

TALLINNA TEHNIKAÜLIKOOL

Infotehnoloogia teaduskond

Tarkvarateaduse instituut

Tõnn Talvik 132619IAPM

EFEKTIANALÜÜSIDEL PÕHINEVATE PROGRAMMITEISENDUSTE SERTIFITSEERIMINE

Magistritöö

Juhendaja: Tarmo Uustalu
Professor

Tallinn 2017

Autorideklaratsioon

Kinnitan, et olen koostanud antud lõputöö iseseisvalt ning seda ei ole kellegi teise poolt varem kaitsmisele esitatud. Kõik töö koostamisel kasutatud teiste autorite tööd, olulised seisukohad, kirjandusallikatest ja mujalt pärinevad andmed on töös viidatud.

Autor: Tõnn Talvik

8. mai 2017

Annotatsioon

Tüübi- ja efektisüsteemid võimaldavad programmide dünaamilist käitumist analüüsida staatiliste tehnikatega. Analüüsi tulemust saab kasutada näiteks programmi optimeerimiseks.

Selle töö eesmärgiks on luua sõltuvate tüüpidega programmeerimiskeeles Agda idee tõestuse (*proof-of-concept*) raamistu efektide analüüsiks ja nendel põhinevateks programmi teisendusteks.

Töös vaadeldakse esimese näitekeelena tüübitud lambdaarvutust, mida on laiendatud eranditega. Keele termidele tuletatakse tüübid ning hinnatakse nende võimalikku efekti. Viimaste võrdlemiseks näidatakse, et hinnangud rahuldavad gradeeritud monaadi omadusi. Defineeritakse keele semantika ning tuuakse mõned programmihihtsustused tõestades, et need teisendused ei muuda programmi semantilist interpretatsiooni.

Teise näitena kasutatakse mittedeterministlikku keelt. Efektina hinnatakse programmi võimalike tulemuste arvu. Defineeritakse vastav gradeeritud monaad ja viiakse läbi tüübi- ja efektituletus. Näitekeelele antakse semantika ning tuuakse programmi teisenduste näited, ühtlasi tõestades viimaste korrektsust.

Lõputöö on kirjutatud eesti keeles ning sisaldab teksti 38 leheküljel, 4 peatükki, 31 joonist.

Abstract

Certification of effect-analysis based program transformations

Type-and-effect systems are used to statically analyze program dynamic behaviour. This allows to perform program optimizations.

The goal of this thesis is to give a proof-of-concept framework for effect-analysis based program transformations. The work is carried out in a dependently typed functional programming language called Agda.

The first example language considered is a typed lambda calculus extended with exceptions. The starting point is raw terms for which types and effects can be inferred. Computation types are defined using a graded monad specifically adapted to capture exception effects. The language semantics is given for refined terms. Structural transformations, i.e. weakening and contraction, are described next. Using those, a few example program optimizations, e.g. dead computation and duplicate computation removal, are defined. These transformations are proved to be correct using Agda as metalanguage.

The second example considers a language which supports non-deterministic choice. Again, starting from raw terms, their types and effects can be inferred. The type of upper bounded vectors is defined to define the semantics of the non-deterministic language. A suitable graded monad is also defined. Proven optimizing transformations include failed computation and duplicate computation removal. Since the base language is the same as for exceptions, much of the framework developed for exceptions can be reused.

The thesis is in Estonian and contains 38 pages of text, 4 chapters, 31 figures.

Sisukord

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Sissejuhatus | 8 |
| 2 | Erandid | 9 |
| 2.1 | Eranditega keel | 9 |
| 2.2 | Erandite gradeering | 12 |
| 2.2.1 | Erandite efektid | 12 |
| 2.2.2 | Eeljärjestatud monoid | 14 |
| 2.2.3 | Gradeeritud monaad | 15 |
| 2.3 | Tüübi- ja efektituletus | 17 |
| 2.3.1 | Alamtüübid | 17 |
| 2.3.2 | Rafineeritud keel | 19 |
| 2.3.3 | Termide tüübituletus | 21 |
| 2.3.4 | Termide rafineerimine | 23 |
| 2.4 | Semantika | 27 |
| 2.5 | Optimisatsioonid | 31 |
| 3 | Mittedeterminism | 37 |
| 3.1 | Mitte-deterministlik keel | 37 |
| 3.2 | Mitte-determinismi gradeering | 37 |
| 3.3 | Termide tüübituletus ja rafineerimine | 40 |
| 3.4 | Semantika | 42 |
| 3.5 | Optimisatsioonid | 42 |
| 4 | Kokkuvõte | 45 |

Jooniste loetelu

| | | |
|----|---|----|
| 1 | Eranditega keele tüübid. | 10 |
| 2 | Eranditega keele väärtus- ja arvutustermid. | 10 |
| 3 | Näidisavaldised eranditega keeles. | 11 |
| 4 | Erandite efektid ja operatsioonid nendel. | 12 |
| 5 | Erandite efektide järjestus. | 13 |
| 6 | Eeljärjestatud monoid. | 14 |
| 7 | Gradeeritud monaad. | 16 |
| 8 | Osa erandite gradeeritud monaadi definitsioonist. | 17 |
| 9 | Väärtus- ja arvutustüüpide alamtüüpimine. | 18 |
| 10 | Eranditega keele rafineeritud termid. | 20 |
| 11 | Eranditega keele väärtustermide tüübituletus. | 22 |
| 12 | Eranditega keele arvutustermide tüübituletus. | 24 |
| 13 | Väärtus- ja arvutustermide rafineerimiste tüübikonstruktorid. | 24 |
| 14 | Eranditega keele väärtustermide rafineerimine. | 26 |
| 15 | Eranditega keele arvutustermide rafineerimine, I osa. | 28 |
| 16 | Eranditega keele arvutustermide rafineerimine, II osa. | 29 |
| 17 | Väärtus-, arvutustüüpide ja konteksti semantika. | 30 |
| 18 | Eranditega keele väärtustermide semantika. | 30 |
| 19 | Eranditega keele arvutustermide semantika. | 32 |
| 20 | Konteksti lühendamine ja termide lõdvendamine. | 33 |
| 21 | Konteksti dubleerimine ja termide kontraheerimine. | 34 |
| 22 | Erandite monaadi spetsiifilised, efekti suhtes geneerilised optimisatsioonid. | 35 |
| 23 | Monaadi spetsiifilised, efekti-spetsiifilised optimisatsioonid. | 36 |
| 24 | Mittedeterministliku keele arvutustermid. | 38 |

| | | |
|----|---|----|
| 25 | Mitte-determinismi eeljärjestatud monoid. | 39 |
| 26 | Ülalt tõkestatud pikkusega vektor. | 39 |
| 27 | Mitte-determinismi gradeeritud monaad. | 40 |
| 28 | Mitte-deterministliku keele tüübituletus ja rafineerimine. | 41 |
| 29 | Mitte-deterministliku keele semantika. | 42 |
| 30 | Mitte-determinismi monaadi spetsiifilised, efektist sõltumatud teisendused. | 43 |
| 31 | Mitte-determinismi efekti spetsiifilised optimisatsioonid. | 44 |

1 Sissejuhatus

Efektisüsteemid on staatilised programmianalüüsid, mis hindavad arvutuste võimalikke efekte. See võimaldab mh viia läbi optimeerivaid programmeerimisprogramme. Näiteks saab jälgida, milliseid mälupesasid loetakse ja kirjutatakse, ning selle teadmise alusel eemaldada “surnud” (*dead computation*) või liiasid arvutused (*duplicated computation*) [1].

Agda on sõltuvate tüüpidega funktsionaalne programmeerimiskeel ja interaktiivne tõestusassistents, mis põhineb intuitsionistlikul tüübiteoorial. Selles kirjutatud programm on tõlgendatav ja automaatselt kontrollitav kui matemaatiline tõestus.

Selle töö eesmärgiks on realiseerida programmeerimiskeeles Agda idee tõendamise (*proof-of-concept*) raamistu efektide analüüsiks ja nendele põhinevateks programmeerimisprogrammidest. Samas raamistus peab saama näidata, et need teisendused on korrektsed.

Agda on eksperimentaalne keel ja sedalaadi ülesande realiseerimine selles keeles on uudne. Uurimuse käigus tahame teada, kas niisugune töö on teostatav mõistliku vaevaga, kui õppimisele kuluv aeg maha arvata.

Teoreetilisel tasemel on uudne, et efektide analüüsid ja optimisatsioonid toimivad keele juures, mis toetab andmetüüpe, milleks antud töös on naturaalarvud lihtsaima näitena.

Teises peatükis realiseeritakse näitekeel, mille efektiks on erandid. Järgmiseks defineeritakse selliste efektide hindamine. Seejärel arendatakse näitekeelele tüübisüsteem, mille käigus rafineeritakse keelt lisades selle arvutustele efektid ja tüübid. Edasi antakse rafineeritud keele semantika ning tuuakse mõningased programmeerimisprogrammid, näidates, et semantiliselt on algne ja teisendatud programm ekvivalentsed.

Kolmandas peatükis tuuakse efektianalüüs ja optimeerimise näited mittedeterminismi toetava keele kohta, kasutades ära teises peatükis arendatud raamistut.

Töö käigus valminud lähtekood on tulemuste reprodutseerimiseks allalaetav aadressilt <https://github.com/tonn-talvik/msc>. Lähtekoodi kompileerimiseks on kasutatud Agda versiooni 2.5.1.1 koos standardteegi versiooniga 0.12. Mainitud tarkvarapaketid on tasuta installeeritavad Ubuntu 16.04 LTS või teistest varamutest.

2 Erandid

Selles töös vaadeldavaks baaskeeleks on tüübitud lambdaarvutus koos tõeväärtuste, naturaalarvude ja paaridega. Selles peatükis vaadeldakse keele laiendust eranditega.

Järgnevates alapeatükkides defineeritakse selline keel Agdas, konstrueeritakse tüübituletus koos efektianalüüsiga, määratletakse hästi tüübitud avaldiste semantika ning tuuakse mõned optimeerivate programmiteisenduste näited. Ühtlasi näidatakse teisenduste korraksust.

2.1 Eranditega keel

Näitekeele grammatika saab esitada Backus-Naur kujul (BNF) järgnevalt, kus t on tüübid, v on väärtused ja c on arvutused:

$$\begin{aligned} t &::= \text{nat} \mid \text{bool} \mid t \bullet t \mid t \Rightarrow e / t & (e \in E) \\ v &::= \text{TT} \mid \text{FF} \mid \text{ZZ} \mid \text{SS } v \mid \langle v, v \rangle \mid \text{FST } v \mid \text{SND } v \\ &\mid \text{VAR } n \mid \text{LAM } t \ c & (n \in \mathbb{N}) \\ c &::= \text{VAL } v \mid \text{FAIL } t \mid \text{TRY } c \text{ WITH } c \\ &\mid \text{IF } v \text{ THEN } c \text{ ELSE } c \mid v \$ v \mid \text{PREC } v \ c \ c \mid \text{LET } c \text{ IN } c \end{aligned}$$

Agdas vastastikku defineeritud väärtus- ja arvutustüübid on toodud joonisel 1. Lubatud väärtustüübid $V\text{Type}$ on naturaalarvud, tõeväärtused, teiste väärtustüüpide korrutised ja tüübitud lambda-arvutused. Arvutustüüpideks on efektiga E annoteeritud väärtustüübid. Efekt E on defineeritud alapeatükis 2.2.1.

Vastastikku defineeritud väärtus- ja arvutustermid on toodud joonisel 2. Termide konstruktorite nimetamisel on kasutatud suurtähti vältimaks võimalikke nimekonflikte Agda standardfunktsioonidega. Järgnevalt on selgitatud väärtustermi $v\text{Term}$ konstruktorite tähendust.

- TT ja FF koostavad vastavalt tõeväärtused tõene ja väär.

```

mutual
  data VType : Set where
    nat : VType
    bool : VType
     $\bullet$  : VType → VType → VType
     $\Rightarrow$  : VType → CType → VType

  data CType : Set where
     $\_/\_$  : E → VType → CType

```

Joonis 1: Eranditega keele tüübid.

```

mutual
  data vTerm : Set where
    TT FF : vTerm
    ZZ : vTerm
    SS : vTerm → vTerm
     $\langle \_, \_ \rangle$  : vTerm → vTerm → vTerm
    FST SND : vTerm → vTerm
    VAR :  $\mathbb{N}$  → vTerm
    LAM : VType → cTerm → vTerm

  data cTerm : Set where
    VAL : vTerm → cTerm
    FAIL : VType → cTerm
    TRY_WITH_ : cTerm → cTerm → cTerm
    IF_THEN_ELSE_ : vTerm → cTerm → cTerm → cTerm
     $\_ \$ \_$  : vTerm → vTerm → cTerm
    PREC : vTerm → cTerm → cTerm → cTerm
    LET_IN_ : cTerm → cTerm → cTerm

```

Joonis 2: Eranditega keele väärtus- ja arvutustermid.

- ZZ koostab naturaalarvu 0 ja konstruktor SS oma argumendist järgneva naturaalarvu.
- $\langle _, _ \rangle$ koostab oma argumentide paari.
- FST ja SND koostavad vastavalt argumendina antud korrutise esimese ja teise projektsiooni.
- VAR koostab de Bruijn'i indeksiga määratud muutuja.
- LAM on funktsiooniabstraktsiooni konstruktor, seejuures funktsiooni parameetri väärtustüüp on eksplitsiitselt annoteeritud. Funktsiooni kehaks on arvutusterm üle täiendava muutujaga laiendatud skoobi.

Järgnevalt on selgitatud arvutustermi cTerm konstruktorite (jn 2) tähendust ja vastavas arvutuses kätketud efekti.

```

ADD : vTerm
ADD = LAM nat
      (VAL (LAM nat
              (PREC (VAR 0)
                     (VAL (VAR 1))
                     (VAL (SS (VAR 0)))))))

ADD-3-and-4 : cTerm
ADD-3-and-4 = LET ADD $ (SS (SS (SS ZZ)))
              IN VAR 0 $ (SS (SS (SS (SS ZZ))))

BAD-ONE : cTerm
BAD-ONE = ZZ $ TT

```

Joonis 3: Näidisavaldised eranditega keeles.

- VAL tähistab õnnestunud arvutust, seejuures arvutuse tulemuseks on väärtustermiga antud konstruktori argument.
- FAIL tähistab arvutuse, mille väärtustüüp on eksplitsiitselt annoteeritud, ebaõnnestumist.
- TRY_WITH_ on erandikäsitlejaga arvutus: kogu arvutuse tulemuseks on esimese argumendina antud termi arvutus, kui see õnnestub, vastasel korral aga teise argumendina antud termi arvutus.
- IF_THEN_ELSE_ on valikuline arvutus: vastavalt väärtustermi tõeväärtusele on tulemuseks kas esimese (tõene haru) või teise (väär haru) arvutustermiga antud arvutus.
- _\$_ on esimese väärtustermiga antud funktsiooni rakendamine teise väärtustermiga antud väärtusele, kusjuures rakendamise efektiks on funktsiooni kehas peituv efekt.
- PREC on primitiivne rekursioon, mille korduste arv on määratud väärtustermiga. Esimene arvutusterm vastab rekursiooni baasile ja teine sammule, kusjuures sammuks on akumulaatori ja sammuloenduri parameetritega funktsioon. Kogu arvutuse efekt vastab kõigi osaarvutuste järjestikku sooritamisele.
- LET_IN_ lisab esimese arvutustermiga antud väärtuse teise arvutustermi kontekstis esimeseks muutujaks. Arvutuse efekt vastab osaarvutuste järjestikku sooritamisele.

Joonisel 3 on toodud kahe naturaalarvu liitmise funktsioon väärtustermi `ADD` ning naturaalarvude 3 ja 4 liitmine arvutustermi `ADD-3-and-4`. Lisaks on toodud näide arvutustermist `BAD-ONE`, mida annab konstrueerida, kuid mis ei oma sisu: naturaalarvu null ei saa rakendada tõeväärtusele tõene. Sellised halvasti tüübitud termid tuvastatakse tüübituletusega (alaptk 2.3).

```

data Exc : Set where
  err : Exc
  ok  : Exc
  errok : Exc

_·_ : Exc → Exc → Exc
ok · e = e
err · e = err
errok · err = err
errok · ok = errok
errok · errok = errok

_◇_ : Exc → Exc → Exc
err ◇ e' = e'
ok ◇ _ = ok
errok ◇ ok = ok
errok ◇ _ = errok

```

Joonis 4: Erandite efektid ja operatsioonid nendel.

2.2 Erandite gradeering

Selles alapeatükis defineeritakse erandite efekti hinnangute hulk, operatsioonid hinnangutel ja hinnangute omavaheline järjestus. Sellega võimaldatakse arvutustüüpide alamtüüpimine. Ühtlasi näidatakse, et selline hindamine rahuldab eeljärjestatud monoidi ja gradeeritud monaadi omadusi, millele tuginevad semantika (alaptk 2.4) ja optimisatsioonid (alaptk 2.5).

2.2.1 Erandite efektid

Erandite efektide tüüp `Exc` on toodud joonisel 4: konstruktor `err` vastab arvutuse ebaõnnestumisele, konstruktor `ok` arvutuse õnnestumisele ja konstruktor `errok` arvutusele, mille kohta pole teada, kas see õnnestub või mitte.

Efektide korrutamise tehe `_·_` (jn 4) vastab kahe arvutuse järjestikusele sooritamisele. Kui esimene osaarvutus õnnestub, siis kogu arvutuse efekt on määratud teise osaarvutuse efektiga. Kui üks osaarvutustest ebaõnnestub, siis ebaõnnestub kogu arvutus. Ülejäänud juhtudel puudub teadmine arvutuse õnnestumisest või ebaõnnestumisest. Efektide korrutamist kasutatakse `LET_IN_` arvutuse tüüpimisel (alaptk 2.1).

Erandikäsitleja võib parandada kogu arvutuse efekti hinnangut. Põhiarvutuse ja erandikäsitleja efektide kombineerimise tehe `_◇_` on defineeritud joonisel 4. Kui põhiarvutus ebaõnnestub, siis on kogu arvutuse efekt määratud erandikäsitleja efektiga. Põhiarvutuse

```

data _ $\sqsubseteq$ _ : Exc → Exc → Set where
   $\sqsubseteq$ -refl : {e : Exc} → e  $\sqsubseteq$  e
  err $\sqsubseteq$ errok : err  $\sqsubseteq$  errok
  ok $\sqsubseteq$ errok : ok  $\sqsubseteq$  errok

 $\sqsubseteq$ -trans : {e e' e'' : Exc} → e  $\sqsubseteq$  e' → e'  $\sqsubseteq$  e'' → e  $\sqsubseteq$  e''
 $\sqsubseteq$ -trans  $\sqsubseteq$ -refl q = q
 $\sqsubseteq$ -trans err $\sqsubseteq$ errok  $\sqsubseteq$ -refl = err $\sqsubseteq$ errok
 $\sqsubseteq$ -trans ok $\sqsubseteq$ errok  $\sqsubseteq$ -refl = ok $\sqsubseteq$ errok

_ $\sqcup$ _ : Exc → Exc → Exc
_ $\sqcap$ _ : Exc → Exc → Maybe Exc
 $\sqcup$ -sym : (e e' : Exc) → e  $\sqcup$  e'  $\equiv$  e'  $\sqcup$  e
 $\sqcap$ -sym : (e e' : Exc) → e  $\sqcap$  e'  $\equiv$  e'  $\sqcap$  e

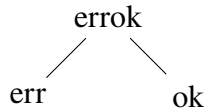
lub : (e e' : Exc) → e  $\sqsubseteq$  (e  $\sqcup$  e')
glb : (e e' : Exc) {e'' : Exc} → e  $\sqcap$  e'  $\equiv$  just e'' → e''  $\sqsubseteq$  e
lub-sym : (e e' : Exc) → e  $\sqsubseteq$  (e'  $\sqcup$  e)

```

Joonis 5: Erandite efektide järjestus.

õnnestumisel on kogu arvutus õnnestunud ja erandikäsitlejat ei arvutata. Kui põhiarvutuse õnnestumine pole teada, aga erandikäsitleja kindlasti õnnestub, siis õnnestub ka kogu arvutus. Ülejäänud juhtudel pole teada, kas kogu arvutus tervikuna õnnestub või mitte. Nii-sugune efekti hinnangu parandus leiab aset TRY_WITH_ arvutuse tüüpimisel (alaptk 2.1).

Hinnangute hulga Exc konstruktorid moodustavad järgneva võre:



Hinnangute osaline järjestusseos \sqsubseteq on toodud joonisel 5. See seos on definitsiooni järgi refleksiivne \sqsubseteq -refl. Transitiivsus \sqsubseteq -trans on tõestatav argumentide kuju juhtude läbivaatuse abil. Transitiivsuse seost on võimalik kodeerida järjestusseose konstruktorina, kuid see pole otstarbekas, kuna hilisemates tõestustes tekivad sellest täiendavad juhtumid, mida peab analüüsima.

Loomulikul viisil saab defineerida kahe erandi hinnangu ülemise ja alumise raja ning näidata nende sümmeetrilisust. Lihtsuse huvides on toodud ainult vastavad tüübisignatuurid, aga mitte definitsioonid (jn 5). Kuna kahel hinnangul ei pruugi alumist raja leiduda, siis on \sqcap tulemus mähitud Maybe monaadi.

```

record OrderedMonoid : Set where
  field
    E : Set
    _·_ : E → E → E
    i : E

    lu : {e : E } → i · e ≡ e
    ru : {e : E } → e ≡ e · i
    ass : {e e' e'' : E} → (e · e') · e'' ≡ e · (e' · e'')

    _⊆_ : E → E → Set
    ⊆-refl : {e : E} → e ⊆ e
    ⊆-trans : {e e' e'' : E} → e ⊆ e' → e' ⊆ e'' → e ⊆ e''

    mon : {e e' e'' e''' : E} → e ⊆ e'' → e' ⊆ e''' → e · e' ⊆ e'' · e'''

```

Joonis 6: Eeljärjestatud monoid.

2.2.2 Eeljärjestatud monoid

Hulka E , millel on defineeritud korrutamine $_·_$ ja ühikelement i , st i on ühik korrutamise suhtes nii vasakult lu kui ka paremalt ru , ning korrutamine on assotsiatiivne ass , nimetatakse monoidiks. Kui sellel hulgal on määratud kahekohaline seos $_⊆_$, mis on refleksiivne $⊆-refl$ ja transitiivne $⊆-trans$, ning kehtib korrutamise monotoonsus mon , siis on tegemist eeljärjestatud monoidiga. Joonisel 6 on toodud eeljärjestatud monoidi kirje tüüp Agdas.

Saab näidata, et erandite efekti hinnag Exc , korrutamine $_·_$, mille ühikuks on konstruktor ok , ja osaline järjestusseos $_⊆_$ moodustavad eeljärjestatud monoidi. Vasakühiku tõestus tuleneb vahetult korrutamise definitsioonist. Pareühiku tõestamisel tuleb teostada varjatud argumendi konstruktori kuju juhtude läbivaatus ja seejärel lähtuda korrutamise definitsioonist. Assotsiatiivsus tõestatakse sarnaselt kasutades juhtude läbivaatust ja korrutamise definitsiooni. Monotoonsuse tõestuses vaadatakse läbi nii võimalikke efekte kui ka nendevahelisi järjestusseoseid. Kõik mainitud tõestused on toodud töö käigus valminud lähtekoodis.

2.2.3 Gradeeritud monaad

Monaad on järgnev kolmik: tüübikonstruktor T , ühik η (Haskell'i "return") ja nn Kleisli laiendamise operatsioon ehk sidumine bind ¹.

$$\begin{aligned} T &: \text{Set} \rightarrow \text{Set} \\ \eta &: \{X : \text{Set}\} \rightarrow X \rightarrow T X \\ \text{bind} &: \{X Y : \text{Set}\} \rightarrow (X \rightarrow T Y) \rightarrow (T X \rightarrow T Y) \end{aligned}$$

Seejuures peavad olema täidetud kolm monaadi seadust: vasakühik mlaw1 , paremühik mlaw2 ja assotsiatiivsus mlaw3 .

$$\begin{aligned} \text{mlaw1} &: \{X Y : \text{Set}\} \rightarrow (f : X \rightarrow T Y) \rightarrow (x : X) \rightarrow \text{bind } f (\eta x) \equiv f x \\ \text{mlaw2} &: \{X : \text{Set}\} \rightarrow (c : T X) \rightarrow c \equiv \text{bind } \eta c \\ \text{mlaw3} &: \{X Y Z : \text{Set}\} \rightarrow (f : X \rightarrow T Y) \rightarrow (g : Y \rightarrow T Z) \rightarrow (c : T X) \rightarrow \\ &\quad \text{bind } g (\text{bind } f c) \equiv \text{bind } (\text{bind } g \circ f) c \end{aligned}$$

Joonisel 7 on toodud eeljärjestatud monoidiga OM gradeeritud monaadi kirje tüüp Agdas . Efektiga E parametrizeeritud tüübikonstruktor T koos ühikuga η ja sidumistehtega bind moodustab gradeeritud monaadi. Neelduvusega sub saab kahe efekti järjestatuse tõestusele tuginedes luua mingist monaadilisest väärtusest vastavalt suurema efektiga monaadilise väärtuse. Neelduvus sub peab olema refleksiivne sub-refl , transitiivne sub-trans ja sidumise suhtes monotoonne sub-mon . Samuti peavad olema täidetud gradeeritud versioonid monaadi seadustest mlaw1 , mlaw2 ja mlaw3 . Viimaste juures on kasutatud neelduvuse erijuhtu sub-eq efektide võrdsuse korral pääsemaks mööda Agda tüübisüsteemist: ekvivalentsust ei saa tõestada eri tüüpi elementidele.

Erandite järjestatud monoidi jaoks saab defineerida gradeeritud monaadi. Joonisel 8 on toodud olulisemad definitsioonid. Tüübikonstruktor T on defineeritud erandi hinnangu argumenti kuju järgi: veale err vastab üheelemendile hulk \top , õnnestumisele ok parameetriga antud hulk X ja hinnangule errok vastab hulk $\text{Maybe } X$. Ühikuks η on identsusfunktsioon. Sidumise bind definitsioonil on analüüsitud kummagi efekti kuju ning vajadusel ka monaadilise väärtuse kuju. Neelduvus sub annab efektide refleksiivsuse $\sqsubseteq\text{-refl}$ korral monaadilise väärtuse c enda. Kui järjestuse tõestuse esimeseks efektis on err , siis vastavalt tüübikonstruktori definitsioonile saab argument olla hulga \top ainus element tt , millele pannakse vastavusse nothing . Kui aga efektiks on ok , siis vastav väärtus x mähitakse $\text{Maybe } X$ hulka.

¹Antud töös on bind -i argumentide järjekord vahetunud võrreldes tavapärase käsitlusega.

```

subeq : {E : Set} → {T : E → Set → Set} → {e e' : E} → {X : Set} →
  e ≡ e' → T e X → T e' X
subeq refl p = p

record GradedMonad : Set where
  field
    OM : OrderedMonoid
  open OrderedMonoid OM
  field

    T : E → Set → Set
    η : {X : Set} → X → T i X
    bind : {e e' : E} {X Y : Set} → (X → T e' Y) → (T e X → T (e · e') Y)

    sub : {e e' : E} {X : Set} → e ⊆ e' → T e X → T e' X

    sub-mon : {e e' e'' e''' : E} {X Y : Set} →
      (p : e ⊆ e'') → (q : e' ⊆ e''') →
      (f : X → T e' Y) → (c : T e X) →
      sub (mon p q) (bind f c) ≡ bind (sub q ∘ f) (sub p c)

    sub-eq : {e e' : E} {X : Set} → e ≡ e' → T e X → T e' X
    sub-eq = subeq {E} {T}

  field
    sub-refl : {e : E} {X : Set} → (c : T e X) → sub ⊆-refl c ≡ c
    sub-trans : {e e' e'' : E} {X : Set} →
      (p : e ⊆ e') → (q : e' ⊆ e'') → (c : T e X) →
      sub q (sub p c) ≡ sub (⊆-trans p q) c

    mlaw1 : {e : E} → {X Y : Set} → (f : X → T e Y) → (x : X) →
      sub-eq lu (bind f (η x)) ≡ f x
    mlaw2 : {e : E} → {X : Set} → (c : T e X) →
      sub-eq ru c ≡ bind η c
    mlaw3 : {e e' e'' : E} → {X Y Z : Set} →
      (f : X → T e' Y) → (g : Y → T e'' Z) → (c : T e X) →
      sub-eq ass (bind g (bind f c)) ≡ bind (bind g ∘ f) c

```

Joonis 7: Gradeeritud monaad.


```

T : Exc → Set → Set
T err X = ⊥
T ok X = X
T errok X = Maybe X

η : {X : Set} → X → T ok X
η x = x

bind : {e e' : Exc} {X Y : Set} →
      (X → T e' Y) → T e X → T (e · e') Y
bind {err} f x = tt
bind {ok} f x = f x
bind {errok} {err} f x = tt
bind {errok} {ok} f (just x) = just (f x)
bind {errok} {ok} f nothing = nothing
bind {errok} {errok} f (just x) = f x
bind {errok} {errok} f nothing = nothing

sub : {e e' : Exc} {X : Set} → e ⊆ e' → T e X → T e' X
sub ⊆-refl c = c
sub err⊆errok tt = nothing
sub ok⊆errok x = just x

```

Joonis 8: Osa erandite gradeeritud monaadi definitsioonist.

2.3 Tüübi- ja efektituletus

2.3.1 Alamtüübid

Väärtus- ja arvutustüüpide osaline järjestus on vastastikku defineeritud (jn 9). Konstruktoriga `st-bn` loetakse tõeväärtused naturaalarvude alamtüübiks. Kehtib väärtustüüpide refleksiivsus `st-refl`. Kahe väärtustüübi korrutis on teise sarnase korrutise alamtüüp `st-prod`, kui vastavad tegurid on alamtüübid. Funktsiooniruumid on alamtüübid `st-func`, kui tagastustüübid on alamtüübid, ja argumenditüübid on ülemtüübid. Arvutustüüp on teise arvutustüübi alamtüüp `st-comp`, kui nende efektid ja väärtustüübid on järjestatud.

Väärtus- ja arvutustüüpide alamtüüpimise transitiivsus on tõestatud vastastikku joonisel 9. Kui kahe väärtustüüpide alamtüüpimise väite tõestusest üks on alamtüüpimise refleksiivsuse aksioom `st-refl` kujul, siis transitiivsuse tõestuseks on teine etteantud tõestus. Kui üks etteantud tõestustest on koostatud reeglist `st-prod`, siis ka teine tõestus peab olema paratamatult samal kujul. Sellisel juhul on transitiivsuse tõestus saadav reegli `st-prod` rakendamisega rekursiivelt määratud transitiivsuse `st-trans` tõestustele. Kui üks argument on funktsiooni alamtüüpide `st-func` kujul, siis on samal kujul ka teine argument.

```

mutual
  data _≤V_ : VType → VType → Set where
    st-bn : bool ≤V nat
    st-refl : {σ : VType} → σ ≤V σ
    st-prod : {σ σ' τ τ' : VType} →
      σ ≤V σ' → τ ≤V τ' → σ • τ ≤V σ' • τ'
    st-func : {σ σ' : VType} {τ τ' : CType} →
      σ' ≤V σ → τ ≤C τ' → σ ⇒ τ ≤V σ' ⇒ τ'

  data _≤C_ : CType → CType → Set where
    st-comp : {e e' : E} {σ σ' : VType} →
      e ⊆ e' → σ ≤V σ' → e / σ ≤C e' / σ'

mutual
  st-trans : {σ σ' σ'' : VType} → σ ≤V σ' → σ' ≤V σ'' → σ ≤V σ''
  st-trans st-refl q = q
  st-trans p st-refl = p
  st-trans (st-prod p p') (st-prod q q') = st-prod (st-trans p q)
    (st-trans p' q')
  st-trans (st-func p p') (st-func q q') = st-func (st-trans q p)
    (sct-trans p' q')

  sct-trans : {σ σ' σ'' : CType} → σ ≤C σ' → σ' ≤C σ'' → σ ≤C σ''
  sct-trans (st-comp p q) (st-comp p' q') = st-comp (⊆-trans p p')
    (st-trans q q')

```

Joonis 9: Väärtus- ja arvutustüüpide alamtüüpimine.

Transitiivsuseks on funktsiooni argumentide alamtüüpide kontravariantne transitiivsus $st\text{-}trans$ ja kehade arvutustüüpide transitiivsus $sct\text{-}trans$. Arvutustüüpide transitiivsuse $sct\text{-}trans$ argumendid saavad olla ainult arvutuste alamtüüpide $st\text{-}comp$ kujul. Vastav transitiivsus koostatakse arvutuste efektide järjestuse transitiivsusest $\sqsubseteq\text{-}trans$ ja väärtustüüpide transitiivsusest $st\text{-}trans$.

2.3.2 Rafineeritud keel

Joonisel 10 on toodud vastastikku defineeritud rafineeritud väärtus- ja arvutustermid. Võrreldes alaptk 2.1-s toodud termidega, on rafineeritud termid parametrizeeritud kontekstiga Γ ning indekseeritud vastavalt väärtus- ja arvutustüüpidega. Kontekst Ctx on defineeritud kui väärtustüüpide list, mille elementide järjekord vastab vabade muutujate sissetoomise järjekorrale.

- Konstruktorid TT ja FF koostavad tõeväärtustüüpi termid tõeväärtuste tõsi ja väär jaoks.
- Konstruktor ZZ koostab naturaalarvu tüüpi termi arvu 0 tähistamiseks. Konstruktor SS koostab termi antud naturaalarvu tüüpi termi järgarvu tähistamiseks, mis on samuti naturaalarvu tüüpi.
- $\langle _, _ \rangle$ koostab kahest antud väärtustermist paari, mille tüüp on termide tüüpide korrutis.
- FST ja SND projekteerivad paari tüüpi termist vastavalt esimese või teise korrutatava tüüpi termi.
- VAR konstrueerib vaba muutuja ja võtab tõestuse, et mingi tüüp on konteksti element, ning annab väärtustermi, mille tüüp on kõnealuse elemendiga määratud tüüp.
- LAM võtab väärtustüübi ja arvutustermi, mille konteksti on parameetriga antud kontekstiga võrreldes väärtustüübiga laiendatud, ning annab funktsioonile vastava väärtustermi.
- $VCAST$ suurendab ettantud väärtustermi tüüpi vastavalt etteantud alamtüüpimis tõestusele. See võimaldab eri tüüpi väärtustermide tüüpe ühtlustada, mis on vajalik rafineeritud arvutustermide koostamisel.

Rafineeritud arvutustermid (jn 10) määravad täpselt osaarvutuste efektide kombineerimise.

- VAL koostab antud väärtustermist õnnestunud arvutuse.

Ctx = List VType

mutual

data VTerm (Γ : Ctx) : VType \rightarrow Set where

TT FF : VTerm Γ bool

ZZ : VTerm Γ nat

SS : VTerm Γ nat \rightarrow VTerm Γ nat

$\langle _, _ \rangle$: $\{\sigma \ \sigma' : \text{VType}\} \rightarrow$

VTerm $\Gamma \ \sigma \rightarrow \text{VTerm } \Gamma \ \sigma' \rightarrow \text{VTerm } \Gamma \ (\sigma \bullet \sigma')$

FST : $\{\sigma \ \sigma' : \text{VType}\} \rightarrow \text{VTerm } \Gamma \ (\sigma \bullet \sigma') \rightarrow \text{VTerm } \Gamma \ \sigma$

SND : $\{\sigma \ \sigma' : \text{VType}\} \rightarrow \text{VTerm } \Gamma \ (\sigma \bullet \sigma') \rightarrow \text{VTerm } \Gamma \ \sigma'$

VAR : $\{\sigma : \text{VType}\} \rightarrow \sigma \in \Gamma \rightarrow \text{VTerm } \Gamma \ \sigma$

LAM : $(\sigma : \text{VType}) \ \{\tau : \text{CType}\} \rightarrow$

Cterm $(\sigma :: \Gamma) \ \tau \rightarrow \text{VTerm } \Gamma \ (\sigma \Rightarrow \tau)$

VCAST : $\{\sigma \ \sigma' : \text{VType}\} \rightarrow \text{VTerm } \Gamma \ \sigma \rightarrow \sigma \leq_V \sigma' \rightarrow \text{VTerm } \Gamma \ \sigma'$

data CTerm (Γ : Ctx) : CType \rightarrow Set where

VAL : $\{\sigma : \text{VType}\} \rightarrow \text{VTerm } \Gamma \ \sigma \rightarrow \text{CTerm } \Gamma \ (\text{ok} / \sigma)$

FAIL : $(\sigma : \text{VType}) \rightarrow \text{CTerm } \Gamma \ (\text{err} / \sigma)$

TRY_WITH_ : $\{e \ e' : E\} \ \{\sigma : \text{VType}\} \rightarrow \text{CTerm } \Gamma \ (e / \sigma) \rightarrow$

CTerm $\Gamma \ (e' / \sigma) \rightarrow \text{CTerm } \Gamma \ (e \diamond e' / \sigma)$

IF_THEN_ELSE_ : $\{e \ e' : E\} \ \{\sigma : \text{VType}\} \rightarrow \text{VTerm } \Gamma \ \text{bool} \rightarrow$

CTerm $\Gamma \ (e / \sigma) \rightarrow \text{CTerm } \Gamma \ (e' / \sigma) \rightarrow \text{CTerm } \Gamma \ (e \sqcup e' / \sigma)$

\$_\$: $\{\sigma : \text{VType}\} \ \{\tau : \text{CType}\} \rightarrow$

Vterm $\Gamma \ (\sigma \Rightarrow \tau) \rightarrow \text{VTerm } \Gamma \ \sigma \rightarrow \text{CTerm } \Gamma \ \tau$

PREC : $\{e \ e' : E\} \ \{\sigma : \text{VType}\} \rightarrow \text{VTerm } \Gamma \ \text{nat} \rightarrow$

CTerm $\Gamma \ (e / \sigma) \rightarrow \text{CTerm } (\sigma :: \text{nat} :: \Gamma) \ (e' / \sigma) \rightarrow$

$e \cdot e' \sqsubseteq e \rightarrow \text{CTerm } \Gamma \ (e / \sigma)$

LET_IN_ : $\{e \ e' : E\} \ \{\sigma \ \sigma' : \text{VType}\} \rightarrow \text{CTerm } \Gamma \ (e / \sigma) \rightarrow$

CTerm $(\sigma :: \Gamma) \ (e' / \sigma') \rightarrow \text{CTerm } \Gamma \ (e \cdot e' / \sigma')$

CCAST : $\{e \ e' : E\} \ \{\sigma \ \sigma' : \text{VType}\} \rightarrow \text{CTerm } \Gamma \ (e / \sigma) \rightarrow$

$e / \sigma \leq_C e' / \sigma' \rightarrow \text{CTerm } \Gamma \ (e' / \sigma')$

Joonis 10: Eranditega keele rafineeritud termid.

- FAIL koostab etteantud väärtustüüpi ebaõnnestunud arvutuse.
- TRY_WITH_ parandab põhiarvutustermi efekti erandikäsitleja arvutustermi efektiga. Kitsendusena peavad arvutustermid omama sama väärtustüüpi.
- IF_THEN_ELSE_ eeldab tõeväärtustüüpi tingimust. Kogu arvutustermi efekt on määratud harude, mille väärtustüübid peavad ühtima, efektide ülemise rajaga.
- _\$_ rakendab esimese väärtustermiga antud funktsiooni teise väärtustermiga antud argumendile, seejuures peavad funktsiooni parameetri ja argumendi väärtustüübid ühtima. Saadud arvutuse efekt ja väärtustüüp on määratud funktsiooni keha arvutustüübiga.
- PREC eeldab sammude arvuna naturaalarvude tüüpi väärtustermi. Baasarvutuse väärtustüüp on lisatud koos naturaalarvu tüüpi sammuloenduriga sammu arvutustermi konteksti. Täiendava kitsendusena on nõutud, et baasi efekt oleks sammu efektiga korrutamise püsipunkt.
- LET_IN_ lisab esimese arvutustermi väärtustüübi teise arvutustermi konteksti. Kogu arvutuse efektiks on kahe arvutustermi efektide korrutis ning väärtustüüp on määratud teise arvutustermi tüübiga.
- CCAST suurendab etteantud arvutustermi tüüpi vastavalt alamtüüpimis tõestusele.

2.3.3 Termide tüübituletus

Etteantud kontekstis saab väärtustermile tuletada vastava väärtustüübi (jn 11). Kuna term võib olla tüüpimatu, siis on `infer-vtype` tulemus mähitud `Maybe` andmetüüpi. Väärtustüübi tuletamisel lähtutakse väärtustermi kujust.

- TT ja FF annavad kindlasti tõeväärtustüübi.
- ZZ on kindlasti naturaalarvu tüüpi. SS `t` korral tuleb täiendavalt kontrollida, kas term `t` on samas kontekstis naturaalarvu tüüpi. Vastasel korral on term halvasti koostatud ja seda ei saa tüüpida.
- Paari $\langle t, t' \rangle$ tüüp on määratud, kui termide `t` ja `t'` tüübid on samas kontekstis määratud. Paari tüübiks on nende termide tüüpide korrutis. Ülejäänud juhtudel pole paari tüüp määratud.
- FST `t` ja SND `t` on määratud, kui term `t` on paar, st antud kontekstis on ta korrutise tüüpi. Projektsiooni tüübiks on vastavalt esimene või teine tegur.

```

infer-vtype : Ctx → vTerm → Maybe VType
infer-vtype Γ TT = just bool
infer-vtype Γ FF = just bool
infer-vtype Γ ZZ = just nat
infer-vtype Γ (SS t) with infer-vtype Γ t
... | just nat = just nat
... | _       = nothing
infer-vtype Γ ⟨ t , t' ⟩ with infer-vtype Γ t | infer-vtype Γ t'
... | just σ | just σ' = just (σ • σ')
... | _             | _       = nothing
infer-vtype Γ (FST t) with infer-vtype Γ t
... | just (σ • _) = just σ
... | _           = nothing
infer-vtype Γ (SND t) with infer-vtype Γ t
... | just (_ • σ') = just σ'
... | _           = nothing
infer-vtype Γ (VAR x) with x <? Γ
... | yes p = just (lkp Γ (fromN≤ p))
... | no ¬p = nothing
infer-vtype Γ (LAM σ t) with infer-ctype (σ :: Γ) t
... | just τ = just (σ ⇒ τ)
... | _     = nothing

```

Joonis 11: Eranditega keele väärtustermide tüübituletus.

- **VAR** x korral tuleb kontrollida, et naturaalarv x on väiksem kui konteksti Γ pikkus. Selleks on kasutatud lahendajat $_<?_$. Naturaalarvude võrratuse tõestusest p on koostatud konteksti pikkusega piiratud naturaalarv $\text{fromN}\leq p$, mida kasutatakse muutujale vastava tüübi otsimiseks kontekstist $\text{lkp } \Gamma$.
- **LAM** $\sigma \ t$ puhul tuleb kontrollida, et arvutustermiga t antud funktsiooni keha on hästi tüübitud kontekstis, mida on laiendatud parameetri väärtustüübi σ võrra. Arvutustermi tüübituletus infer-ctype on toodud allpool.

Joonisel 12 on toodud etteantud kontekstis arvutustermile tüübi tuletamine. Nagu väärtustermide tüübituletuse puhul, on ka arvutustermide tüübituletus infer-ctype tulemus mähitud `Maybe` andmetüüpi. Arvutustüübi tuletamisel lähtutakse arvutustüübi kujust.

- **VAL** x on tüübitud, kui väärtustermi x tüübituletus õnnestub. Arvutuse väärtustüübiks on tuletatud tüüp. Efekti hinnang `ok` tähistab arvutuse õnnestumist.
- **FAIL** σ on alati väärtustüübi σ ebaõnnestumise tüüpi, mille efekti hinnang on `err`.
- **TRY** $t \text{ WITH } t'$ on tüübitud, kui arvutustermid t ja t' on hästi tüübitud. Kogu arvutuse tüübiks on põhiarvutuse tüübi τ parandamine erandikäsitleja tüübiga τ' . Arvutustüüpide parandus $_ \Diamond C_$ on defineeritud efektide paranduse $_ \Diamond _$ ja väärtustüüpide ülemise raja $_ \sqcup V_$ abil.

- **IF** x **THEN** t **ELSE** t' eeldab, et väärtusterm x on tõeväärtustüüpi. Kogu arvutuse tüüp on määratud harude tüüpide τ ja τ' ülemise rajaga $\tau \sqcup \tau'$.
- **f** $\$$ t korral kontrollitakse, et väärtustermi f tüübiks on funktsiooniruum ja väärtustermile t tuletatud tüüp on f parameetri (ehk uusima vaba muutuja) alamtüüp. Ülejäänud juhtudel ei ole funktsiooni rakendamine hästi tüübitud.
- **PREC** x t t' korral kontrollitakse viit tingimust.
 - Väärtusterm x peab olema antud kontekstis naturaalarvu tüüpi.
 - Baasi arvutusterm t peab olema antud kontekstis hästi tüübitud.
 - Sammu arvutusterm t' peab olema tüübitud kontekstis, kuhu on lisatud naturaalarvu tüüpi sammuloendur ja arvutustermi t väärtustüüpi σ akumulaator.
 - Osaarvutustele t ja t' tuletatud väärtustüübid peavad olema samad. Selleks kasutatakse lahendajat $_ \equiv V? _$.
 - Osaarvutuste t ja t' efektide korrutis ei tohi olla suurem kui baasi t efekt. Seda kontrollitakse lahendajaga $_ \sqsubseteq ? _$.

Kui kõik tingimused kehtivad, siis kogu arvutuse tüüp on määratud baasi efekti ja väärtustüübiga.

- **LET** t **IN** t' on tüübitud, kui arvutusterm t on tüübitud antud kontekstis ja arvutusterm t' on tüübitud kontekstis, mida on laiendatud t väärtustüübi võrra. Arvutuse efektiks on t ja t' efektide korrutis ning väärtustüübiks t' väärtustüüp. Kui üks termidest t ja t' ei ole hästi tüübitud, siis ei ole ka kogu term tüübitud.

2.3.4 Termide rafineerimine

Kui n-ö “toorele” termile õnnestub mingis kontekstis tuletada tüüp, siis saab sellest termist konstrueerida n-ö “rafineeritud” termi, mis “teab” oma konteksti ja tüüpi. Joonisel 13 on toodud rafineeritud väärtus- ja arvutustermide tüübikehitektuurid. Üheelemendiline hulk T tähistab tüübituletuse ebaõnnestumist.

Väärtustermide rafineerimine etteantud kontekstis (jn 14) matkib väärtustermide tüübituletust (alaptk 2.3.3).

- **TT** ja **FF** korral konstrueeritakse vastav rafineeritud väärtusterm.
- **ZZ** puhul konstrueeritakse rafineeritud väärtusterm null **ZZ**. **SS** t korral kontrollitakse, et väärtusterm t on hästi tüübitud ja on naturaalarvu tüüpi. Rafineeritud

```

infer-ctype : Ctx → cTerm → Maybe CType
infer-ctype Γ (VAL x) with infer-vtype Γ x
... | just σ = just (ok / σ)
... | _ = nothing
infer-ctype Γ (FAIL σ) = just (err / σ)
infer-ctype Γ (TRY t WITH t') with infer-ctype Γ t | infer-ctype Γ t'
... | just τ | just τ' = τ ◇C τ'
... | _ | _ = nothing
infer-ctype Γ (IF x THEN t ELSE t')
  with infer-vtype Γ x | infer-ctype Γ t | infer-ctype Γ t'
... | just bool | just τ | just τ' = τ ⊔C τ'
... | _ | _ | _ = nothing
infer-ctype Γ (f $ t) with infer-vtype Γ f | infer-vtype Γ t
... | just (σ ⇒ τ) | just σ' with σ' ≤V? σ
... | yes _ = just τ
... | no _ = nothing
infer-ctype Γ (f $ t) | _ | _ = nothing
infer-ctype Γ (PREC x t t')
  with infer-vtype Γ x
... | just nat with infer-ctype Γ t
... | nothing = nothing
... | just (e / σ) with infer-ctype (σ :: nat :: Γ) t'
... | nothing = nothing
... | just (e' / σ') with e · e' ⊑? e | σ ≡V? σ'
... | yes _ | yes _ = just (e / σ)
... | _ | _ = nothing
infer-ctype Γ (PREC x t t') | _ = nothing
infer-ctype Γ (LET t IN t') with infer-ctype Γ t
... | nothing = nothing
... | just (e / σ) with infer-ctype (σ :: Γ) t'
... | nothing = nothing
... | just (e' / σ') = just (e · e' / σ')

```

Joonis 12: Eranditega keele arvutustermide tüübituletus.

```

refined-vterm : Ctx → vTerm → Set
refined-vterm Γ t with infer-vtype Γ t
... | nothing = ⊤
... | just τ = VTerm Γ τ

refined-cterm : Ctx → cTerm → Set
refined-cterm Γ t with infer-ctype Γ t
... | nothing = ⊤
... | just τ = CTerm Γ τ

```

Joonis 13: Väärtus- ja arvutustermide rafineerimiste tüübikonstruktorid.

naturaalarvu järglane SS koostatakse alamväärtuse t rafineeringust u . Kui väärtus-termi t tüübituletus ei õnnestu või tuletatud tüüp ei ole naturaalarvu tüüpi, siis rafineeringu tulemuseks on tüübi T ainus element tt .

- $\langle t, t' \rangle$ korral kontrollitakse, et mõlemad väärtustermid t ja t' on kontekstis hästi tüübitud ja rafineeritud paar koostatakse rafineeritud termidest u ja u' .
- $FST\ t$ puhul peab väärtustermile t tuletatud tüüp olema korrutistüüp. Rafineeritud projektsiooni saab koostada t rafineeringust u . $SND\ t$ juhtum on analoogne.
- $VAR\ x$ korral koostatakse tõestusest p , mis näitab, et naturaalarv x on väiksem kui konteksti Γ pikkus, rafineeritud muutuja tõestusega, et x -ile määratud kohal kontekstis Γ on $VAR\ x$ jaoks tuletatud tüüp.
- $LAM\ \sigma\ t$ juhtumis lisatakse parameetri tüüp σ konteksti ja kontrollitakse arvutustermi t hästi-tüübitust. Rafineeritud funktsiooniabstraktsioon koostatakse uues kontekstis rafineeritud arvutusest u .

Arvutustermide rafineerimine on toodud joonistel 15 ja 16.

- $VAL\ t$ korral kontrollitakse, et väärtusterm t on hästi tüübitud, ja rafineeritud arvutus koostatakse vastavast rafineeritud väärtustermist u .
- $FAIL\ \sigma$ rafineerimisel näidatakse, et selle arvutustermi tüübituletus alati õnnestub.
- $TRY\ t\ WITH\ t'$ korral kontrollitakse, et t ja t' on hästi tüübitud ja tuletatud väärtustüüpidel leidub ülemine raja. Rafineeritud arvutuse konstrueerimiseks suurendatakse rafineeritud osaarvutuste u ja u' tüüpi ülemise rajani vastavalt alamtüüpimise tõestusele p .
- $IF\ x\ THEN\ t\ ELSE\ t'$ korral peab väärtusterm x olema tõeväärtustüüpi ning arvutustermid t ja t' peavad olema hästi tüübitud. Kui harude t ja t' arvutuste väärtustüüpidel leidub ülemine raja, siis rafineeritud tingimuslause tingimus on rafineeritud väärtusterm x' ja tingimuslause harudes suurendatakse rafineeritud arvutuste u ja u' tüüpi vastavalt alamtüübi tõestusele p . Ülejäänud juhtudel tagastatakse tüübi T element tt .
- $f\ \$\ x$ korral peab väärtusterm f olema funktsiooniruumi tüüpi ja seejuures peab argumendile x tuletatud tüüp olema mainitud funktsiooniruumi parameetri tüübi alamtüüp. Rafineeritud funktsiooni f' rakendamise koostamisel on rafineeritud argumendi x' tüüpi suurendatud vastavalt alamtüübi tõestusele p .

```

refine-vterm : (Γ : Ctx) (t : vTerm) → refined-vterm Γ t
refine-vterm Γ TT = TT
refine-vterm Γ FF = FF
refine-vterm Γ ZZ = ZZ
refine-vterm Γ (SS t) with infer-vtype Γ t | refine-vterm Γ t
... | just nat | u = SS u
... | just bool | _ = tt
... | just ( _ • _ ) | _ = tt
... | just ( _ ⇒ _ ) | _ = tt
... | nothing | _ = tt
refine-vterm Γ ⟨ t , t' ⟩
  with infer-vtype Γ t | refine-vterm Γ t |
    infer-vtype Γ t' | refine-vterm Γ t'
... | just _ | u | just _ | u' = ⟨ u , u' ⟩
... | just _ | _ | nothing | _ = tt
... | nothing | _ | _ | _ = tt
refine-vterm Γ (FST t) with infer-vtype Γ t | refine-vterm Γ t
... | just nat | _ = tt
... | just bool | _ = tt
... | just ( _ • _ ) | u = FST u
... | just ( _ ⇒ _ ) | _ = tt
... | nothing | _ = tt
refine-vterm Γ (SND t) with infer-vtype Γ t | refine-vterm Γ t
... | just nat | _ = tt
... | just bool | _ = tt
... | just ( _ • _ ) | u = SND u
... | just ( _ ⇒ _ ) | _ = tt
... | nothing | _ = tt
refine-vterm Γ (VAR x) with x <? Γ
... | yes p = VAR (trace Γ (fromN ≤ p))
... | no _ = tt
refine-vterm Γ (LAM σ t)
  with infer-ctype (σ :: Γ) t | refine-cterm (σ :: Γ) t
... | just _ | u = LAM σ u
... | nothing | u = tt

```

Joonis 14: Eranditega keele väärtustermide rafineerimine.

- $\text{PREC } x \ t \ t'$ korral kontrollitakse, et väärtusterm x on naturaalarvu tüüpi ning baasile vastav arvutus t hästi tüübitud. Seejärel, et sammule vastav arvutus t' on hästi tüübitud kontekstis, kuhu on lisatud naturaalarvu tüüpi sammuloendur ning baasi väärtustüübile vastav akumulaator. Viimaks kontrollitakse, et baasi ja sammu efektide korrutamine ei ületaks baasi efekti ning et baasile ja sammule vastavad väärtustüübid langevad kokku. Rafineeritud primitiivse rekursiooni term koostatakse vastavatest rafineeritud termidest x' , u , u' ja efektide korrutamise püsipunkti tõestusest p .
- $\text{LET } t \ \text{IN } t'$ puhul peab osaarvutus t olema hästi tüübitud antud kontekstis ja osaarvutus t' tüübitud kontekstis, kuhu on lisatud t -le tuletatud tüüp σ . Rafineeritud arvutuste sidumine koostatakse rafineeritud osaarvutustest u ja u' .

2.4 Semantika

Joonisel 17 on toodud vastastikku defineeritud väärtus- ja arvutustüüpide ning konteksti semantiline interpretatsioon metakeeles Agda.

- nat interpreteeritakse kui naturaalarvud \mathbb{N} ja bool kui tõeväärtused Bool .
- $\sigma \bullet \sigma'$ korral tehakse rekursiivsed väljakutsed korrutatavatele ning tulemused korrutatakse Agdas $_ \times _$.
- $\sigma \Rightarrow \tau$ interpretatsioon vastab Agda funktsiooniruumile, mille parameetri ja tule-
muse tüüp on interpreteeritud vastavalt väärtustüübist σ ja arvutustüübist τ .
- Arvutustüübi ϵ / σ interpreteerimiseks rakendatakse gradeeritud monaadi tüübi-
konstruktorit T efektile ϵ ja väärtustüübi σ interpretatsioonile.
- Tühi kontekst vastab üheelemendilisele tüübile T . Mitte-tühja konteksti pea interp-
reteeritakse ja korrutatakse rekursiivselt interpreteeritud sabaga.

Joonisel 18 on toodud rafineeritud väärtustermi interpretatsioon antud konteksti interpre-
tatsioonis.

- TT ja FF seatakse vastavusse tõese ja vääraga.
- ZZ vastab nullile. $\text{SS } t$ on t interpretatsiooni järgarv.
- $\langle t, t' \rangle$ tõlgendatakse kui t ja t' interpretatsioonide paari.

```

refine-cterm : (Γ : Ctx) (t : cTerm) → refined-cterm Γ t
refine-cterm Γ (VAL t) with infer-vtype Γ t | refine-vterm Γ t
... | nothing | u = tt
... | just _ | u = VAL u
refine-cterm Γ (FAIL σ) with infer-ctype Γ (FAIL σ)
... | _ = FAIL σ
refine-cterm Γ (TRY t WITH t')
  with infer-ctype Γ t | refine-cterm Γ t |
    infer-ctype Γ t' | refine-cterm Γ t'
... | nothing | _ | _ | _ = tt
... | just _ | _ | nothing | _ = tt
... | just (e / σ) | u | just (e' / σ') | u'
    with σ ⊔V σ' | inspect (⊔V σ) σ'
... | nothing | _ = tt
... | just _ | [ p ] =
  TRY CCAST u (⊔V-subtype p)
  WITH CCAST u' (⊔V-subtype-sym {σ} p)
refine-cterm Γ (IF x THEN t ELSE t')
  with infer-vtype Γ x | refine-vterm Γ x
... | nothing | _ = tt
... | just nat | _ = tt
... | just ( _ • _ ) | _ = tt
... | just ( _ ⇒ _ ) | _ = tt
... | just bool | x'
  with infer-ctype Γ t | refine-cterm Γ t
... | nothing | u = tt
... | just (e / σ) | u
  with infer-ctype Γ t' | refine-cterm Γ t'
... | nothing | u' = tt
... | just (e' / σ') | u'
  with σ ⊔V σ' | inspect (⊔V σ) σ'
... | nothing | _ = tt
... | just ⊔σ | [ p ] =
  IF x' THEN CCAST u (⊔V-subtype p)
  ELSE CCAST u' (⊔V-subtype-sym {σ} p)
--

```

Joonis 15: Eranditega keele arvutustermide rafineerimine, I osa.

```

--refine-cterm : (Γ : Ctx) (t : cTerm) → refined-cterm Γ t
refine-cterm Γ (f $ x)
  with infer-vtype Γ f | refine-vterm Γ f |
    infer-vtype Γ x | refine-vterm Γ x
... | nothing | _ | _ | _ = tt
... | just nat | _ | _ | _ = tt
... | just bool | _ | _ | _ = tt
... | just ( _ • _ ) | _ | _ | _ = tt
... | just ( _ ⇒ _ ) | _ | nothing | _ = tt
... | just (σ ⇒ τ) | f' | just σ' | x' with σ' ≤V? σ
...                                     | no _ = tt
...                                     | yes p = f' $ VCAST x' p
refine-cterm Γ (PREC x t t') with infer-vtype Γ x | refine-vterm Γ x
... | nothing | _ = tt
... | just bool | _ = tt
... | just ( _ • _ ) | _ = tt
... | just ( _ ⇒ _ ) | _ = tt
... | just nat | x'
  with infer-ctype Γ t | refine-cterm Γ t
... | nothing | _ = tt
... | just (e / σ) | u
  with infer-ctype (σ :: nat :: Γ) t' |
    refine-cterm (σ :: nat :: Γ) t'
... | nothing | _ = tt
... | just (e' / σ') | u' with e · e' ⊑? e | σ ≡V? σ'
...                                     | no _ | _ = tt
...                                     | yes _ | no _ = tt
refine-cterm Γ (PREC x t t')
  | just nat | x'
  | just (e / σ) | u
    | just (e' / .σ) | u' | yes p | yes refl = PREC x' u u' p
refine-cterm Γ (LET t IN t') with infer-ctype Γ t | refine-cterm Γ t
... | nothing | _ = tt
... | just (e / σ) | u with infer-ctype (σ :: Γ) t' |
  refine-cterm (σ :: Γ) t'
... | nothing | _ = tt
... | just (e' / σ') | u' = LET u IN u'

```

Joonis 16: Eranditega keele arvutustermide rafineerimine, II osa.

```

mutual
  <<_>>V : VType → Set
  << nat >>V = ℕ
  << bool >>V = Bool
  << σ • σ' >>V = << σ >>V × << σ' >>V
  << σ ⇒ τ >>V = << σ >>V → << τ >>C

  <<_>>C : CType → Set
  << ε / σ >>C = T ∈ << σ >>V

  <<_>>X : Ctx → Set
  << [] >>X = T
  << σ :: Γ >>X = << σ >>V × << Γ >>X

```

Joonis 17: Väärtus-, arvutustüüpide ja konteksti semantika.

```

[[_]]V : {Γ : Ctx} {σ : VType} → VTerm Γ σ → << Γ >>X → << σ >>V
[[ TT ]]V ρ = true
[[ FF ]]V ρ = false
[[ ZZ ]]V ρ = zero
[[ SS t ]]V ρ = suc ([[ t ]]V ρ)
[[ < t , t' > ]]V ρ = [[ t ]]V ρ , [[ t' ]]V ρ
[[ FST t ]]V ρ = proj1 ([[ t ]]V ρ)
[[ SND t ]]V ρ = proj2 ([[ t ]]V ρ)
[[ VAR x ]]V ρ = proj x ρ
[[ LAM σ t ]]V ρ = λ x → [[ t ]]C (x , ρ)
[[ VCAST t p ]]V ρ = vcast p ([[ t ]]V ρ)

```

Joonis 18: Eranditega keele väärtustermide semantika.

- FST t ja SND t projekteerivad esimese ja teise komponendi t interpretatsioonist, mis on paar.
- VAR x projekteerib konteksti interpretatsioonist ρ tõestusele x vastava (n-ö x-nda) väärtuse.
- LAM σ t interpreteeritakse kui lambda abstraktsiooni, mille seotud muutuja x lisatakse arvutustermi t interpreteerimise konteksti.
- VCAST t p puhul interpreteeritakse väärtusterm t ja konverteeritakse see vastavalt alamtüüpimise tõestusele p.

Rafineeritud arvutustermi semantiline interpretatsioon etteantud konteksti interpretatsioon on toodud joonisel 19.

- VAL x interpreteerib väärtustermi x antud kontekstis ja rakendab sellele gradeeritud monaadi ühikut η.

- Kuna arvutustüübi, mille efekt on `err`, interpretatsioon erandite gradeeritud monaadis on tipp-tüüp \top , siis `FAIL` σ koostab selle ainsa elemendi `tt`.
- `TRY_WITH_ e e' t t'` kombineerib osaarvutuste `t` ja `t'` interpretatsioonid vastavalt arvutuste efektidele. Semantiline erandikäsitlus `or-else` käitub järgnevalt. Kui esimese osaarvutuse efektiks on ebaõnnestumine `err`, siis kogu arvutus on määratud erandikäsitlajaga. Kui esimene arvutus õnnestub efektiga `ok`, siis kogu arvutuseks ongi esimene arvutus. Kui esimese arvutuse õnnestumine pole teada, st efektiks on `errok`, siis analüüsitakse ka erandikäsitlaja efekti. Kui erandikäsitlaja efekt on `err`, siis on kogu arvutus määratud põhiarvutusega. Ülejäänud juhtudel analüüsitakse esimese arvutuse tulemuse kuju: kui esimene arvutus ikkagi õnnestus (konstruktor `just`), siis saab sealt ka kogu arvutuse tulemuse; vastasel korral on kogu arvutuse tulemuseks erandikäsitlaja tulemus.
- `IF_THEN_ELSE_` korral interpreteeritakse tingimus ja harud tingimuslauses, kusjuures kummagi haru efekt neeldub efektide ülemises rajas.
- `PREC x t t' p` interpretatsioon vastab primitiivsele rekursioonile, mille sammude arv on on väärtustermi `x` interpretatsioon, baas on arvutustermi `t` interpretatsioon ja sammuks on arvutustermi `t'` interpretatsioon kontekstis, kuhu on lisatud sammuloendur ja vahetulemuse akumulaaor. Semantiline primitiivne rekursioon `primrecT` on defineeritud induktsiooniga sammude arvul. Nulli korral on tulemuseks baasile vastav arvutus `z`. Sammu korral rakendatakse sammule vastavat funktsiooni `s` sammuloendurile `n` ja saadud funktsioon seotakse rekursiive väljakutsega gradeeritud monaadi `bind`-tehte abil. Tulemuse efekt neeldub efektide püsipunkti tõestuse `p` tõttu baasarvutuse efektis.
- `f $ x` korral rakendatakse väärtustermi `f` interpretatsiooni väärtustermi `x` interpretatsioonile.
- `LET_IN_` seob osaarvutuste interpretatsioonid, kasutades gradeeritud monaadi `bind`-tehet.
- `CCAST t p` puhul interpreteeritakse arvutusterm `t` ja konverteeritakse see vastavalt alamtüüpimise tõestusele `p`.

2.5 Optimisatsioonid

Etteantud kontekstist saab jätta välja selle mingis kohas oleva tüübi, eeldusel, et sellele vastavat muutujat pole mingis termis tarvis. Seda nimetatakse konteksti lühendamiseks

```

or-else : (e e' : E) {X : Set} → T e X → T e' X → T (e ◇ e') X
or-else err _ _ x' = x'
or-else ok _ x _ = x
or-else errok err x _ = x
or-else errok ok (just x) _ = x
or-else errok ok nothing x' = x'
or-else errok errok (just x) x' = just x
or-else errok errok nothing x' = x'

primrecT : {e e' : E} {X : Set} →
  ℕ → T e X → (ℕ → X → T e' X) → e · e' ⊆ e → T e X
primrecT zero z s p = z
primrecT {e} {e'} (suc n) z s p =
  sub p (bind {e} {e'} (s n) (primrecT n z s p))

[[_]]C : {Γ : Ctx} {τ : CType} → CTerm Γ τ → ⟨⟨ Γ ⟩⟩X → ⟨⟨ τ ⟩⟩c
[ VAL x ]C ρ = η ([ x ]V ρ)
[ FAIL σ ]C ρ = tt
[ TRY_WITH_ {e} {e'} t t' ]C ρ = or-else e e' ([ t ]C ρ) ([ t' ]C ρ)
[ IF_THEN_ELSE_ {e} {e'} x t t' ]C ρ = if [ x ]V ρ
  then (sub (lub e e') ([ t ]C ρ))
  else (sub (lub-sym e' e) ([ t' ]C ρ))
[ PREC x t t' p ]C ρ = primrecT ([ x ]V ρ) ([ t ]C ρ)
  ((λ i acc → [ t' ]C (acc , i , ρ))) p
[ f $ x ]C ρ = [ f ]V ρ ([ x ]V ρ)
[ LET_IN_ {e} {e'} m n ]C ρ =
  bind {e} {e'} (λ x → [ n ]C (x , ρ)) ([ m ]C ρ)
[ CCAST t o ]C ρ = ccast o ([ t ]C ρ)

```

Joonis 19: Eranditega keele arvutustermide semantika.


```

dropX : (Γ : Ctx) {σ : VType} (x : σ ∈ Γ) → Ctx
-- proof omitted
mutual
  wkV : {Γ : Ctx} {σ τ : VType} (x : σ ∈ Γ) →
    VTerm (dropX Γ x) τ → VTerm Γ τ
  -- proof omitted
  wkC : {Γ : Ctx} {σ : VType} {τ : CType} (x : σ ∈ Γ) →
    CTerm (dropX Γ x) τ → CTerm Γ τ
  -- proof omitted
drop : {Γ : Ctx} → ⟨⟨ Γ ⟩⟩X → {σ : VType} → (x : σ ∈ Γ) → ⟨⟨ dropX Γ x ⟩⟩X
-- proof omitted
mutual
  lemma-wkV : {Γ : Ctx} (ρ : ⟨⟨ Γ ⟩⟩X) →
    {σ : VType} (x : σ ∈ Γ) →
    {τ : VType} (t : VTerm (dropX Γ x) τ) →
    [ wkV x t ]V ρ ≡ [ t ]V (drop ρ x)
  -- proof omitted
  lemma-wkC : {Γ : Ctx} (ρ : ⟨⟨ Γ ⟩⟩X) →
    {σ : VType} (x : σ ∈ Γ) →
    {τ : CType} (t : CTerm (dropX Γ x) τ) →
    [ wkC x t ]C ρ ≡ [ t ]C (drop ρ x)
  -- proof omitted

```

Joonis 20: Konteksti lühendamise ja termide lõdvendamise.

`dropX` (jn 20). Vastavalt saab lõdvendada rafineeritud väärtustermide `wkV` ja arvutustermide `wkC`, nihutades vajadusel sobivalt muutujaid. Teades konteksti interpretatsiooni ja välja-jäetavat muutujat, saab koostada lühendatud konteksti interpretatsiooni `drop`. Lemmad `lemma-wkV` ja `lemma-wkC` näitavad, et termi interpretatsioon lühendatud kontekstis on sama, mis lõdvendatud termi interpretatsioon algse kontekstis.

Etteantud konteksti saab laiendada dubleerides `dupX` selle mingit elementi (jn 21). Termi kontraheerimine, funktsioonid `ctrV` ja `ctrC`, seisneb selle kontekstis olevate muutujate koondamises, eeldusel, et koondatavad on võrdsed (teisisõnu: dubleeritud). Vajadusel tuleb selleks nihutada muutujaid ühe elemendi võrra. Konteksti interpretatsioonis saab dubleerida mingile muutujale vastava väärtuse funktsiooniga `dup`. Lemmad `lemma-ctrV` ja `lemma-ctrC` näitavad, et termi interpretatsioon dubleeritud kontekstis on sama, mis kontraheeritud termi interpretatsioon algse kontekstis.

Lihtsuse huvides pole mainitud lõdvendamise ja kontraheerimise definitsioone ja tõestusi siinkohal toodud.

Mõned erandite monaadi jaoks spetsiifilised, efektide suhtes geneerilised optimisatsioonid on toodud joonisel 22. `the-same` näitab, et arvutust `m` ei saa parandada, lisades sellele erandikäsitlejana sama arvutuse. Erandikäsitlejate assotsiatiivsus on näidatud `handler-ass`’iga. Selle tõestus matkib arvutuse parandusoperaatori assotsiatiivsuse `◇-ass` tõestust, milles

```

dupX : {Γ : Ctx} {σ : VType} → σ ∈ Γ → Ctx
-- proof omitted
mutual
  ctrV : {Γ : Ctx} {σ : VType} {τ : VType} (p : σ ∈ Γ) →
    VTerm (dupX p) τ → VTerm Γ τ
  -- proof omitted
  ctrC : {Γ : Ctx} {σ : VType} {τ : CType} (p : σ ∈ Γ) →
    CTerm (dupX p) τ → CTerm Γ τ
  -- proof omitted
dup : {Γ : Ctx} → ⟨⟨ Γ ⟩⟩X → {σ : VType} → (p : σ ∈ Γ) → ⟨⟨ dupX p ⟩⟩X
-- proof omitted
mutual
  lemma-ctrV : {Γ : Ctx} (ρ : ⟨⟨ Γ ⟩⟩X) →
    {σ : VType} (p : σ ∈ Γ) →
    {τ : VType} (t : VTerm (dupX p) τ) →
    ⟦ t ⟧V (ctr ρ p) ≡ ⟦ ctrV p t ⟧V ρ
  -- proof omitted
  lemma-ctrC : {Γ : Ctx} (ρ : ⟨⟨ Γ ⟩⟩X) →
    {σ : VType} (p : σ ∈ Γ) →
    {τ : CType} (t : CTerm (dupX p) τ) →
    ⟦ t ⟧C (ctr ρ p) ≡ ⟦ ctrC p t ⟧C ρ
  -- proof omitted

```

Joonis 21: Konteksti dubleerimine ja termide kontraheerimine.

efektide juhte läbi vaadatakse.

Mõned erandite monaadi spetsiifilised, efekti-spetsiifilised optimisatsioonid on toodud joonisel 23. Iga arvutuse m , mille efekt on err , saab samaväärselt asendada arvutusega $\text{FAIL } \sigma$. Samaväärsus $\text{failure } m$ põhineb asjaolul, et ebaõnnestunud arvutuse semantiline interpretatsioon erandite gradeeritud monaadis on tüüp \top , milles ongi ainult üks element ja seetõttu on tõestus triviaalne.

Lihtsustus dead-comp (jn 23) näitab, et kui kindlasti õnnestuvat osaarvutust m ei pruugita osaarvutuses n , siis nende sidumisel pole mõtet ja võib kasutada lihtsalt osaarvutust n . Tõestus on eespool antud arvutustermi lõdvenduse lemma-wkC rakendus.

Lihtsustus dup-comp (jn 23) võimaldab arvutuse m topelt arvutamise asendada ühekordse arvutamisega, kui arvutuse m efektiks on errok . Tõestuses analüüsitakse kõigepealt arvutuse n efekti kuju.

- Kui see arvutus ebaõnnestub, siis kogu arvutuse interpretatsioon on paratamatult tt ja seega tõestus on triviaalne.
- Kui arvutuse n efektiks on ok , siis analüüsitakse arvutuse m interpretatsiooni. Õnnestunud arvutuse $\text{just } x$ korral näidatakse ülesande tüüpi nõrgendamise lemma-wkC ja m -i uuritud interpretatsiooni eq -ga ümberkirjutades, et tulemus järeldub lemmast

```

◇-itself : (e : Exc) → e ◇ e ≡ e
◇-itself err = refl
◇-itself ok = refl
◇-itself errok = refl

the-same : {e : Exc} {Γ : Ctx} {ρ : ⟨⟨ Γ ⟩⟩X} {σ : VType}
  (m : CTerm Γ (e / σ)) →
  sub-eq (◇-itself e) (⟦ TRY m WITH m ⟧C ρ) ≡ ⟦ m ⟧C ρ
the-same {err} m = refl
the-same {ok} m = refl
the-same {errok} {ρ = ρ} m with ⟦ m ⟧C ρ
... | just _ = refl
... | nothing = refl

◇-ass : (e e' e'' : Exc) → e ◇ (e' ◇ e'') ≡ (e ◇ e') ◇ e''
◇-ass err e' e'' = refl
◇-ass ok e' e'' = refl
◇-ass errok err e'' = refl
◇-ass errok ok e'' = refl
◇-ass errok errok err = refl
◇-ass errok errok ok = refl
◇-ass errok errok errok = refl

handler-ass : {e1 e2 e3 : Exc} {Γ : Ctx} {ρ : ⟨⟨ Γ ⟩⟩X} {σ : VType}
  (m1 : CTerm Γ (e1 / σ)) (m2 : CTerm Γ (e2 / σ))
  (m3 : CTerm Γ (e3 / σ)) →
  sub-eq (◇-ass e1 e2 e3)
    (⟦ TRY m1 WITH (TRY m2 WITH m3) ⟧C ρ)
  ≡ ⟦ TRY (TRY m1 WITH m2) WITH m3 ⟧C ρ
handler-ass {err} m1 m2 m3 = refl
handler-ass {ok} m1 m2 m3 = refl
handler-ass {errok} {err} m1 m2 m3 = refl
handler-ass {errok} {ok} m1 m2 m3 = refl
handler-ass {errok} {errok} {err} m1 m2 m3 = refl
handler-ass {errok} {errok} {ok} {ρ = ρ} m1 m2 m3 with ⟦ m1 ⟧C ρ
... | just _ = refl
... | nothing = refl
handler-ass {errok} {errok} {errok} {ρ = ρ} m1 m2 m3 with ⟦ m1 ⟧C ρ
... | just x = refl
... | nothing = refl

```

Joonis 22: Erandite monaadi spetsiifilised, efekti suhtes genereerilised optimisatsioonid.

```

failure : {Γ : Ctx} {σ : VType} (m : CTerm Γ (err / σ)) →
  ⟦ m ⟧C ≡ ⟦ FAIL σ ⟧C
failure m = refl

dead-comp : {Γ : Ctx} {σ σ' : VType} {ε : Exc}
  (m : CTerm Γ (ok / σ)) (n : CTerm Γ (ε / σ' )) →
  (ρ : ⟨⟦ Γ ⟧⟩X) →
  ⟦ LET m IN (wkC zero n) ⟧C ρ ≡ ⟦ n ⟧C ρ
dead-comp m n ρ = lemma-wkC ρ (⟦ m ⟧C ρ) zero n

errok-seq : (e : Exc) → errok . (errok . e) ≡ errok . e
errok-seq e = sym (ass {errok} {errok} {e})

dup-comp : {e : Exc} {Γ : Ctx} {σ σ' : VType}
  (m : CTerm Γ (errok / σ)) (n : CTerm (dupX here) (e / σ')) →
  (ρ : ⟨⟦ Γ ⟧⟩X) →
  sub-eq (errok-seq e)
  (⟦ LET m IN LET wkC here m IN n ⟧C ρ)
  ≡ ⟦ LET m IN ctrC here n ⟧C ρ
dup-comp {err} m n ρ = refl
dup-comp {ok} m n ρ with ⟦ m ⟧C ρ | inspect ⟦ m ⟧C ρ
... | just x | [ eq ] rewrite lemma-wkC (x , ρ) here m | eq
  = cong just (lemma-ctrC (x , ρ) here n)
... | nothing | _ = refl
dup-comp {errok} m n ρ with ⟦ m ⟧C ρ | inspect (⟦ m ⟧C) ρ
... | just x | [ eq ] rewrite lemma-wkC (x , ρ) here m | eq
  = lemma-ctrC (x , ρ) here n
... | nothing | _ = refl

```

Joonis 23: Monaadi spetsiifilised, efekti-spetsiifilised optimisatsioonid.

lemma-ctrC. Ebaõnnestunud arvutuse korral pole arvutusse n ühtegi väärtust siduda ja kogu arvutuse interpretatsiooniks on `nothing`.

- Kui efektiks on `errok`, siis on tõestus analoogne efekti `ok` juhtumiga, v.a. asjaolu, et arvutuse `n` interpretatsioon on `Maybe` tüüpi.

3 Mittedeterminism

Selles peatükis vaadeldakse keele laiendust mittedeterministliku valikuga. Baaskeeleks on tüübitud lambda-arvutus koos tõeväärtuste, naturaalarvude ja paaridega. Kuna baaskeel on sama, mis peatükis 2, siis järgnevates alapeatükkides on toodud välja ainult olulisemad muudatused keele laienduse, tüübituletuse, semantika ja efektianalüüsi osas.

3.1 Mitte-deterministlik keel

Järgnev BNF esitab mitte-deterministliku keele grammatika.

$$\begin{aligned} t &::= \text{nat} \mid \text{bool} \mid t \bullet t \mid t \Rightarrow e / t & (e \in E) \\ v &::= \text{TT} \mid \text{FF} \mid \text{ZZ} \mid \text{SS } v \mid \langle v, v \rangle \mid \text{FST } v \mid \text{SND } v \\ &\mid \text{VAR } n \mid \text{LAM } t \ c & (n \in \mathbb{N}) \\ c &::= \text{VAL } v \mid \text{FAIL } t \mid \text{CHOOSE } c \ c \\ &\mid \text{IF } v \text{ THEN } c \text{ ELSE } c \mid v \$ v \mid \text{PREC } v \ c \ c \mid \text{LET } c \text{ IN } c \end{aligned}$$

Võrreldes eranditega keelega (ptk 2) on erandikäsitlusega arvutus TRY_WITH_ asendunud arvutusega CHOOSE, mis valib mittedeterministlikult, kumba osaarvutust täita.

Sellise keele rafineeritud ja rafineerimata arvutustermid on toodud joonisel 24. Väärtustermid on mõlemal keelel defineeritud samamoodi. Muutunud on arvutuste efektide tüüp E , mis defineeritakse alapeatükis 3.2. Deterministliku rafineeritud arvutustermi VAL v , millel on täpselt üks tulemus, efekti hinnanguks on 1 ja tulemuseta arvutustermi FAIL hinnanguks on \emptyset .

3.2 Mitte-determinismi gradeering

Naturaalarvud \mathbb{N} , nende korrutamine $_*_$ ja ühik 1 moodustavad monoidi. Naturaalarvude järjestusseos $_ \leq _$ on refleksiivne $\text{refl} \leq$, transitiivne $\text{trans} \leq$. Korrutamine on selle seose

```

data cTerm : Set where
  VAL : vTerm → cTerm
  FAIL : VType → cTerm
  CHOOSE : cTerm → cTerm → cTerm
  IF_THEN_ELSE_ : vTerm → cTerm → cTerm → cTerm
  _$ : vTerm → vTerm → cTerm
  PREC : vTerm → cTerm → cTerm → cTerm
  LET_IN_ : cTerm → cTerm → cTerm

data CTerm (Γ : Ctx) : CType → Set where
  VAL : {σ : VType} → VTerm Γ σ → CTerm Γ (1 / σ)
  FAIL : (σ : VType) → CTerm Γ (0 / σ)
  CHOOSE : {e e' : E} {σ : VType} → CTerm Γ (e / σ) →
    CTerm Γ (e' / σ) → CTerm Γ ((e ◇ e') / σ)
  IF_THEN_ELSE_ : {e e' : E} {σ : VType} → VTerm Γ bool →
    CTerm Γ (e / σ) → CTerm Γ (e' / σ) → CTerm Γ ((e ⊔ e') / σ)
  _$ : {σ : VType} {τ : CType} →
    VTerm Γ (σ ⇒ τ) → VTerm Γ σ → CTerm Γ τ
  PREC : {e e' : E} {σ : VType} → VTerm Γ nat →
    CTerm Γ (e / σ) → CTerm (σ :: nat :: Γ) (e' / σ) →
    e · e' ⊆ e → CTerm Γ (e / σ)
  LET_IN_ : {e e' : E} {σ σ' : VType} → CTerm Γ (e / σ) →
    CTerm (σ :: Γ) (e' / σ') → CTerm Γ (e · e' / σ')
  CCAST : {e e' : E} {σ σ' : VType} → CTerm Γ (e / σ) →
    e / σ ≤C e' / σ' → CTerm Γ (e' / σ')

```

Joonis 24: Mittedeterministliku keele arvutustermid.

```

 $\mathbb{N}^*$  : OrderedMonoid
 $\mathbb{N}^*$  = record { E =  $\mathbb{N}$ 
                ;  $-\cdot-$  =  $-\cdot^*$ 
                ; i = 1
                ; lu = lu*
                ; ru = ru*
                ; ass =  $\lambda \{m\ n\ o\} \rightarrow \text{ass}^* \{m\} \{n\} \{o\}$ 
                ;  $-\sqsubseteq-$  =  $-\leq-$ 
                ;  $\sqsubseteq\text{-refl}$  = refl $\leq$ 
                ;  $\sqsubseteq\text{-trans}$  = trans $\leq$ 
                ; mon = mon*
                }

```

Joonis 25: Mitte-determinismi eeljärjestatud monoid.

```

data BVec (X : Set) : (n :  $\mathbb{N}$ ) → Set where
  bv : {m n :  $\mathbb{N}$ } → Vec X m → m ≤ n → BVec X n

_::bv_ : {X : Set} {n :  $\mathbb{N}$ } → X → BVec X n → BVec X (suc n)
x ::bv (bv xs p) = bv (x :: xs) (s ≤ s p)

_++bv_ : {X : Set} {m n :  $\mathbb{N}$ } → BVec X m → BVec X n → BVec X (m + n)
bv xs p ++bv bv xs' q = bv (xs ++ xs') (mon+ p q)

```

Joonis 26: Ülalt tõkestatud pikkusega vektor.

suhtes monotoonne mon^* . Korrutamise vasakühiku lu^* , paremühiku ru^* ja assotsiatiivsuse ass^* ning monotoonsuse tõestused on toodud töö lähtekoodis. Sellega rahuldatakse alaptk 2.2.2 toodud tingimusi ja saab moodustada eeljärjestatud monoidi \mathbb{N}^* (jn 25).

Ülalt tõkestatud pikkusega vektorite tüüp $\text{BVec } X$ (jn 26) mingi hulga X jaoks on indekseeritud naturaalarvuga n , mis näitab vektoris olevate elementide suurimat võimalikku arvu. Ainsaks konstruktoris on bv , mis moodustab täpse pikkusega vektorist ja n -ö “lõtku” tõestusest, et selles vektoris ei ole rohkem elemente kui n , uue ülalt n -iga tõkestatud vektori. Ülalt tõkestatud vektori päisesse elemendi lisamine $_\text{::bv}_$ lisab selle elemendi täpse pikkusega vektori päisesse. Uue lõtku tõestus saadakse vanast kasutades asjaolu, et võrratus jääb kehtima, kui mõlemale poole liita 1. Vektorite liitmisel $_\text{++bv}_$ liidetakse täpse pikkusega vektorid omavahel ja elementide lõtku tõestus koostatakse liitmise monotoonsusega kummagi vektori lõtkude tõestusest.

Eeljärjestatud monoid \mathbb{N}^* ja parametrizeeritud tüübikonstruktor TBV , mis annab vastava ülalt tõkestatud vektori tüübi, rahuldavad gradeeritud monaadi omadusi (alaptk 2.2.3). Tagastamine ηBV koostab üheelemendilise ülalt tõkestatud ja ilma lõtkuta vektori. Sidumine bindBV rakendab antud funktsiooni igale vektori elemendile ja liidab saadud ülalt tõkestatud vektorid. Vastav gradeeritud monaadi definitsioon NDBV on toodud joonisel 27.

```

TBV = λ e X → BVec X e

ηBV : {X : Set} → X → BVec X i
ηBV x = bv (x :: []) (s ≤ s z ≤ n)

bindBV : {m n : ℕ} {X Y : Set} →
  (X → BVec Y n) → BVec X m → BVec Y (m · n)
bindBV f (bv [] z ≤ n) = bv [] z ≤ n
bindBV f (bv (x :: xs) (s ≤ s p)) = (f x) ++bv bindBV f (bv xs p)

NDBV : GradedMonad
NDBV = record { OM = ℕ*
  ; T = TBV
  ; η = ηBV
  ; bind = λ {e} {e'} → bindBV {e} {e'}
  ; sub = subBV
  ; sub-mon = subBV-mon
  ; sub-refl = subBV-refl
  ; sub-trans = subBV-trans
  ; mlaw1 = blaw1
  ; mlaw2 = blaw2
  ; mlaw3 = blaw3
  }

```

Joonis 27: Mitte-determinismi gradeeritud monaad.

3.3 Termide tüübituletus ja rafineerimine

Efektide järjestus võimaldab defineerida alamtüübid. Kuna see definitsioon on sama, mis eranditega keele puhul (alaptk 2.3.1), siis pole seda siinkohal toodud mitte-deterministliku keele jaoks.

Osa arvutustermide tüübituletusest on esitatud joonisel 28.

- VAL x on hästi tüübitud, kui väärtusterm x on antud kontekstis tüübitud. Arvutuse efekt 1 tähistab ühte tulemust, mille tüüp σ vastab väärtustermile tuletatud tüübile. See on ülehinnang, kuna hinnang 1 lubab ka 0 tulemust.
- FAIL σ korral on efektiks \emptyset , kuna ühtki σ tüüpi tulemust ei teki.
- CHOOSE $t \ t'$ on hästi tüübitud, kui mõlemad arvutustermid t ja t' on hästi tüübitud. Kogu arvutuse tüüp on määratud vastavalt tuletatud tüüpide τ ja τ' kombinatsiooniga $\tau \diamond_C \tau'$: efektid liidetakse $_+_$ -ga, sest kogu arvutusel on nii palju tulemusi, kui arvutustel t ja t' kokku. Väärtustüübiks on väärtustüüpide ülemine raja. Kui ülemine raja puudub, siis pole arvutus hästi tüübitud.


```

infer-ctype : (Γ : Ctx) → cTerm → Maybe CType
infer-ctype Γ (VAL x) with infer-vtype Γ x
... | just σ = just (1 / σ)
... | _      = nothing
infer-ctype Γ (FAIL σ) = just (0 / σ)
infer-ctype Γ (CHOOSE t t') with infer-ctype Γ t | infer-ctype Γ t'
... | just τ | just τ' = τ ◇C τ'
... | _ | _ = nothing
-- rest of definition omitted

refine-cterm : (Γ : Ctx) (t : cTerm) → refined-cterm Γ t
refine-cterm Γ (VAL t) with infer-vtype Γ t | refine-vterm Γ t
... | just _ | u = VAL u
... | nothing | u = tt
refine-cterm Γ (FAIL σ) with infer-ctype Γ (FAIL σ)
... | _ = FAIL σ
refine-cterm Γ (CHOOSE t t')
  with infer-ctype Γ t | refine-cterm Γ t |
    infer-ctype Γ t' | refine-cterm Γ t'
... | nothing | _ | _ | _ = tt
... | just _ | _ | nothing | _ = tt
... | just (e / σ) | u | just (e' / σ') | u'
    with σ ⊔V σ' | inspect (⊔V_ σ) σ'
... | nothing | _ = tt
... | just _ | [ p ] =
  CHOOSE (CCAST u (⊔V-subtype p))
    (CCAST u' (⊔V-subtype-sym {σ} p))
-- rest of definition omitted

```

Joonis 28: Mitte-deterministliku keele tüübituletus ja rafineerimine.

Rafineeritud arvutustermid on toodud joonisel 24. “Toorete” arvutustermide rafineerimine on esitatud joonisel 28.

- VAL t korral kontrollitakse, et väärtusterm t on hästi tüübitud, ja rafineeritud arvutusterm koostatakse vastavast rafineeritud väärtustermist u .
- FAIL σ korral näidatakse, et selle arvutustermi tüübituletus õnnestub, ning koostatakse samasugune rafineeritud arvutusterm.
- CHOOSE $t \ t'$ puhul peavad mõlemad osaarvutused t ja t' olema hästi tüübitud. Kui neile tuletatud arvutustüüpide väärtustüüpidel on ülemine raja, siis rafineeritud arvutus koostatakse vastavate rafineeringutest u ja u' , suurendades neid vastavalt ülemise raja tõestusele p .

```

sfail : {X : Set} → T 0 X
sfail = bv []V z≤n

sor : (e e' : ) {X : Set} → T e X → T e' X → T (e + e') X
sor e e' = _++bv_

[[_]C : {Γ : Ctx} {τ : CType} → CTerm Γ τ → ⟨⟨ Γ ⟩⟩X → ⟨⟨ τ ⟩⟩C
[[_]C : {x : CTerm} {ρ : CType} → CTerm x ρ → ⟨⟨ x ⟩⟩V ρ
[[_]C : {σ : CTerm} {ρ : CType} → CTerm σ ρ → sfail {⟨⟨ σ ⟩⟩V}
[[_]C : {e : CTerm} {e' : CTerm} {t : CTerm} {t' : CTerm} {ρ : CType} → CTerm e ρ → CTerm e' ρ → CTerm (e + e') ρ
-- rest of definition omitted

```

Joonis 29: Mitte-deterministliku keele semantika.

3.4 Semantika

Väärtustermide semantika on antud samamoodi nagu eranditega keeles (alaptk 2.4). Joonisel 29 on toodud osa arvutustermide semantikast.

- VAL x korral rakendatakse väärtustermi x interpretatsioonile ühikut η ehk moodustatakse temast lõtkuta vektor pikkusega 1.
- FAIL σ korral koostatakse tühi ülalt tõkestatud vektor funktsiooniga `sfail`. Selle vektori elementide tüüp on määratud väärtustüübi σ interpretatsiooniga.
- CHOOSE $t \ t'$ interpretatsioon vastab mitte-deterministlikule valikule arvutuste t ja t' vahel. See on realiseeritud vastavate arvutustermide interpreteerimisel saadud vektorite liitmisega.
- Ülejäänud arvutustermi konstruktorite semantika on nii nagu eranditega keeles.

3.5 Optimisatsioonid

Struktuursed teisendused – lõdvendamine ja kontraheerimine – toimivad mitte-deterministliku keele puhul analoogselt eranditega keelega. Vastavad tüübisignatuurid on samad, mis alapeatükis 2.5 joonistel 20 ja 21 esitatud.

Näited mittedeterminismi monaadi jaoks spetsiifilistest, kuid efekti-geneerilistest optimisatsioonidest on toodud joonisel 30. Lihtsustus `fail-or-m` näitab, et valides mitte-deterministlikult arvutuste FAIL X ja m vahel on tulemus sama nagu ainult m arvutamisel. Kuna konstruktori CHOOSE interpretatsioonile vastab osaarvutuste interpreteerimisel saa-

```

fail-or-m : {Γ : Ctx} {X : VType} {e : N} (m : CTerm Γ (e / X)) →
  (ρ : ⟨⟨ Γ ⟩⟩X) →
  [ CHOOSE (FAIL X) m ]C ρ ≡ [ m ]C ρ
fail-or-m m ρ with [ m ]C ρ
... | bv xs p = refl

choose-ass : {e1 e2 e3 : N} {Γ : Ctx} {X : VType}
  (m1 : CTerm Γ (e1 / X)) (m2 : CTerm Γ (e2 / X))
  (m3 : CTerm Γ (e3 / X)) (ρ : ⟨⟨ Γ ⟩⟩X) →
  sub-eq (+ass {e1} {e2} {e3})
    ([ CHOOSE m1 (CHOOSE m2 m3) ]C ρ)
  ≡ [ CHOOSE (CHOOSE m1 m2) m3 ]C ρ
choose-ass m1 m2 m3 ρ with [ m1 ]C ρ | [ m2 ]C ρ | [ m3 ]C ρ
... | bv1 | bv2 | bv3 = lemma-ass++ bv1 bv2 bv3

fails-earlier : {e : N} {Γ : Ctx} {ρ : ⟨⟨ Γ ⟩⟩X} {X Y : VType}
  (m : CTerm (X ::l Γ) (e / Y)) →
  [ LET FAIL X IN m ]C ρ ≡ [ FAIL Y ]C ρ
fails-earlier m = refl

```

Joonis 30: Mitte-determinismi monaadi spetsiifilised, efektist sõltumatud teisendused.

dud tõkestatud vektorite liitmine ja konstruktori FAIL interpretatsioon on lihtsalt tühi vektor, siis ekvivalentsi tõestus taandub ülalt tõkestatud vektorite liitmise definitsioonile.

Mitte-deterministlik valik on assotsiatiivne. Selline teisendus `choose-ass` on näidatud joonisel 30. Tõestus tugineb ülalt tõkestatud vektorite liitmise assotsiatiivusel, mis on tõestatud töö lähtekoodis.

Lihtsustus `fails-earlier` (jn 30) näitab, et kui siduda ebaõnnestuv arvutus mingi arvutusega `m`, siis tulemus on sama kui kogu arvutus ebaõnnestuks. Sidumise konstruktori `LET_IN_` interpretatsioon seob kõik väärtused esimese osaarvutuse interpretatsioonist, milleks arvutuse `FAIL X` korral on tühi vektor, teise osaarvutusega. Kuna esimesest osaarvutusest ei tekkinud ühtegi väärtust, siis sidumisel ei saa ka ühtegi väärtust tekkida. Seega on samaväärsus triviaalne.

Joonisel 31 on toodud mõned mittedeterminismi efekti-spetsiifilised teisendused. Lihtsustus `failure` näitab, et iga arvutuse `m`, mille arvutuse tulemusena ei teki mitte ühtegi väärtust (teisisõnu: arvutusel on ülimalt \emptyset väärtust), võib samaväärsena asendada arvutuse ebaõnnestumise konstruktsiooniga `FAIL`. Kuna arvutustermi `m` interpretatsioon antud konteksti interpretatsioonis ρ on tühi ülalt \emptyset -ga tõkestatud vektor, siis tõestus on triviaalne.

Samaväärsus `dup-comp` (jn 31) näitab, et iga arvutust `m`, mille efekt on ülimalt 1, pole vaja topelt arvutada. Põhjendus on järgnev: kui `m` tulemuseks on täpselt üks väärtus, siis `LET_IN_` sidumisel `m`-iga ei teki väärtuseid juurde ja võib kohe selle väärtuse siduda `n`-iga; kui `m` arvutuse tulemusel ühtegi väärtust ei teki, siis pole ka järgnevasse arvutustesse

```

failure : {Γ : Ctx} {X : VType} (m : CTerm Γ (0 / X)) →
  (ρ : ⟨⟨ Γ ⟩⟩X) →
  ⟦ m ⟧C ρ ≡ ⟦ FAIL X ⟧C ρ
failure m ρ with ⟦ m ⟧C ρ
... | bv [] z≤n = refl

dup-comp : {e : ℕ} {Γ : Ctx} {X Y : VType}
  (m : CTerm Γ (1 / X)) (n : CTerm (dupX here) (e / Y)) →
  (ρ : ⟨⟨ Γ ⟩⟩X) →
  sub-eq (errok-seq e)
    (⟦ LET m IN LET wkC here m IN n ⟧C ρ)
  ≡ ⟦ LET m IN ctrC here n ⟧C ρ
-- proof omitted

```

Joonis 31: Mitte-determinismi efekti spetsiifilised optimisatsioonid.

midagi siduda. Tõestus on antud töö lähtekoodis.

Antud töös on mitte-deterministliku keele semantika antud ülalt tõkestatud vektoriga, kuid seda võib teha ka hulkadel, kus pole tulemuste kordsus ja järjekord olulised. Kui hinnata tulemuste hulga kardinaalsust ka alt (nt 0 - ebaõnnestumine, 1 - deterministlik, 01 - pooldeterministlik, 1+ - mitmikdeterministlik, N - mitte-deterministlik), siis saab tõestada surnud arvutuse eemaldamise (*dead computation*) ja arvutuse väljatõstmise (*pure lambda hoist*) lihtsustused [2].

4 Kokkuvõte

Käesoleva töö eesmärgiks oli realiseerida sõltuvate tüüpidega programmeerimiskeeles Agda efektianalüüside ja neil põhinevate programmiteisenduste raamistu.

Esitati erandeid toetav näitekeel. Seejärel defineeriti erandite efektide hindamine, tuues sisse gradeeritud monaadi mõiste. Gradeeringu abil määrati alamtüübid ja -efektid, millele tugines keele rafineerimine. Keele semantika defineeriti juba rafineeritud keelele. Töö käigus valmisid programmiteisendused, mh “surnud” arvutuse ja korduva arvutuse eemaldamise optimisatsioonid. Ühtlasi näidati, et need teisendused on korrektsed.

Töö teises pooles kasutati mitte-determinismi toetavat näitekeelt. Keele semantika andmiseks loodi ülalt tõkestatud vektori andmestruktuur. Sellega koos anti naturaalarvude korrumise jaoks gradeeritud monaadi instants. Defineeriti termide tüübituletus ja keele rafineerimine. Esitati ebaõnnestunud arvutuse ja korduva arvutuse eemaldamise optimisatsioonid ning näidati selliste teisenduste korrektsust.

Sertifitseeritud programmeerimine on mahukas ettevõtmine, kuna arutelu isegi intuitiivselt õige aritmeetika üle võib osutuda ajakulukaks. Kõigele vaatamata õnnestus efektianalüüside ja programmiteisenduste raamistu realiseerimine.

Kasutatud kirjandus

- [1] Nick Benton, Andrew Kennedy, Martin Hofmann, and Lennart Beringer. *Reading, Writing and Relations*, pages 114–130. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2006.
- [2] Nick Benton, Andrew Kennedy, Martin Hofmann, and Vivek Nigam. *Counting Successes: Effects and Transformations for Non-deterministic Programs*, pages 56–72. Springer International Publishing, Cham, 2016.