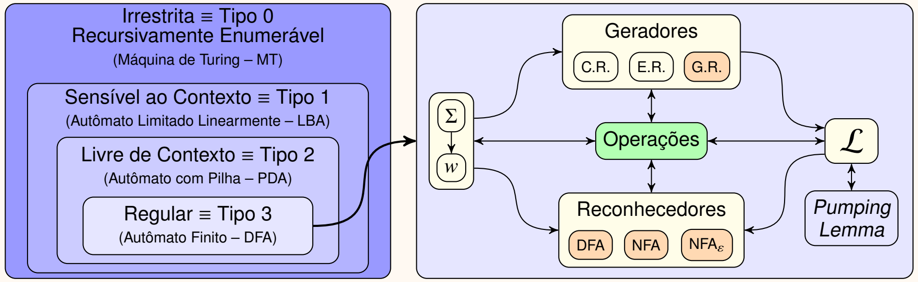
Linguagens Formais e Autômatos

Humberto Longo

Instituto de Informática
Universidade Federal de Goiás

Bacharelado em Ciência da Computação, 2021/1

Roteiro



Gramática regular

- Uma gramática $G = (V, \Sigma, P, S)$ é regular se é uma GLC e toda regra de derivação está numa das seguintes formas:
  1. $A \to aB$
  2. $A \to a$
  3. $A \to \varepsilon$,

  onde $A, B \in V$ e $a \in \Sigma$.
- Uma derivação é terminada por uma regra da forma $A \to a$ ou $A \to \varepsilon$.
- A linguagem gerada por uma gramática regular é chamada regular.

Gramáticas regulares e autômatos

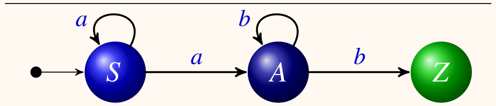
Exemplo 1.19

- Linguagem a^+b^+.

Gramática G:

$S \to aS \mid aA$
$A \to bA \mid b$

NFA N:



Derivação	Processamento	Cadeia
$S \Rightarrow aS$	$[S, aabb] \mapsto [S, abb]$	a
$\Rightarrow aaA$	$\mapsto [A, bb]$	aa
$\Rightarrow aabA$	$\mapsto [A, b]$	aab
$\Rightarrow aabb$	$\mapsto [Z, \varepsilon]$	$aabb$

Gramáticas regulares e autômatos

- O diagrama de estados de um NFA N pode ser construído diretamente a partir das regras de derivação de uma gramática G:
  - Estados de N são as variáveis de G e, possivelmente, um estado final adicional.
  - No exemplo 1.19 as transições $\delta(S, a) = S, \delta(S, a) = A$ e $\delta(A, b) = A$ de N correspondem às regras $S \to aS, S \to aA$ e $A \to bA$ de G.

Gramáticas regulares e autômatos

Teorema 1.20

- *Se $G = (V, \Sigma, P, S)$ é uma gramática regular, então o NFA $N = \langle \Sigma, Q, q_0, \delta, F \rangle$, definido como segue, é tal que $\mathcal{L}(N) = \mathcal{L}(G)$:*
  1. $Q = \begin{cases} V \cup \{Z\}, & \text{se } (A \to a) \in P, \text{ onde } Z \notin V. \\ V, & \text{caso contrário.} \end{cases}$
  2. *$\delta(A, a) = B$, sempre que $A \to aB \in P$.*
     $\delta(A, a) = Z$, sempre que $A \to a \in P$.
  3. $F = \begin{cases} \{A \mid A \to \varepsilon \in P\} \cup \{Z\}, & \text{se } Z \in Q. \\ \{A \mid A \to \varepsilon \in P\}, & \text{caso contrário.} \end{cases}$

Gramáticas regulares e autômatos

Demonstração.

1. $\mathcal{L}(G) \subseteq \mathcal{L}(N)$
   - A construção das transições de N a partir das regras de derivação de G permite que toda derivação em G seja mapeada para um processamento em N.
   - A derivação de uma cadeia de terminais tem uma das formas $S \Longrightarrow \varepsilon$, $S \overset{*}{\Longrightarrow} wC \Longrightarrow wa$ ou $S \overset{*}{\Longrightarrow} wC \Longrightarrow w$, onde a derivação $S \overset{*}{\Longrightarrow} wC$ consiste de regras da forma $S \to aB$.
   - Se $\varepsilon \in \mathcal{L}(G)$, então $S \in F$ e $\varepsilon \in \mathcal{L}(N)$.
   - Existe um processamento em N que processa a cadeia w e termina no estado C, sempre que wC é uma forma sentencial de G.
     - Prova por indução (**Exercício**).

□

Gramáticas regulares e autômatos

Demonstração.

1. $\mathcal{L}(G) \subseteq \mathcal{L}(N)$
   - A derivação de uma cadeia não nula é encerrada pela aplicação de uma regra $C \to a$ ou $C \to \varepsilon$.
   - Em uma derivação da forma $S \overset{*}{\Longrightarrow} wC \Longrightarrow wa$, a aplicação da regra final corresponde à transição $\delta(C, a) = Z$, levando N para um estado final.
   - Uma derivação da forma $S \overset{*}{\Longrightarrow} wC \Longrightarrow w$ é encerrada por uma ε-regra.
   - Como $C \to \varepsilon \in P$, C é um estado final em N.
   - A aceitação de w por N é dada pelo processamento que corresponde à derivação $S \overset{*}{\Longrightarrow} wC$.

□

Gramáticas regulares e autômatos

Demonstração.

2. $\mathcal{L}(N) \subseteq \mathcal{L}(G)$
   - O processamento de $w = ua \in \mathcal{L}(M)$ tem a forma $[S, w] \overset{*}{\longmapsto} [B, \varepsilon]$, onde $B \neq Z$, ou $[S, w] \overset{*}{\longmapsto} [A, a] \longmapsto [Z, \varepsilon]$.
   - No primeiro caso, B é o lado esquerdo de uma ε-regra de G. A cadeia wB pode ser derivada pela aplicação de regras que correspondam às transições. A geração de w é completada pela aplicação de uma ε-regra.
   - A derivação de uA pode ser construída a partir de regras que correspondem às transições no processamento $[S, w] \overset{*}{\longmapsto} [A, a]$. A cadeia w é obtida ao encerrar a derivação com a regra $A \to a$.
   - Portanto, toda cadeia aceita por N pertence à linguagem de G.

$\square$

Gramáticas regulares e autômatos

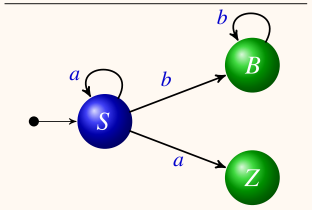
Exemplo 1.21

- Linguagem $a^*(a \cup b^+)$.

Gramática G:

$S \to aS \mid bB \mid a$
$B \to bB \mid \varepsilon$

NFA N:



Gramática G:

$S \to aS \mid bB \mid aZ$
$B \to bB \mid \varepsilon$
$Z \to \varepsilon$

Gramáticas regulares e autômatos

- Construção de uma gramática regular a partir de um NFA:
  - Transição $\delta(A, a) = B$ produz a regra $A \to aB$.
  - Se C é um estado final, a regra $C \to \varepsilon$ é produzida.
- Uma gramática G construída a partir de um NFA N, pode ser transformada em um autômato equivalente:
  - $N \longrightarrow G \longrightarrow N'$.
- Uma gramática regular pode ser convertida em um NFA N, o qual pode ser transformada em uma gramática G'.
  - $G \longrightarrow N \longrightarrow G'$.

Gramáticas regulares e autômatos

- Conclusão das técnicas de conversão:
  - As linguagens geradas por gramáticas regulares são exatamente aquelas aceitas por autômatos finitos.
  - A linguagem gerada por uma gramática regular é um conjunto regular (conseqüência dos Teoremas 1.20 e 5.33).
  - A conversão de autômato para gramática regular garante que todo conjunto regular é gerado por alguma gramática regular.
  - Caracterização de conjuntos regulares: linguagens geradas por gramáticas regulares.

Gramáticas regulares e autômatos

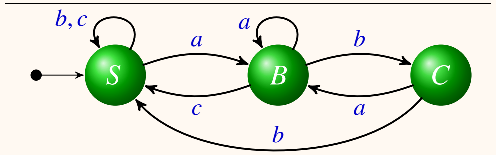
Exemplo 1.22

- Conjunto de cadeias, sobre $\Sigma = \{a, b, c\}$, que não contêm abc.

Gramática G:

$S \to bS \mid cS \mid aB \mid \varepsilon$
$B \to aB \mid cS \mid bC \mid \varepsilon$
$C \to aB \mid bS \mid \varepsilon$

NFA N:



Gramáticas regulares e autômatos

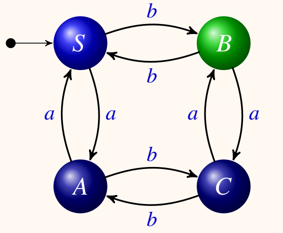
Exemplo 1.23

- Cadeias, sobre $\Sigma = \{a, b\}$, com nr. par de a's e ímpar de b's.

Gramática G:

$S \to aA \mid bB$
$A \to aS \mid bC$
$B \to bS \mid aC \mid \varepsilon$
$C \to aB \mid bA$

NFA N:



Gramáticas regulares e autômatos

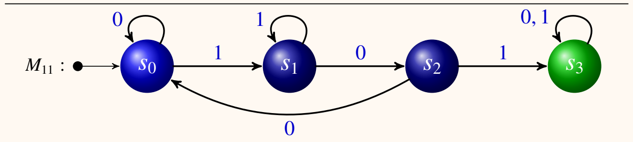
Exemplo 1.24

- $\mathcal{L}(M_{11}) = (0 \cup 1^{+}00)^{*}1^{+}01(0 \cup 1)^{*}$.

Gramática G:

$S \to 0S \mid 1A$
$A \to 0B \mid 1A$
$B \to 0S \mid 1C$
$C \to 0C \mid 1C \mid \varepsilon$

DFA M_{11}:



Livros texto

R. P. Grimaldi
Discrete and Combinatorial Mathematics – An Applied Introduction.
Addison Wesley, 1994.

D. J. Velleman
How To Prove It – A Structured Approach.
Cambridge University Press, 1996.

J. E. Hopcroft; J. Ullman.
Introdução Ã Teoria de Autômatos, Linguagens e Computação.
Ed. Campus.

T. A. Sudkamp.
Languages and Machines – An Introduction to the Theory of Computer Science.
Addison Wesley Longman, Inc. 1998.

J. Carroll; D. Long.
Theory of Finite Automata – With an Introduction to Formal Languages.
Prentice-Hall, 1989.

M. Sipser.
Introduction to the Theory of Computation.
PWS Publishing Company, 1997.

H. R. Lewis; C. H. Papadimitriou
Elementos de Teoria da Computação.
Bookman, 2000.