

Linguagens Formais e Autômatos

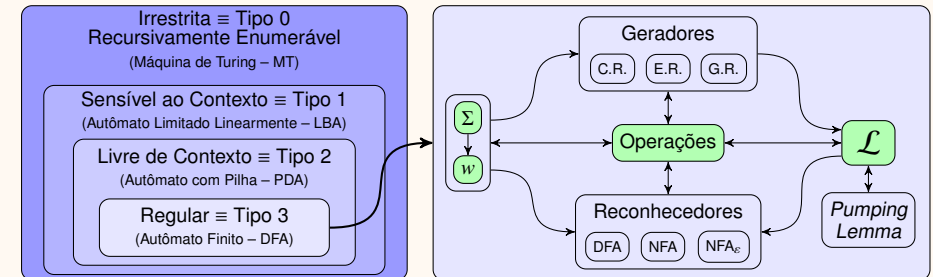
Humberto Longo

Instituto de Informática
Universidade Federal de Goiás

Bacharelado em Ciência da Computação, 2021/1



Roteiro



Definições

Alfabeto: conjunto finito de *símbolos* ou *caracteres*.

- ▶ $\{0, 1\}$, $\{a, b\}$, $\{a, b, c, \dots, z\}$.

Cadeia de símbolos: sequência de zero ou mais símbolos (de um alfabeto) justapostos.

- ▶ ε , 0, 1, 010, 10101010101010..., $abbbbbb$, $abc \dots$

Palavra: cadeia finita de símbolos.

- ▶ ε , 0, 1, 010, 1010101010101010, $abbbbbb$, $abc \dots xyz$.

Notação

Σ : conjunto de símbolos (um alfabeto).

ε : cadeia ou palavra vazia.

Σ^* : conjunto de todas as cadeias possíveis sobre Σ .

$\Sigma^+ : \Sigma^* - \{\varepsilon\}$.

$|w|$: comprimento ou tamanho da cadeia w (número de símbolos que compõem w)



Palavra, prefixo, sufixo, tamanho

Prefixo : *subsequência inicial* de símbolos de uma palavra.

Sufixo : *subsequência final* de símbolos de uma palavra.

Subpalavra : sequência de *símbolos contíguos* de uma palavra.

Exemplo 1.1

- ▶ Se $\Sigma = \{a, b\}$, então:

- ▶ $\Sigma^+ = \{a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, \dots\}$.
- ▶ $\Sigma^* = \{\varepsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, \dots\}$.

- ▶ Se $abcb$ é uma palavra sobre o alfabeto $\Sigma = \{a, b, c\}$, então:

- ▶ $|abcb| = 4$ e $|\varepsilon| = 0$.
- ▶ $\varepsilon, a, ab, abc, abcb$ são os prefixos;
- ▶ $\varepsilon, b, cb, bcb, abcb$ são os sufixos;
- ▶ ε, ab, bc, bcb são exemplos de subpalavras.



Concatenação de palavras

- ▶ Operação binária, definida sobre uma linguagem \mathcal{L} , que associa a cada par de palavras uma palavra formada pela justaposição da primeira com a segunda.
 - ▶ Se $v, w \in \mathcal{L}$, então vw é a concatenação de v e w .
- ▶ Não é necessariamente fechada em \mathcal{L} :
 - ▶ a concatenação de duas palavras de uma linguagem não necessariamente resulta em uma palavra da linguagem.
- ▶ É associativa:
 - ▶ Se $t, v, w \in \mathcal{L}$, então $v(wt) = (vw)t = vwt$
- ▶ A palavra vazia é o elemento neutro à esquerda e à direita:
 - ▶ $\varepsilon w = w = w\varepsilon$.



Comprimento de uma cadeia

$|w|$: Definição recursiva.

$$|w| = \begin{cases} 0 & \text{se } w = \varepsilon; \\ |v| + 1 & \text{se } w = va, \text{ tal que } v \in \Sigma^* \text{ e } a \in \Sigma. \end{cases}$$

$|w|_a$: Nr. de ocorrências do símbolo a na palavra w .

- ▶ Ex.: $|\varepsilon|_a = 0$, $|abb|_a = 1$, $|aba|_a = 2$, ...
- ▶ Definição recursiva:

$$|w|_a = \begin{cases} 0 & \text{se } w = \varepsilon; \\ |v|_a & \text{se } w = vb \text{ e } a \neq b \quad (v \in \Sigma^* \text{ e } a, b \in \Sigma); \\ |v|_a + 1 & \text{se } w = va \quad (v \in \Sigma^* \text{ e } a \in \Sigma). \end{cases}$$



Concatenação de palavras

Definição 1.2

- ▶ Sejam $u, v \in \Sigma^*$. A concatenação de u e v (uv) é uma operação binária em Σ^* definida como:

Base: Se $|v| = 0$, então $v = \varepsilon$ e $uv = u$.

Recursão: Se v é uma cadeia com $|v| = n > 0$, então $uv = (uw)a$ e $v = wa$, para alguma cadeia w tal que $|w| = n - 1$ e $a \in \Sigma$.

Definição 1.3

- ▶ w^n : n concatenações sucessivas da palavra $w \in \mathcal{L}$:

Base: $w^0 = \varepsilon$.

Recursão: $w^n = w^{n-1}w$, para $n > 0$.



Concatenação de palavras

Teorema 1.4

- ▶ Se $u, v, w \in \Sigma^*$, então $(uv)w = u(vw)$.

Demonstração (Indução no comprimento de w).

Base: Se $|w| = 0$, então $w = \varepsilon$ e $(uv)w = uv$ (pela definição de concatenação). Por outro lado, $u(vw) = u(v) = uv$.

Hipótese: Suponha que $(uv)w = u(vw)$ para toda cadeia w com $|w| = n$.



Concatenação de palavras

Teorema 1.4

► Se $u, v, w \in \Sigma^*$, então $(uv)w = u(vw)$.

Demonstração (Indução no comprimento de w).

Passo indutivo: Seja uma cadeia w com $|w| = n + 1$. Então $w = xa$ para alguma cadeia x de comprimento n e $a \in \Sigma$.



Concatenação de palavras

Teorema 1.4

► Se $u, v, w \in \Sigma^*$, então $(uv)w = u(vw)$.

Demonstração (Indução no comprimento de w).

Passo indutivo: Seja uma cadeia w com $|w| = n + 1$. Então $w = xa$ para alguma cadeia x de comprimento n e $a \in \Sigma$.

$$\begin{aligned}(uv)w &= (uv)(xa) && \text{(substituição, } w = xa\text{)} \\ &= ((uv)x)a && \text{(definição de concatenação)} \\ &= (u(vx))a && \text{(hipótese indutiva)} \\ &= u((vx)a) && \text{(definição de concatenação)} \\ &= u(v(xa)) && \text{(definição de concatenação)} \\ &= u(vw) && \text{(substituição, } xa = w\text{)} \\ &= u(vw).\end{aligned}$$



Reverso de uma cadeia

Definição 1.5

► Seja $u \in \Sigma^*$. O reverso u^R de u é definido como:

Base: Se $|u| = 0$, então $u = \varepsilon$ e $\varepsilon^R = \varepsilon$.

Recursão: Se $|u| = n > 0$, então $u^R = aw^R$ e $u = wa$ para alguma cadeia w tal que $|w| = n - 1$ e $a \in \Sigma$.

Exemplo 1.6

► $(abc)^R = c(ab)^R = c(ba^R) = c(b(a\varepsilon^R)) = c(b(a\varepsilon)) = cba$.



Reverso de uma cadeia

Teorema 1.7

► Seja $u, v \in \Sigma^*$. Então $(uv)^R = v^R u^R$.

Demonstração (Indução no comprimento de v).

Base: Se $|v| = 0$, então $v = \varepsilon$ e $(uv)^R = u^R$. De forma semelhante, $v^R u^R = \varepsilon^R u^R = u^R$.

Hipótese: Suponha que $(uv)^R = v^R u^R$ para toda cadeia v com $|v| = n$.



Reverso de uma cadeia

Teorema 1.7

► Seja $u, v \in \Sigma^*$. Então $(uv)^R = v^R u^R$.

Demonstração (Indução no comprimento de v).

Passo indutivo: Se v é uma cadeia com $|v| = n + 1$, então $v = wa$ para alguma cadeia w de comprimento n e $a \in \Sigma$.

$$\begin{aligned} (uv)^R &= (u(wa))^R \\ &= ((uw)a)^R && \text{(associatividade da concatenação)} \\ &= a(uw)^R && \text{(definição de reverso)} \\ &= a(w^R u^R) && \text{(hipótese indutiva)} \\ &= (aw^R)u^R && \text{(associatividade da concatenação)} \\ &= (wa)^R u^R && \text{(definição de reverso)} \\ &= v^R u^R. \end{aligned}$$



Livros texto



R. P. Grimaldi
Discrete and Combinatorial Mathematics – An Applied Introduction.
Addison Wesley, 1994.



D. J. Velleman
How To Prove It – A Structured Approach.
Cambridge University Press, 1996.



J. E. Hopcroft; J. Ullman.
Introdução À Teoria de Autômatos, Linguagens e Computação.
Ed. Campus.



T. A. Sudkamp.
Languages and Machines – An Introduction to the Theory of Computer Science.
Addison Wesley Longman, Inc. 1998.



J. Carroll; D. Long.
Theory of Finite Automata – With an Introduction to Formal Languages.
Prentice-Hall, 1989.



M. Sipser.
Introduction to the Theory of Computation.
PWS Publishing Company, 1997.



H. R. Lewis; C. H. Papadimitriou
Elementos de Teoria da Computação.
Bookman, 2000.

