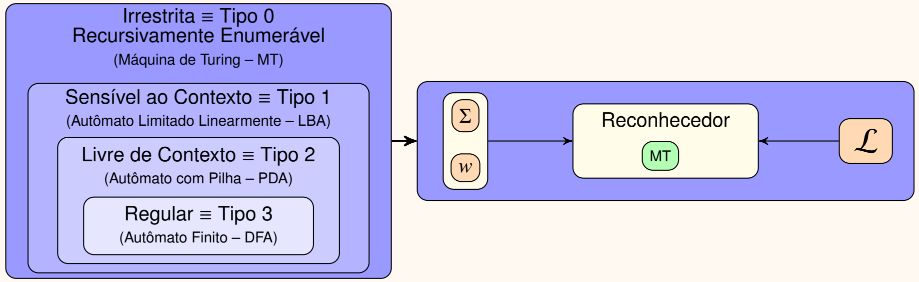
Linguagens Formais e Autômatos

Humberto Longo

Instituto de Informática
Universidade Federal de Goiás

Bacharelado em Ciência da Computação, 2021/1

Roteiro



Modelos de dispositivos computacionais.

Autômatos Finitos → dispositivos memória ilimitada, mas apenas de leitura.

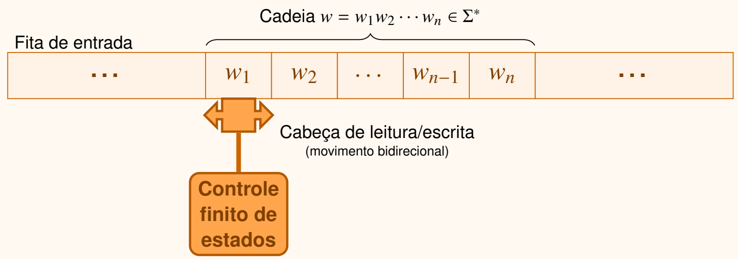
Autômatos com Pilha → dispositivos com memória ilimitada, de leitura e escrita, mas de acesso restrito como pilha.

Máquina de Turing → Similar aos autômatos, mas com memória ilimitada e de acesso irrestrito.

Máquinas de Turing

Modelo Simplificado

- Fita infinita é a memória ilimitada.
- Cabeça de leitura/gravação move-se para a esquerda ou para a direita na fita.
- Conteúdo inicial da fita é a cadeia de entrada (demais posições da fita em branco).
- Processa até produzir uma saída (`aceita`/`rejeita`/...).



Máquinas de Turing

Definição 1.1

- Uma Máquina de Turing é definida pela 7-upla $M = (S, \Sigma, \Gamma, \delta, s_0, s_a, s_r)$, onde:
  - S é o conjunto de estados,
  - Σ é o alfabeto de entrada ($\sqcup \notin \Sigma$),
  - Γ é o alfabeto da fita ($\sqcup \in \Gamma$ e $\Sigma \subset \Gamma$),
  - $\delta : S \times \Gamma \to S \times \Gamma \times \{E, D\}$ é a função de transição,
  - $s_0 \in S$ é o estado inicial,
  - $s_a \in S$ é o estado de aceitação, e
  - $s_r \in S$ é o estado de rejeição ($s_a \neq s_r$).

Máquinas de Turing

- $M = (S, \Sigma, \Gamma, \delta, s_0, s_a, s_r)$.

Definição 1.2

- $\mathcal{L}(M)$: linguagem de M.
  - Linguagem reconhecida por M.
  - Coleção de cadeias que M aceita.

Definição 1.3

- Linguagem L Turing-reconhecível:
  - Existe uma máquina de Turing M tal que $\mathcal{L}(M) = L$.
  - Linguagem recursivamente enumerável.

Máquinas de Turing

- Resultados possíveis de $M = (S, \Sigma, \Gamma, \delta, s_0, s_a, s_r)$:
  - `aceita`, `rejeita` ou `cicla`.
  - M falha em aceitar uma cadeia se entra no estado s_r ou quando cicla.
  - Se M cicla, M simplesmente não para (não necessariamente repetindo os mesmos passos).

Definição 1.4

- M decide uma linguagem $\mathcal{L}$ se a reconhece e para com qualquer entrada.
- Uma linguagem é decidível se alguma máquina de Turing a decide.
  - Linguagem recursiva.
- Toda linguagem decidível é Turing-reconhecível, mas nem toda linguagem Turing-reconhecível é decidível!!!

A tese de Church-Turing

- Nos anos 30-40 do século XX, Church e Turing conjecturaram que qualquer computação que possa ser implementada por processos mecânicos (i.e., por uma máquina) pode também ser implementada por uma máquina de Turing.
- Argumentos favoráveis à tese de Turing:
  - Qualquer computação que possa ser feita por qualquer computador digital existente também pode ser feita por uma máquina de Turing.
  - Ninguém conseguiu ainda encontrar um problema, resolúvel por um algoritmo qualquer, para o qual não possa ser desenvolvida uma máquina de Turing.
  - Foram propostos modelos alternativos para a computação mecânica, mas nenhum deles é mais poderoso do que a máquina de Turing.

Notação

- Entrada para uma Máquina de Turing é sempre uma cadeia definida sobre um alfabeto.
- Se a entrada for outro objeto, o mesmo deve ser representado como uma cadeia.
  - Cadeias podem representar objetos como polinômios, grafos, gramáticas, autômatos e combinações de tais objetos.
- Codificação:
  - $\langle O \rangle$ representa o objeto O.
  - $\langle O_1, O_2, \ldots, O_k \rangle$ representa os objetos $O_1, O_2, \ldots, O_k$.
- A codificação em si pode ser feita de diversos modos.
  - Uma Máquina de Turing sempre pode traduzir uma codificação para outra qualquer!

Máquina de Turing Universal

- Máquina de Turing capaz de simular qualquer outra máquina de Turing.
- A máquina deve conter na fita:
  - O conjunto de instruções sobre o comportamento da máquina a ser simulada;
  - O conteúdo da fita da máquina a ser simulada.
- Possibilita respostas sobre o comportamento de outras máquinas de Turing.
  - Muitas dessas questões são indecidíveis, ou seja, a função em questão não pode ser calculada por nenhuma máquina de Turing.
  - Ex: Problema de determinar se uma máquina de Turing em particular vai parar para uma entrada dada (ou para qualquer entrada) é indecidível.

Linguagens decidíveis

- Problemas decidíveis:
  - Um dado autômato finito aceita uma cadeia em particular?
  - A linguagem de um autômato finito é vazia?
  - Dois autômatos finitos são equivalentes?
- Outros problemas computacionais podem ser formulados como a pertinência a uma certa linguagem.
  - Mostrar que a linguagem é decidível equivale a mostrar que o problema computacional é decidível.

Linguagens decidíveis

Problema da aceitação para DFA's

- $\mathcal{L}_{DFA} = \{\langle A, w \rangle \mid A$ é um DFA que aceita a cadeia $w\}$.
  - Codificações de todos os DFA's com as cadeias que os mesmos aceitam.
- Testar se $\langle A, w \rangle$ pertence à linguagem $\mathcal{L}_{DFA}$ equivale a testar se o DFA A aceita a cadeia w.

Alguns problemas indecidíveis

- Uma dada gramática livre de contexto é ambígua?
- Uma dada linguagem livre de contexto é inerentemente ambígua?
- A intersecção de duas linguagens livres de contexto é vazia?
- Duas linguagens livres de contexto são iguais?
- Uma dada linguagem livre de contexto é igual a Σ^*?

- Para uma linguagem em particular pode ser possível obter uma resposta a qualquer uma dessas questões. Contudo, não há nenhum algoritmo geral que dê resposta (em tempo útil) para toda e qualquer linguagem livre de contexto.

Máquinas de Turing

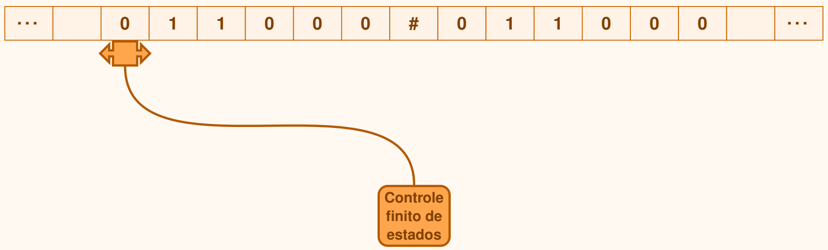
Exemplo 1.5

- $\mathcal{L} = \{u\#u \mid u \in \{0,1\}^*\}$.
- Máquina de Turing para verificar se $w = u\#u \in \mathcal{L}$, com $u \in \{0,1\}^*$:
  1. Verificar se o símbolo # pertence a w.
     - Em caso negativo, `rejeita`.
  2. Verificar se posições relativas à direita e à esquerda do símbolo # contém o mesmo símbolo.
     - Em caso negativo, `rejeita`.
  3. Após testar os símbolos à esquerda do símbolo #, verificar se ainda tem símbolos à direita sem testar.
     - Em caso positivo `rejeita` e em caso negativo `aceita`.

Máquinas de Turing

Exemplo 1.6

- $\mathcal{L} = \{u\#u \mid u \in \{0,1\}^*\}$.

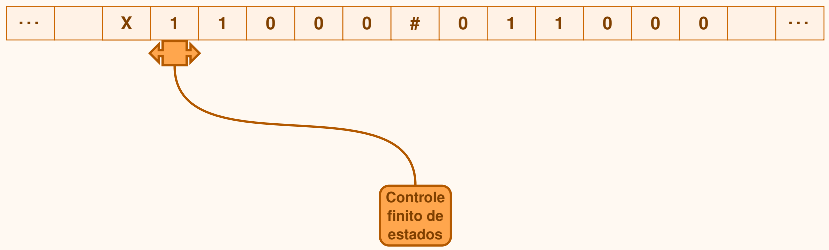


Reconhecedores

Máquinas de Turing

Exemplo 1.6

- $\mathcal{L} = \{u\#u \mid u \in \{0,1\}^*\}$.

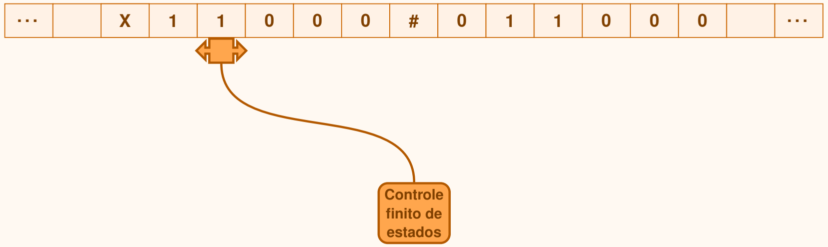


Reconhecedores

Máquinas de Turing

Exemplo 1.6

- $\mathcal{L} = \{u\#u \mid u \in \{0,1\}^*\}$.

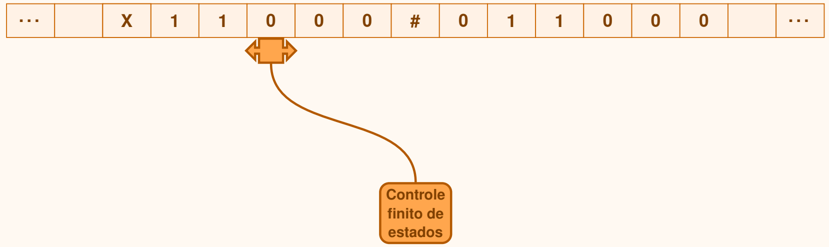


Reconhecedores

Máquinas de Turing

Exemplo 1.6

- $\mathcal{L} = \{u\#u \mid u \in \{0,1\}^*\}$.

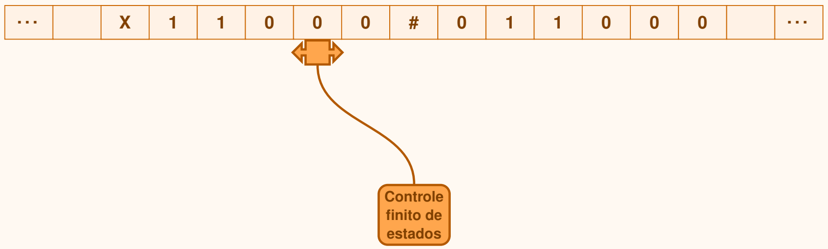


Reconhecedores

Máquinas de Turing

Exemplo 1.6

- $\mathcal{L} = \{u\#u \mid u \in \{0,1\}^*\}$.

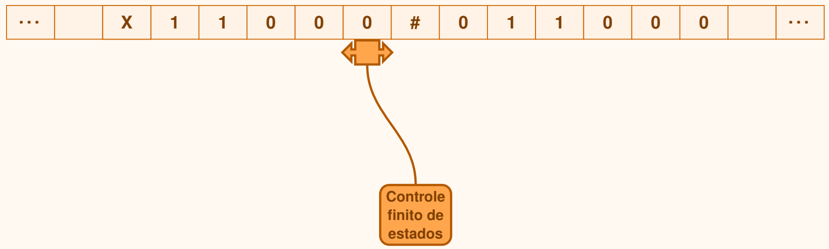


Reconhecedores

Máquinas de Turing

Exemplo 1.6

- $\mathcal{L} = \{u\#u \mid u \in \{0,1\}^*\}$.

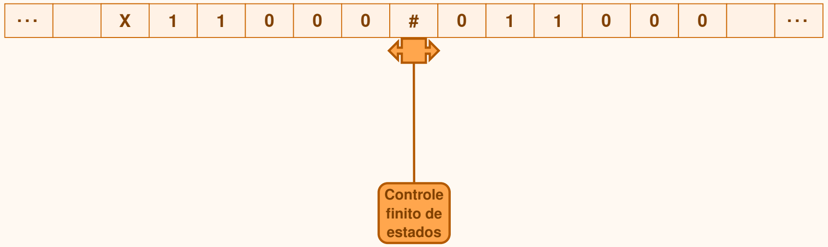


Reconhecedores

Máquinas de Turing

Exemplo 1.6

- $\mathcal{L} = \{u\#u \mid u \in \{0,1\}^*\}$.

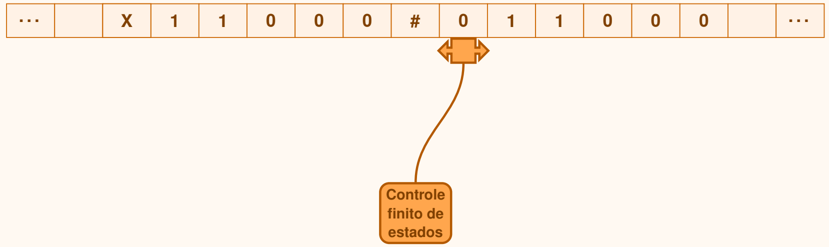


Reconhecedores

Máquinas de Turing

Exemplo 1.6

- $\mathcal{L} = \{u\#u \mid u \in \{0,1\}^*\}$.

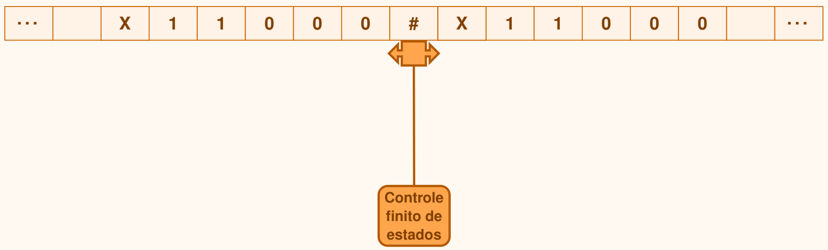


Reconhecedores

Máquinas de Turing

Exemplo 1.6

- $\mathcal{L} = \{u\#u \mid u \in \{0,1\}^*\}$.

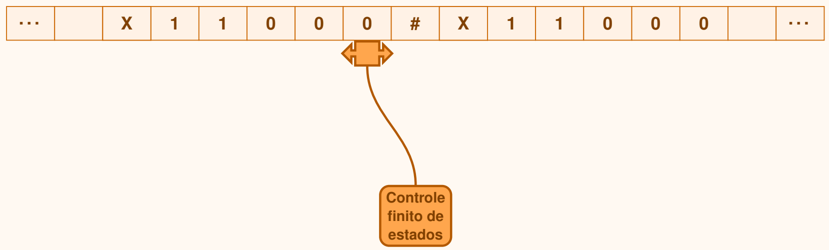


Reconhecedores

Máquinas de Turing

Exemplo 1.6

- $\mathcal{L} = \{u\#u \mid u \in \{0,1\}^*\}$.

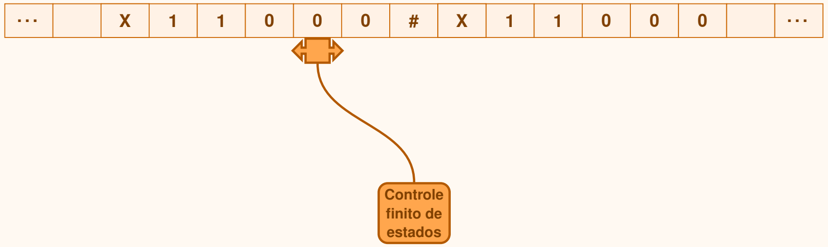


Reconhecedores

Máquinas de Turing

Exemplo 1.6

- $\mathcal{L} = \{u\#u \mid u \in \{0,1\}^*\}$.

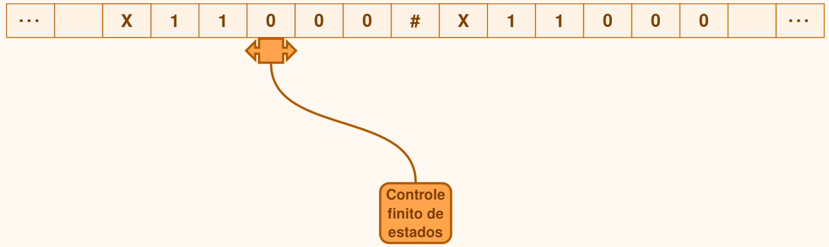


▸ Reconhecedores

Máquinas de Turing

Exemplo 1.6

- $\mathcal{L} = \{u\#u \mid u \in \{0,1\}^*\}$.

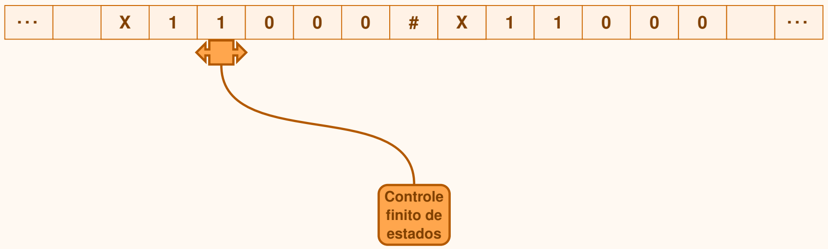


▸ Reconhecedores

Máquinas de Turing

Exemplo 1.6

- $\mathcal{L} = \{u\#u \mid u \in \{0,1\}^*\}$.

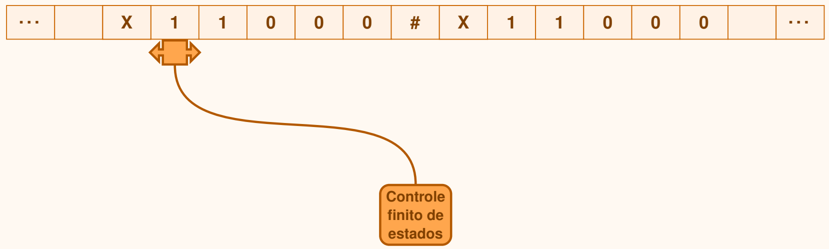


▸ Reconhecedores

Máquinas de Turing

Exemplo 1.6

- $\mathcal{L} = \{u\#u \mid u \in \{0,1\}^*\}$.

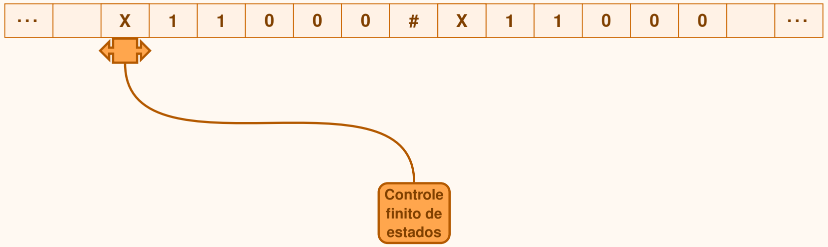


▸ Reconhecedores

Máquinas de Turing

Exemplo 1.6

- $\mathcal{L} = \{u\#u \mid u \in \{0,1\}^*\}$.

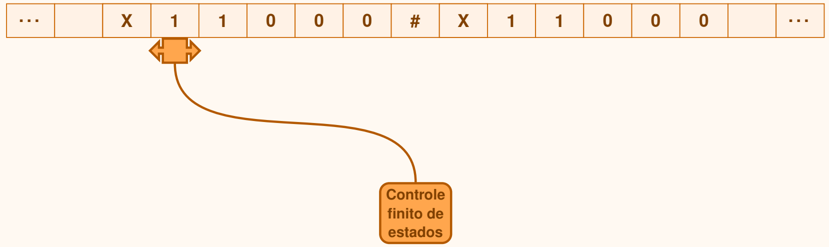


▸ Reconhecedores

Máquinas de Turing

Exemplo 1.6

- $\mathcal{L} = \{u\#u \mid u \in \{0,1\}^*\}$.

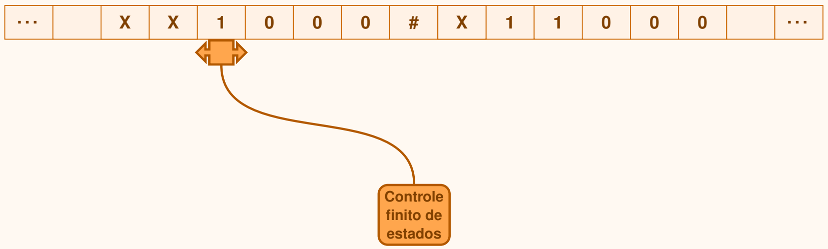


▸ Reconhecedores

Máquinas de Turing

Exemplo 1.6

- $\mathcal{L} = \{u\#u \mid u \in \{0,1\}^*\}$.

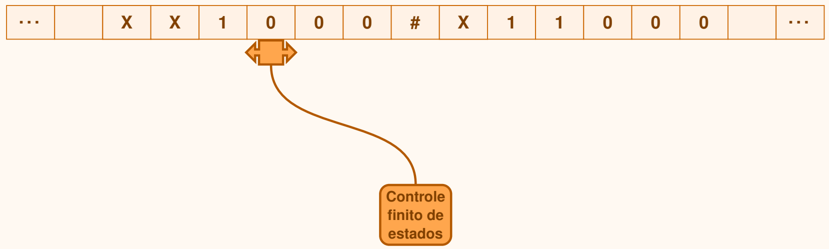


▸ Reconhecedores

Máquinas de Turing

Exemplo 1.6

- $\mathcal{L} = \{u\#u \mid u \in \{0,1\}^*\}$.

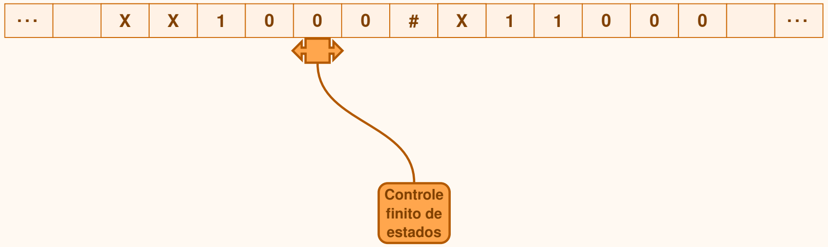


▸ Reconhecedores

Máquinas de Turing

Exemplo 1.6

- $\mathcal{L} = \{u\#u \mid u \in \{0,1\}^*\}$.

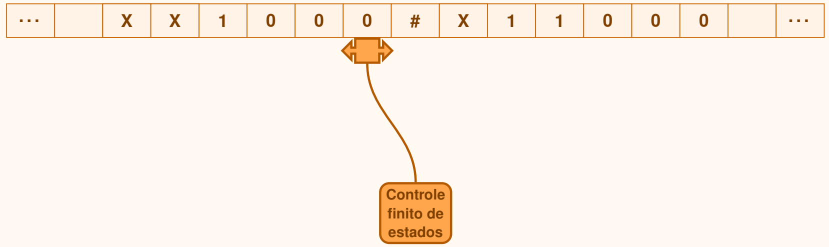


Reconhecedores

Máquinas de Turing

Exemplo 1.6

- $\mathcal{L} = \{u\#u \mid u \in \{0,1\}^*\}$.

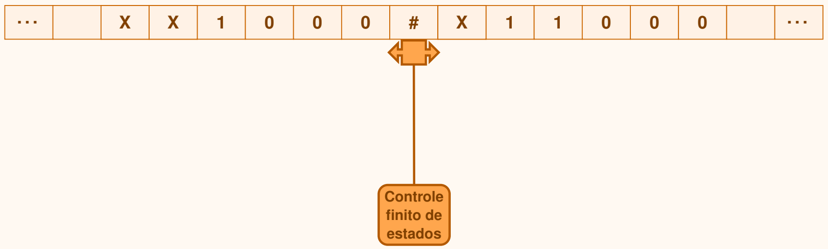


Reconhecedores

Máquinas de Turing

Exemplo 1.6

- $\mathcal{L} = \{u\#u \mid u \in \{0,1\}^*\}$.

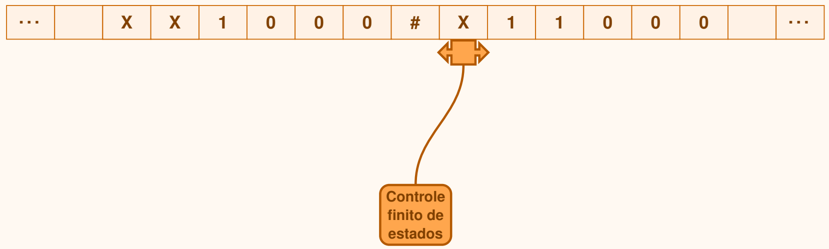


Reconhecedores

Máquinas de Turing

Exemplo 1.6

- $\mathcal{L} = \{u\#u \mid u \in \{0,1\}^*\}$.



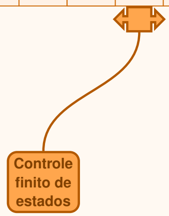
Reconhecedores

Máquinas de Turing

Exemplo 1.6

- $\mathcal{L} = \{u\#u \mid u \in \{0,1\}^*\}$.

···		X	X	1	0	0	0	#	X	1	1	0	0	0		···



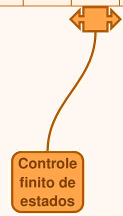
▸ Reconhecedores

Máquinas de Turing

Exemplo 1.6

- $\mathcal{L} = \{u\#u \mid u \in \{0,1\}^*\}$.

···		X	X	1	0	0	0	#	X	X	1	0	0	0		···



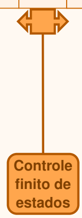
▸ Reconhecedores

Máquinas de Turing

Exemplo 1.6

- $\mathcal{L} = \{u\#u \mid u \in \{0,1\}^*\}$.

···		X	X	1	0	0	0	#	X	X	1	0	0	0		···



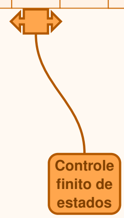
▸ Reconhecedores

Máquinas de Turing

Exemplo 1.6

- $\mathcal{L} = \{u\#u \mid u \in \{0,1\}^*\}$.

···		X	X	1	0	0	0	#	X	X	1	0	0	0		···

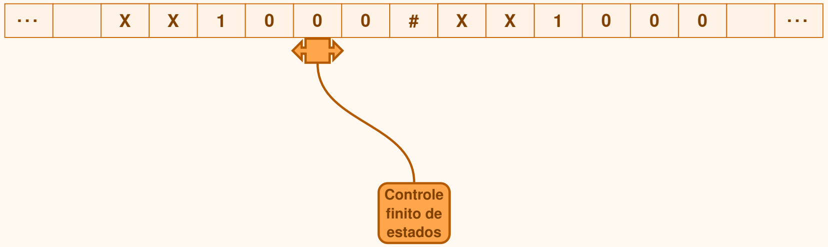


▸ Reconhecedores

Máquinas de Turing

Exemplo 1.6

- $\mathcal{L} = \{u\#u \mid u \in \{0,1\}^*\}$.

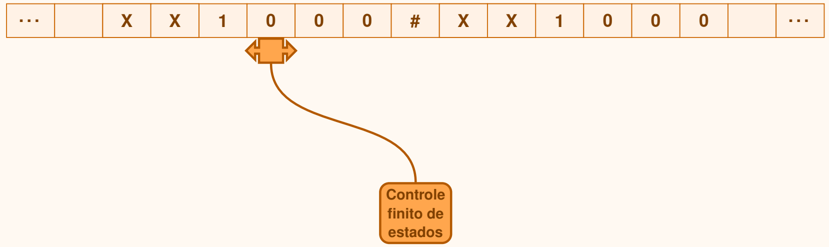


‣ Reconhecedores

Máquinas de Turing

Exemplo 1.6

- $\mathcal{L} = \{u\#u \mid u \in \{0,1\}^*\}$.

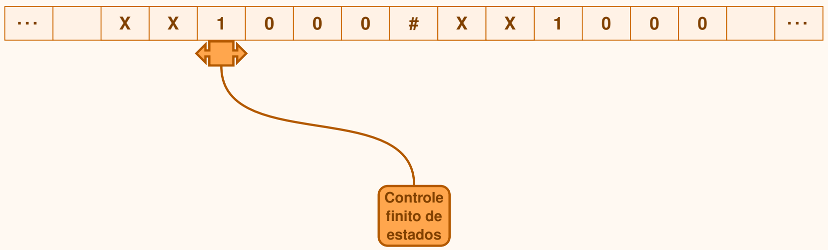


‣ Reconhecedores

Máquinas de Turing

Exemplo 1.6

- $\mathcal{L} = \{u\#u \mid u \in \{0,1\}^*\}$.

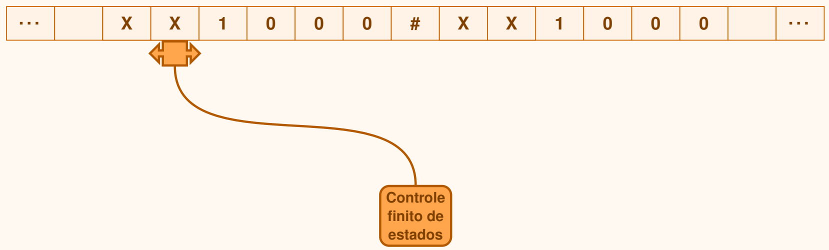


‣ Reconhecedores

Máquinas de Turing

Exemplo 1.6

- $\mathcal{L} = \{u\#u \mid u \in \{0,1\}^*\}$.



‣ Reconhecedores

Máquinas de Turing

Exemplo 1.6

- $\mathcal{L} = \{u\#u \mid u \in \{0,1\}^*\}$.

···		X	X	1	0	0	0	#	X	X	1	0	0	0		···

Controle finito de estados

Reconhecedores

Máquinas de Turing

Exemplo 1.6

- $\mathcal{L} = \{u\#u \mid u \in \{0,1\}^*\}$.

···		X	X	X	0	0	0	#	X	X	1	0	0	0		···

Controle finito de estados

Reconhecedores

Máquinas de Turing

Exemplo 1.6

- $\mathcal{L} = \{u\#u \mid u \in \{0,1\}^*\}$.

···		X	X	X	0	0	0	#	X	X	1	0	0	0		···

Controle finito de estados

Reconhecedores

Máquinas de Turing

Exemplo 1.6

- $\mathcal{L} = \{u\#u \mid u \in \{0,1\}^*\}$.

···		X	X	X	0	0	0	#	X	X	1	0	0	0		···

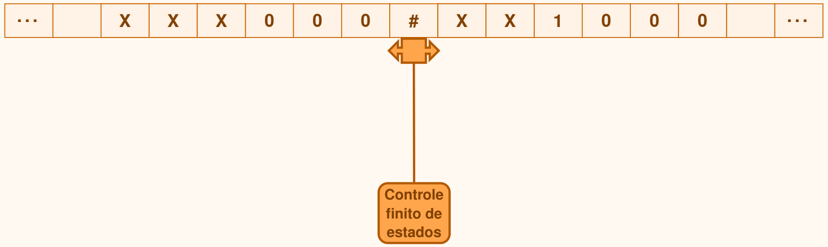
Controle finito de estados

Reconhecedores

Máquinas de Turing

Exemplo 1.6

- $\mathcal{L} = \{u\#u \mid u \in \{0,1\}^*\}$.

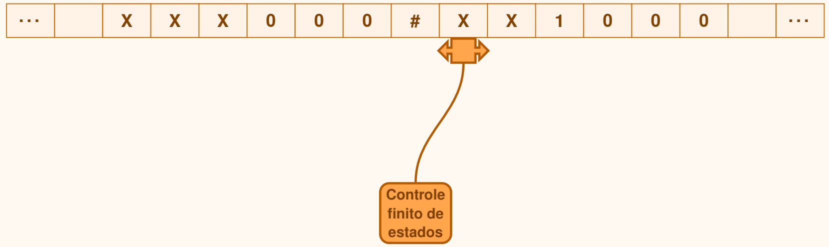


▸ Reconhecedores

Máquinas de Turing

Exemplo 1.6

- $\mathcal{L} = \{u\#u \mid u \in \{0,1\}^*\}$.

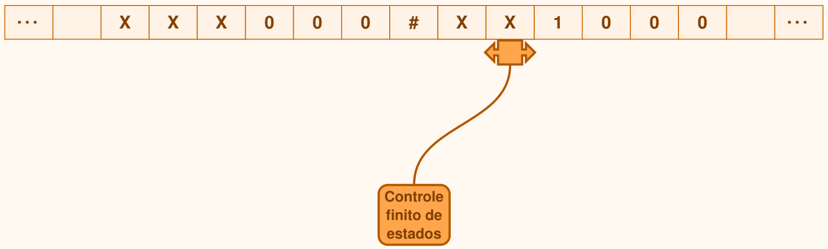


▸ Reconhecedores

Máquinas de Turing

Exemplo 1.6

- $\mathcal{L} = \{u\#u \mid u \in \{0,1\}^*\}$.

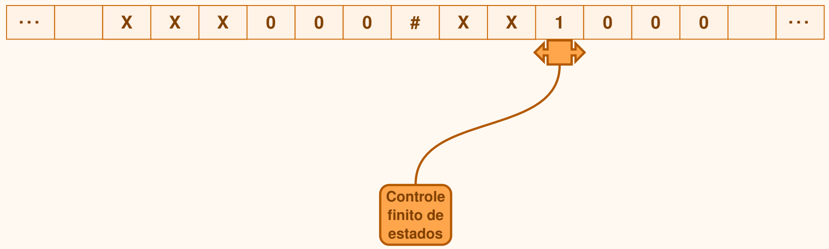


▸ Reconhecedores

Máquinas de Turing

Exemplo 1.6

- $\mathcal{L} = \{u\#u \mid u \in \{0,1\}^*\}$.

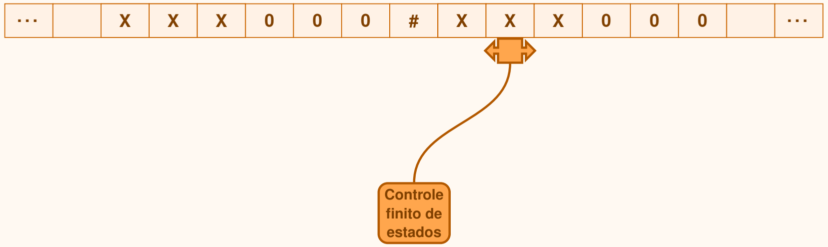


▸ Reconhecedores

Máquinas de Turing

Exemplo 1.6

- $\mathcal{L} = \{u\#u \mid u \in \{0,1\}^*\}$.

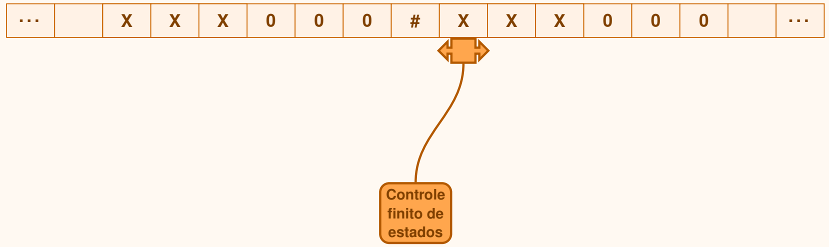


▸ Reconhecedores

Máquinas de Turing

Exemplo 1.6

- $\mathcal{L} = \{u\#u \mid u \in \{0,1\}^*\}$.

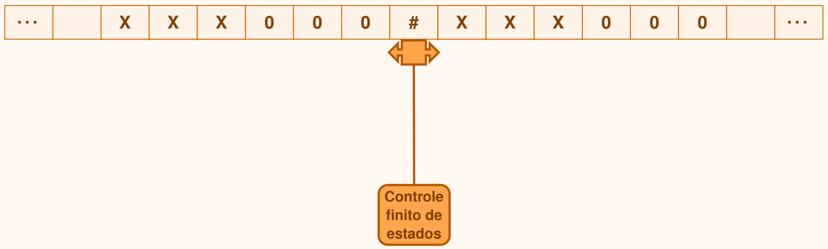


▸ Reconhecedores

Máquinas de Turing

Exemplo 1.6

- $\mathcal{L} = \{u\#u \mid u \in \{0,1\}^*\}$.

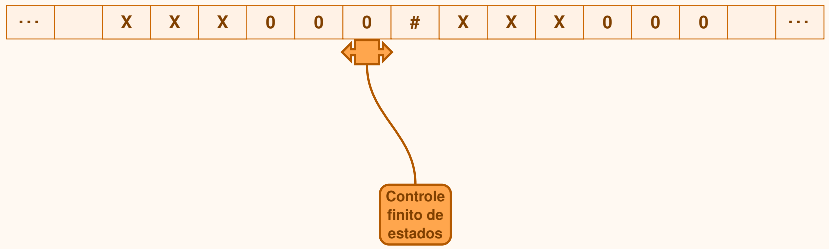


▸ Reconhecedores

Máquinas de Turing

Exemplo 1.6

- $\mathcal{L} = \{u\#u \mid u \in \{0,1\}^*\}$.

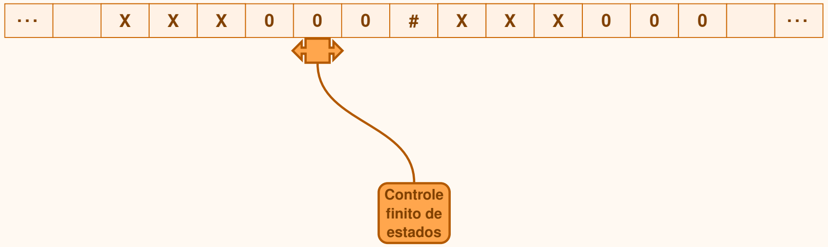


▸ Reconhecedores

Máquinas de Turing

Exemplo 1.6

- $\mathcal{L} = \{u\#u \mid u \in \{0,1\}^*\}$.

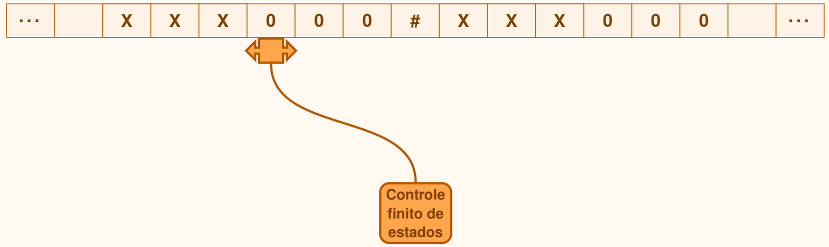


▸ Reconhecedores

Máquinas de Turing

Exemplo 1.6

- $\mathcal{L} = \{u\#u \mid u \in \{0,1\}^*\}$.

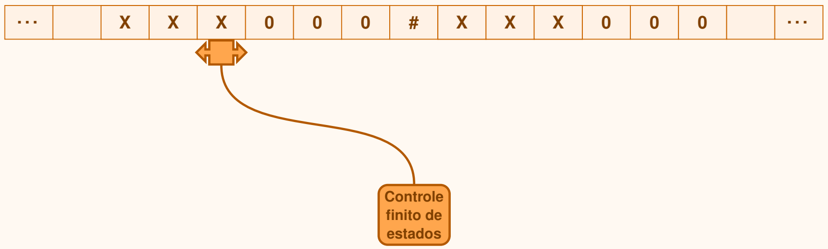


▸ Reconhecedores

Máquinas de Turing

Exemplo 1.6

- $\mathcal{L} = \{u\#u \mid u \in \{0,1\}^*\}$.

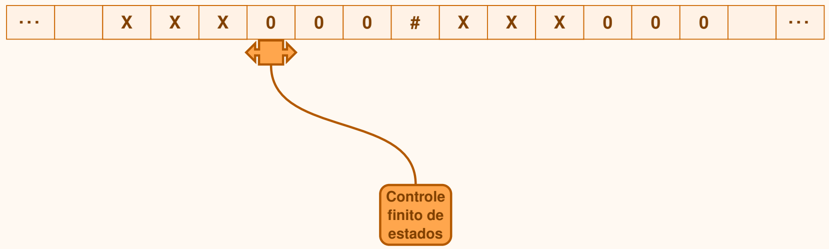


▸ Reconhecedores

Máquinas de Turing

Exemplo 1.6

- $\mathcal{L} = \{u\#u \mid u \in \{0,1\}^*\}$.

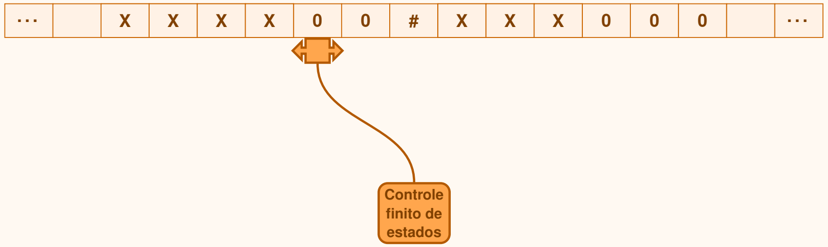


▸ Reconhecedores

Máquinas de Turing

Exemplo 1.6

- $\mathcal{L} = \{u\#u \mid u \in \{0,1\}^*\}$.

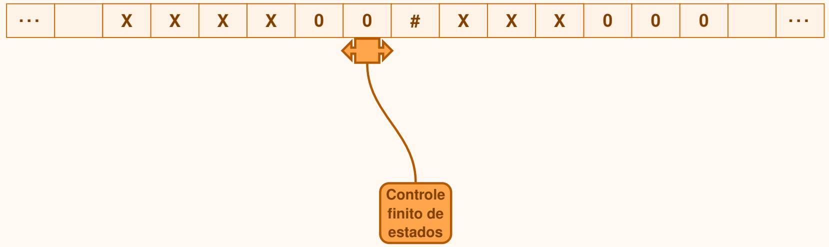


Reconhecedores

Máquinas de Turing

Exemplo 1.6

- $\mathcal{L} = \{u\#u \mid u \in \{0,1\}^*\}$.

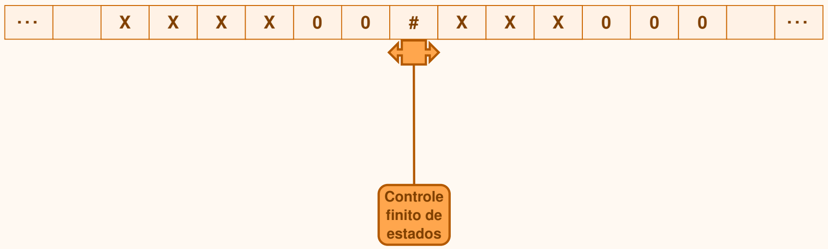


Reconhecedores

Máquinas de Turing

Exemplo 1.6

- $\mathcal{L} = \{u\#u \mid u \in \{0,1\}^*\}$.

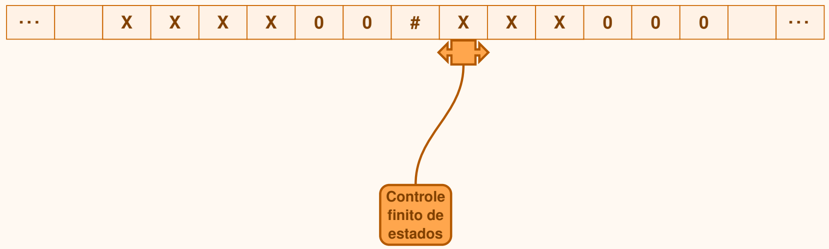


Reconhecedores

Máquinas de Turing

Exemplo 1.6

- $\mathcal{L} = \{u\#u \mid u \in \{0,1\}^*\}$.

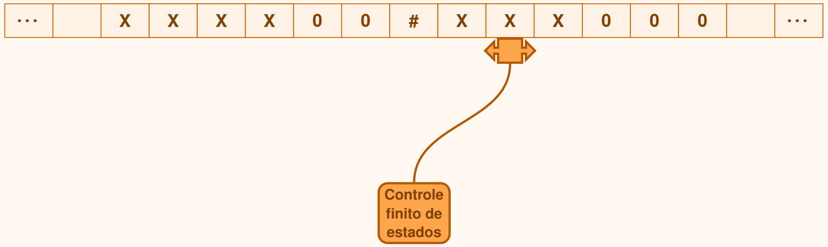


Reconhecedores

Máquinas de Turing

Exemplo 1.6

- $\mathcal{L} = \{u\#u \mid u \in \{0,1\}^*\}$.

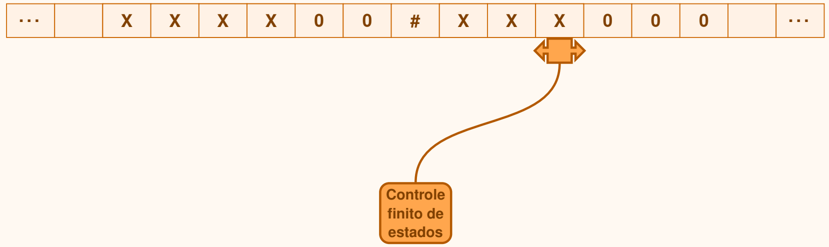


Reconhecedores

Máquinas de Turing

Exemplo 1.6

- $\mathcal{L} = \{u\#u \mid u \in \{0,1\}^*\}$.

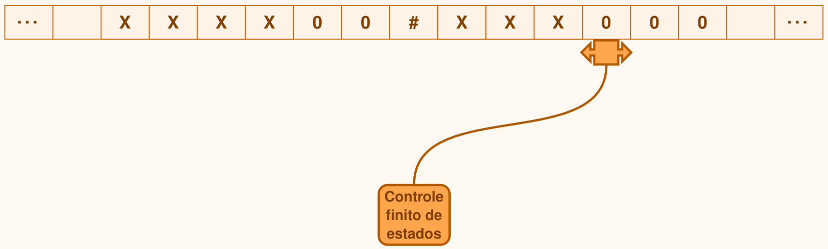


Reconhecedores

Máquinas de Turing

Exemplo 1.6

- $\mathcal{L} = \{u\#u \mid u \in \{0,1\}^*\}$.

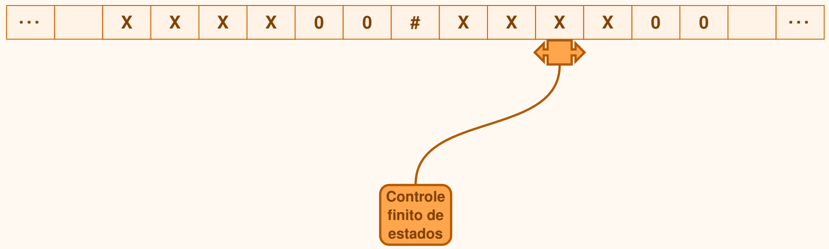


Reconhecedores

Máquinas de Turing

Exemplo 1.6

- $\mathcal{L} = \{u\#u \mid u \in \{0,1\}^*\}$.

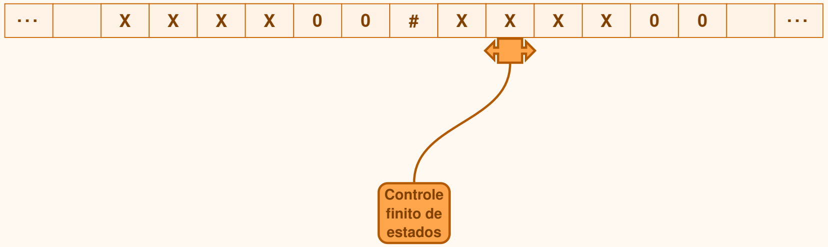


Reconhecedores

Máquinas de Turing

Exemplo 1.6

- $\mathcal{L} = \{u\#u \mid u \in \{0,1\}^*\}$.

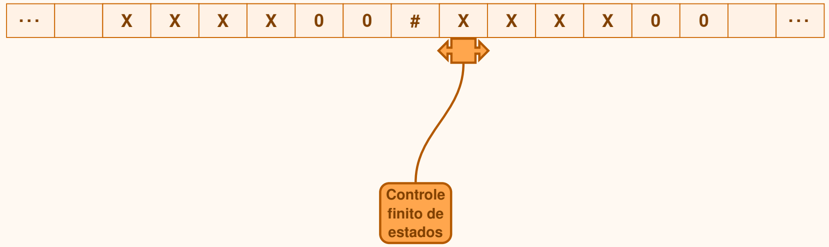


Reconhecedores

Máquinas de Turing

Exemplo 1.6

- $\mathcal{L} = \{u\#u \mid u \in \{0,1\}^*\}$.

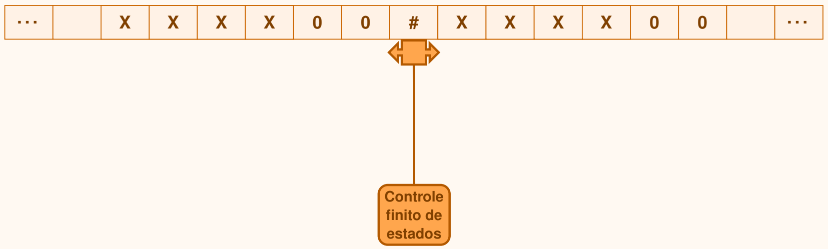


Reconhecedores

Máquinas de Turing

Exemplo 1.6

- $\mathcal{L} = \{u\#u \mid u \in \{0,1\}^*\}$.

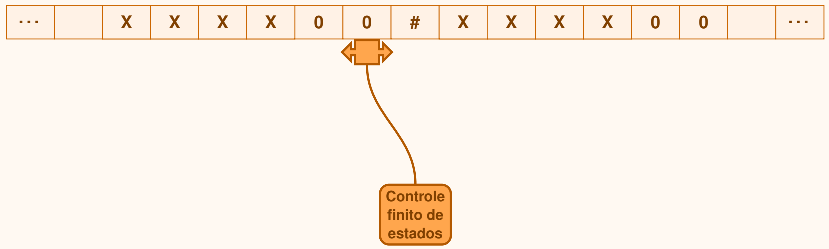


Reconhecedores

Máquinas de Turing

Exemplo 1.6

- $\mathcal{L} = \{u\#u \mid u \in \{0,1\}^*\}$.

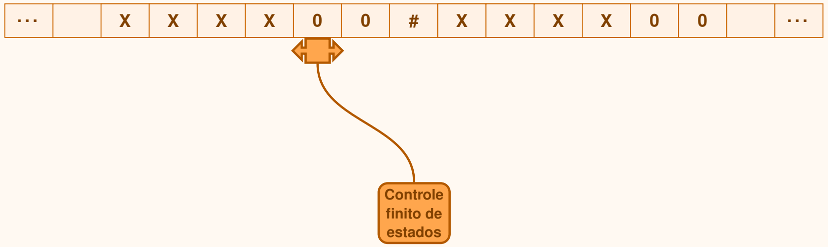


Reconhecedores

Máquinas de Turing

Exemplo 1.6

- $\mathcal{L} = \{u\#u \mid u \in \{0,1\}^*\}$.

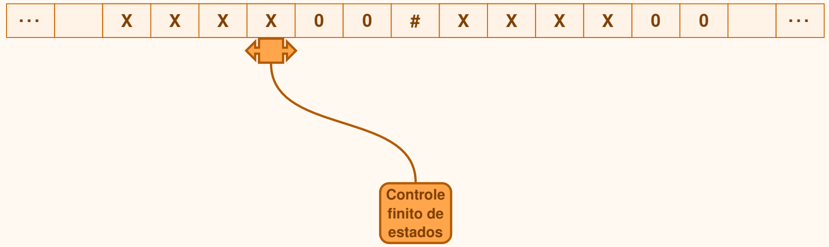


Reconhecedores

Máquinas de Turing

Exemplo 1.6

- $\mathcal{L} = \{u\#u \mid u \in \{0,1\}^*\}$.

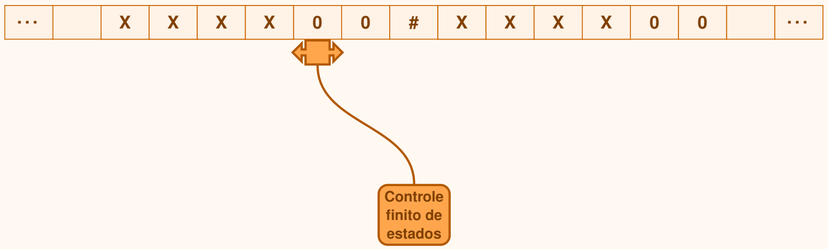


Reconhecedores

Máquinas de Turing

Exemplo 1.6

- $\mathcal{L} = \{u\#u \mid u \in \{0,1\}^*\}$.

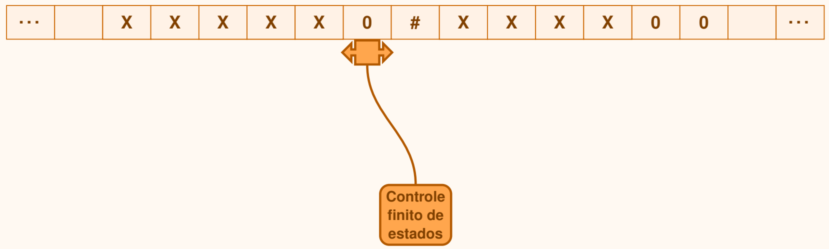


Reconhecedores

Máquinas de Turing

Exemplo 1.6

- $\mathcal{L} = \{u\#u \mid u \in \{0,1\}^*\}$.



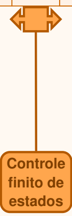
Reconhecedores

Máquinas de Turing

Exemplo 1.6

- $\mathcal{L} = \{u\#u \mid u \in \{0,1\}^*\}$.

···		X	X	X	X	X	0	#	X	X	X	X	0	0		···



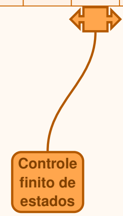
Reconhecedores

Máquinas de Turing

Exemplo 1.6

- $\mathcal{L} = \{u\#u \mid u \in \{0,1\}^*\}$.

···		X	X	X	X	X	0	#	X	X	X	X	0	0		···



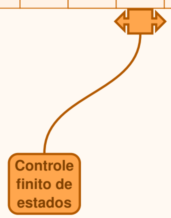
Reconhecedores

Máquinas de Turing

Exemplo 1.6

- $\mathcal{L} = \{u\#u \mid u \in \{0,1\}^*\}$.

···		X	X	X	X	X	0	#	X	X	X	X	0	0		···



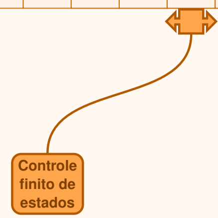
Reconhecedores

Máquinas de Turing

Exemplo 1.6

- $\mathcal{L} = \{u\#u \mid u \in \{0,1\}^*\}$.

···		X	X	X	X	X	0	#	X	X	X	X	0	0		···

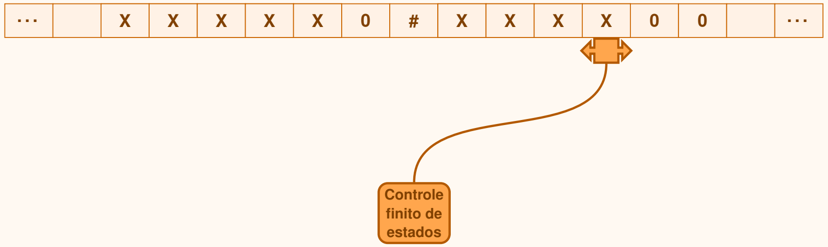


Reconhecedores

Máquinas de Turing

Exemplo 1.6

- $\mathcal{L} = \{u\#u \mid u \in \{0,1\}^*\}$.

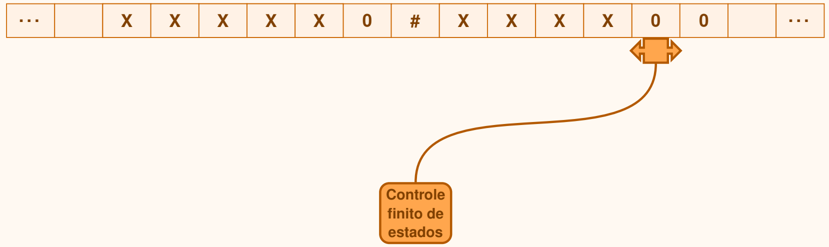


Reconhecedores

Máquinas de Turing

Exemplo 1.6

- $\mathcal{L} = \{u\#u \mid u \in \{0,1\}^*\}$.

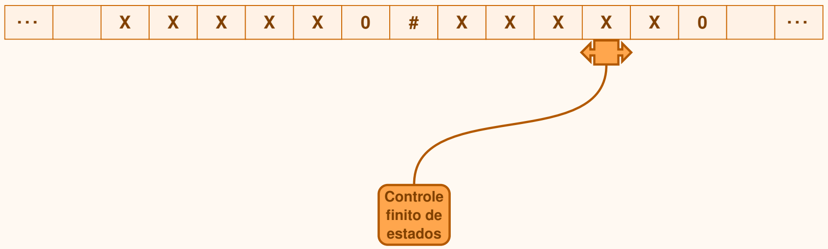


Reconhecedores

Máquinas de Turing

Exemplo 1.6

- $\mathcal{L} = \{u\#u \mid u \in \{0,1\}^*\}$.

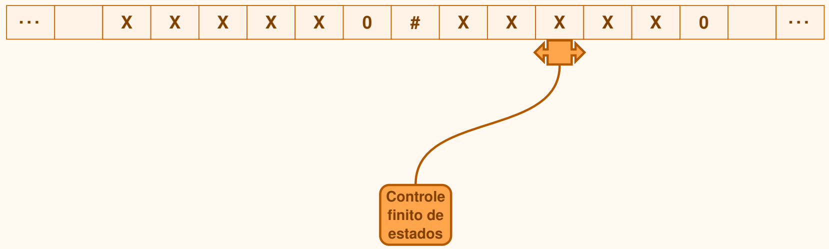


Reconhecedores

Máquinas de Turing

Exemplo 1.6

- $\mathcal{L} = \{u\#u \mid u \in \{0,1\}^*\}$.

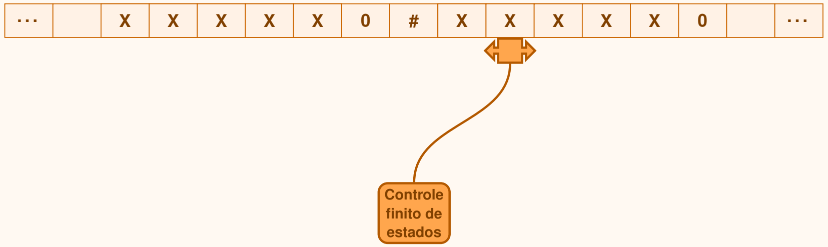


Reconhecedores

Máquinas de Turing

Exemplo 1.6

- $\mathcal{L} = \{u\#u \mid u \in \{0,1\}^*\}$.

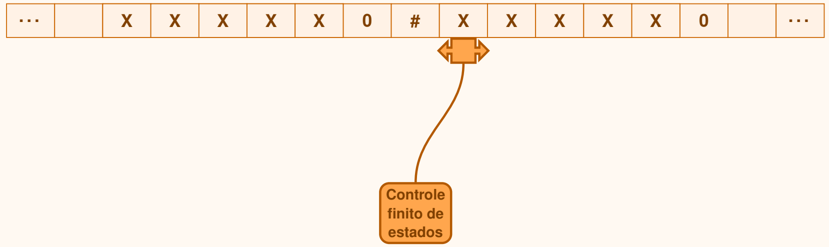


Reconhecedores

Máquinas de Turing

Exemplo 1.6

- $\mathcal{L} = \{u\#u \mid u \in \{0,1\}^*\}$.

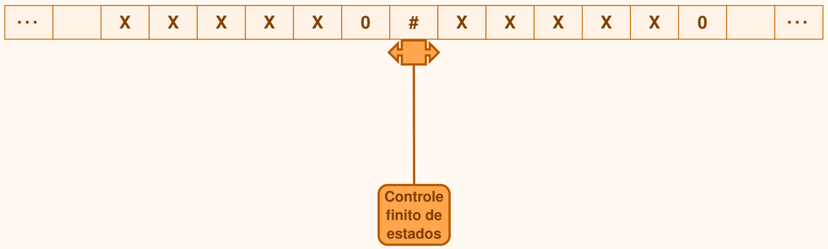


Reconhecedores

Máquinas de Turing

Exemplo 1.6

- $\mathcal{L} = \{u\#u \mid u \in \{0,1\}^*\}$.

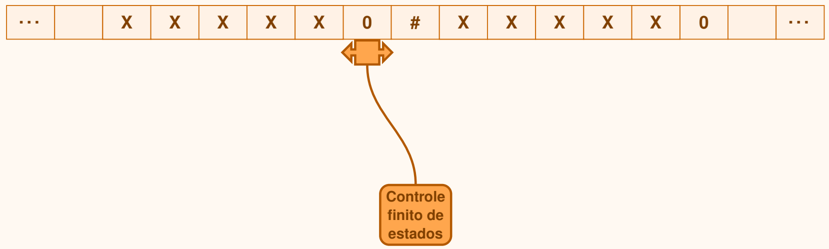


Reconhecedores

Máquinas de Turing

Exemplo 1.6

- $\mathcal{L} = \{u\#u \mid u \in \{0,1\}^*\}$.

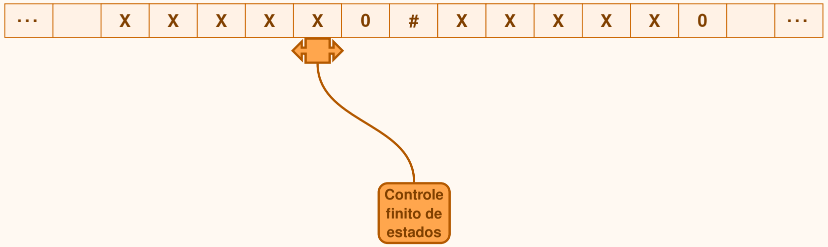


Reconhecedores

Máquinas de Turing

Exemplo 1.6

- $\mathcal{L} = \{u\#u \mid u \in \{0,1\}^*\}$.

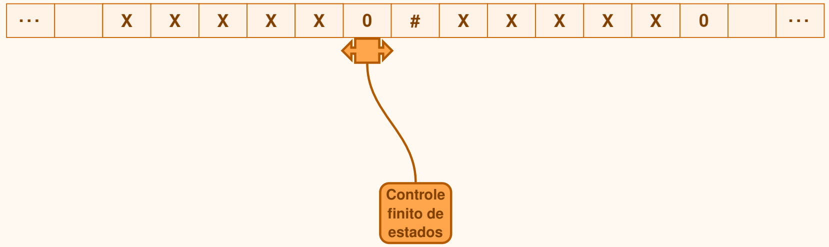


Reconhecedores

Máquinas de Turing

Exemplo 1.6

- $\mathcal{L} = \{u\#u \mid u \in \{0,1\}^*\}$.

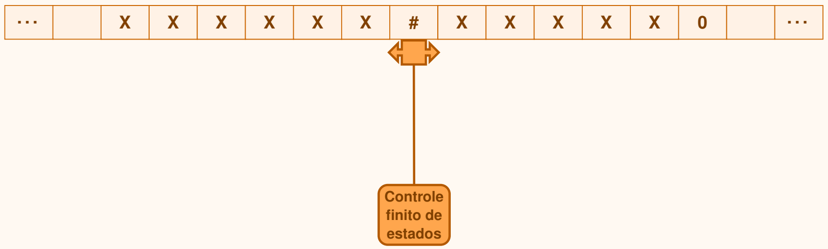


Reconhecedores

Máquinas de Turing

Exemplo 1.6

- $\mathcal{L} = \{u\#u \mid u \in \{0,1\}^*\}$.

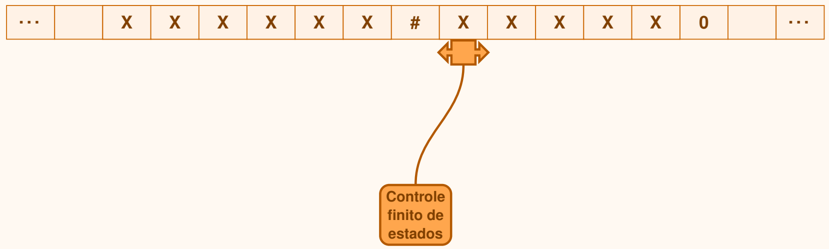


Reconhecedores

Máquinas de Turing

Exemplo 1.6

- $\mathcal{L} = \{u\#u \mid u \in \{0,1\}^*\}$.

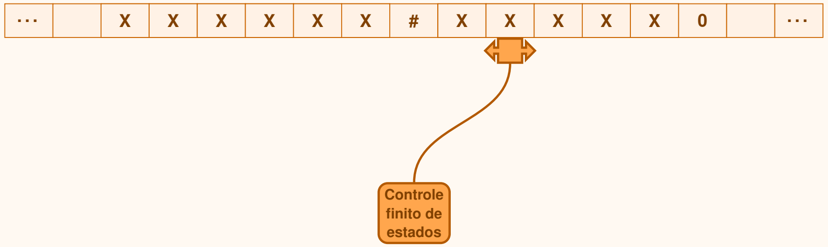


Reconhecedores

Máquinas de Turing

Exemplo 1.6

- $\mathcal{L} = \{u\#u \mid u \in \{0,1\}^*\}$.

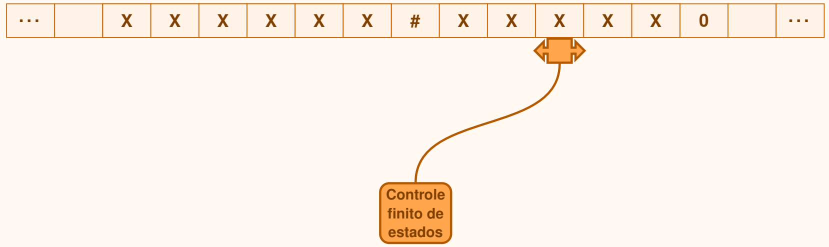


Reconhecedores

Máquinas de Turing

Exemplo 1.6

- $\mathcal{L} = \{u\#u \mid u \in \{0,1\}^*\}$.

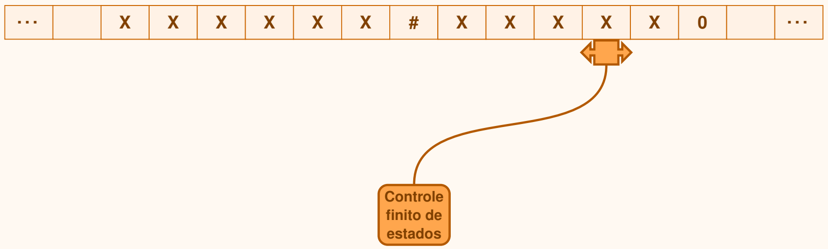


Reconhecedores

Máquinas de Turing

Exemplo 1.6

- $\mathcal{L} = \{u\#u \mid u \in \{0,1\}^*\}$.

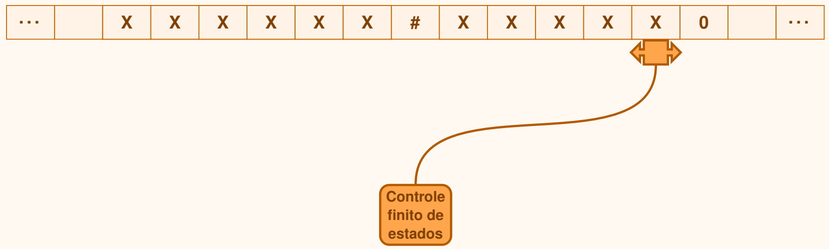


Reconhecedores

Máquinas de Turing

Exemplo 1.6

- $\mathcal{L} = \{u\#u \mid u \in \{0,1\}^*\}$.

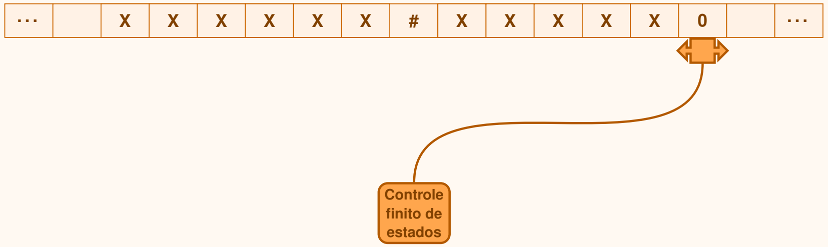


Reconhecedores

Máquinas de Turing

Exemplo 1.6

- $\mathcal{L} = \{u\#u \mid u \in \{0,1\}^*\}$.

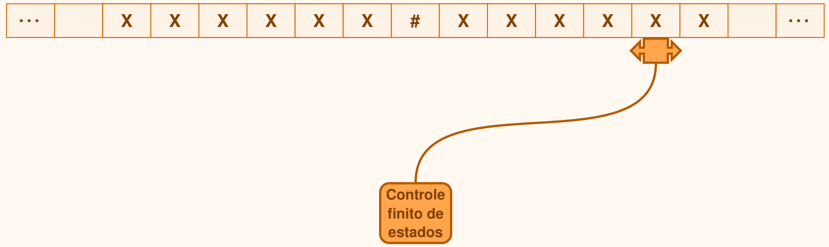


Reconhecedores

Máquinas de Turing

Exemplo 1.6

- $\mathcal{L} = \{u\#u \mid u \in \{0,1\}^*\}$.

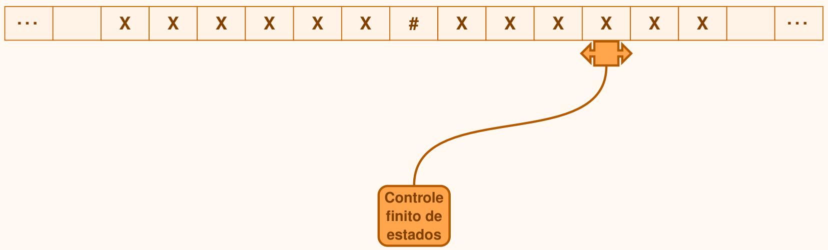


Reconhecedores

Máquinas de Turing

Exemplo 1.6

- $\mathcal{L} = \{u\#u \mid u \in \{0,1\}^*\}$.

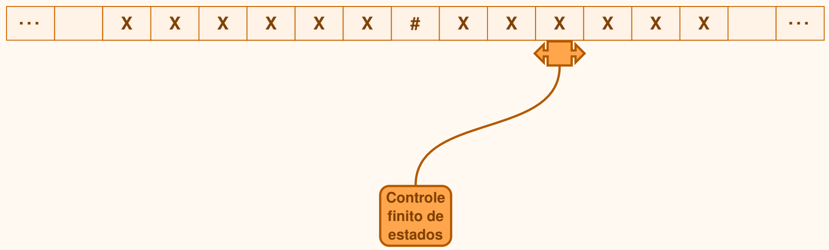


Reconhecedores

Máquinas de Turing

Exemplo 1.6

- $\mathcal{L} = \{u\#u \mid u \in \{0,1\}^*\}$.

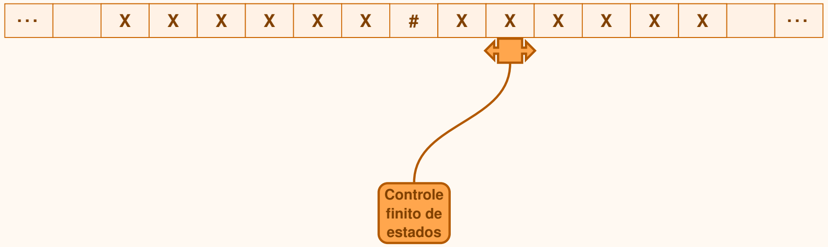


Reconhecedores

Máquinas de Turing

Exemplo 1.6

- $\mathcal{L} = \{u\#u \mid u \in \{0,1\}^*\}$.

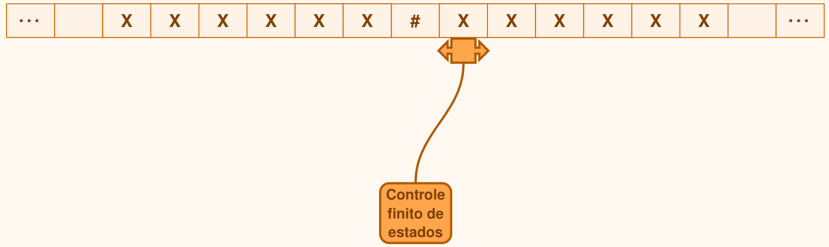


Reconhecedores

Máquinas de Turing

Exemplo 1.6

- $\mathcal{L} = \{u\#u \mid u \in \{0,1\}^*\}$.

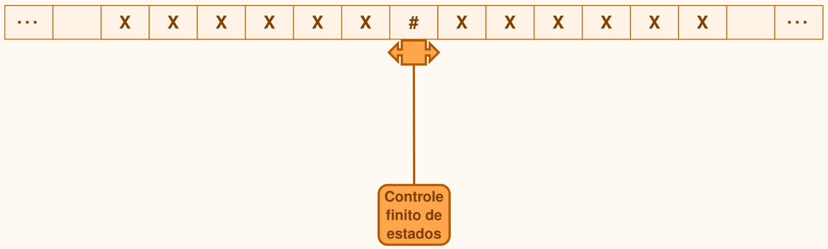


Reconhecedores

Máquinas de Turing

Exemplo 1.6

- $\mathcal{L} = \{u\#u \mid u \in \{0,1\}^*\}$.

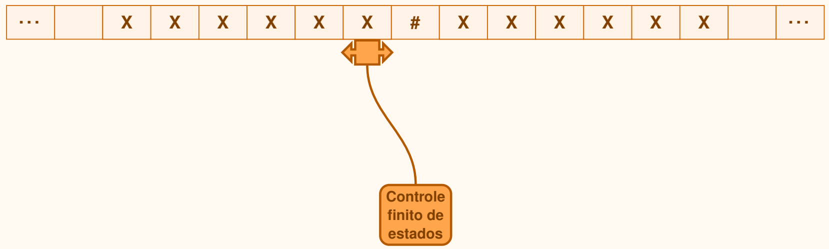


Reconhecedores

Máquinas de Turing

Exemplo 1.6

- $\mathcal{L} = \{u\#u \mid u \in \{0,1\}^*\}$.

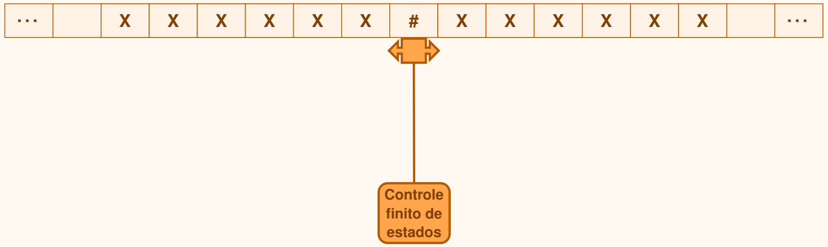


Reconhecedores

Máquinas de Turing

Exemplo 1.6

- $\mathcal{L} = \{u\#u \mid u \in \{0,1\}^*\}$.

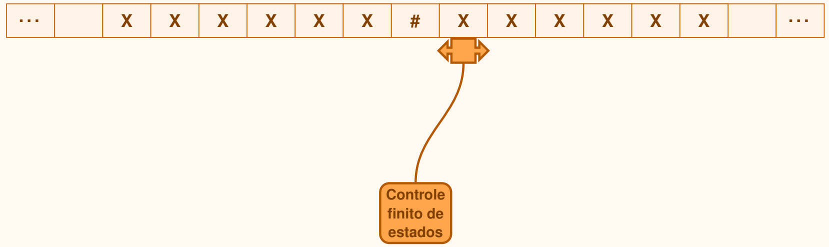


Reconhecedores

Máquinas de Turing

Exemplo 1.6

- $\mathcal{L} = \{u\#u \mid u \in \{0,1\}^*\}$.

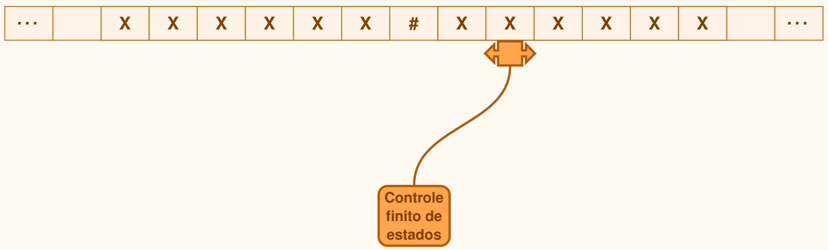


Reconhecedores

Máquinas de Turing

Exemplo 1.6

- $\mathcal{L} = \{u\#u \mid u \in \{0,1\}^*\}$.

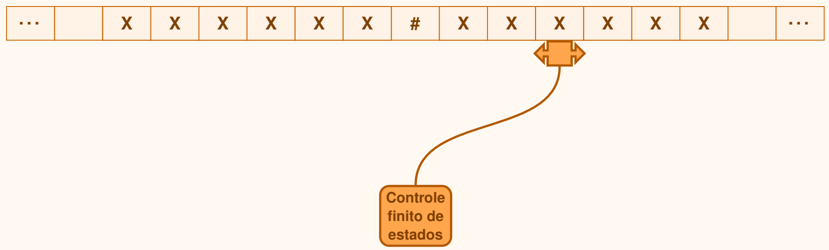


Reconhecedores

Máquinas de Turing

Exemplo 1.6

- $\mathcal{L} = \{u\#u \mid u \in \{0,1\}^*\}$.

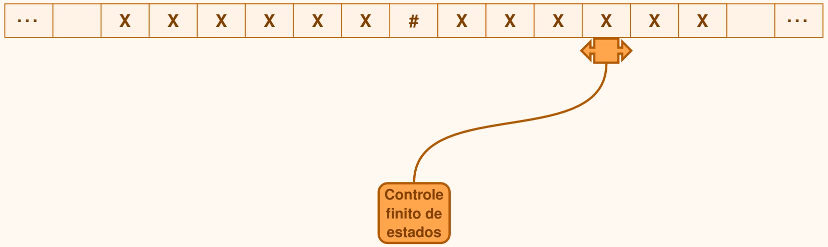


Reconhecedores

Máquinas de Turing

Exemplo 1.6

- $\mathcal{L} = \{u\#u \mid u \in \{0,1\}^*\}$.

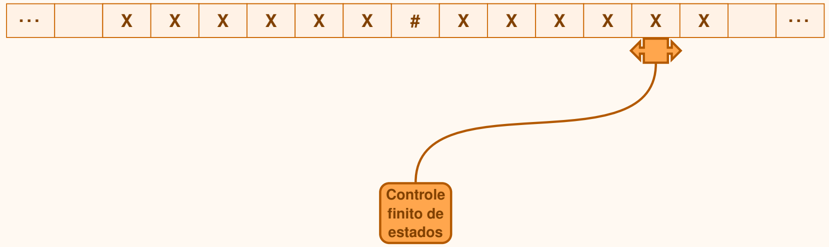


Reconhecedores

Máquinas de Turing

Exemplo 1.6

- $\mathcal{L} = \{u\#u \mid u \in \{0,1\}^*\}$.

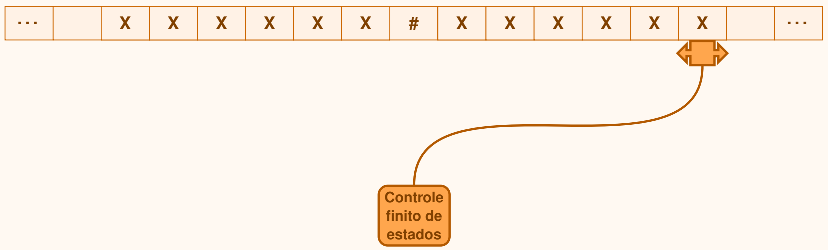


Reconhecedores

Máquinas de Turing

Exemplo 1.6

- $\mathcal{L} = \{u\#u \mid u \in \{0,1\}^*\}$.

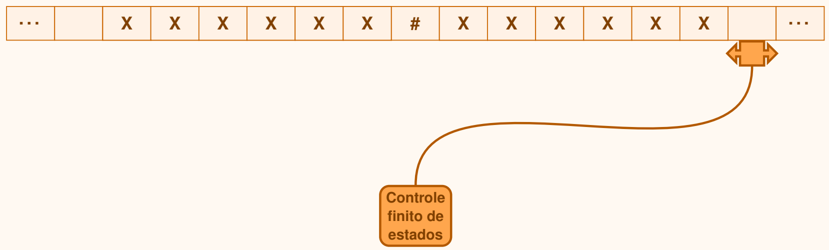


Reconhecedores

Máquinas de Turing

Exemplo 1.6

- $\mathcal{L} = \{u\#u \mid u \in \{0,1\}^*\}$.

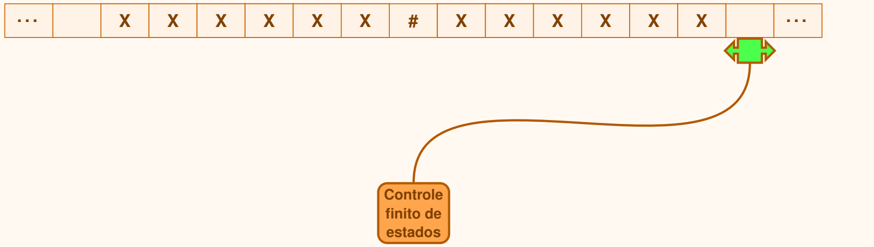


Reconhecedores

Máquinas de Turing

Exemplo 1.6

- $\mathcal{L} = \{u\#u \mid u \in \{0,1\}^*\}$.



Reconhecedores

Máquinas de Turing

- Uma Máquina de Turing é definida pela 7-upla $M = (S, \Sigma, \Gamma, \delta, s_0, s_a, s_r)$, onde:
  - S é o conjunto de estados,
  - Σ é o alfabeto de entrada ($\sqcup \notin \Sigma$),
  - Γ é o alfabeto da fita ($\sqcup \in \Gamma$ e $\Sigma \subset \Gamma$),
  - $\delta : S \times \Sigma \to S \times \Gamma \times \{E, D\}$ é a função de transição,
  - $s_0 \in S$ é o estado inicial,
  - $s_a \in S$ é o estado de aceitação, e
  - $s_r \in S$ é o estado de rejeição ($s_a \neq s_r$).

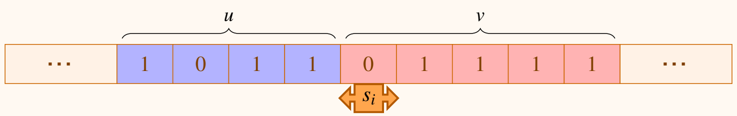
Máquinas de Turing

Definição 1.7

- Configuração $C = usv$:
  - s : Estado corrente no processamento ($s \in S$).
  - uv : Conteúdo da fita ($u, v \in \Gamma^*$).
  - v_1 : Posição da cabeça de leitura/gravação ($v = v_1 v_2 \ldots v_k$).
- Configuração C_1 gera configuração C_2 se a máquina passa da configuração C_1 para a C_2 em um único passo.

Exemplo 1.8

- Configuração $1011s_i01111$:



Máquinas de Turing

- Funcionamento:
  - $a, b, c \in \Gamma$.
  - $u, v \in \Gamma^*$.
  - $s_i, s_j \in S$.
  - $\delta(s_i, b) = (s_j, c, E) \Rightarrow uas_ibv$ gera us_jacv.
  - $\delta(s_i, b) = (s_j, c, D) \Rightarrow uas_ibv$ gera $uacs_jv$.
  - $\delta(s_i, b) = (s_j, c, E) \Rightarrow s_ibv$ gera s_jcv.
  - $\delta(s_i, b) = (s_j, c, D) \Rightarrow s_ibv$ gera cs_jv.

Máquinas de Turing

Definição 1.9

- $M = (S, \Sigma, \Gamma, \delta, s_0, s_a, s_r)$.
- M aceita a entrada w se existe uma sequência de configurações $C_1, C_2, \ldots, C_k$, tal que:
  - $C_1 = s_0 w$ é a configuração inicial,
  - Cada C_i gera C_{i+1}, e
  - C_k é uma configuração de aceitação.
- s_a é o estado de uma configuração de aceitação.
- s_r é o estado de uma configuração de rejeição.

Máquinas de Turing

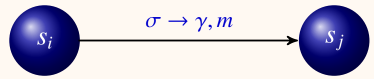
Função de transição

- $\delta(s_i, \sigma) = (s_j, \gamma, m)$.
  - A MT muda do estado s_i para o s_j, lê σ da fita de entrada, grava γ e move a cabeça de leitura uma posição à esquerda ou à direita.

Representação gráfica

- $\sigma \rightarrow \gamma, m$:

σ : símbolo da cadeia de entrada lido na fita ($\sigma \in \Gamma$).
γ : símbolo gravado na mesma posição do símbolo lido ($\gamma \in \Gamma$).
m : movimento da cabeça de leitura ($m \in \{E, D\}$).



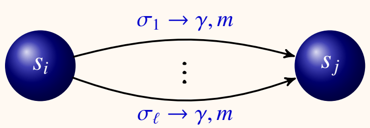
Máquinas de Turing

Função de transição

- $\delta(s_i, \sigma) = (s_j, \gamma, m)$.
  - A MT muda do estado s_i para o s_j, lê σ da fita de entrada, grava γ e move a cabeça de leitura uma posição à esquerda ou à direita.

Representação gráfica

- $\sigma_1, \ldots, \sigma_\ell \rightarrow \gamma, m$.
  - Equivale a ℓ transições $\delta(s_i, \sigma_k) = (s_j, \gamma, m), k = 1, \ldots, \ell$.



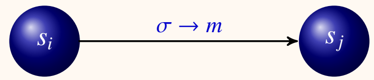
Máquinas de Turing

Função de transição

- $\delta(s_i, \sigma) = (s_j, \gamma, m)$.
  - A MT muda do estado s_i para o s_j, lê σ da fita de entrada, grava γ e move a cabeça de leitura uma posição à esquerda ou à direita.

Representação gráfica

- $\sigma \rightarrow m$.
  - Equivale à transição $\delta(s_i, \sigma) = (s_j, \sigma, m)$.



Máquinas de Turing

Exemplo 1.10

- $\mathcal{L} = \{0^{2^n} \mid n \geqslant 0\}$.
- $w \in \mathcal{L}$.
- Máquina de Turing M que reconhece $\mathcal{L}$:
  1. Percorrer a fita, da esquerda para a direita, e marcar um 0 e pular um 0.
     - Fita contém apenas um $0 \Rightarrow$ `aceita`.
     - Fita contém um número ímpar $n > 1$ de 0's $\Rightarrow$ `rejeita`.
  2. Mover a cabeça de leitura/gravação para o início da fita.
  3. Voltar ao passo 1.

Máquinas de Turing

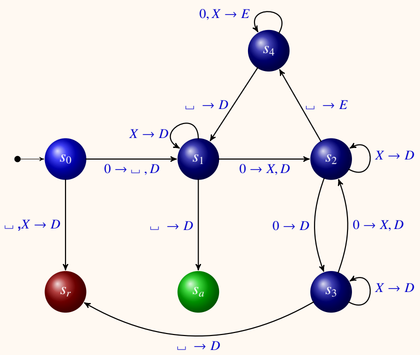
Exemplo 1.11

- $\mathcal{L} = \{0^{2^n} \mid n \geqslant 0\}$.
- $M = (\{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4, s_a, s_r\}, \{0\}, \{0, x, \sqcup\}, \delta, s_0, s_a, s_r)$:

Máquinas de Turing

Exemplo 1.11

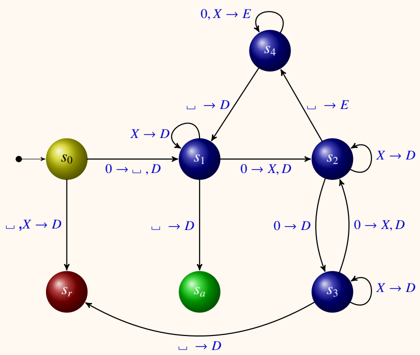
- $\mathcal{L} = \{0^{2^n} \mid n \geqslant 0\}$.
- $M = (\{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4, s_a, s_r\}, \{0\}, \{0, x, \sqcup\}, \delta, s_0, s_a, s_r)$:



Máquinas de Turing

Exemplo 1.11

- $\mathcal{L} = \{0^{2^n} \mid n \geqslant 0\}$.
- $M = (\{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4, s_a, s_r\}, \{0\}, \{0, x, \sqcup\}, \delta, s_0, s_a, s_r)$:

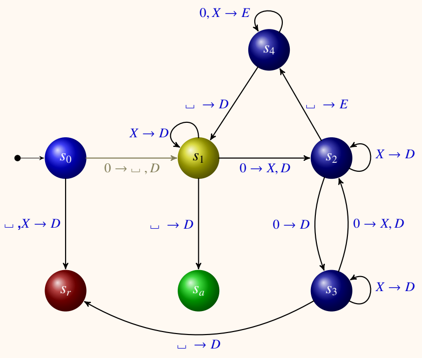


$s_0$0000

Máquinas de Turing

Exemplo 1.11

- $\mathcal{L} = \{0^{2^n} \mid n \geqslant 0\}$.
- $M = (\{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4, s_a, s_r\}, \{0\}, \{0, x, ␣\}, \delta, s_0, s_a, s_r)$:

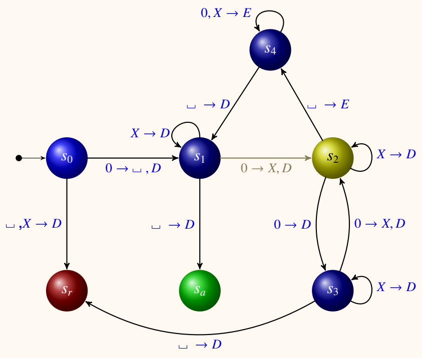


$s_0 0000$
$␣ s_1 000$

Máquinas de Turing

Exemplo 1.11

- $\mathcal{L} = \{0^{2^n} \mid n \geqslant 0\}$.
- $M = (\{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4, s_a, s_r\}, \{0\}, \{0, x, ␣\}, \delta, s_0, s_a, s_r)$:

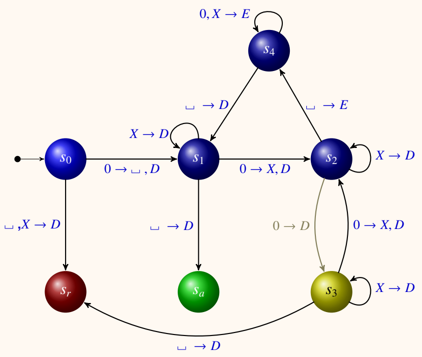


$s_0 0000$
$␣ s_1 000$
$␣ x s_2 00$

Máquinas de Turing

Exemplo 1.11

- $\mathcal{L} = \{0^{2^n} \mid n \geqslant 0\}$.
- $M = (\{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4, s_a, s_r\}, \{0\}, \{0, x, ␣\}, \delta, s_0, s_a, s_r)$:

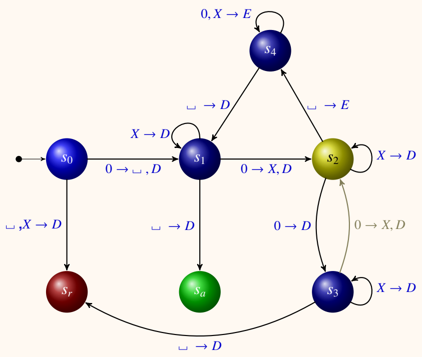


$s_0 0000$
$␣ s_1 000$
$␣ x s_2 00$
$␣ x 0 s_3 0$

Máquinas de Turing

Exemplo 1.11

- $\mathcal{L} = \{0^{2^n} \mid n \geqslant 0\}$.
- $M = (\{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4, s_a, s_r\}, \{0\}, \{0, x, ␣\}, \delta, s_0, s_a, s_r)$:

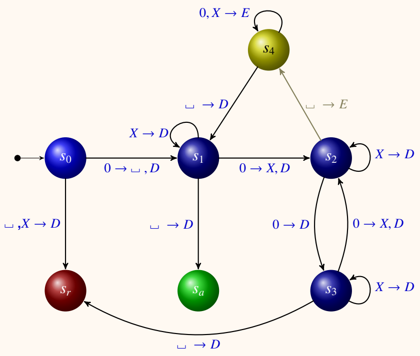


$s_0 0000$
$␣ s_1 000$
$␣ x s_2 00$
$␣ x 0 s_3 0$
$␣ x 0 x s_2 ␣$

Máquinas de Turing

Exemplo 1.11

- $\mathcal{L} = \{0^{2^n} \mid n \geqslant 0\}$.
- $M = (\{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4, s_a, s_r\}, \{0\}, \{0, x, ⊔\}, \delta, s_0, s_a, s_r)$:

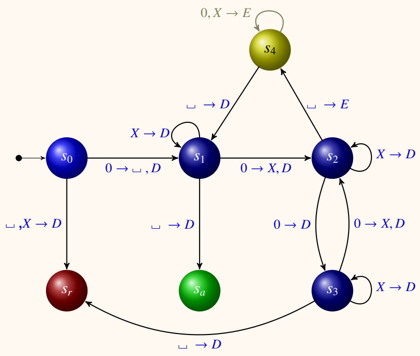


$s_0$0000
⊔$s_1$000
⊔x$s_2$00
⊔x0$s_3$0
⊔x0xs_2⊔
⊔x0s_4x⊔

Máquinas de Turing

Exemplo 1.11

- $\mathcal{L} = \{0^{2^n} \mid n \geqslant 0\}$.
- $M = (\{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4, s_a, s_r\}, \{0\}, \{0, x, ⊔\}, \delta, s_0, s_a, s_r)$:

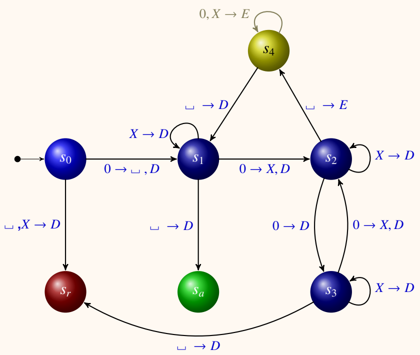


$s_0$0000
⊔$s_1$000
⊔x$s_2$00
⊔x0$s_3$0
⊔x0xs_2⊔
⊔x0s_4x⊔
⊔x$s_4$0x⊔

Máquinas de Turing

Exemplo 1.11

- $\mathcal{L} = \{0^{2^n} \mid n \geqslant 0\}$.
- $M = (\{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4, s_a, s_r\}, \{0\}, \{0, x, ⊔\}, \delta, s_0, s_a, s_r)$:

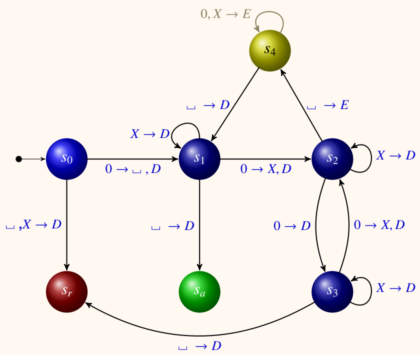


$s_0$0000
⊔$s_1$000
⊔x$s_2$00
⊔x0$s_3$0
⊔x0xs_2⊔
⊔x0s_4x⊔
⊔x$s_4$0x⊔
⊔s_4x0x⊔

Máquinas de Turing

Exemplo 1.11

- $\mathcal{L} = \{0^{2^n} \mid n \geqslant 0\}$.
- $M = (\{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4, s_a, s_r\}, \{0\}, \{0, x, ⊔\}, \delta, s_0, s_a, s_r)$:

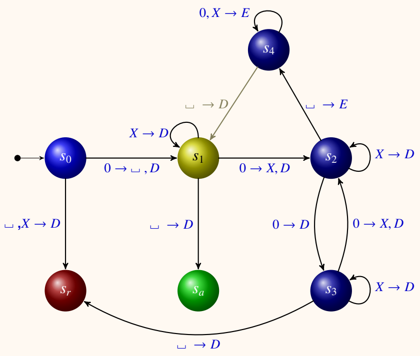


$s_0$0000
⊔$s_1$000
⊔x$s_2$00
⊔x0$s_3$0
⊔x0xs_2⊔
⊔x0s_4x⊔
⊔x$s_4$0x⊔
⊔s_4x0x⊔
s_4⊔x0x⊔

Máquinas de Turing

Exemplo 1.11

- $\mathcal{L} = \{0^{2^n} \mid n \geqslant 0\}$.
- $M = (\{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4, s_a, s_r\}, \{0\}, \{0, x, ␣\}, \delta, s_0, s_a, s_r)$:

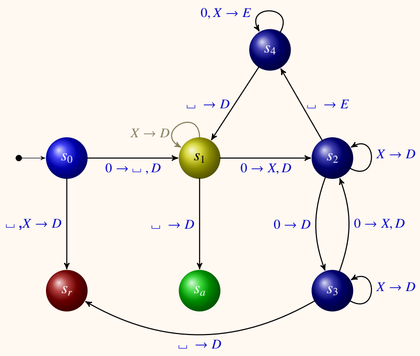


$s_0$0000
␣$s_1$000
␣x$s_2$00
␣x0$s_3$0
␣x0xs_2␣
␣x0s_4x␣
␣x$s_4$0x␣
␣s_4x0x␣
s_4␣x0x␣
␣s_1x0x␣

Máquinas de Turing

Exemplo 1.11

- $\mathcal{L} = \{0^{2^n} \mid n \geqslant 0\}$.
- $M = (\{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4, s_a, s_r\}, \{0\}, \{0, x, ␣\}, \delta, s_0, s_a, s_r)$:

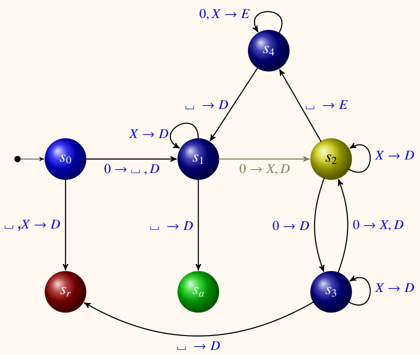


$s_0$0000
␣$s_1$000
␣x$s_2$00
␣x0$s_3$0
␣x0xs_2␣
␣x0s_4x␣
␣x$s_4$0x␣
␣s_4x0x␣
s_4␣x0x␣
␣s_1x0x␣
␣x$s_1$0x␣

Máquinas de Turing

Exemplo 1.11

- $\mathcal{L} = \{0^{2^n} \mid n \geqslant 0\}$.
- $M = (\{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4, s_a, s_r\}, \{0\}, \{0, x, ␣\}, \delta, s_0, s_a, s_r)$:



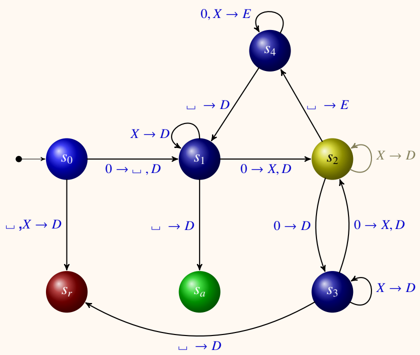
$s_0$0000
␣$s_1$000
␣x$s_2$00
␣x0$s_3$0
␣x0xs_2␣
␣x0s_4x␣
␣x$s_4$0x␣
␣s_4x0x␣
s_4␣x0x␣
␣s_1x0x␣
␣x$s_1$0x␣

␣xxs_2x␣

Máquinas de Turing

Exemplo 1.11

- $\mathcal{L} = \{0^{2^n} \mid n \geqslant 0\}$.
- $M = (\{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4, s_a, s_r\}, \{0\}, \{0, x, ␣\}, \delta, s_0, s_a, s_r)$:



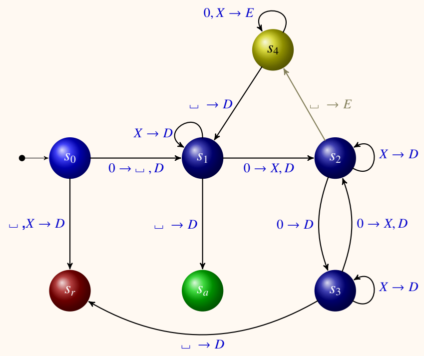
$s_0$0000
␣$s_1$000
␣x$s_2$00
␣x0$s_3$0
␣x0xs_2␣
␣x0s_4x␣
␣x$s_4$0x␣
␣s_4x0x␣
s_4␣x0x␣
␣s_1x0x␣
␣x$s_1$0x␣

␣xxs_2x␣
␣xxxs_2␣

Máquinas de Turing

Exemplo 1.11

- $\mathcal{L} = \{0^{2^n} \mid n \geqslant 0\}$.
- $M = (\{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4, s_a, s_r\}, \{0\}, \{0, x, \sqcup\}, \delta, s_0, s_a, s_r)$:

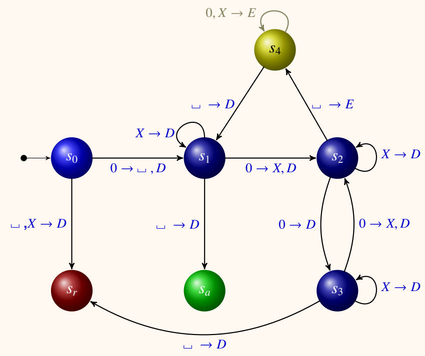


$s_0$0000	␣xxs_2x␣
␣$s_1$000	␣xxxs_2␣
␣x$s_2$00	␣xxs_4x␣
␣x0$s_3$0	
␣x0xs_2␣	
␣x0s_4x␣	
␣x$s_4$0x␣	
␣s_4x0x␣	
s_4␣x0x␣	
␣s_1x0x␣	
␣x$s_1$0x␣	

Máquinas de Turing

Exemplo 1.11

- $\mathcal{L} = \{0^{2^n} \mid n \geqslant 0\}$.
- $M = (\{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4, s_a, s_r\}, \{0\}, \{0, x, \sqcup\}, \delta, s_0, s_a, s_r)$:

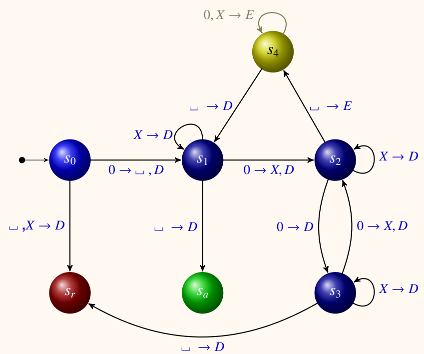


$s_0$0000	␣xxs_2x␣
␣$s_1$000	␣xxxs_2␣
␣x$s_2$00	␣xxs_4x␣
␣x0$s_3$0	␣x$s_4$xx␣
␣x0xs_2␣	
␣x0s_4x␣	
␣x$s_4$0x␣	
␣s_4x0x␣	
s_4␣x0x␣	
␣s_1x0x␣	
␣x$s_1$0x␣	

Máquinas de Turing

Exemplo 1.11

- $\mathcal{L} = \{0^{2^n} \mid n \geqslant 0\}$.
- $M = (\{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4, s_a, s_r\}, \{0\}, \{0, x, \sqcup\}, \delta, s_0, s_a, s_r)$:

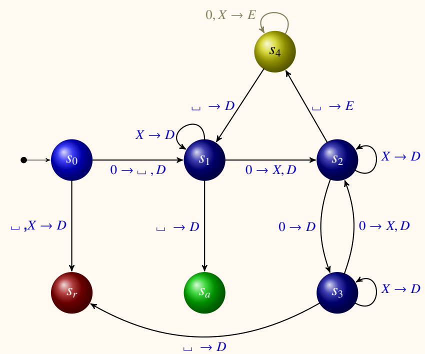


$s_0$0000	␣xxs_2x␣
␣$s_1$000	␣xxxs_2␣
␣x$s_2$00	␣xxs_4x␣
␣x0$s_3$0	␣x$s_4$xx␣
␣x0xs_2␣	␣$s_4$xxx␣
␣x0s_4x␣	
␣x$s_4$0x␣	
␣s_4x0x␣	
s_4␣x0x␣	
␣s_1x0x␣	
␣x$s_1$0x␣	

Máquinas de Turing

Exemplo 1.11

- $\mathcal{L} = \{0^{2^n} \mid n \geqslant 0\}$.
- $M = (\{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4, s_a, s_r\}, \{0\}, \{0, x, \sqcup\}, \delta, s_0, s_a, s_r)$:

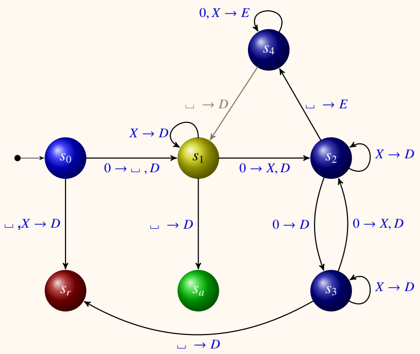


$s_0$0000	␣xxs_2x␣
␣$s_1$000	␣xxxs_2␣
␣x$s_2$00	␣xxs_4x␣
␣x0$s_3$0	␣x$s_4$xx␣
␣x0xs_2␣	␣$s_4$xxx␣
␣x0s_4x␣	s_4␣xxx␣
␣x$s_4$0x␣	
␣s_4x0x␣	
s_4␣x0x␣	
␣s_1x0x␣	
␣x$s_1$0x␣	

Máquinas de Turing

Exemplo 1.11

- $\mathcal{L} = \{0^{2^n} \mid n \geqslant 0\}$.
- $M = (\{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4, s_a, s_r\}, \{0\}, \{0, x, ␣\}, \delta, s_0, s_a, s_r)$:

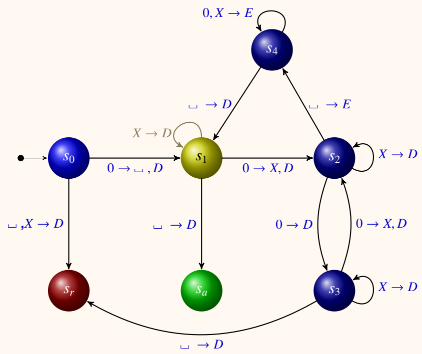


$s_0$0000	␣xxs_2x␣
␣$s_1$000	␣xxxs_2␣
␣x$s_2$00	␣xxs_4x␣
␣x0$s_3$0	␣x$s_4$xx␣
␣x0xs_2␣	␣$s_4$xxx␣
␣x0s_4x␣	s_4␣xxx␣
␣x$s_4$0x␣	␣$s_1$xxx␣
␣s_4x0x␣	
s_4␣x0x␣	
␣s_1x0x␣	
␣x$s_1$0x␣	

Máquinas de Turing

Exemplo 1.11

- $\mathcal{L} = \{0^{2^n} \mid n \geqslant 0\}$.
- $M = (\{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4, s_a, s_r\}, \{0\}, \{0, x, ␣\}, \delta, s_0, s_a, s_r)$:

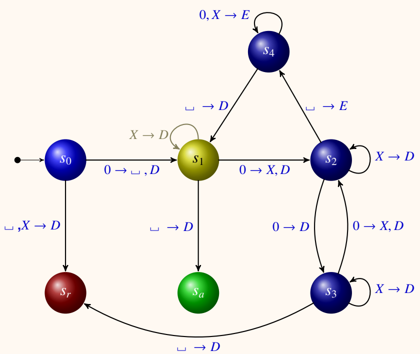


$s_0$0000	␣xxs_2x␣
␣$s_1$000	␣xxxs_2␣
␣x$s_2$00	␣xxs_4x␣
␣x0$s_3$0	␣x$s_4$xx␣
␣x0xs_2␣	␣$s_4$xxx␣
␣x0s_4x␣	s_4␣xxx␣
␣x$s_4$0x␣	␣$s_1$xxx␣
␣s_4x0x␣	␣x$s_1$xx␣
s_4␣x0x␣	
␣s_1x0x␣	
␣x$s_1$0x␣	

Máquinas de Turing

Exemplo 1.11

- $\mathcal{L} = \{0^{2^n} \mid n \geqslant 0\}$.
- $M = (\{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4, s_a, s_r\}, \{0\}, \{0, x, ␣\}, \delta, s_0, s_a, s_r)$:

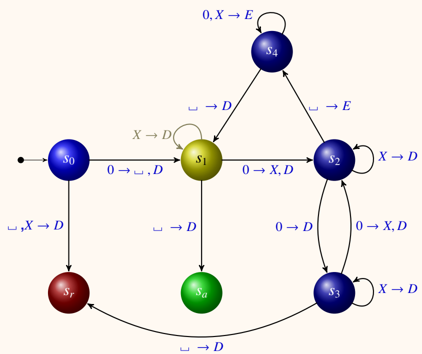


$s_0$0000	␣xxs_2x␣
␣$s_1$000	␣xxxs_2␣
␣x$s_2$00	␣xxs_4x␣
␣x0$s_3$0	␣x$s_4$xx␣
␣x0xs_2␣	␣$s_4$xxx␣
␣x0s_4x␣	s_4␣xxx␣
␣x$s_4$0x␣	␣$s_1$xxx␣
␣s_4x0x␣	␣x$s_1$xx␣
s_4␣x0x␣	␣xxs_1x␣
␣s_1x0x␣	
␣x$s_1$0x␣	

Máquinas de Turing

Exemplo 1.11

- $\mathcal{L} = \{0^{2^n} \mid n \geqslant 0\}$.
- $M = (\{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4, s_a, s_r\}, \{0\}, \{0, x, ␣\}, \delta, s_0, s_a, s_r)$:

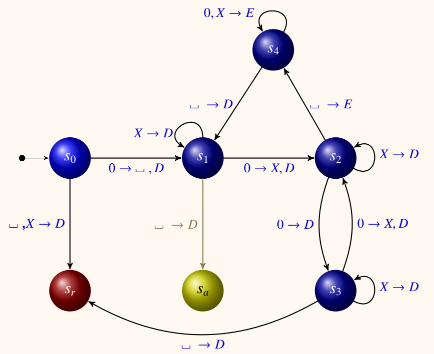


$s_0$0000	␣xxs_2x␣
␣$s_1$000	␣xxxs_2␣
␣x$s_2$00	␣xxs_4x␣
␣x0$s_3$0	␣x$s_4$xx␣
␣x0xs_2␣	␣$s_4$xxx␣
␣x0s_4x␣	s_4␣xxx␣
␣x$s_4$0x␣	␣$s_1$xxx␣
␣s_4x0x␣	␣x$s_1$xx␣
s_4␣x0x␣	␣xxs_1x␣
␣s_1x0x␣	␣xxxs_1␣
␣x$s_1$0x␣	

Máquinas de Turing

Exemplo 1.11

- $\mathcal{L} = \{0^{2^n} \mid n \geqslant 0\}$.
- $M = (\{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4, s_a, s_r\}, \{0\}, \{0, x, ␣\}, \delta, s_0, s_a, s_r)$:



$s_0$0000	␣xxs_2x␣
␣$s_1$000	␣xxxs_2␣
␣x$s_2$00	␣xxs_4x␣
␣x0$s_3$0	␣x$s_4$xx␣
␣x0xs_2␣	␣$s_4$xxx␣
␣x0s_4x␣	s_4␣xxx␣
␣x$s_4$0x␣	␣$s_1$xxx␣
␣s_4x0x␣	␣x$s_1$xx␣
s_4␣x0x␣	␣xxs_1x␣
␣s_1x0x␣	␣xxxs_1␣
␣x$s_1$0x␣	␣xxx␣s_a

Máquinas de Turing

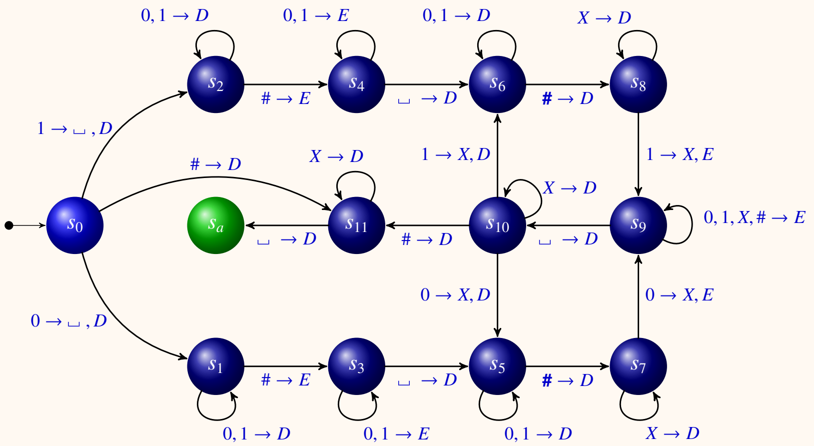
Exemplo 1.12

- $\mathcal{L} = \{u\#u \mid u \in \{0, 1\}^*\}$.
- Máquina de Turing para verificar se $w = u\#u \in \mathcal{L}$, com $u \in \{0, 1\}^*$:
  1. Verificar se o símbolo # pertence a w.
     - Em caso negativo, `rejeita`.
  2. Verificar se posições relativas à direita e à esquerda do símbolo # contém o mesmo símbolo.
     - Em caso negativo, `rejeita`.
  3. Após testar os símbolos à esquerda do símbolo #, verificar se ainda tem símbolos à direita sem testar.
     - Em caso positivo `rejeita` e em caso negativo `aceita`.

Máquinas de Turing

Exemplo 1.12

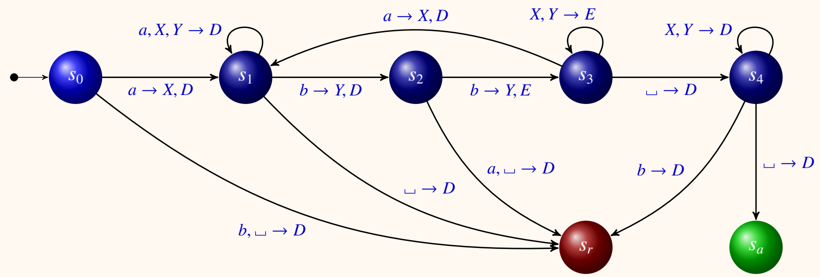
- $M = (\{s_0, \ldots, s_{13}, s_a, s_r\}, \{0, 1, \#\}, \{0, 1, \#, x, ␣\}, \delta, s_0, s_a, s_r)$:



Exemplos de máquinas de Turing

Exemplo 1.13

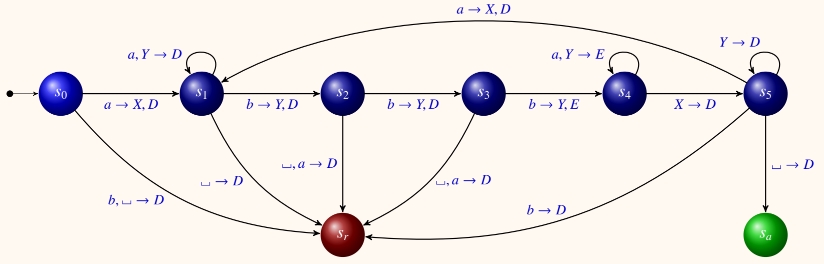
- $\mathcal{L} = \{a^i b^{2i} \mid i \geqslant 1\}$.



Exemplos de máquinas de Turing

Exemplo 1.14

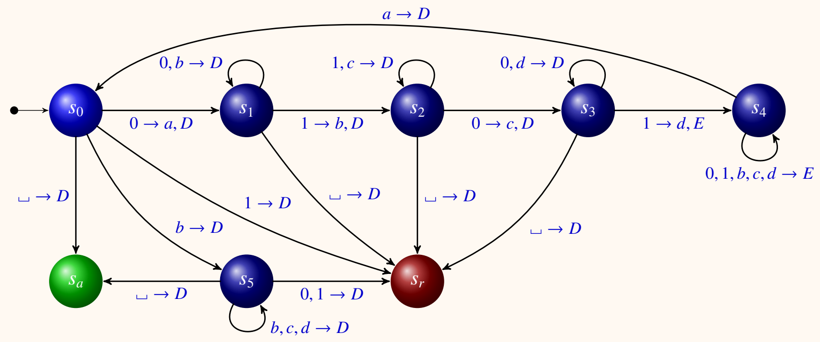
- $\mathcal{L} = \{a^i b^{3i} \mid i \geqslant 1\}$.



Exemplos de máquinas de Turing

Exemplo 1.15

- $\mathcal{L} = \{0^i 1^i 0^i 1^i \mid i \geqslant 0\}$.



Máquinas de Turing

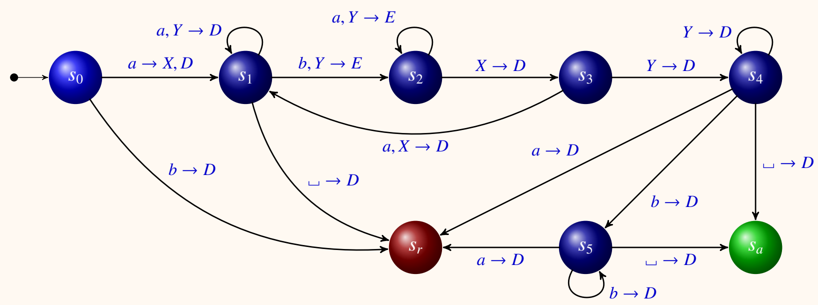
Exemplo 1.16

- $\mathcal{L} = \{a^i b^j c^k \mid i{\cdot}j = k \text{ e } i, j, k \geqslant 1\}$.
- MT para verificar se $u \in \mathcal{L}$, com $u \in \{a, b, c\}^+$:
  1. Verificar se u é da forma $aa^*bb^*cc^*$ (da esquerda para a direita).
     - Em caso negativo, `rejeita`.
  2. Retornar cabeça de leitura/gravação para a extremidade esquerda.
  3. Marcar um a e percorrer a fita para a direita até encontrar um b. Alternadamente, marcar b's e c's.
     - Marcou todos os c's e sobrou b's, `rejeita`.
  4. Se existir a's sem marcar, desmarcar b's e repetir passo **??**.
  5. Verificar se todos os c's estão marcados.
     - Em caso positivo `aceita` e em caso negativo `rejeita`.

Exemplos de máquinas de Turing

Exemplo 1.17

- Qual é a linguagem aceita pela MT abaixo?



Livros texto

- R. P. Grimaldi
  Discrete and Combinatorial Mathematics – An Applied Introduction.
  Addison Wesley, 1994.
- D. J. Velleman
  How To Prove It – A Structured Approach.
  Cambridge University Press, 1996.
- J. E. Hopcroft; J. Ullman.
  Introdução Ã Teoria de Autômatos, Linguagens e Computação.
  Ed. Campus.
- T. A. Sudkamp.
  Languages and Machines – An Introduction to the Theory of Computer Science.
  Addison Wesley Longman, Inc. 1998.
- J. Carroll; D. Long.
  Theory of Finite Automata – With an Introduction to Formal Languages.
  Prentice-Hall, 1989.
- M. Sipser.
  Introduction to the Theory of Computation.
  PWS Publishing Company, 1997.
- H. R. Lewis; C. H. Papadimitriou
  Elementos de Teoria da Computação.
  Bookman, 2000.