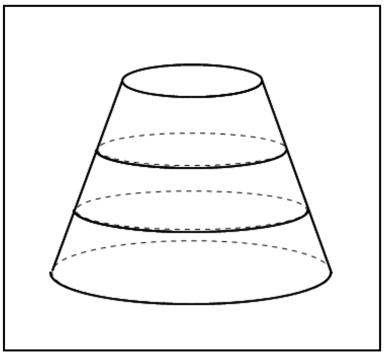
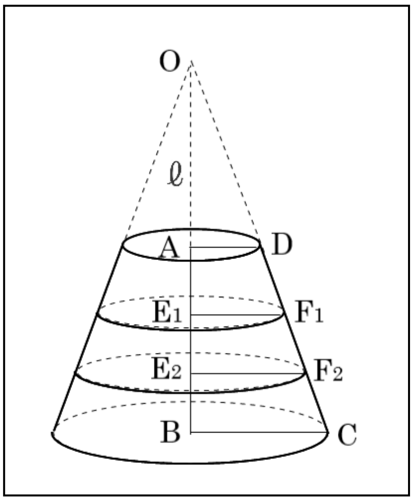
神奈川　三島神社算額第四問の現代訳





問題：

　ここに円錐台 V（直線 ℓ を軸に母線となる線分 CD を回転して得られる立体で，直線 ℓ と線分 CD はある平面上あり点 C と直線 ℓ との距離は点 D と直線 ℓ との距離より長いとします）があります。円錐台 V の体積の値を $3v$ とします。図のように底面に平行な二つの平面 H_1 と H_2 で体積を三等分します。三つそれぞれの体積の値は v となります。上面は直線 ℓ 上の点 A を中心とする円盤で，底面（下面）は直線 ℓ 上の点 B を中心とする円盤です。平面 H_1 が直線 ℓ および母線 CD と交わる点をそれぞれ E_1 と F_1 とし，平面 H_2 が直線 ℓ および母線 CD と交わる点をそれぞれ E_2 と F_2 とします。上面の半径 AD の長さの値を a とすると $2a = 10$（寸）とし，下面の半径 BC の長さの値を b とすると $2b = 13$（寸）とします。このとき線分 F_1F_2 の長さの値を求めなさい。

答：線分 F_1F_2 の長さの値は 6.352（寸）強です。

術（答の値の求め方）：$M = \frac{\pi}{4}$ と置きます（円積率といいます）。

$$P = \frac{9 \times v}{\{(2a) \times (2b) + ((2a)^2 + (2b)^2)\} \times M}$$

$$Q = \frac{(2b) - (2a)}{P}$$

$$S = \frac{\sqrt{P^2 + \left(\frac{(2b)-(2a)}{2}\right)^2}}{P}$$

$$T = \frac{2b}{Q} \times (2b)^2$$

とします。すると $T = \frac{P \times (2b)^3}{(2b)-(2a)}$ となります。そして

$$X = \sqrt[3]{\left\{T - \frac{6 \times v}{M}\right\} \div Q^2} = \sqrt[3]{\left\{T - \frac{6 \times v}{M}\right\} \times \frac{P^2}{\{(2b)-(2a)\}^2}}$$

$$Y = \sqrt[3]{\left\{T - \frac{3 \times v}{M}\right\} \div Q^2} = \sqrt[3]{\left\{T - \frac{3 \times v}{M}\right\} \times \frac{P^2}{\{(2b)-(2a)\}^2}}$$

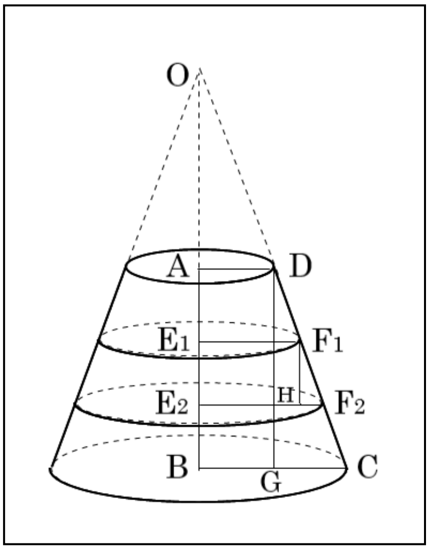
と置きます。このとき

$$F_1F_2 = (Y - X) \times S$$

が成り立ちます。

（注）川瀬正臣「現存算額にみる神奈川の和算状況」（神奈川県立図書館企画サービス部地域情報課　編「郷土神奈川」第 53 号，17 頁～36 頁，2015 年 2 月）の 32 頁を参考にした方が良いでしょう（術文表記が算額の一般的な表記に沿っていると思われます)。

（注）なぜこのような式が得られ，そして結論が得られるのか，説明を要すると思われます。そのために右図を用います。



点 B を中心とし線分 BC を半径とする円盤が底面で高さを与える線分が OB である円錐を考えます。問題としている円錐台の上に点 A を中心とし線分 AD を半径とする円盤が底面で高さを与える線分が OA である円錐を載せたものです。高さが線分 OA の円錐の体積の値を $\hat{v}$ とすると高さが線分 OB の円錐の体積の値は $\hat{v} + 3v$ です。

直角三角形 OAD と直角三角形 OBC が相似であることより

$OA : OB = AD : BC = a : b$ すなわち $OA : (OA + AB) = a : b$

が成り立ち，これより

$$OA = \frac{a}{b-a} \times AB = \frac{2a}{(2b)-(2a)} \times AB$$

が得られます。そして

$$\hat{v} = \frac{1}{3} \times \pi \times AD^2 \times OA = \frac{1}{3} \times \pi \times a^2 \times OA = \frac{1}{3} \times \left(\frac{\pi}{4}\right) \times (2a)^2 \times OA$$

$$= \frac{1}{3} \times M \times (2a)^2 \times OA = \frac{1}{3} \times \frac{(2a)^3}{(2b)-(2a)} \times M \times AB$$

$$\hat{v} + 3 \times v = \frac{1}{3} \times M \times (2b)^2 \times OB = \frac{1}{3} \times M \times (2b)^2 \times (OA + AB)$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{(2b)^3}{(2b)-(2a)} \times M \times AB$$

となります。よって $3 \times v = \frac{1}{3} \times \frac{(2b)^3-(2a)^3}{(2b)-(2a)} \times M \times AB$ ，すなわち

$$v = \frac{1}{9} \times \frac{(2b)^3-(2a)^3}{(2b)-(2a)} \times M \times AB = \frac{1}{9} \times \frac{\{(2b)-(2a)\} \times \{(2b)^2+(2a)\times(2b)+(2a)^2\}}{(2b)-(2a)} \times M \times AB$$

$$= \frac{1}{9} \times \{(2a) \times (2b) + ((2a)^2 + (2b)^2)\} \times M \times AB$$

が得られます。上式より

$$AB = \frac{9 \times v}{\{(2a)\times(2b)+((2a)^2+(2b)^2)\} \times M}$$

です。よって

$$P = AB = \frac{9 \times v}{\{(2a)\times(2b)+((2a)^2+(2b)^2)\} \times M}$$

とします。

相似な二つの立体の体積の値の比は相似比の 3 乗の比に等しいことより

$\hat{v}：(\hat{v} + 3 \times v) = a^3：b^3$ よって $\hat{v}：(\hat{v} + 3 \times v) = (2a)^3：(2b)^3$

が成り立ちます。よって

$$\hat{v} = \frac{3 \times (2a)^3}{(2b)^3-(2a)^3} \times v$$

です。直角三角形 OAD と直角三角形 OE_1F_1 が相似であることより

$\hat{v}：(\hat{v} + v) = AD^3：(E_1F_1)^3 = a^3：(E_1F_1)^3 = (2a)^3：(2 \times E_1F_1)^3$

が成り立ちます。よって

$$(2 \times E_1F_1)^3 = \frac{(2a)^3 \times (\hat{v}+v)}{\hat{v}} = \frac{2\times(2a)^3+b^3}{3}$$

すなわち

$$2 \times E_1F_1 = \sqrt[3]{\frac{2\times(2a)^3+(2b)^3}{3}}$$

が得られます。さらに，直角三角形 OAD と直角三角形 OE_2F_2 が相似であることより

$$\hat{v}：(\hat{v}+2\times v)=AD^3：(E_2F_2)^3= a^3：(E_2F_2)^3=(2a)^3：(2\times E_2F_2)^3$$
が成り立ちます。よって

$$(2\times E_2F_2)^3=\frac{(2a)^3\times(\hat{v}+2\times v)}{\hat{v}}=\frac{(2a)^3+2\times(2b)^3}{3}$$

すなわち

$$2\times E_2F_2=\sqrt[3]{\frac{(2a)^3+2\times(2b)^3}{3}}$$

が得られます。直角三角形 CDG と直角三角形 F2E1H が相似であることより

$$CD：\mathrm{F2E1}=(b-a)：(E_2F_2-E_1F_1)=\big((2b)-(2a)\big)：(2\times E_2F_2-2\times E_1F_1)$$

が成り立ちます。よって

$$\mathrm{F2E1}=\frac{1}{(2b)-(2a)}\times(2\times E_2F_2-2\times E_1F_1)\times CD$$

です。ところで，直角三角形 CDG において，三平方の定理より

$$CD=\sqrt{DG^2+GC^2}=\sqrt{AB^2+(b-a)^2}=\sqrt{P^2+\left(\frac{(2b)-(2a)}{2}\right)^2}$$

であることより

$$\mathrm{F2E1}=\frac{1}{(2b)-(2a)}\times(2\times E_2F_2-2\times E_1F_1)\times\sqrt{P^2+\left(\frac{(2b)-(2a)}{2}\right)^2}$$

$$=\frac{\sqrt{P^2+\left(\frac{(2b)-(2a)}{2}\right)^2}}{(2b)-(2a)}\times\left(\sqrt[3]{\frac{(2a)^3+2\times(2b)^3}{3}}-\sqrt[3]{\frac{2\times(2a)^3+(2b)^3}{3}}\right)\qquad(\sharp)$$

が得られます。ところで

$$v=\frac{1}{9}\times\frac{(2b)^3-(2a)^3}{(2b)-(2a)}\times M\times p\quad ,\ T=\frac{P\times(2b)^3}{(2b)-(2a)}$$

より

$$T-\frac{6\times v}{M}=\frac{P\times(2b)^3}{(2b)-(2a)}-\frac{6}{9}\times\frac{(2b)^3-(2a)^3}{(2b)-(2a)}\times p=\frac{\{2\times(2a)^3+(2b)^3\}\times p}{3\times\{(2b)-(2a)\}}$$

$$\left\{T-\frac{6\times v}{M}\right\}\times\frac{P^2}{\{(2b)-(2a)\}^2}=\frac{\{2\times(2a)^3+(2b)^3\}\times p^3}{3\times\{(2b)-(2a)\}^3}$$

そして

$$T-\frac{3\times v}{M}=\frac{P\times(2b)^3}{(2b)-(2a)}-\frac{3}{9}\times\frac{(2b)^3-(2a)^3}{(2b)-(2a)}\times p=\frac{\{(2a)^3+2\times(2b)^3\}\times p}{3\times\{(2b)-(2a)\}}$$

$$\left\{T-\frac{3\times v}{M}\right\}\times\frac{P^2}{\{(2b)-(2a)\}^2}=\frac{\{(2a)^3+2\times(2b)^3\}\times p^3}{3\times\{(2b)-(2a)\}^3}$$

です。よって

$$X=\sqrt[3]{\left\{T-\frac{6\times v}{M}\right\}\div Q^2}=\sqrt[3]{\left\{T-\frac{6\times v}{M}\right\}\times\frac{P^2}{\{(2b)-(2a)\}^2}}$$

$$=\frac{p}{(2b)-(2a)}\times\sqrt[3]{\frac{2\times(2a)^3+(2b)^3}{3}}$$

$$Y=\sqrt[3]{\left\{T-\frac{3\times v}{M}\right\}\div Q^2}=\sqrt[3]{\left\{T-\frac{3\times v}{M}\right\}\times\frac{P^2}{\{(2b)-(2a)\}^2}}$$

$$=\frac{p}{(2b)-(2a)}\times\sqrt[3]{\frac{(2a)^3+2\times(2b)^3}{3}}$$

となります。これより

$$(Y-X)\times S=(Y-X)\times\frac{\sqrt{P^2+\left(\frac{(2b)-(2a)}{2}\right)^2}}{P}$$

$$=\frac{p}{(2b)-(2a)}\times\left\{\sqrt[3]{\frac{(2a)^3+2\times(2b)^3}{3}}-\sqrt[3]{\frac{2\times(2a)^3+(2b)^3}{3}}\right\}\times\frac{\sqrt{P^2+\left(\frac{(2b)-(2a)}{2}\right)^2}}{P}$$

$$=\frac{\sqrt{P^2+\left(\frac{(2b)-(2a)}{2}\right)^2}}{(2b)-(2a)}\times\left\{\sqrt[3]{\frac{(2a)^3+2\times(2b)^3}{3}}-\sqrt[3]{\frac{2\times(2a)^3+(2b)^3}{3}}\right\}$$

が得られ，式（#）によって

F2E1 $=(Y-X)\times S$

が示されます。すなわち，術文が従います。