

Numerische Simulation eines Mondflugs



[1]

Besondere Lernleistung

von

Toni Happe

Gymnasium Martineum Halberstadt

Februar 2018 – Februar 2019

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung
 - 1.1. Hinführung
 - 1.2. Physikalische Grundlagen
 - 1.3. Variablen, Konstanten und Werte
 - 1.4. Ziel der Arbeit
2. Methoden
 - 2.1. Numerische Umsetzung
 - 2.2. Implementierung
3. Ergebnisse
4. Zusammenfassung und Ausblick

Bildverzeichnis

Abb. 1	Skizze des Aufbaus vom Erde-Mond-System mit Beschriftungen der Kräfte und Abstände
Abb. 2	Skizze des Lagrange-Punktes mit Veranschaulichung des Kräftegleichnis
Abb. 3	Runge-Kutta-Verfahren der 4. Ordnung mit den vier Hilfssteigungen [3]
Abb. 4	Struktogramm des Hauptprogramms
Abb. 5	Struktogramm des Unterprogramms „getBeschl“
Abb. 6	Position des Raumschiffes in Abhängigkeit von der Zeit
Abb. 7	Geschwindigkeit des Raumschiffes in Abhängigkeit von der Zeit
Abb. 8	Resultierende Beschleunigung in Abhängigkeit von der Zeit
Abb. 9	Geschwindigkeit des Raumschiffes in Abhängigkeit von der Position
Abb. 10	Alle wirkenden Kräfte in Abhängigkeit von der Zeit bei $v_0 = 11076 \frac{m}{s}$ (Vergrößerter Ausschnitt)

Abbildungen sind nicht maßstabsgerecht.

Numerische Simulation eines Mondfluges

1. Einleitung

1.1. Hinführung

Seit dem Beginn der Menschheit zieht der Mond die Aufmerksamkeit Vieler auf sich. Am Anfang wurde er noch als ein religiöses Objekt betrachtet, doch sehr bald kam auch der Wunsch auf, einen Fuß auf ihn zu setzen und damit „ein[en] riesige[n] Sprung für die Menschheit“ [2] zu machen.

Als gegen Ende der 1940er Jahre der Kalte Krieg ausbrach, wurde immer mehr dafür gegeben, das eigene Land als überlegen darzustellen, so unter anderem auch im „Wettlauf ins All.“ Im Oktober 1957 entschied diesen jedoch die Sowjetunion mit dem ersten von Menschen geschaffenen Satelliten „Sputnik 1“, dem ersten Lebewesen mit Hündin Laika, als auch dem ersten Menschen im All (Juri Alexejewitsch Gagarin) für sich und der „Wettlauf ins All“ wurde zu einem Wettlauf zum Mond. Nachdem die Vereinigten Staaten die vorherigen „Disziplinen“ dieses Wettkampfes nicht für sich entscheiden konnten wurde der Druck auf die NASA, als erstes Land einen Menschen zum Mond zu fliegen, immer größer. Am 21. Juli 1969 um 3:56 Uhr mitteleuropäischer Zeit war es schließlich soweit. Die Amerikaner Neil Armstrong und Buzz Aldrin (geboren Edwin Eugene Aldrin, Jr.) setzten ihren Fuß auf den Mond und gewannen damit den Wettlauf zum Mond für die Vereinigten Staaten.

Doch wie war dieser Mondflug möglich und was musste hierfür berechnet werden? Mit diesen Fragen wird sich, in vereinfachter Form, als eindimensionaler Flug von der Erde zum Mond, in dieser Arbeit auseinandergesetzt.

1.2 Physikalische Grundlagen

Möchte man ein Raumschiff von der Erde starten, so wirken während des Fluges hauptsächlich zwei Kräfte auf dieses ein. Die Gravitationskraft der Erde und die des Mondes, wobei beide Kräfte von der momentanen Position des Raumschiffes, beziehungsweise dem Abstand zu den jeweiligen Körpern, als auch von den Massen des Raumschiffes und der Erde oder des Mondes abhängig sind. Hierfür wird die newtonsche Gravitationskraft verwendet, dessen Formel wie folgt lautet:

(die Bedeutung aller Variablen sind unter 1.3 Variablen, Konstanten und Werte in tabellarischer Form aufgelistet)

$$\vec{F}_G = \gamma \cdot \frac{M_1 \cdot m_2}{r^2} \qquad [\vec{F}_G] = \frac{m^3}{kg \cdot s^2} \cdot \frac{kg \cdot kg}{m^2}$$

$$[\vec{F}_G] = \frac{m}{s^2} \cdot kg$$

$$[\vec{F}_G] = N$$

Nun werden jeweils die Werte für Erde und Mond eingesetzt und man erhält folgende Formeln, mit selbigen Einheiten wie bei der allgemeinen Formel:

Gravitationskraft der Erde:

$$\vec{F}_{ER} = \gamma \cdot \frac{M_E \cdot m_R}{r_{ER}^2}$$

Gravitationskraft des Mondes:

$$\vec{F}_{MR} = \gamma \cdot \frac{M_M \cdot m_R}{r_{MR}^2}$$

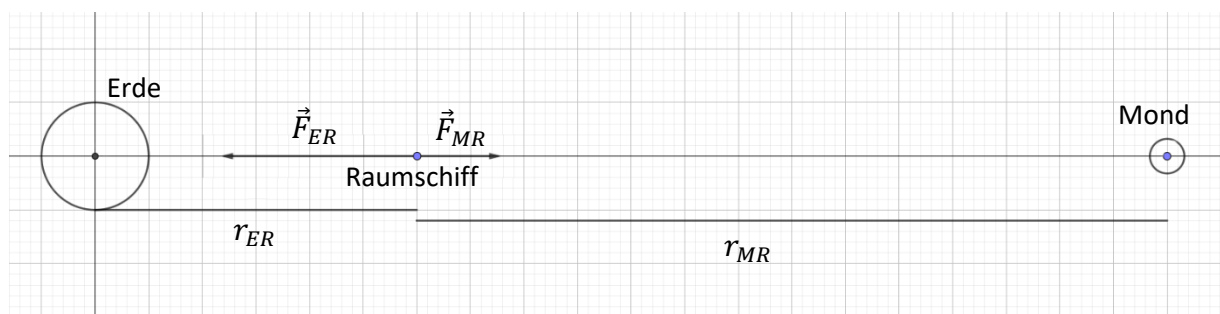


Abb. 1: Skizze des Aufbaus vom Erde-Mond-System mit Beschriftungen der Kräfte und Abstände

Um im eindimensionalen Fall die Entfernung des Raumschiffes zur Erde zu ermitteln muss, da sich die Erde bei den Koordinaten $P_E(0|0)$ befindet, lediglich der Punkt des Raumschiffes auf der x-Achse als Wert für die Entfernung angenommen werden. Für die des Mondes hingegen wird die Position dessen von der des Raumschiffes subtrahiert.

$$r_{ER} = P_R$$

$$r_{MR} = P_R - P_M$$

Kennt man nun die Werte beider Gravitationskräfte, kann die resultierende Kraft \vec{F}_{RES} bestimmt werden, indem man beide Werte addiert, woraus anschließend auch die resultierende Beschleunigung auf das Raumschiff berechnet werden kann.

$$\vec{F}_{RES} = \vec{F}_{ER} + \vec{F}_{MR}$$

$$a_{RES} = \frac{\vec{F}_{RES}}{m_R}$$

$$[a_{RES}] = \frac{N}{kg}$$

$$[a_{RES}] = \frac{kg \cdot m}{kg \cdot s^2}$$

Doch um einen Flug zu ermöglichen muss das Raumschiff erst beschleunigt werden. In der Raumfahrt sind mehrstufige Raketen die Regel, da bei ihnen unnötiger Ballast abgeworfen wird und somit eine höhere Endgeschwindigkeit erreicht werden kann. Heute sind dreistufige Raketen am häufigsten zu finden. Auch wenn die Beschleunigungsphase in dieser Arbeit vernachlässigt wird, ist es doch wichtig zu verdeutlichen, woher die Geschwindigkeit stammt. Um die Geschwindigkeit zu gelangen kann Ziolkowskis Raketengleichung verwendet werden. Hierbei wird für jede Stufe einzelne Teilgeschwindigkeiten berechnet und anschließend addiert. Das Ergebnis der Ziolkowskischen Raketengleichung ist Abhängig von der Geschwindigkeit der Brenngase v_t , der Anfangsmasse m_0 und der Endmasse m_E aber auch von der Gravitationsbeschleunigung g und der Zeit über welche diese wirkt t .

$$v_{End} = v_t \cdot \ln\left(\frac{m_0}{m_E}\right) - g * t$$

Die Flugbahn des Raumschiffs besteht prinzipiell aus zwei Abschnitten. Im ersten Abschnitt ist die Gravitationskraft der Erde größer als die des Mondes, weshalb auf die Raumkapsel eine Kraft entgegen ihrer Bewegungsrichtung wirkt und somit auch eine negative Beschleunigung die Flugbahn beeinflusst. Damit ein etwas dem Gravitationsfeld der Erde entkommen kann, muss seine Bewegung mindestens mit der zweiten kosmischen Geschwindigkeit, der Fluchtgeschwindigkeit von der Erde, erfolgen. Ist v_0 nun also hoch genug gewählt worden, so erreicht das Raumschiff einen Punkt, an welchem die Kraft der Erde, der des Mondes gleicht und somit keine resultierende Beschleunigung vorhanden ist. Dieser Punkt wird auch als innerer oder erster Lagrange Punkt (L_1) bezeichnet und liegt bei rund 326.000 km Entfernung zum Erdmittelpunkt. Ab dieser Stelle ist die Gravitationskraft des Mondes nun stärker als die der Erde, weshalb die Raumkapsel jetzt nicht mehr abgebremst, sondern beschleunigt wird, bis sie letztendlich auf die Oberfläche des Mondes trifft.

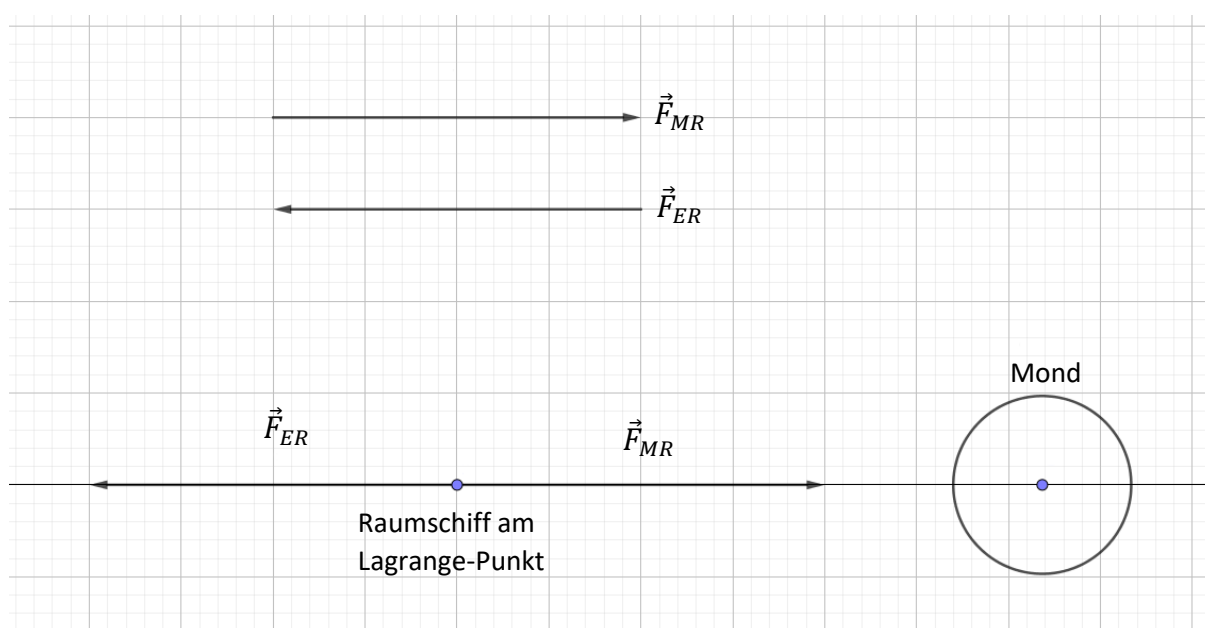


Abb. 2: Skizze des Lagrange-Punktes mit Veranschaulichung des Kräftegleichnis

1.3. Variablen, Konstanten und Werte

In der folgenden Tabelle sind alle verwendeten Variablen, Naturkonstanten und Anfangswerte jeweils mit ihrer Schreibweise im Text und Programmcode und ihrer Definition aufgelistet.

Anfangswerte

Bezeichnung im Text	Bezeichnung im Programmcode	Wert	Beschreibung
v_0	v[0]	Wird durch den Nutzer eingegeben	Startgeschwindigkeit des Raumschiffes
t_0	t[0]	0s	Startpunkt der Variable für die Zeit
P_{R0}	PR[0]	$6371 \cdot 10^3 m$ ($\triangleq r_E$)	Startpunkt des Raumschiffes; entspricht dem Erdradius r_E

Naturkonstanten und weitere feste Werte

Bezeichnung im Text	Bezeichnung im Programmcode	Wert	Beschreibung
γ	G	$6,67408 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2}$	Gravitationskonstante
m_R	mR	5000 kg	Masse des Raumschiffs
m_M	mM	$7,349 \cdot 10^{22} kg$	Masse des Mondes
m_E	mE	$5,972 \cdot 10^{24} kg$	Masse der Erde
P_E	PE	0	Mittelpunkt der Erde
P_M	PM	$3844 \cdot 10^5 m$	Mittelpunkt des Mondes
r_E	rE	$6371 \cdot 10^3 m$	Erdradius
r_M	rM	$1737 \cdot 10^3 m$	Mondradius
r_{EM}	rEM	$3844 \cdot 10^5 m$	Entfernung zwischen Erde und Mond

Variablen

Bezeichnung im Text	Bezeichnung im Programmcode	Beschreibung
i	i	Fortlaufende (Hilfs)-Variable, erhöht sich um 1 bei jedem Durchgang
t	t[i]	Zeitpunkt bei Durchgang i
P_R	PR[i]	Ortskoordinate des Raumschiffes
\vec{F}_{ER}	FE	Gravitationskraft der Erde
\vec{F}_{MR}	FM	Gravitationskraft des Mondes
\vec{F}_{RES}	FRES	Resultierende Kraft
\vec{a}_E	aE	In Richtung der Erde wirkende Beschleunigung
\vec{a}_M	aM	In Richtung des Mondes wirkende Beschleunigung
\vec{a}_{Res}	aR	Resultierende Beschleunigung
v	v[i]	Geschwindigkeit des Raumschiffs

1.4 Ziel der Arbeit

Das Ziel dieser Arbeit ist es die grundlegenden physikalischen Vorgänge während eines Mondfluges und die dabei wirkenden Kräfte zu veranschaulichen. Dies erfolgt in Form einer numerischen Simulation in der Programmiersprache Python mithilfe des Runge-Kutta-Verfahren der vierten Ordnung (näheres unter 2.2 *Numerische Umsetzung*), bei welcher der Nutzer die Startgeschwindigkeit des Raumschiffes v_0 eingeben kann und auf dieser basierend eine Voraussage über die Flugbahn getroffen wird. Die berechneten Daten werden in einer tabellenförmig aufgebauten Textdatei („Ausgabe.dat“, wird im selben Verzeichnis wie das Programm erstellt) ausgegeben. Diese „Tabelle“ besteht aus sieben Spalten, welche jeweils durch ein Tabulator-Zeichen voneinander getrennt sind und in der hier dargestellten Reihenfolge gespeichert werden:

Text	t	P_R	v	\vec{a}_{Res}	\vec{F}_{RES}	\vec{F}_{ER}	\vec{F}_{MR}
Programm	t[i]	PR[i]	v[i]	aR	FRES	FE	FM

Diese Datei kann nun mit einem beliebigen Programm zur Visualisierung von Blockdaten, wie zum Beispiel qtGrace (Windows) oder Grace (Linux) ausgelesen und in verschiedenen Zusammenhängen und Abhängigkeiten dargestellt werden.

2. Methoden

2.1 Numerische Umsetzung

Wie bereits im Voraus beschrieben wirken auf das Raumschiff zeitgleich die Gravitationskräfte von Mond und Erde ein. Die Flugbahn des Raumschiffes wird durch die Differentialgleichung zweiter Ordnung $F_{RES} = m_R \cdot \ddot{x}$ beschrieben und benötigt von daher zwei Anfangswerte. Diese Differentialgleichung zweiter Ordnung kann jedoch vom Programm nicht ohne weiteres gelöst werden, weshalb sie in zwei gekoppelte Differentialgleichungen erster Ordnung umgewandelt wird, welche der Computer nun berechnen kann.

$$x(t + h) = x(t) + h \cdot v(t)$$

$$v(t + h) = v(t) + a_{Res}(t) \cdot h$$

Es handelt sich hierbei also, wie bereits erwähnt um ein Anfangswertproblem, da die einzige wirklich exakten Werte die für den Startpunkt sind. Die darauffolgenden Positionen können also nur numerisch berechnet werden. Um diese Berechnung so genau wie möglich zu gestalten, wird hier das Runge-Kutta-Verfahren der vierten Ordnung (auch „klassisches Runge-Kutta-Verfahren“ oder „RK4“) zur Hilfe genommen. Hierfür müssen jedoch einige Rahmenbedingungen festgelegt werden, wie zum Beispiel die Schrittweite $h = 1$ und die maximale Anzahl an möglichen Schritten von einer Million.

Dieses Verfahren unterscheidet sich von anderen Verfahren, wie zum Beispiel dem Euler-Verfahren, bei welchem die Steigung am Anfang eines Intervalls bestimmt, mithilfe dessen am Ende dieses Intervalls ein neuer Punkt zur Anstiegsberechnung ermittelt werden kann. Das RK4 hingegen lässt sich in vier Teilschritte unterteilen. Zuerst wird wie bei Euler der Anstieg k_1 an der Stelle 0 (t_0) des Intervalls berechnet. Anschließend wird eine halbe Schrittweite ($\frac{h}{2}$) in y -Richtung weitergegangen und an dem Schnittpunkt von k_1 mit $t_0 + \frac{h}{2}$ erneut der Anstieg (k_2) berechnet, welcher nun wieder an y_0 angelegt wird. Darauf folgend wird wie bereits für k_2 die Steigung k_3 berechnet, welche ebenfalls bei t_0 angelegt wird. Zuletzt wird der Schnittpunkt von k_3 mit $t_0 + h$ berechnet, welcher wiederum den Startpunkt für das sich anschließende, nächste Intervall darstellt.

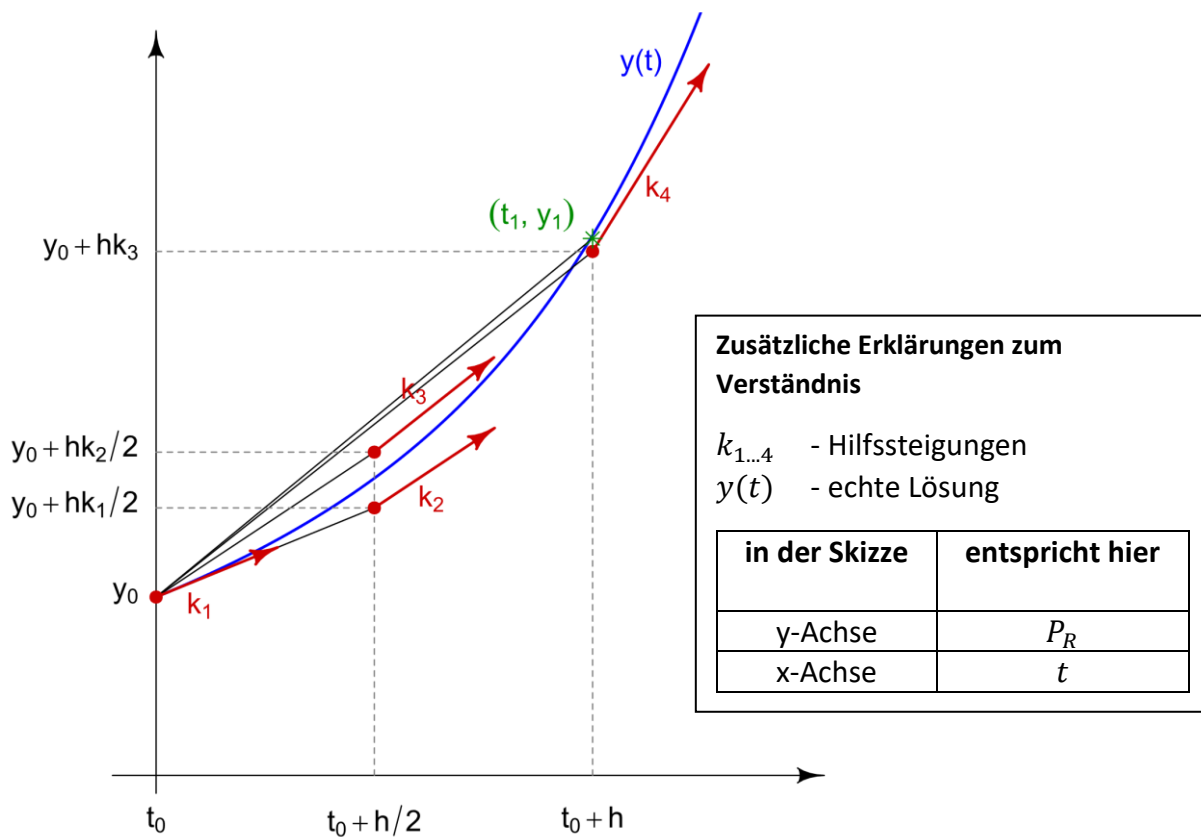


Abb. 3: Runge-Kutta-Verfahren der 4. Ordnung mit den vier Hilfssteigungen [3]

Auf den Mondflug bezogen wird die Position des Raumschiffes im RK4 berechnet, wobei die Differentialgleichung hierfür sowohl von der Geschwindigkeit v , als auch von deren Ableitung, der Beschleunigung \vec{a}_{Res} abhängig ist. Die Formeln für die einzelnen Hilfssteigungen ($k_{1...4}$ für $P_R[i]$ und $l_{1...4}$ für $v[i]$) lauten wie folgt, wobei $v[i-1]$ für die zuletzt berechnete Geschwindigkeit steht:

$$k_1 = v[i-1]$$

$$l_1 = \vec{a}_{Res}$$

$$k_2 = v[i-1] + \frac{h}{2} \cdot l_1$$

$$l_2 = \vec{a}_{Res}$$

$$k_3 = v[i-1] + \frac{h}{2} \cdot l_2$$

$$l_3 = \vec{a}_{Res}$$

$$k_4 = v[i-1] + \frac{h}{2} \cdot l_3$$

$$l_4 = \vec{a}_{Res}$$

Aus den zuvor errechneten Hilfssteigungen kann nun die nächste Näherung für die Position des Raumschiffes errechnet werden. Hierbei haben die Hilfssteigungen unterschiedliche Wichtungen. $P_R[i - 1]$ steht hierbei für die zuletzt berechnete und $P_R[i]$ für die in diesem Durchgang neu errechnete Position des Raumschiffes.

$$P_R[i] = P_R[i - 1] + \frac{h}{6} \cdot (k_1 + 2 \cdot k_2 + 2 \cdot k_3 + k_4)$$

Selbiges wird im Anschluss für die Geschwindigkeit getan, um an $v[i]$ zu gelangen:

$$v[i] = v[i - 1] + \frac{h}{6} \cdot (l_1 + 2 \cdot l_2 + 2 \cdot l_3 + l_4)$$

2.2 Implementierung

Der Ablauf des Programms lässt sich in zwei Abschnitte unterteilen, in das Haupt- und das Unterprogramm „getBeschl“. Im Hauptprogramm werden zuerst alle Variablen, wie die Schrittweite, die Arrays für Zeit, Position und Geschwindigkeit und die Anzahl an maximalen Wiederholungen n , welche ebenfalls die Größe der Arrays (in Python gibt es keine direkten Arrays, dafür aber sogenannte Listen, die denselben Zweck erfüllen) definieren. Anschließend werden Naturkonstanten, wie die Radien von Mond und Erde und die Entfernung beider voneinander sowie die Startwerte deklariert. Die Startgeschwindigkeit kann frei vom Nutzer gewählt werden und wird in Metern pro Sekunde angegeben.

Wurde das Hauptprogramm bis zu diesem Punkt ausgeführt wird „getBeschl“ zum ersten Mal aufgerufen. Hierbei wird lediglich die Position des Raumschiffes zur Zeit 0 übertragen. Im Unterprogramm werden weitere Konstanten deklariert, unter anderem die Massen der Körper sowie die Gravitationskonstante. Die ersten beiden Berechnungen, die im Unterprogramm ablaufen sind die der Gravitationskräfte von Erde und Mond, aus welchen im Anschluss die Resultierende Kraft \vec{F}_{RES} errechnet wird. Teilt man diese nun durch die Masse des Raumschiffes erhält man die resultierende Beschleunigung \vec{a}_{RES} , welche zusammen mit allen berechneten Kräften zurückgegeben wird.

Zurück im Hauptprogramm angekommen wird nun die Ausgabedatei „Ausgabe.dat“ erstellt (falls bereits eine Datei mit diesem Namen vorhanden war wird diese überschrieben beziehungsweise gelöscht) in welche die Werte des nullten Durchgangs geschrieben werden.

Gefolgt wird dies von einer Zählschleife, welche n -mal ausgeführt wird und den Zähler i jeweils um Eins erhöht. In dieser Schleife wird erneut „getBeschl“ ausgeführt, wobei dieses Mal $P_R[i - 1]$ in das Programm übergeben wird. Anschließend wird das Runge-Kutta-Verfahren wie unter 2.2 *Numerische Umsetzung* beschrieben durchgeführt, wobei letztendlich die neuen Werte für Position und Geschwindigkeit am Ende des Intervalls berechnet und die Zeit t um h weitergesetzt werden. Sind nun alle Berechnungen abgeschlossen wird getestet, ob das Raumschiff inzwischen die Oberfläche des Mondes erreicht hat, beziehungsweise, ob die Geschwindigkeit nicht ausreichend war, sodass das Raumschiff zurück auf die Erdoberfläche gestürzt ist. Ist eins der beiden der Fall, so wird eine Meldung ausgegeben und das Programm unterbrochen. Wird das Programm jedoch nicht unterbrochen werden die neu berechneten Werte ebenfalls in die Datei geschrieben.

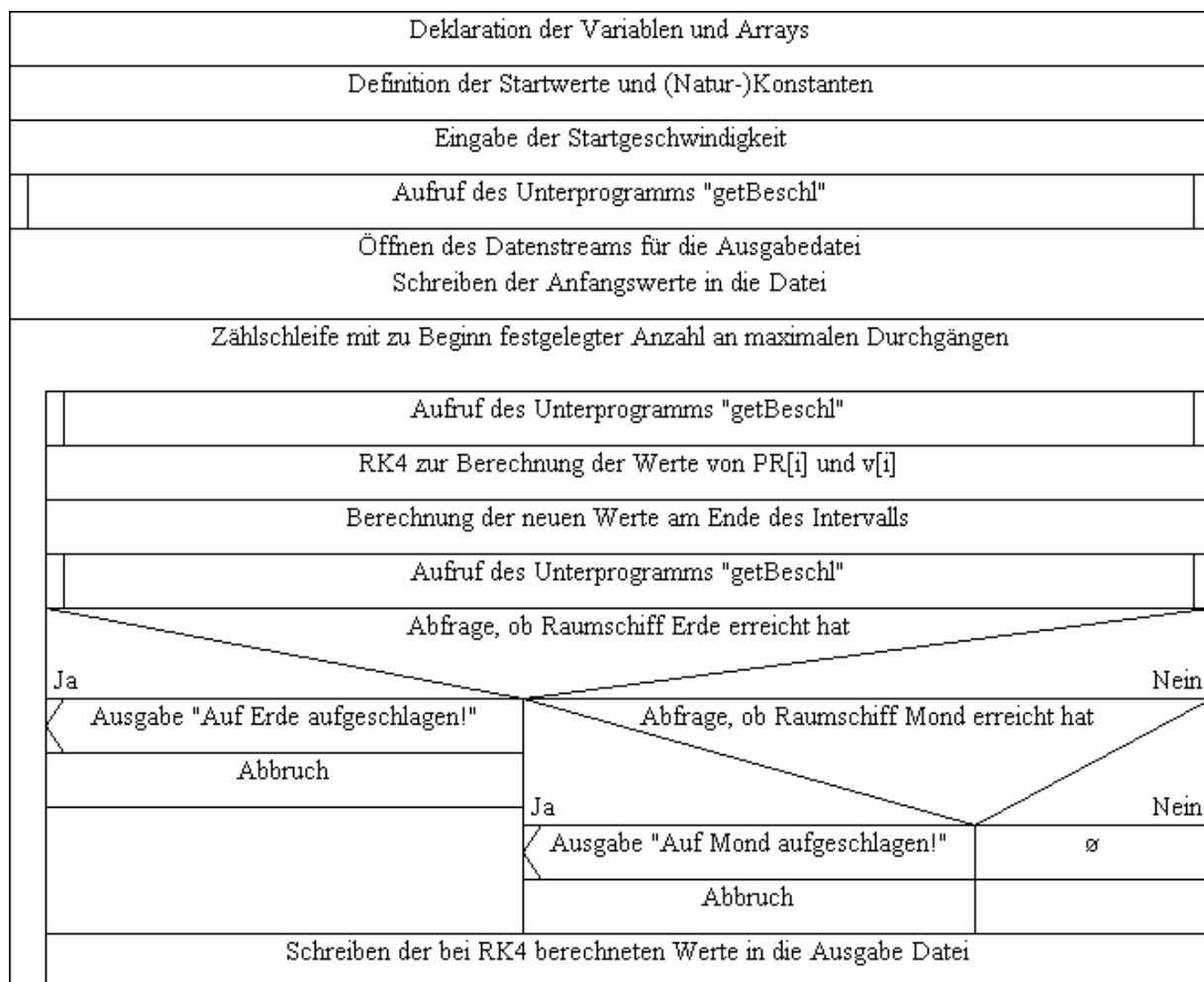


Abb. 4: Struktogramm des Hauptprogramms

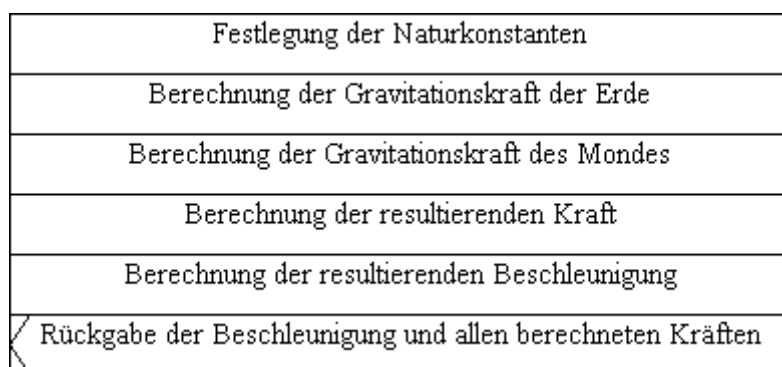


Abb. 5: Struktogramm des Unterprogramms „getBeschl“

3. Ergebnisse

Sollen die ausgegebenen Daten nun wie unter 1.4 Ziel beschrieben dargestellt werden, eröffnen sich verschiedene Möglichkeiten in welchen Abhängigkeiten die Werte zueinander dargestellt werden können. Die hierbei entstehenden Bilder können stark variieren und sind von der eingegebenen Startgeschwindigkeit v_0 abhängig. Wird diese zum Beispiel zu klein gewählt, so erreicht das Raumschiff niemals den Mond, sondern seine Bewegungsrichtung wird vor Erreichen des Lagrange Punktes L_1 umgekehrt und stürzt damit zurück auf die Erdoberfläche.

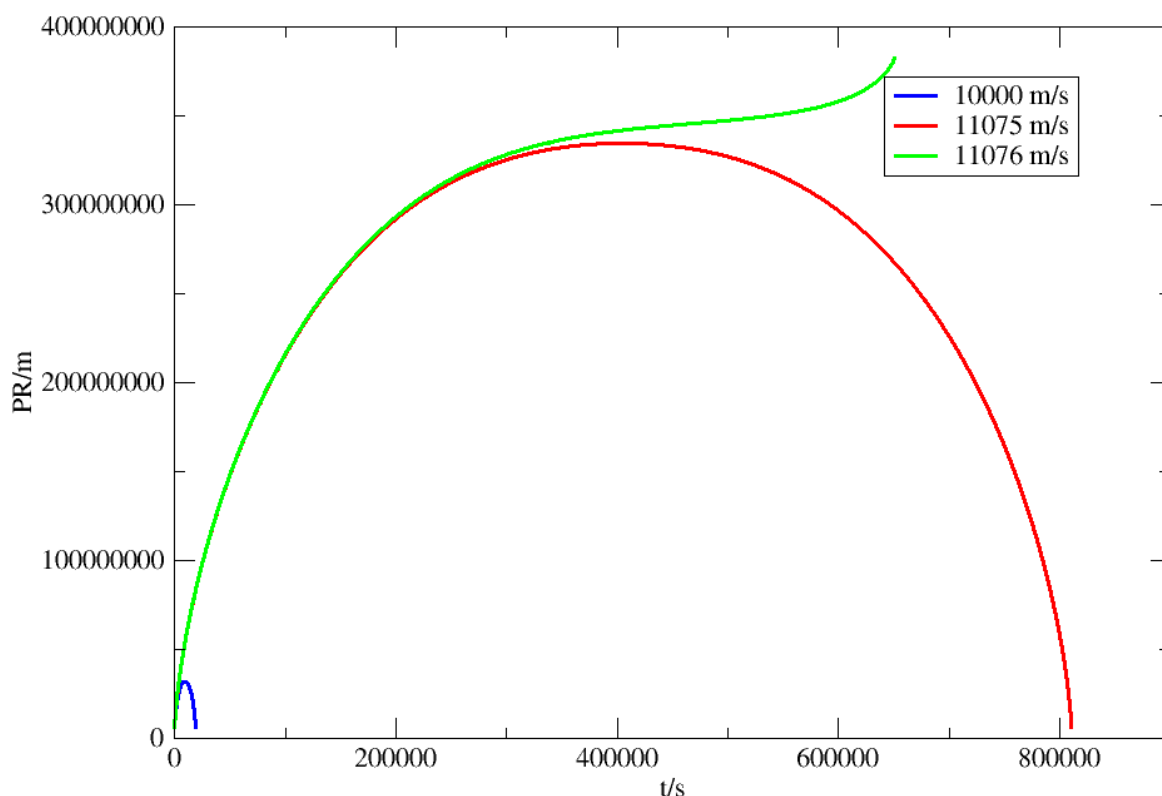


Abb. 6: Position des Raumschiffes in Abhängigkeit von der Zeit

Die einfachste, beziehungsweise geläufigste Abhängigkeit ist die des Ortes von der Zeit, welche in Abbildung 6 mit verschiedenen Startgeschwindigkeiten dargestellt ist. Wie erkennbar ist, stürzt das Raumschiff sowohl bei $10000 \frac{m}{s}$ als auch bei $11075 \frac{m}{s}$ wieder zurück auf die Erde. Startet das Raumschiff hingegen mit $11076 \frac{m}{s}$, so ähnelt die Flugbahn logischerweise der mit $11075 \frac{m}{s}$, jedoch ist nach einer bestimmten Zeit zu erkennen, dass das Raumschiff nicht weiter abgebremst wird, sondern durch die nun stärkere Gravitationskraft des Mondes angezogen und wieder beschleunigt wird. In diesem Fall hat das Raumschiff also die zweite kosmische Geschwindigkeit erreicht.

Selbiges ist auch bei den Abhängigkeiten von Geschwindigkeit zur Zeit (Abbildung 7) als auch bei der resultierenden Beschleunigung zur Zeit (Abbildung 8) zu sehen.

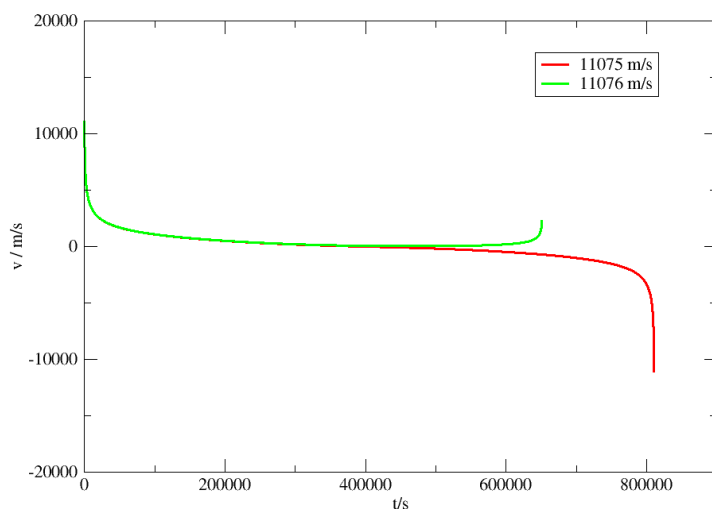


Abb. 7: Geschwindigkeit des Raumschiffes in Abhängigkeit von der Zeit

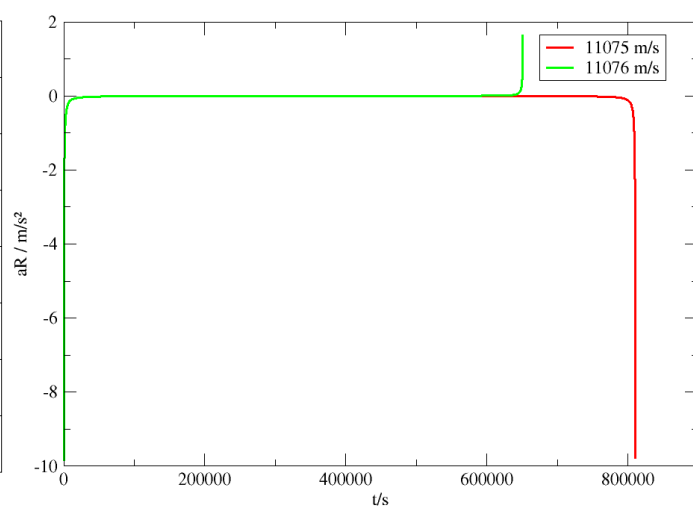


Abb. 8: Resultierende Beschleunigung in Abhängigkeit von der Zeit

Solange das Raumschiff den Lagrange Punkt nicht erreicht hat werden sowohl Geschwindigkeit, als auch Beschleunigung immer geringer, da die Erde das Raumschiff bremst, aber diese Bremswirkung gleichzeitig durch die weiterhin wachsende Entfernung des Raumschiffes von der Erde reduziert wird.

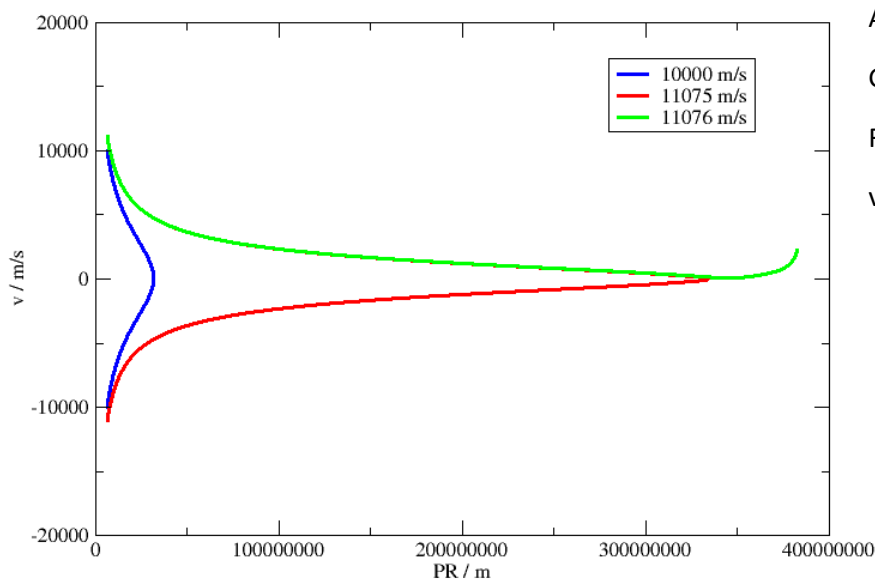


Abb. 9:
Geschwindigkeit des
Raumschiffes in Abhängigkeit
von der Position

Wird die Geschwindigkeit in Abhängigkeit zum Ort dargestellt, so fällt auf, dass wenn die Fluchtgeschwindigkeit nicht erreicht wurde der Graph achsensymmetrisch zur x-Achse ist. Ist die Geschwindigkeit jedoch größer als die Fluchtgeschwindigkeit, so ist die Kurve nicht symmetrisch und steigt zum Ende wieder an, da die Geschwindigkeit wieder zunimmt ohne ihr Vorzeichen, beziehungsweise ihre Richtung zu ändern.

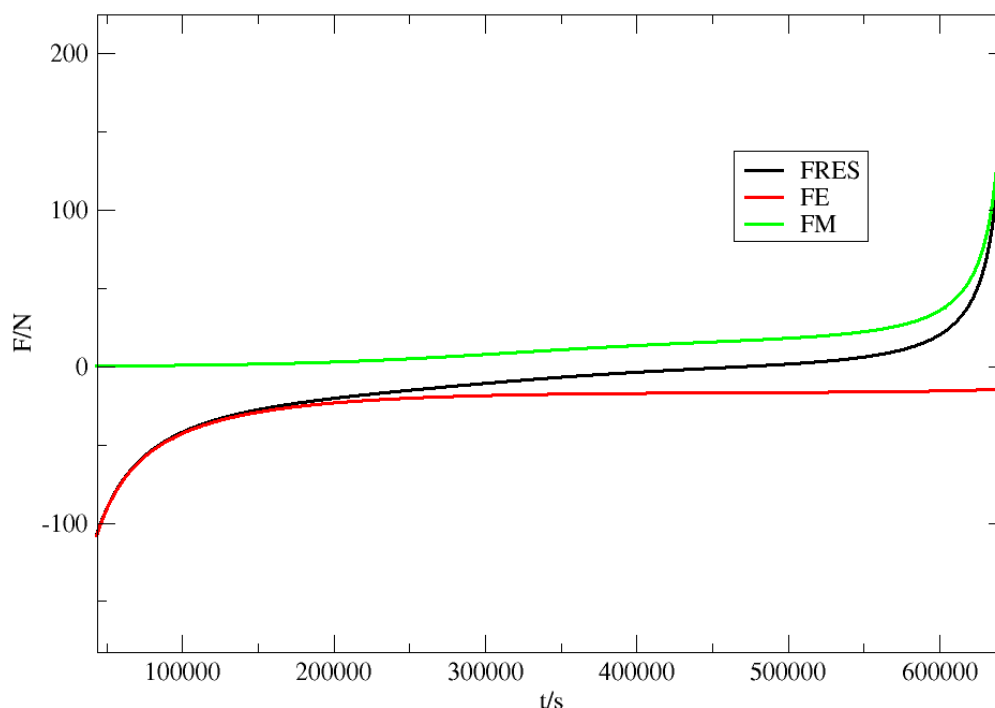


Abb. 10: Alle wirkenden Kräfte in Abhängigkeit von der Zeit bei $v_0 = 11076 \frac{m}{s}$
(Vergrößerter Ausschnitt)

Stellt man alle wirkenden Kräfte bei der Startgeschwindigkeit von $11076 \frac{m}{s}$ dar, so ist im Ausschnitt bei Abbildung 9 ersichtlich, dass die resultierende Kraft im ersten Viertel des Ausschnitts nahezu deckungsgleich mit der Gravitationskraft der Erde verläuft, da die vom Mond wirkende Kraft nahe Null ist. Im anschließenden Verlauf entfernt sich \vec{F}_{RES} jedoch immer weiter von \vec{F}_{ER} , da der Mond einen immer stärkeren Einfluss auf das Raumschiff hat. Zwischen den letzten beiden dritteln lässt sich das Kräftegleichnis, also das Erreichen des Lagrange Punktes erkennen. Die resultierende Kraft überschreitet hier die x-Achse und geht von negativen in positive Werte über. Letztendlich läuft die resultierende Kraft gegen die Anziehungskraft des Mondes, da die der Erde gegen null läuft.

In allen dargestellten Graphen lässt sich erkennen, dass das Raumschiff erst ab einer Geschwindigkeit von $11076 \frac{m}{s}$ die Oberfläche des Mondes erreichen kann. Diese Geschwindigkeit ist die bereits erwähnte zweite kosmische Geschwindigkeit, beziehungsweise Fluchtgeschwindigkeit von der Erde, bei welcher die kinetische Energie des Raumschiffes zu Beginn groß genug ist um das Gravitationsfeld der Erde zu überwinden.

4. Zusammenfassung und Ausblick

Zusammenfassend ist zu sehen, dass die Ergebnisse stark von der Anfangsgeschwindigkeit abhängig sind. Hat das Raumschiff die Fluchtgeschwindigkeit erreicht, so wird es auf die Mondoberfläche treffen. Liegt seine Anfangsgeschwindigkeit darunter, so wird das Raumschiff niemals den Mond erreichen und wieder zurück auf die Erde stürzen. Auch wenn es sich hier um Geschwindigkeiten von vielen Kilometern pro Sekunde handelt, so kann doch viel weniger als ein einziger Meter pro Sekunde über den Erfolg des Fluges entscheidend sein.

Sollen die in dieser Arbeit gewonnenen Ergebnisse auf die Realität bezogen werden, so ist relativ bald festzustellen, dass diese nicht in der echten Raumfahrt anwendbar sind. Es handelt sich um vereinfachte Berechnungen, welche selbstverständlich nicht verlässlich und detailliert genug sind um ein reales unter Umständen mit Kosten von mehreren Milliarden US-Dollar verbundenes Raumfahrtprogramm darauf zu basieren.

Außerdem findet in der hier realisierten Form kein Bremsvorgang statt, die Rakete würde also unkontrolliert mit mindestens rund zwei Kilometern pro Sekunde auf den Mond, beziehungsweise mit bis zu elf Kilometern pro Sekunde auf die Erde stürzen. Aufgrund der fehlenden Atmosphäre des Erdtrabanten ist jedoch kein Bremsen durch Fallschirme oder ähnliche Varianten der Erzeugung eines Widerstands durch die Luft möglich, sondern es muss auf Bremsraketen zurückgegriffen werden, welche durch ihren Rückstoß auch im Vakuum wirken. Ein möglicher Lösungsansatz hierfür wäre, eine Abfrage zum Erreichen des Lagrange Punktes durch das Raumschiff ablaufen zu lassen. Wird diese Abfrage bestätigt, so ist bekannt, dass das Raumschiff ab diesem Punkt positiv beschleunigt wird. Der einfachste Ansatz dieser Beschleunigung entgegenzuwirken ist ihren Wert umzukehren, die Raketen mit exakt dieser Stärke zu betreiben und in jedem Intervall die Triebwerke neu einzustellen. Hierdurch wird zwar verhindert, dass die Geschwindigkeit wieder erhöht wird, jedoch wird nichts gegen die bereits vorhandene Geschwindigkeit am Punkt L_1 getan. Auch dafür lässt sich eine ebenso einfache Lösung finden. Der Lagrange Punkt ist dadurch, dass Erde und Mond sich in der Simulation nicht bewegen ein fest definierter Punkt. Es sind also die Geschwindigkeit am Punkt L_1 , und die Entfernung zur Mondoberfläche bekannt. Soll nun eine gleichmäßige Beschleunigung auf das Raumschiff einwirken, die so ausgelegt wird, dass das Raumschiff exakt auf der Oberfläche eine Geschwindigkeit von $0 \frac{m}{s}$ hat, so lässt sich dies mit folgender Formel berechnen:

$$v = a * t$$

$$a = \frac{v}{t} \quad | \quad v = \frac{s}{t}$$

$$t = \frac{s}{v}$$

$$a = \frac{v^2}{s}$$

Außerdem kann die Simulation realistischer gestaltet werden, indem eine zwei-, beziehungsweise auch dreidimensionale Flugbahn berechnet wird.

Wird ein Augenmerk auf die verstrichene Zeit gelegt, so fällt auf, dass zum Beispiel bei einer Startgeschwindigkeit von $11076 \frac{m}{s}$ ein Flug über 650000 Sekunden, also über sieben Tage dauert. In dieser Zeit hat der Mond jedoch schon rund ein Viertel seiner Umlaufbahn um die Erde zurückgelegt und das Raumschiff würde im ungünstigsten Fall für immer in die ewigen Weiten des Weltalls verloren gehen.

Trotz aller Vereinfachungen im Vergleich zum realen Mondflug gibt diese Arbeit einen guten Einblick in die grundlegenden physikalischen Vorgänge beim Raketenflug. Es ist beeindruckend, mit was für einer aus heutiger Sicht extrem veralteten technischen Grundlage und winziger Rechenkapazitäten möglich war. Mit gerade einmal 4 Kilobyte Arbeitsspeicher und einem 1024 MHz Prozessor [4] wurden zwei Menschen zum Mond und wieder zurück auf die Erde geflogen. Auch wenn der „Wettlauf zum Mond“ dieses Jahr bereits sein 50. Jubiläum feiert ist der „Wettlauf ins All“ noch nicht entschieden. Das nächste Ziel in diesem inzwischen mehr partnerschaftlichen Wettkampf ist der Mars und nicht nur staatliche Organisationen wie die NASA oder ESA nehmen daran teil, sondern auch private Firmen wie SpaceX von Elon Musk gewinnen immer mehr an Bedeutung.

Viele sind der Ansicht, dass ein Flug zum Mars bereits heute technisch möglich wäre, jedoch ist die momentan größte Hürde der Mensch. Auch wenn es vielleicht noch nicht zu 100 Prozent stimmen mag, beschreibt dieses Zitat den heutigen Entwicklungsstand der Raumfahrt somit sehr treffend:

„We've mastered the art of controlled explosion“ [5]

Quellen

- [1] Langzeitaufnahme eines SpaceX Falcon 9 Starts, „LONG EXPOSURE OF A FALCON 9 LAUNCH“
<https://www.spacex.com/media-gallery/detail/149416/9246>
 (13.01.2019, 13:32 Uhr)

- [2] Neil Alden Armstrong, als er als erster Mensch 1969 den Mond betrat (Übersetzt)

- [3] „Das klassische Runge-Kutta-Verfahren mittelt in jedem Schritt vier Hilfssteigungen (rot)“, HilberTraum (CC BY-SA 4.0)
https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/7/7e/Runge-Kutta_slopes.svg
 (05.02.2019, 16:45 Uhr)

- [4] „Mondlandung: 4 Kilobyte Arbeitsspeicher brachten die ersten Menschen sicher auf den Erdtrabanten“, PC Games Hardware Online
<http://www.pcgameshardware.de/Hardware-Thema-130320/News/Mondlandung-4-Kilobyte-Arbeitsspeicher-brachten-die-ersten-Menschen-sicher-auf-den-Erdtrabanten-1079789/>
 (10.02.2019, 21:18 Uhr)

- [5] YouTube Kommentar unter dem Video „Raptor Rocket Engine Test, February 2019“ des Kanals „SciNews“, ElectroSalvo
https://www.youtube.com/watch?v=MAAzbjG_Duc&lc=Ugz_Ueg2rQI3VW8zXBR4AaABAg
 (10.02.2019, 22:20 Uhr)