**Numerische Simulation eines Mondflugs**

****

[1]

**Besondere Lernleistung**

**von**

**Toni Happe**

Gymnasium Martineum Halberstadt

Februar 2018 – Februar 2019

**Inhaltsverzeichnis**

1. **Einleitung**
   1. **Hinführung**
   2. **Physikalische Grundlagen**
   3. **Variablen, Konstanten und Werte**
   4. **Ziel**
2. **Methoden**
   1. **Zusätzliche Variablen**
   2. **Numerische Umsetzung**
   3. **Implementierung**
3. **Ergebnisse**
4. **Zusammenfassung und Ausblick**

**Bildverzeichnis**

|  |  |
| --- | --- |
| Abb. 1 | Skizze des Aufbaus mit Beschriftungen der Kräfte und Abstände |
| Abb. 2 | Skizze des Lagrange-Punktes mit Veranschaulichung des Kräftegleichnis |
| Abb. 3 | RK4 mit den vier Hilfssteigungen [3] |
| Abb. 4 | Struktogramm des Hauptprogramms |
| Abb. 5 | Struktogramm des Unterprogramms „getBeschl“ |

Abbildungen sind nicht maßstabsgerecht.

**Numerische Simulation eines Mondfluges**

**1. Einleitung**

**1.1. Hinführung**

Seit dem Beginn der Menschheit zieht der Mond die Aufmerksamkeit Vieler auf sich. Am Anfang wurde er noch als ein religiöses Objekt betrachtet, doch sehr bald kam auch der Wunsch auf einen Fuß auf ihn zu setzen und somit „ein[en] riesige[n] Sprung für die Menschheit“ [2] zu machen und.

Als gegen Ende der 1940er Jahre der Kalte Krieg ausbrach, wurde immer mehr dafür gegeben das eigene Land als überlegen darzustellen, so unter anderem auch im „Wettlauf ins All.“ Diesen Entschied jedoch die Sowjetunion im Oktober 1957 mit dem ersten vom Menschen geschaffenen Satelliten „Sputnik 1“, dem ersten Lebewesen mit Hündin Laika, als auch dem ersten Menschen im All für sich und der Wettlauf ins All wurde zu einem Wettlauf zum Mond. Nachdem die Vereinigten Staaten die vorherigen „Disziplinen“ dieses Wettkampfes nicht für sich entscheiden konnten wurde der Druck auf die NASA als erstes einen Menschen zum Mond zu fliegen immer größer. Am 21. Juli 1969 um 3:56 Uhr mitteleuropäischer Zeit war es schließlich soweit. Neil Armstrong und Buzz Aldrin setzten ihren Fuß auf den Mond und entschieden damit den Wettlauf zum Mond für die Vereinigten Staaten.

Doch wie war dieser Mondflug möglich und was musste hierfür berechnet werden? Mit diesen Fragen wird sich, in vereinfachter Form, als eindimensionaler Flug von der Erde zum Mond, in dieser Arbeit auseinandergesetzt.

**1.2 Physikalische Grundlagen**

Möchte man ein Raumschiff von der Erde starten, so wirken hauptsächlich 2 Kräfte auf dieses ein. Die Gravitationskraft der Erde und die des Mondes, wobei beide Kräfte von der momentanen Position des Raumschiffes, beziehungsweise dem Abstand zu den jeweiligen Körpern, als auch von den Massen des Raumschiffes und der Erde oder des Mondes abhängig sind. Hierfür wird die newtonsche Gravitationskraft verwendet, dessen Formel wie folgt lautet:

*(die Bedeutung aller Variablen sind unter 1.3 Variablen, Konstanten und Werte in tabellarischer Form aufgelistet)*

Nun werden jeweils die Werte für Erde und Mondes eingesetzt und man erhält folgende Formeln, mit selbigen Einheiten wie bei der allgemeinen Formel:

Gravitationskraft der Erde:

Gravitationskraft des Mondes:

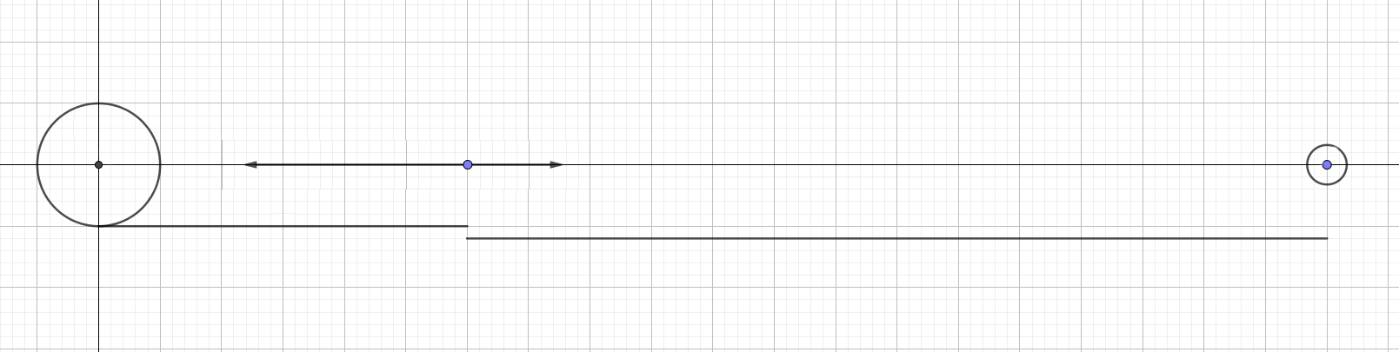


Abb. 1: Skizze des Aufbaus mit Beschriftungen der Kräfte und Abstände

Raumschiff

Erde

Mond

Um an die Entfernung des Raumschiffes zur Erde zu gelangen muss, da sich die Erde bei den Koordinaten befindet, lediglich der Punkt des Raumschiffes auf der x-Achse als Wert für die Entfernung angenommen werden. Für die des Mondes hingegen wird die Position dessen von der des Raumschiffes subtrahiert.

Kennt man nun die Werte beider Gravitationskräfte, kann die resultierende Kraft bestimmt werden, indem man beide Werte addiert, woraus anschließend auch die resultierende Beschleunigung auf das Raumschiff berechnet werden kann.

Die Flugbahn des Raumschiffs besteht prinzipiell aus zwei Abschnitten. Im ersten Abschnitt ist die Gravitationskraft der Erde größer als die des Mondes, weshalb auf die Raumkapsel eine Kraft entgegen ihrer Bewegungsrichtung wirkt und somit auch eine negative Beschleunigung auf sie einwirkt. Wurde eine ausreichend hohe Startgeschwindigkeit gewählt, so erreicht das Raumschiff einen Punkt, an welchem die Kraft der Erde, der des Mondes gleicht und auf dieses somit keine resultierende Beschleunigung wirkt. Dieser Punkt wird auch als innerer oder erster Lagrange Punkt bezeichnet. Ab dieser Stelle ist die Gravitationskraft des Mondes nun stärker als die der Erde, weshalb die Raumkapsel jetzt nicht mehr abgebremst, sondern beschleunigt wird, bis sie letztendlich auf die Oberfläche des Mondes trifft.

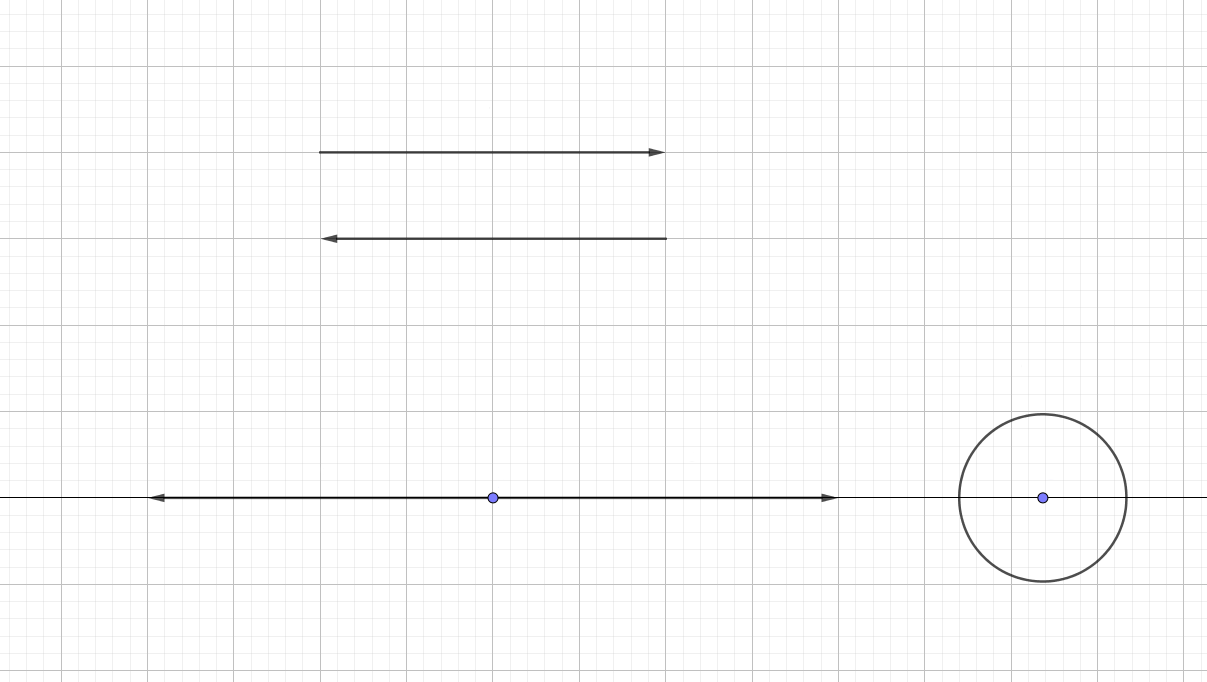


Abb. 2: Skizze des Lagrange-Punktes mit Veranschaulichung des Kräftegleichnis

Raumschiff am Lagrange-Punkt

Mond

**1.3. Variablen, Konstanten und Werte**

In der folgenden Tabelle sind alle verwendeten Variablen, Naturkonstanten und Anfangswerte jeweils mit ihrer Schreibweise im Text und Programmcode und ihrer Definition aufgelistet.

Anfangswerte

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Bezeichnung im Text** | **Bezeichnung im Programmcode** | **Wert** | **Beschreibung** |
|  | v[0] | Wird durch den Nutzer eingegeben | Startgeschwindigkeit des Raumschiffes |
|  | t[0] |  | Startpunkt der Variable für die Zeit |
|  | PR[0] | (≙) | Startpunkt des Raumschiffes; entspricht dem Erdradius |

Naturkonstanten und weitere feste Werte

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Bezeichnung im Text** | **Bezeichnung im Programmcode** | **Wert** | **Beschreibung** |
|  | G |  | Gravitationskonstante |
|  | mR |  | Masse des Raumschiffs |
|  | mM |  | Masse des Mondes |
|  | mE |  | Masse der Erde |
|  | PE | 0 | Mittelpunkt der Erde |
|  | PM |  | Mittelpunkt des Mondes |
|  | rE |  | Erdradius |
|  | rM |  | Mondradius |
|  | rEM |  | Entfernung zwischen Erde und Mond |

Variablen

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Bezeichnung im Text** | **Bezeichnung im Programmcode** | **Beschreibung** |
|  | i | Fortlaufende (Hilfs)-Variable, erhöht sich um 1 bei jedem Durchgang |
|  | t[i] | Zeitpunkt bei Durchgang i |
|  | PR[i] | Punkt des Raumschiffes |
|  | FE | Gravitationskraft der Erde |
|  | FM | Gravitationskraft des Mondes |
|  | FRES | Resultierende Kraft |
|  | aE | In Richtung der Erde wirkende Beschleunigung |
|  | aM | In Richtung des Mondes wirkende Beschleunigung |
|  | aR | Resultierende Beschleunigung |
|  | v[i] | Geschwindigkeit des Raumschiffs |

**1.4 Ziel**

Das Ziel dieser Arbeit ist es die grundlegenden physikalischen Vorgänge während eines Mondfluges und die dabei wirkenden Kräfte zu veranschaulichen. Dies erfolgt in Form einer numerischen Simulation in der Programmiersprache Python mithilfe des Runge-Kutta-Verfahren der vierten Ordnung (näheres unter *2.2 Numerische Umsetzung*), bei welcher der Nutzer die Startgeschwindigkeit des Raumschiffes eingeben kann und auf dieser basierend eine Voraussage über die Flugbahn getroffen wird. Die berechneten Daten werden in einer tabellenförmig aufgebauten Textdatei („Ausgabe.dat“, wird im selben Verzeichnis wie das Programm erstellt) ausgegeben. Diese „Tabelle“ besteht aus sieben Spalten,

welche jeweils durch ein Tabulator-Zeichen voneinander getrennt sind und in der hier dargestellten Reihenfolge gespeichert werden:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Text** |  |  |  |  |  |  |  |
| **Programm** | t[i] | PR[i] | v[i] | aR | FRES | FE | FM |

Diese Datei kann nun mit einem beliebigen Programm zur Visualisierung von Blockdaten, wie zum Beispiel qtGrace (Windows) oder Grace (Linux) ausgelesen und in beliebigen Zusammenhängen und Abhängigkeiten dargestellt werden.

**2. Methoden**

**2.1 Zusätzliche Variablen**

Um die notwendigen Berechnungen des Programms realisieren und erläutern zu können müssen zu Beginn einige weitere Variablen eingeführt werden.

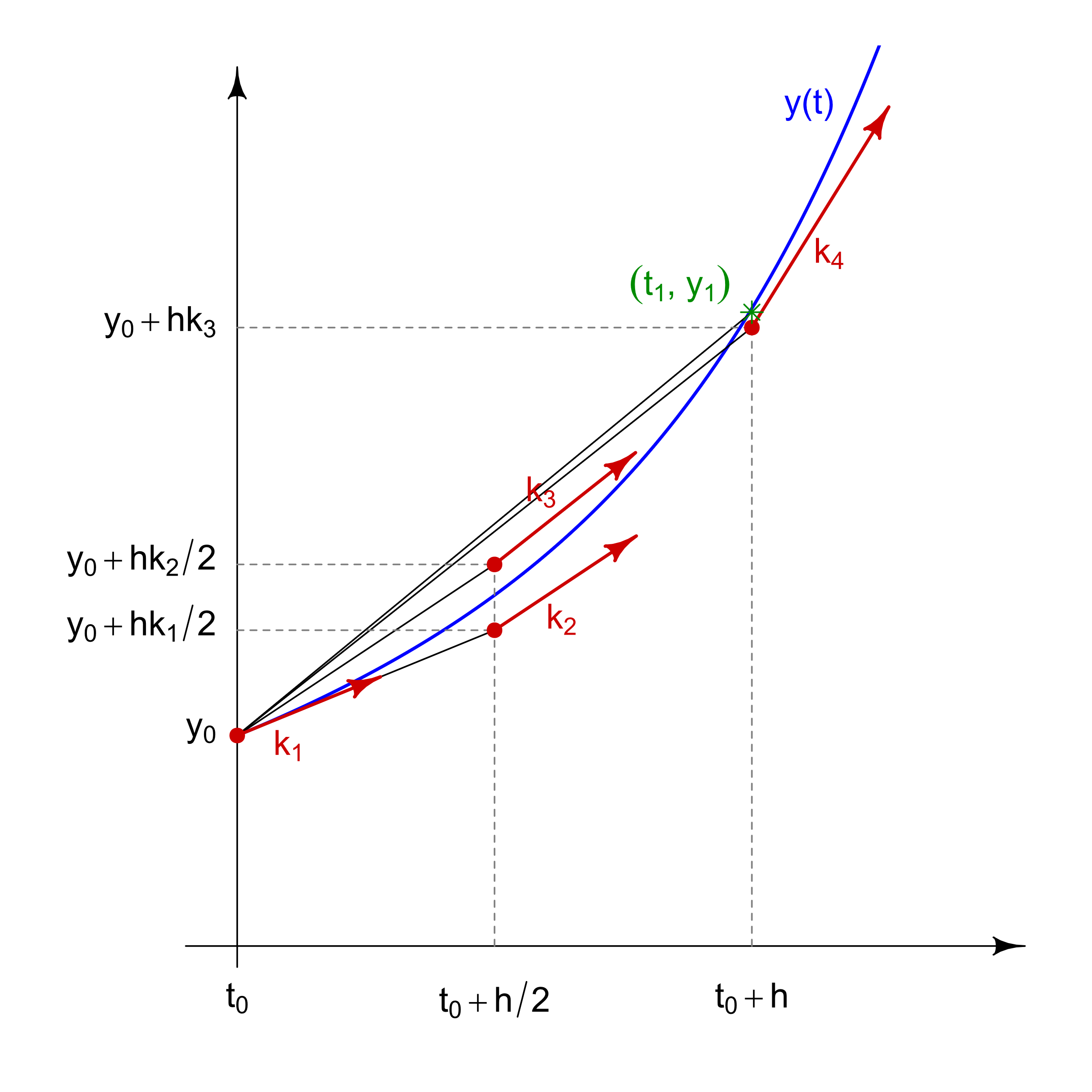
|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Bezeichnung im Text** | **Bezeichnung im Programmcode** | **Wert** | **Beschreibung** |
| - | n | 1000000 | Im Programm festgelegte Anzahl an maximalen Durchgängen |
|  | i | - | Fortlaufende (Hilfs)-Variable, erhöht sich um 1 bei jedem Durchgang |
|  | h | 1 | Schrittweite |

**2.2 Numerische Umsetzung**

Wie bereits im Voraus beschrieben wirken auf das Raumschiff zeitgleich von Mond und Erde die Gravitationskräfte ein. Es handelt sich hierbei um ein Anfangswertproblem, da die einzige wirklich exakt bekannte Position des Raumschiffes dessen Startpunkt ist. Die darauffolgenden Positionen können also nur näherungsweise über die wirkende Beschleunigung vorhergesagt werden. Um diese Berechnung so genau wie möglich zu gestalten, wird hier das Runge-Kutta-Verfahren der vierten Ordnung (auch „klassisches Runge-Kutta-Verfahren“ oder „RK4“) zur Hilfe genommen.

Dieses Verfahren unterscheidet sich von anderen Verfahren, wie zum Beispiel dem Euler-Verfahren, bei welchem die Steigung am Anfang eines Intervalls bestimmt, mithilfe dessen am Ende dieses Intervalls ein neuer Punkt zur Anstiegsberechnung ermittelt werden kann. Das RK4 hingegen lässt sich in vier Teilschritte unterteilen. Zuerst wird wie bei Euler der   
Anstieg an der Stelle 0 () des Intervalls berechnet.

Anschließend wird eine halbe Schrittweite ( ) in y-Richtung weitergegangen und an dem Schnittpunkt von mit erneut der Anstieg () berechnet, welcher nun wieder an angelegt wird. Darauffolgend wird wie bereits für die Steigung berechnet, welche ebenfalls bei angelegt wird. Zuletzt wird der Schnittpunkt von mit berechnet, welcher wiederum den Startpunkt für den sich anschließenden, nächsten Intervall darstellt.

****

**Zusätzliche Erklärungen zum Verständnis**

- Hilfssteigungen  
 - echte Lösung

|  |  |
| --- | --- |
| **in der Skizze** | **entspricht hier** |
| y-Achse |  |
| x-Achse |  |

Abb. 3: RK4 mit den vier Hilfssteigungen [3]

Auf den Mondflug bezogen wird die Position des Raumschiffes im RK4 berechnet, wobei die Differentialgleichung hierfür sowohl von der Geschwindigkeit , als auch von deren Ableitung, der Beschleunigung abhängig ist. Die Formeln für die einzelnen Hilfssteigungen ( für und für ) lauten wie folgt, wobei für die zuletzt berechnete Geschwindigkeit steht:

Aus den zuvor errechneten Hilfssteigungen kann nun die nächste Näherung für die Position des Raumschiffes errechnet werden, wobei die Hilfssteigungen unterschiedliche Wichtungen haben. steht hierbei für die zuletzt berechnete und für die in diesem Durchgang neu errechnete Position des Raumschiffes.

Selbiges wird im Anschluss für die Geschwindigkeit getan um an zu gelangen:

**2.3 Implementierung**

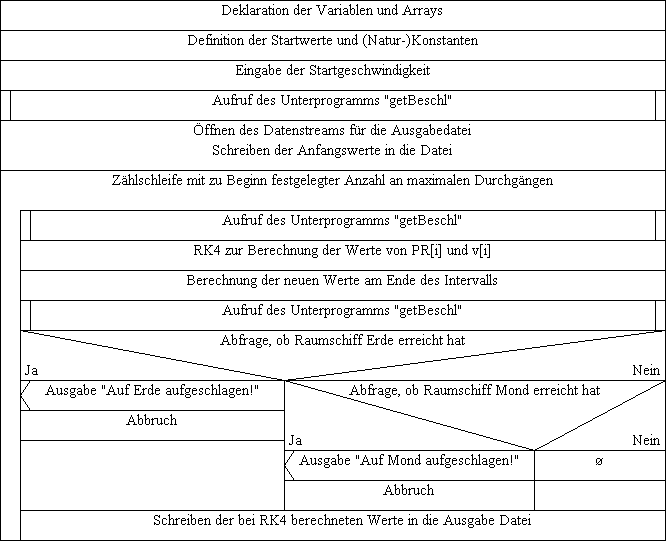


Abb. 4: Struktogramm des Hauptprogramms

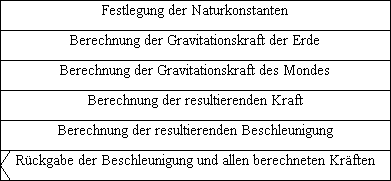
****

Abb. 5: Struktogramm des Unterprogramms „getBeschl“

Der Ablauf des Programms lässt sich in zwei Abschnitte unterteilen, in das Haupt- und das Unterprogramm „getBeschl“. Im Hauptprogramm werden zuerst alle Variablen, wie die Schrittweite, die Arrays für Zeit, Position und Geschwindigkeit und die Anzahl an maximalen Wiederholungen , welche ebenfalls die Größe der Arrays (in Python gibt es keine direkten Arrays, dafür aber sogenannte Listen, die denselben Zweck erfüllen) definieren. Anschließend werden Naturkonstanten, wie die Radien von Mond und Erde und die Entfernung beider voneinander sowie die Startwerte deklariert. Die Startgeschwindigkeit kann frei vom Nutzer gewählt werden und wird in Metern pro Sekunde angegeben.

Wurde das Hauptprogramm bis zu diesem Punkt ausgeführt wird „getBeschl“ zum ersten Mal aufgerufen. Hierbei wird lediglich die Position des Raumschiffes zur Zeit 0 übertragen. Im Unterprogramm werden weitere Konstanten deklariert, unter anderem die Massen der Körper sowie die Gravitationskonstante. Die ersten beiden Berechnungen, die im Unterprogramm Ablaufen sind die der Gravitationskräfte von Erde und Mond, aus welchen im Anschluss die Resultierende Kraft errechnet wird. Teilt man diese nun durch die Masse des Raumschiffes erhält man die resultierende Beschleunigung , welche zusammen mit allen berechneten Kräften zurückgegeben wird.

Zurück im Hauptprogramm angekommen wird nun die Ausgabedatei „Ausgabe.dat“ erstellt (falls bereits eine Datei mit diesem Namen vorhanden war wird diese überschrieben beziehungsweise gelöscht) in welche die Werte des nullten Durchgangs geschrieben werden.

Gefolgt wird dies von einer Zählschleife, welche -mal ausgeführt wird und den Zähler jeweils um Eins erhöht. In dieser Schleife wird erneut „getBeschl“ ausgeführt, wobei dieses Mal in das Programm übergeben wird. Anschließend wird das Runge-Kutta-Verfahren wie unter *2.2 Numerische Umsetzung* beschrieben durchgeführt, wobei letztendlich die neuen Werte für Position und Geschwindigkeit am Ende des Intervalls berechnet und die Zeit um weitergesetzt werden. Sind nun alle Berechnungen abgeschlossen wird getestet, ob das Raumschiff inzwischen die Oberfläche des Monds erreicht hat, beziehungsweise, ob die Geschwindigkeit nicht ausreichend war, sodass das Raumschiff zurück auf die Erdoberfläche gestürzt ist. Ist eins der beiden der Fall, so wird eine Meldung ausgegeben und das Programm unterbrochen. Wird das Programm jedoch nicht unterbrochen werden die neu berechneten Werte ebenfalls in die Datei geschrieben.

**3. Auswertung**

**3.1 Allgemein**

**4. Zusammenfassung und Ausblick**

**Quellen**

[1] Langzeitaufnahme eines SpaceX Falcon 9 Starts, „LONG EXPOSURE OF A FALCON 9   
 LAUNCH”   
 <https://www.spacex.com/media-gallery/detail/149416/9246>   
 (13.01.2019, 13:32 Uhr)

[2] Neil Alden Armstrong, als er als erster Mensch 1969 den Mond betrat (Übersetzt)

[3] „Das klassische Runge-Kutta-Verfahren mittelt in jedem Schritt vier Hilfssteigungen (rot)“,   
 HilberTraum (CC BY-SA 4.0):  
 <https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/7/7e/Runge-Kutta_slopes.svg>  
 (05.02.2019, 16:45 Uhr)

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

TODO

* Formelzeichen überprüfen ob alle Kursiv sind!
* Fertiges Programm mit ausdrucken/dranhängen