Linguagens Formais e Autômatos

Humberto Longo

Instituto de Informática Universidade Federal de Goiás

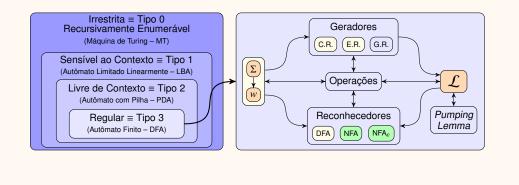
Bacharelado em Ciência da Computação, 2021/1



INF/UFG – LFA 2021/1 – H. Longo

(1-1000

Roteiro



••

INF/UFG - LFA 2021/1 - H. Longo

Autômatos finitos não determinísticos (133 - 168 de 679)

Autômato finito não determinístico

Definição 1.44

► Um Autômato Finito Não Determinístico (*NFA – Nondeterministic Finite Automaton*) é uma quíntupla $N = \langle \Sigma, S, s_0, \delta, F \rangle$, onde:

 Σ : alfabeto de entrada;

 $S \neq \emptyset$: conjunto finito de estados do modelo;

 $s_0 \in S$: estado inicial;

 $\delta: S \times \Sigma \to \mathcal{P}(S)$: função de transição de estados;

 ${\it F} \subseteq {\it S}$: conjunto de estados finais (ou de aceitação).

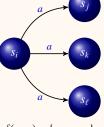
Autômato finito não determinístico

 $\delta(s_i, a) = \emptyset$

Definição 1.45 (Transições em um NFA)











Linguagem de um NFA

Definição 1.46

- ▶ A linguagem $\mathcal{L}(N)$ de um NFA $N = \langle \Sigma, S, s_0, \delta, F \rangle$ é o conjunto de cadeias em Σ^* aceitas por N.
- ▶ Dado o NFA $N = \langle \Sigma, S, s_0, \delta, F \rangle$, então $\mathcal{L}(N) = \{w \mid [s_0, w] \stackrel{*}{\longmapsto} [s_i, \varepsilon] \text{ com } s_i \in F\}$.



INF/UFG - LFA 2021/1 - H. Longo

Diagrama de estados

Definição 1.47

- ▶ O diagrama de estados de um NFA $N = \langle \Sigma, S, s_0, \delta, F \rangle$ é um grafo G, orientado e rotulado, definido pelas condições:
 - 1. os vértices de *G* são os elementos de *S*;
 - 2. os rótulos dos arcos de G são os elementos de Σ ;
 - 3. s_0 é o vértice inicial;
 - 4. *F* é o conjunto de vértices finais;
 - 5. existe um arco, rotulado de a, do vértice s_i ao s_i se $s_i \in \delta(s_i, a)$.



Autômatos finitos não determinísticos (136 - 168 de 679)

INF/UFG - LFA 2021/1 - H. Longo

Autômatos finitos não determinísticos (137 - 168 de 679

Processamento em um NFA

- Uma cadeia w é aceita por um NFA $N = \langle \Sigma, S, s_0, \delta, F \rangle$, se w determina pelo menos um caminho p_w no diagrama de estados de N tal que $\overline{\delta}(s_0, w) \in F$.
- ▶ Uma cadeia pertence à linguagem de um NFA se existe um processamento que a aceita.
 - A existência de outros processamentos que não a aceitam é irrelevante!

Exemplos de NFA's

Exemplo 1.48

$$N_1 = \langle \{a,b\}, \{s_0,s_1,s_2\}, s_0, \delta, \{s_2\} \rangle, \text{ onde: } \begin{cases} \delta & a & b \\ s_0 & \{s_0\} & \{s_0,s_1\} \\ s_1 & \emptyset & \{s_2\} \\ s_2 & \emptyset & \emptyset \end{cases}$$



Exemplo 1.48

- $N_1 = \langle \{a,b\}, \{s_0,s_1,s_2\}, s_0, \delta, \{s_2\} \rangle, \text{ onde: } \begin{cases} \delta & a & b \\ \hline s_0 & \{s_0\} & \{s_0,s_1\} \\ s_1 & \emptyset & \{s_2\} \\ s_2 & \emptyset & \emptyset \end{cases}$
- $\mathcal{L}(N_1) = (a \cup b)^*bb$

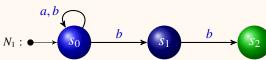
INF/UFG - LFA 2021/1 - H. Longo

Autômatos finitos não determinísticos (140 - 168 de 679)

Exemplos de NFA's

Exemplo 1.48

- $N_1 = \langle \{a,b\}, \{s_0,s_1,s_2\}, s_0, \delta, \{s_2\} \rangle, \text{ onde: } \begin{cases} \delta & a & b \\ s_0 & \{s_0\}, \{s_0,s_1\} \\ s_1 & \emptyset & \{s_2\} \\ s_2 & \emptyset & \emptyset \end{cases}$
- $\mathcal{L}(N_1) = (a \cup b)^*bb$





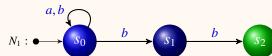
INF/UFG - LFA 2021/1 - H. Longo

Autômatos finitos não determinísticos (141 - 168 de 679)

Exemplos de NFA's

Exemplo 1.48

- $N_1 = \langle \{a,b\}, \{s_0,s_1,s_2\}, s_0, \delta, \{s_2\} \rangle, \text{ onde: } \begin{cases} \delta & a & b \\ \hline s_0 & \{s_0\} & \{s_0,s_1\} \\ s_1 & \emptyset & \{s_2\} \\ s_2 & \emptyset & \emptyset \end{cases}$
- $\mathcal{L}(N_1) = (a \cup b)^*bb$

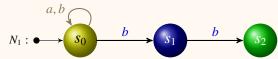


ightharpoonup [s_0 , ababb]

Exemplos de NFA's

Exemplo 1.48

- $N_1 = \langle \{a,b\}, \{s_0,s_1,s_2\}, s_0, \delta, \{s_2\} \rangle, \text{ onde: } \begin{cases} \sigma & a & b \\ s_0 & \{s_0\} & \{s_0,s_1\} \\ s_1 & \emptyset & \{s_2\} \\ s_2 & \emptyset & \emptyset \end{cases}$
- $\mathcal{L}(N_1) = (a \cup b)^*bb$

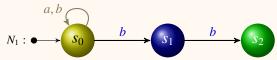


 $ightharpoonup [s_0, ababb] \longmapsto [s_0, babb]$



Exemplo 1.48

- ▶ $N_1 = \langle \{a, b\}, \{s_0, s_1, s_2\}, s_0, \delta, \{s_2\} \rangle$, onde: $\begin{cases} \delta & a & b \\ s_0 & \{s_0\} & \{s_0, s_1\} \\ s_1 & \emptyset & \{s_2\} \\ s_2 & \emptyset & \emptyset \end{cases}$
- $\mathcal{L}(N_1) = (a \cup b)^*bb$



 $ightharpoonup [s_0, ababb] \longmapsto [s_0, abab] \mapsto [s_0, abb]$



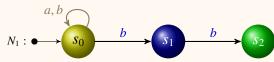
INF/UFG - LFA 2021/1 - H. Longo

Autômatos finitos não determinísticos (144 - 168 de 679)

Exemplos de NFA's

Exemplo 1.48

- $\blacktriangleright \ \mathcal{L}(N_1) = (a \cup b)^*bb$



 $\blacktriangleright [s_0, ababb] \longmapsto [s_0, babb] \longmapsto [s_0, abb] \longmapsto [s_0, bb]$



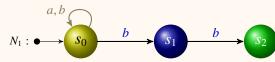
INF/UFG - LFA 2021/1 - H. Longo

Autômatos finitos não determinísticos (145 - 168 de 679)

Exemplos de NFA's

Exemplo 1.48

- $N_1 = \langle \{a,b\}, \{s_0,s_1,s_2\}, s_0, \delta, \{s_2\} \rangle, \text{ onde: } \begin{cases} \delta & a & b \\ s_0 & \{s_0\} & \{s_0,s_1\} \\ s_1 & \emptyset & \{s_2\} \\ s_2 & \emptyset & \emptyset \end{cases}$
- $\mathcal{L}(N_1) = (a \cup b)^*bb$

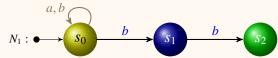


 $\blacktriangleright \ [s_0, ababb] \longmapsto [s_0, babb] \longmapsto [s_0, abb] \longmapsto [s_0, {\color{red}bb}] \longmapsto [s_0, {\color{blue}bb}]$

Exemplos de NFA's

Exemplo 1.48

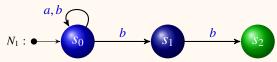
- $N_1 = \langle \{a,b\}, \{s_0,s_1,s_2\}, s_0, \delta, \{s_2\} \rangle, \text{ onde: } \begin{cases} \begin{matrix} b \\ s_0 \\ s_1 \end{matrix} & \begin{matrix} \{s_0\} \\ s_1 \end{matrix} & \begin{matrix} \{s_0,s_1\} \\ s_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} s_0 \end{matrix} & \begin{matrix} \{s_0\} \\ s_2\} \\ \begin{matrix} s_0 \end{matrix} & \begin{matrix} \{s_0\} \\ s_0$
- $\blacktriangleright \ \mathcal{L}(N_1) = (a \cup b)^*bb$



 $\blacktriangleright [s_0, ababb] \longmapsto [s_0, babb] \longmapsto [s_0, abb] \longmapsto [s_0, bb] \longmapsto [s_0, b]$

Exemplo 1.48

- ► $N_1 = \langle \{a, b\}, \{s_0, s_1, s_2\}, s_0, \delta, \{s_2\} \rangle$, onde: $\begin{vmatrix} \delta & a & b \\ s_0 & \{s_0\} & \{s_0, s_1\} \\ s_1 & \emptyset & \{s_2\} \\ s_2 & \emptyset & \emptyset \end{vmatrix}$
- $\mathcal{L}(N_1) = (a \cup b)^*bb$



 $[s_0, ababb] \longmapsto [s_0, babb] \longmapsto [s_0, abb] \longmapsto [s_0, bb] \longmapsto [s_0, b] \longmapsto [s_0, \varepsilon] \longmapsto [s_0]$



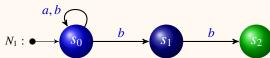
INF/UFG - LFA 2021/1 - H. Longo

Autômatos finitos não determinísticos (148 - 168 de 679)

Exemplos de NFA's

Exemplo 1.48

- $N_1 = \langle \{a,b\}, \{s_0,s_1,s_2\}, s_0, \delta, \{s_2\} \rangle, \text{ onde: } \begin{cases} \delta & a & b \\ \hline s_0 & \{s_0\} & \{s_0,s_1\} \\ s_1 & \emptyset & \{s_2\} \\ s_2 & \emptyset & \emptyset \end{cases}$
- $\blacktriangleright \ \mathcal{L}(N_1) = (a \cup b)^*bb$



- $\blacktriangleright [s_0, ababb] \longmapsto [s_0, babb] \longmapsto [s_0, abb] \longmapsto [s_0, bb] \longmapsto [s_0, b] \longmapsto [s_0, \varepsilon] \longmapsto [s_0]$
- $\blacktriangleright [s_0, ababb] \longmapsto [s_1, abb]$



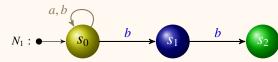
INF/UFG - LFA 2021/1 - H. Longo

Autômatos finitos não determinísticos (149 - 168 de 679)

Exemplos de NFA's

Exemplo 1.48

- $N_1 = \langle \{a,b\}, \{s_0,s_1,s_2\}, s_0, \delta, \{s_2\} \rangle, \text{ onde: } \begin{cases} \delta & a & b \\ \hline s_0 & \{s_0\} & \{s_0,s_1\} \\ s_1 & \emptyset & \{s_2\} \\ s_2 & \emptyset & \emptyset \end{cases}$
- $\mathcal{L}(N_1) = (a \cup b)^*bb$

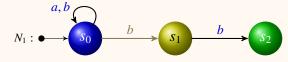


- $\blacktriangleright \ [s_0, ababb] \longmapsto [s_0, babb] \longmapsto [s_0, abb] \longmapsto [s_0, bb] \longmapsto [s_0, b] \longmapsto [s_0, \varepsilon] \longmapsto [s_0]$
- $ightharpoonup [s_0, ababb] \longmapsto [s_1, abb]$

Exemplos de NFA's

Exemplo 1.48

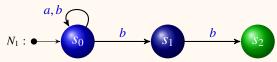
$$N_1 = \langle \{a,b\}, \{s_0,s_1,s_2\}, s_0, \delta, \{s_2\} \rangle, \text{ onde: } \begin{cases} o & a & b \\ s_0 & \{s_0\} & \{s_0,s_1\} \\ s_1 & \emptyset & \{s_2\} \\ s_2 & \emptyset & \emptyset \end{cases}$$



- $\blacktriangleright \ [s_0, ababb] \longmapsto [s_0, babb] \longmapsto [s_0, abb] \longmapsto [s_0, bb] \longmapsto [s_0, b] \longmapsto [s_0, \varepsilon] \longmapsto [s_0]$
- $ightharpoonup [s_0, ababb] \longmapsto [s_1, abb]$

Exemplo 1.48

- ▶ $N_1 = \langle \{a, b\}, \{s_0, s_1, s_2\}, s_0, \delta, \{s_2\} \rangle$, onde: $\begin{cases} \delta & a & b \\ s_0 & \{s_0\} & \{s_0, s_1\} \\ s_1 & \emptyset & \{s_2\} \\ s_2 & \emptyset & \emptyset \end{cases}$
- $\mathcal{L}(N_1) = (a \cup b)^*bb$



- $\blacktriangleright [s_0, ababb] \longmapsto [s_0, babb] \longmapsto [s_0, abb] \longmapsto [s_0, bb] \longmapsto [s_0, b] \longmapsto [s_0, \varepsilon] \longmapsto [s_0]$
- $ightharpoonup [s_0, ababb] \longmapsto [s_1, abb]$



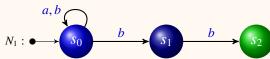
INF/UFG - LFA 2021/1 - H. Longo

Autômatos finitos não determinísticos (152 - 168 de 679)

Exemplos de NFA's

Exemplo 1.48

- $N_1 = \langle \{a,b\}, \{s_0,s_1,s_2\}, s_0, \delta, \{s_2\} \rangle, \text{ onde: } \begin{cases} \delta & a & b \\ \hline s_0 & \{s_0\} & \{s_0,s_1\} \\ s_1 & \emptyset & \{s_2\} \\ s_2 & \emptyset & \emptyset \end{cases}$
- $\mathcal{L}(N_1) = (a \cup b)^*bb$



- $\blacktriangleright [s_0, ababb] \longmapsto [s_0, babb] \longmapsto [s_0, abb] \longmapsto [s_0, bb] \longmapsto [s_0, b] \longmapsto [s_0, \varepsilon] \longmapsto [s_0]$
- $ightharpoonup [s_0, ababb] \longmapsto [s_1, abb]$



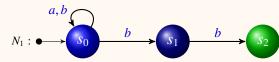
INF/UFG - LFA 2021/1 - H. Longo

Autômatos finitos não determinísticos (153 - 168 de 679)

Exemplos de NFA's

Exemplo 1.48

- $N_1 = \langle \{a,b\}, \{s_0,s_1,s_2\}, s_0, \delta, \{s_2\} \rangle, \text{ onde: } \begin{cases} \delta & a & b \\ s_0 & \{s_0\} & \{s_0,s_1\} \\ s_1 & \emptyset & \{s_2\} \\ s_2 & \emptyset & \emptyset \end{cases}$
- $\mathcal{L}(N_1) = (a \cup b)^*bb$

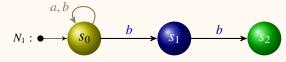


- $\blacktriangleright [s_0, ababb] \longmapsto [s_0, babb] \longmapsto [s_0, abb] \longmapsto [s_0, bb] \longmapsto [s_0, b] \longmapsto [s_0, \varepsilon] \longmapsto [s_0]$
- $ightharpoonup [s_0, ababb] \mapsto [s_1, abb]$
- ightharpoonup [s_0 , ababb]

Exemplos de NFA's

Exemplo 1.48

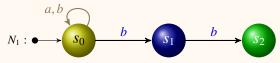
- $N_1 = \langle \{a,b\}, \{s_0,s_1,s_2\}, s_0, \delta, \{s_2\} \rangle, \text{ onde: } \begin{cases} \frac{\delta}{s_0} & \frac{a}{s_0} \\ \frac{\{s_0\}}{s_1} & \{s_0,s_1\} \\ \frac{\{s_0\}}{s_2} & \{s_2\} \\ \frac{\{s_0\}}{s_2} & \{s_0,s_1\} \end{cases}$



- $\blacktriangleright \ [s_0, ababb] \longmapsto [s_0, babb] \longmapsto [s_0, abb] \longmapsto [s_0, bb] \longmapsto [s_0, b] \longmapsto [s_0, \varepsilon] \longmapsto [s_0]$
- $ightharpoonup [s_0, ababb] \longmapsto [s_1, abb]$
- $ightharpoonup [s_0, ababb] \longmapsto [s_0, babb]$

Exemplo 1.48

- $ightharpoonup N_1 = \langle \{a, b\}, \{s_0, s_1, s_2\}, s_0, \delta, \{s_2\} \rangle$, onde:
- $\mathcal{L}(N_1) = (a \cup b)^*bb$



- $\blacktriangleright [s_0, ababb] \longmapsto [s_0, babb] \longmapsto [s_0, abb] \longmapsto [s_0, bb] \longmapsto [s_0, b] \longmapsto [s_0, \varepsilon] \longmapsto [s_0]$
- $ightharpoonup [s_0, ababb] \longmapsto [s_1, abb]$
- $ightharpoonup [s_0, ababb] \mapsto [s_0, abb] \mapsto [s_0, abb]$

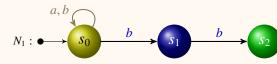


Autômatos finitos não determinísticos (156 - 168 de 679)

Exemplos de NFA's

Exemplo 1.48

- $ightharpoonup N_1 = \langle \{a, b\}, \{s_0, s_1, s_2\}, s_0, \delta, \{s_2\} \rangle$, onde:
- $\mathcal{L}(N_1) = (a \cup b)^*bb$



- $\blacktriangleright [s_0, ababb] \longmapsto [s_0, babb] \longmapsto [s_0, abb] \longmapsto [s_0, bb] \longmapsto [s_0, b] \longmapsto [s_0, \varepsilon] \longmapsto [s_0]$
- $ightharpoonup [s_0, ababb] \longmapsto [s_1, abb]$
- $ightharpoonup [s_0, ababb] \longmapsto [s_0, abb] \longmapsto [s_0, bb]$



INF/UFG - LFA 2021/1 - H. Longo

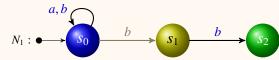
INF/UFG - LFA 2021/1 - H. Longo

Autômatos finitos não determinísticos (157 - 168 de 679)

Exemplos de NFA's

Exemplo 1.48

- $\mathcal{L}(N_1) = (a \cup b)^*bb$

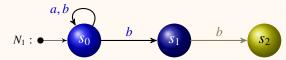


- $\blacktriangleright [s_0, ababb] \longmapsto [s_0, babb] \longmapsto [s_0, abb] \longmapsto [s_0, bb] \longmapsto [s_0, b] \longmapsto [s_0, \varepsilon] \longmapsto [s_0]$
- $ightharpoonup [s_0, ababb] \mapsto [s_1, abb]$
- \blacktriangleright $[s_0, ababb] \longmapsto [s_0, babb] \longmapsto [s_0, abb] \longmapsto [s_0, bb] \longmapsto [s_1, b]$

Exemplos de NFA's

Exemplo 1.48

- $\mathcal{L}(N_1) = (a \cup b)^*bb$

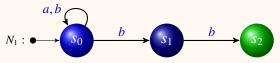


- $[s_0, ababb] \longmapsto [s_0, babb] \longmapsto [s_0, abb] \longmapsto [s_0, bb] \longmapsto [s_0, b] \longmapsto [s_0, \varepsilon] \longmapsto [s_0]$
- $ightharpoonup [s_0, ababb] \longmapsto [s_1, abb]$
- $[s_0, ababb] \longmapsto [s_0, babb] \longmapsto [s_0, abb] \longmapsto [s_0, bb] \longmapsto [s_1, b] \longmapsto [s_2, \varepsilon]$



Exemplo 1.48

- $ightharpoonup N_1 = \langle \{a, b\}, \{s_0, s_1, s_2\}, s_0, \delta, \{s_2\} \rangle$, onde:
- $\mathcal{L}(N_1) = (a \cup b)^*bb$



- $\blacktriangleright [s_0, ababb] \longmapsto [s_0, babb] \longmapsto [s_0, abb] \longmapsto [s_0, bb] \longmapsto [s_0, b] \longmapsto [s_0, \varepsilon] \longmapsto [s_0]$
- $ightharpoonup [s_0, ababb] \longmapsto [s_1, abb]$
- $[s_0, ababb] \longmapsto [s_0, babb] \longmapsto [s_0, abb] \longmapsto [s_0, bb] \longmapsto [s_1, b] \longmapsto [s_2, \varepsilon] \longmapsto [s_2]$



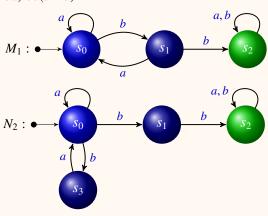
INF/UFG - LFA 2021/1 - H. Longo

Autômatos finitos não determinísticos (160 - 168 de 679)

Exemplos de NFA's

Exemplo 1.49

 $\mathcal{L}(N_2) = (a \cup ba)^*bb(a \cup b)^*.$



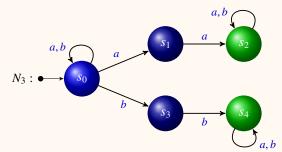
INF/UFG - LFA 2021/1 - H. Longo

Autômatos finitos não determinísticos (161 - 168 de 679)

Exemplos de NFA's

Exemplo 1.50

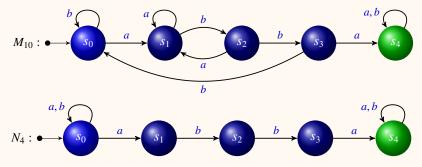
 $ightharpoonup \mathcal{L}(N_3) = \{w \in \{a,b\}^+ \mid w \text{ cont\'em } aa \text{ ou } bb\}.$



Exemplos de NFA's

Exemplo 1.51

 $\mathcal{L}(N_4) = \{ w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ cont\'em } abba \}.$





Transições vazias

Definição 1.52

▶ Uma transição vazia não processa qualquer símbolo da cadeia de entrada.

Definição 1.53

▶ NFA- ε é a classe de NFA's que utilizam transições vazias.

Definição 1.54

▶ Um NFA- ε é uma quíntupla $N = \langle \Sigma, S, s_0, \delta, F \rangle$, onde: Σ, S, s_0 e F seguem a mesma definição de NFA. A função de transição é $\delta : S \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \rightarrow \mathcal{P}(S)$.



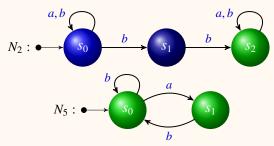
INF/UFG - LFA 2021/1 - H. Longo

Autômatos finitos não determinísticos (164 - 168 de 679)

Exemplos de NFA- ε 's

Exemplo 1.55

- ► Considere os NFA's N_2 e N_5 , tais que:
 - $\mathcal{L}(N_2) = (a \cup b)^*bb(a \cup b)^*.$





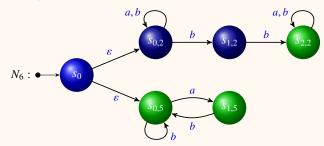
INF/UFG - LFA 2021/1 - H. Longo

Autômatos finitos não determinísticos (165 - 168 de 679)

Exemplos de NFA- ε 's

Exemplo 1.56

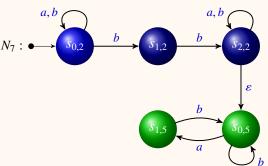
▶ NFA- ε N_6 tal que $\mathcal{L}(N_6) = \mathcal{L}(N_2) \cup \mathcal{L}(N_5)$:



Exemplos de NFA- ε 's

Exemplo 1.57

► NFA- ε N_7 tal que $\mathcal{L}(N_7) = \mathcal{L}(N_2)\mathcal{L}(N_5)$:

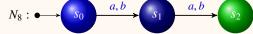




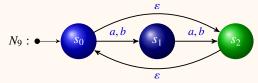
Exemplos de NFA- ε 's

Exemplo 1.58

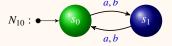
▶ NFA N_8 que aceita cadeias de comprimento dois sobre o alfabeto $\{a,b\}$:



▶ NFA- ε N_9 que aceita cadeias de comprimento par sobre o alfabeto $\{a,b\}$:



 \blacktriangleright Outro NFA que aceita cadeias de comprimento par sobre o alfabeto $\{a,b\}$:





INF/UFG - LFA 2021/1 - H. Longo

Autômatos finitos não determinísticos (168 - 168 de 679)

Livros texto



Discrete and Combinatorial Mathematics - An Applied Introduction. Addison Wesley, 1994.



How To Prove It – A Structured Approach. Cambridge University Press, 1996.



Introdução à Teoria de Autômatos, Linguagens e Computação.



T. A. Sudkamp. Languages and Machines – An Introduction to the Theory of Computer Science.



J. Carroll; D. Long.
Theory of Finite Automata – With an Introduction to Formal Languages.



M. Sipser.

Introduction to the Theory of Computation.
PWS Publishing Company, 1997.



H. R. Lewis; C. H. Papadimitriou Elementos de Teoria da Computação.

Bookman, 2000.



INF/UFG - LFA 2021/1 - H. Longo Bibliografia (679 - 679 de 679)