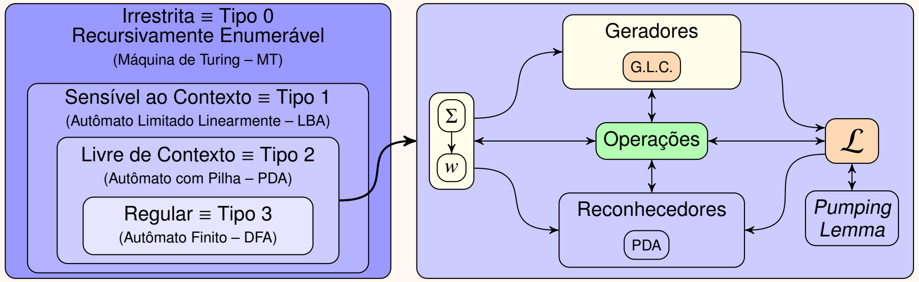
Linguagens Formais e Autômatos

Humberto Longo

Instituto de Informática
Universidade Federal de Goiás

Bacharelado em Ciência da Computação, 2021/1

Roteiro



Linguagens e derivações

- Seja $G = (V, \Sigma, P, S)$ uma gramática e L uma linguagem.
- Como provar que $\mathcal{L}(G) = L$?
  1. $L \subseteq \mathcal{L}(G)$.
     - Se $w \in L$ então $S \overset{*}{\Longrightarrow} w$.
     - Toda cadeia da linguagem L é derivável na gramática G.
  2. $\mathcal{L}(G) \subseteq L$.
     - Se $S \overset{*}{\Longrightarrow} w$ então $w \in L$.
     - Toda cadeia de terminais derivável na gramática G deve ter a forma especificada pela linguagem L.

Gramática Livre de Contexto

Exemplo 6.21

- $G = (V, \Sigma, P, S)$, onde: $\begin{cases} V = \{S, B\} \\ \Sigma = \{a, b, c\} \\ P = \begin{Bmatrix} S \to abScB \mid \varepsilon, \\ B \to bB \mid b \end{Bmatrix} \end{cases}$
- $\mathcal{L}(G) = \{(ab)^n (cb^{m_n})^n \mid n \geqslant 0, m_n > 0\}$.
  - m_n indica que número de b's em cada ocorrência da variável B pode ser diferente:

$$\begin{aligned} S &\Rightarrow abScB \\ &\Rightarrow ababScBcB \\ &\Rightarrow ababcBcB \\ &\Rightarrow ababcbcB \\ &\Rightarrow ababcbcbB \\ &\Rightarrow ababcbcbb \end{aligned}$$

Gramática Livre de Contexto

Exemplo 6.22

- Dada a gramática G, definida por $\{S \to aSa \mid bSb \mid \varepsilon\}$, então $\mathcal{L}(G) = \{xx^R \mid x \in \{a,b\}^*\}$.

Lema 6.23

- $S \overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}} w$ *se e somente se* $w = xx^R$, *para algum* $x \in \{a,b\}^*$.
  1. *Se* $S \overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}} w$, *então* $w = xx^R$, *para algum* $x \in \{a,b\}^*$.
  2. *Se* $w = xx^R$ *para algum* $x \in \{a,b\}^*$, *então* $S \overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}} w$.

  ⋆ *Se* $S \overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}} \alpha$, *então ou* $\alpha = xx^R$ *ou* $\alpha = xSx^R$, *para algum* $x \in \{a,b\}^*$.
  - *Seja* $X = \{xx^R \mid x \in \{a,b\}^*\} \cup \{xSx^R \mid x \in \{a,b\}^*\}$. *Se* $S \overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}} \alpha$, *então* $\alpha \in X$.

Gramática Livre de Contexto

Demonstração.

- Prova por indução no número n de passos da derivação de α:

Base: Para $n = 0$, tem-se $S \overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}} S$ e $S = \varepsilon S \varepsilon^R$.

H.I.: Propriedade vale para $n = k$: Se $S \overset{n}{\underset{G}{\Longrightarrow}} \alpha$, então $\alpha \in X$.

Passo: Propriedade vale para $n = k + 1$:
- **Exercício!**

□

Linguagens e derivações

Exemplo 6.24

$$L = \{a^{2n}b^{4n} \mid n > 0\} \text{ e } G : \left\{\begin{array}{l} S \to AASB \mid AAB\,, \\ A \to a\,, \\ B \to bbbb \end{array}\right\}$$

$$\{a^{2n}b^{4n} \mid n > 0\} \subseteq \mathcal{L}(G) \;\equiv\; \text{Se } w = a^{2n}b^{4n},\ n > 0, \text{então } S \overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}} w.$$

Opção 1: Construir uma derivação para cada cadeia de L.
- L contém um número infinito de cadeias!!!

Opção 2: Construir um esquema de derivação:
- Padrão que pode ser seguido para construir uma derivação de qualquer cadeia em L.

Linguagens e derivações

Exemplo 6.24

$$L = \{a^{2n}b^{4n} \mid n > 0\} \text{ e } G : \left\{\begin{array}{l} S \to AASB \mid AAB\,, \\ A \to a\,, \\ B \to bbbb \end{array}\right\}$$

$$\{a^{2n}b^{4n} \mid n > 0\} \subseteq \mathcal{L}(G) \;\equiv\; \text{Se } w = a^{2n}b^{4n},\ n > 0, \text{então } S \overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}} w.$$

Derivação	Regra usada
$S \overset{n-1}{\Longrightarrow} (AA)^{n-1}SB^{n-1}$	$S \to AASB$
$\Longrightarrow (AA)^nB^n$	$S \to AAB$
$\overset{2n}{\Longrightarrow} (aa)^nB^n$	$A \to a$
$\overset{n}{\Longrightarrow} (aa)^n(bbbb)^n$	$B \to bbbb$
$= (a^2)^n(b^4)^n$	
$= a^{2n}b^{4n}$	

Linguagens e derivações

$$L = \{a^{2n}b^{4n} \mid n > 0\} \text{ e } G : \left\{\begin{array}{l} S \to AASB \mid AAB\,, \\ A \to a\,, \\ B \to bbbb \end{array}\right\}$$

$\mathcal{L}(G) \subseteq \{a^{2n}b^{4n} \mid n > 0\} \equiv$ Se $S \stackrel{*}{\Longrightarrow} w$, então $w = a^{2n}b^{4n}, n > 0$.

- A derivação de uma cadeia é resultado da aplicação de um número finito de produções.
  - Pode indicar que a prova por indução é adequada neste caso.
  - O que exatamente precisa ser provado? Relação entre a's e b's nas cadeias de terminais deriváveis em G.
- $|u|_x$: número de ocorrências do símbolo x na cadeia u.
  - $2{\cdot}|u|_a = |u|_b$.

Linguagens e derivações

$$L = \{a^{2n}b^{4n} \mid n > 0\} \text{ e } G : \left\{\begin{array}{l} S \to AASB \mid AAB\,, \\ A \to a\,, \\ B \to bbbb \end{array}\right\}$$

$\mathcal{L}(G) \subseteq \{a^{2n}b^{4n} \mid n > 0\} \equiv$ Se $S \stackrel{*}{\Longrightarrow} w$, então $w = a^{2n}b^{4n}, n > 0$.

- $2{\cdot}|u|_a = |u|_b$.
  - Relação não válida para qualquer *forma sentencial* derivável em G.
  - Ex.: $S \Longrightarrow AASB \Longrightarrow aASB$.
- Qual a relação geral entre terminais e não terminais?
  - $|u|_A$: Nr. de ocorrências da variável A na forma sentencial u. (Quantos a's cada variável A gera?).
  - $|u|_B$: Nr. de ocorrências da variável B na forma sentencial u. (Quantos b's cada variável B gera?).

Linguagens e derivações

$$L = \{a^{2n}b^{4n} \mid n > 0\} \text{ e } G : \left\{\begin{array}{l} S \to AASB \mid AAB\,, \\ A \to a\,, \\ B \to bbbb \end{array}\right\}$$

$\mathcal{L}(G) \subseteq \{a^{2n}b^{4n} \mid n > 0\} \equiv$ Se $S \stackrel{*}{\Longrightarrow} w$, então $w = a^{2n}b^{4n}, n > 0$.

1. $2{\cdot}(|u|_a + |u|_A) = |u|_b + 4{\cdot}|u|_B$.
2. $|u|_a + |u|_A > 1$.
3. Os a's e A's numa forma sentencial precedem o S, o qual precede os b's e B's.

Linguagens e derivações

$$L = \{a^{2n}b^{4n} \mid n > 0\} \text{ e } G : \left\{\begin{array}{l} S \to AASB \mid AAB\,, \\ A \to a\,, \\ B \to bbbb \end{array}\right\}$$

$\mathcal{L}(G) \subseteq \{a^{2n}b^{4n} \mid n > 0\} \equiv$ Se $S \stackrel{*}{\Longrightarrow} w$, então $w = a^{2n}b^{4n}, n > 0$.

- Objetivo: provar que essas relações são válidas para qualquer forma sentencial derivável a partir de S.
- Indução no comprimento da derivação.

Linguagens e derivações

$L = \{a^{2n}b^{4n} \mid n > 0\}$ e $G : \begin{Bmatrix} S \to AASB \mid AAB\,, \\ A \to a\,, \\ B \to bbbb \end{Bmatrix}$

$\mathcal{L}(G) \subseteq \{a^{2n}b^{4n} \mid n > 0\} \equiv$ Se $S \overset{*}{\Longrightarrow} w$, então $w = a^{2n}b^{4n}, n > 0$.

Base: Todas as formas sentenciais que podem ser obtidas a partir de S com a aplicação de apenas uma regra de derivação.

Linguagens e derivações

$L = \{a^{2n}b^{4n} \mid n > 0\}$ e $G : \begin{Bmatrix} S \to AASB \mid AAB\,, \\ A \to a\,, \\ B \to bbbb \end{Bmatrix}$

$\mathcal{L}(G) \subseteq \{a^{2n}b^{4n} \mid n > 0\} \equiv$ Se $S \overset{*}{\Longrightarrow} w$, então $w = a^{2n}b^{4n}, n > 0$.

Hipótese Indutiva: Relações são válidas para todas as formas sentenciais deriváveis com no máximo n aplicações de regras de derivação.

Linguagens e derivações

$L = \{a^{2n}b^{4n} \mid n > 0\}$ e $G : \begin{Bmatrix} S \to AASB \mid AAB\,, \\ A \to a\,, \\ B \to bbbb \end{Bmatrix}$

$\mathcal{L}(G) \subseteq \{a^{2n}b^{4n} \mid n > 0\} \equiv$ Se $S \overset{*}{\Longrightarrow} w$, então $w = a^{2n}b^{4n}, n > 0$.

Passo Indutivo:

- w é uma forma sentencial derivável a partir de S em $n+1$ passos.
  - $S \overset{n+1}{\Longrightarrow} w \equiv S \overset{n}{\Longrightarrow} u \overset{1}{\Longrightarrow} w$.
- Por hipótese de indução, para todo $u \in (V \cup \Sigma)^*$:
  - $2{\cdot}(|u|_a + |u|_A) = |u|_b + 4{\cdot}|u|_B$.
  - $|u|_a + |u|_A > 1$.
  - Todos os a's e A's precedem os b's e B's em u.

Linguagens e derivações

$L = \{a^{2n}b^{4n} \mid n > 0\}$ e $G : \begin{Bmatrix} S \to AASB \mid AAB\,, \\ A \to a\,, \\ B \to bbbb \end{Bmatrix}$

$\mathcal{L}(G) \subseteq \{a^{2n}b^{4n} \mid n > 0\} \equiv$ Se $S \overset{*}{\Longrightarrow} w$, então $w = a^{2n}b^{4n}, n > 0$.

Passo Indutivo:

- $S \overset{n+1}{\Longrightarrow} w \equiv S \overset{n}{\Longrightarrow} u \overset{1}{\Longrightarrow} w$.
- Efeito de uma regra adicional numa variável da cadeia u:

$$\begin{aligned}
r \equiv S \to AASB \Rightarrow 2{\cdot}(|w|_a + |w|_A) &= 2{\cdot}(|u|_a + |u|_A) + (2{\cdot}(|r|_a + |r|_A)) \\
&= 2{\cdot}(|u|_a + |u|_A) + (2{\cdot}(0+1)) = 2{\cdot}(|u|_a + |u|_A) + 4 \\
\Rightarrow |w|_b + 4 \cdot |w|_B &= |u|_b + 4{\cdot}|u|_B + (|r|_b + 4{\cdot}|r|_B) \\
&= |u|_b + 4{\cdot}|u|_B + (0 + 4{\cdot}1) = |u|_b + 4{\cdot}|u|_B + 4 \\
r \equiv B \to bbbb \Rightarrow 2{\cdot}(|w|_a + |w|_A) &= 2{\cdot}(|u|_a + |u|_A) + (2{\cdot}(|r|_a + |r|_A)) \\
&= 2{\cdot}(|u|_a + |u|_A) + (2{\cdot}(0+0)) = 2{\cdot}(|u|_a + |u|_A) \\
\Rightarrow |w|_b + 4 \cdot |w|_B &= |u|_b + 4{\cdot}(|u|_B - 1) + (|r|b + 4{\cdot}|r|_B) \\
&= |u|_b + 4{\cdot}|u|_B - 4 + (0 + 4{\cdot}1) = |u|_b + 4{\cdot}|u|_B
\end{aligned}$$

Linguagens e derivações

$L = \{a^{2n}b^{4n} \mid n > 0\}$ e $G : \begin{Bmatrix} S \to AASB \mid AAB\,, \\ A \to a\,, \\ B \to bbbb \end{Bmatrix}$

$\mathcal{L}(G) \subseteq \{a^{2n}b^{4n} \mid n > 0\}$ $\equiv$ Se $S \overset{*}{\Longrightarrow} w$, então $w = a^{2n}b^{4n}, n > 0$.

Passo Indutivo:
- $S \overset{n+1}{\Longrightarrow} w \equiv S \overset{n}{\Longrightarrow} u \overset{1}{\Longrightarrow} w$.
- Efeito de uma regra adicional numa variável da cadeia u:

Regra	$2{\cdot}(\lvert w\rvert_a + \lvert w\rvert_A)$	$\lvert w\rvert_b + 4{\cdot}\lvert w\rvert_B$	$\lvert w\rvert_a + \lvert w\rvert_A$
$S \to AASB$	$2{\cdot}(\lvert u\rvert_a + \lvert u\rvert_A) + 4$	$\lvert u\rvert_b + 4{\cdot}\lvert u\rvert_B + 4$	$\lvert u\rvert_a + \lvert u\rvert_A + 2$
$S \to AAB$	$2{\cdot}(\lvert u\rvert_a + \lvert u\rvert_A) + 4$	$\lvert u\rvert_b + 4{\cdot}\lvert u\rvert_B + 4$	$\lvert u\rvert_a + \lvert u\rvert_A + 2$
$A \to a$	$2{\cdot}(\lvert u\rvert_a + \lvert u\rvert_A)$	$\lvert u\rvert_b + 4{\cdot}\lvert u\rvert_B$	$\lvert u\rvert_a + \lvert u\rvert_A$
$B \to bbbb$	$2{\cdot}(\lvert u\rvert_a + \lvert u\rvert_A)$	$\lvert u\rvert_b + 4{\cdot}\lvert u\rvert_B$	$\lvert u\rvert_a + \lvert u\rvert_A$

Linguagens e derivações

$L = \{a^{2n}b^{4n} \mid n > 0\}$ e $G : \begin{Bmatrix} S \to AASB \mid AAB\,, \\ A \to a\,, \\ B \to bbbb \end{Bmatrix}$

$\mathcal{L}(G) \subseteq \{a^{2n}b^{4n} \mid n > 0\}$ $\equiv$ Se $S \overset{*}{\Longrightarrow} w$, então $w = a^{2n}b^{4n}, n > 0$.

Passo Indutivo:
- Como $2{\cdot}(|u|_a + |u|_A) = |u|_b + 4{\cdot}|u|_B$, então $2{\cdot}(|w|_a + |w|_A) = |w|_b + 4{\cdot}|w|_B$.
- $|w|_a + |w|_A > 1$ segue da hipótese indutiva de que $|u|_a + |u|_A > 1$.
- Ordem dos símbolos é preservada: uma regra de derivação troca um S por uma sequência de variáveis na ordem desejada ou uma variável por terminais correspondentes.

Linguagens e derivações

$L = \{a^{2n}b^{4n} \mid n > 0\}$ e $G : \begin{Bmatrix} S \to AASB \mid AAB\,, \\ A \to a\,, \\ B \to bbbb \end{Bmatrix}$

$\mathcal{L}(G) \subseteq \{a^{2n}b^{4n} \mid n > 0\}$ $\equiv$ Se $S \overset{*}{\Longrightarrow} w$, então $w = a^{2n}b^{4n}, n > 0$.

Passo Indutivo:
- Relações são válidas para qualquer cadeia derivável em G.
- Como não existe variáveis numa cadeia $w \in \mathcal{L}(G)$, as três condições implicam que $\mathcal{L}(G) \subseteq \{a^{2n}b^{4n} \mid n > 0\}$.

Linguagens e derivações

Exemplo 6.25

$L = \{a^nb^n \mid n > 0\}$ e $G = (V = \{S\}, \Sigma = \{a, b\}, P = \{S \to aSb \mid ab\}, S)$.

$\{a^nb^n \mid n > 0\} \subseteq \mathcal{L}(G)$ $\equiv$ Se $w = a^nb^n, n > 0$, então $S \underset{G}{\overset{*}{\Longrightarrow}} w$.

Derivação	Regra usada
$S \overset{n-1}{\Longrightarrow} a^{n-1}Sb^{n-1}$	$S \to aSb$
$\Longrightarrow a^nb^n$	$S \to ab$

$\mathcal{L}(G) \subseteq \{a^nb^n \mid n > 0\}$ $\equiv$ Se $S \overset{*}{\Longrightarrow} w$, então $w = a^nb^n, n > 0$.

- **Exercício.**

Linguagens e derivações

Exemplo 6.26

$$L = a^*(a^*ba^*ba^*)^* \text{ e } G : \begin{Bmatrix} S \to aS \mid bB \mid \varepsilon\,, \\ B \to aB \mid bS \mid bC\,, \\ C \to aC \mid \varepsilon \end{Bmatrix}$$

Linguagens e derivações

$$L = a^*(a^*ba^*ba^*)^* \text{ e } G : \begin{Bmatrix} S \to aS \mid bB \mid \varepsilon\,, \\ B \to aB \mid bS \mid bC\,, \\ C \to aC \mid \varepsilon \end{Bmatrix}$$

$a^*(a^*ba^*ba^*)^* \subseteq \mathcal{L}(G)$.

- Uma cadeia em $a^*(a^*ba^*ba^*)^*$ tem a forma

$$a^{n_1}ba^{n_2}ba^{n_3}\ldots a^{n_{2k}}ba^{n_{2k+1}},\ k \geqslant 0.$$

- Qualquer cadeia em a^* pode ser derivada usando as regras $S \to aS$ e $S \to \varepsilon$.

Linguagens e derivações

$$L = a^*(a^*ba^*ba^*)^* \text{ e } G : \begin{Bmatrix} S \to aS \mid bB \mid \varepsilon\,, \\ B \to aB \mid bS \mid bC\,, \\ C \to aC \mid \varepsilon \end{Bmatrix}$$

$a^*(a^*ba^*ba^*)^* \subseteq \mathcal{L}(G)$.

Derivação	Regra usada
$S \overset{n_1}{\Longrightarrow} a^{n_1}S$	$S \to aS$
$\Longrightarrow a^{n_1}bB$	$S \to bB$
$\overset{n_2}{\Longrightarrow} a^{n_1}ba^{n_2}B$	$B \to aB$
$\Longrightarrow a^{n_1}ba^{n_2}bS$	$B \to bS$
$\vdots$	
$\overset{n_{2k}}{\Longrightarrow} a^{n_1}ba^{n_2}ba^{n_3}\ldots a^{n_{2k}}B$	$B \to aB$
$\Longrightarrow a^{n_1}ba^{n_2}ba^{n_3}\ldots a^{n_{2k}}bC$	$B \to bC$
$\overset{n_{2k+1}}{\Longrightarrow} a^{n_1}ba^{n_2}ba^{n_3}\ldots a^{n_{2k}}ba^{n_{2k+1}}C$	$C \to aC$
$\overset{n_{2k+1}}{\Longrightarrow} a^{n_1}ba^{n_2}ba^{n_3}\ldots a^{n_{2k}}ba^{n_{2k+1}}$	$C \to \varepsilon$

Linguagens e derivações

$$L = a^*(a^*ba^*ba^*)^* \text{ e } G : \begin{Bmatrix} S \to aS \mid bB \mid \varepsilon\,, \\ B \to aB \mid bS \mid bC\,, \\ C \to aC \mid \varepsilon \end{Bmatrix}$$

$\mathcal{L}(G) \subseteq \mathcal{L}(a^*(a^*ba^*ba^*)^*)$.

- L contém cadeias com número par de b's.
- $|u|_b + |u|_B$ é par para toda cadeia u derivável a partir de S.
  - $|u|_x$: número de ocorrências do símbolo x na cadeia u.
- Prova por indução no comprimento das derivações.

Linguagens e derivações

$$L = a^*(a^*ba^*ba^*)^* \text{ e } G : \begin{Bmatrix} S \rightarrow aS \mid bB \mid \varepsilon\,, \\ B \rightarrow aB \mid bS \mid bC\,, \\ C \rightarrow aC \mid \varepsilon \end{Bmatrix}$$

$\mathcal{L}(G) \subseteq \mathcal{L}(a^*(a^*ba^*ba^*)^*)$.

Base:
- Derivações de comprimento um: $\begin{cases} S \Longrightarrow aS \\ S \Longrightarrow bB \\ S \Longrightarrow \varepsilon \end{cases}$
- $|u|_b + |u|_B$ é par para todas essas cadeias.

Linguagens e derivações

$$L = a^*(a^*ba^*ba^*)^* \text{ e } G : \begin{Bmatrix} S \rightarrow aS \mid bB \mid \varepsilon\,, \\ B \rightarrow aB \mid bS \mid bC\,, \\ C \rightarrow aC \mid \varepsilon \end{Bmatrix}$$

$\mathcal{L}(G) \subseteq \mathcal{L}(a^*(a^*ba^*ba^*)^*)$.

Hipótese Indutiva: $|u|_b + |u|_B$ é par para as cadeias u que podem ser derivadas a partir de S com a aplicação de n regras de derivação.

Linguagens e derivações

$$L = a^*(a^*ba^*ba^*)^* \text{ e } G : \begin{Bmatrix} S \rightarrow aS \mid bB \mid \varepsilon\,, \\ B \rightarrow aB \mid bS \mid bC\,, \\ C \rightarrow aC \mid \varepsilon \end{Bmatrix}$$

$\mathcal{L}(G) \subseteq \mathcal{L}(a^*(a^*ba^*ba^*)^*)$.

Passo Indutivo:
- w é uma cadeia derivável a partir de S em $n+1$ passos.
  - $S \overset{n+1}{\Longrightarrow} w \equiv S \overset{n}{\Longrightarrow} u \overset{1}{\Longrightarrow} w$.
- Por hipótese de indução $|u|_b + |u|_B$ é par.
- Aplicação de uma regra de derivação a uma variável de u não muda a paridade!

Linguagens e derivações

$$L = a^*(a^*ba^*ba^*)^* \text{ e } G : \begin{Bmatrix} S \rightarrow aS \mid bB \mid \varepsilon\,, \\ B \rightarrow aB \mid bS \mid bC\,, \\ C \rightarrow aC \mid \varepsilon \end{Bmatrix}$$

$\mathcal{L}(G) \subseteq \mathcal{L}(a^*(a^*ba^*ba^*)^*)$.

Passo Indutivo:

Regra	$\lvert w\rvert_b + \lvert w\rvert_B$
$S \rightarrow aS$	$\lvert u\rvert_b + \lvert u\rvert_B$
$S \rightarrow bB$	$\lvert u\rvert_b + \lvert u\rvert_B + 2$
$S \rightarrow \varepsilon$	$\lvert u\rvert_b + \lvert u\rvert_B$
$B \rightarrow aB$	$\lvert u\rvert_b + \lvert u\rvert_B$
$B \rightarrow bS$	$\lvert u\rvert_b + \lvert u\rvert_B$
$B \rightarrow bC$	$\lvert u\rvert_b + \lvert u\rvert_B$
$C \rightarrow aC$	$\lvert u\rvert_b + \lvert u\rvert_B$
$C \rightarrow \varepsilon$	$\lvert u\rvert_b + \lvert u\rvert_B$

Linguagens e derivações

Exemplo 6.27

- Número de a's nas cadeias de $\mathcal{L}(G)$ é menor ou igual ao de b's:

$$G : \begin{Bmatrix} S \to aASB \mid \varepsilon\,, \\ A \to ad \mid d\,, \\ B \to bb \end{Bmatrix}$$

$|u|_a + |u|_A \leqslant |u|_b + 2{\cdot}|u|_B$

- Número de b's numa cadeia de terminais depende do número de b's e de B's nos passos intermediários da derivação.
- Cada B gera dois b's e um A gera no máximo um a.
- $|u|_a + |u|_A \leqslant |u|_b + 2{\cdot}|u|_B$, para toda forma sentencial u em G.
  - Prova por indução no comprimento da derivação.

Linguagens e derivações

Exemplo 6.27

- Número de a's nas cadeias de $\mathcal{L}(G)$ é menor ou igual ao de b's:

$$G : \begin{Bmatrix} S \to aASB \mid \varepsilon\,, \\ A \to ad \mid d\,, \\ B \to bb \end{Bmatrix}$$

$|u|_a + |u|_A \leqslant |u|_b + 2{\cdot}|u|_B$

Base:

Regra	$\lvert u\rvert_a + \lvert u\rvert_A$	$\lvert u\rvert_b + 2{\cdot}\lvert u\rvert_B$
$S \Longrightarrow aASB$	2	2
$S \Longrightarrow \varepsilon$	0	0

Linguagens e derivações

Exemplo 6.27

- Número de a's nas cadeias de $\mathcal{L}(G)$ é menor ou igual ao de b's:

$$G : \begin{Bmatrix} S \to aASB \mid \varepsilon\,, \\ A \to ad \mid d\,, \\ B \to bb \end{Bmatrix}$$

$|u|_a + |u|_A \leqslant |u|_b + 2{\cdot}|u|_B$

Hipótese Indutiva: $|u|_a + |u|_A \leqslant |u|_b + 2{\cdot}|u|_B$, para toda cadeia u derivável a partir de S em no máximo n passos.

Linguagens e derivações

Exemplo 6.27

- Número de a's nas cadeias de $\mathcal{L}(G)$ é menor ou igual ao de b's:

$$G : \begin{Bmatrix} S \to aASB \mid \varepsilon\,, \\ A \to ad \mid d\,, \\ B \to bb \end{Bmatrix}$$

$|u|_a + |u|_A \leqslant |u|_b + 2{\cdot}|u|_B$

Passo Indutivo:

- w é uma cadeia derivável a partir de S em $n+1$ passos.
  - $S \overset{n+1}{\Longrightarrow} w \equiv S \overset{n}{\Longrightarrow} u \overset{1}{\Longrightarrow} w$.
- Por hipótese de indução $|u|_a + |u|_A \leqslant |u|_b + 2{\cdot}|u|_B$.
- Aplicação de uma regra de derivação a uma variável de u preserva a desigualdade!

Linguagens e derivações

Exemplo 6.27

- Número de a's nas cadeias de $\mathcal{L}(G)$ é menor ou igual ao de b's:

$$G : \begin{cases} S \to aASB \mid \varepsilon , \\ A \to ad \mid d , \\ B \to bb \end{cases}$$

$|u|_a + |u|_A \leqslant |u|_b + 2{\cdot}|u|_B$

Passo Indutivo:

Regra	$\lvert w\rvert_a + \lvert w\rvert_A$	$\lvert w\rvert_b + 2{\cdot}\lvert w\rvert_B$
$S \Longrightarrow aASB$	$\lvert u\rvert_a + \lvert u\rvert_A + 2$	$\lvert u\rvert_b + 2{\cdot}\lvert u\rvert_B + 2$
$S \Longrightarrow \varepsilon$	$\lvert u\rvert_a + \lvert u\rvert_A$	$\lvert u\rvert_b + 2{\cdot}\lvert u\rvert_B$
$B \Longrightarrow bb$	$\lvert u\rvert_a + \lvert u\rvert_A$	$\lvert u\rvert_b + 2{\cdot}\lvert u\rvert_B$
$A \Longrightarrow ad$	$\lvert u\rvert_a + \lvert u\rvert_A$	$\lvert u\rvert_b + 2{\cdot}\lvert u\rvert_B$
$A \Longrightarrow d$	$\lvert u\rvert_a + \lvert u\rvert_A - 1$	$\lvert u\rvert_b + 2{\cdot}\lvert u\rvert_B$

Linguagens e derivações

Exemplo 6.28

$L = \{a^n b^m c^m d^{2n} \mid n \geqslant 0, m > 0\}$ e $G : \begin{Bmatrix} S \to aSdd \mid A , \\ A \to bAc \mid bc \end{Bmatrix}$

$\mathcal{L}(G) \subseteq \{a^n b^m c^m d^{2n} \mid n \geqslant 0, m > 0\}$.

- Numa derivação, S é removido pela aplicação da regra $S \to A$.
- Presença de um A garante que um b será gerado.

Linguagens e derivações

Exemplo 6.28

$L = \{a^n b^m c^m d^{2n} \mid n \geqslant 0, m > 0\}$ e $G : \begin{Bmatrix} S \to aSdd \mid A , \\ A \to bAc \mid bc \end{Bmatrix}$

$\mathcal{L}(G) \subseteq \{a^n b^m c^m d^{2n} \mid n \geqslant 0, m > 0\}$.

- Para toda forma sentencial u de G:

1. $2{\cdot}|u|_a = |u|_d$
2. $|u|_b = |u|_c$
3. $|u|_S + |u|_A + |u|_b > 0$

Linguagens e derivações

Exemplo 6.28

$L = \{a^n b^m c^m d^{2n} \mid n \geqslant 0, m > 0\}$ e $G : \begin{Bmatrix} S \to aSdd \mid A , \\ A \to bAc \mid bc \end{Bmatrix}$

$\mathcal{L}(G) \subseteq \{a^n b^m c^m d^{2n} \mid n \geqslant 0, m > 0\}$.

- Essas igualdades garantem a correta relação numérica dos símbolos terminais.
- Descrição da linguagem deve garantir que:
  - Os a's (se ocorrerem) devem preceder os b's.
  - Os b's devem preceder os c's.
  - Os c's devem preceder os d's (se ocorrerem).

Livros texto

R. P. Grimaldi
Discrete and Combinatorial Mathematics – An Applied Introduction.
Addison Wesley, 1994.

D. J. Velleman
How To Prove It – A Structured Approach.
Cambridge University Press, 1996.

J. E. Hopcroft; J. Ullman.
Introdução Ã Teoria de Autômatos, Linguagens e Computação.
Ed. Campus.

T. A. Sudkamp.
Languages and Machines – An Introduction to the Theory of Computer Science.
Addison Wesley Longman, Inc. 1998.

J. Carroll; D. Long.
Theory of Finite Automata – With an Introduction to Formal Languages.
Prentice-Hall, 1989.

M. Sipser.
Introduction to the Theory of Computation.
PWS Publishing Company, 1997.

H. R. Lewis; C. H. Papadimitriou
Elementos de Teoria da Computação.
Bookman, 2000.