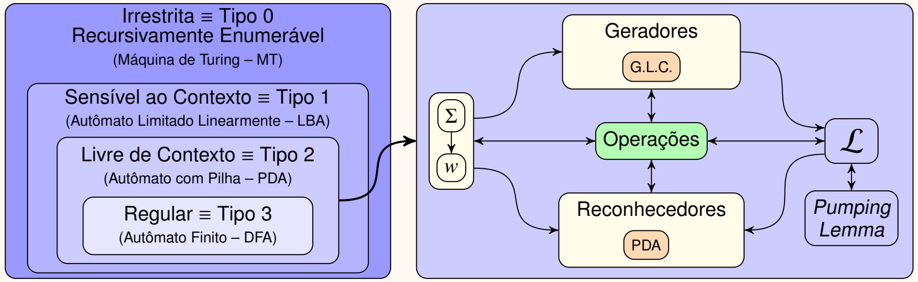
Linguagens Formais e Autômatos

Humberto Longo

Instituto de Informática
Universidade Federal de Goiás

Bacharelado em Ciência da Computação, 2021/1

Roteiro



Linguagens livres de contexto e PDA's

Conversão de GLC em PDA

- Toda LLC é aceita por um PDA estendido.
  - As regras de derivação podem ser usadas para gerar as transições do PDA.
- Seja $\mathcal{L}$ uma LLC e $G = (V, \Sigma, P, S)$ uma gramática na forma normal de Greibach, com $\mathcal{L}(G) = \mathcal{L}$.
  - As regras de G, exceto $S \rightarrow \varepsilon$, tem a forma $A \rightarrow \alpha A_1 A_2 \ldots A_n$, com $\alpha \in \Sigma$ e $A, A_1, \ldots, A_n \in V$.
  - Em uma derivação à esquerda $S \overset{*}{\Longrightarrow} uAv \overset{1}{\Longrightarrow} u\alpha A_1 A_2 \ldots A_n v$, com $u \in \Sigma^+$ e $v \in V^*$, as variáveis A_i, $i = 1, \ldots, n$, são substituídas na sequência $A_1, A_2, \ldots, A_n$.
- Empilhar $A_1, A_2, \ldots, A_n$, com A_1 no topo da pilha, armazena as variáveis na ordem requerida pela derivação.

Linguagens livres de contexto e PDA's

Conversão de GLC em PDA

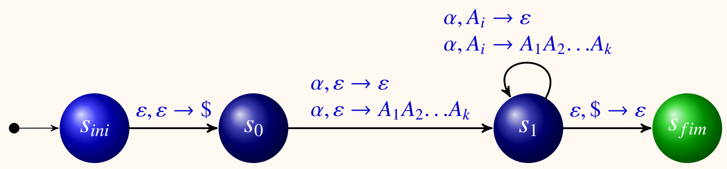
- Gramática $G = (V, \Sigma, P, S)$, na forma normal de Greibach.
- PDA $P = \langle \Sigma, \Gamma = V - \{S\}, E = \{s_{ini}, s_0, s_1, s_{fim}\}, s_{ini}, \delta, F = \{s_{fim}\} \rangle$, onde:

$$
\begin{aligned}
\delta(s_0, \alpha, \varepsilon) &= (s_1, A_1 A_2 \ldots A_k), && \text{se } S \rightarrow \alpha A_1 A_2 \ldots A_k, \\
& && \alpha \in \Sigma \text{ e } S, A_1, \ldots, A_k \in V,\ k \geqslant 1; \\
\delta(s_0, \alpha, \varepsilon) &= (s_1, \varepsilon), && \text{se } S \rightarrow \alpha, \\
& && \alpha \in \Sigma \cup \{\varepsilon\} \text{ e } S \in V; \\
\delta(s_1, \alpha, A_i) &= (s_1, A_1 A_2 \ldots A_\ell), && \text{se } A_i \rightarrow \alpha A_1 A_2 \ldots A_\ell, \\
& && \alpha \in \Sigma \text{ e } A_i, A_1, \ldots, A_\ell \in V,\ \ell \geqslant 1; \\
\delta(s_1, \alpha, A_i) &= (s_1, \varepsilon), && \text{se } A_i \rightarrow \alpha, \\
& && \alpha \in \Sigma \text{ e } A_i \in V; \\
\delta(s_{ini}, \varepsilon, \varepsilon) &= (s_0, \$), \\
\delta(s_1, \varepsilon, \$) &= (s_{fim}, \varepsilon).
\end{aligned}
$$

Linguagens livres de contexto e PDA's

Conversão de GLC em PDA

- Diagrama simplificado de estados para o PDA P:



Linguagens livres de contexto e PDA's

Exemplo 1.24

- $\mathcal{L} = \{a^i b^i \mid i > 0\}$.
- Gramática G na forma normal de Greibach que aceita $\mathcal{L}$:

$$G : \left\{ \begin{array}{l} S \to aAB \mid aB, \\ A \to aAB \mid aB, \\ B \to b \end{array} \right\}.$$

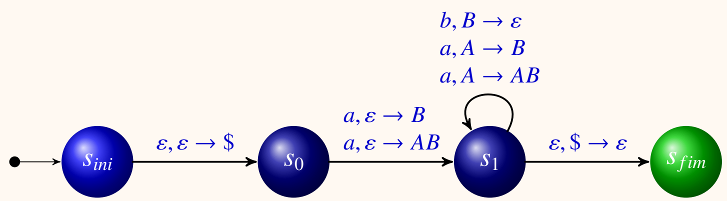
Linguagens livres de contexto e PDA's

Exemplo 1.24

- PDA $P = \langle \Sigma = \{a, b\}, \Gamma = \{A, B\}, S = \{s_{ini}, s_0, s_1, s_{fim}\}, s_0, \delta, F = \{s_{fim}\}\rangle$, onde:

$$G : \left\{ \begin{array}{l} S \to aAB \mid aB, \\ A \to aAB \mid aB, \\ B \to b \end{array} \right\}.$$

$$\begin{aligned} \delta(s_{ini}, \varepsilon, \varepsilon) &= (s_0, \$); \\ \delta(s_0, a, \varepsilon) &= \{(s_1, AB), (s_1, B)\}, \\ \delta(s_1, a, A) &= \{(s_1, AB), (s_1, B)\}, \\ \delta(s_1, b, B) &= \{(s_1, \varepsilon)\}, \\ \delta(s_1, \varepsilon, \$) &= (s_{fim}, \varepsilon). \end{aligned}$$



Linguagens livres de contexto e PDA's

Exemplo 1.24

- Derivação da cadeia $aaabbb$ por G e processamento por P:

$$\begin{array}{ll} S \Rightarrow aAB & [s_0, aaabbb, \varepsilon] \longmapsto [s_1, aabbb, AB] \\ \quad \Rightarrow aaABB & \longmapsto [s_1, abbb, ABB] \\ \quad \Rightarrow aaaBBB & \longmapsto [s_1, bbb, BBB] \\ \quad \Rightarrow aaabBB & \longmapsto [s_1, bb, BB] \\ \quad \Rightarrow aaabbB & \longmapsto [s_1, b, B] \\ \quad \Rightarrow aaabbb. & \longmapsto [s_1, \varepsilon, \varepsilon]. \end{array}$$

Linguagens livres de contexto e PDA’s

Conversão de GLC em PDA – Alternativa

- $\mathcal{L} : LLC$.
- $G : GLC$ que gera $\mathcal{L}$.
- Conversão de G em um PDA P.
  - Se G gera w, então P aceita w.
  - P determina se existe uma derivação para w em G.
  - P simula uma derivação para w em G.
- Quais regras de derivação devem ser utilizadas?
  - P deve ser não determinístico.

Equivalência de GLC e PDA

Funcionamento do PDA P

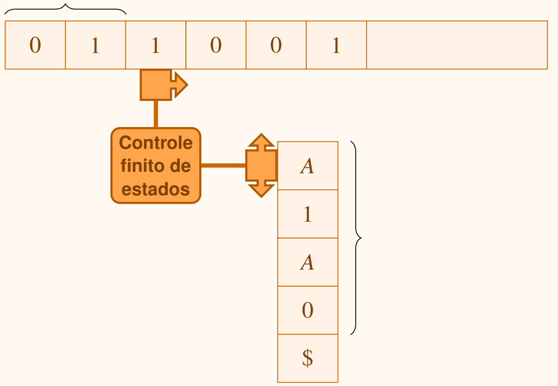
1. Variável inicial na pilha.
2. Série de cadeias intermediárias: substituições uma a uma.
   - Pode chegar a uma cadeia que só contém símbolos terminais.
   - P aceita essa cadeia se é igual à cadeia w.

- Tratamento das cadeias intermediárias:
  - P tem acesso somente ao topo da pilha, que pode ser um terminal ou uma variável.
  - Retirar parte da cadeia intermediária (primeira variável) da pilha.
  - ‘Casar’ qualquer terminal anterior com os símbolos da cadeia de entrada.

Equivalência de GLC e PDA

Exemplo 1.25

- PDA P com a cadeia intermediária $A1A0$ a pilha:



Equivalência de GLC e PDA

Funcionamento do PDA P

1. Inserir símbolo $\$$ na pilha.
2. Inserir variável inicial na pilha.
3. Repetir os passos:
   - 3.1 Se topo da pilha é uma variável $A \in V$, escolher (não determinístico) uma regra de derivação de A e substituí-la pelo lado direito da regra.
   - 3.2 Se topo da pilha é um terminal $a \in \Sigma$, ler próximo símbolo da cadeia de entrada e comparar com a. Se iguais, repetir, senão rejeitar.
   - 3.3 Se topo da pilha é o símbolo $\$$, ir para estado final. Se cadeia de entrada foi toda lida, então foi aceita.

Equivalência de GLC e PDA

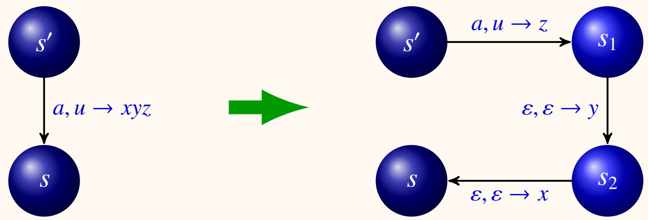
Esquema de construção do PDA

- Gramática $G = (V, \Sigma, P, S)$.
- Construção do PDA $\mathcal{P} = \langle \Sigma, \Gamma, E, s_{ini}, \delta, F \rangle$:
  - $s', s \in E$,
  - $a \in \Sigma$,
  - $u \in \Gamma$,
  - $\mathcal{P}$ passa do estado s' para o $s \Rightarrow \mathcal{P}$ lê a e desempilha u.

Equivalência de GLC e PDA

Esquema de construção do PDA

- $(s, w) \in \delta(s', a, u) \Rightarrow s'$ é o estado do PDA, a é o próximo símbolo de entrada e u é o topo da pilha.
  - O PDA deve ler a, desempilhar u, empilhar a cadeia w e ir para o estado s.
- Exemplo para $(s, xyz) \in \delta(s', a, u)$:



Equivalência de GLC e PDA

Esquema de construção do PDA

- Empilhar toda a cadeia $w = w_1 \ldots w_\ell$ ao mesmo tempo (transição estendida).
- Novos estados $s_1, \ldots, s_{\ell-1}$ e transição $\delta(s, a, u)$ tal que:

$$
\begin{aligned}
(s_1, w_\ell) &\in \delta(s, a, u),\\
\delta(s_1, \varepsilon, \varepsilon) &= \{(s_2, w_{\ell-1})\},\\
\delta(s_2, \varepsilon, \varepsilon) &= \{(s_3, w_{\ell-2})\},\\
&\vdots\\
\delta(s_{\ell-2}, \varepsilon, \varepsilon) &= \{(s_{\ell-1}, w_2)\},\\
\delta(s_{\ell-1}, \varepsilon, \varepsilon) &= \{(s, w_1)\}.
\end{aligned}
$$

Equivalência de GLC e PDA

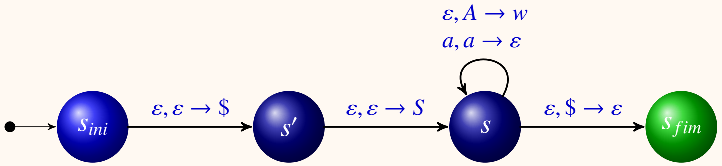
Esquema de construção do PDA

- PDA $\mathcal{P} = \langle \Sigma, \Gamma, E, s_0, \delta, F \rangle$.
  - $E = \{s_{ini}, s', s, s_{fim}\} \cup Q$.
    - Q : novos estados para a notação simplificada para transições.
  - $s_0 = s_{ini}$.
  - $F = \{s_{fim}\}$.
  - $\delta(s_{ini}, \varepsilon, \varepsilon) = \{(s', \$)\}$.
    - A pilha é iniciada com $\$$.
  - $\delta(s', \varepsilon, \varepsilon) = \{(s, S)\}$.
    - A variável inicial S é colocada na pilha.
  - $\delta(s, \varepsilon, A) = \{(s, w)\}$, onde $(A \to w) \in P$, $w \in (\Sigma \uplus V)^*$.
    - O topo da pilha contém uma variável.
  - $\delta(s, a, a) = \{(s, \varepsilon)\}$.
    - O topo da pilha contém um terminal.
  - $\delta(s, \varepsilon, \$) = \{(s_{fim}, \varepsilon)\}$.
    - Marcador de pilha vazia ($\$$) está no topo.

Equivalência de GLC e PDA

Esquema de construção do PDA

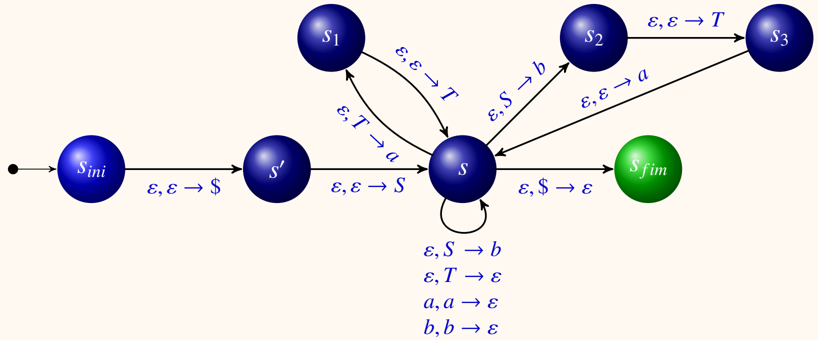
- Diagrama simplificado de estados para o PDA $\mathcal{P}$:



Equivalência de GLC e PDA

Exemplo 1.26

- $GLC\ \ G = (V = \{S, T\}, \Sigma = \{a, b\}, R = \{S \to aTb \mid b,\ \ T \to Ta \mid \varepsilon\}, S)$.
- Diagrama de estados do PDA que simula G:



Linguagens livres de contexto e PDA's

Teorema 1.27

- *Se $\mathcal{L}$ é uma LLC, então existe um PDA $\mathcal{P}$ que aceita $\mathcal{L}$.*

Demonstração.

- Seja $G = (V, \Sigma, P, S)$, na FNG, que aceita $\mathcal{L}$.
- Seja o PDA estendido $\mathcal{P} = \langle \Sigma, \Gamma = V - \{S\}, E = \{s_0, s_1\}, s_0, \delta, F = \{s_1\} \rangle$, onde:

$$\delta(s_0, a, \varepsilon) = \{(s_1, w) \mid (S \to aw) \in P \text{ e } w \in V^*\},$$
$$\delta(s_1, a, A) = \{(s_1, w) \mid (A \to aw) \in P,\ A \in V - \{S\} \text{ e } w \in V^*\},$$
$$\delta(s_0, \varepsilon, \varepsilon) = \{(s_1, \varepsilon) \text{ se } (S \to \varepsilon) \in P\}.$$

□

Linguagens livres de contexto e PDA's

Teorema 1.27

- *Se $\mathcal{L}$ é uma LLC, então existe um PDA $\mathcal{P}$ que aceita $\mathcal{L}$.*

Demonstração.

1. $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{P})$.
2. $\mathcal{L}(\mathcal{P}) \subseteq \mathcal{L}$.

□

Teorema 1.27

- *Se $\mathcal{L}$ é uma LLC, então existe um PDA $\mathcal{P}$ que aceita $\mathcal{L}$.*

Demonstração.

1. $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{P})$.
   - Seja a derivação $S \overset{*}{\Longrightarrow} uw$, com $u \in \Sigma^+$ e $w \in V^*$.
   - Existe um processamento $[s_0, u, \varepsilon] \overset{*}{\longmapsto} [s_1, \varepsilon, w]$.

   (Indução no comprimento da derivação):
     - Base:
       Derivações $S \Longrightarrow aw$ de comprimento 1. A transição gerada pela regra $S \to aw$ é o processamento requerido.

□

Linguagens livres de contexto e PDA's

Teorema 1.27

- *Se $\mathcal{L}$ é uma LLC, então existe um PDA $\mathcal{P}$ que aceita $\mathcal{L}$.*

Demonstração.

1. $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{P})$.
   - Seja a derivação $S \overset{*}{\Longrightarrow} uw$, com $u \in \Sigma^+$ e $w \in V^*$.
   - Existe um processamento $[s_0, u, \varepsilon] \overset{*}{\longmapsto} [s_1, \varepsilon, w]$.

   (Indução no comprimento da derivação):
     - Hipótese:
       Suponha que para todas cadeias uw geradas por derivações $S \overset{n}{\Longrightarrow} uw$ existe em $\mathcal{P}$ um processamento $[s_0, u, \varepsilon] \overset{*}{\longmapsto} [s_1, \varepsilon, w]$.

□

Linguagens livres de contexto e PDA's

Teorema 1.27

- *Se $\mathcal{L}$ é uma LLC, então existe um PDA $\mathcal{P}$ que aceita $\mathcal{L}$.*

Demonstração.

1. $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{P})$.
   - Passo indutivo:
     - Seja a derivação $S \overset{n+1}{\Longrightarrow} uw$, com $u = va \in \Sigma^+$ e $w \in V^*$.
     - $S \overset{n}{\Longrightarrow} vAw_2 \Longrightarrow uw$, onde $w = w_1w_2$ e $(A \to aw_1) \in P$.
     - Por HI e $(s_1, w_1) \in \delta(s_1, a, A)$:

$$\begin{aligned} [s_0, va, \varepsilon] &\overset{*}{\longmapsto} [s_1, a, Aw_2] \\ &\longmapsto [s_1, \varepsilon, w_1w_2]. \end{aligned}$$

□

Linguagens livres de contexto e PDA's

Teorema 1.27

- *Se $\mathcal{L}$ é uma LLC, então existe um PDA $\mathcal{P}$ que aceita $\mathcal{L}$.*

Demonstração.

1. $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{P})$.
   - Passo indutivo:
     - Para toda $u \in \mathcal{L}$, com $|u| > 0$, a aceitação de u por $\mathcal{P}$ é mostrada pelo processamento correspondente à derivação $S \overset{*}{\Longrightarrow} u$.
     - Se $\varepsilon \in \mathcal{L}$, então $(S \to \varepsilon) \in P$ e o processamento $[s_0, \varepsilon, \varepsilon] \longmapsto [s_1, \varepsilon, \varepsilon]$ aceita ε.

□

Linguagens livres de contexto e PDA's

Teorema 1.27

- *Se $\mathcal{L}$ é uma LLC, então existe um PDA $\mathcal{P}$ que aceita $\mathcal{L}$.*

Demonstração.

2. $\mathcal{L}(\mathcal{P}) \subseteq \mathcal{L}$.
   - Mostrar que para todo processamento $[s_0, u, \varepsilon] \overset{*}{\longmapsto} [s_1, \varepsilon, w]$ existe a correspondente derivação $S \overset{*}{\Longrightarrow} uw$ em G.
     - Prova por indução.

$\square$

Linguagens livres de contexto e PDA's

- Toda linguagem aceita por um PDA é uma LLC.
  - As regras de derivação da GLC são construídas a partir das transições do PDA.
  - A gramática é construída de modo que a aplicação de uma regra de derivação corresponda a uma transição no PDA.
- Seja o PDA $\mathcal{P} = \langle \Sigma, \Gamma, E, s_0, \delta, F \rangle$. Um PDA estendido $\mathcal{P}'$ é construído a partir de $\mathcal{P}$ aumentando-se a função δ com as transições:
  1. $(s_j, \varepsilon) \in \delta(s_i, u, \varepsilon) \Rightarrow (s_j, X) \in \delta'(s_i, u, X), \ \forall X \in \Gamma$.
  2. $(s_j, Y) \in \delta(s_i, u, \varepsilon) \Rightarrow (s_j, YX) \in \delta'(s_i, u, X), \ \forall X \in \Gamma$.

Linguagens livres de contexto e PDA's

- A gramática $G = (V, \Sigma, P, S)$ é construída a partir das transições de $\mathcal{P}'$:
  - Σ.
  - $V = \{S\} \cup \{\langle s_i, X, s_j \rangle\}$, onde $s_i, s_j \in E$ e $X \in \Gamma \cup \{\varepsilon\}$.
    - $\langle s_i, X, s_j \rangle$: processamento em $\mathcal{P}'$ que inicia em s_i, encerra em s_j e desempilha X.

Linguagens livres de contexto e PDA's

- A gramática $G = (V, \Sigma, P, S)$ é construída a partir das transições de $\mathcal{P}'$:
  - Conjunto P de regras de derivação:
    1. $S \to \langle s_0, \varepsilon, s_j \rangle, \ \forall s_j \in F$,
    2. Cada transição $(s_j, Y) \in \delta'(s_i, u, X)$, onde $X, Y \in \Gamma \cup \{\varepsilon\}$, gera
    $$\{\langle s_i, X, s_k \rangle \to u \langle s_j, Y, s_k \rangle \mid s_k \in E\},$$
    3. Cada transição $(s_j, YX) \in \delta'(s_i, u, X)$, onde $X, Y \in \Gamma$, gera
    $$\{\langle s_i, X, s_k \rangle \to u \langle s_j, Y, s_n \rangle \langle s_n, X, s_k \rangle \mid s_k, s_n \in E\},$$
    4. $\langle s_k, \varepsilon, s_k \rangle \to \varepsilon, \ \forall s_k \in E$.

Linguagens livres de contexto e PDA's

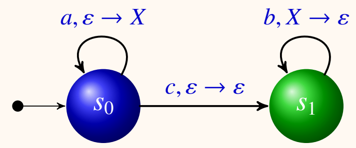
- Uma derivação começa com uma regra do tipo 1:
  - O lado direito representa um processamento que começa no estado s_0 e termina em um estado final com pilha vazia.
  - Um processamento de sucesso no PDA $\mathcal{P}'$.
- Regras do tipo 2 e 3 mapeiam as ações do PDA.
  - Regras do tipo 3 correspondem a transições estendidas de $\mathcal{P}'$, as quais aumentam o tamanho da pilha. O efeito na derivação é introduzir uma variável adicional.
- Regras do tipo 4 são usadas para terminar a derivação.
  - Representam um processamento a partir de um estado s_k para s_k que não altera a pilha (processamento nulo).

Linguagens livres de contexto e PDA's

Exemplo 1.28

- $\mathcal{L} = \{a^n c b^n \mid n \geqslant 0\}$.

- $\mathcal{P} = \langle \Sigma, \Gamma, E, s_0, \delta, F \rangle$:
  - $\Sigma = \{a, b, c\}$;
  - $\Gamma = \{X\}$;
  - $E = \{s_0, s_1\}$;
  - $F = \{s_1\}$;
  - $\delta(s_0, a, \varepsilon) = \{(s_0, X)\}$;
  - $\delta(s_0, c, \varepsilon) = \{(s_1, \varepsilon)\}$;
  - $\delta(s_1, b, X) = \{(s_1, \varepsilon)\}$.

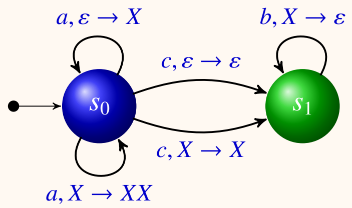


Linguagens livres de contexto e PDA's

Exemplo 1.28

- $\mathcal{L} = \{a^n c b^n \mid n \geqslant 0\}$.

- $\mathcal{P}' = \langle \Sigma, \Gamma, E, s_0, \delta', F \rangle$:
  - $\Sigma = \{a, b, c\}$;
  - $\Gamma = \{X\}$;
  - $E = \{s_0, s_1\}$;
  - $F = \{s_1\}$;
  - $\delta'(s_0, a, \varepsilon) = \{(s_0, X)\}$;
  - $\delta'(s_0, c, \varepsilon) = \{(s_1, \varepsilon)\}$;
  - $\delta'(s_1, b, X) = \{(s_1, \varepsilon)\}$;
  - $\delta'(s_0, a, X) = \{(s_0, XX)\}$;
  - $\delta'(s_0, c, X) = \{(s_1, X)\}$.



Linguagens livres de contexto e PDA's

Exemplo 1.28

- $\mathcal{L} = \{a^n c b^n \mid n \geqslant 0\}$.

- $G = (V, \Sigma, P, S)$:
  - Σ.
  - $V = \{S\} \cup \{\langle s_i, X, s_j \rangle\}$, onde $s_i, s_j \in E$ e $X \in \Gamma \cup \{\varepsilon\}$.

Linguagens livres de contexto e PDA's

Exemplo 1.28

- $\mathcal{L} = \{a^n c b^n \mid n \geqslant 0\}$.

Transições	Regras de derivação
	$S \to \langle s_0, \varepsilon, s_1\rangle$
$\delta'(s_0, a, \varepsilon) = \{(s_0, X)\}$	$\langle s_0, \varepsilon, s_0\rangle \to a\langle s_0, X, s_0\rangle$
	$\langle s_0, \varepsilon, s_1\rangle \to a\langle s_0, X, s_1\rangle$
$\delta'(s_0, c, \varepsilon) = \{(s_1, \varepsilon)\}$	$\langle s_0, \varepsilon, s_0\rangle \to c\langle s_1, \varepsilon, s_0\rangle$
	$\langle s_0, \varepsilon, s_1\rangle \to c\langle s_1, \varepsilon, s_1\rangle$
$\delta'(s_0, c, X) = \{(s_1, X)\}$	$\langle s_0, X, s_0\rangle \to c\langle s_1, X, s_0\rangle$
	$\langle s_0, X, s_1\rangle \to c\langle s_1, X, s_1\rangle$
$\delta'(s_1, b, X) = \{(s_1, \varepsilon)\}$	$\langle s_1, X, s_0\rangle \to b\langle s_1, \varepsilon, s_0\rangle$
	$\langle s_1, X, s_1\rangle \to b\langle s_1, \varepsilon, s_1\rangle$
$\delta'(s_0, a, X) = \{(s_0, XX)\}$	$\langle s_0, X, s_0\rangle \to a\langle s_0, X, s_0\rangle\langle s_0, X, s_0\rangle$
	$\langle s_0, X, s_0\rangle \to a\langle s_0, X, s_1\rangle\langle s_1, X, s_0\rangle$
	$\langle s_0, X, s_1\rangle \to a\langle s_0, X, s_0\rangle\langle s_0, X, s_1\rangle$
	$\langle s_0, X, s_1\rangle \to a\langle s_0, X, s_1\rangle\langle s_1, X, s_1\rangle$
	$\langle s_0, \varepsilon, s_0\rangle \to \varepsilon$
	$\langle s_1, \varepsilon, s_1\rangle \to \varepsilon$

Linguagens livres de contexto e PDA's

Exemplo 1.28

- $\mathcal{L} = \{a^n c b^n \mid n \geqslant 0\}$.

Variável	Variável original
A	$\langle s_0, \varepsilon, s_0\rangle$
B	$\langle s_0, \varepsilon, s_1\rangle$
C	$\langle s_1, \varepsilon, s_0\rangle$
D	$\langle s_1, \varepsilon, s_1\rangle$
E	$\langle s_0, X, s_0\rangle$
F	$\langle s_0, X, s_1\rangle$
G	$\langle s_1, X, s_0\rangle$
H	$\langle s_1, X, s_1\rangle$

Linguagens livres de contexto e PDA's

Exemplo 1.28

- $\mathcal{L} = \{a^n c b^n \mid n \geqslant 0\}$.

Transições	Regras de derivação
	$S \to B$
$\delta(s_0, a, \varepsilon) = \{(s_0, X)\}$	$A \to aE$
	$B \to aF$
$\delta(s_0, c, \varepsilon) = \{(s_1, \varepsilon)\}$	$A \to cC$
	$B \to cD$
$\delta(s_0, c, X) = \{(s_1, X)\}$	$E \to cG$
	$F \to cH$
$\delta(s_1, b, X) = \{(s_1, \varepsilon)\}$	$G \to bC$
	$H \to bD$
$\delta(s_0, a, X) = \{(s_0, XX)\}$	$E \to aEE$
	$E \to aFG$
	$F \to aEF$
	$F \to aFH$
	$A \to \varepsilon$
	$D \to \varepsilon$

Linguagens livres de contexto e PDA's

Exemplo 1.28

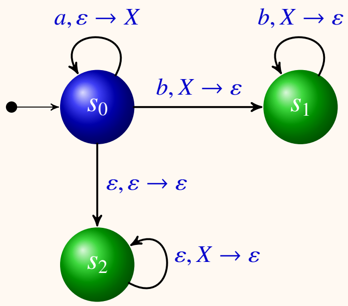
- $\mathcal{L} = \{a^n c b^n \mid n \geqslant 0\}$.
- $G = (V, \Sigma, P, S)$:
  - $V = \{S, B, D, F, H\} \equiv \{S, F\}$.
  - $\Sigma = \{a, b, c\}$.
  - $P = \left\{\begin{array}{l} S \to B, \\ B \to aF \mid cD, \\ D \to \varepsilon, \\ F \to aFH \mid cH, \\ H \to bD \end{array}\right\} \equiv \left\{\begin{array}{l} S \to aF \mid c, \\ F \to aFb \mid cb \end{array}\right\}$

Linguagens livres de contexto e PDA's

Exemplo 1.29

- $\mathcal{L} = \{a^i \mid i \geqslant 0\} \cup \{a^i b^i \mid i \geqslant 0\}$.

- $\mathcal{P} = \langle \Sigma, \Gamma, E, s_0, \delta, F \rangle$:
  - $\Sigma = \{a, b\}$;
  - $\Gamma = \{X\}$;
  - $E = \{s_0, s_1, s_2\}$;
  - $F = \{s_1, s_2\}$;
  - $\delta(s_0, a, \varepsilon) = \{(s_0, X)\}$;
  - $\delta(s_0, b, X) = \{(s_1, \varepsilon)\}$;
  - $\delta(s_0, \varepsilon, \varepsilon) = \{(s_2, \varepsilon)\}$;
  - $\delta(s_1, b, X) = \{(s_1, \varepsilon)\}$;
  - $\delta(s_2, \varepsilon, X) = \{(s_2, \varepsilon)\}$.

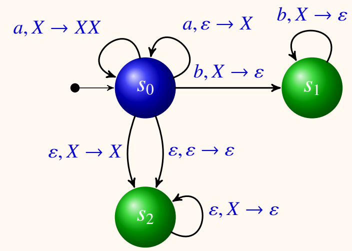


Linguagens livres de contexto e PDA's

Exemplo 1.29

- $\mathcal{L} = \{a^i \mid i \geqslant 0\} \cup \{a^i b^i \mid i \geqslant 0\}$.

- $\mathcal{P}' = \langle \Sigma, \Gamma, E, s_0, \delta', F \rangle$:
  - $\Sigma = \{a, b\}$;
  - $\Gamma = \{X\}$;
  - $E = \{s_0, s_1, s_2\}$;
  - $F = \{s_1, s_2\}$;
  - $\delta'(s_0, a, \varepsilon) = \{(s_0, X)\}$;
  - $\delta'(s_0, b, X) = \{(s_1, \varepsilon)\}$;
  - $\delta'(s_0, \varepsilon, \varepsilon) = \{(s_2, \varepsilon)\}$;
  - $\delta'(s_1, b, X) = \{(s_1, \varepsilon)\}$;
  - $\delta'(s_2, \varepsilon, X) = \{(s_2, \varepsilon)\}$;
  - $\delta'(s_0, a, X) = \{(s_0, XX)\}$;
  - $\delta'(s_0, \varepsilon, X) = \{(s_2, X)\}$.



Linguagens livres de contexto e PDA's

Exemplo 1.29

- $\mathcal{L} = \{a^i \mid i \geqslant 0\} \cup \{a^i b^i \mid i \geqslant 0\}$.

- $G = (V, \Sigma, P, S)$:
  - Σ.
  - $V = \{S\} \cup \{\langle s_i, X, s_j \rangle\}$, onde $s_i, s_j \in E$ e $X \in \Gamma \cup \{\varepsilon\}$.

Linguagens livres de contexto e PDA's

Exemplo 1.29

- $\mathcal{L} = \{a^i \mid i \geqslant 0\} \cup \{a^i b^i \mid i \geqslant 0\}$.

Transições	Regras de derivação
	$S \to \langle s_0, \varepsilon, s_1 \rangle$
	$S \to \langle s_0, \varepsilon, s_2 \rangle$
$\delta'(s_0, a, \varepsilon) = \{(s_0, X)\}$	$\langle s_0, \varepsilon, s_0 \rangle \to a\langle s_0, X, s_0 \rangle$
	$\langle s_0, \varepsilon, s_1 \rangle \to a\langle s_0, X, s_1 \rangle$
	$\langle s_0, \varepsilon, s_2 \rangle \to a\langle s_0, X, s_2 \rangle$
$\delta'(s_0, b, X) = \{(s_1, \varepsilon)\}$	$\langle s_0, X, s_0 \rangle \to b\langle s_1, \varepsilon, s_0 \rangle$
	$\langle s_0, X, s_1 \rangle \to b\langle s_1, \varepsilon, s_1 \rangle$
	$\langle s_0, X, s_2 \rangle \to b\langle s_1, \varepsilon, s_2 \rangle$
$\delta'(s_0, \varepsilon, \varepsilon) = \{(s_2, \varepsilon)\}$	$\langle s_0, \varepsilon, s_0 \rangle \to \varepsilon\langle s_2, \varepsilon, s_0 \rangle$
	$\langle s_0, \varepsilon, s_1 \rangle \to \varepsilon\langle s_2, \varepsilon, s_1 \rangle$
	$\langle s_0, \varepsilon, s_2 \rangle \to \varepsilon\langle s_2, \varepsilon, s_2 \rangle$
$\delta'(s_0, \varepsilon, X) = \{(s_2, X)\}$	$\langle s_0, X, s_0 \rangle \to \varepsilon\langle s_2, X, s_0 \rangle$
	$\langle s_0, X, s_1 \rangle \to \varepsilon\langle s_2, X, s_1 \rangle$
	$\langle s_0, X, s_2 \rangle \to \varepsilon\langle s_2, X, s_2 \rangle$

Linguagens livres de contexto e PDA's

Exemplo 1.29

- $\mathcal{L} = \{a^i \mid i \geqslant 0\} \cup \{a^i b^i \mid i \geqslant 0\}$.

Transições	Regras de derivação
$\delta'(s_0, a, X) = \{(s_0, XX)\}$	$\langle s_0, X, s_0\rangle \to a\langle s_0, X, s_0\rangle\langle s_0, X, s_0\rangle$
	$\langle s_0, X, s_1\rangle \to a\langle s_0, X, s_0\rangle\langle s_0, X, s_1\rangle$
	$\langle s_0, X, s_2\rangle \to a\langle s_0, X, s_0\rangle\langle s_0, X, s_2\rangle$
	$\langle s_0, X, s_0\rangle \to a\langle s_0, X, s_1\rangle\langle s_1, X, s_0\rangle$
	$\langle s_0, X, s_1\rangle \to a\langle s_0, X, s_1\rangle\langle s_1, X, s_1\rangle$
	$\langle s_0, X, s_2\rangle \to a\langle s_0, X, s_1\rangle\langle s_1, X, s_2\rangle$
	$\langle s_0, X, s_0\rangle \to a\langle s_0, X, s_2\rangle\langle s_2, X, s_0\rangle$
	$\langle s_0, X, s_1\rangle \to a\langle s_0, X, s_2\rangle\langle s_2, X, s_1\rangle$
	$\langle s_0, X, s_2\rangle \to a\langle s_0, X, s_2\rangle\langle s_2, X, s_2\rangle$

Linguagens livres de contexto e PDA's

Exemplo 1.29

- $\mathcal{L} = \{a^i \mid i \geqslant 0\} \cup \{a^i b^i \mid i \geqslant 0\}$.

Transições	Regras de derivação
$\delta'(s_1, b, X) = \{(s_1, \varepsilon)\}$	$\langle s_1, X, s_0\rangle \to b\langle s_1, \varepsilon, s_0\rangle$
	$\langle s_1, X, s_1\rangle \to b\langle s_1, \varepsilon, s_1\rangle$
	$\langle s_1, X, s_2\rangle \to b\langle s_1, \varepsilon, s_2\rangle$
$\delta'(s_2, \varepsilon, X) = \{(s_2, \varepsilon)\}$	$\langle s_2, X, s_0\rangle \to \varepsilon\langle s_2, \varepsilon, s_0\rangle$
	$\langle s_2, X, s_1\rangle \to \varepsilon\langle s_2, \varepsilon, s_1\rangle$
	$\langle s_2, X, s_2\rangle \to \varepsilon\langle s_2, \varepsilon, s_2\rangle$
	$\langle s_0, \varepsilon, s_0\rangle \to \varepsilon$
	$\langle s_1, \varepsilon, s_1\rangle \to \varepsilon$
	$\langle s_2, \varepsilon, s_2\rangle \to \varepsilon$

Linguagens livres de contexto e PDA's

Exemplo 1.29

- $\mathcal{L} = \{a^i \mid i \geqslant 0\} \cup \{a^i b^i \mid i \geqslant 0\}$.

Variável	Variável original
A	$\langle s_0, \varepsilon, s_0\rangle$
B	$\langle s_0, \varepsilon, s_1\rangle$
C	$\langle s_0, \varepsilon, s_2\rangle$
D	$\langle s_1, \varepsilon, s_0\rangle$
E	$\langle s_1, \varepsilon, s_1\rangle$
F	$\langle s_1, \varepsilon, s_2\rangle$
G	$\langle s_2, \varepsilon, s_0\rangle$
H	$\langle s_2, \varepsilon, s_1\rangle$
I	$\langle s_2, \varepsilon, s_2\rangle$

Variável	Variável original
J	$\langle s_0, X, s_0\rangle$
K	$\langle s_0, X, s_1\rangle$
L	$\langle s_0, X, s_2\rangle$
M	$\langle s_1, X, s_0\rangle$
N	$\langle s_1, X, s_1\rangle$
O	$\langle s_1, X, s_2\rangle$
P	$\langle s_2, X, s_0\rangle$
Q	$\langle s_2, X, s_1\rangle$
R	$\langle s_2, X, s_2\rangle$

Linguagens livres de contexto e PDA's

Exemplo 1.29

- $\mathcal{L} = \{a^i \mid i \geqslant 0\} \cup \{a^i b^i \mid i \geqslant 0\}$.

Transições	Regras de derivação
	$S \to B$
	$S \to C$
$\delta(s_0, a, \varepsilon) = \{(s_0, X)\}$	$A \to aJ$
	$B \to aK$
	$C \to aL$
$\delta(s_0, b, X) = \{(s_1, \varepsilon)\}$	$J \to bD$
	$K \to bE$
	$L \to bF$
$\delta(s_0, \varepsilon, \varepsilon) = \{(s_2, \varepsilon)\}$	$A \to G$
	$B \to H$
	$C \to I$
$\delta(s_0, \varepsilon, X) = \{(s_2, X)\}$	$J \to P$
	$K \to Q$
	$L \to R$

Linguagens livres de contexto e PDA's

Exemplo 1.29

- $\mathcal{L} = \{a^i \mid i \geqslant 0\} \cup \{a^i b^i \mid i \geqslant 0\}$.

Transições	Regras de derivação
$\delta(s_0, a, X) = \{(s_0, XX)\}$	$J \to aJJ$
	$K \to aJK$
	$L \to aJL$
	$J \to aKM$
	$K \to aKN$
	$L \to aKO$
	$J \to aLP$
	$K \to aLQ$
	$L \to aLR$

Linguagens livres de contexto e PDA's

Exemplo 1.29

- $\mathcal{L} = \{a^i \mid i \geqslant 0\} \cup \{a^i b^i \mid i \geqslant 0\}$.

Transições	Regras de derivação
$\delta(s_1, b, X) = \{(s_1, \varepsilon)\}$	$M \to bD$
	$N \to bE$
	$O \to bF$
$\delta(s_2, \varepsilon, X) = \{(s_2, \varepsilon)\}$	$P \to G$
	$Q \to H$
	$R \to I$
	$A \to \varepsilon$
	$E \to \varepsilon$
	$I \to \varepsilon$

Linguagens livres de contexto e PDA's

Exemplo 1.29

- $\mathcal{L} = \{a^i \mid i \geqslant 0\} \cup \{a^i b^i \mid i \geqslant 0\}$.
- $G = (V = \{S, A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R\}, \Sigma = \{a, b\}, P, S)$:

$$P = \left\{ \begin{array}{l} S \to B \mid C, \\ A \to aJ \mid G \mid \varepsilon, \\ B \to aK \mid H, \\ C \to aL \mid I, \\ E \to \varepsilon, \\ I \to \varepsilon, \\ J \to bD \mid P \mid aJJ \mid aKM \mid aLP, \\ K \to bE \mid Q \mid aJK \mid aKN \mid aLQ, \\ L \to bF \mid R \mid aJL \mid aKO \mid aLR, \\ M \to bD, \\ N \to bE, \\ O \to bF, \\ P \to G, \\ Q \to H, \\ R \to I \end{array} \right\}$$

Linguagens livres de contexto e PDA's

Exemplo 1.29

- $\mathcal{L} = \{a^i \mid i \geqslant 0\} \cup \{a^i b^i \mid i \geqslant 0\}$.
- $G_1 = (V_1 = \{S, B, C, E, I, J, K, L, N, R\}, \Sigma = \{a, b\}, P_1, S)$:

$$P_1 = \left\{ \begin{array}{l} S \to B \mid C, \\ B \to aK, \\ C \to aL \mid I, \\ E \to \varepsilon, \\ I \to \varepsilon, \\ J \to aJJ, \\ K \to bE \mid aJK \mid aKN, \\ L \to R \mid aJL \mid aLR, \\ N \to bE, \\ R \to bI \end{array} \right\}$$

Linguagens livres de contexto e PDA's

Exemplo 1.29

- $\mathcal{L} = \{a^i \mid i \geqslant 0\} \cup \{a^i b^i \mid i \geqslant 0\}$.
- $G_2 = (V_2 = \{S, B, C, E, I, K, L, N, R\}, \Sigma = \{a, b\}, P_2, S)$:

$$P_2 = \left\{ \begin{array}{l} S \to B \mid C, \\ B \to aK, \\ C \to aL \mid I, \\ E \to \varepsilon, \\ I \to \varepsilon, \\ K \to bE \mid aKN, \\ L \to R \mid aLR, \\ N \to bE, \\ R \to I \end{array} \right\}$$

Linguagens livres de contexto e PDA's

Exemplo 1.29

- $\mathcal{L} = \{a^i \mid i \geqslant 0\} \cup \{a^i b^i \mid i \geqslant 0\}$.
- $G_3 = (V_3 = \{S, K, L\}, \Sigma = \{a, b\}, P_3, S)$:

$$P_3 = \left\{ \begin{array}{l} S \to aK \mid aL \mid \varepsilon, \\ K \to b \mid aKb, \\ L \to \varepsilon \mid aL \end{array} \right\}$$

- $G_4 = (V_4 = \{S, K, L\}, \Sigma = \{a, b\}, P_4, S)$:

$$P_4 = \left\{ \begin{array}{l} S \to aK \mid aL \mid a \mid \varepsilon, \\ K \to b \mid aKb, \\ L \to a \mid aL \end{array} \right\}$$

Equivalência com GLC

Corolário 1.30

- *Toda linguagem regular é livre de contexto.*

Demonstração.

- Toda linguagem regular é reconhecida por um autômato finito.
- Todo autômato finito é um autômato com pilha que simplesmente ignora a sua pilha.
- Toda linguagem regular é também livre de contexto.

Linguagens **L**ivres de **C**ontexto
(*Autômato com Pilha – PDA*)

Linguagens **R**egulares
(*Autômato Finito – DFA*)

□

Livros texto

R. P. Grimaldi
Discrete and Combinatorial Mathematics – An Applied Introduction.
Addison Wesley, 1994.

D. J. Velleman
How To Prove It – A Structured Approach.
Cambridge University Press, 1996.

J. E. Hopcroft; J. Ullman.
Introdução Ã Teoria de Autômatos, Linguagens e Computação.
Ed. Campus.

T. A. Sudkamp.
Languages and Machines – An Introduction to the Theory of Computer Science.
Addison Wesley Longman, Inc. 1998.

J. Carroll; D. Long.
Theory of Finite Automata – With an Introduction to Formal Languages.
Prentice-Hall, 1989.

M. Sipser.
Introduction to the Theory of Computation.
PWS Publishing Company, 1997.

H. R. Lewis; C. H. Papadimitriou
Elementos de Teoria da Computação.
Bookman, 2000.