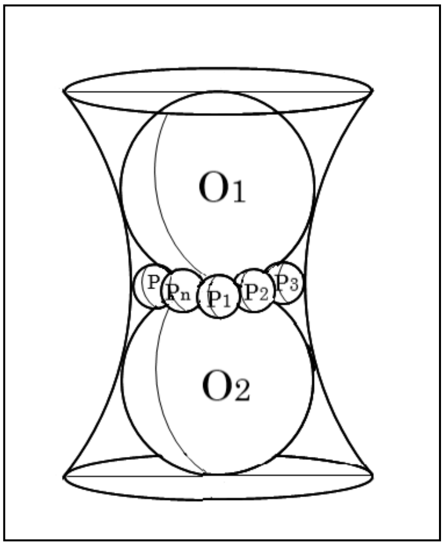
1804　平川天満宮　現代訳



問題：
ここに，図のように直線を回転軸として円弧を回転して得られた立体V（上下は平行で合同な円盤で，円弧の弦は回転軸に平行で回転軸と弦の間に円弧があります）に内接している二つの球$O_1(r)$と球$O_2(r)$があり，球O_1と球O_2が外接している点の周りに二つの球に外接し互いに隣同士接していて立体に内接している球$P_1(s)$，…，球$P_n(s)$があります。ここで$O_1(r)$や$P_1(s)$の括弧の中は半径の長さの値を表します。立体の内部にある球はこの状況では少しも動くことができないものとします。円盤の半径の長さの値tは$\frac{35.9}{2}=17.95$（寸）とするとき，立体V の高さの値（二つの円盤間の距離の値）hはいくらになりますか。

答：立体V の高さの値hは 49 （寸）強です。

術（答の値の求め方）：$a=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$と置きます。すると

$$h=\left(\sqrt{a-0.5}+a\right)\times(2t)$$

が成り立ちます。

（注）$h=\left(\sqrt{a-0.5}+a\right)\times(2R)=\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{4}-\frac{1}{2}}+\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)\times 35.9$

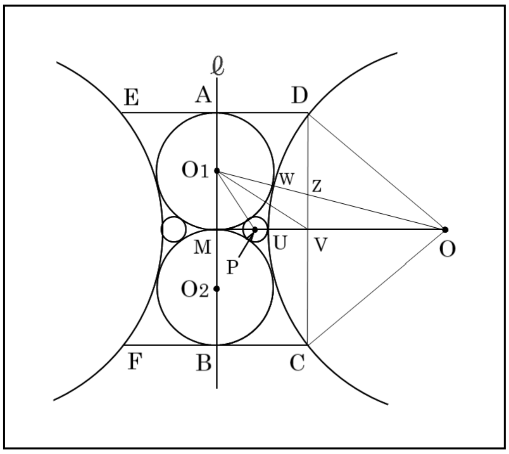
$$\fallingdotseq \left(\sqrt{0.30901699}+0.8090\right)\times 35.9 \fallingdotseq (0.5559+0.8090)\times 35.9$$
$$=48.99991$$

となります。一方，エクセルで $\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{4}-\frac{1}{2}}+\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)\times 35.9$ という式を入力して確定させると瞬時に 49.00026773 と表示されます。

(注)広江永貞　編「続神壁算法起源　巻上」(「和算の館」和算書アーカイブ 129)の第二術起源によると

円弧を作る円 O(R)の直径の長さの値 $2R$ が外接する球 O1(r)の半径の長さの値の 4 倍に等しい場合や球 O1(r) と球 O2(r) が円筒体に内接している場合の球 P1(s) , …, 球 Pn(s) の個数の考察より，$n=10$ として解法を展開する

ことにしています。解法の概略を以下に示します。



円弧の回転軸は直線 ℓ とすると点 O1 と点 O2 は直線 ℓ 上にあります。直線 ℓ と点 O で定まる平面で球 P1(s) , …, 球 Pn(s) のある球 P(s) の中心点 P を含むものによる切断面が右図です。右図において，回転軸と上下の円盤との交点を A と B とし, 球 O1(r) と球 O2(r) の外接点を M とします。円弧と円盤との交点を C，D，E，F とします。円弧と球 P の接点を U，線分 CD と線分 MO との交点をそれぞれ U と V ，円弧と球 O1 の接点を W ，線分 CD と線分 OO1 との交点を Z とします。

まず，$MO=MP+PU+UO=MP+s+R$ が成り立っていることを確認します。直角三角形 DVO において，三平方の定理より

$$OD^2=DV^2+VO^2=AM^2+(MP+PU+UO-MV)^2$$
$$=\left(\frac{1}{2}\times AB\right)^2+(MP+PU+UO-AD)^2$$

すなわち

$$R^2=\left(\frac{1}{2}h\right)^2+(MP+s+R-t)^2$$

が成り立ちます。上式を整理して

$$\frac{1}{4}\times h^2+MP^2+s^2+t^2+2\times MP\times s$$

$$+2\times MP\times R-2\times MP\times t \quad +2\times s\times R-2\times s\times t-2\times R\times t=0 \quad (*)$$

となります。直角三角形 O1MO において，三平方の定理より

$$(OO_1)^2=(O_1M)^2+OM^2$$

すなわち

$$(OW+WO_1)^2=(O_1M)^2+(OU+UP+PM)^2$$

が成り立ちます。上式は

$$(R+r)^2=r^2+(R+s+MP)^2$$

であり，$r=\frac{1}{4}h$ を代入して整理すると

$$MP^2+2\times MP\times R+2\times MP\times s+2\times R\times s+s^2-\frac{1}{2}\times R\times h=0 \quad (**)$$

となります。直角三角形 O1MP において，三平方の定理より

$$(PO_1)^2=(O_1M)^2+MP^2$$

すなわち

$$(s+r)^2=(r)^2+MP^2$$

が成り立ちます。上式は $r=\frac{1}{4}h$ を代入して整理すると

$$MP^2-\frac{1}{2}\times s\times h-s^2=0 \quad (***)$$

となります。

半径の長さの値 s の球が 10 個連なって輪になっていることより，10 個の球の中心を順次結んでできる正十角形の外接円の半径の長さの値（和算では「角中径」といいます）は MP に等しいことがわかります。正十角形の一辺の長さの値に対する角中径を正十角形の角中径率といい，それは $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ です（証明は省略します)。よって $MP=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\times(2s)=\left(1+\sqrt{5}\right)\times s$ です。この MP に (***) の式に代入して

$$s=\frac{5-2\sqrt{5}}{10}\times h \quad (\#)$$

が得られます。さらに

$$MP=\frac{-5+3\sqrt{5}}{10}\times h \quad (\#\#)$$

も得られます。

（$*$）から（$**$）の辺々同士の減法（引き算）を行うと

$$\frac{1}{4}\times h^2+t^2-2\times MP\times t-2\times s\times t-2\times R\times t+\frac{1}{2}\times R\times h=0$$

となり，（#）と（##）より上式は

$$\frac{1}{4}\times h^2+t^2-\frac{\sqrt{5}}{5}\times h\times t-2\times R\times t+\frac{1}{2}\times R\times h=0 \qquad (\#\#\#)$$

となります。次に，（$**$）と（#），（##）より

$$\left(\frac{-5+3\sqrt{5}}{10}\right)^2\times h^2+2\times\left(\frac{-5+3\sqrt{5}}{10}\right)\times h\times R+2\times\left(\frac{-5+3\sqrt{5}}{10}\right)\times\left(\frac{5-2\sqrt{5}}{10}\right)\times h^2$$

$$+2\times\left(\frac{5-2\sqrt{5}}{10}\right)\times h\times R+\left(\frac{5-2\sqrt{5}}{10}\right)^2\times h^2-\frac{1}{2}\times h\times R=0$$

が得られます。上式を整理して

$$\frac{1}{20}\times h+\frac{-5+2\sqrt{5}}{10}\times R=0$$

が成り立つことがわかります。よって

$$R=\frac{5+2\sqrt{5}}{10}\times h$$

です。上式と（###）より

$$\frac{1}{4}\times h^2+t^2-\frac{\sqrt{5}}{5}\times h\times t-2\times\frac{5+2\sqrt{5}}{10}\times h\times t+\frac{1}{2}\times\frac{5+2\sqrt{5}}{10}\times h^2=0$$

が得られます。よって，上式を整理すると

$$h^2-\left(1+\sqrt{5}\right)\times t\times h+\frac{5-\sqrt{5}}{2}\times t^2=0$$

となります。2 次方程式の解の公式より

$$h=\frac{1}{2}\times\left\{\left(1+\sqrt{5}\right)\pm\sqrt{\left(1+\sqrt{5}\right)^2-4\times\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)}\right\}\times t$$

$$=\frac{1}{2}\times\left\{\left(1+\sqrt{5}\right)\pm 2\sqrt{\sqrt{5}-1}\right\}\times t$$

です。ここで「±」の「+」を採用して

$$h=\frac{1}{2}\times\left\{\left(1+\sqrt{5}\right)+2\sqrt{\sqrt{5}-1}\right\}\times t$$

$$=\frac{1}{4}\times\left\{\left(1+\sqrt{5}\right)+2\sqrt{\sqrt{5}-1}\right\}\times(2t)$$

$$=\left\{\frac{\sqrt{5}+1}{4}+\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{4}}\right\}\times(2t)$$

となります。ところで $\frac{\sqrt{5}-1}{4}=\frac{\sqrt{5}+1}{4}-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{5}+1}{4}-0.5$ であることより

$$h=\left\{\frac{\sqrt{5}+1}{4}+\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{4}-0.5}\right\}\times(2t)$$

です。これは術文の記述と一致します。

（注）もし「±」の「−」を採用した場合には $0<h<9.5$ となり不都合であることがわかります。