Numerische Simulation eines Mondflugs


[1]

Besondere Lernleistung

von

Toni Happe

Gymnasium Martineum Halberstadt

Februar 2018 – Februar 2019

Inhaltsverzeichnis

Bildverzeichnis

Abbildungen sind nicht maßstabsgerecht.

Numerische Simulation eines Mondfluges

1. Einleitung

1.1. Hinführung

Seit dem Beginn der Menschheit zieht der Mond die Aufmerksamkeit Vieler auf sich. Am Anfang wurde er noch als ein religiöses Objekt betrachtet, doch sehr bald kam auch der Wunsch auf einen Fuß auf ihn zu setzen und somit „ein[en] riesige[n] Sprung für die Menschheit“ [2] zu machen und.

Als gegen Ende der 1940er Jahre der Kalte Krieg ausbrach, wurde immer mehr dafür gegeben das eigene Land als überlegen darzustellen, so unter anderem auch im „Wettlauf ins All.“ Diesen Entschied jedoch die Sowjetunion im Oktober 1957 mit dem ersten vom Menschen geschaffenen Satelliten „Sputnik 1“, dem ersten Lebewesen mit Hündin Laika, als auch dem ersten Menschen im All für sich und der Wettlauf ins All wurde zu einem Wettlauf zum Mond. Nachdem die Vereinigten Staaten die vorherigen „Disziplinen“ dieses Wettkampfes nicht für sich entscheiden konnten wurde der Druck auf die NASA als erstes einen Menschen zum Mond zu fliegen immer größer. Am 21. Juli 1969 um 3:56 Uhr mitteleuropäischer Zeit war es schließlich soweit. Neil Armstrong und Buzz Aldrin setzten ihren Fuß auf den Mond und entschieden damit den Wettlauf zum Mond für die Vereinigten Staaten.

Doch wie war dieser Mondflug möglich und was musste hierfür berechnet werden? Mit diesen Fragen wird sich, in vereinfachter Form, als eindimensionaler Flug von der Erde zum Mond, in dieser Arbeit auseinandergesetzt.

Kommentiert [TH1]: Am Ende nochmal darauf zurückkommen (Rahmenbildung)
Nur harter aufschlag möglich → irgendwas zum bremsen nötig etc

1.2 Physikalische Grundlagen

Möchte man ein Raumschiff von der Erde starten, so wirken hauptsächlich 2 Kräfte auf dieses ein. Die Gravitationskraft der Erde und die des Mondes, wobei beide Kräfte von der momentanen Position des Raumschiffes, beziehungsweise dem Abstand zu den jeweiligen Körpern, als auch von den Massen des Raumschiffes und der Erde oder des Mondes abhängig sind. Hierfür wird die newtonsche Gravitationskraft verwendet, dessen Formel wie folgt lautet:

(die Bedeutung aller Variablen sind unter 1.3 Variablen, Konstanten und Werte in tabellarischer Form aufgelistet)

$$\vec{F}_G = \gamma \cdot \frac{M_1 \cdot m_2}{r^2}$$

$$[\vec{F}_G] = \frac{m^3}{kg \cdot s^2} \cdot \frac{kg \cdot kg}{m^2}$$

$$[\vec{F}_G] = \frac{m}{s^2} \cdot kg$$

$[\vec{F}_G] = N$

Nun werden jeweils die Werte für Erde und Mondes eingesetzt und man erhält folgende Formeln, mit selbigen Einheiten wie bei der allgemeinen Formel:

Gravitationskraft der Erde:

$$\vec{F}_{ER} = \gamma \cdot \frac{M_E * m_R}{r_{ER}^2}$$

Gravitationskraft des Mondes:

$$\vec{F}_{MR} = \gamma \cdot \frac{M_M * m_R}{r_{MR}^2}$$

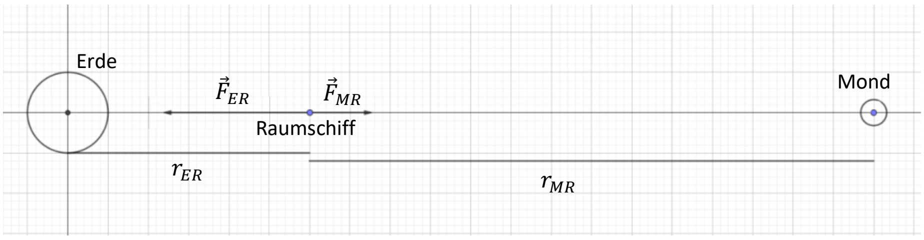


Abb. 1: Skizze des Aufbaus mit Beschriftungen der Kräfte und Abstände

Um an die Entfernung des Raumschiffes zur Erde zu gelangen muss, da sich die Erde bei den Koordinaten $P_E(0|0)$ befindet, lediglich der Punkt des Raumschiffes auf der x-Achse als Wert für die Entfernung angenommen werden. Für die des Mondes hingegen wird die Position dessen von der des Raumschiffes subtrahiert.

$$r_{ER} = P_R$$

$$r_{MR} = P_R - P_M$$

Kennt man nun die Werte beider Gravitationskräfte, kann die resultierende Kraft $\vec{F}_{RES}$ bestimmt werden, indem man beide Werte addiert, woraus anschließend auch die resultierende Beschleunigung auf das Raumschiff berechnet werden kann.

$$\vec{F}_{RES} = \vec{F}_{ER} + \vec{F}_{MR}$$

$$a_{RES} = \frac{\vec{F}_{RES}}{m_R}$$

$$[a_{RES}] = \frac{N}{kg}$$

$$[a_{RES}] = \frac{kg \cdot m}{kg \cdot s^2}$$

Die Flugbahn des Raumschiffs besteht prinzipiell aus zwei Abschnitten. Im ersten Abschnitt ist die Gravitationskraft der Erde größer als die des Mondes, weshalb auf die Raumkapsel eine Kraft entgegen ihrer Bewegungsrichtung wirkt und somit auch eine negative Beschleunigung auf sie einwirkt. Wurde eine ausreichend hohe Startgeschwindigkeit v_0 gewählt, so erreicht das Raumschiff einen Punkt, an welchem die Kraft der Erde, der des Mondes gleicht und auf dieses somit keine resultierende Beschleunigung wirkt. Dieser Punkt wird auch als innerer oder erster Lagrange Punkt bezeichnet. Ab dieser Stelle ist die Gravitationskraft des Mondes nun stärker als die der Erde, weshalb die Raumkapsel jetzt nicht mehr abgebremst, sondern beschleunigt wird, bis sie letztendlich auf die Oberfläche des Mondes trifft.

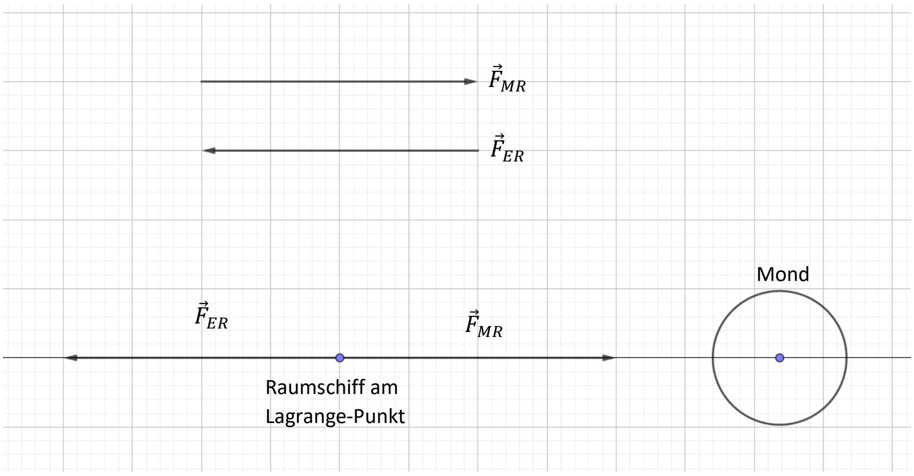


Abb. 2: Skizze des Lagrange-Punktes mit Veranschaulichung des Kräftegleichnis

1.3. Variablen, Konstanten und Werte

Kommentiert [TH2]: Eventuell komplett unter Umsetzung verschieben…

In der folgenden Tabelle sind alle verwendeten Variablen, Naturkonstanten und Anfangswerte jeweils mit ihrer Schreibweise im Text und Programmcode und ihrer Definition aufgelistet.

Anfangswerte

Bezeichnung im Text	Bezeichnung im Programmcode	Wert	Beschreibung
v_0	v[0]	Wird durch den Nutzer eingegeben	Startgeschwindigkeit des Raumschiffes
t_0	t[0]	$0s$	Startpunkt der Variable für die Zeit
P_{R0}	PR[0]	$3.844 \cdot 10^8 m$ ($\triangleq r_E$)	Startpunkt des Raumschiffes; entspricht dem Erdradius r_E

Naturkonstanten und weitere feste Werte

Bezeichnung im Text	Bezeichnung im Programmcode	Wert	Beschreibung
γ	G	$6{,}67408 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg * s^2}$	Gravitationskonstante
m_R	mR	$5000\ kg$	Masse des Raumschiffs
m_M	mM	$7{,}349 \cdot\ 10^{22}\ kg$	Masse des Mondes
m_E	mE	$5{,}972 \cdot 10^{24}\ kg$	Masse der Erde
P_E	PE	0	Mitelpunkt der Erde
P_M	PM		Mittelpunkt des Mondes
r_E	rE	$6371 \cdot 10^3 m$	Erdradius
r_M	rM	$1737 \cdot 10^3 m$	Mondradius
r_{EM}	rEM	$3844 \cdot 10^5$	Entfernung zwischen Erde und Mond

Variablen

Bezeichnung im Text	Bezeichnung im Programmcode	Beschreibung
i	i	Fortlaufende (Hilfs)-Variable, erhöht sich um 1 bei jedem Durchgang
t	t[i]	Zeitpunkt bei Durchgang i
P_R	PR[i]	Punkt des Raumschiffes
$\vec{F}_{ER}$	FE	Gravitationskraft der Erde
$\vec{F}_{MR}$	FM	Gravitationskraft des Mondes
$\vec{F}_{RES}$	FRES	Resultierende Kraft
Bezeichnung im Text	**Bezeichnung im Programmcode**	**Beschreibung**
$\vec{a}_E$	aE	In Richtung der Erde wirkende Beschleunigung
$\vec{a}_M$	aM	In Richtung des Mondes wirkende Beschleunigung
$\vec{a}_{Res}$	aR	Resultierende Beschleunigung
v	v[i]	Geschwindigkeit des Raumschiffs

1.4 Ziel

Das Ziel dieser Arbeit ist es die grundlegenden physikalischen Vorgänge während eines Mondfluges und die dabei wirkenden Kräfte zu veranschaulichen. Dies erfolgt in Form einer numerischen Simulation in der Programmiersprache Python mithilfe des Runge-Kutta-Verfahren der vierten Ordnung (näheres unter **ABSCHNITT/SEITE EINFÜGEN**), bei welcher der Nutzer die Startgeschwindigkeit des Raumschiffes v_0 eingeben kann und auf dieser basierend eine Voraussage über die Flugbahn getroffen wird. Die berechneten Daten werden in einer tabellenförmig aufgebauten Textdatei („Ausgabe.dat“, wird im selben Verzeichnis wie das Programm erstellt) ausgegeben. Diese „Tabelle“ besteht aus sieben Spalten, welche jeweils durch ein Tabulator-Zeichen voneinander getrennt sind und in der hier dargestellten Reihenfolge gespeichert werden:

Text	t	P_R	v	$\vec{a}_{Res}$	$\vec{F}_{RES}$	$\vec{F}_{ER}$	$\vec{F}_{MR}$
Programm	t[i]	PR[i]	v[i]	aR	FRES	FE	FM

Diese Datei kann nun mit einem beliebigen Programm zur Visualisierung von Blockdaten, wie zum Beispiel qtGrace (Windows) oder Grace (Linux) ausgelesen und in beliebigen Zusammenhängen und Abhängigkeiten dargestellt werden.

2. Methoden

2.1 Zusätzliche Variablen

Um die notwendigen Berechnungen des Programms realisieren und erläutern zu können müssen zu Beginn einige weitere Variablen eingeführt werden.

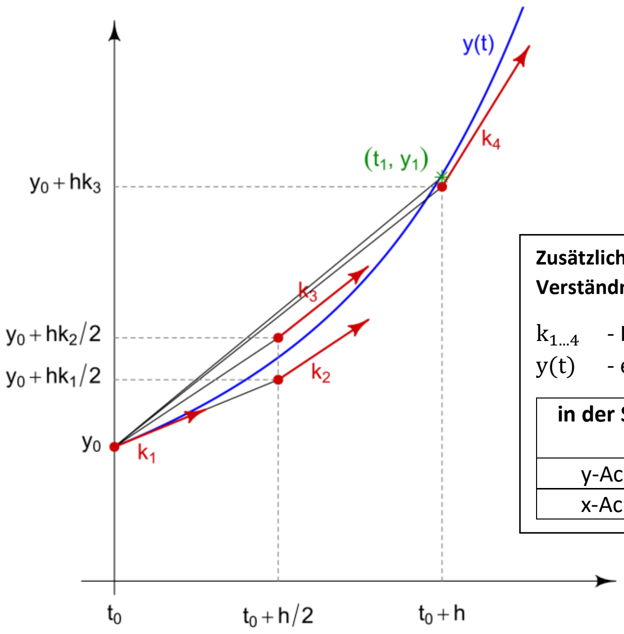
Bezeichnung im Text	Bezeichnung im Programmcode	Wert	Beschreibung
-	n	1000000	Im Programm festgelegte Anzahl an maximalen Durchgängen
i	i	-	Fortlaufende (Hilfs)-Variable, erhöht sich um 1 bei jedem Durchgang
h	h	1	Schrittweite

2.2 Numerische Umsetzung

Wie bereits im Voraus beschrieben wirken auf das Raumschiff zeitgleich von Mond und Erde die Gravitationskräfte ein. Es handelt sich hierbei um ein Anfangswertproblem, da die einzige wirklich exakt bekannte Position des Raumschiffes dessen Startpunkt ist. Die darauffolgenden Positionen können also nur näherungsweise über die wirkende Beschleunigung vorhergesagt werden. Um diese Berechnung so genau wie möglich zu gestalten, wird hier das Runge-Kutta-Verfahren der vierten Ordnung (auch „klassisches Runge-Kutta-Verfahren“ oder „RK4“) zur Hilfe genommen.

Dieses Verfahren unterscheidet sich von anderen Verfahren, wie zum Beispiel dem Euler-Verfahren, bei welchem die Steigung am Anfang eines Intervalls bestimmt, mithilfe dessen am Ende dieses Intervalls ein neuer Punkt zur Anstiegsberechnung ermittelt werden kann. Das RK4 hingegen lässt sich in vier Teilschritte unterteilen. Zuerst wird wie bei Euler der Anstieg k_1 an der Stelle 0 (t_0) des Intervalls berechnet.

Anschließend wird eine halbe Schrittweite ($\frac{h}{2}$) in y-Richtung weitergegangen und an dem Schnittpunkt von k_1 mit $\mathrm{t}_0 + \frac{h}{2}$ erneut der Anstieg (k_2) berechnet, welcher nun wieder an y_0 angelegt wird. Darauffolgend wird wie bereits für k_2 die Steigung k_3 berechnet, welche ebenfalls bei t_0 angelegt wird. Zuletzt wird der Schnittpunkt von k_3 mit $t_0 + h$ berechnet, welcher wiederum den Startpunkt für den sich anschließenden, nächsten Intervall darstellt.



Zusätzliche Erklärungen zum Verständnis

$\mathrm{k}_{1\ldots4}$ - Hilfssteigungen
$\mathrm{y(t)}$ - echte Lösung

in der Skizze	entspricht hier
y-Achse	P_R
x-Achse	t

Abb. 3: RK4 mit den vier Hilfssteigungen [3]

Auf den Mondflug bezogen wird die Position des Raumschiffes im RK4 berechnet, wobei die Differentialgleichung hierfür sowohl von der Geschwindigkeit v, als auch von deren Ableitung, der Beschleunigung $\vec{a}_{Res}$ abhängig ist. Die Formeln für die einzelnen Hilfssteigungen ($k_{1\ldots4}$ für $P_R[i]$ und $l_{1\ldots4}$ für $v[i]$) lauten wie folgt, wobei $v[i-1]$ für die zuletzt berechnete Geschwindigkeit steht:

$k_1 = v[i-1]$
$l_1 = \vec{a}_{Res}$
$k_2 = v[i-1] + \frac{h}{2} \cdot l_1$
$l_2 = \vec{a}_{Res}$

$k_3 = v[i-1] + \frac{h}{2} \cdot l_2$
$l_3 = \vec{a}_{Res}$
$k_4 = v[i-1] + \frac{h}{2} \cdot l_3$
$l_4 = \vec{a}_{Res}$

Aus den zuvor errechneten Hilfssteigungen kann nun die nächste Näherung für die Position des Raumschiffes errechnet werden, wobei die Hilfssteigungen unterschiedliche Wichtungen haben. $P_R[i-1]$ steht hierbei für die zuletzt berechnete und $P_R[i]$ für die in diesem Durchgang neu errechnete Position des Raumschiffes.

$$P_R[i] = P_R[i-1] + \frac{h}{6} \cdot (k_1 + 2 \cdot k_2 + 2 \cdot k_3 + k_4)$$

Selbiges wird im Anschluss für die Geschwindigkeit getan um an $v[i]$ zu gelangen:

$$\mathrm{v}[i] = \mathrm{v}[i-1] + \frac{h}{6} \cdot (\mathrm{l}_1 + 2 \cdot \mathrm{l}_2 + 2 \cdot \mathrm{l}_3 + \mathrm{l}_4)$$

2.3 Implementierung

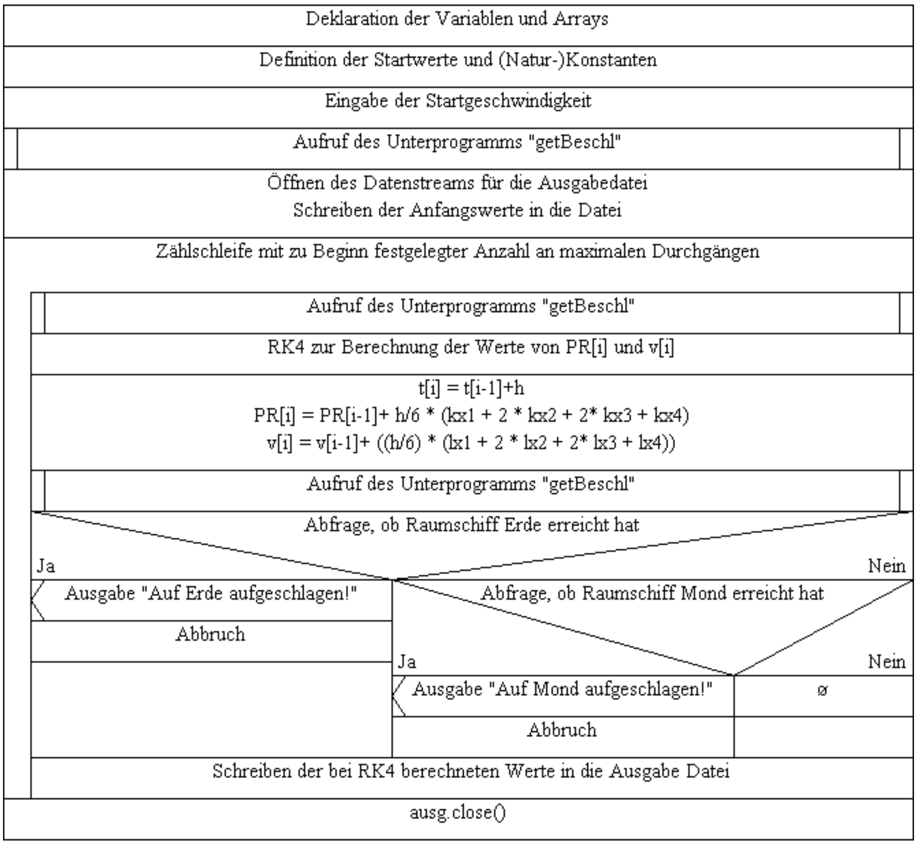


Abb. 4: Struktogramm des Hauptprogramms

Festlegung der Naturkonstanten
Berechnung der Gravitationskraft der Erde
Berechnung der Gravitationskraft des Mondes
Berechnung der resultierenden Kraft
Berechnung der resultierenden Beschleunigung
Rückgabe der Beschleunigung und allen berechneten Kräften

Abb. 5: Struktogramm des Unterprogramms „getBeschl"

Der Ablauf des

3. Auswertung

3.1 Allgemein

4. Zusammenfassung und Ausblick

Quellen

[1] Langzeitaufnahme eines SpaceX Falcon 9 Starts, „LONG EXPOSURE OF A FALCON 9 LAUNCH”

https://www.spacex.com/media-gallery/detail/149416/9246
(13.01.2019, 13:32 Uhr)

[2] Neil Alden Armstrong, als er als erster Mensch 1969 den Mond betrat (Übersetzt)

[3] „Das klassische Runge-Kutta-Verfahren mittelt in jedem Schritt vier Hilfssteigungen (rot)“, HilberTraum (CC BY-SA 4.0):
https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/7/7e/Runge-Kutta_slopes.svg
(05.02.2019, 16:45 Uhr)

TODO

- Quellen als Tabelle???
- Formelzeichen überprüfen ob alle Kursiv sind!
- Fertiges Programm mit ausdrucken/dranhängen