# Linguagens Formais e Autômatos

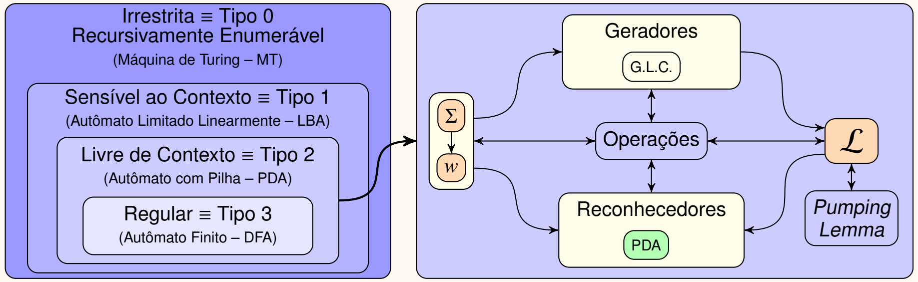

Humberto Longo

Instituto de Informática
Universidade Federal de Goiás


Bacharelado em Ciência da Computação, 2021/1



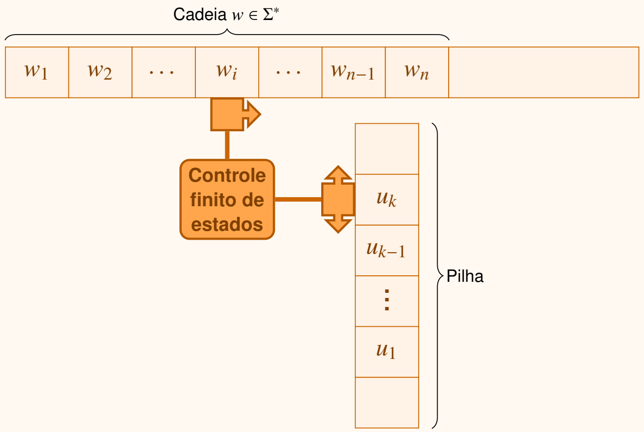
# Roteiro






# *Pushdown Automata*

## Esquema básico






# Definição

## Definição 1.1

- Um Autômato com Pilha (*PDA – Pushdown Automaton*) é uma sextupla $P = \langle \Sigma, \Gamma, S, s_0, \delta, F \rangle$, onde:
  - $\Sigma$ : alfabeto de entrada;
  - $\Gamma$ : alfabeto da pilha;
  - $S \neq \emptyset$ : conjunto finito de estados;
  - $s_0 \in S$ : estado inicial;
  - $\delta : S \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times (\Gamma \cup \{\varepsilon\}) \to \mathcal{P}(S \times (\Gamma \cup \{\varepsilon\}))$ : função de transição de estados; e
  - $F \subseteq S$ : conjunto de estados finais (ou de aceitação).

## Processamento de um PDA

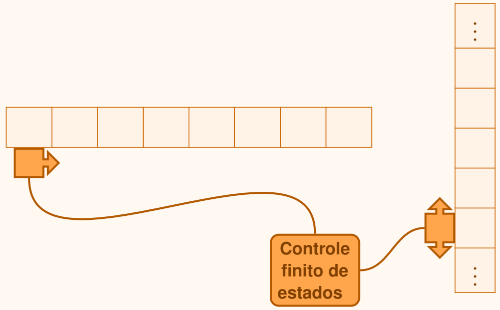
- Definição formal não contém mecanismos para testar pilha vazia.
- Um $PDA$ pode simular esse mecanismo com um símbolo particular (por exemplo, \$):
  - \$ é o primeiro símbolo a ser colocado na pilha.
  - Quando o $PDA$ ler novamente o \$, então a pilha está vazia.



## Exemplo de autômato com pilha

### Exemplo 1.2

- $\mathcal{L}(P) = \{a^i b^i \mid i \geqslant 0\}$
- $P = \langle \Sigma, \Gamma, S, s_0, \delta, F \rangle =$
  $\langle \{a, b\}, \{x\}, \{s_0, s_1\}, s_0, \delta, \{s_0, s_1\} \rangle$:
  - $\delta(s_0, a, \varepsilon) = \{(s_0, x)\}$
  - $\delta(s_0, b, x) = \{(s_1, \varepsilon)\}$
  - $\delta(s_1, b, x) = \{(s_1, \varepsilon)\}$



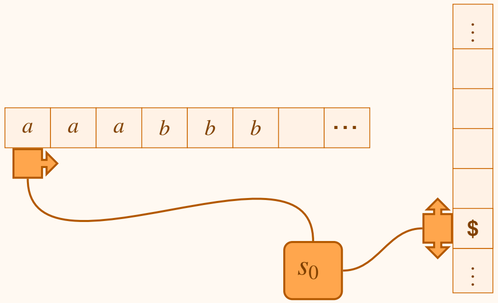

Reconhecedores



## Exemplo de autômato com pilha

### Exemplo 1.2

- $\mathcal{L}(P) = \{a^i b^i \mid i \geqslant 0\}$
- $P = \langle \Sigma, \Gamma, S, s_0, \delta, F \rangle =$
  $\langle \{a, b\}, \{x\}, \{s_0, s_1\}, s_0, \delta, \{s_0, s_1\} \rangle$:
  - $\delta(s_0, a, \varepsilon) = \{(s_0, x)\}$
  - $\delta(s_0, b, x) = \{(s_1, \varepsilon)\}$
  - $\delta(s_1, b, x) = \{(s_1, \varepsilon)\}$



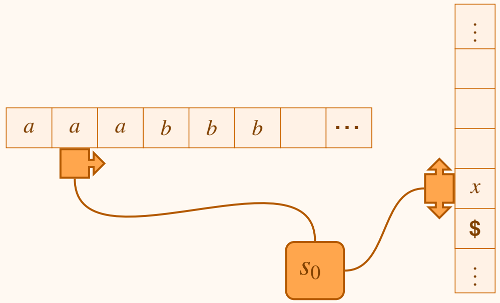

Reconhecedores



## Exemplo de autômato com pilha

### Exemplo 1.2

- $\mathcal{L}(P) = \{a^i b^i \mid i \geqslant 0\}$
- $P = \langle \Sigma, \Gamma, S, s_0, \delta, F \rangle =$
  $\langle \{a, b\}, \{x\}, \{s_0, s_1\}, s_0, \delta, \{s_0, s_1\} \rangle$:
  - $\delta(s_0, a, \varepsilon) = \{(s_0, x)\}$
  - $\delta(s_0, b, x) = \{(s_1, \varepsilon)\}$
  - $\delta(s_1, b, x) = \{(s_1, \varepsilon)\}$

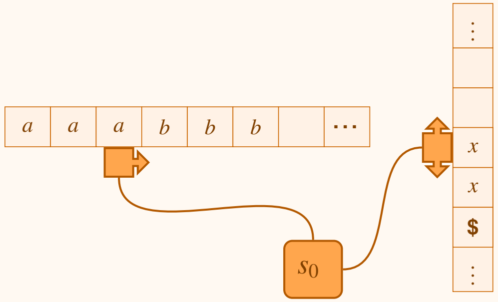



Reconhecedores

# Exemplo de autômato com pilha

## Exemplo 1.2

- $\mathcal{L}(P) = \{a^i b^i \mid i \geqslant 0\}$
- $P = \langle \Sigma, \Gamma, S, s_0, \delta, F \rangle =$
  $\langle \{a, b\}, \{x\}, \{s_0, s_1\}, s_0, \delta, \{s_0, s_1\} \rangle$:
  - $\delta(s_0, a, \varepsilon) = \{(s_0, x)\}$
  - $\delta(s_0, b, x) = \{(s_1, \varepsilon)\}$
  - $\delta(s_1, b, x) = \{(s_1, \varepsilon)\}$



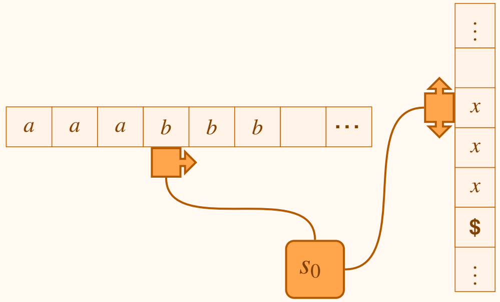

Reconhecedores



# Exemplo de autômato com pilha

## Exemplo 1.2

- $\mathcal{L}(P) = \{a^i b^i \mid i \geqslant 0\}$
- $P = \langle \Sigma, \Gamma, S, s_0, \delta, F \rangle =$
  $\langle \{a, b\}, \{x\}, \{s_0, s_1\}, s_0, \delta, \{s_0, s_1\} \rangle$:
  - $\delta(s_0, a, \varepsilon) = \{(s_0, x)\}$
  - $\delta(s_0, b, x) = \{(s_1, \varepsilon)\}$
  - $\delta(s_1, b, x) = \{(s_1, \varepsilon)\}$



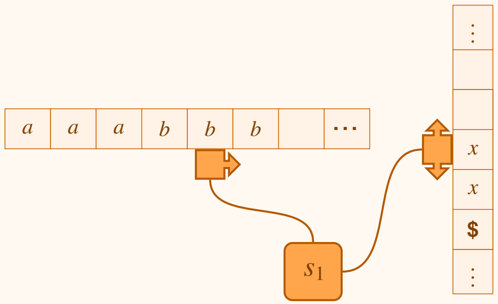

Reconhecedores



# Exemplo de autômato com pilha

## Exemplo 1.2

- $\mathcal{L}(P) = \{a^i b^i \mid i \geqslant 0\}$
- $P = \langle \Sigma, \Gamma, S, s_0, \delta, F \rangle =$
  $\langle \{a, b\}, \{x\}, \{s_0, s_1\}, s_0, \delta, \{s_0, s_1\} \rangle$:
  - $\delta(s_0, a, \varepsilon) = \{(s_0, x)\}$
  - $\delta(s_0, b, x) = \{(s_1, \varepsilon)\}$
  - $\delta(s_1, b, x) = \{(s_1, \varepsilon)\}$



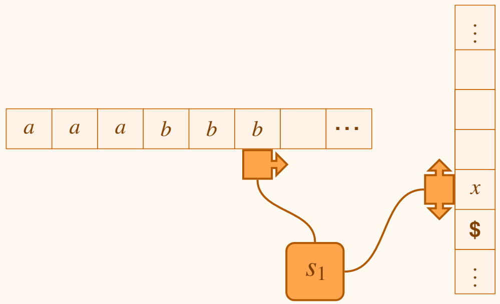

Reconhecedores



# Exemplo de autômato com pilha

## Exemplo 1.2

- $\mathcal{L}(P) = \{a^i b^i \mid i \geqslant 0\}$
- $P = \langle \Sigma, \Gamma, S, s_0, \delta, F \rangle =$
  $\langle \{a, b\}, \{x\}, \{s_0, s_1\}, s_0, \delta, \{s_0, s_1\} \rangle$:
  - $\delta(s_0, a, \varepsilon) = \{(s_0, x)\}$
  - $\delta(s_0, b, x) = \{(s_1, \varepsilon)\}$
  - $\delta(s_1, b, x) = \{(s_1, \varepsilon)\}$

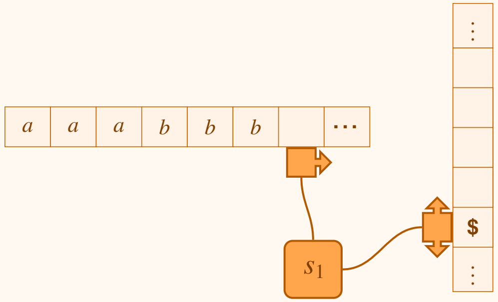



Reconhecedores

# Exemplo de autômato com pilha

## Exemplo 1.2

- $\mathcal{L}(P) = \{a^i b^i \mid i \geqslant 0\}$
- $P = \langle \Sigma, \Gamma, S, s_0, \delta, F \rangle =$
  $\langle \{a, b\}, \{x\}, \{s_0, s_1\}, s_0, \delta, \{s_0, s_1\} \rangle$:
  - $\delta(s_0, a, \varepsilon) = \{(s_0, x)\}$
  - $\delta(s_0, b, x) = \{(s_1, \varepsilon)\}$
  - $\delta(s_1, b, x) = \{(s_1, \varepsilon)\}$



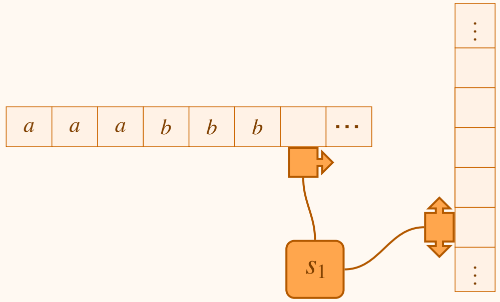

Reconhecedores



# Exemplo de autômato com pilha

## Exemplo 1.2

- $\mathcal{L}(P) = \{a^i b^i \mid i \geqslant 0\}$
- $P = \langle \Sigma, \Gamma, S, s_0, \delta, F \rangle =$
  $\langle \{a, b\}, \{x\}, \{s_0, s_1\}, s_0, \delta, \{s_0, s_1\} \rangle$:
  - $\delta(s_0, a, \varepsilon) = \{(s_0, x)\}$
  - $\delta(s_0, b, x) = \{(s_1, \varepsilon)\}$
  - $\delta(s_1, b, x) = \{(s_1, \varepsilon)\}$




Reconhecedores



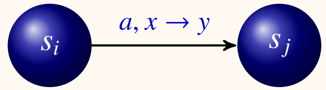
# Processamento de um PDA

- $\delta(s_i, a, x) = \{(s_j, y), (s_k, z)\}$.
  - Duas transições possíveis quando o autômato está no estado $s_i$, lendo o símbolo $a$ de entrada e com $x$ no topo da pilha.
- A transição $\delta(s_i, a, x) = (s_j, y)$ força o autômato a:
  1. Mudar o estado corrente de $s_i$ para $s_j$;
  2. Processar o símbolo $a$ (avançar a cabeça de leitura da fita);
  3. Remover o símbolo $x$ do topo da pilha; e
  4. Colocar o símbolo $y$ no topo da pilha.



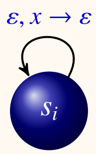
# Representação gráfica

- $a, b \rightarrow c$:
  - $a = \varepsilon$ : transição sem ler símbolo de entrada.
  - $b = \varepsilon$ : transição sem ler símbolo da pilha.
  - $c = \varepsilon$ : transição sem escrever na pilha.
- $\delta(s_i, a, x) = \{(s_j, y)\}$.
  - O PDA muda do estado $s_i$ para o $s_j$, lê $a$ da fita de entrada, desempilha $x$ e empilha $y$.



## Representação gráfica

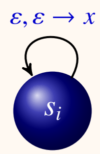
- $\delta(s_i, \varepsilon, x) = \{(s_i, \varepsilon)\}$.
  - Se a posição de entrada é $\varepsilon$, a transição não processa um símbolo de entrada, mas desempilha o $x$.






## Representação gráfica

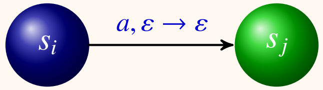
- $\delta(s_i, \varepsilon, \varepsilon) = \{(s_i, x)\}$.
  - Se a posição de entrada é $\varepsilon$, a transição não processa um símbolo de entrada, mas empilha o $x$.






## Representação gráfica

- $\delta(s_i, a, \varepsilon) = \{(s_j, \varepsilon)\}$.
  - Transição equivalente a transição de um DFA.
  - Efeito determinado somente pelo estado corrente e pelo símbolo de entrada.
  - Transição não consulta e não altera a pilha.






## Processamento de um PDA

- $P = \langle \Sigma, \Gamma, S, s_{ini}, \delta, F \rangle$.
- $w = w_1 w_2 \ldots w_m$, com $w_i \in \Sigma,\ i = 1, \ldots, m$ : cadeia de entrada.
- $s_0, s_1, \ldots, s_m \in Q$ : sequência de estados.
- $u_0, u_1, \ldots, u_m \in \Gamma^*$ : sequência de conteúdos da pilha.

## Processamento de um PDA

- $P$ aceita a cadeia $w$ se:
  1. $s_0 = s_{ini}$ e $u_0 = \varepsilon$.
     - $P$ começa no estado inicial e com a pilha vazia.
  2. $(s_{i+1}, u_{i+1}) \in \delta(s_i, w_{i+1}, u_i)$, $i = 0, \ldots, m-1$, onde $u_i = av$ e $u_{i+1} = bv'$ para $a, b \in \Gamma \cup \{\varepsilon\}$ e $v, v' \in \Gamma^*$.
     - $P$ move-se de acordo com o estado atual, a pilha e o próximo símbolo da cadeia.
  3. $s_m \in F$.
     - Um estado final ocorre no final da cadeia.



## Configuração de um PDA

### Definição 1.3

- Tripla $[s_i, w, \alpha]$, onde $s_i$ é o estado corrente, $w \in \Sigma^*$ é o conjunto de símbolos ainda não processados e $\alpha$ é o conteúdo da pilha.

### Notação

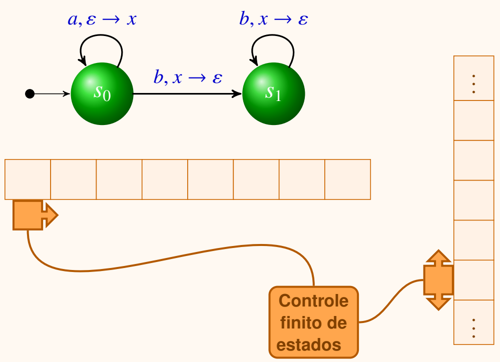
- $\underset{P}{\longmapsto}$ : define a função de $S \times \Sigma^* \times \Gamma^*$ em $S \times \Sigma^* \times \Gamma^*$ do PDA $P$.
- $[s_i, w, \alpha] \underset{P}{\longmapsto} [s_j, v, \beta]$ : configuração $[s_j, v, \beta]$ é obtida a partir de $[s_i, w, \alpha]$ com apenas uma transição de estados.
- $\overset{*}{\underset{P}{\longmapsto}}$ : representa uma sequência de transições.



## Exemplo de autômato com pilha

### Exemplo 1.4

- $\mathcal{L}(P) = \{a^i b^i \mid i \geqslant 0\}$
- $P = \langle \Sigma, \Gamma, S, s_0, \delta, F \rangle =$
  $\langle \{a, b\}, \{x\}, \{s_0, s_1\}, s_0, \delta, \{s_0, s_1\} \rangle$:
  - $\delta(s_0, a, \varepsilon) = \{(s_0, x)\}$
  - $\delta(s_0, b, x) = \{(s_1, \varepsilon)\}$
  - $\delta(s_1, b, x) = \{(s_1, \varepsilon)\}$
- $[s_0, \varepsilon, \varepsilon]$

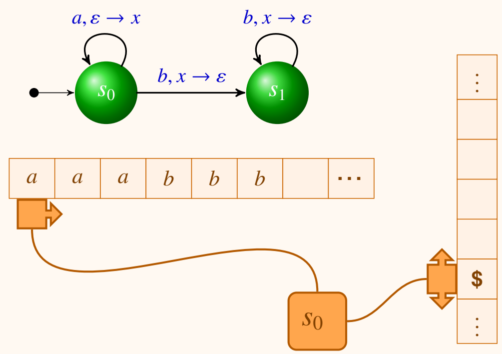





## Exemplo de autômato com pilha

### Exemplo 1.4

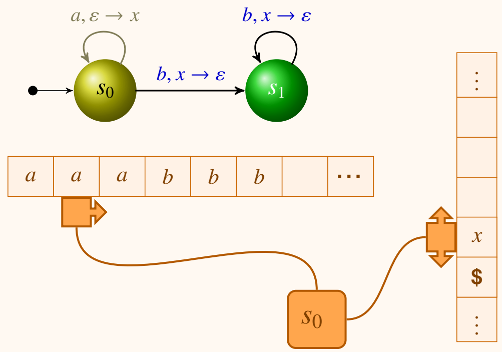
- $\mathcal{L}(P) = \{a^i b^i \mid i \geqslant 0\}$
- $P = \langle \Sigma, \Gamma, S, s_0, \delta, F \rangle =$
  $\langle \{a, b\}, \{x\}, \{s_0, s_1\}, s_0, \delta, \{s_0, s_1\} \rangle$:
  - $\delta(s_0, a, \varepsilon) = \{(s_0, x)\}$
  - $\delta(s_0, b, x) = \{(s_1, \varepsilon)\}$
  - $\delta(s_1, b, x) = \{(s_1, \varepsilon)\}$
- $[s_0, \varepsilon, \varepsilon] \longmapsto$
  $[s_0, aaabbb, \$]$



## Exemplo de autômato com pilha

### Exemplo 1.4

- $\mathcal{L}(P) = \{a^i b^i \mid i \geqslant 0\}$
- $P = \langle \Sigma, \Gamma, S, s_0, \delta, F \rangle =$
  $\langle \{a, b\}, \{x\}, \{s_0, s_1\}, s_0, \delta, \{s_0, s_1\} \rangle$:
  - $\delta(s_0, a, \varepsilon) = \{(s_0, x)\}$
  - $\delta(s_0, b, x) = \{(s_1, \varepsilon)\}$
  - $\delta(s_1, b, x) = \{(s_1, \varepsilon)\}$
- $[s_0, \varepsilon, \varepsilon] \longmapsto$
  $[s_0, aaabbb, \$] \longmapsto$
  $[s_0, aabbb, x\$]$

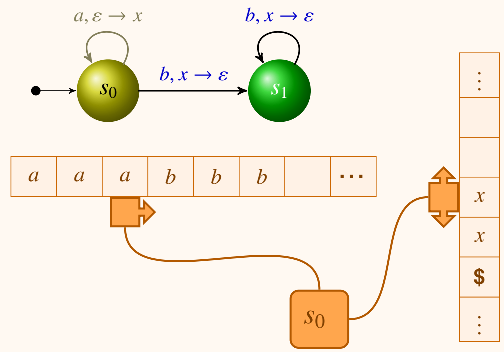





## Exemplo de autômato com pilha

### Exemplo 1.4

- $\mathcal{L}(P) = \{a^i b^i \mid i \geqslant 0\}$
- $P = \langle \Sigma, \Gamma, S, s_0, \delta, F \rangle =$
  $\langle \{a, b\}, \{x\}, \{s_0, s_1\}, s_0, \delta, \{s_0, s_1\} \rangle$:
  - $\delta(s_0, a, \varepsilon) = \{(s_0, x)\}$
  - $\delta(s_0, b, x) = \{(s_1, \varepsilon)\}$
  - $\delta(s_1, b, x) = \{(s_1, \varepsilon)\}$
- $[s_0, \varepsilon, \varepsilon] \longmapsto$
  $[s_0, aaabbb, \$] \longmapsto$
  $[s_0, aabbb, x\$] \longmapsto$
  $[s_0, abbb, xx\$]$

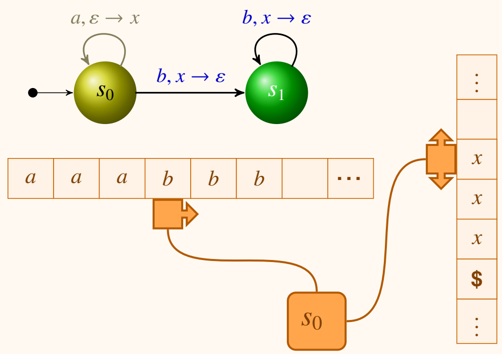





## Exemplo de autômato com pilha

### Exemplo 1.4

- $\mathcal{L}(P) = \{a^i b^i \mid i \geqslant 0\}$
- $P = \langle \Sigma, \Gamma, S, s_0, \delta, F \rangle =$
  $\langle \{a, b\}, \{x\}, \{s_0, s_1\}, s_0, \delta, \{s_0, s_1\} \rangle$:
  - $\delta(s_0, a, \varepsilon) = \{(s_0, x)\}$
  - $\delta(s_0, b, x) = \{(s_1, \varepsilon)\}$
  - $\delta(s_1, b, x) = \{(s_1, \varepsilon)\}$
- $[s_0, \varepsilon, \varepsilon] \longmapsto$
  $[s_0, aaabbb, \$] \longmapsto$
  $[s_0, aabbb, x\$] \longmapsto$
  $[s_0, abbb, xx\$] \longmapsto$
  $[s_0, bbb, xxx\$]$

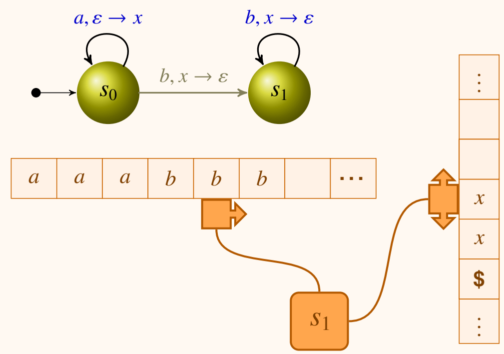





## Exemplo de autômato com pilha

### Exemplo 1.4

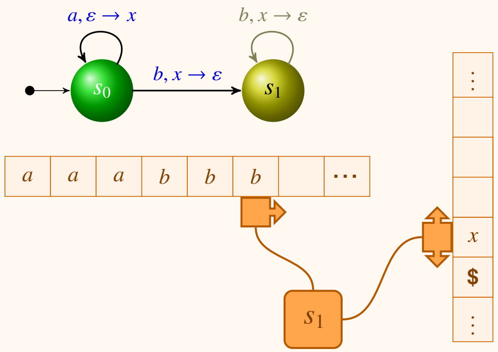
- $\mathcal{L}(P) = \{a^i b^i \mid i \geqslant 0\}$
- $P = \langle \Sigma, \Gamma, S, s_0, \delta, F \rangle =$
  $\langle \{a, b\}, \{x\}, \{s_0, s_1\}, s_0, \delta, \{s_0, s_1\} \rangle$:
  - $\delta(s_0, a, \varepsilon) = \{(s_0, x)\}$
  - $\delta(s_0, b, x) = \{(s_1, \varepsilon)\}$
  - $\delta(s_1, b, x) = \{(s_1, \varepsilon)\}$
- $[s_0, \varepsilon, \varepsilon] \longmapsto$
  $[s_0, aaabbb, \$] \longmapsto$
  $[s_0, aabbb, x\$] \longmapsto$
  $[s_0, abbb, xx\$] \longmapsto$
  $[s_0, bbb, xxx\$] \longmapsto$
  $[s_1, bb, xx\$]$



## Exemplo de autômato com pilha

### Exemplo 1.4

- $\mathcal{L}(P) = \{a^i b^i \mid i \geqslant 0\}$
- $P = \langle \Sigma, \Gamma, S, s_0, \delta, F \rangle =$
  $\langle \{a, b\}, \{x\}, \{s_0, s_1\}, s_0, \delta, \{s_0, s_1\} \rangle$:
  - $\delta(s_0, a, \varepsilon) = \{(s_0, x)\}$
  - $\delta(s_0, b, x) = \{(s_1, \varepsilon)\}$
  - $\delta(s_1, b, x) = \{(s_1, \varepsilon)\}$
- $[s_0, \varepsilon, \varepsilon] \longmapsto$
  $[s_0, aaabbb, \$] \longmapsto$
  $[s_0, aabbb, x\$] \longmapsto$
  $[s_0, abbb, xx\$] \longmapsto$
  $[s_0, bbb, xxx\$] \longmapsto$
  $[s_1, bb, xx\$] \longmapsto$
  $[s_1, b, x\$]$

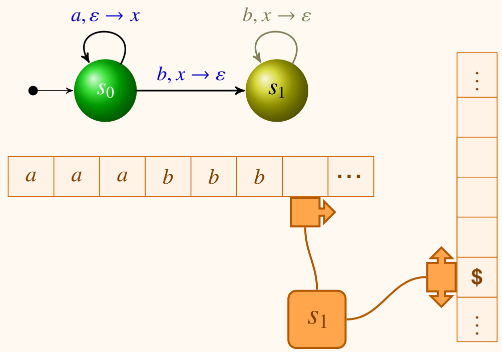





## Exemplo de autômato com pilha

### Exemplo 1.4

- $\mathcal{L}(P) = \{a^i b^i \mid i \geqslant 0\}$
- $P = \langle \Sigma, \Gamma, S, s_0, \delta, F \rangle =$
  $\langle \{a, b\}, \{x\}, \{s_0, s_1\}, s_0, \delta, \{s_0, s_1\} \rangle$:
  - $\delta(s_0, a, \varepsilon) = \{(s_0, x)\}$
  - $\delta(s_0, b, x) = \{(s_1, \varepsilon)\}$
  - $\delta(s_1, b, x) = \{(s_1, \varepsilon)\}$
- $[s_0, \varepsilon, \varepsilon] \longmapsto$
  $[s_0, aaabbb, \$] \longmapsto$
  $[s_0, aabbb, x\$] \longmapsto$
  $[s_0, abbb, xx\$] \longmapsto$
  $[s_0, bbb, xxx\$] \longmapsto$
  $[s_1, bb, xx\$] \longmapsto$
  $[s_1, b, x\$] \longmapsto$
  $[s_1, \varepsilon, \$]$

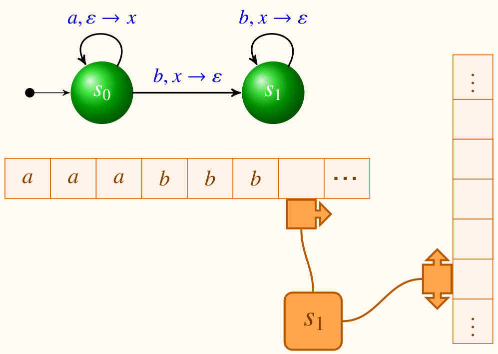





## Exemplo de autômato com pilha

### Exemplo 1.4

- $\mathcal{L}(P) = \{a^i b^i \mid i \geqslant 0\}$
- $P = \langle \Sigma, \Gamma, S, s_0, \delta, F \rangle =$
  $\langle \{a, b\}, \{x\}, \{s_0, s_1\}, s_0, \delta, \{s_0, s_1\} \rangle$:
  - $\delta(s_0, a, \varepsilon) = \{(s_0, x)\}$
  - $\delta(s_0, b, x) = \{(s_1, \varepsilon)\}$
  - $\delta(s_1, b, x) = \{(s_1, \varepsilon)\}$
- $[s_0, \varepsilon, \varepsilon] \longmapsto$
  $[s_0, aaabbb, \$] \longmapsto$
  $[s_0, aabbb, x\$] \longmapsto$
  $[s_0, abbb, xx\$] \longmapsto$
  $[s_0, bbb, xxx\$] \longmapsto$
  $[s_1, bb, xx\$] \longmapsto$
  $[s_1, b, x\$] \longmapsto$
  $[s_1, \varepsilon, \$] \longmapsto$
  $[s_1, \varepsilon, \varepsilon]$






## Linguagem aceita por um PDA

### Definição 1.5

Seja $P = \langle \Sigma, \Gamma, S, s_0, \delta, F \rangle$ um PDA. Uma cadeia $w \in \Sigma^*$ é aceita por $P$ se existe um processamento

$$[s_0, w, \varepsilon] \overset{*}{\longmapsto} [s_i, \varepsilon, \varepsilon],$$

onde $s_i \in F$. A linguagem de $P$, denotada $\mathcal{L}(P)$, é o conjunto de cadeias aceitas por $P$.

# Exemplo de autômato com pilha

### Exemplo 1.6

- $L = \{wcw^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$.
- $P = \langle \Sigma = \{a, b, c\}, \Gamma = \{a, b\}, S = \{s_0, s_1\}, s_0, \delta, F = \{s_1\}\rangle$, onde:

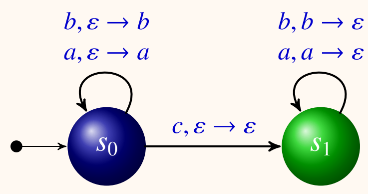
$$\begin{aligned}
\delta(s_0, a, \varepsilon) &= \{(s_0, a)\}\\
\delta(s_0, b, \varepsilon) &= \{(s_0, b)\}\\
\delta(s_0, c, \varepsilon) &= \{(s_1, \varepsilon)\}\\
\delta(s_1, a, a) &= \{(s_1, \varepsilon)\}\\
\delta(s_1, b, b) &= \{(s_1, \varepsilon)\}
\end{aligned}$$



# Exemplo de autômato com pilha

### Exemplo 1.6

- Processamento da cadeia $abcba$:
$[s_0, abcba, \varepsilon] \longmapsto [s_0, bcba, a] \longmapsto [s_0, cba, ba] \longmapsto [s_1, ba, ba] \longmapsto [s_1, a, a] \longmapsto [s_1, \varepsilon, \varepsilon]$






# Determinismo

### Definição 1.7 (Transições compatíveis)

- Duas transições $(s_j, c) \in \delta(s_i, u, a)$ e $(s_k, d) \in \delta(s_i, v, b)$ são compatíveis se alguma das condições a seguir é satisfeita:
  1. $u = v$ e $a = b$;
  2. $u = v$ e $a = \varepsilon$ ou $b = \varepsilon$;
  3. $a = b$ e $u = \varepsilon$ ou $v = \varepsilon$;
  4. $u = \varepsilon$ ou $v = \varepsilon$ e $a = \varepsilon$ ou $b = \varepsilon$.
- Transições compatíveis podem ser aplicadas para a mesma configuração.

### Definição 1.8 (PDA determinístico)

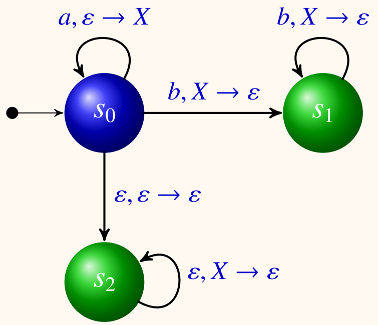
- Um PDA é determinístico se existe no máximo uma transição para cada combinação de estado, símbolo de entrada e símbolo no topo da pilha.
- Um PDA é determinístico se não contém transições compatíveis distintas.



# Exemplo de PDA não determinístico

### Exemplo 1.9

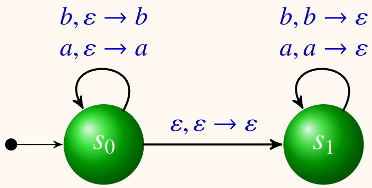
- $L = \{a^i \mid i \geqslant 0\} \cup \{a^i b^i \mid i \geqslant 0\}$.
  - A transição $\varepsilon$ a partir de $s_0$ permite chegar a $s_2$ depois de processar toda a cadeia de entrada.
  - Esta transição introduz o não determinismo ao PDA.



# Exemplo de PDA não determinístico

### Exemplo 1.10

- $L = \{ww^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$.
  - O não determinismo permite ao PDA “adivinhar” quando a metade da cadeia de entrada foi processada.






# Exemplo de PDA não determinístico

### Exemplo 1.11

- $L = \{0^n 1^n \mid n \geqslant 0\}$.
- $P = \langle \Sigma, \Gamma, S, s_0, \delta, F \rangle$, onde:
  - $S = \{s_0, s_1, s_2, s_3\}$.
  - $\Sigma = \{0, 1\}$.
  - $\Gamma = \{0, \$\}$.
  - $F = \{s_0, s_3\}$.



# Exemplo de PDA não determinístico

### Exemplo 1.11

- $\delta$ é definida na tabela a seguir, onde entradas em branco significam $\emptyset$:

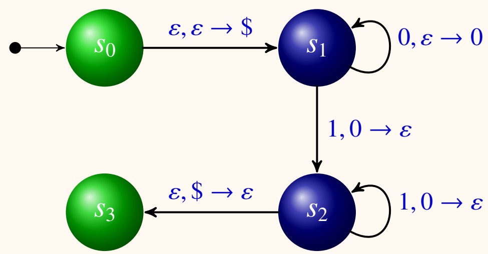
| Entrada | 0 | | | 1 | | | $\varepsilon$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Pilha | 0 | \$ | $\varepsilon$ | 0 | \$ | $\varepsilon$ | 0 | \$ | $\varepsilon$ |
| $s_0$ | | | | | | | | | $\{(s_1, \$)\}$ |
| $s_1$ | | | $\{(s_1, 0)\}$ | $\{(s_2, \varepsilon)\}$ | | | | | |
| $s_2$ | | | | $\{(s_2, \varepsilon)\}$ | | | | $\{(s_3, \varepsilon)\}$ | |
| $s_3$ | | | | | | | | | |



# Exemplo de PDA não determinístico

### Exemplo 1.11

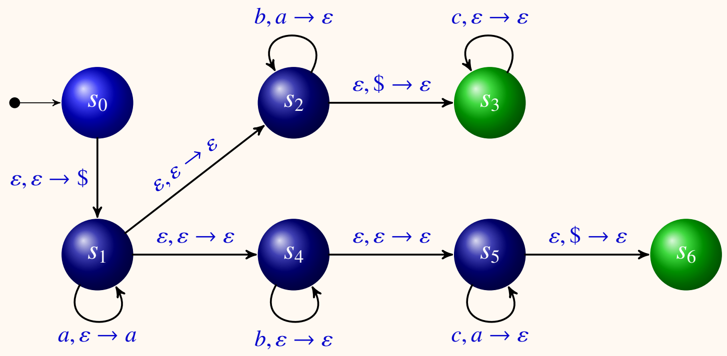
- Representação gráfica:



# Exemplo de PDA não determinístico

## Exemplo 1.12

- $\mathcal{L} = \{a^i b^j c^k \in \{a, b, c\}^* \mid i, j, k \geqslant 0$ e $i = j$ ou $i = k\}$.
  - $PDA$ lê e empilha todos os $a$'s.
  - Os símbolos $a$'s devem ser 'casados' com $b$'s ou $c$'s?
  - Não determinismo é essencial para reconhecer $\mathcal{L}$!

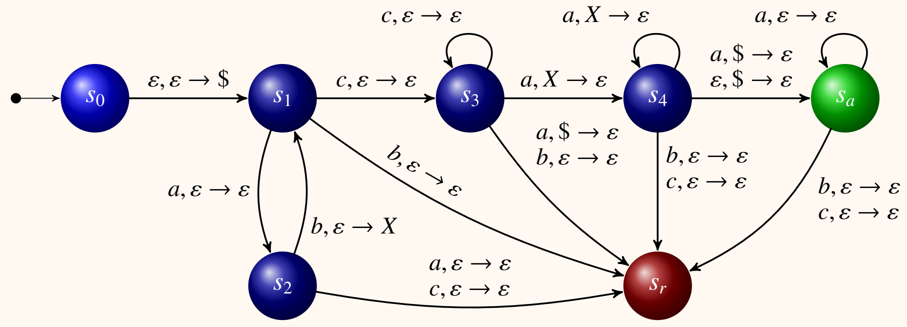





# Exemplo de PDA determinístico

## Exemplo 1.13

- $\mathcal{L} = \{(ab)^i c^k a^j \in \{a, b, c\}^* \mid j \geqslant i \geqslant 1, k \geqslant 1\}$.






# Livros texto


- R. P. Grimaldi
  *Discrete and Combinatorial Mathematics – An Applied Introduction.*
  Addison Wesley, 1994.
- D. J. Velleman
  *How To Prove It – A Structured Approach.*
  Cambridge University Press, 1996.
- J. E. Hopcroft; J. Ullman.
  *Introdução Ã  Teoria de Autômatos, Linguagens e Computação.*
  Ed. Campus.
- T. A. Sudkamp.
  *Languages and Machines – An Introduction to the Theory of Computer Science.*
  Addison Wesley Longman, Inc. 1998.
- J. Carroll; D. Long.
  *Theory of Finite Automata – With an Introduction to Formal Languages.*
  Prentice-Hall, 1989.
- M. Sipser.
  *Introduction to the Theory of Computation.*
  PWS Publishing Company, 1997.
- H. R. Lewis; C. H. Papadimitriou
  *Elementos de Teoria da Computação.*
  Bookman, 2000.