

Proyecto Mecánica analítica: Ruta del caos del hamiltoniano de Hénon-Heiles

Tonny Gualdron
Departamento de Física
Universidad de los Andes

(Día: Junio 3 de 2022)

La idea de este proyecto es investigar la llamada “ruta al caos” del hamiltoniano autónomo de Hénon-Heiles. Primero, se realiza una descripción de las constantes de movimiento asociadas al sistema. Segundo, se realiza un análisis del comportamiento del potencial de Hénon-Heiles. Tercero, se utiliza las ecuaciones de movimiento derivadas del hamiltoniano para construir numéricamente secciones de Poincaré para diferentes valores de energía. Cuarto, se generan visualizaciones de los toros que representan las orbitas calculadas a partir de las ecuaciones de movimiento derivadas del hamiltoniano. Quinto, se analiza como se van destruyendo los toros a medida que se incrementa el parámetro de control de la perturbación del hamiltoniano. Por ultimo, se realiza una exploración numérica de exponentes de Lyapunov del sistema.

I. INTRODUCCIÓN

A finales de la década de los 50 y inicios de los 60 existía un interés por la tercera integral de movimiento para las estrellas que se mueven en el potencial de la galaxia. Lo cual llevo a la publicación en 1964 por parte de Michel Hénon y su estudiante de posgrado Carl Helies del artículo llamado “The applicability of the third integral of motion: Some numerical experiments”. En este análisis ellos suponen que el potencial gravitatorio de una galaxia es independiente del tiempo y tiene un eje de simetría (plano xy). Utilizando coordenadas cilíndricas tenemos un espacio de seis dimensiones, por lo cual deben existir 5 integrales conservativas independientes del movimiento que son constantes a lo largo de cualquier trayectoria [1].

$$I_j(R, \theta, z, \dot{R}, \dot{\theta}, \dot{z}) \quad (j = 1, 2, 3, 4, 5)$$

$$I_j = C_j \quad (j = 1, 2, 3, 4, 5)$$

En el espacio de fase cada ecuación corresponde a una hiper-superficie y la intersección de estas forma una trayectoria. Para este problema existen dos integrales conocidas que corresponde a energía total y al momento angular (por unidad de masa).

$$E = I_1 = U_g(R, z) + \frac{1}{2}(\dot{R}^2 + R^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) \quad (1)$$

$$L = I_2 = R^2\dot{\theta} \quad (2)$$

II. HAMILTONIANO

El potencial de Hénon-Heiles corresponde a dos osciladores armónicos estándar acoplados mas dos términos cúbicos de perturbación [2]. El hamiltoniano correspondiente a este potencial es:

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{1}{2}k(x^2 + y^2) + \eta\left(x^2y - \frac{1}{3}y^3\right) \quad (3)$$

Donde η es coeficiente pequeño que permite modular la perturbación. Para simplificar podemos tomar $p_x = m\dot{x}$ y $p_y = m\dot{y}$, con lo cual obtenemos la siguiente ecuación para la energía (utilizando unidades sin dimensión):

$$E = H = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \eta\left(x^2y - \frac{1}{3}y^3\right) \quad (4)$$

Las ecuaciones de movimiento para el sistema son:

$$\dot{P}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = \ddot{x} = -x - 2xy\eta \quad (5)$$

$$\dot{P}_y = -\frac{\partial H}{\partial y} = \ddot{y} = -y - x^2 + y^2\eta \quad (6)$$

III. POTENCIAL

El potencial Hénon-Heiles con $\eta = 1$ corresponde a la siguiente ecuación:

$$V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \left(x^2y - \frac{1}{3}y^3\right) \quad (7)$$

Las figuras 1 y 2 corresponden a las superficies de potencial que se calcula utilizando la ecuación 7 para X y Y en los rangos de -1 a 1 y -2 a 2 respectivamente. Las figuras 3 y 4 son mapas 2D de la intensidad del potencial derivado de los datos de las figuras 1 y 2 sobre las cuales se han marcado en blanco las superficies equipotenciales para valores de energía de los rangos 1/100 a 1 y -1 a 8 respectivamente. Para generar esta gráficas se utiliza el cuaderno de jupyter PotencialHenonHeiles.ipynb.

Para energías superiores a 1/6, las superficies equipotenciales se encuentran más allá del triángulo, son abiertas y divergen hasta el infinito (ver figura 4). Por lo tanto, la magnitud de la energía determina si los términos cúbicos constituyen o no una perturbación, o sirven como términos de potencial principal. Los términos cinéticos y potenciales para energías inferiores a 1/6 deben satisfacer la siguientes desigualdades:

$$V(x, y) = \frac{1}{2} (x^2 + y^2) + \left(x^2 y - \frac{1}{3} y^3 \right) \leq E$$

$$T(\dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{2m} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \leq E$$

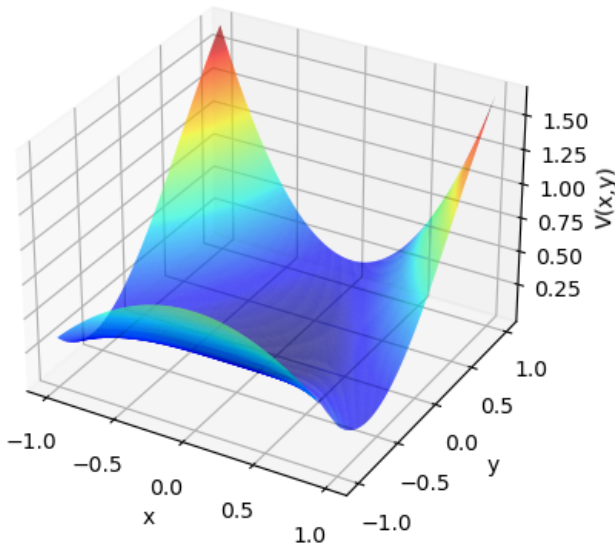


Figura 1. Superficie del potencial de Hénon-Heiles para X y Y en el rango de -1 a 1.

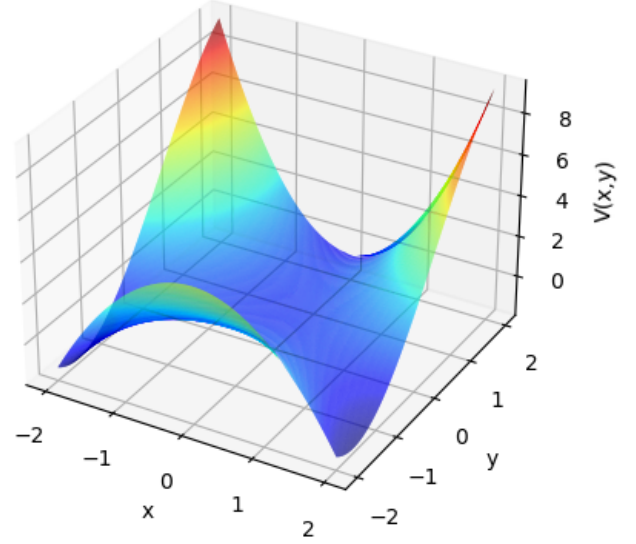


Figura 2. Superficie del potencial de Hénon-Heiles para X y Y en el rango de -2 a 2.

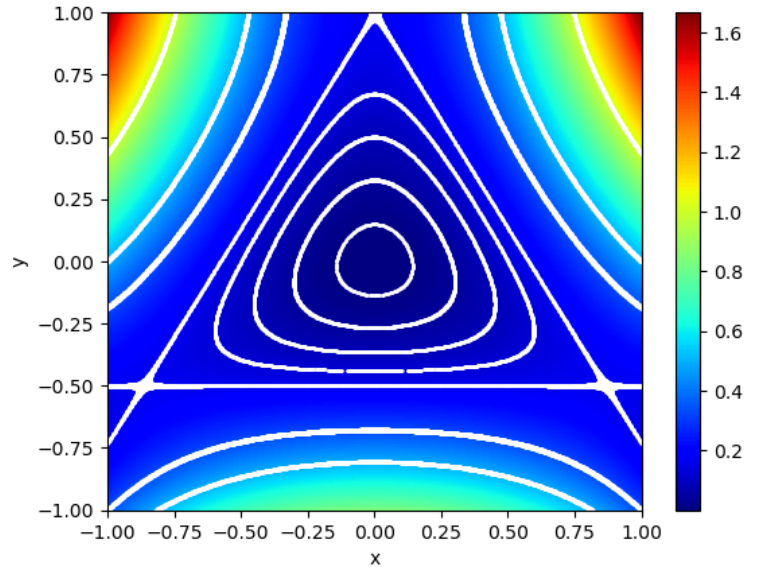


Figura 3. Mapa de intensidad del potencial de Hénon-Heiles para X y Y en el rango de -1 a 1. Las líneas blancas representan superficies equipotenciales para valores de energía de 1, 1/2, 1/3, 1/6, 1/8, 1/12, 1/24, 1/100 que se ubican en este orden de afuera hacia adentro de la gráfica.

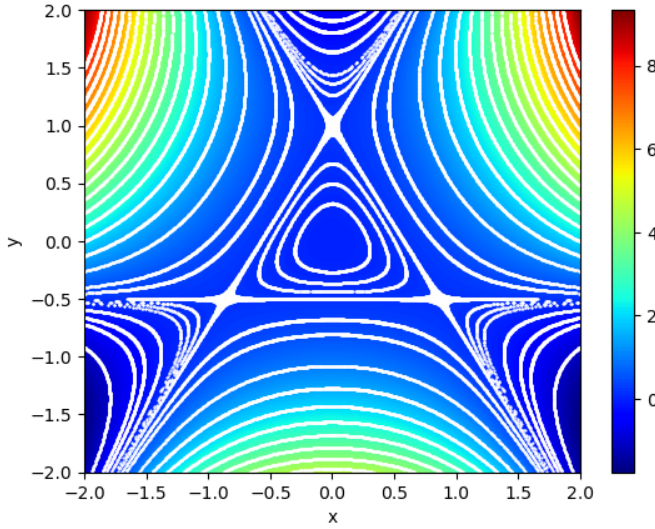


Figura 4. Mapa de intensidad del potencial de Hénon-Heiles para X y Y en el rango de -2 a 2. Las líneas blancas representan superficies equipotenciales para valores de energía de 8, 15/2, 7, 13/2, 6, 11/2, 5, 9/2, 4, 7/2, 3, 5/2, 2, 3/2, 1, 1/2, 1/3, 1/6, 1/8, 1/12, 1/24, -1/8, -1/3, -1/2, -1.

IV. SECCIONES DE POINCARÉ

Las secciones de Poincaré son planos de la hiper-superficie que permiten estudiar con mayor facilidad espacios de fase de N dimensiones. La elección mas común es utilizar el plano del momento con una coordenada. Para esto se solucionan numéricamente las ecuaciones de movimiento 5 y 6 (con $\eta = 1$) se seleccionan los valores de momento en y (P_y) por cada 0 en x. Las órbitas fijas darán lugar a un único punto en el mapa porque la órbita vuelve al mismo punto en cada revolución, mientras que un movimiento perturbado dará lugar a múltiples puntos debido a que la órbita se desplaza en el tiempo debido a la perturbación.

Las figuras 6, 7, 8, 9 y 10 representan secciones de Poincaré para valores de energía en el rango de 0.0038 a 1/6. Para la construcción de estas se utilizó una posición inicial en x igual 0, una posición en y en el rango de 0 a 0.2, y un momento en y (P_y) en el rango 0 a 0.2. El momento en x es calculado mediante la ecuación 4. Las diferentes combinaciones de condiciones iniciales y sus colores representativos para las gráficas se muestran en la figura 5.

La perturbación tiene un efecto notable aun en energías bajas, en consecuencia las órbitas se han movido en el espacio de fase formando curvas cerradas (islas) en el espacio de fase en vez de puntos (ver figuras 6, 7 y 8). Esto se debe a que en este nivel bajo de energía la perturbación cambia la órbita de modo que los puntos vecinos son posteriores entre sí. En la figura 8 podemos

ver los primeros indicios de caos para las condiciones iniciales que corresponden a los puntos morados ($y=0.1$, $P_y = 0.1$), podemos ver que estos ya no forman una curva cerrada por lo cual los puntos vecinos no son necesariamente posteriores entre sí.

En la figura 9 se evidencia como las islas son rodeadas por regiones caóticas de las condiciones iniciales verde claro ($y=0.2$, $P_y = 0.2$) y anaranjada ($y=0.0$, $P_y = 0.1$). Por ultimo, la figura 10 nos muestra un mapa dominado por regiones caóticas lo cual se refleja en la combinación de puntos en el espacio y la escasez de islas. Para generar esta gráficas se utiliza el cuaderno de jupyter PoincareHenonHeiles.ipynb.

• $y=0.0, P_y=0.0$	• $y=0.1, P_y=0.2$
• $y=0.0, P_y=0.1$	• $y=0.2, P_y=0.0$
• $y=0.0, P_y=0.2$	• $y=0.2, P_y=0.1$
• $y=0.1, P_y=0.0$	• $y=0.2, P_y=0.2$
• $y=0.1, P_y=0.1$	

Figura 5. Combinaciones de condiciones iniciales y sus colores representativos para las gráficas.

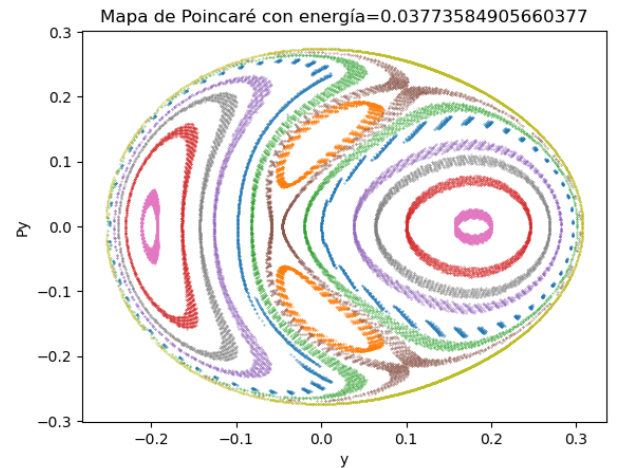


Figura 6. Sección de Poincaré para una energía de 0.038.

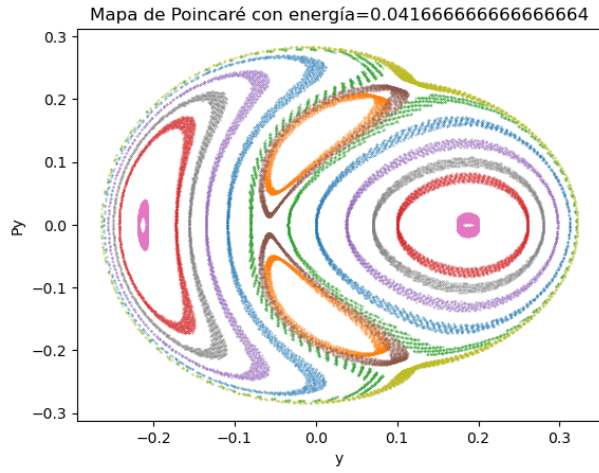


Figura 7. Sección de Poincaré para una energía de $1/24$.

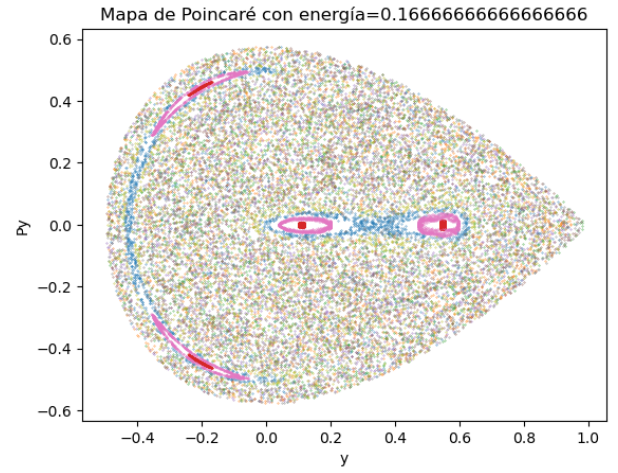


Figura 10. Sección de Poincaré para una energía de $1/6$.

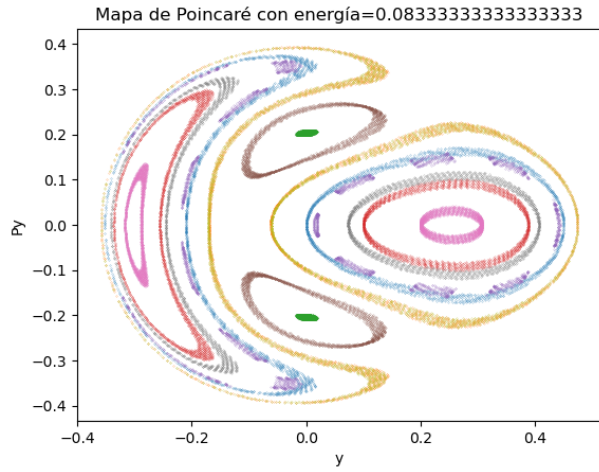


Figura 8. Sección de Poincaré para una energía de $1/12$.

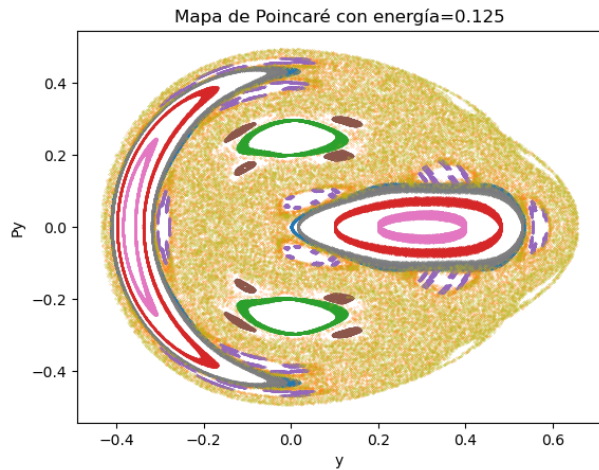


Figura 9. Sección de Poincaré para una energía de $1/8$.

V. ORBITAS Y TOROIDES

Las figuras 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19 y 20 presentan las órbitas y toroides del sistema para valores de energía en el rango de 0.0038 a $1/6$. Las condiciones iniciales son iguales en todas las figuras y corresponden a 0 como posición de x inicial, 0,0.128846 como posición de y inicial, y 0.018450 como momento en y (P_y) inicial. En las figuras se observa coherentemente con las secciones de Poincaré que con el aumento de la energía el sistema se vuelve más caótico deformado el toroide del sistema. Para generar esta gráfica se utiliza el cuaderno de jupyter `OrbitasHenonHeiles.ipynb`.

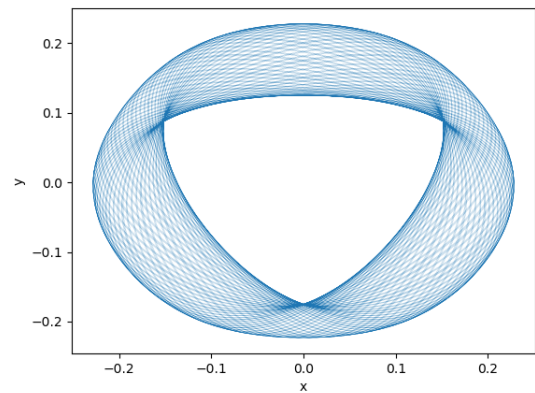


Figura 11. Órbita para una energía de 0.038.

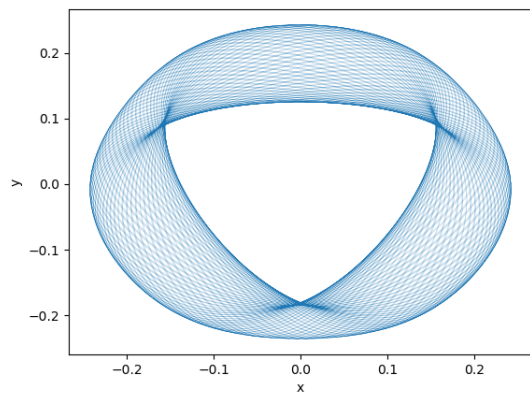


Figura 12. Orbita para una energía de $1/24$.

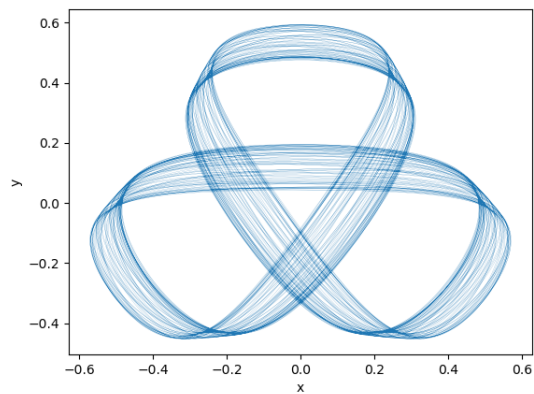


Figura 15. Orbita para una energía de $1/6$.

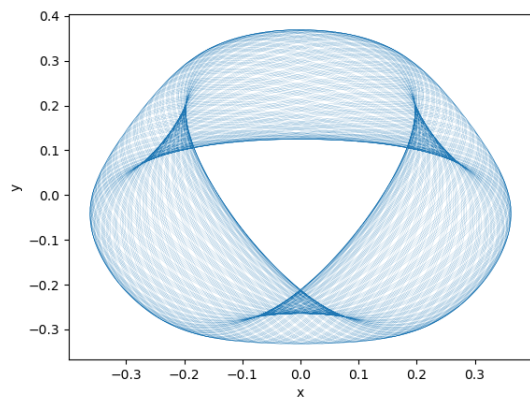


Figura 13. Orbita para una energía de $1/12$.

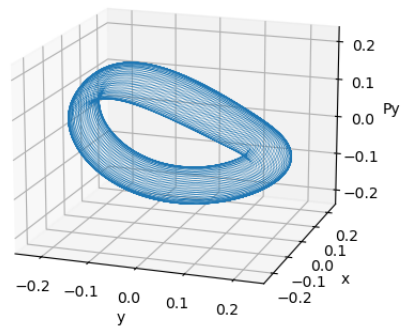


Figura 16. Toroide para una energía de 0.038 .

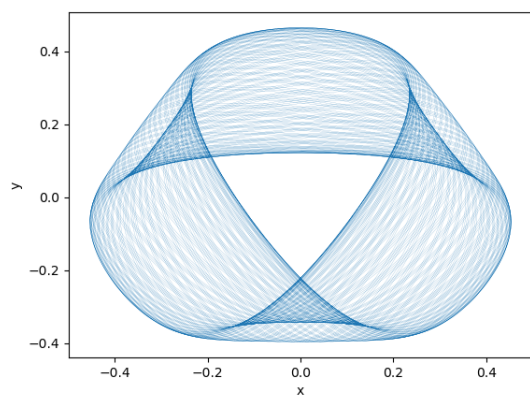


Figura 14. Orbita para una energía de $1/8$.

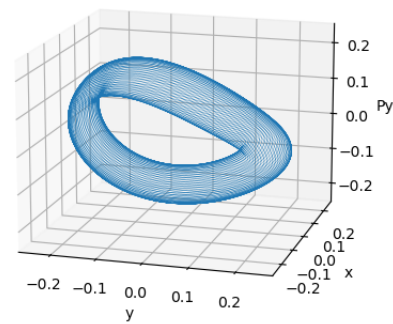


Figura 17. Toroide para una energía de $1/24$.

VI. PARÁMETRO DE CONTROL

A continuación se presenta las secciones de Poincaré, orbitas y toroides para una energía de $1/6$ variando el parámetro η en el rango 0 a 0.75. En las secciones anteriores se puede consultar la sección de Poincaré, orbita y toroide para una energía de $1/6$ y un valor de η igual a 1. Coherente con la teoría el aumento del parámetro de control genera la destrucción de los toros y el aumento del caos en el sistema. Para generar esta gráficas se utiliza el cuaderno de jupyter PoincareHenonHeilesEta.ipynb.

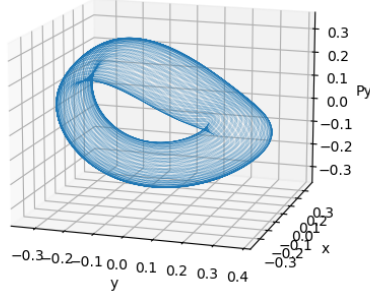


Figura 18. Toroide para una energía de $1/12$.

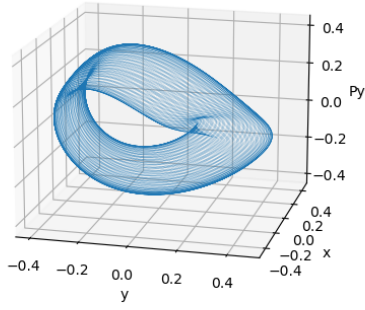


Figura 19. Toroide para una energía de $1/8$.

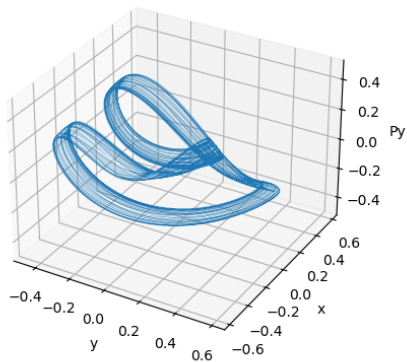


Figura 20. Toroide para una energía de $1/6$.

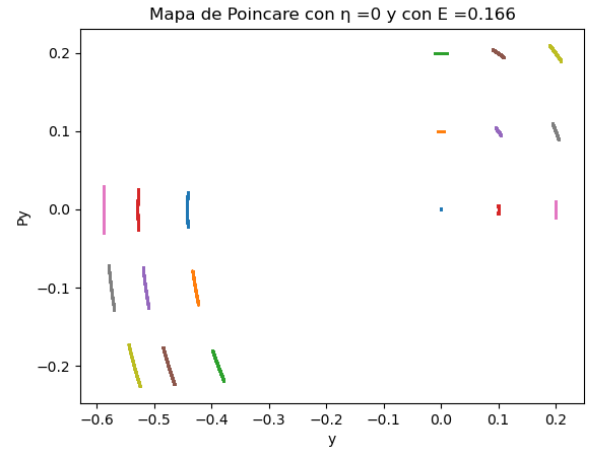


Figura 21. Sección de Poincaré para una energía de $1/6$ y η de 0.

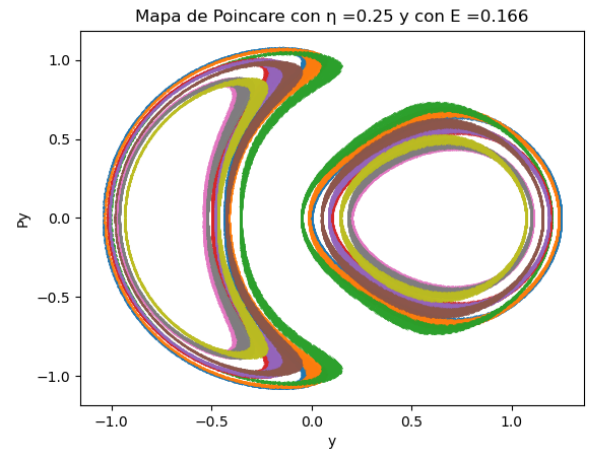


Figura 22. Sección de Poincaré para una energía de $1/6$ y η de 0.25.

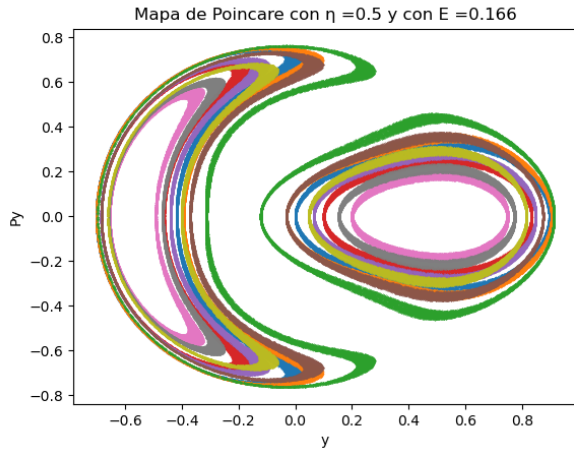


Figura 23. Sección de Poincaré para una energía de $1/6$ y η de 0.50 .

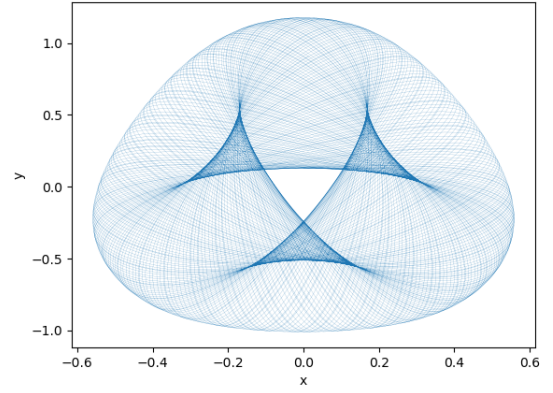


Figura 26. Orbita para una energía de $1/6$ y η de 0.25 .

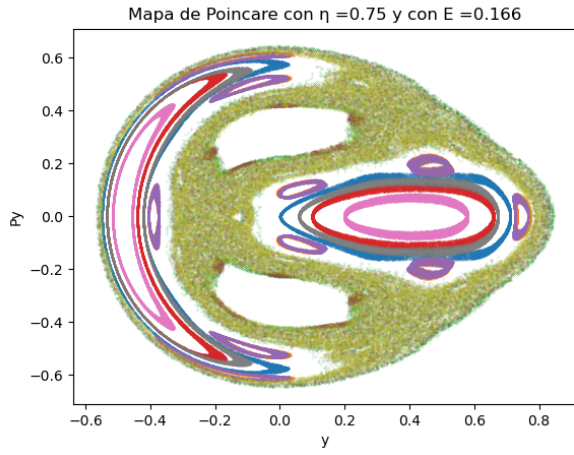


Figura 24. Sección de Poincaré para una energía de $1/6$ y η de 0.75 .

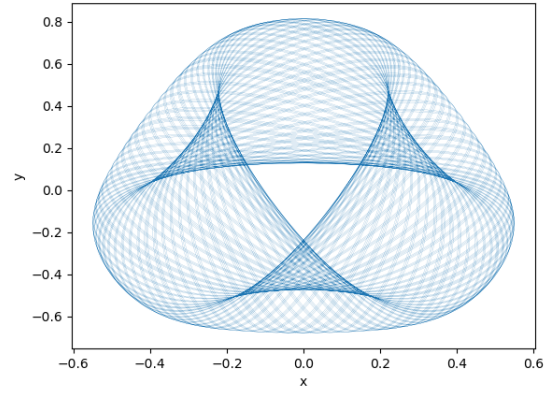


Figura 27. Orbita para una energía de $1/6$ y η de 0.5 .

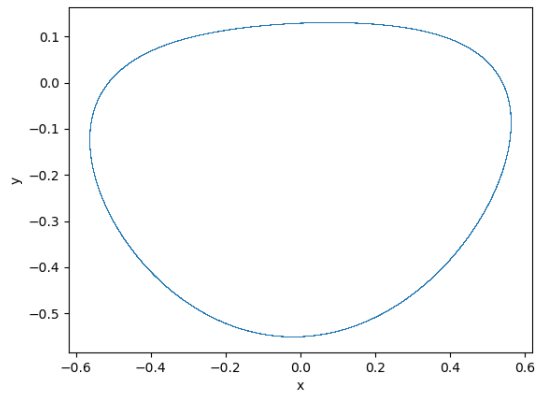


Figura 25. Orbita para una energía de $1/6$ y η de 0 .

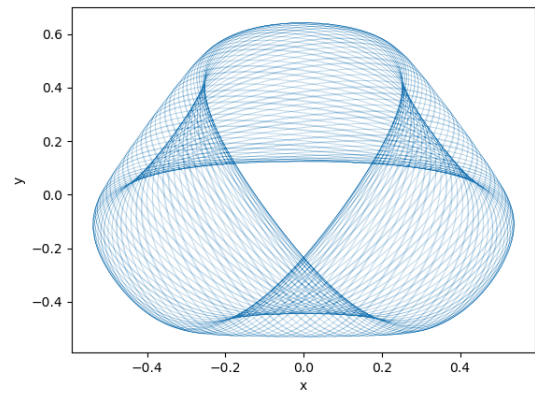


Figura 28. Orbita para una energía de $1/6$ y η de 0.75 .

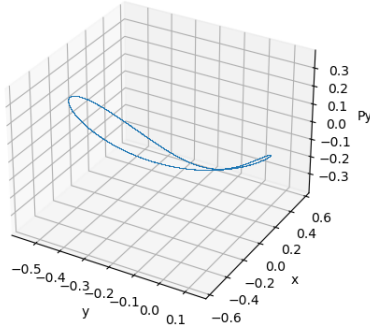


Figura 29. Toroide para una energía de $1/6$ y η de 0.

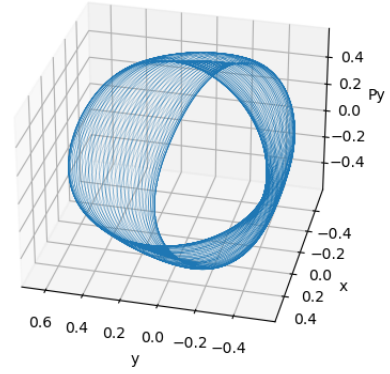


Figura 32. Toroide para una energía de $1/6$ y η de 0.75 .

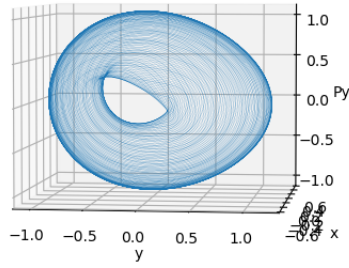


Figura 30. Toroide para una energía de $1/6$ y η de 0.25 .

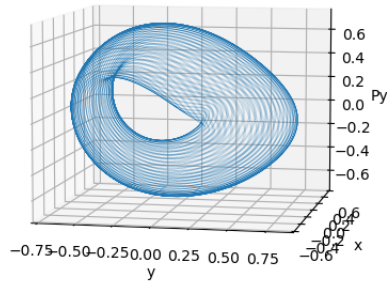


Figura 31. Toroide para una energía de $1/6$ y η de 0.50 .

VII. EXPONENTES DE LYAPUNOV

El exponente de Lyapunov de un sistema dinámico es una cantidad que caracteriza la tasa de separación de trayectorias infinitesimal-mente cercanas. Las figuras 33, 34, 35, 36 y 37 presentan la evolución temporal de los exponentes de Lyapunov para dos orbitas que difieren en 0.001 para energías en el rango de 0.038 a $1/6$. Las condiciones iniciales son iguales en todas las figuras y corresponden a 0 como posición de x inicial, 0,0.128846 como posición de y inicial, y 0.018450 como momento en y (P_y) inicial. Los exponentes son positivos por lo cual podemos afirmar que el movimiento es caótico y se observa que los exponentes aumentan con la energía coherente con los análisis de las secciones anteriores. Para generar esta gráficas se utiliza el cuaderno de jupyter LyapunovHenonHeiles.ipynb.

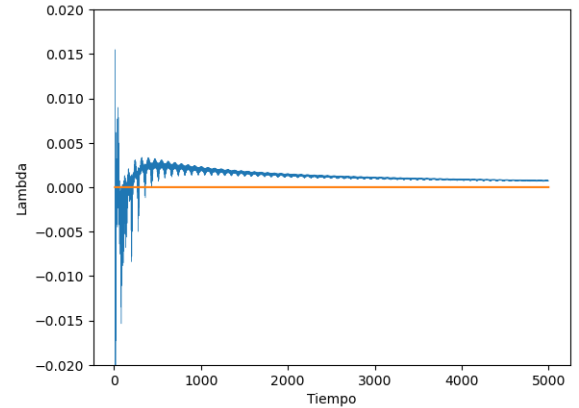


Figura 33. Exponente de Lyapunov para una energía de 0.038.

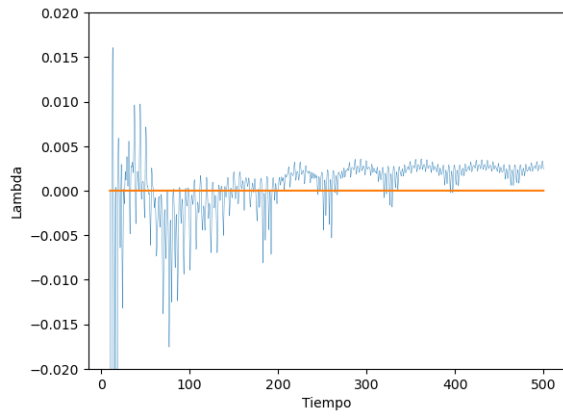


Figura 34. Exponente de Lyapunov para una energía de $1/24$.

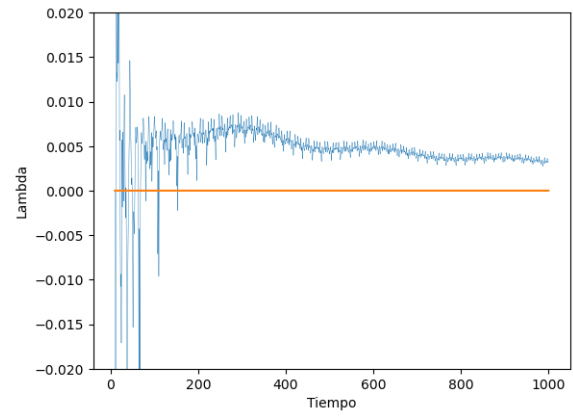


Figura 36. Exponente de Lyapunov para una energía de $1/8$.

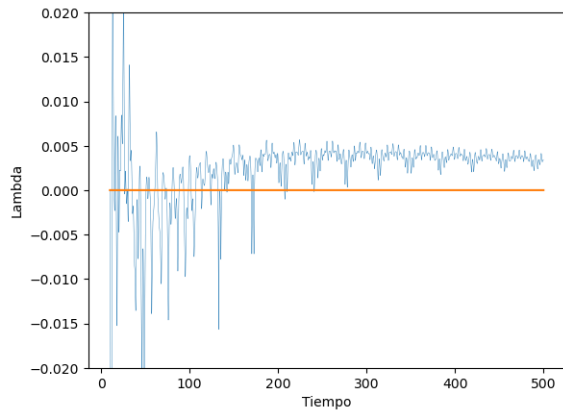


Figura 35. Exponente de Lyapunov para una energía de $1/12$.

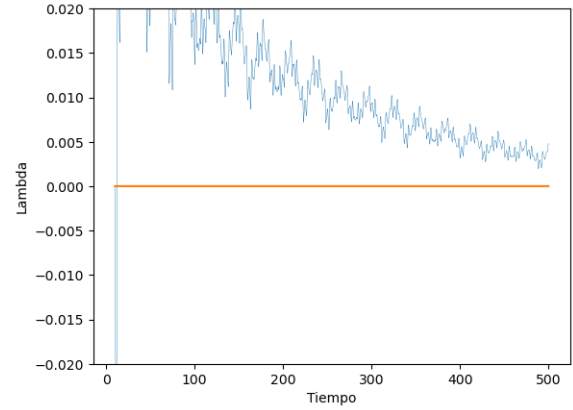


Figura 37. Exponente de Lyapunov para una energía de $1/6$.

-
- [1] M. Henon and C. Heiles, The applicability of the third integral of motion: Some numerical experiments, **69**, 73 (1964).
 [2] H. Goldstein, *Classical Mechanics* (Addison-Wesley, 1980).

VIII. CÓDIGO

Los cuadernos de Jupyter utilizado puede ser consultado en el repositorio publico <https://github.com/tonnygualdron/HenonHeilesRutaDelCaos>.