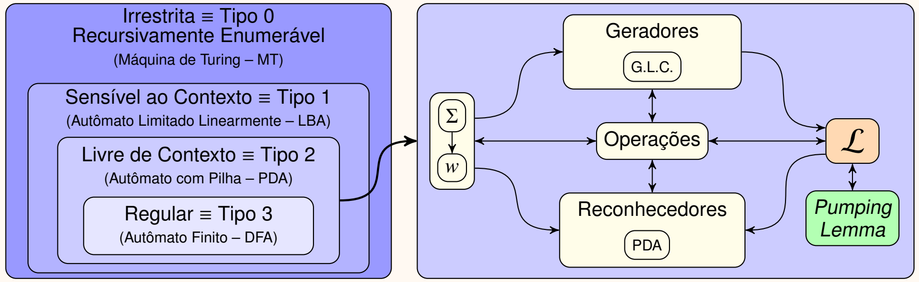
Linguagens Formais e Autômatos

Humberto Longo

Instituto de Informática
Universidade Federal de Goiás

Bacharelado em Ciência da Computação, 2021/1

Roteiro



Pumping Lemma para LLC

Lema 1.31

Se $\mathcal{L}$ é uma linguagem livre de contexto, então existe um número p tal que cada $w = uvxyz \in \mathcal{L}$, com $|w| \geqslant p$, satisfaz:

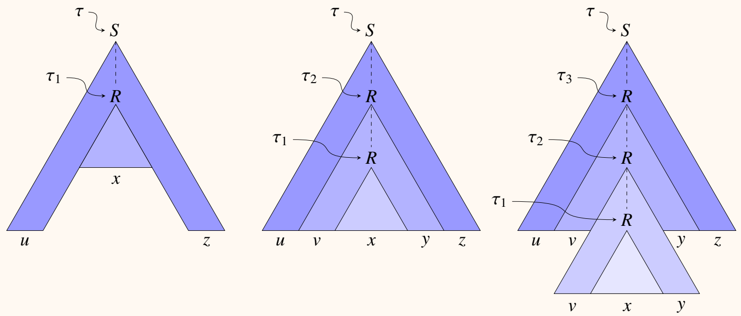
1. $uv^ixy^iz \in \mathcal{L},\ i \geqslant 0$,
2. $|vy| > 0$,
3. $|vxy| \leqslant p$.

- p é chamado de *pumping length*.
- Condição 2 indica que v ou y não é uma cadeia vazia.
- Condição 3 indica que v, x e y juntos têm comprimento máximo p.

Pumping Lemma para LLC

Esquema da demonstração:

- $\mathcal{L}(G)$: Linguagem gerada pela GLC G.
- $w \in \mathcal{L}(G)$, tal que w é "suficientemente longa" ($|w| \geqslant p$).
- w pode ser decomposta em cinco partes: $uvxyz$.
- Árvore de derivação de w contém algum caminho, da raiz até uma folha, que repete uma variável.
- Segunda e quarta subcadeias (v e y) podem ser repetidas.



Pumping Lemma para LLC

Demonstração.

- $G = (V, \Sigma, R, S)$: Gramática livre de contexto.
- $\mathcal{L}(G)$: Linguagem gerada por G.

Pumping Lemma para LLC

Demonstração.

- $G = (V, \Sigma, R, S)$: Gramática livre de contexto.
- $\mathcal{L}(G)$: Linguagem gerada por G.
- $b \geqslant 2$ número máximo de símbolos no lado direito de uma produção.

Pumping Lemma para LLC

Demonstração.

- $G = (V, \Sigma, R, S)$: Gramática livre de contexto.
- $\mathcal{L}(G)$: Linguagem gerada por G.
- $b \geqslant 2$ número máximo de símbolos no lado direito de uma produção.
  - Um nó tem no máximo b filhos.
  - No máximo b folhas no nível 1, b^2 no nível 2,..., b^h no nível h.
  - Árvore de altura $h \Rightarrow$ Cadeia de comprimento máximo b^h.
  - Cadeia w, tal que $|w| \geqslant b^h + 1, \Rightarrow$ Árvore de altura maior ou igual a $h + 1$.

Pumping Lemma para LLC

Demonstração.

- $w \in \mathcal{L}(G)$.
- $\tau \mapsto$ Árvore de derivação de w, com o menor número possível de nós.

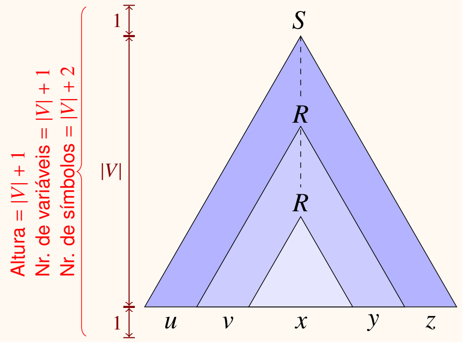
Pumping Lemma para *LLC*

Demonstração.

- $w \in \mathcal{L}(G)$.
- $\tau \mapsto$ Árvore de derivação de w, com o menor número possível de nós.
- $p = b^{|V|} + 1$
  - $|w| \geqslant p \Rightarrow \tau$ tem altura mínima $|V| + 1$.
  - Um caminho mais longo em τ tem no mínimo $|V| + 2$ nós, onde pelo menos $|V| + 1$ são variáveis (só folhas são terminais).
  - Logo, alguma variável aparece mais de uma vez nesse caminho!
  - Seja R uma variável dentre as $|V| + 1$ variáveis mais inferiores do caminho.

Pumping Lemma para *LLC*

Demonstração.



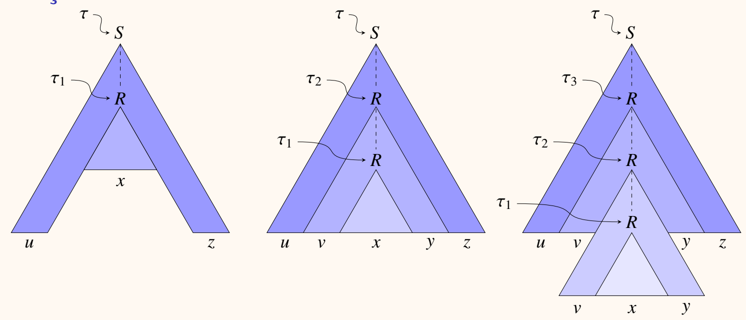
Pumping Lemma para *LLC*

Demonstração.

1. $uv^ixy^iz \in \mathcal{L},\ i \geqslant 0$,
   - Cada ocorrência de R gera uma subárvore com parte da cadeia w.
   - Ocorrência inferior de R (subárvore τ_1) gera a cadeia x.
   - Ocorrência superior de R (subárvore τ_2) gera a cadeia vxy.
   - Subárvores τ_1 e τ_2 são geradas pela mesma variável.
   - Substituir uma pela outra gera árvore de derivação válida.
   - Troca da menor pela maior repetidas vezes gera árvores de derivação para cadeias uv^ixy^iz, para $i > 1$.
   - Troca da maior pela menor gera a cadeia uxz.
2. $|vy| > 0$,
3. $|vxy| \leqslant p$.

Pumping Lemma para *LLC*

Demonstração.



Pumping Lemma para LLC

Demonstração.

1. $uv^ixy^iz \in \mathcal{L}$, $i \geqslant 0$,
2. $|vy| > 0$,
   - v e y não podem ser ε ao mesmo tempo.
   - Árvore obtida ao substituir a menor subárvore pela maior teria menos nós do que τ e ainda geraria a cadeia w.
   - Contradição, pois τ foi escolhida com o mínimo possível de nós.
3. $|vxy| \leqslant p$.

Pumping Lemma para LLC

Demonstração.

1. $uv^ixy^iz \in \mathcal{L}$, $i \geqslant 0$,
2. $|vy| > 0$,
3. $|vxy| \leqslant p$.
   - Ocorrência superior de R gera vxy.
   - Ocorrências de R entre as $|V| + 1$ variáveis mais inferiores do caminho.
   - Subárvore com R como raiz tem altura máxima $|V| + 1$.
   - Cadeia gerada por R tem comprimento máximo $b^{|V|+1} = p$.

Pumping Lemma para LLC

Exemplo 1.32

- $\mathcal{L} = \{a^nb^nc^n \mid n \geqslant 0\}$ não é livre de contexto:
- Suponha que $\mathcal{L}$ é LLC.
  - p : *pumping length*.
- $w = a^pb^pc^p$ pode ser escrita como $w = uvxyz$.
- v e y contém, cada um, apenas um tipo de símbolo:
  - uv^2xy^2z não contém o mesmo número de a's, b's e c's.
- v e/ou y contém mais de um tipo de símbolo:
  - uv^2xy^2z não contém os símbolos a's, b's e c's na ordem correta.
- Dadas as contradições, $\mathcal{L}$ não é LLC.

Pumping Lemma para LLC

Exemplo 1.33

- $\mathcal{L} = \{a^ib^jc^k \mid 0 \leqslant i \leqslant j \leqslant k\}$ não é livre de contexto:
- Supor $\mathcal{L}$ LLC, p é o *pumping length* e $w = a^pb^pc^p = uvxyz$.
- v e y contém, cada um, apenas um tipo de símbolo:
  - a não ocorre em v ou y:
    - $uv^0xy^0z = uxz$ contém mesmo número de a's que w, mas menos b's ou c's.
  - b não ocorre em v ou y:
    - a ou c deve ocorrer em v ou y (não podem ser ε).
    - a ocorre $\Rightarrow$ a cadeia uv^2xy^2z contém mais a's do que b's.
    - c ocorre $\Rightarrow$ a cadeia uv^0xy^0z contém mais b's do que c's.
  - c não ocorre em v ou y:
    - A cadeia $uv^2xy^2z = uxz$ contém mais b's do que c's.
- v e y contém mais de um tipo de símbolo:
  - uv^2xy^2z não contém a's, b's e c's na ordem correta.
- Dadas as contradições, $\mathcal{L}$ não é LLC.

Pumping Lemma para LLC

Exemplo 1.34

- $\mathcal{L} = \{ss \mid s \in \{0,1\}^*\}$ não é livre de contexto:
- Suponha que $\mathcal{L}$ é LLC.
  - $p \mapsto$ *pumping length*.
- Escolha da cadeia w é menos óbvia!

Pumping Lemma para LLC

Exemplo 1.34

- $\mathcal{L} = \{ss \mid s \in \{0,1\}^*\}$ não é livre de contexto:
- Suponha que $\mathcal{L}$ é LLC.
  - $p \mapsto$ *pumping length*.
- Escolha da cadeia w é menos óbvia!

Pumping Lemma para LLC

Exemplo 1.34

- $\mathcal{L} = \{ss \mid s \in \{0,1\}^*\}$ não é livre de contexto:
- Suponha que $\mathcal{L}$ é LLC.
  - $p \mapsto$ *pumping length*.
- Escolha da cadeia w é menos óbvia!

Pumping Lemma para LLC

Exemplo 1.34

- $\mathcal{L} = \{ss \mid s \in \{0,1\}^*\}$ não é livre de contexto:
- Suponha que $\mathcal{L}$ é LLC.
  - $p \mapsto$ *pumping length*.
- Escolha da cadeia w é menos óbvia!
- $w = ss = 0^p10^p1 \Rightarrow$ não leva a uma contradição:

$$\overbrace{\underbrace{000\cdots000}_{u}\ \underbrace{0}_{v}\ \underbrace{1}_{x}}^{0^p1}\ \overbrace{\underbrace{0}_{y}\ \underbrace{000\cdots001}_{z}}^{0^p1}$$

- $uv^ixy^iz \in \mathcal{L},\ \forall\, i \geqslant 0$.

Pumping Lemma para LLC

Exemplo 1.34

- $\mathcal{L} = \{ss \mid s \in \{0,1\}^*\}$ não é livre de contexto:
- Suponha que $\mathcal{L}$ é LLC.
  - $p \mapsto$ *pumping length*.
- Escolha da cadeia w é menos óbvia!
- $w = ss = 0^p1^p0^p1^p = uvxyz$ e $|vxy| \leqslant p$.

Pumping Lemma para LLC

Exemplo 1.34

- $\mathcal{L} = \{ss \mid s \in \{0,1\}^*\}$ não é livre de contexto:
- Suponha que $\mathcal{L}$ é LLC.
  - $p \mapsto$ *pumping length*.
- Escolha da cadeia w é menos óbvia!
- $w = ss = 0^p1^p0^p1^p = uvxyz$ e $|vxy| \leqslant p$.
- Se vxy aparece só na primeira metade de w, em uv^2xy^2z aparecem duas sequências de 1's na segunda metade.

Pumping Lemma para LLC

Exemplo 1.34

- $\mathcal{L} = \{ss \mid s \in \{0,1\}^*\}$ não é livre de contexto:
- Suponha que $\mathcal{L}$ é LLC.
  - $p \mapsto$ *pumping length*.
- Escolha da cadeia w é menos óbvia!
- $w = ss = 0^p1^p0^p1^p = uvxyz$ e $|vxy| \leqslant p$.
- Se vxy aparece só na primeira metade de w, em uv^2xy^2z aparecem duas sequências de 1's na segunda metade.
- Se vxy aparece só na segunda metade de w, em uv^2xy^2z aparecem mais 0's na segunda metade do que na primeira.

Pumping Lemma para LLC

Exemplo 1.34

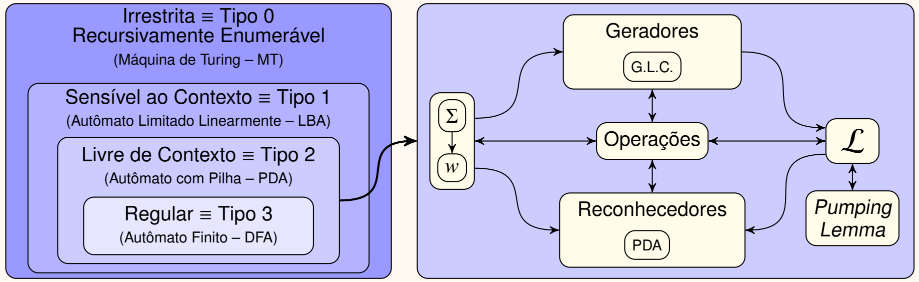
- $\mathcal{L} = \{ss \mid s \in \{0,1\}^*\}$ não é livre de contexto:
- Suponha que $\mathcal{L}$ é LLC.
  - $p \mapsto$ *pumping length*.
- Escolha da cadeia w é menos óbvia!
- $w = ss = 0^p1^p0^p1^p = uvxyz$ e $|vxy| \leqslant p$.
- Se vxy aparece só na primeira metade de w, em uv^2xy^2z o 1 aparece duas vezes na segunda metade.
- Se vxy aparece só na segunda metade de w, em uv^2xy^2z o 0 aparece mais na segunda do que na primeira metade.
- Se vxy aparece nas duas metades, em $0^p1^i0^j1^p$ as variáveis i e j não podem ser iguais a p ao mesmo tempo.

Pumping Lemma para LLC

Exemplo 1.34

- $\mathcal{L} = \{ss \mid s \in \{0,1\}^*\}$ não é livre de contexto:
- Suponha que $\mathcal{L}$ é LLC.
  - $p \mapsto$ *pumping length*.
- Escolha da cadeia w é menos óbvia!
- $w = ss = 0^p1^p0^p1^p = uvxyz$ e $|vxy| \leqslant p$.
- Se vxy aparece só na primeira metade de w, em uv^2xy^2z o 1 aparece duas vezes na segunda metade.
- Se vxy aparece só na segunda metade de w, em uv^2xy^2z o 0 aparece mais na segunda do que na primeira metade.
- Se vxy aparece nas duas metades, em $0^p1^i0^j1^p$ as variáveis i e j não podem ser iguais a p ao mesmo tempo.
- Dadas as contradições, $\mathcal{L}$ não é LLC.

Roteiro



Livros texto

R. P. Grimaldi
Discrete and Combinatorial Mathematics – An Applied Introduction.
Addison Wesley, 1994.

D. J. Velleman
How To Prove It – A Structured Approach.
Cambridge University Press, 1996.

J. E. Hopcroft; J. Ullman.
Introdução Ã Teoria de Autômatos, Linguagens e Computação.
Ed. Campus.

T. A. Sudkamp.
Languages and Machines – An Introduction to the Theory of Computer Science.
Addison Wesley Longman, Inc. 1998.

J. Carroll; D. Long.
Theory of Finite Automata – With an Introduction to Formal Languages.
Prentice-Hall, 1989.

M. Sipser.
Introduction to the Theory of Computation.
PWS Publishing Company, 1997.

H. R. Lewis; C. H. Papadimitriou
Elementos de Teoria da Computação.
Bookman, 2000.