

# Linguagens Formais e Autômatos

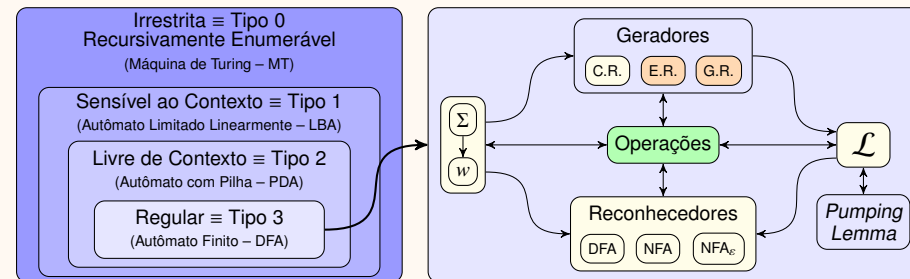
Humberto Longo

Instituto de Informática  
Universidade Federal de Goiás

Bacharelado em Ciência da Computação, 2021/1



## Roteiro



## Introdução

- ▶ Uma linguagem regular pode ser especificada por meio de um sistema de **várias** equações (expressões regulares).
- ▶ A solução deste sistema fornece **uma** expressão regular relativa à linguagem.

### Lemas de Arden

- ▶ Sejam  $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$  e  $\mathcal{R}_3$  expressões regulares. Se
  1.  $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_3$ , então  $\mathcal{R}_1 = (\mathcal{R}_2)^*\mathcal{R}_3$ ;
    - ▶ Menor solução possível.
    - ▶ Se  $\varepsilon \notin \mathcal{L}(\mathcal{R}_2) \Rightarrow$  solução é única!
    - ▶ Se  $\varepsilon \in \mathcal{L}(\mathcal{R}_2) \Rightarrow \mathcal{R}_1 = (\mathcal{R}_2)^*\mathcal{R}_4$ , com  $\mathcal{L}(\mathcal{R}_4) \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{R}_3)$ .
  2.  $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_1\mathcal{R}_2 \cup \mathcal{R}_3$ , então  $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_3(\mathcal{R}_2)^*$ .



## Gramática regular e sistema de equações

- ▶ Dada uma gramática regular  $G = (V, \Sigma, P, A_1)$ , com  $V = \{A_1, \dots, A_n\}$ , a linguagem  $\mathcal{L}(G)$  pode ser especificada por meio do seguinte sistema de equações:

$$\mathcal{A}_i = \bigcup_{A_i \rightarrow aA_j \in P} a\mathcal{A}_j \bigcup_{A_i \rightarrow a \in P} a \bigcup_{A_i \rightarrow \varepsilon \in P} \varepsilon.$$

- ▶ Esse sistema pode ser resolvido pela substituição de variáveis por sua correspondente equação e uso do Lema de Arden.
  - ▶  $\mathcal{A}_1$  será a solução do sistema de equações.
  - ▶ Solução sucinta, mas não única.
  - ▶ Sequências diferentes de substituições leva a expressões regulares diferentes (equivalentes).



## Gramática regular e sistema de equações

### Exemplo 1.18

► Gramática regular  $G = (V = \{S, A, B\}, \Sigma = \{a, b\}, P, S)$ , com

$$P = \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow aA \mid bB \mid \varepsilon, \\ A \rightarrow aB \mid bS, \\ B \rightarrow aS \mid bA \end{array} \right\}.$$

► Sistema de equações:

$$S = a\mathcal{A} \cup b\mathcal{B} \cup \varepsilon \quad (1)$$

$$\mathcal{A} = a\mathcal{B} \cup b\mathcal{S} \quad (2)$$

$$\mathcal{B} = a\mathcal{S} \cup b\mathcal{A} \quad (3)$$



## Gramática regular e sistema de equações

### Exemplo 1.18

#### Solução 1 :

(3)  $\rightarrow$  (1) e (3)  $\rightarrow$  (2):

$$\begin{aligned} S &= a\mathcal{A} \cup b(a\mathcal{S} \cup b\mathcal{A}) \cup \varepsilon \\ &= (a \cup bb)\mathcal{A} \cup ba\mathcal{S} \cup \varepsilon \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= a(a\mathcal{S} \cup b\mathcal{A}) \cup b\mathcal{S} \\ &= ab\mathcal{A} \cup (aa \cup b)\mathcal{S} \end{aligned} \quad (5)$$

Lema de Arden em (5):

$$S = (a \cup bb)\mathcal{A} \cup ba\mathcal{S} \cup \varepsilon \quad (4)$$

$$\underbrace{\mathcal{A}}_{\mathcal{R}_1} = \underbrace{ab}_{\mathcal{R}_2} \underbrace{\mathcal{A}}_{\mathcal{R}_1} \cup \underbrace{(aa \cup b)\mathcal{S}}_{\mathcal{R}_3} \quad (5)$$



## Gramática regular e sistema de equações

### Exemplo 1.18

#### Solução 1 :

Lema de Arden em (5):

$$S = (a \cup bb)\mathcal{A} \cup ba\mathcal{S} \cup \varepsilon \quad (4)$$

$$\mathcal{A} = (ab)^*(aa \cup b)\mathcal{S} \quad (6)$$

(6)  $\rightarrow$  (4):

$$\begin{aligned} S &= (a \cup bb)(ab)^*(aa \cup b)\mathcal{S} \cup ba\mathcal{S} \cup \varepsilon \\ &= ((a \cup bb)(ab)^*(aa \cup b) \cup ba)\mathcal{S} \cup \varepsilon \end{aligned} \quad (7)$$



## Gramática regular e sistema de equações

### Exemplo 1.18

#### Solução 1 :

Lema de Arden em (7):

$$\underbrace{S}_{\mathcal{R}_1} = \underbrace{((a \cup bb)(ab)^*(aa \cup b) \cup ba)}_{\mathcal{R}_2} \underbrace{S}_{\mathcal{R}_1} \cup \underbrace{\varepsilon}_{\mathcal{R}_3} \quad (7)$$

$$S = ((a \cup bb)(ab)^*(aa \cup b) \cup ba)^* \quad (8)$$



## Gramática regular e sistema de equações

### Exemplo 1.18

#### Solução 2 :

(2)  $\rightarrow$  (1) e (2)  $\rightarrow$  (3):

$$\begin{aligned} S &= a(a\mathcal{B} \cup bS) \cup b\mathcal{B} \cup \varepsilon \\ &= (aa \cup b)\mathcal{B} \cup abS \cup \varepsilon \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &= aS \cup b(a\mathcal{B} \cup bS) \\ &= ba\mathcal{B} \cup (a \cup bb)S \end{aligned} \quad (5)$$

Lema de Arden em (5):

$$S = (aa \cup b)\mathcal{B} \cup abS \cup \varepsilon \quad (4)$$

$$\underbrace{\mathcal{B}}_{\mathcal{R}_1} = \underbrace{ba}_{\mathcal{R}_2} \underbrace{\mathcal{B}}_{\mathcal{R}_1} \cup \underbrace{(a \cup bb)S}_{\mathcal{R}_3} \quad (5)$$



## Gramática regular e sistema de equações

### Exemplo 1.18

#### Solução 2 :

Lema de Arden em (5):

$$S = (aa \cup b)\mathcal{B} \cup abS \cup \varepsilon \quad (4)$$

$$\mathcal{B} = (ba)^*(a \cup bb)S \quad (6)$$

(6)  $\rightarrow$  (4):

$$\begin{aligned} S &= (aa \cup b)(ba)^*(a \cup bb)S \cup abS \cup \varepsilon \\ &= ((aa \cup b)(bb)^*(a \cup bb) \cup ab)S \cup \varepsilon \end{aligned} \quad (7)$$



## Gramática regular e sistema de equações

### Exemplo 1.18

#### Solução 2 :

Lema de Arden em (7):

$$\underbrace{S}_{\mathcal{R}_1} = \underbrace{((aa \cup b)(ba)^*(a \cup bb) \cup ab)}_{\mathcal{R}_2} \underbrace{S}_{\mathcal{R}_1} \cup \underbrace{\varepsilon}_{\mathcal{R}_3} \quad (7)$$

$$S = ((aa \cup b)(ba)^*(a \cup bb) \cup ab)^* \quad (8)$$



## Gramática regular e sistema de equações

### Exemplo 1.18

- As expressões regulares obtidas nas soluções 1 e 2 do sistema de equações são equivalentes:

$$((a \cup bb)(ab)^*(aa \cup b) \cup ba)^* \equiv ((aa \cup b)(ba)^*(a \cup bb) \cup ab)^*.$$



## Livros texto



[R. P. Grimaldi](#)  
*Discrete and Combinatorial Mathematics – An Applied Introduction.*  
[Addison Wesley](#), 1994.



[D. J. Velleman](#)  
*How To Prove It – A Structured Approach.*  
[Cambridge University Press](#), 1996.



[J. E. Hopcroft](#); [J. Ullman](#).  
*Introdução À Teoria de Autômatos, Linguagens e Computação.*  
Ed. [Campus](#).



[T. A. Sudkamp](#).  
*Languages and Machines – An Introduction to the Theory of Computer Science.*  
[Addison Wesley Longman, Inc.](#) 1998.



[J. Carroll](#); [D. Long](#).  
*Theory of Finite Automata – With an Introduction to Formal Languages.*  
[Prentice-Hall](#), 1989.



[M. Sipser](#).  
*Introduction to the Theory of Computation.*  
[PWS Publishing Company](#), 1997.



[H. R. Lewis](#); [C. H. Papadimitriou](#)  
*Elementos de Teoria da Computação.*  
[Bookman](#), 2000.

