Linguagens livres de contexto:

Linguagens definidas sobre o alfabeto $\Sigma = \{0, 1\}$:

$\mathcal{L}_1 = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_0 > |w|_1\}$.

- Seja a cadeia $w = xyz = 0^p1^{p-1} \in \mathcal{L}_1$, onde p é o *pumping length* definido pelo *Pumping Lemma* para linguagens regulares. Como $|xy| \leqslant p$, $z = 0^{p-i-j}1^{p-1}$ com $|x| = i$, $|y| = j$, $i \geqslant 0$ e $j > 0$. Contudo, $w' = xy^0z = xz = 0^i0^{p-i-j}1^p = 0^{p-j}1^{p-1} \notin \mathcal{L}_1$, pois $j \geqslant 1$, ou seja, $p - j \leqslant p - 1$. Portanto, dada a contradição, a linguagem $\mathcal{L}_1$ não é regular.

$\mathcal{L}_2 = \{w \in \Sigma^* \mid w = 0u0 \text{ ou } w = 1u1,\ |w|_0 = |w|_1,\ u \in \Sigma^+\}$.

- Seja a cadeia $w = xyz = 0^p1^p10 \in \mathcal{L}_2$, onde p é o *pumping length* definido pelo *Pumping Lemma* para linguagens regulares. Como $|xy| \leqslant p$, $z = 0^{p-i-j}1^p10$ com $|x| = i$, $|y| = j$, $i \geqslant 0$ e $j > 0$. Contudo, $w' = xy^2z = 0^i0^j0^j0^{p-i-j}1^p10 = 0^{p+j}1^p10 \notin \mathcal{L}_2$, pois $|w'|_0 \neq |w'|_1$. Portanto, dada a contradição, a linguagem $\mathcal{L}_2$ não é regular.

$\mathcal{L}_3 = \{w \in \Sigma^* \mid w \neq 0^n1^m,\ m, n \in \mathbb{N},\ n = 2m \text{ ou } m = 2n\}$.

- Seja a cadeia $w = xyz = 0^p1^{2(p+p!)} \in \mathcal{L}_3$, onde p é o *pumping length* definido pelo *Pumping Lemma* para linguagens regulares. Como $|xy| \leqslant p$, $z = 0^{p-i-j}1^{2(p+p!)}$ com $|x| = i$, $|y| = j$, $i \geqslant 0$ e $j > 0$. Contudo, $w' = xy^{\left(\frac{p!}{j}+1\right)}z = 0^i(0^j)^{\left(\frac{p!}{j}+1\right)}0^{p-i-j}1^{2(p+p!)} = 0^{(p+p!)}1^{2(p+p!)} \notin \mathcal{L}_3$. Portanto, dada a contradição, a linguagem $\mathcal{L}_3$ não é regular.

$\mathcal{L}_4 = \{w \in \Sigma^* \mid w = 0^n10^n,\ n \in \mathbb{N}\}$.

- Seja a cadeia $w = xyz = 0^p10^p \in \mathcal{L}_4$, onde p é o *pumping length* definido pelo *Pumping Lemma* para linguagens regulares. Como $|xy| \leqslant p$, $z = 0^{p-i-j}10^p$ com $|x| = i$, $|y| = j$, $i \geqslant 0$ e $j > 0$. Contudo, $w' = xy^2z = 0^i0^j0^j0^{p-i-j}10^p = 0^{p+j}10^p \notin \mathcal{L}_4$. Portanto, dada a contradição, a linguagem $\mathcal{L}_4$ não é regular.

$\mathcal{L}_5 = \{w \in \Sigma^* \mid w = 0^n1^m0^{2n},\ m, n \geqslant 0\}$.

$\mathcal{L}_6 = \{w \in \Sigma^* \mid w = 0^{2n}1^{3n}0^m,\ m, n \in \mathbb{N},\}$.

- Seja a cadeia $w = xyz = 0^{2p}1^{3p} \in \mathcal{L}_6$, onde p é o *pumping length* definido pelo *Pumping Lemma* para linguagens regulares. Como $|xy| \leqslant p$, $z = 0^{2p-i-j}1^{3p}$ com $|x| = i$, $|y| = j$, $i \geqslant 0$ e $j > 0$. Contudo, $w' = xy^2z = 0^i0^j0^j0^{2p-i-j}1^{3p} = 0^{2p+j}1^{3p} \notin \mathcal{L}_6$. Portanto, dada a contradição, a linguagem $\mathcal{L}_6$ não é regular.

$\mathcal{L}_7 = \{w \in \Sigma^* \mid w = 0^nu,\ u \in \Sigma^*,\ n \in \mathbb{N}^+, |u|_0 \leqslant n\}$.

$\mathcal{L}_8 = \{w \in \Sigma^* \mid w = 0^n1^m,\ m, n \in \mathbb{N}, m > n + 2\}$.

- Seja a cadeia $w = xyz = 0^p1^{p+3} \in \mathcal{L}_8$, onde p é o *pumping length* definido pelo *Pumping Lemma* para linguagens regulares. Como $|xy| \leqslant p$, $z = 0^{p-i-j}1^{p+3}$ com $|x| = i$, $|y| = j$, $i \geqslant 0$ e $j > 0$. Contudo, $w' = xy^4z = 0^i0^j0^j0^j0^j0^{p-i-j}1^{p+3} = 0^{p+3j}1^{p+3} \notin \mathcal{L}_8$, pois $j > 0$ e $p + 3j > p + 3$. Portanto, dada a contradição, a linguagem $\mathcal{L}_8$ não é regular.

$\mathcal{L}_9 = \{w \in \Sigma^* \mid w = u\overline{u},\ u \in \Sigma^*\}$.

O sufixo $\overline{u}$ é obtido com a troca dos símbolos de u, ou seja, $0 \leftrightarrow 1$.

- Seja a cadeia $w = xyz = 0^p1^p \in \mathcal{L}_9$, onde p é o *pumping length* definido pelo *Pumping Lemma* para linguagens regulares. Como $|xy| \leqslant p$, $z = 0^{p-i-j}1^p$ com $|x| = i$, $|y| = j$, $i \geqslant 0$ e $j > 0$. Contudo, $w' = xy^3z = (0^i)(0^j0^j0^j)0^{p-i-j}1^p = (0^p0^j)(0^j1^p) \notin \mathcal{L}_9$, pois $w' = rs$, com $|r| = |s|$ e $s \neq \overline{r}$. Portanto, dada a contradição, a linguagem $\mathcal{L}_9$ não é regular.

$\mathcal{L}_{10} = \{w \in \Sigma^* \mid w = uuu,\ u \in \Sigma^*\}$.

- Seja a cadeia $w = uuu = (0^p1)(0^p1)(0^p1) \in \mathcal{L}_{10}$, onde p é o *pumping length* definido pelo *Pumping Lemma* para linguagens regulares. Segundo esse Lema, $w = xyz$, com $|xy| \leqslant p$. Logo, $z = (0^{p-i-j}1)(0^p1)(0^p1)$ com $|x| = i$, $|y| = j$, $i \geqslant 0$ e $j > 0$. Seja $w' = xy^2z = 0^i0^j0^j(0^{p-i-j}1)(0^p1)(0^p1) = (0^{p+j}1)(0^p1)(0^p1)$. Suponha que $w' = u'u'u' \in \mathcal{L}_{10}$. Contudo, se a primeira cópia de u' contém apenas 0's, os 1's de w' devem pertencer às demais cópias de u'. Se a primeira cópia de u' contém pelo menos um 1, a primeira ocorrência do 1 será precedida de $p+j$ 0's e nas demais cópias de u' um 1 será precedido de no máximo p 0's. Portanto, dada a contradição, a linguagem $\mathcal{L}_{10}$ não é regular.

$\mathcal{L}_{11} = \{w \in \Sigma^* \mid w = uu^Rv,\ u, v \in \Sigma^+\}$.

- Seja a cadeia $w = (10^p1)(10^p1)^R1^p = 10^p110^p11^p \in \mathcal{L}_{11}$, onde p é o *pumping length* definido pelo *Pumping Lemma* para linguagens regulares. Segundo esse Lema, $w = xyz$, com $|xy| \leqslant p$ e $|y| > 0$. Logo, $z = 0^{p-i-j}110^p11^p$ com $|x| = i$, $|y| = j$, $i \geqslant 0$ e $j > 0$. Se $x = \varepsilon$, então $w' = xy^2z = (10^{j-1})^2(0^{p-j}110^p11^p) = (10^{j-1})(10^{j-1})(0^{p-j}110^p11^p) = (10^{j-1})(10^{p-1}110^p11^p)$ e $\forall\ j,\ 0 < j \leqslant p-1$, $w \neq u'u'^Rv$, com $u, v \in \Sigma^+$. Se $x \neq \varepsilon$, então $w' = xy^0z = (10^{i-1})(0^{p-i-j}110^p11^p) = 10^{p-j-1}110^p11^p$ e $\forall\ j,\ 0 < j \leqslant p-1$, $w \neq u'u'^Rv$, com $u, v \in \Sigma^+$. Portanto, dada a contradição, a linguagem $\mathcal{L}_{11}$ não é regular.

$\mathcal{L}_{12} = \{w \in \Sigma^* \mid w = uv,\ u, v \in \Sigma^+,\ |u|_1 < |v|_0\}$.

- Seja a cadeia $w = w^R = (0^p1)(10^p) \in \mathcal{L}_{12}$, onde p é o *pumping length* definido pelo *Pumping Lemma* para linguagens regulares. Segundo esse Lema, $w = xyz$, com $|xy| \leqslant p$. Logo, $z = (0^{p-i-j}1)(10^p)$ com $|x| = i$, $|y| = j$, $i \geqslant 0$ e $j > 0$. Seja $w' = xy^2z = (0^i)(0^j0^j)(0^{p-i-j}1)(10^p) = (0^{p+j}1)(10^p)$. Suponha que $w' \in \mathcal{L}_{12}$. Contudo, w' contém apenas um par de 1's, contíguos, com $p+j$ símbolos 0's à esquerda e p símbolos 0's à direita desse par de 1's. Logo, $w' \neq (w')^R$. Portanto, dada a contradição, a linguagem $\mathcal{L}_{12}$ não é regular.

$\mathcal{L}_{13} = \{w \in \Sigma^* \mid w = w^R \text{ e } |w| \text{ é par}\}$.

- Seja a cadeia $w = w^R = (0^p1)(10^p) \in \mathcal{L}_{13}$, onde p é o *pumping length* definido pelo *Pumping Lemma* para linguagens regulares. Segundo esse Lema, $w = xyz$, com $|xy| \leqslant p$. Logo, $z = (0^{p-i-j}1)(10^p)$ com $|x| = i$, $|y| = j$, $i \geqslant 0$ e $j > 0$. Seja $w' = xy^2z = (0^i)(0^j0^j)(0^{p-i-j}1)(10^p) = (0^{p+j}1)(10^p)$. Suponha que $w' \in \mathcal{L}_{13}$. Contudo, w' contém apenas um par de 1's, contíguos, com $p+j$ símbolos 0's à esquerda e p símbolos 0's à direita desse par de 1's. Logo, $w' \neq (w')^R$. Portanto, dada a contradição, a linguagem $\mathcal{L}_{13}$ não é regular.

$\mathcal{L}_{14} = \{w \in \Sigma^* \mid w = (01)^n(10)^n,\ n \in \mathbb{N}\}$.

- Seja a cadeia $w = (01)^p(10)^p \in \mathcal{L}_{14}$, onde p é o *pumping length* definido pelo *Pumping Lemma* para linguagens regulares. A cadeia w possui apenas um par 11 de símbolos iguais consecutivos. Segundo esse Lema, $w = xyz$, com $|xy| \leqslant p$ e $|y| > 0$. Logo, se

$y = 0$, $y = 1$, $y = 0u0$ ou $y = 1u1$, então $w' = xy^0z \notin \mathcal{L}_{14}$, pois w' possui, além do par 11, outro par de símbolos iguais consecutivos (00 ou 11). Se $y = 0u1$ ou $y = 1u0$, então $w' = xy^0z \notin \mathcal{L}_{14}$, pois $w' = (01)^{p-|y|}(10)^p$. Portanto, dada a contradição, a linguagem $\mathcal{L}_{14}$ não é regular.

$\mathcal{L}_{15} = \{w \in \Sigma^* \mid u = (0^{i_n}1^{i_n})^n,\ n \in \mathbb{N} \text{ e } i_n \in \mathbb{N},\ \forall\ i_n\}$

- Seja a cadeia $w = xyz = (0^p1^p)^p = (0^p1^p)(0^p1^p)^{p-1} \in \mathcal{L}_{15}$, onde p é o *pumping length* definido pelo *Pumping Lemma* para linguagens regulares. Como $|xy| \leqslant p$, $z = (0^{p-i-j}1^p)(0^p1^p)^{p-1}$ com $|x| = i$, $|y| = j$, $i \geqslant 0$ e $j > 0$. Contudo, $w' = xy^2z = 0^i0^j0^j(0^{p-i-j}1^p)(0^p1^p)^{p-1} = (0^{p+j}1^p)(0^p1^p)^{p-1} \notin \mathcal{L}_{15}$. Portanto, dada a contradição, a linguagem $\mathcal{L}_{15}$ não é regular.

$\mathcal{L}_{16} = \{w \in \Sigma^* \mid w = 0^m1^n0^p,\ m, n, p \in \mathbb{N}^+,\ m + n = p\}$.

- Seja a cadeia $w = xyz = 0^p1^p0^{2p} \in \mathcal{L}_{16}$, onde p é o *pumping length* definido pelo *Pumping Lemma* para linguagens regulares. Como $|xy| \leqslant p$, $z = 0^{p-i-j}1^p0^{2p}$ com $|x| = i$, $|y| = j$, $i \geqslant 0$ e $j > 0$. Contudo, $w' = xy^0z = (0^i)(\varepsilon)0^{p-i-j}1^p0^{2p} = 0^{p-j}1^p0^{2p} \notin \mathcal{L}_{16}$. Portanto, dada a contradição, a linguagem $\mathcal{L}_{16}$ não é regular.

$\mathcal{L}_{17} = \{w \in \Sigma^* \mid w = 0^m1^n0^p,\ m, n, p \in \mathbb{N}^+,\ p = m - n\}$.

- Seja a cadeia $w = xyz = 0^p10^{p-1} \in \mathcal{L}_{17}$, onde p é o *pumping length* definido pelo *Pumping Lemma* para linguagens regulares. Como $|xy| \leqslant p$, $z = 0^{p-i-j}10^{p-1}$ com $|x| = i$, $|y| = j$, $i \geqslant 0$ e $j > 0$. Contudo, $w' = xy^2z = 0^i0^j0^j0^{p-i-j}10^{p-1} = 0^{p+j}10^{p-1} \notin \mathcal{L}_{17}$, pois $j \geqslant 1$ e $p + j - 1 > p - 1$. Portanto, dada a contradição, a linguagem $\mathcal{L}_{17}$ não é regular.

$\mathcal{L}_{18} = \{w \in \Sigma^* \mid w = 0^m1^n0^p,\ m, n, p \in \mathbb{N}^+,\ m + p = n\}$.

- Seja a cadeia $w = xyz = 0^p1^{2p}0^p \in \mathcal{L}_{18}$, onde p é o *pumping length* definido pelo *Pumping Lemma* para linguagens regulares. Como $|xy| \leqslant p$, $z = 0^{p-i-j}1^{2p}0^p$ com $|x| = i$, $|y| = j$, $i \geqslant 0$ e $j > 0$. Contudo, $w' = xy^0z = (0^i)(\varepsilon)0^{p-i-j}1^{2p}0^p = 0^{p-j}1^{2p}0^p \notin \mathcal{L}_{18}$. Portanto, dada a contradição, a linguagem $\mathcal{L}_{18}$ não é regular.

$\mathcal{L}_{19} = \{w \in \Sigma^* \mid w = 0^m1^n2^p,\ m, n, p \in \mathbb{N}, ((m \leqslant n) \text{ ou } (m > n)) \text{ e } m \neq p\}$.

$\mathcal{L}_{20} = \{w \in \Sigma^* \mid w = 0^n1^m0^m,\ m, n \in \mathbb{N}\}$.

- Seja a cadeia $w = xyz = 1^p0^p \in \mathcal{L}_{20}$, onde p é o *pumping length* definido pelo *Pumping Lemma* para linguagens regulares. Como $|xy| \leqslant p$, $z = 1^{p-i-j}0^p$ com $|x| = i$, $|y| = j$, $i \geqslant 0$ e $j > 0$. Contudo, $w' = xy^2z = 1^i1^j1^j1^{p-i-j}0^p = 1^{p+j}0^p \notin \mathcal{L}_{20}$. Portanto, dada a contradição, a linguagem $\mathcal{L}_{20}$ não é regular.

$\mathcal{L}_{21} = \{w \in \Sigma^* \mid w = 10^n1^n \text{ ou } w = 110^n1^{2n}\ n \in \mathbb{N}^+\}$.

- Seja a cadeia $w = xyz = 10^p1^p \in \mathcal{L}_{21}$, onde p é o *pumping length* definido pelo *Pumping Lemma* para linguagens regulares. Como $|xy| \leqslant p$, $z = 0^{p-i-j}0^p$ com $|x| = i$, $|y| = j$, $i \geqslant 0$ e $j > 0$. Contudo, (i) se $x = \varepsilon$, $w' = xy^2z = (\varepsilon)(10^j10^j)(0^{p-i-j}1^p) = 10^j10^p1^p \notin \mathcal{L}_{21}$; e (ii) se $x \neq \varepsilon$, $w' = xy^2z = (10^{i-1})(0^j0^j)(0^{p-i-j}1^p) = 10^{p+j-1}1^p \notin \mathcal{L}_{21}$. Portanto, dada a contradição, a linguagem $\mathcal{L}_{21}$ não é regular.

$\mathcal{L}_{22} = \{w \in \Sigma^* \mid w = 0^n1^n1^m0^m,\ m, n \in \mathbb{N}\}$.

- Seja a cadeia $w = xyz = 0^p1^p \in \mathcal{L}_{22}$, onde p é o *pumping length* definido pelo *Pumping Lemma* para linguagens regulares. Como $|xy| \leqslant p$, $z = 0^{p-i-j}1^p$ com $|x| = i$, $|y| = j$, $i \geqslant 0$ e $j > 0$. Contudo, $w' = xy^2z = 0^i0^j0^j0^{p-i-j}1^p = 0^{p+j}1^p \notin \mathcal{L}_{22}$. Portanto, dada a contradição, a linguagem $\mathcal{L}_{22}$ não é regular.

$\mathcal{L}_{23} = \{w \in \Sigma^* \mid w = 0^n1^m0^p1^q,\ m, n, p, q \in \mathbb{N},\ m + n = p + q\}$.

$\mathcal{L}_{24} = \{w \in \Sigma^* \mid w = 0^n1^m0^p1^q,\ m, n, p, q \in \mathbb{N},\ n > m,\ p < q\}$

$\mathcal{L}_{25} = \{w \in \Sigma^* \mid w = 0^n1^{2m}0^m1^{2n}\ m, n \in \mathbb{N}\}$.

- Seja a cadeia $w = xyz = 0^p1^{2p} \in \mathcal{L}_{25}$, onde p é o *pumping length* definido pelo *Pumping Lemma* para linguagens regulares. Como $|xy| \leqslant p$, $z = 0^{p-i-j}1^{2p}$ com $|x| = i$, $|y| = j$, $i \geqslant 0$ e $j > 0$. Contudo, $w' = xy^2z = 0^i0^j0^j0^{p-i-j}1^{2p} = 0^{p+j}1^{2p} \notin \mathcal{L}_{25}$, pois $j > 0$ e $2(p + j) \neq 2p$. Portanto, dada a contradição, a linguagem $\mathcal{L}_{25}$ não é regular.

$\mathcal{L}_{26} = \{w \in \Sigma^* \mid w = u^n,\ 2 \leqslant n \in \mathbb{N},\ u \in \Sigma^*\}$.

- Seja a cadeia $w = (0^p1)^p = (0^p1)(0^p1)^{p-1} \in \mathcal{L}_{26}$, onde p é o *pumping length* definido pelo *Pumping Lemma* para linguagens regulares. Como $|xy| \leqslant p$, $z = 0^{p-i-j}1(0^p1)^{p-1}$ com $|x| = i$, $|y| = j$, $i \geqslant 0$ e $j > 0$. Contudo, $w' = xy^2z = 0^i0^j0^j0^{p-i-j}1(0^p1)^{p-1} = 0^{p+j}1(0^p1)^{p-1} = 0^j(0^p1)(0^p1)^{p-1} = 0^j(0^p1)^p \notin \mathcal{L}_{26}$. Portanto, dada a contradição, a linguagem $\mathcal{L}_{26}$ não é regular.

Linguagens definidas sobre o alfabeto $\Sigma = \{0, 1, \#\}$:

$\mathcal{L}_{27} = \{w \in \Sigma^* \mid w = x\#y,\ x, y \in \{0, 1\}^*$ e $x^R \neq y\}$.

$\mathcal{L}_{28} = \{w \in \Sigma^* \mid w = x\#y,\ x, y \in \{0, 1\}^*,\ y \neq x^R$ e $|x| = |y|\}$.

$\mathcal{L}_{29} = \{w \in \Sigma^* \mid w = x\#y\#z,\ x, y, z \in \{0, 1\}^*,\ |z|_0 = 2 \cdot |y|_1$ e $|x| = 2 \cdot k,\ k \in \mathbb{N}\}$.

$\mathcal{L}_{30} = \{w \in \Sigma^* \mid w = x\#y,\ x, y \in \{0, 1\}^*$ e $|x|_0 = |y|_1\}$.

$\mathcal{L}_{31} = \{w \in \Sigma^* \mid w = u\#0^{|u|_0},\ u \in \{0, 1\}^*\}$.