[**HOME - BASE Cinque** - *Appunti di Matematica ricreativa*]

# 10.000!

**da una proposta di cfb**

Qualche anno fa su una rivista di informatica fu lanciato un concorso.
**Calcolare gli zeri finali presenti in 10.000! ed eventualmente calcolare il fattoriale.**

Per me un problema è interessante (tra l'altro) quando genera altri problemi che ti stimolano a costruire o studiare una piccola teoria matematica.

Questo problema ha due aspetti: uno poco interessante e l'altro molto interessante.
**E' poco interessante** calcolare **con quanti zeri termina un fattoriale** perché ciò riguarda NON l'essenza dei numeri MA SOLTANTO una loro particolare rappresentazione, che è quella decimale.
**E' molto interessante** calcolare qual è la **massima potenza di un numero primo che divide un fattoriale** perché ciò è indipendente dalla rappresentazione utilizzata e perciò riguarda l'essenza dei numeri.

Affrontando il problema, subito mi accorgo che:

a) un fattoriale è divisibile per una gran quantità di numeri

b) dovrei scoprire quante volte il 5 e il 2 sono contenuti in 10.000!

Dopo alcuni tentativi di risolvere il problema sono portato a chiedermi:

Come posso calcolare facilmente la **massima potenza di un numero primo che divide un fattoriale**?

Per rispondere a questa domanda mi rendo conto che devo costruire una piccola teoria della funzione **[parte intera di n]**.

Ma prima di procedere, vorrei riportare la soluzione inviata da Giorgio Dendi che in pratica è una esemplare dimostrazione di un teorema, sia pur applicata ad un caso particolare.

**Ciao. A me risulta ci siano 2.499 zeri finali.**
**Per ottenere 0 finale, il numero deve essere divisibile per 10, cioè deve esserci un fattore 2 e un 5.**
**Di 2 ce ne sono molti, i 5 sono di meno.**
**Quindi ci chiediamo quanti 5 ci sono come fattore.**
**Ogni cinque numeri consecutivi considerati, uno mi porta un fattore 5: 1 2 3 4 non servono, il 5 mi porta un fattore 5.**
**Allora in tutto ce ne sono 10.000/5, cioè 2.000.**
**Ma ogni 5 di questi fattori 5, uno vale il doppio, cioè 5 10 15 20 mi portano un 5, ma il 25 me ne porta 2.**
**Allora quelli che mi portano un secondo 5 sono 2.000/5, cioè 400.**
**Anche fra questi c'è uno ogni 5 che mi porta un ulteriore 5, il terzo 5 come fattore. Infatti 25 50 75 100 mi portano ciascuno i due 5 già considerati, ma 125 me ne porta un terzo.**
**Questi numeri sono in numero di 400/5, cioè 80.**
**Poi quelli che portano quattro 5 sono 80/5, cioè 16 e quelli che portano cinque 5 come fattore sono 16/5, cioè 3.125, 6.250 e 9.375.**
**In tutto 2.000 + 400 + 80 + 16 + 3 = 2.499.**
**Che curioso che sia proprio la quarta parte del numero di cui si calcola il fattoriale. Quasi!**
**(Giorgio Dendi)**

La procedura proposta da Giorgio Dendi può essere generalizzata.
Posso chiedermi, ad esempio: quanti 2 o quanti 23 ci sono in 10.000! ?

**La regola in sintesi**
Per calcolare l'**esponente *k*** della **massima potenza di un numero**

**primo *p* che divide un fattoriale *n!*** si procede così:

**[n / p] = q1** (parte intera del quoziente n/p)

**[q1 / p] = q2**

**[q2 / p] = q3**

**... e così via, fino a trovare un qn < p**

Quindi si calcola k, che è la somma dei quozienti parziali.

**k = q1 + q2 + q3 + .... + qn**

**Esempio:**

Qual è la massima potenza di 7 che divide 946! ?

[946 / 7] = 135

[135 / 7] = 19

[19 / 7] = 2

135 + 19 + 2 = 156

Risposta: 7^156 è la massima potenza di 7 che divide 946!

**Cominciamo con un fattoriale piccolo**

Per capire meglio, diamo un'occhiata ad un fattoriale "piccolo".

16! = 16 x 15 x 14 x 13 x 12 x 11 x 10 x 9 x 8 x 7 x 6 x 5 x 4 x 3 x 2 = 20.922.789.888.000

Osserviamo che il suo sviluppo contiene tutti i numeri interi da 2 a 16.
Se consideriamo il numero primo 2, osserviamo che 16! contiene come fattori:
2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, divisibili per 2.
Scomponiamoli in fattori primi:

**$2$, $2^2$, $2x3$, $2^3$, $2x5$, $2^2x3$, $2x7$, $2^4$**

Più precisamente:
Gli 8 numeri 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16 contengono il fattore 2.
Posso ottenere 8 calcolando 16/**2** = **8**

I 4 numeri 4, 8, 12, 16 contengono il fattore 2^2.

Posso ottenere 4 calcolando 16/$\mathbf{2^2}$ = **4**
O anche dividendo per 2 il numero ottenuto con il calcolo precedente, che era 8.

I 2 numeri 8, 16 contengono il fattore 2^3.

Posso ottenere 2 calcolando 16/$\mathbf{2^3}$ = **2**
O anche dividendo per 2 il numero ottenuto con il calcolo precedente, che era 4.

Il numero 16 contiene il fattore 2^4.

Posso ottenere 8 calcolando 16/$\mathbf{2^4}$ = **1**
O anche dividendo per 2 il numero ottenuto con il calcolo precedente, che era 2.

Sommando i risultati parziali ottengo il massimo esponente n tale che 2^n divide 16!
8 + 4 + 2 + 1 = 15

Concludo che $\mathbf{2^{15}}$ divide 16!

**Il problema della parte intera**

Osserviamo ora 30!, consideriamo il fattore 3 e proviamo a ripetere il ragionamento precedente.

30! = 30 x 29 x 28 x 27 x 26 x 25 x 24 x 23 x 22 x 21 x 20 x 19 x 18 x 17 x 16 x 15 x 14 x 13 x 12 x 11 x 10 x 9 x 8 x 7 x 6 x 5 x 4 x 3 x 2 =

2,65252859812191058636308480e+32

Se consideriamo il numero primo 3, osserviamo che 30! contiene come fattori:
3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, divisibili per 3.
Scomponiamoli in fattori primi:

**3, 2x3, $3^2$, $2^2$x3, 3x5, 2x$3^2$, 3x7, $2^3$x3, $3^3$, 2x5x3**

Più precisamente:
I 10 numeri 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30 contengono il fattore 3.
Posso ottenere 5 calcolando 30/**3** = **10**

I 3 numeri 9, 18, 27 contengono il fattore 3^2.

Posso ottenere 3 calcolando 30/$\mathbf{3^2}$ = **3,333... e considerare la parte intera**.
Se indico la parte intera di x con [x], posso scrivere:

[30/$\mathbf{3^2}$] = [**3,333...**] = **3**
O anche dividendo per 3 il numero ottenuto con il calcolo precedente, che era 10 **e considerare la parte intera**.
= [10/3] = [**3,333...**] = **3**
Il numero 27 contiene il fattore 3^3.

Posso ottenere 1 calcolando 30/$\mathbf{3^3}$ = **1,111... e considerare la parte intera**.

[30/$\mathbf{3^3}$] = [**1,111...**] = **1**
O anche dividendo per 3 il numero ottenuto con il calcolo precedente, che era 3,333... **e considerare la parte intera**.
A questo punto devo applicare una proprietà della parte intera, vediamo:
**[ [x] / m ] = [ x / m ]**
[ [3,333...] / 3] = [ 3 / 3] = **1**

In conclusione: 30! è divisibile per $\mathbf{3^{10+3+1}}$= $\mathbf{3^{14}}$

**Torniamo al nostro 10.000!**
Calcolo la massima potenza di 2 che divide 10.000!

10.000/2 = **5.000**
10.000/2^2 = 5.000/2 = **2.500**
10.000/2^3 = 2.500/2 = **1.250**
10.000/2^4 = 1.250/2 = **625**
Da questo punto in poi devo considerare la parte intera del risultato, che indico con [x]
[10.000/2^5] = [625/2] = [312,5] = **312**
[10.000/2^6] = [[312,5]/2] = [312/2] = **156**
Per scrivere quest'ultimo risultato ho applicato la proprietà:
**[ [x] / m ] = [ x / m ]**
Procedendo allo stesso modo ottengo:
[10.000/2^7] = [156/2] = **78**
[10.000/2^8] = [78/2] = **39**
[10.000/2^9] = [39/2] = **19**
[10.000/2^10] = [19/2] = **9**
[10.000/2^11] = [9/2] = **4**
[10.000/2^12] = [4/2] = **2**
[10.000/2^13] = [2/2] = **1**

Osservo che 2^13 = 8.192 è la potenza di 2 più vicina a 10.000 per difetto.
Poiché 2^12 = 16.384, si ha che:
[10.000/2^14] = **0**

Inoltre, per ogni n>13:
[10.000/2^n] = **0**

Addiziono tutti i risultati ottenuti:
5.000 + 2.500 + 1.250 + 625 + 312 + 156 + 78 + 39 + 19 + 9 + 4 + 2 + 1 = **9.995**.

**Quindi 10.000! è divisibile per 2^9995**

Con il 23, il procedimento è più breve:
434 + 18 = 452

**Quindi 10.000! è divisibile per 23^452**

Come si può dimostrare tutto il discorso?

## Risposte & riflessioni

**Giorgio Dendi**
Ciao. A me risulta ci siano 2.499 zeri finali.
Per ottenere 0 finale, il numero deve essere divisibile per 10, cioè deve esserci un fattore 2 e un 5. Di 2 ce ne sono molti, i 5 sono di meno. Quindi ci chiediamo quanti 5 ci sono come fattore.
Ogni cinque numeri consecutivi considerati, uno mi porta un fattore 5: 1 2 3 4 non servono, il 5 mi porta un fattore 5.
Allora in tutto ce ne sono 10.000/5, cioè 2.000. Ma ogni 5 di questi fattori 5, uno vale il doppio, cioè 5 10 15 20 mi portano un 5, ma il 25 me ne porta 2. Allora quelli che mi portano un secondo 5 sono 2.000/5, cioè 400. Anche fra questi c'è uno ogni 5 che mi porta un ulteriore 5, il terzo 5 come fattore. Infatti 25 50 75 100 mi portano ciascuno i due 5 già considerati, ma 125 me ne porta un terzo. Questi numeri sono in numero di 400/5, cioè 80. Poi quelli che portano quattro 5 sono 80/5, cioè 16 e quelli che portano cinque 5 come fattore sono 16/5, cioè 3.125, 6.250 e 9.375. In tutto 2.000 + 400 + 80 + 16 + 3 = 2.499. Che curioso che sia proprio la quarta parte del numero di cui si calcola il fattoriale. Quasi!

**Hal**
Confermo a livello sperimentale la brillante intuizione di Giorgio Dendi e aggiungo che in effetti ogni numero multiplo di 100 ha esattamente n/4 - 1 zeri finali.

**Cesarone**
Confermo anch'io. Col programmino vengono 35660 cifre di cui 2499 "0".

**Qualche teorema**

Notazione: **[x]** significa "parte intera di x" ed è il più grande intero minore o uguale di x.
x è un numero reale.

**Teorema**
Per calcolare l'**esponente *k*** della **massima potenza di un numero primo *p* che divide un fattoriale *n!*** si procede così:

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | n | | | | n | | | | n | | | | n | | | |
| k | = | [ | - | ] | + | [ | --- | ] | + | [ | --- | ] | + | [ | --- | ] | + | ... |

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | - - | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | p | | | | $p^2$ | | | | $p^3$ | | | | $p^4$ | | | |

Barlumi di dimostrazione.
a) La somma è finita perché, da un certo punto in poi le successive potenze di p saranno maggiori di n e la parte intera dei quozienti di conseguenza sarà uguale a 0.
b) dati i numeri 1, 2, 3, ..., n, ve ne sono [n/p] divisibili per p, $[n/p^2]$ divisibili per $p^2$ , etc.
Da questo teorema discende la seguente regola abbreviata:

**Regola breve**
Per calcolare l'**esponente *k*** della **massima potenza di un numero primo *p* che divide un fattoriale *n!*** si può procedere così:
**[n / p] = q1** (parte intera del quoziente n/p)
**[q1 / p] = q2**
**[q2 / p] = q3**
**... e così via, fino a trovare un qn < p**
Quindi si calcola k, che è la somma dei quozienti parziali.
**k = q1 + q2 + q3 + .... + qn**
La regola è valida grazie alle seguenti proprietà della parte intera di x.
**Proprietà della parte intera di un numero reale, [x]**
1. Se n, m, q, r sono interi tali che **n = qm + r** con 0<=r<=(m-1) allora **[n/m] = q**
Dimostrazione.
Discende dalla definizione di divisione e di parte intera.
2. Se m è intero positivo e x è reale, allora **[[x] / m] = [x/m]**.
Dimostrazione.
Siano:
n = [x]
x = n + a, con **0<=a<1** (per la definizione di [x]
n = qm + r, con **0<=r<=(m-1)**
quindi, sostituendo:
x = qm + r + a
Posso allora scrivere:
[x/m] = [(qm + r + a)/m] = q + [(r + a)/m] = q
infatti
[(r + a)/m] = 0
perché (r + a)<m
Conclusione parziale: **[x/m] = q**
Posso anche scrivere, per sostituzioni successive:
[[x] / m] = [n / m] = [(qm + r)/m] = [q + r/m] = q
perché r<=(m-1)<m
Conclusione parziale: **[[x] / m] = q**

Riunendo le due conclusioni parziali ottengo:
**[x/m] = [[x]/m]**
Come volevasi.

**That's all folks**

Sito Web realizzato da **Gianfranco Bo**