(-cq_1cq_3 + sq_1sq_3) - q_2cq_1 \\ \ell \\ \ell \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$= \begin{pmatrix} \ell sq_{13} + q_2sq_1 \\ -\ell cq_{13} - q_2cq_1 \\ \ell \\ \ell \end{pmatrix} \quad (9)$$

$${}_0\mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} cq_{13} & -sq_{13} & 0 \\ sq_{13} & cq_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (10)$$

### c) 1. Drehgelenk:

$${}_1\mathbf{J}_{R,1} = {}_1\mathbf{J}_{R,rel,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (11)$$

$${}_1\mathbf{J}_{T0,1} = \mathbf{0} \quad (12)$$

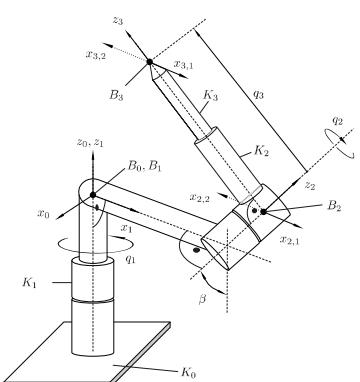
### 2. Schubgelenk:

$${}_2\mathbf{A}_1 = {}_1\mathbf{A}_2^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (13)$$

## Übung 3 – Lösungsvorschlag

### Aufgabe 1

a) Mögliche Wahl der Koordinatensysteme nach der DH-Konvention



Möglichkeit 1

$i$	$\alpha_{i-1}$	$a_{i-1}$	$d_i$	$\theta_i$
1	0	0	0	$q_1$
2	$-\beta$	$l_2$	$l_3$	$q_2$
3	$\frac{\pi}{2}$	0	$q_3$	0

Möglichkeit 2

$i$	$\alpha_{i-1}$	$a_{i-1}$	$d_i$	$\theta_i$
1	0	0	0	$q_1$
2	$-\beta$	$l_2$	$l_3$	$q_2$
3	$-\frac{\pi}{2}$	0	$q_3$	0

Die Lösung ist nicht eindeutig, da sich Dreh- und Schubachsen ( $z_2, z_3$ ) schneiden. Daher gibt es zwei mögliche Richtungen für  $x_2$ .

Ein weiterer Sonderfall ergibt sich bei aufeinanderfolgenden parallelen Drehachsen  $i$  und  $i+1$ . Die Lage des Ursprungs  $B_i$  ist nicht eindeutig definiert. Abhilfe: Basis so wählen, dass möglichst viele DH-Parameter zu null werden.

b) Der gesuchte Vektor  ${}_0\mathbf{r}_{0,TCP}$  berechnet sich folgendermaßen:

$${}_0\mathbf{r}_{0,TCP} = {}_0\mathbf{r}_{0,1} + {}_0\mathbf{A}_1 {}_1\mathbf{r}_{1,2} + {}_0\mathbf{A}_1 {}_1\mathbf{A}_2 {}_2\mathbf{r}_{2,3}.$$

$${}_2\mathbf{J}_{R,2} = {}_2\mathbf{A}_{1-1}\mathbf{J}_{R,1} + \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (14)$$

$${}_2\mathbf{J}_{T0,2} = {}_2\mathbf{A}_{1-1}\underbrace{{}_2\mathbf{J}_{T0,1}}_{=\mathbf{0}} + {}_2\mathbf{A}_1 ({}_1\mathbf{r}_{12}^T {}_1\mathbf{J}_{R,1}) + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & {}_2\mathbf{A}_1 {}_2\mathbf{A}_2^T(\alpha_1)\mathbf{e}_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (15)$$

$${}_1\mathbf{r}_{12} = \begin{pmatrix} 0 \\ -q_2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (16)$$

$${}_1\tilde{\mathbf{r}}_{12}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & q_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -q_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (17)$$

$${}_2\mathbf{A}_1 {}_2\mathbf{A}_2^T(\alpha_1)\mathbf{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_2^T(\pi/2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (18)$$

$${}_2\mathbf{J}_{T0,2} = \begin{pmatrix} q_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (19)$$

### 3. Drehgelenk:

$${}_3\mathbf{J}_{R,3} = {}_3\mathbf{A}_2 {}_2\mathbf{J}_{R,2} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (20)$$

$${}_3\mathbf{A}_2 = {}_2\mathbf{A}_3^T = \begin{pmatrix} cq_3 & 0 & -sq_3 \\ -sq_3 & 0 & -cq_3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (21)$$

$${}_3\mathbf{J}_{R,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (22)$$

$${}_3\mathbf{J}_{T0,3} = {}_3\mathbf{A}_2 ({}_2\mathbf{J}_{T0,2} + {}_2\tilde{\mathbf{r}}_{23}^T {}_2\mathbf{J}_{R,2}) \quad (23)$$

$${}_2\mathbf{r}_{23} = \begin{pmatrix} 0 \\ \ell \\ 0 \end{pmatrix}, \quad {}_2\tilde{\mathbf{r}}_{23}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\ell \\ 0 & 0 & 0 \\ \ell & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (24)$$

$${}_3\mathbf{J}_{T0,3} = \begin{pmatrix} q_2cq_3 & -sq_3 & 0 \\ -q_2sq_3 & -cq_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (25)$$

Jakobi-Matrix für den TCP:

$${}_3\mathbf{J}_{T,TCP} = {}_3\mathbf{J}_{T0,3} + {}_3\tilde{\mathbf{r}}_{3,TCP}^T {}_3\mathbf{J}_{R,3} = \begin{pmatrix} \ell + q_2cq_3 & -sq_3 & \ell \\ -q_2sq_3 & -cq_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (26)$$

Mithilfe der DH-Parameter kann die homogene Transformationsmatrix  ${}_{i-1}\mathbf{D}_i$  direkt abgelesen werden.

$${}_{i-1}\mathbf{D}_i = \begin{pmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ s\theta_i\alpha_{i-1} & c\theta_i\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1}d_i \\ s\theta_i\alpha_{i-1} & c\theta_i\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1}d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} {}_{i-1}\mathbf{A}_i & {}_{i-1}\mathbf{r}_{i-1,i} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}$$

$${}_0\mathbf{r}_{0,1} = \mathbf{0}$$

$${}_1\mathbf{r}_{1,2} = \begin{pmatrix} l_2 \\ -l_3s(-\beta) \\ l_3c(-\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_2 \\ l_3s\beta \\ l_3c\beta \end{pmatrix}$$

$${}_2\mathbf{r}_{2,3} = \begin{pmatrix} 0 \\ -q_3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$${}_0\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} cq_1 & -sq_1 & 0 \\ sq_1 & cq_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$${}_1\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} cq_2 & -sq_2 & 0 \\ sq_2c\beta & cq_2c\beta & s\beta \\ -sq_2s\beta & -cq_2s\beta & c\beta \end{pmatrix}$$

Einsetzen und ausmultiplizieren ergibt:

$${}_0\mathbf{r}_{0,TCP} = \begin{pmatrix} (l_2 + q_3sq_2)cq_1 + sq_1(q_3cq_2c\beta - l_3s\beta) \\ (l_2 + q_3sq_2)sq_1 + cq_1(-q_3cq_2c\beta + l_3s\beta) \\ l_3c\beta + q_3cq_2s\beta \end{pmatrix}$$

### Aufgabe 2

Für die homogene Transformation vom A- in das B-System gilt:

$${}_B\mathbf{D}_A = {}_A\mathbf{D}_B^{-1} \quad \text{aber: } {}_B\mathbf{D}_A \neq {}_A\mathbf{D}_B^T$$

Eine Matrixinversion ergibt:

$${}_B\mathbf{D}_A = \begin{bmatrix} {}_B\mathbf{A}_A & -{}_B\mathbf{A}_A {}_A\mathbf{r}_{A,B} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

mit  ${}_B\mathbf{A}_A = {}_A\mathbf{A}_B^T$

## Übung 4 – Lösungsvorschlag

### Aufgabe 1

a) Für die rekursive Berechnung der Jacobi-Matrix der Rotation gilt:

$${}_i\mathbf{J}_{R,i} := \frac{\partial {}_i\boldsymbol{\omega}_i}{\partial \mathbf{q}} = {}_i\mathbf{A}_{v(i)} v(i)\mathbf{J}_{R,v(i)} + {}_i\mathbf{J}_{R,rel,i}$$

Bei Drehgelenken gilt für die relative Jacobi-Matrix:

$${}_i\mathbf{J}_{R,rel,i,[k,l]} = \begin{cases} 1 & \text{für } k = 3 \wedge l = i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Mit den bekannten Drehmatrizen aus dem „Beispiel zur DH-Transformation“ und dem Startwert

$${}_0\mathbf{J}_{R,0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

lässt sich die Rekursion durchführen:

$$\begin{aligned} {}_1\mathbf{J}_{R,1} &= {}_1\mathbf{J}_{R,rel,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ {}_2\mathbf{J}_{R,2} &= {}_1\mathbf{A}_2^T {}_1\mathbf{J}_{R,1} + {}_2\mathbf{J}_{R,rel,2} \\ &= \begin{pmatrix} cq_2 & 0 & -sq_2 \\ -sq_2 & 0 & -cq_2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} {}_1\mathbf{J}_{R,1} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -sq_2 & 0 & 0 \\ -cq_2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ {}_3\mathbf{J}_{R,3} &= {}_2\mathbf{A}_3^T {}_2\mathbf{J}_{R,2} + {}_3\mathbf{J}_{R,rel,3} \\ &= \begin{pmatrix} cq_3 & sq_3 & 0 \\ -sq_3 & cq_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} {}_2\mathbf{J}_{R,2} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -cq_2 & sq_3 - cq_3 & sq_2 & 0 & 0 \\ sq_2 & sq_3 - cq_2 & cq_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

b) Die gesuchte Jacobi-Matrix der Translation lässt sich folgendermaßen bestimmen:

$${}_3\mathbf{J}_{T,TCP} = {}_3\mathbf{J}_{TO,3} + {}_3\mathbf{r}_{3,TCP}^T {}_3\mathbf{J}_{R,3} \quad (6)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & l(sq_3 - 1) & -l \\ 0 & l cq_3 & 0 \\ -l(sq_2 + q_3) - cq_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Mit der Drehmatrix  ${}_3\mathbf{A}_0$  gilt:

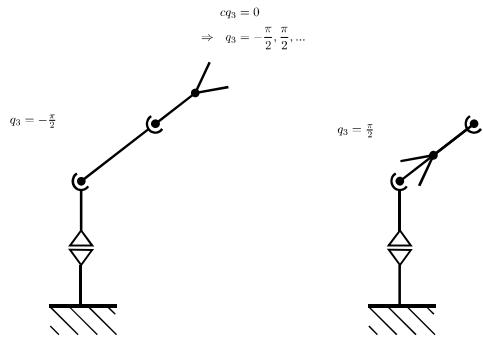
$$|{}_3\mathbf{J}_{T,TCP}| = |{}_3\mathbf{A}_0| {}_0\mathbf{J}_{T,TCP} = \underbrace{|{}_3\mathbf{A}_0|}_{{}_0\mathbf{J}_{T,TCP}} |{}_0\mathbf{J}_{T,TCP}| = |{}_0\mathbf{J}_{T,TCP}|. \quad (8)$$

Für eine singuläre Konfiguration des Roboters muss die Determinante der Jacobi-Matrix verschwinden:  $|{}_3\mathbf{J}_{T,TCP}| = 0$ . Die Determinante für den gegebenen Roboter berechnet sich zu:

$$|{}_3\mathbf{J}_{T,TCP}| = l^3 cq_3(cq_2 - s(q_2 + q_3)). \quad (8)$$

Bei der Lösung von (8) können zwei Fälle unterschieden werden:

#### Fall 1:



Der Roboterarm befindet sich in der Strecklage bzw. ist eingeklappt (s. Bild). Es ist somit keine Bewegung in Armrichtung möglich.

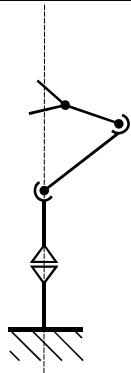
#### Fall 2:

Mit

$$cq_2 - s(q_2 + q_3) = 0$$

gilt für den Vektor  ${}_0\mathbf{r}_{0,TCP}$  in dieser Konfiguration:

$${}_0\mathbf{r}_{0,TCP} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -l sq_2 - l c(q_2 + q_3) \end{pmatrix}.$$



In diesem Fall ist nur eine ebene Bewegung möglich.

c) Für die Jacobi-Matrix der Translation gilt:

$${}_i\mathbf{J}_{TO,i} := \frac{\partial {}_i\mathbf{v}_i}{\partial \mathbf{q}}$$

Die absolute Geschwindigkeit des Körpers  $i$  dargestellt in  $B_i$  ergibt sich allgemein zu:

$${}_i\mathbf{v}_i = {}_i\mathbf{A}_{v(i)} v(i)\mathbf{v}_{v(i)} + {}_i\mathbf{v}_{v(i)i}$$

Für ein Roboter mit Drehgelenken gilt:

$${}_i\mathbf{v}_{v(i)i} = {}_i\mathbf{A}_{v(i)}(v(i)\boldsymbol{\omega}_{v(i)} \times_{v(i)} \mathbf{r}_{v(i)i}) = {}_i\mathbf{A}_{v(i)} v(i) \tilde{\mathbf{r}}_{v(i)i}^T v(i) \boldsymbol{\omega}_{v(i)}$$

und man erhält:

$$\begin{aligned} {}_i\mathbf{J}_{TO,i} &= \frac{\partial {}_i\mathbf{v}_i}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left( {}_i\mathbf{A}_{v(i)} \left( v(i)\mathbf{v}_{v(i)} + v(i) \tilde{\mathbf{r}}_{v(i)i}^T v(i) \boldsymbol{\omega}_{v(i)} \right) \right) \\ &= {}_i\mathbf{A}_{v(i)} \left( \frac{\partial v(i)\mathbf{v}_{v(i)}}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left( v(i) \tilde{\mathbf{r}}_{v(i)i}^T v(i) \boldsymbol{\omega}_{v(i)} \right) \right) \\ &= {}_i\mathbf{A}_{v(i)} \left( v(i) \mathbf{J}_{TO,v(i)} + v(i) \tilde{\mathbf{r}}_{v(i)i}^T v(i) \mathbf{J}_{R,v(i)} \right) \end{aligned}$$

Mit den bekannten Jacobi-Matrizen  ${}_i\mathbf{J}_{R,i}$  (aus Aufgabenteil a)) und dem Startwert

$${}_0\mathbf{J}_{TO,0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

erhält man bei der Rekursion:

$${}_1\mathbf{J}_{TO,1} = {}_0\mathbf{A}_1^T {}_0\mathbf{r}_{0,1}^T {}_0\mathbf{J}_{R,0} = 0$$

$${}_2\mathbf{J}_{TO,2} = {}_1\mathbf{A}_2^T {}_1\mathbf{r}_{1,2}^T {}_1\mathbf{J}_{R,1} = 0$$

$${}_3\mathbf{J}_{TO,3} = {}_2\mathbf{A}_3^T {}_2\mathbf{r}_{2,3}^T {}_2\mathbf{J}_{R,2}$$

$$\begin{aligned} &= \begin{pmatrix} cq_3 & sq_3 & 0 \\ -sq_3 & cq_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ l cq_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & l sq_3 & 0 \\ 0 & l cq_3 & 0 \\ l cq_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Überprüfen des Ergebnisses von  ${}_3\mathbf{J}_{TO,3}$ :

$${}_3\mathbf{J}_{TO,3} = {}_0\mathbf{A}_3^T \frac{\partial {}_0\mathbf{r}_{0,3}}{\partial \mathbf{q}} = {}_0\mathbf{A}_3^T {}_0\mathbf{J}_{TO,3}$$

$${}_0\mathbf{J}_{TO,3} = \frac{\partial {}_0\mathbf{r}_{0,3}}{\partial \mathbf{q}} = \begin{pmatrix} -l cq_2 & sq_1 & -l cq_1 & sq_2 & 0 \\ l cq_1 & cq_2 & -l sq_1 & sq_2 & 0 \\ 0 & 0 & -l cq_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$${}_3\mathbf{J}_{TO,3} = \begin{pmatrix} 0 & l sq_3 & 0 \\ 0 & l cq_3 & 0 \\ l cq_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

### Aufgabe 2

#### Kurzfrage Schlangentensor

Offensichtlich gilt:

$$\frac{d}{dt} \underbrace{({}_0\mathbf{A}_k^T {}_0\mathbf{A}_k)}_{=E} = 0.$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} ({}_0\mathbf{A}_k^T {}_0\mathbf{A}_k) &= {}_k\mathbf{A}_0 {}_0\mathbf{A}_k + {}_0\tilde{\mathbf{A}}_k^T {}_0\mathbf{A}_k = 0 \\ \Leftrightarrow {}_k\tilde{\mathbf{\omega}} &= {}_k\mathbf{A}_0 {}_0\tilde{\mathbf{A}}_k = -{}_0\tilde{\mathbf{A}}_k^T {}_0\mathbf{A}_k = -({}_k\mathbf{A}_0 {}_0\tilde{\mathbf{A}}_k)^T. \end{aligned}$$

## Übung 5 – Lösungsvorschlag

### Aufgabe 1

a) Die DH-Parameter sind:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} i & \alpha_{i-1} & a_{i-1} & d_i & \Theta_i \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & q_1 \\ \hline 2 & -\frac{\pi}{2} & l & q_2 & 0 \end{array}$$

Table 2: DH-Parameter des Roboters

b)

$${}^1\mathbf{r}_{0,2} = \begin{pmatrix} l \\ q_2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$${}^0\mathbf{r}_{0,2} = {}^0\mathbf{A}_1 {}^1\mathbf{r}_{0,2} \quad (4)$$

$${}^0\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} cq_1 & -sq_1 & 0 \\ sq_1 & cq_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

$${}^1\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

$${}^0\mathbf{r}_{0,2} = \begin{pmatrix} l \cdot cq_1 - q_2 \cdot sq_1 \\ l \cdot sq_1 + q_2 \cdot cq_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7)$$

$${}^0\mathbf{A}_2 = {}^0\mathbf{A}_{11}\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} cq_1 & 0 & -sq_1 \\ sq_1 & 0 & cq_1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (8)$$

c) Quadrieren und addieren von Gleichungen (1) und (2) ergibt:

$$l^2 \cdot cq_1^2 - 2l \cdot q_2 \cdot cq_1 \cdot sq_1 + q_2^2 \cdot sq_1^2 + l^2 \cdot sq_1^2 + 2l \cdot q_2 \cdot cq_1 \cdot sq_1 + q_2^2 \cdot cq_1^2 = x_d^2 + y_d^2 \quad (9)$$

$$\Leftrightarrow l^2 + q_2^2 = x_d^2 + y_d^2 \quad (10)$$

$$\Leftrightarrow q_2 = \pm \sqrt{x_d^2 + y_d^2 - l^2} \quad (11)$$

Durch Umstellen von (1) nach  $cq_1 = \frac{1}{l}(x_d + q_2 \cdot sq_1)$  und einsetzen in (2) ergibt sich:

$$y_d = l \cdot sq_1 + q_2 \cdot cq_1 = l \cdot sq_1 + \frac{q_2}{l}(x_d + q_2 \cdot sq_1) \quad (12)$$

$$\Leftrightarrow sq_1 = \frac{l \cdot y_d - x_d \cdot q_2}{l^2 + q_2^2} \quad (13)$$

$$\Leftrightarrow q_1 = \arcsin \frac{l \cdot y_d - x_d \cdot q_2}{l^2 + q_2^2} \quad (14)$$

d) Newton-Raphson-Verfahren:

$$\mathbf{q}^{k+1} = \mathbf{q}^k + \mathbf{J}_w^{-1}(\mathbf{q}^k) \Delta \mathbf{w}^k \quad (15)$$

Die Jacobi-Matrix der Arbeitsraumkoordinaten berechnet sich zu:

$$\mathbf{J}_w = \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{q}} = \begin{pmatrix} -l \cdot sq_1 - q_2 \cdot cq_1 & -sq_1 \\ l \cdot cq_1 + q_2 \cdot sq_1 & cq_1 \end{pmatrix} \quad (16)$$

(17)

und für die Inverse gilt:

$$\mathbf{J}_w^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{J}_w} \begin{pmatrix} cq_1 & sq_1 \\ -l \cdot cq_1 + q_2 \cdot sq_1 & -l \cdot sq_1 - q_2 \cdot cq_1 \end{pmatrix} \quad (18)$$

mit

$$\det \mathbf{J}_w = -q_2. \quad (19)$$

Nun kann der Iterationsschritt  $k+1$  berechnet werden:

$$\mathbf{q}^{k+1} = \begin{pmatrix} q_1^k - \frac{1}{q_2^k} (\Delta x \cdot cq_1^k + \Delta y \cdot sq_1^k) \\ q_2^k - \frac{1}{q_2^k} (\Delta x \cdot (q_2^k \cdot sq_1^k - l \cdot cq_1^k) - \Delta y \cdot (l \cdot sq_1^k + q_2^k \cdot cq_1^k)) \end{pmatrix}. \quad (20)$$

e) Für  $\det \mathbf{J}_w = 0$  ist  $\mathbf{J}_w$  singulär und die Inverse kann nicht berechnet werden. Gleichung (15) lässt sich also nicht anwenden. Die Menge der Punkte ist definiert durch:

$${}^0\mathbf{w} \in \mathbb{R}^2 : \{x^2 + y^2 = l^2\} \quad (21)$$

In der singulären Konfiguration ( $q_2 = 0$ ) kann der TCP nur entlang einer Kreisbahn bewegt werden. In dieser Konfiguration tritt ein Verlust der Bewegungsmöglichkeiten auf.

## Übung 6 – Lösungsvorschlag

### Aufgabe 1

a) Die Lage des TCP  ${}^0\mathbf{w}$  berechnet sich zu

$${}^0\mathbf{w} = \begin{pmatrix} \ell_1 \cdot cq_1 + \ell_2 \cdot cq_{12} \\ \ell_1 \cdot sq_1 + \ell_2 \cdot sq_{12} \end{pmatrix} \quad (1)$$

Die Drehmatrix  ${}^0\mathbf{A}_2$  von  $B_2$  nach  $B_0$  kann mithilfe von  ${}^0\mathbf{A}_1$  und  ${}^1\mathbf{A}_2$  berechnet werden

$${}^0\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} cq_1 & -sq_1 \\ sq_1 & cq_1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$${}^1\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} cq_2 & -sq_2 \\ sq_2 & cq_2 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$${}^0\mathbf{A}_2 = {}^0\mathbf{A}_{11}\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} cq_1 \cdot cq_2 - sq_1 \cdot sq_2 & -cq_1 \cdot sq_2 - cq_2 \cdot sq_1 \\ cq_1 \cdot sq_2 + cq_2 \cdot sq_1 & cq_1 \cdot cq_2 - sq_1 \cdot sq_2 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$= \begin{pmatrix} cq_{12} & -sq_{12} \\ sq_{12} & cq_{12} \end{pmatrix} \quad (5)$$

b) Die Jacobi-Matrix der Translation kann formal durch partielle Ableitung der Arbeitsraumgeschwindigkeit  ${}^0\dot{\mathbf{w}}$  nach der Gelenkgeschwindigkeit  $\dot{\mathbf{q}}$  berechnet werden

$$\mathbf{J}_w = \frac{\partial {}^0\dot{\mathbf{w}}}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial {}^0\mathbf{w}}{\partial \mathbf{q}} = \begin{pmatrix} -\ell_1 \cdot sq_1 - \ell_2 \cdot sq_{12} & -\ell_2 \cdot sq_{12} \\ \ell_1 \cdot cq_1 + \ell_2 \cdot cq_{12} & \ell_2 \cdot cq_{12} \end{pmatrix} \quad (6)$$

In der singulären Konfiguration gilt  $\det(\mathbf{J}_w) = 0$ . Für die Determinante der Jacobi-Matrix gilt

$$\det(\mathbf{J}_w) = \ell_1 \cdot \ell_2 \cdot (cq_1 \cdot sq_{12} - sq_1 \cdot cq_{12}) \quad (7)$$

Mithilfe der Additionstheoreme kann (7) folgendermaßen vereinfacht werden

$$\det(\mathbf{J}_w) = \ell_1 \cdot \ell_2 \cdot sq_2 \quad (8)$$

Somit lassen sich die singulären Konfigurationen angeben

$$q_2 = 0 \quad \text{und} \quad q_2 = \pi \quad (q_1 \in \mathbb{R}) \quad (9)$$

c) Der TCP befindet sich an der Grenze des Arbeitsraums. Da eine Geschwindigkeitskomponente der Sollvorgabe  $\dot{\mathbf{w}}_d$  aus dem Arbeitsbereich des Roboters heraus zeigt, kann der Roboter dieser Sollvorgabe nicht folgen. Mit dem Verfahren der transponierten Jacobi-Matrix zur Berechnung der inversen Kinematik  $\dot{\mathbf{q}}_{IK} = {}^2\mathbf{J}_w^T {}^2\dot{\mathbf{w}}_d$ , ergibt sich die Geschwindigkeit des TCP zu

$${}^2\dot{\mathbf{w}} = {}^2\mathbf{J}_w \dot{\mathbf{q}}_{IK} = {}^2\mathbf{J}_w {}^2\mathbf{J}_w^T {}^2\dot{\mathbf{w}}_d \quad (10)$$

Für  $q_2 = 0$  gilt

$${}^0\mathbf{A}_2(q_2 = 0) = \begin{pmatrix} cq_1 & sq_1 \\ sq_1 & cq_1 \end{pmatrix} \quad (11)$$

$${}^0\mathbf{J}_w(q_2 = 0) = \begin{pmatrix} -sq_1 \cdot (\ell_1 + \ell_2) & -\ell_2 \cdot sq_1 \\ \ell_1 \cdot cq_1 + \ell_2 \cdot cq_{12} & \ell_2 \cdot cq_{12} \end{pmatrix} \quad (12)$$

## Übung 7 – Lösungsvorschlag

### Aufgabe 1

Die Minimalkoordinaten des Systems werden wie folgt definiert:

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad (1)$$

Der Impulsatz für Körper 1 und Körper 2 wird für diese Aufgabe im Inertialsystem angeschrieben und der Drallsatz in den jeweiligen körperfesten Koordinaten.

#### Körper 1

Schwerpunktsgeschwindigkeit und Beschleunigung (dargestellt in  $B_0$ ):

$${}^0\mathbf{v}_{S1} = {}^0\mathbf{a}_{S1} = \mathbf{0} \quad (2)$$

Zeitableitung des Impulses:

$${}^0\mathbf{p}_1 = \mathbf{0} \quad (3)$$

Winkelgeschwindigkeit und Winkelbeschleunigung (dargestellt in  $B_1$ ):

$${}^0\boldsymbol{\omega}_1 = {}^1\boldsymbol{\omega}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{pmatrix} \quad {}^1\dot{\boldsymbol{\omega}}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\alpha} \end{pmatrix} \quad (4)$$

Die Jacobi-Matrix der Rotation berechnet sich zu:

$${}^1\mathbf{J}_{R1} = \frac{\partial {}^1\boldsymbol{\omega}_1}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

Die eingeprägten Momente:

$${}^1\mathbf{M}_1^r = \begin{pmatrix} 0 \\ -Q_2 \\ -Q_1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

Die eingeprägte Kraft  $\mathbf{F}_1^r$  muss nicht berücksichtigt werden, da für die Jacobi-Matrix der Translation  $\mathbf{J}_{T,1} = \mathbf{0}$  gilt. Die Zeitableitung des Dralls und die Projektion in die zwangsfreien Richtungen berechnet sich folgendermaßen:

$${}^1\dot{\mathbf{L}}_1^S = {}^1\mathbf{I}_1^S {}^1\dot{\boldsymbol{\omega}}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ C\ddot{\alpha} \end{pmatrix} \quad (7)$$

$${}^1\mathbf{J}_{R1}^T \left( {}^1\dot{\mathbf{L}}_1^S - {}^1\mathbf{M}_1^r \right) = \begin{pmatrix} C\ddot{\alpha} + Q_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (8)$$

#### Körper 2

Die Lage des Schwerpunkts:

$${}^0\mathbf{r}_{S2} = \begin{pmatrix} -\ell \sin \alpha \\ \ell \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \quad (9)$$

Schwerpunktgeschwindigkeit und Beschleunigung durch (dargestellt in  $B_0$ ):

$${}_0\mathbf{v}_{S2} = \begin{pmatrix} -\ell\ddot{\alpha} \cos \alpha \\ -\ell\ddot{\alpha} \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \quad {}_0\mathbf{a}_{S2} = \begin{pmatrix} \ell(\dot{\alpha}^2 \sin \alpha - \ddot{\alpha} \cos \alpha) \\ \ell(-\dot{\alpha}^2 \cos \alpha - \ddot{\alpha} \sin \alpha) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (10)$$

Die Jacobi-Matrix der Translation bezüglich  $S_2$ :

$${}_0\mathbf{J}_{T,S_2} = \frac{\partial {}_0\mathbf{v}_{S2}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \begin{pmatrix} -\ell \cos \alpha & 0 \\ -\ell \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (11)$$

Zeitableitung des Impulses:

$${}_0\dot{\mathbf{p}}_2 = m_2 {}_0\mathbf{a}_{S2} = m_2 \ell \begin{pmatrix} \dot{\alpha}^2 \sin \alpha - \ddot{\alpha} \cos \alpha \\ -\dot{\alpha}^2 \cos \alpha - \ddot{\alpha} \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \quad (12)$$

Für die eingeprägte Kraft gilt:

$${}_0\mathbf{F}_2^e = \begin{pmatrix} 0 \\ m_2 g \\ 0 \end{pmatrix} \quad (13)$$

Die Projektion in die zwangsfreien Richtungen ergibt:

$${}_0\mathbf{J}_{T,S_2}^T ({}_0\dot{\mathbf{p}}_2 - {}_0\mathbf{F}_2^e) = \begin{pmatrix} \ell^2 m_2 \ddot{\alpha} + t m_2 g \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \quad (14)$$

Winkelgeschwindigkeit und Winkelbeschleunigung (dargestellt in  $B_2$ ):

$${}_2\omega_2 = {}_2\mathbf{A}_{1,1}\omega_1 + {}_2\omega_{1,2} \quad \text{mit } {}_2\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ -\sin \beta & 0 & -\cos \beta \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (15)$$

$${}_2\omega_2 = \begin{pmatrix} -\dot{\alpha} \sin \beta \\ -\dot{\alpha} \cos \beta \\ \dot{\beta} \end{pmatrix} \quad (16)$$

$${}_2\dot{\omega}_2 = \begin{pmatrix} -\ddot{\alpha} \sin \beta - \dot{\alpha} \dot{\beta} \cos \beta \\ -\ddot{\alpha} \cos \beta + \dot{\alpha} \dot{\beta} \sin \beta \\ \ddot{\beta} \end{pmatrix} \quad (17)$$

Die Jacobi-Matrix der Rotation berechnet sich zu:

$${}_2\mathbf{J}_{R2} = \frac{\partial {}_2\omega_2}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \begin{pmatrix} -\sin \beta & 0 \\ -\cos \beta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (18)$$

Die eingeprägten Momente:

$${}_2\mathbf{M}_2^e = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ Q_2 \end{pmatrix} \quad (19)$$

Die Zeitableitung des Dralls und die Projektion in die zwangsfreien Richtungen berechnet sich folgendermaßen:

$${}_2\dot{\mathbf{L}}_2^{S_2} = {}_2\mathbf{I}_2^{S_2} {}_2\dot{\omega}_2 + {}_2\dot{\omega}_2 {}_2\mathbf{I}_2^{S_2} {}_2\omega_2 = \begin{pmatrix} -D\ddot{\alpha} \sin \beta - E\dot{\alpha}\dot{\beta} \cos \beta \\ -D\ddot{\alpha} \cos \beta + E\dot{\alpha}\dot{\beta} \sin \beta \\ E\ddot{\beta} \end{pmatrix} \quad (20)$$

$${}_2\mathbf{J}_{R2}^T ({}_2\dot{\mathbf{L}}_2^{S_2} - {}_2\mathbf{M}_2^e) = \begin{pmatrix} D\ddot{\alpha} \\ E\ddot{\beta} - Q_2 \end{pmatrix} \quad (21)$$

Mit (8), (14) und (21) ergeben sich die Bewegungsgleichungen:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} C + D + \ell^2 m_2 & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}}_{=M(q)} \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} \ell m_2 g \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix}}_{=h(q, \dot{q})} = \underbrace{\begin{pmatrix} -Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix}}_{=\ddot{Q}_u} \quad (22)$$

### Kurzfrage

Die antriebsseitige Trägheit wird mit dem Quadrat der Übersetzung auf die Diagonalelemente der Massenmatrix addiert. Bei hohen Übersetzungen wird die Struktur der Massenmatrix Diagonaldominant.

▷ Nachteil: Ungünstige für hochdynamische Bewegungen, da effektive Trägheit erhöht.

▷ Vorteil: Durch eine diagonaldominante Struktur ist die Systemdynamik weniger stark gekoppelt. Dadurch kann z. B. eine dezentrale entkoppelte Einzelgelenkregelung sinnvoll eingesetzt werden.

## Übung 8 – Lösungsvorschlag

### Aufgabe 1

- a) Die gesuchten Größen Impuls- und Dralländerung sollen für die Körper 1 und 2 jeweils in den körperfesten Koordinaten  $B_1$  und  $B_2$  angeschrieben werden. Zunächst wird Körper 1 betrachtet.

#### Körper 1

Allgemein gilt für die Impulsänderung von Körper 1, angeschrieben in  $B_1$ :

$${}_1\dot{\mathbf{p}}_1 = m_1({}_1\mathbf{a}_1 + ({}_1\dot{\mathbf{r}}_{12} + {}_1\dot{\mathbf{w}}_1 \cdot {}_1\dot{\mathbf{w}}_1) {}_1\mathbf{r}_{S1}) \quad (1)$$

Für die Beschleunigung  $\mathbf{a}_1$  des Ursprungs von  $B_1$ , gilt  $\mathbf{a}_1 = 0$ , da der Punkt inertial fest ist. Mit der Winkelgeschwindigkeit von Körper 1 und dem Ortsvektor des Schwerpunkts  $S_1$

$${}_1\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 \end{pmatrix}, \quad {}_1\mathbf{r}_{S1} = \begin{pmatrix} \ell \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

kann die Impulsänderung direkt berechnet werden:

$${}_1\dot{\mathbf{p}}_1 = m_1 \begin{pmatrix} -\ell\dot{q}_1^2 \\ \ell\ddot{q}_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

Alternativ kann die Impulsänderung durch zweifache Zeitableitung des Ortsvektors  ${}_0\mathbf{r}_{S1}$  berechnet werden:

$${}_1\dot{\mathbf{p}}_1 = {}_0\mathbf{A}_1^T {}_0\mathbf{a}_{S1} m_1 \quad (4)$$

mit der Absolutbeschleunigung  ${}_0\mathbf{a}_{S1}$  von  $S_1$ , angeschrieben in  $B_0$

$${}_0\mathbf{a}_{S1} = \begin{pmatrix} -\ell c q_1 \dot{q}_1^2 - \ell s q_1 \ddot{q}_1 \\ -\ell s q_1 \dot{q}_1^2 + \ell c q_1 \ddot{q}_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

Die Dralländerung berechnet sich zu:

$${}_1\dot{\mathbf{L}}_1^0 = {}_1\mathbf{I}_1^0 {}_1\dot{\mathbf{w}}_1 + {}_1\dot{\mathbf{w}}_1 {}_1\mathbf{I}_1^0 {}_1\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B\ddot{q}_1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

#### Körper 2:

Analog zu (1) berechnet sich die Impulsänderung für den zweiten Körper folgendermaßen:

$${}_2\dot{\mathbf{p}}_2 = m_2({}_2\mathbf{a}_2 + ({}_2\dot{\mathbf{r}}_{12} + {}_2\dot{\mathbf{w}}_2 \cdot {}_2\dot{\mathbf{w}}_2) {}_2\mathbf{r}_{S2}) \quad (7)$$

mit  ${}_2\mathbf{r}_{S2} = 0$  vereinfacht sich (7) zu  ${}_2\dot{\mathbf{p}}_2 = m_2 {}_2\mathbf{a}_2$ . Die Beschleunigung  ${}_2\mathbf{a}_2$  kann durch Bilden der absoluten zeitlichen Ableitung berechnet werden. Mit

$${}_1\mathbf{r}_2 = {}_1\mathbf{r}_{12} + {}_2\mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} \ell \\ q_2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad {}_2\omega_2 = {}_2\mathbf{A}_{1,1}\omega_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 \end{pmatrix} \quad (8)$$

ergibt sich die gesuchte Beschleunigung unter Berücksichtigung der Euler-Ableitung für ein bewegtes Koordinatensystem zu:

$${}_2\mathbf{v}_2 = {}_2\mathbf{A}_1 ({}_1\dot{\mathbf{r}}_{12} + {}_1\mathbf{w}_1 \times {}_1\mathbf{r}_{12}) = \begin{pmatrix} -q_2 \dot{q}_1 \\ 0 \\ \ell \dot{q}_1 + \dot{q}_2 \end{pmatrix} \quad (9)$$

$${}_2\mathbf{a}_2 = ({}_2\dot{\mathbf{v}}_2) + {}_2\mathbf{w}_2 \times {}_2\mathbf{v}_2 \quad (10)$$

$$= \begin{pmatrix} -\dot{q}_1 \dot{q}_2 - q_2 \ddot{q}_1 \\ 0 \\ \ell \dot{q}_1 + \ddot{q}_2 \end{pmatrix} + {}_2\mathbf{w}_2 \times {}_2\dot{\mathbf{r}}_2 \quad (11)$$

$$= \begin{pmatrix} -2\dot{q}_1 \dot{q}_2 - q_2 \ddot{q}_1 - \ell \dot{q}_1^2 \\ 0 \\ \ell \dot{q}_1 + \ddot{q}_2 - q_2 \ddot{q}_1^2 \end{pmatrix} \quad (12)$$

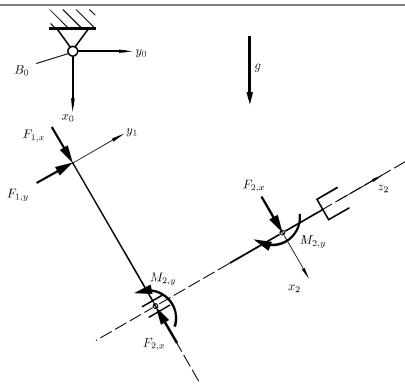
Und damit die Impulsänderung:

$${}_2\dot{\mathbf{p}}_2 = \begin{pmatrix} -2\dot{q}_1 \dot{q}_2 - q_2 \ddot{q}_1 - \ell \dot{q}_1^2 \\ 0 \\ \ell \dot{q}_1 + \ddot{q}_2 - q_2 \ddot{q}_1^2 \end{pmatrix} m_2 \quad (13)$$

#### Dralländerung:

$${}_2\dot{\mathbf{L}}_2^0 = {}_2\mathbf{I}_2^0 {}_2\dot{\mathbf{w}}_2 + {}_2\mathbf{w}_2 {}_2\mathbf{I}_2^0 {}_2\mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ D\ddot{q}_1 \end{pmatrix} \quad (14)$$

- b) Die folgende Skizze zeigt die Zwangskräfte und Zwangsmomente auf Körper 1 und 2.



Die Zwangskräfte (bzw. Momente) lassen sich durch Aufstellen des Impuls- und Drallsatzes für Körper 1 und 2 berechnen. Ausgehend von Körper 2 kann das Moment  $M_{2,y}$  und die Kraft  $F_{2,x}$  berechnet werden. Mit dem Drallsatz ergibt sich  $M_{2,y}$

$${}_2\dot{\mathbf{L}}_2^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{F}_{2,y} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ M_{2,y} \\ 0 \end{pmatrix} + {}_2\tilde{\mathbf{M}}_2^0 \quad (15)$$

und mit dem Impulssatz

$${}_2\dot{\mathbf{p}}_2 = \begin{pmatrix} \dot{p}_{2x} \\ 0 \\ \dot{p}_{2z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{2,x} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + {}_2\mathbf{F}_2^e \quad \text{mit} \quad {}_2\mathbf{F}_2^e = \begin{pmatrix} m_2 g \cos q_1 \\ 0 \\ -m_2 g \sin q_1 \end{pmatrix} \quad (16)$$

und man erhält die gesuchte Zwangskraft aus der Impulsbilanz (16) in  $x$ -Richtung

$$F_{2,x} = \dot{p}_{2x} - m_2 g \cos q_1 \quad (17)$$

Mit der nun bekannten Zwangskraft und der eingeprägten Kraft

$${}_1\mathbf{F}_1^e = \begin{pmatrix} m_1 g \cos q_1 \\ -m_1 g \sin q_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (18)$$

kann der Impulssatz für Körper 1 aufgestellt werden

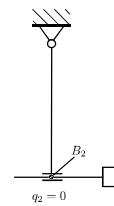
$${}_1\dot{\mathbf{p}}_1 = \begin{pmatrix} \dot{p}_{1x} \\ \dot{p}_{1y} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{1,x} \\ F_{1,y} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_1 g \cos q_1 \\ -m_1 g \sin q_1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} F_{2,x} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (19)$$

Auflösen von (19) ergibt die gesuchten Zwangskräfte

$$F_{1,x} = \dot{p}_{1x} - m_1 g \cos q_1 + F_{2,x} \quad (20)$$

$$F_{1,y} = \dot{p}_{1y} + m_1 g \sin q_1 \quad (21)$$

c) Singuläre Lage für  $q_1 = q_2 = 0$ :



Durch

$$\mathbf{M}_w \ddot{\mathbf{w}} + \mathbf{h}_w = \mathbf{J}_w^{-T} \mathbf{Q}_w = \mathbf{F}_w \quad (22)$$

wird die effektive Dynamik für die gegebenen Arbeitsraumkoordinaten beschrieben.  $\mathbf{F}_w$  ist eine Kraft, die in  $B_2$  angreift. Um die Struktur der Massenmatrix anzugeben, wird (22) nach der Beschleunigung aufgelöst (mit  $\mathbf{h}_w = 0$ )

$$\ddot{\mathbf{w}} = \mathbf{M}_w^{-1} \mathbf{F}_w = \mathbf{M}_w^{-1} \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} \quad (23)$$

In der singulären Konfiguration und  $q_1 = 0$  ist eine Beschleunigung in  $x_0$ -Richtung nicht möglich. Eine beliebig hohe Kraft  $F_x$  wird von den Lagern aufgenommen und bewirkt keine Beschleunigung. Die Kraftkomponente  $F_y$  ruft eine Beschleunigung in  $y$ -Richtung, allerdings nicht in  $x$ -Richtung hervor. Mit dieser Interpretation kann die Struktur der Massenmatrix angegeben werden

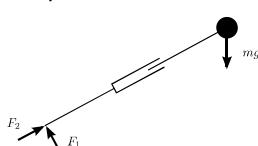
$$\lim_{q_2 \rightarrow 0} \mathbf{M}_w^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix} \quad (24)$$

Durch Rechnung (nicht gefragt) ergibt sich die Massenmatrix zu

$$\lim_{q_2 \rightarrow 0} \mathbf{M}_w^{-1} = \frac{1}{m_2} \begin{pmatrix} \sin^2 q_1 & -\frac{1}{2} \sin^2 q_1 \\ -\frac{1}{2} \sin^2 q_1 & \cos^2 q_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{m_2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (25)$$

## Aufgabe 2

a) Reaktionskräfte als Normal- und Querkraft an der Leiter:



Impulssatz an der Punktmasse

$$m \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} - F_1 \begin{bmatrix} -\sin(q_1) \\ \cos(q_1) \end{bmatrix} - F_2 \begin{bmatrix} \cos(q_1) \\ \sin(q_1) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ -mg \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

Drallsatz um die Punktmasse

$$\dot{L} - M = 0$$

$$-l_{12} F_1 = 0$$

$$\Rightarrow F_1 = 0$$

Somit ergibt sich der Impulssatz zu

$$m \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} - F_2 \begin{bmatrix} \cos(q_1) \\ \sin(q_1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ mg \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

b)

$$x^2 + y^2 = l_{12}^2$$

c) Zwangsbedingung wäre jetzt:

$$x^2 + y^2 = l_{12}^2$$

Durch folgendes Vorgehen, wird diese automatisch erfüllt.

Die Jacobi-Matrix erhält man aus dem Ortsvektor der Punktmasse durch Differentiation:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \begin{bmatrix} l_{12} \cos(q_1) \\ \text{const.} + (l_1 + l_2) \sin(q_1) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} l_{12} \cos(q_1) \\ \text{const.} + l_{12} \sin(q_1) \end{bmatrix} \\ \mathbf{J}_T &= \begin{bmatrix} -l_{12} \sin(q_1) \\ l_{12} \cos(q_1) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Der Ortsvektor wird abgeleitet, um die Differentialgleichung in Abhängigkeit der Freiheitsgrade zu erhalten.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= \begin{bmatrix} -l_{12} \sin(q_1) \dot{q}_1 \\ l_{12} \cos(q_1) \dot{q}_1 \end{bmatrix} \\ \ddot{\mathbf{r}} &= \begin{bmatrix} -l_{12} \cos(q_1) \dot{q}_1^2 - l_{12} \sin(q_1) \ddot{q}_1 \\ -l_{12} \sin(q_1) \dot{q}_1^2 + l_{12} \cos(q_1) \ddot{q}_1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Eingesetzt in die Differentialgleichung und projiziert mit der Jacobi-Matrix ergibt sich

$$\mathbf{J}_T^T \{ \ddot{\mathbf{p}} + \mathbf{F} \} = \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} -l_{12} \sin(q_1) \\ l_{12} \cos(q_1) \end{bmatrix}^T \left\{ m \begin{bmatrix} -l_{12} \cos(q_1) \dot{q}_1^2 - l_{12} \sin(q_1) \ddot{q}_1 \\ -l_{12} \sin(q_1) \dot{q}_1^2 + l_{12} \cos(q_1) \ddot{q}_1 \end{bmatrix} - F_2 \begin{bmatrix} \cos(q_1) \\ \sin(q_1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ mg \end{bmatrix} \right\} = 0 \\ m l_{12}^2 \ddot{q}_1 + m l_{12} g \cos(q_1) = 0$$

## Übung 10 – Lösungsvorschlag

### Aufgabe 1

a) Mit dem Zustandsvektor  $\mathbf{x} := (x_1, x_2)^T$ , wobei  $x_1 = x$  und  $x_2 = \dot{x}$  lässt sich das dynamische Optimierungsproblem mit fester Endzeit  $t_b$  folgendermaßen formulieren:

$$\Phi = \int_0^{t_b} \frac{1}{2} u^2 dt \quad (1)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} x_2 \\ u \end{bmatrix} = \mathbf{a}(\mathbf{x}, u) \quad (2)$$

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\mathbf{x}(t_b) = \begin{bmatrix} x_e \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$u \in [-u_m, u_m] \quad (5)$$

b) Für die Hamilton Funktion gilt:

$$H = \frac{1}{2} u^2 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 u \quad (6)$$

Für das unbeschränkte Minimum gilt<sup>1</sup>:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = u_{opt} + \lambda_2 \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow u_{opt} = -\lambda_2 \quad (7)$$

Falls  $u_{opt}$  nicht innerhalb der Beschränkung liegt so befindet sich das Minimum auf der entsprechenden Beschränkung  $-u_m$  oder  $u_m$ . Es gilt also für die optimale Steuerfunktion:

$$u = \begin{cases} -u_m & u_{opt} < -u_m \\ -\lambda_2 & u_{opt} \in [-u_m, u_m] \\ u_m & u_{opt} > u_m \end{cases} \quad (8)$$

c) Mit Hilfe der kanonischen Gleichungen

$$\dot{\mathbf{x}} = \left( \frac{\partial H}{\partial \lambda} \right)^T \quad (9)$$

$$\dot{\lambda} = -\left( \frac{\partial H}{\partial x} \right)^T \quad (10)$$

erhält man:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ u \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\lambda}_1 \\ \dot{\lambda}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\lambda_1 \end{bmatrix} \quad (12)$$

Zeitintegration von (12) liefert:

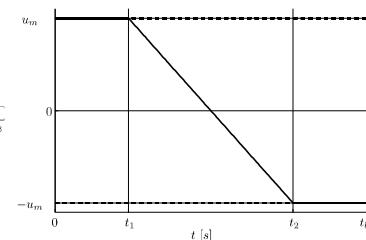
$$\lambda_1 = -C_2 \quad (13)$$

$$\lambda_2 = C_2 t + C_3 \quad (14)$$

<sup>1</sup>da  $H$  eine quadratische Funktion in  $u$  ist, ist die hinreichende Bedingung für ein Minimum erfüllt ( $\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} > 0$ )

Nun lässt sich die optimale Steuerfunktion für  $x_e > 0$  und  $t_b > 2\sqrt{\frac{x_e}{u_m}}$  angeben und skizzieren:

$$u = \begin{cases} u_m & \text{für } t \leq t_1 \\ -\lambda_2(t) & \text{für } t_1 < t \leq t_2 \\ -u_m & \text{für } t > t_2 \end{cases} \quad (15)$$



Einsetzen von (14) und (15) in (11) und Integration nach der Zeit ergibt

$$x_2 = \begin{cases} u_m t + C_1 & \text{für } t \leq t_1 \\ -\left(C_2 \frac{t^2}{2} + C_3 t\right) + C_4 & \text{für } t_1 < t \leq t_2 \\ -u_m t + C_5 & \text{für } t > t_2 \end{cases}$$

$$x_1 = \int x_2 dt = \begin{cases} u_m t^2 + C_1 t + C_6 & \text{für } t \leq t_1 \\ -\left(C_2 \frac{t^3}{6} + C_3 \frac{t^2}{2}\right) + C_4 t + C_7 & \text{für } t_1 < t \leq t_2 \\ -u_m t^2 + C_5 t + C_8 & \text{für } t > t_2 \end{cases}$$

Bestimmung der Schaltpunkte  $t_1$  und  $t_2$  sowie der Integrationskonstanten  $C_1, \dots, C_8$  mit Hilfe der 4 Randbedingungen und den 6 Übergangsbedingungen (Stetigkeit).

Randbedingungen:

$$x_1(0) = C_6 \stackrel{!}{=} 0 \quad (16)$$

$$x_1(t_b) = -u_m \frac{t_b^2}{2} + C_5 t_b + C_8 \stackrel{!}{=} x_e \quad (17)$$

$$x_2(0) = C_1 \stackrel{!}{=} 0 \quad (18)$$

$$x_2(t_b) = -u_m t_b + C_5 \stackrel{!}{=} 0 \quad (19)$$

## Übung 11 – Lösungsvorschlag

### Aufgabe 1

Für die Berechnung der Störgrößenübertragungsfunktion gilt  $Q_d = \dot{Q}_d = 0$ . Damit lässt sich  $Q$  wie folgt bestimmen:

$$Q = \frac{1}{s} G(s) \left( M_s + \left( \frac{K_d}{s} + K_d \right) (-sQ - K_p Q) \right). \quad (3)$$

Die Störgrößenübertragungsfunktion  $G_{ST}$  berechnet sich durch umstellen von Gl. (3) zu:

$$G_{ST} = \frac{Q}{M_s} = \frac{Ks}{T^2 s^4 + 2dT s^3 + (1+KK_d)s^2 + (KK_d K_p + KK_i)s + KK_i K_p} \quad (4)$$

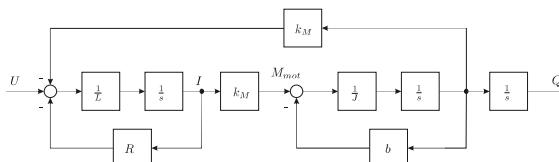
Mithilfe des Grenzwertsatzes (Satz v. Endwert) gilt im stationären Zustand ( $t \rightarrow \infty$ ):

$$\lim_{s \rightarrow 0} s G_{ST} M_s = \lim_{s \rightarrow 0} s G_{ST} \frac{s}{s^2 + \Omega^2} \tilde{M} = 0. \quad (5)$$

Somit kann die Regelung das Störmoment kompensieren.

### Aufgabe 2

a) Das Blockschaltbild kann wie folgt dargestellt werden:



b) Gesucht ist die Übertragungsfunktion  $G_M(s) = \frac{Q}{U}$ . Sie setzt sich aus dem elektromagnetischen und dem mechanischen Teil zusammen. Die Laplace Transformation von (1) und (2) mit der Vernachlässigung des Terms  $k_M \dot{q}$  ergibt:

$$U = I(R + Ls) \quad (6)$$

$$k_M I = Q(Js^2 + bs). \quad (7)$$

Mit

$$G_{el}(s) = \frac{I}{U} = \frac{1}{R + Ls} \quad (8)$$

$$G_{mech}(s) = \frac{Q}{I} = \frac{k_M}{Js^2 + bs} \quad (9)$$

berechnet sich  $G_M$  zu:

$$G_M(s) = G_{el}(s) G_{mech}(s) = \frac{k_M}{(Js^2 + bs)(R + Ls)}. \quad (10)$$

Das dynamische Übertragungsverhalten des Motors ist durch die deutlich geringere Zeitkonstante im Vergleich zu dem Übertragungsverhalten des mechanischen Anteils in vielen praktischen Anwendungen vernachlässigbar. Es gilt:

$$R + Ls \approx R \quad \text{und} \quad L \ll J$$

c) Mithilfe des Blockschaltbilds lässt sich  $Q$  wie folgt berechnen:

$$Q = ((Q_d - Q) K_{P1} - Qs) \frac{1}{s} \frac{K(K_d s + K_{P2})}{1 + T s} \underset{:= \hat{G}(s)}{\underbrace{\frac{1}{1 + T s}}} \quad (10)$$

Ausklammern und umformen von (10) ergibt:

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{Q}{Q_d} \\ &= \frac{K_{P1} \hat{G}(s)}{1 + (K_{P1} + s) \hat{G}(s)} \\ &= \frac{KK_{P1} K_d s + KK_{P1} K_{P2}}{(T + KK_d) s^2 + (1 + KK_d K_{P1} + KK_{P2}) s + KK_{P1} K_{P2}} \end{aligned} \quad (11)$$

Mit der Laplace Transformation der Sprungfunktion  $\mathcal{L}(s) = \frac{1}{s}$  und dem Grenzwertsatz berechnet sich die Sprungantwort für  $t \rightarrow \infty$  zu:

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{s} G(s) = 1. \quad (12)$$