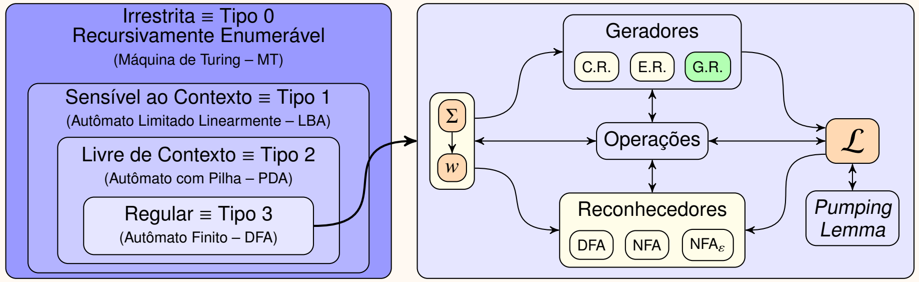
Linguagens Formais e Autômatos

Humberto Longo

Instituto de Informática
Universidade Federal de Goiás

Bacharelado em Ciência da Computação, 2021/1

Roteiro



Gramáticas

Definição 1.1

- Uma gramática é uma 4-upla $G = (V, \Sigma, P, S)$ onde:
  - V é um conjunto finito não vazio de símbolos, chamados de não-terminais;
  - Σ é um conjunto finito não vazio de símbolos, chamados de terminais, tal que $\Sigma \cap V = \varnothing$;
  - S é o símbolo (não terminal) inicial ($S \in V$); e
  - P é um conjunto de regras (de produção) da forma $\alpha \to \beta$, onde:
    - $\alpha \in (V \cup \Sigma)^* V (V \cup \Sigma)^*$,
    - $\beta \in (V \cup \Sigma)^*$.

Gramática linear à direita

Definição 1.2

- Uma gramática $G = (V, \Sigma, P, S)$ é regular à direita (também chamada de gramática linear à direita) se toda regra de derivação está numa das seguintes formas:
  1. $A \to aB$,
  2. $A \to a$,
  3. $A \to \varepsilon$;

  onde $\begin{cases} A, B \in V, \\ a \in \Sigma. \end{cases}$

Exemplo 1.3

- $\mathcal{L}(a^*bc^*)$.
- $G = (V = \{A, S\}, \Sigma = \{a, b, c\}, P, S)$, onde: $P = \left\{ \begin{array}{l} S \to aS \mid bA \\ A \to cA \mid \varepsilon \end{array} \right\}$.

Gramática linear à esquerda

Definição 1.4

- Uma gramática $G = (V, \Sigma, P, S)$ é regular à esquerda (também chamada de gramática linear à esquerda) se toda regra de derivação está numa das seguintes formas:
  1. $A \to Ba$,
  2. $A \to a$,
  3. $A \to \varepsilon$;

  onde $\begin{cases} A, B \in V, \\ a \in \Sigma. \end{cases}$

Exemplo 1.5

- $\mathcal{L}(a^* bc^*)$.
- $G = (V = \{A, S\}, \Sigma = \{a, b, c\}, P, S)$, onde: $P = \left\{ \begin{array}{l} S \to Sc \mid Ab \\ A \to Aa \mid \varepsilon \end{array} \right\}$.

Gramática regular

- Uma gramática é regular se é uma gramática linear à direita ou à esquerda.
- Alguns autores não permitem regras de derivação vazias $(A \to \varepsilon)$ e assumem que a cadeia vazia não pertence às linguagens regulares.
- Existe uma correspondência direta entre as regras de derivação de uma gramática regular à direita e as transições de um autômato finito não determinístico, de modo que a gramática gere exatamente a linguagem que o autômato reconhece.

Gramáticas regulares estendidas

- Uma gramática regular estendida à direita é aquela em que todas as regras de derivação estão numa das formas:
  1. $A \to wB$,
  2. $A \to a$,
  3. $A \to \varepsilon$;

  onde $\begin{cases} A, B \in V, \\ a \in \Sigma, \\ w \in \Sigma^*. \end{cases}$
- Uma gramática regular estendida à esquerda é aquela em que todas as regras de derivação estão numa das formas:
  1. $A \to Bw$,
  2. $A \to a$,
  3. $A \to \varepsilon$;

  onde $\begin{cases} A, B \in V, \\ a \in \Sigma, \\ w \in \Sigma^*. \end{cases}$

Misturando derivações à esquerda e à direita

- A mistura de regras de derivação à esquerda e à direita ainda gera uma gramática linear, mas não necessariamente uma gramática regular.
- Uma tal gramática não necessariamente gera uma linguagem regular!!!

Exemplo 1.6

- Gramática $G = (V = \{A, S\}, \Sigma = \{a, b\}, P, S)$, onde: $P = \left\{ \begin{array}{l} S \to aA \mid \varepsilon \\ A \to Sb \end{array} \right\}$.
- $\mathcal{L}(G) = \{a^i b^i \mid i \geqslant 0\}$, a qual não é uma linguagem regular.

Gramática regular

Definição 1.7 (Notação utilizada)

$\rightarrow$: Definição de regra de derivação.

- Regra de derivação pertence ao conjunto $V \times (V \cup \Sigma)^*$.

$\Rightarrow$: Aplicação de regra de derivação.

- Aplicação transforma uma cadeia em outra e pertence ao conjunto $(V \cup \Sigma)^+ \times (V \cup \Sigma)^*$.

$\stackrel{+}{\Longrightarrow}$: Derivação usando uma ou mais regras de derivação.

$\stackrel{n}{\Longrightarrow}$: Derivação de comprimento n:

- $v \stackrel{n}{\Longrightarrow} w$: w é derivado a partir de v usando n regras de derivação.

Gramática regular

Definição 1.8

- A aplicação de $A \rightarrow w$ à variável A em uA gera a cadeia uw (em Au gera a cadeia wu).
- Se $(A \rightarrow w) \in P$, então $uA \rightarrow uw$.
- $u \stackrel{*}{\Longrightarrow} v$ se $u = v$ ou $\exists\, u_1, u_2, \ldots, u_k,\ k \geqslant 0$ tal que $u \rightarrow u_1 \rightarrow u_2 \Rightarrow \cdots \rightarrow u_k \rightarrow v$.

Gramática regular

Exemplo 1.9

- $G = (V = \{A, S\}, \Sigma = \{0, 1\}, P, S)$, onde: $P = \left\{ \begin{array}{lcl} S & \rightarrow & 0S \mid 1A \\ A & \rightarrow & 1A \mid \varepsilon \end{array} \right\}$.
- Expressão regular: 0^*1^+.
- Derivação da cadeia 00011:

$$S \Rightarrow 0S \Rightarrow 00S \Rightarrow 000S \Rightarrow 0001A \Rightarrow 00011A \Rightarrow 00011\varepsilon \equiv 00011.$$

Linguagem regular

- Uma linguagem é regular se pode ser gerada por uma gramática regular.
- Uma linguagem regular pode ser gerada por gramática não regular.
- As formas sentenciais de uma gramática regular contêm no máximo uma variável (símbolo mais a direita na cadeia).

Gramática regular e linguagem regular

Teorema 1.10

- *Seja $G = (V, \Sigma, P, S)$ uma gramática linear à direita, então a linguagem $\mathcal{L}(G)$ é regular.*

Teorema 1.11

- *Se $\mathcal{L}$ é uma linguagem regular sobre o alfabeto Σ, então existe uma gramática linear à direita G tal que $\mathcal{L} = \mathcal{L}(G)$.*

Teorema 1.12

- *Uma linguagem $\mathcal{L}$ é regular se e somente se existe uma gramática linear à esquerda G tal que $\mathcal{L} = \mathcal{L}(G)$.*

Teorema 1.13

- *Uma linguagem $\mathcal{L}$ é regular se e somente se existe uma gramática regular G tal que $\mathcal{L} = \mathcal{L}(G)$.*

Gramática regular

Exemplo 1.14

- A linguagem $\mathcal{L} = \{a^+b^* \mid a, b \in \Sigma\}$ é regular, G_1 não é regular e G_2 é regular:
  - $G_1 = (V_1, \Sigma, P_1, S)$, onde:

$$V_1 = \{S, A, B\},$$
$$\Sigma = \{a, b\},$$
$$P_1 = \left\{ \begin{array}{l} S \to AB \\ A \to aA \mid a \\ B \to bB \mid \varepsilon \end{array} \right\}.$$

  - $G_2 = (V_2, \Sigma, P_2, S)$, onde:

$$V_2 = \{S, B\},$$
$$\Sigma = \{a, b\},$$
$$P_2 = \left\{ \begin{array}{l} S \to aS \mid aB \\ B \to bB \mid \varepsilon \end{array} \right\}.$$

Gramática regular

Exemplo 1.15

- $G = (\{S, A\}, \{a, b\}, P, S)$, onde:

$$P = \left\{ \begin{array}{l} S \to abSA \mid \varepsilon \\ A \to Aa \mid \varepsilon \end{array} \right\}.$$

- A linguagem de G é dada pela expressão regular $\varepsilon \cup (ab)^+a^*$.
- Gramática regular equivalente: $G_1 = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, P_1, S)$, onde:

$$P_1 = \left\{ \begin{array}{l} S \to aB \mid \varepsilon \\ B \to bS \mid bA \\ A \to aA \mid \varepsilon \end{array} \right\}.$$

Gramática regular

Exemplo 1.16

- $\mathcal{L} = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w|$ é par $\}$.
- Gramática $G = (V = \{A, S\}, \Sigma = \{a, b\}, P, S)$, onde:

$$P = \left\{ \begin{array}{l} S \to aA \mid bA \mid \varepsilon \\ A \to aS \mid bS \mid a \mid b \end{array} \right\}.$$

Gramática regular

Exemplo 1.17

- $\mathcal{L} = \{a, b\}^* \cup \{a, c\}^* \cup \{b, c\}^*$.
- Gramática $G = (V = \{A, B, C, S\}, \Sigma = \{a, b, c\}, P, S)$, onde:

$$P = \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow \varepsilon \\ S \rightarrow aB \mid aC \\ S \rightarrow bA \mid bC \\ S \rightarrow cA \mid cB \\ A \rightarrow bA \mid cA \mid \varepsilon \\ B \rightarrow aB \mid cB \mid \varepsilon \\ C \rightarrow aC \mid bC \mid \varepsilon \end{array} \right\}.$$

Livros texto

R. P. Grimaldi
Discrete and Combinatorial Mathematics – An Applied Introduction.
Addison Wesley, 1994.

D. J. Velleman
How To Prove It – A Structured Approach.
Cambridge University Press, 1996.

J. E. Hopcroft; J. Ullman.
Introdução Ã Teoria de Autômatos, Linguagens e Computação.
Ed. Campus.

T. A. Sudkamp.
Languages and Machines – An Introduction to the Theory of Computer Science.
Addison Wesley Longman, Inc. 1998.

J. Carroll; D. Long.
Theory of Finite Automata – With an Introduction to Formal Languages.
Prentice-Hall, 1989.

M. Sipser.
Introduction to the Theory of Computation.
PWS Publishing Company, 1997.

H. R. Lewis; C. H. Papadimitriou
Elementos de Teoria da Computação.
Bookman, 2000.