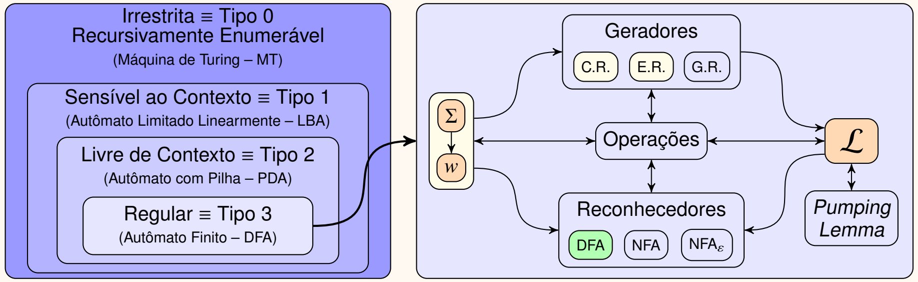
Linguagens Formais e Autômatos

Humberto Longo

Instituto de Informática
Universidade Federal de Goiás

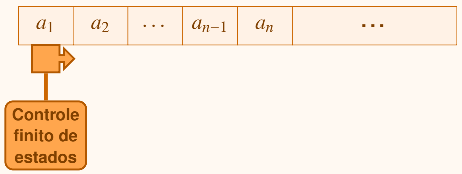
Bacharelado em Ciência da Computação, 2021/1

Roteiro



Definição básica

- Modelo matemático de uma máquina que aceita uma linguagem particular sobre algum alfabeto.



Processamento de um DFA

- Leitura da esquerda para a direita.
- Em qualquer ponto do processamento, o resultado depende apenas do estado corrente e do conjunto de símbolos ainda não processados.

Autômato finito determinístico

Definição 1.1

- Um autômato finito determinístico (*DFA – Deterministic Finite Automaton*) é uma quíntupla $M = \langle \Sigma, S, s_0, \delta, F \rangle$, onde:

Σ : alfabeto de entrada;
$S \neq \emptyset$: conjunto finito de estados do modelo;
$s_0 \in S$: estado inicial;
$\delta : S \times \Sigma \to S$: função de transição de estados;
$F \subseteq S$: conjunto de estados finais (ou de aceitação);

e existe no máximo uma transição para cada par $(s \in S, a \in \Sigma)$.

Configuração de um DFA

Definição 1.2

- A tabela de transição de estados de um DFA $M = \langle \Sigma, S, s_0, \delta, F \rangle$ é uma matriz T tal que: $T[s, a] = \delta(s, a) \quad (\forall\, s \in S,\ \forall\, a \in \Sigma)$.

Ex.: $T =$

δ	a	b
s_0	s_1	s_2
s_1	s_1	s_2
s_2	s_1	s_0

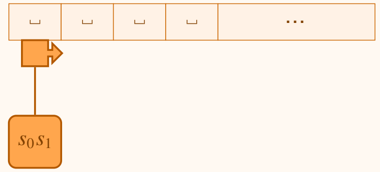
Processamento de um DFA

Exemplo 1.3

- $M = \langle \{a, b\}, \{s_0, s_1\}, s_0, \delta, \{s_1\} \rangle$,
  onde:

δ	a	b
s_0	s_1	s_0
s_1	s_1	s_0

- $\mathcal{L}(M)$ = ???



Reconhecedores

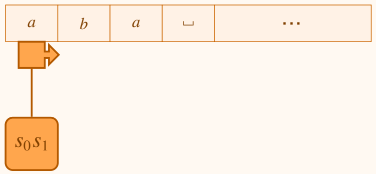
Processamento de um DFA

Exemplo 1.3

- $M = \langle \{a, b\}, \{s_0, s_1\}, s_0, \delta, \{s_1\} \rangle$,
  onde:

δ	a	b
s_0	s_1	s_0
s_1	s_1	s_0

- $\mathcal{L}(M)$ = ???



Reconhecedores

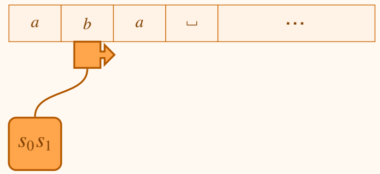
Processamento de um DFA

Exemplo 1.3

- $M = \langle \{a, b\}, \{s_0, s_1\}, s_0, \delta, \{s_1\} \rangle$,
  onde:

δ	a	b
s_0	s_1	s_0
s_1	s_1	s_0

- $\mathcal{L}(M)$ = ???



Reconhecedores

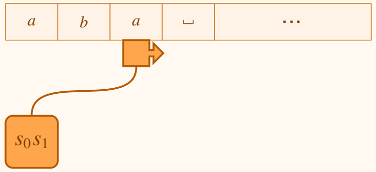
Processamento de um DFA

Exemplo 1.3

- $M = \langle \{a, b\}, \{s_0, s_1\}, s_0, \delta, \{s_1\} \rangle$,
  onde:

δ	a	b
s_0	s_1	s_0
s_1	s_1	s_0

- $\mathcal{L}(M)$ = ???



▸ Reconhecedores

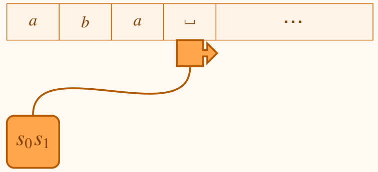
Processamento de um DFA

Exemplo 1.3

- $M = \langle \{a, b\}, \{s_0, s_1\}, s_0, \delta, \{s_1\} \rangle$,
  onde:

δ	a	b
s_0	s_1	s_0
s_1	s_1	s_0

- $\mathcal{L}(M)$ = ???



▸ Reconhecedores

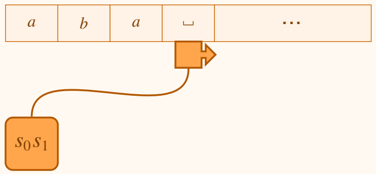
Processamento de um DFA

Exemplo 1.3

- $M = \langle \{a, b\}, \{s_0, s_1\}, s_0, \delta, \{s_1\} \rangle$,
  onde:

δ	a	b
s_0	s_1	s_0
s_1	s_1	s_0

- $\mathcal{L}(M) = (a \cup b)^* a$



▸ Reconhecedores

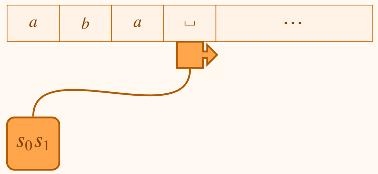
Processamento de um DFA

Exemplo 1.3

- $M = \langle \{a, b\}, \{s_0, s_1\}, s_0, \delta, \{s_1\} \rangle$,
  onde:

δ	a	b
s_0	s_1	s_0
s_1	s_1	s_0

- $\mathcal{L}(M) = (a \cup b)^* a \equiv (b^* a^*)^* a.$



▸ Reconhecedores

Diagrama de estados

Definição 1.4

- O diagrama de estados de um DFA $M = \langle \Sigma, S, s_0, \delta, F \rangle$ é um grafo G, orientado e rotulado, definido pelas condições:
  1. os vértices de G são os elementos de S;
  2. s_0 é o vértice inicial;
  3. F é o conjunto de vértices finais;
  4. os rótulos dos arcos de G são elementos de Σ,
  5. existe um arco, rotulado de a, do vértice s_i ao s_j se $\delta(s_i, a) = s_j$;
  6. para cada vértice s_i e símbolo $a \in \Sigma$, existe exatamente um arco rotulado a saindo de s_i.

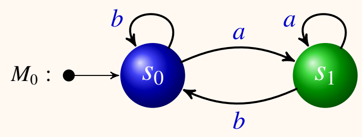
Exemplos de DFA's

Exemplo 1.5

- $M = \langle \{a, b\}, \{s_0, s_1\}, s_0, \delta, \{s_1\} \rangle$, onde:

δ	a	b
s_0	s_1	s_0
s_1	s_1	s_0

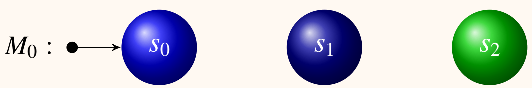
- $\mathcal{L}(M) = (a \cup b)^* a \equiv (b^* a^*)^* a.$



Exemplos de DFA's

Exemplo 1.6

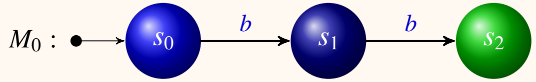
- $\mathcal{L}(M) = \{w \in \{a, b\}^* \mid w$ possui pelo menos dois b's consecutivos$\}$.



Exemplos de DFA's

Exemplo 1.6

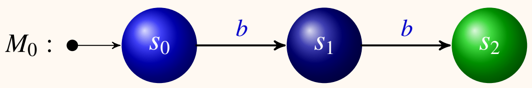
- $\mathcal{L}(M) = \{w \in \{a, b\}^* \mid w$ possui pelo menos dois b's consecutivos$\}$.



Exemplos de DFA’s

Exemplo 1.6

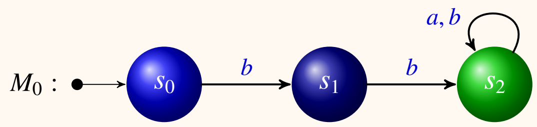
- $\mathcal{L}(M) = \{w \in \{a,b\}^* \mid w$ possui pelo menos dois b’s consecutivos$\}$.



Exemplos de DFA’s

Exemplo 1.6

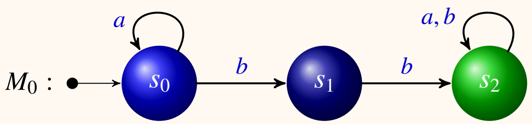
- $\mathcal{L}(M) = \{w \in \{a,b\}^* \mid w$ possui pelo menos dois b’s consecutivos$\}$.



Exemplos de DFA’s

Exemplo 1.6

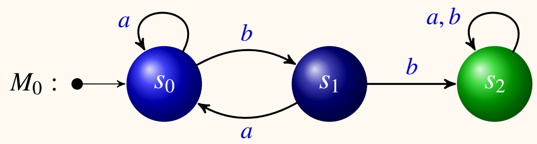
- $\mathcal{L}(M) = \{w \in \{a,b\}^* \mid w$ possui pelo menos dois b’s consecutivos$\}$.



Exemplos de DFA’s

Exemplo 1.6

- $\mathcal{L}(M) = \{w \in \{a,b\}^* \mid w$ possui pelo menos dois b’s consecutivos$\}$.



Configuração de um DFA

Definição 1.7

- Par ordenado $[s_i, w]$, onde s_i é o estado corrente e $w \in \Sigma^*$ é a sequência de símbolos ainda não processados.

Notação

$\underset{M}{\longmapsto}$: define uma função de $S \times \Sigma^+$ em $S \times \Sigma^*$.

- Função de $S \times \Sigma^*$ em $S \times \Sigma^*$ se $\varepsilon \in \mathcal{L}(M)$.

$[s_i, aw] \underset{M}{\longmapsto} [s_j, w]$: configuração $[s_j, w]$ é obtida a partir de $[s_i, aw]$ com apenas uma transição de estados.

$[s_i, u] \overset{*}{\longmapsto} [s_j, v]$: configuração $[s_j, v]$ pode ser obtida a partir de $[s_i, u]$ com zero ou mais transições.

Configuração de um DFA

Definição 1.8

- A função $\underset{M}{\longmapsto}$ em $S \times \Sigma^+$ é definida por

$$[s_i, aw] \underset{M}{\longmapsto} [\delta(s_i, a), w],$$

para $a \in \Sigma$ e $w \in \Sigma^*$, onde δ é a função de transição do DFA M.

Processamento de um DFA

Exemplo 1.9

- $M = \langle \{a, b\}, \{s_0, s_1, s_2\}, s_0, \delta, \{s_2\} \rangle$, onde:

δ	a	b
s_0	s_0	s_1
s_1	s_0	s_2
s_2	s_2	s_2

Processamento de um DFA

Exemplo 1.9

- $M = \langle \{a, b\}, \{s_0, s_1, s_2\}, s_0, \delta, \{s_2\} \rangle$, onde:

δ	a	b
s_0	s_0	s_1
s_1	s_0	s_2
s_2	s_2	s_2

- $\mathcal{L}(M) = (a \cup b)^* bb (a \cup b)^*$

Processamento de um DFA

Exemplo 1.9

- $M = \langle \{a, b\}, \{s_0, s_1, s_2\}, s_0, \delta, \{s_2\} \rangle$, onde:

δ	a	b
s_0	s_0	s_1
s_1	s_0	s_2
s_2	s_2	s_2

- $\mathcal{L}(M) = (a \cup b)^* bb (a \cup b)^*$

Cadeia $abba$	
	$[s_0, abba]$
$\longmapsto$	$[s_0, bba]$
$\longmapsto$	$[s_1, ba]$
$\longmapsto$	$[s_2, a]$
$\longmapsto$	$[s_2, \varepsilon]$
Cadeia aceita!	

Processamento de um DFA

Exemplo 1.9

- $M = \langle \{a, b\}, \{s_0, s_1, s_2\}, s_0, \delta, \{s_2\} \rangle$, onde:

δ	a	b
s_0	s_0	s_1
s_1	s_0	s_2
s_2	s_2	s_2

- $\mathcal{L}(M) = (a \cup b)^* bb (a \cup b)^*$

Cadeia $abba$	
	$[s_0, abba]$
$\longmapsto$	$[s_0, bba]$
$\longmapsto$	$[s_1, ba]$
$\longmapsto$	$[s_2, a]$
$\longmapsto$	$[s_2, \varepsilon]$
Cadeia aceita!	

Processamento de um DFA

Exemplo 1.9

- $M = \langle \{a, b\}, \{s_0, s_1, s_2\}, s_0, \delta, \{s_2\} \rangle$, onde:

δ	a	b
s_0	s_0	s_1
s_1	s_0	s_2
s_2	s_2	s_2

- $\mathcal{L}(M) = (a \cup b)^* bb (a \cup b)^*$

Cadeia $abba$	
	$[s_0, abba]$
$\longmapsto$	$[s_0, bba]$
$\longmapsto$	$[s_1, ba]$
$\longmapsto$	$[s_2, a]$
$\longmapsto$	$[s_2, \varepsilon]$
Cadeia aceita!	

Processamento de um DFA

Exemplo 1.9

- $M = \langle \{a, b\}, \{s_0, s_1, s_2\}, s_0, \delta, \{s_2\} \rangle$, onde:

δ	a	b
s_0	s_0	s_1
s_1	s_0	s_2
s_2	s_2	s_2

- $\mathcal{L}(M) = (a \cup b)^* bb (a \cup b)^*$

Cadeia $abba$	
	$[s_0, abba]$
$\longmapsto$	$[s_0, bba]$
$\longmapsto$	$[s_1, ba]$
$\longmapsto$	$[s_2, a]$
$\longmapsto$	$[s_2, \varepsilon]$
Cadeia aceita!	

Processamento de um DFA

Exemplo 1.9

- $M = \langle \{a,b\}, \{s_0, s_1, s_2\}, s_0, \delta, \{s_2\} \rangle$, onde:

δ	a	b
s_0	s_0	s_1
s_1	s_0	s_2
s_2	s_2	s_2

- $\mathcal{L}(M) = (a \cup b)^* bb (a \cup b)^*$

Cadeia $abba$	
	$[s_0, abba]$
$\longmapsto$	$[s_0, bba]$
$\longmapsto$	$[s_1, ba]$
$\longmapsto$	$[s_2, a]$
$\longmapsto$	$[s_2, \varepsilon]$
Cadeia aceita!	

Processamento de um DFA

Exemplo 1.9

- $M = \langle \{a,b\}, \{s_0, s_1, s_2\}, s_0, \delta, \{s_2\} \rangle$, onde:

δ	a	b
s_0	s_0	s_1
s_1	s_0	s_2
s_2	s_2	s_2

- $\mathcal{L}(M) = (a \cup b)^* bb (a \cup b)^*$

Cadeia $abba$	
	$[s_0, abba]$
$\longmapsto$	$[s_0, bba]$
$\longmapsto$	$[s_1, ba]$
$\longmapsto$	$[s_2, a]$
$\longmapsto$	$[s_2, \varepsilon]$
Cadeia aceita!	

Cadeia $abab$	
	$[s_0, abab]$
$\longmapsto$	$[s_0, bab]$
$\longmapsto$	$[s_1, ab]$
$\longmapsto$	$[s_0, b]$
$\longmapsto$	$[s_1, \varepsilon]$
Cadeia rejeitada!	

Processamento de um DFA

Exemplo 1.9

- $M = \langle \{a,b\}, \{s_0, s_1, s_2\}, s_0, \delta, \{s_2\} \rangle$, onde:

δ	a	b
s_0	s_0	s_1
s_1	s_0	s_2
s_2	s_2	s_2

- $\mathcal{L}(M) = (a \cup b)^* bb (a \cup b)^*$

Cadeia $abba$	
	$[s_0, abba]$
$\longmapsto$	$[s_0, bba]$
$\longmapsto$	$[s_1, ba]$
$\longmapsto$	$[s_2, a]$
$\longmapsto$	$[s_2, \varepsilon]$
Cadeia aceita!	

Cadeia $abab$	
	$[s_0, abab]$
$\longmapsto$	$[s_0, bab]$
$\longmapsto$	$[s_1, ab]$
$\longmapsto$	$[s_0, b]$
$\longmapsto$	$[s_1, \varepsilon]$
Cadeia rejeitada!	

Processamento de um DFA

Exemplo 1.9

- $M = \langle \{a,b\}, \{s_0, s_1, s_2\}, s_0, \delta, \{s_2\} \rangle$, onde:

δ	a	b
s_0	s_0	s_1
s_1	s_0	s_2
s_2	s_2	s_2

- $\mathcal{L}(M) = (a \cup b)^* bb (a \cup b)^*$

Cadeia $abba$	
	$[s_0, abba]$
$\longmapsto$	$[s_0, bba]$
$\longmapsto$	$[s_1, ba]$
$\longmapsto$	$[s_2, a]$
$\longmapsto$	$[s_2, \varepsilon]$
Cadeia aceita!	

Cadeia $abab$	
	$[s_0, abab]$
$\longmapsto$	$[s_0, bab]$
$\longmapsto$	$[s_1, ab]$
$\longmapsto$	$[s_0, b]$
$\longmapsto$	$[s_1, \varepsilon]$
Cadeia rejeitada!	

Processamento de um DFA

Exemplo 1.9

- $M = \langle\{a, b\}, \{s_0, s_1, s_2\}, s_0, \delta, \{s_2\}\rangle$, onde:

δ	a	b
s_0	s_0	s_1
s_1	s_0	s_2
s_2	s_2	s_2

- $\mathcal{L}(M) = (a \cup b)^* bb(a \cup b)^*$

Cadeia $abba$	
	$[s_0, abba]$
$\longmapsto$	$[s_0, bba]$
$\longmapsto$	$[s_1, ba]$
$\longmapsto$	$[s_2, a]$
$\longmapsto$	$[s_2, \varepsilon]$
Cadeia aceita!	

Cadeia $abab$	
	$[s_0, abab]$
$\longmapsto$	$[s_0, bab]$
$\longmapsto$	$[s_1, ab]$
$\longmapsto$	$[s_0, b]$
$\longmapsto$	$[s_1, \varepsilon]$
Cadeia rejeitada!	

Processamento de um DFA

Exemplo 1.9

- $M = \langle\{a, b\}, \{s_0, s_1, s_2\}, s_0, \delta, \{s_2\}\rangle$, onde:

δ	a	b
s_0	s_0	s_1
s_1	s_0	s_2
s_2	s_2	s_2

- $\mathcal{L}(M) = (a \cup b)^* bb(a \cup b)^*$

Cadeia $abba$	
	$[s_0, abba]$
$\longmapsto$	$[s_0, bba]$
$\longmapsto$	$[s_1, ba]$
$\longmapsto$	$[s_2, a]$
$\longmapsto$	$[s_2, \varepsilon]$
Cadeia aceita!	

Cadeia $abab$	
	$[s_0, abab]$
$\longmapsto$	$[s_0, bab]$
$\longmapsto$	$[s_1, ab]$
$\longmapsto$	$[s_0, b]$
$\longmapsto$	$[s_1, \varepsilon]$
Cadeia rejeitada!	

Transição estendida

Definição 1.10

- A função de transição estendida $\overline{\delta}$ de um DFA, com função de transição δ, é uma função de $S \times \Sigma^*$ em S, definida recursivamente no comprimento da cadeia de entrada:
  1. Base:
     $|w| = 0 \Rightarrow w = \varepsilon$ e $\overline{\delta}(s_i, \varepsilon) = s_i$,
     $|w| = 1 \Rightarrow w = a \in \Sigma$ e $\overline{\delta}(s_i, a) = \delta(s_i, a)$.
  2. Recursão:
     $|w| = n > 1 \Rightarrow w = ua$ e $\overline{\delta}(s_i, ua) = \delta(\overline{\delta}(s_i, u), a)$.

Transição estendida

Resumo

- A função estendida de transição de estados $\overline{\delta} : S \times \Sigma^* \to S$, de um DFA $M = \langle\Sigma, S, s_0, \delta, F\rangle$, é definida como:
  1. $\overline{\delta}(s, \varepsilon) = s \quad (\forall\ s \in S)$
  2. $\overline{\delta}(s, a) = \delta(s, a) \quad (\forall\ s \in S,\ \forall\ a \in \Sigma)$
  3. $\overline{\delta}(s, au) = \overline{\delta}(\delta(s, a), u) \quad (\forall\ s \in S,\ \forall\ a \in \Sigma,\ \forall\ u \in \Sigma^*)$

Transição estendida

DFA $M = \langle \Sigma, S, s_0, \delta, F \rangle$

- M **aceita** a cadeia $w \in \Sigma^*$ se e somente se $\overline{\delta}(s_0, w) \in F$.
  - Se $w = w_1 w_2 \dots w_n$, então existem $r_0, r_1, \dots, r_n \in S$, tais que:
    1. $r_0 = s_0$;
    2. $\delta(r_i, w_{i+1}) = r_{i+1}$, para $i = 0, \dots, n-1$; e
    3. $r_n \in F$.
- M **rejeita** a cadeia $w \in \Sigma^*$ se e somente se $\overline{\delta}(s_0, w) \notin F$.

Linguagem de um DFA

Definição 1.11

- A linguagem $\mathcal{L}(M)$ de um DFA $M = \langle \Sigma, S, s_0, \delta, F \rangle$ é o conjunto de cadeias em Σ^* aceitas por M.
- Dado o DFA $M = \langle \Sigma, S, s_0, \delta, F \rangle$, então $\mathcal{L}(M) = \{w \mid \overline{\delta}(s_0, w) \in F\}$.

Exemplos de DFA's

Exemplo 1.12

- $M_1 = \langle \{a, b\}, \{s_0, s_1, s_2\}, s_0, \delta, \{s_2\} \rangle$, onde:

δ	a	b
s_0	s_0	s_1
s_1	s_0	s_2
s_2	s_2	s_2

Exemplos de DFA's

Exemplo 1.12

- $M_1 = \langle \{a, b\}, \{s_0, s_1, s_2\}, s_0, \delta, \{s_2\} \rangle$, onde:

δ	a	b
s_0	s_0	s_1
s_1	s_0	s_2
s_2	s_2	s_2

- $\mathcal{L}(M_1) = (a \cup ba)^* bb (a \cup b)^* \equiv (a \cup b)^* bb (a \cup b)^*$

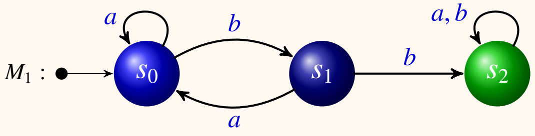
Exemplos de DFA's

Exemplo 1.12

- $M_1 = \langle \{a, b\}, \{s_0, s_1, s_2\}, s_0, \delta, \{s_2\} \rangle$, onde:

δ	a	b
s_0	s_0	s_1
s_1	s_0	s_2
s_2	s_2	s_2

- $\mathcal{L}(M_1) = (a \cup ba)^* bb(a \cup b)^* \equiv (a \cup b)^* bb(a \cup b)^*$



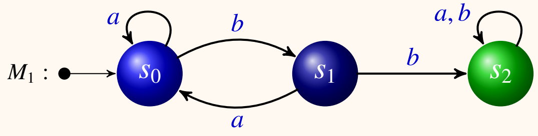
Exemplos de DFA's

Exemplo 1.12

- $M_1 = \langle \{a, b\}, \{s_0, s_1, s_2\}, s_0, \delta, \{s_2\} \rangle$, onde:

δ	a	b
s_0	s_0	s_1
s_1	s_0	s_2
s_2	s_2	s_2

- $\mathcal{L}(M_1) = (a \cup ba)^* bb(a \cup b)^* \equiv (a \cup b)^* bb(a \cup b)^*$



- $[s_0, ababb]$

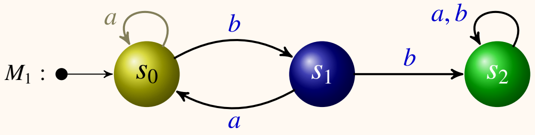
Exemplos de DFA's

Exemplo 1.12

- $M_1 = \langle \{a, b\}, \{s_0, s_1, s_2\}, s_0, \delta, \{s_2\} \rangle$, onde:

δ	a	b
s_0	s_0	s_1
s_1	s_0	s_2
s_2	s_2	s_2

- $\mathcal{L}(M_1) = (a \cup ba)^* bb(a \cup b)^* \equiv (a \cup b)^* bb(a \cup b)^*$



- $[s_0, ababb] \longmapsto [s_0, babb]$

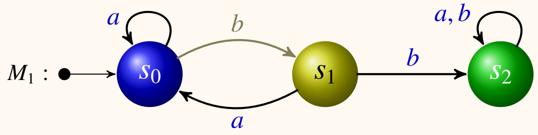
Exemplos de DFA's

Exemplo 1.12

- $M_1 = \langle \{a, b\}, \{s_0, s_1, s_2\}, s_0, \delta, \{s_2\} \rangle$, onde:

δ	a	b
s_0	s_0	s_1
s_1	s_0	s_2
s_2	s_2	s_2

- $\mathcal{L}(M_1) = (a \cup ba)^* bb(a \cup b)^* \equiv (a \cup b)^* bb(a \cup b)^*$



- $[s_0, ababb] \longmapsto [s_0, babb] \longmapsto [s_1, abb]$

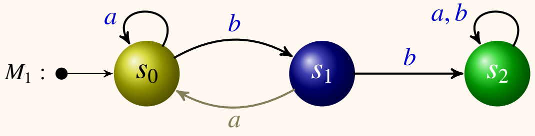
Exemplos de DFA's

Exemplo 1.12

- $M_1 = \langle \{a, b\}, \{s_0, s_1, s_2\}, s_0, \delta, \{s_2\} \rangle$, onde:

δ	a	b
s_0	s_0	s_1
s_1	s_0	s_2
s_2	s_2	s_2

- $\mathcal{L}(M_1) = (a \cup ba)^* bb(a \cup b)^* \equiv (a \cup b)^* bb(a \cup b)^*$



- $[s_0, ababb] \longmapsto [s_0, babb] \longmapsto [s_1, abb] \longmapsto [s_0, bb]$

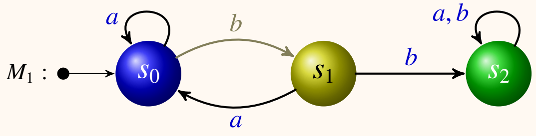
Exemplos de DFA's

Exemplo 1.12

- $M_1 = \langle \{a, b\}, \{s_0, s_1, s_2\}, s_0, \delta, \{s_2\} \rangle$, onde:

δ	a	b
s_0	s_0	s_1
s_1	s_0	s_2
s_2	s_2	s_2

- $\mathcal{L}(M_1) = (a \cup ba)^* bb(a \cup b)^* \equiv (a \cup b)^* bb(a \cup b)^*$



- $[s_0, ababb] \longmapsto [s_0, babb] \longmapsto [s_1, abb] \longmapsto [s_0, bb] \longmapsto [s_1, b]$

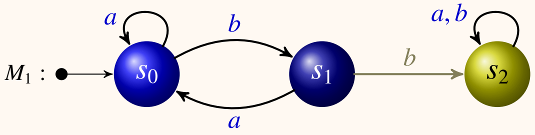
Exemplos de DFA's

Exemplo 1.12

- $M_1 = \langle \{a, b\}, \{s_0, s_1, s_2\}, s_0, \delta, \{s_2\} \rangle$, onde:

δ	a	b
s_0	s_0	s_1
s_1	s_0	s_2
s_2	s_2	s_2

- $\mathcal{L}(M_1) = (a \cup ba)^* bb(a \cup b)^* \equiv (a \cup b)^* bb(a \cup b)^*$



- $[s_0, ababb] \longmapsto [s_0, babb] \longmapsto [s_1, abb] \longmapsto [s_0, bb] \longmapsto [s_1, b] \longmapsto [s_2, \varepsilon]$

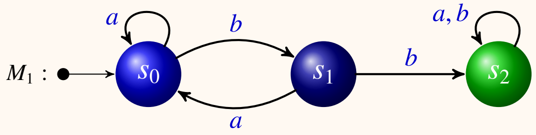
Exemplos de DFA's

Exemplo 1.12

- $M_1 = \langle \{a, b\}, \{s_0, s_1, s_2\}, s_0, \delta, \{s_2\} \rangle$, onde:

δ	a	b
s_0	s_0	s_1
s_1	s_0	s_2
s_2	s_2	s_2

- $\mathcal{L}(M_1) = (a \cup ba)^* bb(a \cup b)^* \equiv (a \cup b)^* bb(a \cup b)^*$



- $[s_0, ababb] \longmapsto [s_0, babb] \longmapsto [s_1, abb] \longmapsto [s_0, bb] \longmapsto [s_1, b] \longmapsto [s_2, \varepsilon] \longmapsto [s_2]$

Diagrama de estados

Teorema 1.13

- *Se $M = \langle \Sigma, S, s_0, \delta, F \rangle$ é um DFA e $w \in \Sigma^*$, então w determina um único caminho p_w no diagrama de estados de M e $\overline{\delta}(s_0, w) = s_w$.*

Demonstração.

- Indução no comprimento da cadeia w.
  - Base: $|w| = 0 \Rightarrow \overline{\delta}(s_0, \varepsilon) = s_0$.
  - Hipótese: Resultado válido para todas as cadeias de comprimento máximo n.

□

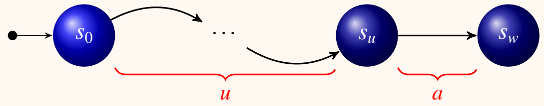
Diagrama de estados

Teorema 1.13

- *Se $M = \langle \Sigma, S, s_0, \delta, F \rangle$ é um DFA e $w \in \Sigma^*$, então w determina um único caminho p_w no diagrama de estados de M e $\overline{\delta}(s_0, w) = s_w$.*

Demonstração.

- Indução no comprimento da cadeia w.
  - Passo: Seja $w = ua$ tal que $|w| = n + 1$.
    1. Por H.I., existe um único caminho p_u que processa u e $\overline{\delta}(s_0, u) = s_u$.
    2. O caminho p_w segue o arco rotulado a saindo de s_u.
    3. p_w é único, pois p_u é único e somente uma aresta rotulada a sai de s_u.



□

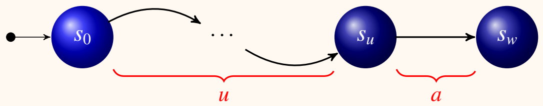
Diagrama de estados

Teorema 1.13

- *Se $M = \langle \Sigma, S, s_0, \delta, F \rangle$ é um DFA e $w \in \Sigma^*$, então w determina um único caminho p_w no diagrama de estados de M e $\overline{\delta}(s_0, w) = s_w$.*

Demonstração.

- Indução no comprimento da cadeia w.
  - Passo: Seja $w = ua$ tal que $|w| = n + 1$.
    4. O estado final de p_w é determinado pela transição $\delta(s_u, a)$.
    5. Por definição, $\overline{\delta}(s_0, w) = \delta(\overline{\delta}(s_0, u), a)$.
    6. Como $\overline{\delta}(s_0, u) = s_u$, então $s_w = \delta(s_u, a) = \delta(\overline{\delta}(s_0, u), a) = \overline{\delta}(s_0, w)$.

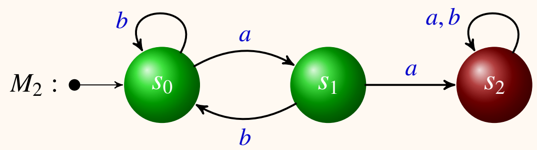


□

Exemplos de DFA's

Exemplo 1.14

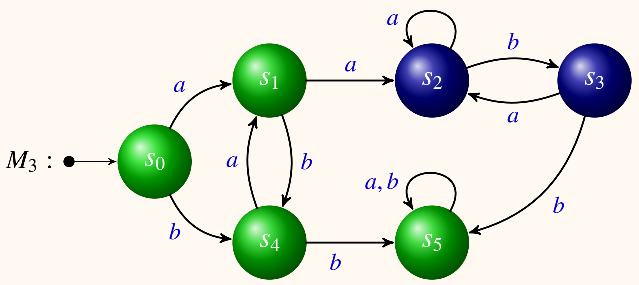
- $\mathcal{L}(M_2) = \{w \in \{a, b\}^* \mid w$ não contém a subcadeia $aa\}$.
- $\mathcal{L}(M_2) = (b \cup ab)^*(a \cup \varepsilon)$.



Exemplos de DFA's

Exemplo 1.15

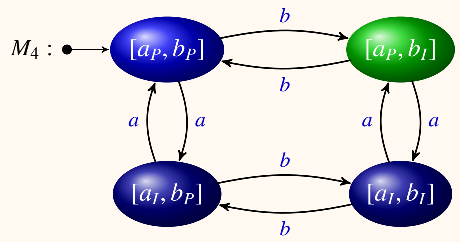
- $\mathcal{L}(M_3) = \{w \in \{a, b\}^* \mid w$ contém bb ou não contém $aa\}$.
- $\mathcal{L}(M_3) = \mathcal{L}(M_1) \cup \mathcal{L}(M_2)$.



Exemplos de DFA's

Exemplo 1.16

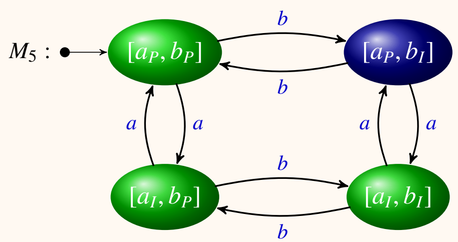
- $\mathcal{L}(M_4) = \{w \in \{a, b\}^* \mid w$ contém nr. par de $a's$ e nr. ímpar de b's$\}$.



Exemplos de DFA's

Exemplo 1.17

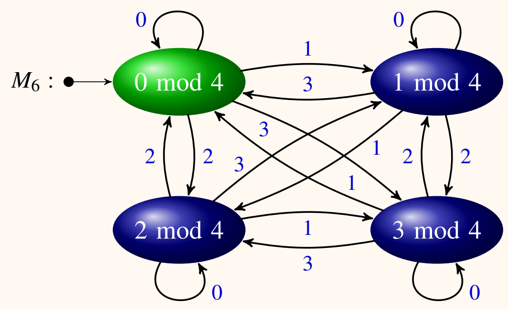
- $\mathcal{L}(M_5) = \{w \in \{a, b\}^* \mid w$ não contém nr. par de $a's$ e nr. ímpar de b's$\}$.
- $\mathcal{L}(M_5) = \{a, b\}^* - \mathcal{L}(M_4)$.



Exemplos de DFA's

Exemplo 1.18

- $\mathcal{L}(M_6) = \{w \in \{0, 1, 2, 3\}^* \mid$ a soma dos dígitos de w é divisível por $4\}$.
  - $12302 \in \mathcal{L}(M_6)$.
  - $0130 \in \mathcal{L}(M_6)$.
  - $0111 \notin \mathcal{L}(M_6)$.



Determinismo incompleto

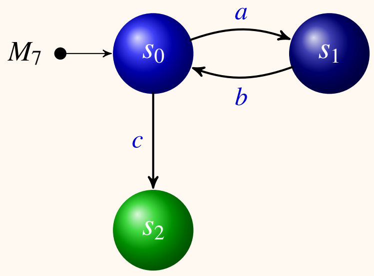
Definição 1.19

- Função de transição é uma função parcial de $S \times \Sigma$ em S.
- Processamento para assim que é possível determinar que uma dada cadeia não é aceitável.
  - Para antes de processar toda a cadeia e a rejeita.

Exemplos de DFA's

Exemplo 1.20

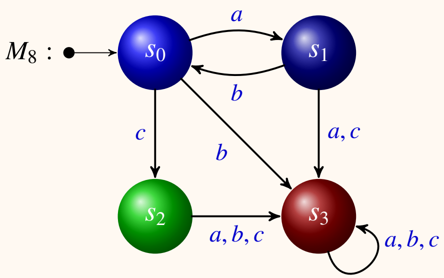
- $\mathcal{L}(M_7) = (ab)^*c$.



Exemplos de DFA's

Exemplo 1.21

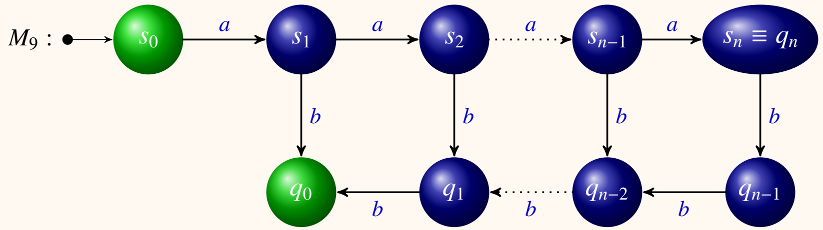
- $\mathcal{L}(M_8) = (ab)^*c$.
- Estado s_3 garante o processamento de toda a cadeia de entrada.



Exemplos de DFA's

Exemplo 1.22

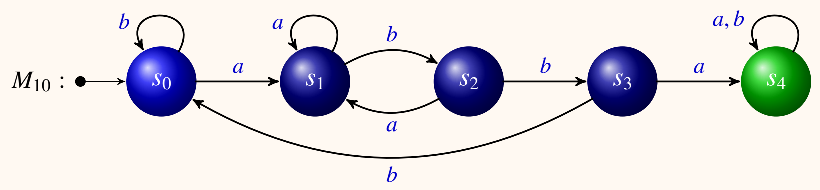
- $\mathcal{L}(M_9) = \{a^i b^i \mid 0 \leqslant i \leqslant n\}$, para um $\boldsymbol{n}$ **fixo**.
- Estados s_i's contam o número de a's e estados q_i's garantem um igual número de b's.



Exemplos de DFA's

Exemplo 1.23

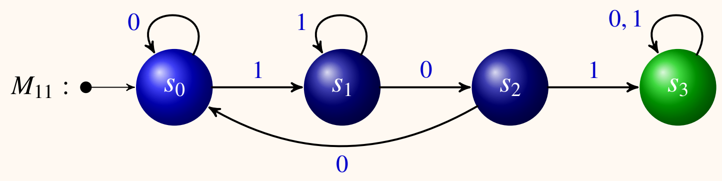
- $\mathcal{L}(M_{10}) = \{w \in \{a,b\}^* \mid w$ contém $abba\}$.



Exemplos de DFA's

Exemplo 1.24

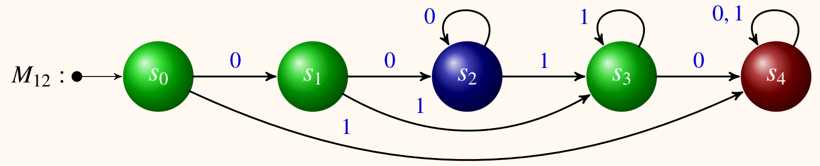
- $\mathcal{L}(M_{11}) = (0 \cup 1^+00)^*1^+01(0 \cup 1)^*$.



Exemplos de DFA's

Exemplo 1.25

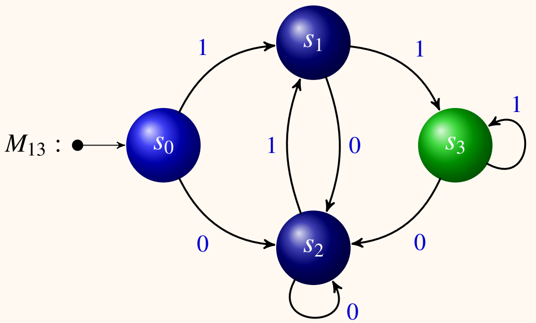
- $\mathcal{L}(M_{12}) = \varepsilon \cup (0 \cup 00^*1)1^*$.



Exemplos de DFA's

Exemplo 1.26

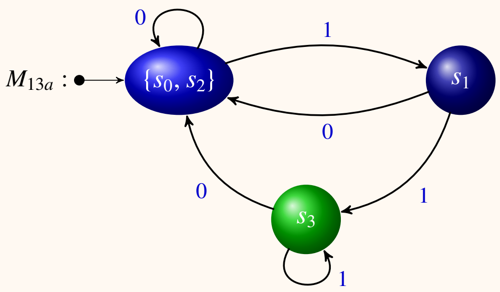
- $\mathcal{L}(M_{13}) = (0 \cup 1)^*11$.



Exemplos de DFA's

Exemplo 1.27

- $\mathcal{L}(M_{13a}) = (0 \cup 1)^*11$.



Livros texto

R. P. Grimaldi
Discrete and Combinatorial Mathematics – An Applied Introduction.
Addison Wesley, 1994.

D. J. Velleman
How To Prove It – A Structured Approach.
Cambridge University Press, 1996.

J. E. Hopcroft; J. Ullman.
Introdução Ã Teoria de Autômatos, Linguagens e Computação.
Ed. Campus.

T. A. Sudkamp.
Languages and Machines – An Introduction to the Theory of Computer Science.
Addison Wesley Longman, Inc. 1998.

J. Carroll; D. Long.
Theory of Finite Automata – With an Introduction to Formal Languages.
Prentice-Hall, 1989.

M. Sipser.
Introduction to the Theory of Computation.
PWS Publishing Company, 1997.

H. R. Lewis; C. H. Papadimitriou
Elementos de Teoria da Computação.
Bookman, 2000.