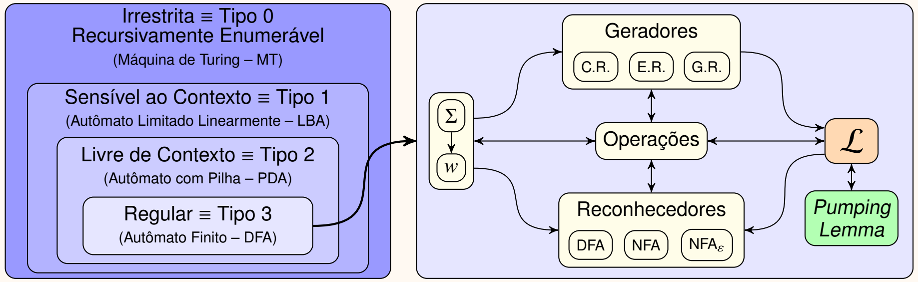
Linguagens Formais e Autômatos

Humberto Longo

Instituto de Informática
Universidade Federal de Goiás

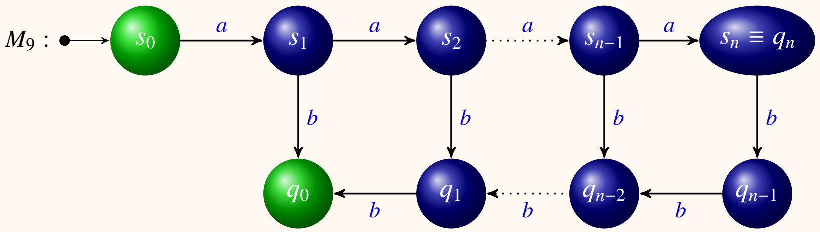
Bacharelado em Ciência da Computação, 2021/1

Roteiro



Uma linguagem regular

- $\mathcal{L}_1 = \{a^i b^i \mid 0 \leqslant i \leqslant n\}$, para um n fixo.
- Estados s_i's contam a quantidade de a's e estados q_i's contam quantos b's faltam para igualar à quantidade de a's.



Uma linguagem não regular

- $\mathcal{L}_2 = \{a^i b^i \mid i \geqslant 0\}$.
- Qualquer autômato determinístico construído para aceitar $\mathcal{L}_2$ tem um número infinito de estados.
  - Suponha que $\mathcal{L}_2$ é aceita pelo DFA M.
  - s_i é o estado de M após processar a cadeia a^i ($\overline{\delta}(s_0, a^i) = s_i$).
  - $\forall\ i, j \geqslant 0$, com $i \neq j$, $a^i b^i \in \mathcal{L}_2$, $a^j b^j \in \mathcal{L}_2$, $a^i b^j \notin \mathcal{L}_2$ e $a^j b^i \notin \mathcal{L}_2$.
    - $\overline{\delta}(s_0, a^i b^i) \neq \overline{\delta}(s_0, a^j b^i)$.
    - $\overline{\delta}(s_0, a^i b^i)$ é estado final e $\overline{\delta}(s_0, a^j b^i)$ não é final.
  - $\overline{\delta}(s_0, a^i b^i) = \overline{\delta}(\overline{\delta}(s_0, a^i), b^i) = \overline{\delta}(s_i, b^i)$ e $\overline{\delta}(s_0, a^j b^i) = \overline{\delta}(\overline{\delta}(s_0, a^j), b^i) = \overline{\delta}(s_j, b^i)$.
  - $s_i \neq s_j$ uma vez que $\overline{\delta}(s_i, b^i) \neq \overline{\delta}(s_j, b^i)$.
    - Estados s_i e s_j são distintos para todos valores $i \neq j$.
    - M deve conter um número infinito de estados correspondentes a $s_1, s_2, \ldots$.

Uma linguagem não regular

Teorema 5.42

- *A linguagem $\mathcal{L}_2 = \{a^i b^i \mid i \geqslant 0\}$ não é regular.*

- Pode-se mostrar que uma linguagem é regular construindo-se uma DFA que a aceite.
- Como provar que uma linguagem não é regular?
  1. Provar que não existe DFA que a aceite (no caso da linguagem $\mathcal{L}_2$, é a argumentação usada antes de enunciar o Teorema 5.42); ou
  2. Usar o Teorema de Myhill-Nerode ou
  3. Usar o *Pumping Lemma*.

Indistinguibilidade de cadeias

Definição 5.43

- Duas cadeias $u, v \in \Sigma^*$ são distinguíveis em relação à linguagem $\mathcal{L} \subseteq \Sigma^*$ se existir alguma cadeia $w \in \Sigma^*$ tal que $uw \in \mathcal{L}$ e $vw \notin \mathcal{L}$.

Exemplo 5.44

- $a, aa \in \Sigma^* = \{a\}^*$ não são distinguíveis em relação à linguagem $\mathcal{L}_1 = \{a^n \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$, porque aa^k e aaa^k pertencem à linguagem $\mathcal{L}_1$, para qualquer $k \in \mathbb{Z}^+$.
- $a, aa \in \Sigma^* = \{a, b\}^*$ são distinguíveis em relação à linguagem $\mathcal{L}_2 = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$, porque $ab \in \mathcal{L}_2$ enquanto $aab \notin \mathcal{L}_2$.

Linguagens não regulares

Teorema 5.45 (Myhill-Nerode)

- *Seja $\mathcal{L}$ uma linguagem sobre o alfabeto Σ. Se existe um conjunto $S \subseteq \Sigma^*$ que satisfaz as seguintes propriedades:*
  1. *$|S|$ é infinita, e*
  2. *se $u, v \in S$ e $u \neq v$, então u e v são distinguíveis em relação à $\mathcal{L}$;*

  então $\mathcal{L}$ não é regular.

Demonstração.

Demonstração também similar à demonstração do Teorema 5.42. □

Linguagens não regulares

Exemplo 5.46

- A linguagem $\mathcal{L} = \{a^i b^i \mid i \geqslant 0\}$ não é regular.
  - Seja $S = \{a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Este conjunto é infinito porque contém uma cadeia para cada número natural. Agora, considere quaisquer cadeias $a^n, a^m \in S$ tais que $n \neq m$, então $a^n b^n \in \mathcal{L}$ e $a^m b^n \notin \mathcal{L}$. Logo, a^n e a^m são distinguíveis em relação a $\mathcal{L}$. Assim, S é um conjunto infinito de cadeias distinguíveis em relação a $\mathcal{L}$. Portanto, pelo Teorema de Myhill-Nerode, $\mathcal{L}$ não é regular.
- O conjunto $\mathcal{L}$ de palíndromos sobre $\{a, b\}$ não é regular.
  - $S = \{a^k b \mid k \geqslant 0\} \subset \Sigma^* \Rightarrow |S| = \infty$.
  - $u = a^i b \in S$, $v = a^j b \in S$ e $w = a^i \in \Sigma^* \Rightarrow uw \in \mathcal{L}$ e $vw \notin \mathcal{L}$, $\forall\, i \neq j$.

Linguagens não regulares

Exemplo 5.47

- Gramáticas regulares não são adequadas para definir linguagens de programação que contém expressões aritméticas/booleanas.

Gramática	Derivação
$S \to A$	$S \Rightarrow A$
$A \to T \mid A + T$	$\Rightarrow T$
$T \to b \mid (A)$	$\Rightarrow (A)$
	$\Rightarrow (T)$
	$\Rightarrow (b)$

- Regras $T \Rightarrow (A) \Rightarrow (T)$ e $T \to b$, geram $(b), ((b)), (((b))), \ldots$
  - $S = \{(^k b \mid k \geqslant 0\} \subset \Sigma^* \Rightarrow |S| = \infty$.
  - $u = (^i b \in S$, $v = (^j b \in S$ e $w =)^i \in \Sigma^* \Rightarrow uw \in \mathcal{L}$ e $vw \notin \mathcal{L}$, $\forall\, i \neq j$.
  - S, u, v e w satisfazem as condições do Teorema 5.45.
- Argumento similar pode ser usado para mostrar que PASCAL, C, ADA, ... não são regulares.

Linguagens não regulares

Teorema 5.48

- *Se $\mathcal{L}_1$ é uma linguagem regular e $\mathcal{L}_2$ uma linguagem livre de contexto, então a linguagem $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$ não necessariamente é regular.*

Exemplo 5.49

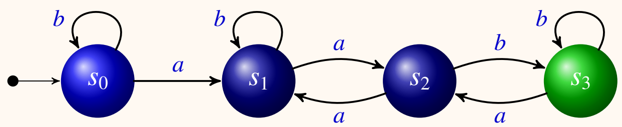
- Sejam $\mathcal{L}_1 = a^*b^*$ e $\mathcal{L}_2 = \{w \in \{a,b\}^* \mid |w|_a = |w|_b\}$.
- Se $\mathcal{L}_2$ é regular, então $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$ também é regular.
- Contudo, $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = \{a^i b^i \mid i \geqslant 0\}$ não é regular.

Exemplo 5.50

$\mathcal{L} = \{a^i b^j \mid i, j \geqslant 0$ e $i \neq j\}$ não é regular, pois $\overline{\mathcal{L}} \cap a^*b^* = \{a^i b^i \mid i \geqslant 0\}$ não é regular.

Pumping Lemma

- *Pumping*: aceitação de cadeias com repetição de subcadeias.
- Considere o seguinte DFA com 4 estados:



- Processamento da cadeia $w = aabb$ ($|w| \geqslant 4$):
  $[s_0, aabb] \longmapsto [s_1, abb] \longmapsto [s_2, bb] \longmapsto [s_3, b] \longmapsto [s_3, \varepsilon]$
- Processamento da cadeia $w = abbab$ ($|w| \geqslant 4$):
  $[s_0, abbab] \longmapsto [s_1, bbab] \longmapsto [s_1, bab] \longmapsto [s_1, ab] \longmapsto [s_2, b] \longmapsto [s_3, \varepsilon]$

Pumping Lemma

Caso geral

- Seja $\mathcal{L}$ uma linguagem regular infinita (contém um número infinito de cadeias).
- $\mathcal{L}$ é aceita por um DFA $M = \langle \Sigma, S, s_0, \delta, F \rangle$, com k estados.
- Se $w \in \mathcal{L}$, $|w| = n \geqslant k$, então pelo menos um estado do DFA é repetido no processamento de w:
  - $w = w_1 \ldots w_i \ldots w_j \ldots w_n$.
  - $[s_0, w_1 \ldots w_i \ldots w_j \ldots w_n] \longmapsto \cdots \longmapsto$

    $[s_q, w_i \ldots w_j \ldots w_n] \longmapsto \cdots \longmapsto$

    $[s_q, w_j \ldots w_n] \longmapsto \cdots \longmapsto$

    $[s_{f-1}, w_n] \longmapsto$

    $[s_f, \varepsilon], \quad s_f \in F$.

Pumping Lemma

Lema 5.51

Seja G o diagrama de estados de um DFA com k estados. Qualquer caminho de comprimento k em G contém um ciclo.

Demonstração.

- Um caminho de comprimento k contém $k + 1$ vértices.
- Como existem apenas k vértices em G, deve existir um vértice s_q que ocorre em pelo menos duas posições do caminho.
- O subcaminho da primeira ocorrência de s_q para a segunda produz o ciclo.

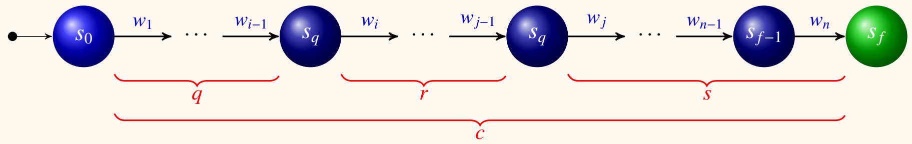
□

Pumping Lemma

Corolário 5.52

Seja G o diagrama de estados de um DFA com k estados e c um caminho de comprimento k ou maior. O caminho c pode ser decomposto em subcaminhos q, r e s, tal que $c = qrs$, o comprimento de qr é menor ou igual a k e r é um ciclo.

- $w = w_1 \dots w_{i-1} w_i \dots w_{j-1} w_j \dots w_n$, $n \geqslant k$.



Pumping Lemma

Teorema 5.53 (*Pumping Lemma* para linguagens regulares)

Seja $\mathcal{L}$ uma linguagem infinita regular. Existe um inteiro p (tamanho crítico ou pumping length), tal que toda cadeia $w \in \mathcal{L}$, com comprimento $|w| \geqslant p$, pode ser escrita como $w = xyz$, com $|xy| \leqslant p$, $|y| > 0$ e $xy^iz \in \mathcal{L}$, $\forall\, i \geqslant 0$.

Pumping Lemma

Teorema 5.53 (*Pumping Lemma* para linguagens regulares)

Seja $\mathcal{L}$ uma linguagem regular que é aceita por um DFA M com k estados. Seja $w \in \mathcal{L}$, com $|w| \geqslant k$. Então, w por ser escrita como $w = xyz$, com $|xy| \leqslant k$, $|y| > 0$ e $xy^iz \in \mathcal{L}$, $\forall\, i \geqslant 0$.

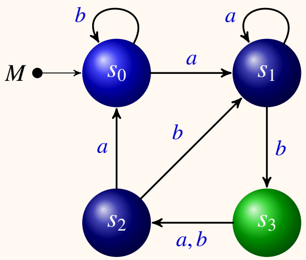
Demonstração.

- Seja $w \in \mathcal{L}$ tal que $n = |w| \geqslant k$. O processamento de w em M gera um caminho c de comprimento n em M.
- Este caminho pode ser quebrado em subcaminhos q, r e s, onde r é um ciclo no diagrama de estados (Corolário 5.52).
- A decomposição de w em x, y e z consiste das cadeias processadas nos subcaminhos q, r e s, respectivamente.

□

Pumping Lemma

- *Pumping*: aceitação de cadeias com repetição de subcadeias.
  - $k = 4$ (quantidade de estados do autômato M).
  - $w = xyz = ababab$, com $x = a$, $y = bab$ e $z = ab$.
  - $xy^3z = a(bab)^3ab = a(bab)(bab)(bab)ab$.



Pumping Lemma

Como provar que uma linguagem $\mathcal{L}$ não é regular?

1. Suponha que $\mathcal{L}$ é regular.
2. Use o *Pumping Lemma* para garantir a existência de p, tal que toda cadeia w, com $|w| \geqslant p$, satisfaz as condições do lema.
3. Encontre uma cadeia $w \in \mathcal{L}$, com $|w| \geqslant p$, que não satisfaça as condições do lema.
   - Análise individual das possibilidades de divisão de w.
4. A existência de w contradiz o *Pumping Lemma*. Logo, $\mathcal{L}$ não é regular.

Pumping Lemma

Esquema de prova por contradição com o *Pumping Lemma*

1. Supor que a linguagem $\mathcal{L}$ é regular.
2. Definir p como o *pumping length* dado pelo lema.
3. Escolher $w \in \mathcal{L}$ (geralmente associada a p).
4. Como $w \in \mathcal{L}$ e $|w| \geqslant p$, o lema garante que w pode ser dividida em 3 partes, $w = xyz$, tal que $|xy| \leqslant p$, $y \neq \varepsilon$ e $xy^iz \in \mathcal{L}$, $i \geqslant 0$.
5. Para todos as valores possíveis de y (dadas as condições do lema), mostrar que $xy^iz \notin \mathcal{L}$.
6. A contradição é mostrada para todos os casos, o que prova que $\mathcal{L}$ não é regular.

- Notas:
  - Escolher uma cadeia w que pode ser bombeada não prova nada!
  - Às vezes, encontrar uma cadeia w apropriada é a parte mais difícil.

Pumping Lemma

Exemplo 5.54

- $\mathcal{L} = \{a^ib^i \mid i \geqslant 0\}$.
- Suponha que $\mathcal{L}$ é regular.
  - $\mathcal{L}$ é aceito por algum DFA M com k estados.
- Seja $w = a^kb^k$. Qualquer decomposição de w em xyz, satisfazendo as condições do *Pumping Lemma*, deve ter a seguinte forma:

$$\overbrace{a^kb^k}^{w} = \overbrace{a^i}^{x} \overbrace{a^j}^{y} \overbrace{a^{k-i-j}b^k}^{z},$$

onde $i + j \leqslant k$ e $j > 0$.

Pumping Lemma

Exemplo 5.54

- $\mathcal{L} = \{a^i b^i \mid i \geqslant 0\}$.
- Portanto, $xy^2z = \overbrace{a^i}^{x}\ \overbrace{a^j a^j}^{y^2}\ \overbrace{a^{k-i-j} b^k}^{z} = a^k a^j b^k$.
- Como $xy^2z \notin \mathcal{L}$, não existe decomposição possível de w que satisfaça as condições do lema.
- Portanto, $\mathcal{L}$ não é regular.

Pumping Lemma

Exemplo 5.55

- $\mathcal{L} = \{0^n 1^n \mid n \geqslant 0\}$.
- Suponha que $\mathcal{L}$ é regular.
- k é o *pumping length* dado pelo lema.
- Seja $w = 0^k 1^k$:
  - $w \in \mathcal{L}$ e $|w| \geqslant k \Rightarrow w = xyz$ e $xy^iz \in \mathcal{L},\ \forall\, i \geqslant 0$.

Pumping Lemma

Exemplo 5.55

- $\mathcal{L} = \{0^n 1^n \mid n \geqslant 0\}$.
- Contradições:
  a) y consiste somente de 0's.
     - A cadeia $xyyz$ tem mais 0's do que 1's e não pertence a $\mathcal{L}$.
  b) y consiste somente de 1's.
     - A cadeia $xyyz$ tem mais 1's do que 0's e não pertence a $\mathcal{L}$.
  c) y consiste de 0's e 1's.
     - A cadeia $xyyz$ pode ter o mesmo número de 0's e 1's, mas com ocorrência de 1's antes de 0's.

Pumping Lemma

Exemplo 5.56

- $\mathcal{L} = \{w \in \{0,1\}^* \mid\ w$ tem igual número de 0's e 1's$\}$.
- Suponha que $\mathcal{L}$ é regular.
- p é o *pumping length* dado pelo lema.
- Seja $w = 0^p 1^p$:
  - $w \in \mathcal{L}$ e $|w| \geqslant p \Rightarrow w = xyz$ e $xy^iz \in \mathcal{L},\ \forall\, i \geqslant 0$.

Pumping Lemma

Exemplo 5.56

- $\mathcal{L} = \{w \in \{0,1\}^* \mid \ w$ tem igual número de 0's e 1's$\}$.
- Contradição????
  a) $x = z = \varepsilon$ e $y = 0^p 1^p$.
    - A cadeia xy^iz sempre tem o mesmo número de 0's e 1's!!!
  b) Se $|xy| \leqslant p$, então y deve consistir só de 0's.
    - A cadeia $xyyz$ tem mais 0's do que 1's.

Pumping Lemma

Exemplo 5.57

- $\mathcal{L} = \{a^i b^j c^j \mid i, j > 0\}$.
- Suponha que $\mathcal{L}$ é regular.
  - $\mathcal{L}$ é aceito por algum DFA M com k estados.
- Pelo *Pumping Lemma*, toda cadeia $w \in \mathcal{L}$, com $|w| \geqslant k$, pode ser decomposta em $w = xyz$, com $|xy| \leqslant k$, $y \neq \varepsilon$ e $xy^iz \in \mathcal{L}$, $\forall\ i \geqslant 0$
- Seja $w = ab^kc^k$. Qualquer decomposição de w em xyz, satisfazendo as condições do *Pumping Lemma*, deve ter uma das seguintes formas:

Pumping Lemma

Exemplo 5.57

- $\mathcal{L} = \{a^i b^j c^j \mid i, j > 0\}$.

1. $a \notin y$:

$$w = ab^kc^k = \overbrace{ab^i}^{x}\overbrace{b^j}^{y}\overbrace{b^{k-i-j}c^k}^{z},$$

onde $i + j \leqslant k - 1$ e $j > 0$.

Portanto, $xy^0z = ab^ib^{k-i-j}c^k = ab^{k-j}c^k \notin \mathcal{L}$.

Pumping Lemma

Exemplo 5.57

- $\mathcal{L} = \{a^i b^j c^j \mid i, j > 0\}$.

2. $a \in y$:

$$z = ab^kc^k = \overbrace{\varepsilon}^{x}\overbrace{ab^i}^{y}\overbrace{b^{k-i}c^k}^{z},$$

onde $i \leqslant k - 1$.

Portanto, $xy^0z = b^{k-i}c^k \notin \mathcal{L}$.

Pumping Lemma

Exemplo 5.57

- $\mathcal{L} = \{a^i b^j c^j \mid i, j > 0\}$.

- Assim, pode-se concluir que $xy^0z \notin \mathcal{L}$.
- Logo, não existe decomposição possível de $w = ab^kc^k$ que satisfaça as condições do lema.
- Portanto, $\mathcal{L}$ não é regular.

Pumping Lemma

Exemplo 5.58

- $\mathcal{L} = \{uvu \mid u, v \in \{0, 1\}^+\}$.

- Suponha que $\mathcal{L}$ é regular.
  - $\mathcal{L}$ é aceito por algum DFA M com k estados.
- Seja $w = 0^n110^n1 \in \mathcal{L}$, com $n \geqslant k$.
  - $u = 0^n1$ e $v = 1$.
- O *Pumping Lemma* garante que $w = uvu = 0^n110^n1$ pode ser decomposta em xyz, com $y \neq \varepsilon$ e $xy^iz \in \mathcal{L}$, $\forall\, i \geqslant 0$.

Pumping Lemma

Exemplo 5.58

- $\mathcal{L} = \{uvu \mid u, v \in \{0, 1\}^+\}$.

- Pelo *Punping Lemma*, dado que $w = xyz$, $|xy| \leqslant k$ e $y \neq \varepsilon$, então $xy^2z \in \mathcal{L}$.
- Mas $xy^2z = 0^{n+|y|}110^n1 \notin \mathcal{L}$, pois o tamanho do sufixo 0^n1 de xy^2z é no máximo igual à quantidade de símbolos 0 no prefixo $0^{n+|y|}1$, ou seja, $|0^{n+|y|}1| > |0^n1|$.
- Logo, a cadeia xy^2z não contém um prefixo que seja igual a um sufixo da cadeia.

Pumping Lemma

Exemplo 5.58

- $\mathcal{L} = \{uvu \mid u, v \in \{0, 1\}^+\}$.

- Assim, não existe decomposição possível de $w = uvu = 0^n110^n1$ em $w = xyz$ que satisfaça as condições do lema.
- Portanto, $\mathcal{L}$ não é regular.

Pumping Lemma

Exemplo 5.59

- $\mathcal{L} = \{a^i \mid i$ é primo$\}$.
- Suponha que $\mathcal{L}$ é regular.
  - $\mathcal{L}$ é aceito por algum DFA M com k estados.
- Pelo *Pumping Lemma*, $w = a^n \in \mathcal{L}$, com $n \geqslant k$ e primo, pode ser decomposta em $w = a^n = xyz$, com $|xy| \leqslant k$, $y \neq \varepsilon$ e $xy^iz \in \mathcal{L}$, $\forall\, i \geqslant 0$.

Pumping Lemma

Exemplo 5.59

- $\mathcal{L} = \{a^i \mid i$ é primo$\}$.
- Se $w' = xy^{n+1}z \in \mathcal{L}$, então $|xy^{n+1}z|$ deve ser um número primo. Mas:

$$\begin{aligned} |w'| = |xy^{n+1}z| &= |xyy^nz| \\ &= |xyz| + |y^n| \\ &= n + n \cdot |y| \\ &= n \cdot (1 + |y|). \end{aligned}$$

Pumping Lemma

Exemplo 5.59

- $\mathcal{L} = \{a^i \mid i$ é primo$\}$.
- Como $n \geqslant k$, $|y| > 0$ e $|xy^{n+1}z| = n \cdot (1 + |y|)$, então $|xy^{n+1}z|$ não é primo.
- Não existe decomposição possível de $w = a^n$ que satisfaça as condições do lema.
- Portanto, $\mathcal{L}$ não é regular.

Pumping Lemma

Exemplo 5.60

- $\mathcal{L} = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w|$ é um quadrado perfeito$\}$.
- Suponha que $\mathcal{L}$ é regular.
  - $\mathcal{L}$ é aceito por algum DFA M.
  - Seja k o número de estados de M.
- Pelo *Pumping Lemma*, toda cadeia $w \in \mathcal{L}$, com $|w| \geqslant k$, pode ser decomposta em subcadeias x, y e z, com $|xy| \leqslant k$, $y \neq \varepsilon$ e $xy^iz \in \mathcal{L}$, $\forall\, i \geqslant 0$.

Pumping Lemma

Exemplo 5.60

- $\mathcal{L} = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w|$ é um quadrado perfeito$\}$.
- Seja w uma cadeia qualquer de comprimento k^2.
  - O *Pumping Lemma* requer a decomposição de w em subcadeias x, y e z, com $0 < |xy| \leqslant k$ e $|y| > 0$, ou seja, $|y| \leqslant k$. Logo,

$$\begin{aligned} k^2 < |xy^2z| &= |xyz| + |y| \\ &= k^2 + |y| \\ &\leqslant k^2 + k \\ &< k^2 + 2.k + 1 = (k+1)^2. \end{aligned}$$

Pumping Lemma

Exemplo 5.60

- $\mathcal{L} = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w|$ é um quadrado perfeito$\}$.
- Como $k^2 < |xy^2z| < (k+1)^2$, então $|xy^2z|$ não é um quadrado perfeito.
- Não existe decomposição possível de w que satisfaça as condições do lema.
- Portanto, $\mathcal{L}$ não é regular.

Cardinalidade da linguagem de um DFA

Teorema 5.61

Seja D um DFA com k estados:

1. *$\mathcal{L}(D) \neq \emptyset$ se, e somente se, D aceita uma cadeia w com $|w| < k$.*
2. *$|\mathcal{L}(D)| = \infty$ se, e somente se, D aceita uma cadeia w com $k \leqslant |w| < 2k$.*

Cardinalidade da linguagem de um DFA

Demonstração.

1. $\mathcal{L}(D) \neq \emptyset$ se, e somente se, D aceita uma cadeia w com $|w| < k$.

$\square$

Cardinalidade da linguagem de um DFA

Demonstração.

1. $\mathcal{L}(D) \neq \emptyset$ se, e somente se, D aceita uma cadeia w com $|w| < k$.
   $\Leftarrow$ Condição óbvia.

$\square$

Cardinalidade da linguagem de um DFA

Demonstração.

1. $\mathcal{L}(D) \neq \emptyset$ se, e somente se, D aceita uma cadeia w com $|w| < k$.
   $\Leftarrow$ Condição óbvia.
   $\Rightarrow$ Seja um DFA D, tal que $\mathcal{L}(D) \neq \emptyset$, e $w \in \mathcal{L}(D)$ tal que $|w|$ é mínimo.
   - Suponha que $|w| \geqslant k$. Pelo *Pumping Lemma*, $w = xyz$ e $xy^iz \in \mathcal{L}(D)$, $\forall\, i \geqslant 0$.
   - Logo $xy^0z = xz \in \mathcal{L}(D)$ contradiz a minimalidade de $|w|$.
   - Portanto, $|w| < k$.

$\square$

Cardinalidade da linguagem de um DFA

Demonstração.

2. $|\mathcal{L}(D)| = \infty$ se, e somente se, D aceita uma cadeia w com $k \leqslant |w| < 2k$.

$\square$

Cardinalidade da linguagem de um DFA

Demonstração.

2. $|\mathcal{L}(D)| = \infty$ se, e somente se, D aceita uma cadeia w com $k \leqslant |w| < 2k$.
   $\Leftarrow$ Assuma que D aceita uma cadeia w com $k \leqslant |w| < 2k$.
   - Então $w = xyz$ e x, y e z satisfazem as condições do *Pumping Lemma*.
   - Portanto, $xy^iz \in \mathcal{L}(D)$, $\forall\, i \geqslant 0$.
   - Logo, $|\mathcal{L}(D)| = \infty$.

$\square$

Cardinalidade da linguagem de um DFA

Demonstração.

2. $|\mathcal{L}(D)| = \infty$ se, e somente se, M aceita uma cadeia w com $k \leqslant |w| < 2k$.
   - $\Rightarrow$ Assuma que $|\mathcal{L}(D)| = \infty$.
     - O número de cadeias de cardinalidade menor que k é finito.
     - Assim, suponha que $w \in \mathcal{L}(D)$, com $|w| \geqslant 2k$ é de comprimento mínimo.
     - Pelo *Pumping Lemma*, $w = xyz$, $|y| \leqslant k$ e $xy^0z = xz \in \mathcal{L}(D)$.
     - Logo $k \leqslant |xy| < 2k$ contradiz a minimalidade de $|w|$.
     - Portanto, $|w| < 2k$.

□

Cardinalidade da linguagem de um DFA

Corolário 5.62

Seja D um DFA. Existe um procedimento que determina se:

1. *$\mathcal{L}(D)$ é vazia,*
2. *$\mathcal{L}(D)$ é finita, ou*
3. *$\mathcal{L}(D)$ é infinita.*

Cardinalidade da linguagem de um DFA

- Procedimento para determinar a cardinalidade da linguagem de um DFA $D = \langle \Sigma, S, s_0, \delta, F \rangle$:
  - Seja $k = |S|$ e $m = |\Sigma|$.
  - $\dfrac{(m^k - 1)}{(m - 1)}$ é o número de cadeias com comprimento menor que k.
  - O Teorema 5.61 determina se $\mathcal{L}(D) = \varnothing$ ao testar cada uma dessas cadeias.
  - Testar todas as cadeias de comprimento entre k e $2k - 1$ responde se a linguagem é finita ou infinita.

Cardinalidade da linguagem de um DFA

Corolário 5.63

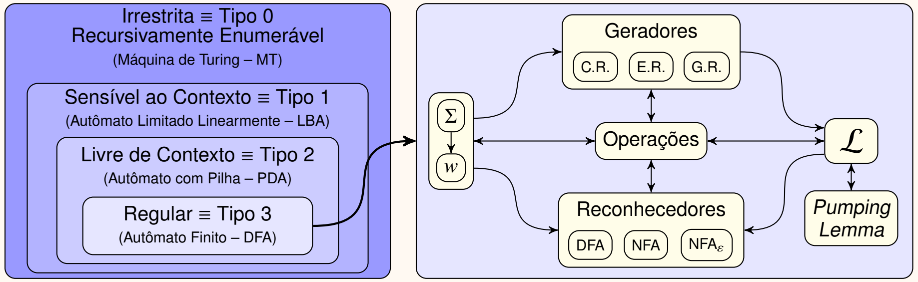
Sejam D_1 e D_2 dois DFA's. Existe um procedimento que determina se D_1 e D_2 são equivalentes.

Demonstração.

- A linguagem $L = (\mathcal{L}(D_1) \cap \overline{\mathcal{L}(D_2)}) \cup (\overline{\mathcal{L}(D_1)} \cap \mathcal{L}(D_2))$ é regular.
- L é vazia se, e somente se, $\mathcal{L}(D_1)$ e $\mathcal{L}(D_2)$ são idênticas.
- Pelo Corolário 5.62 existe um procedimento para determinar se L é vazia, ou seja, se $\mathcal{L}(D_1)$ e $\mathcal{L}(D_2)$ são idênticas.

□

Roteiro



Livros texto

R. P. Grimaldi
Discrete and Combinatorial Mathematics – An Applied Introduction.
Addison Wesley, 1994.

D. J. Velleman
How To Prove It – A Structured Approach.
Cambridge University Press, 1996.

J. E. Hopcroft; J. Ullman.
Introdução Ã Teoria de Autômatos, Linguagens e Computação.
Ed. Campus.

T. A. Sudkamp.
Languages and Machines – An Introduction to the Theory of Computer Science.
Addison Wesley Longman, Inc. 1998.

J. Carroll; D. Long.
Theory of Finite Automata – With an Introduction to Formal Languages.
Prentice-Hall, 1989.

M. Sipser.
Introduction to the Theory of Computation.
PWS Publishing Company, 1997.

H. R. Lewis; C. H. Papadimitriou
Elementos de Teoria da Computação.
Bookman, 2000.