BÀI TẬP TUẦN 1

Giải các hệ phương trình sau

Lưu ý: Nếu vô số nghiệm → đưa ra nghiệm tổng quát

Bài 1.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -1 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 = -1 \end{cases}$$

Bài 2.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 6 \\ 3x_1 - 5x_2 = 7 \\ x_1 + 5x_3 = 9 \end{cases}$$

Bài 3.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_4 = 6 \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 + 6x_4 = 17 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 12 \\ 2x_1 - 7x_3 + 11x_4 = 7 \end{cases}$$

Bài 4.

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 - 5x_2 - 3x_3 = 2 \end{cases}$$

Bài 5.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 3 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 + 5x_2 - 5x_3 = 5 \end{cases}$$

Bài 6.

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 8 \\ x_1 - x_2 + x_3 = -1 \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

Bài 7.

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 1 \\ 6x_1 - 3x_2 - 5x_4 = 3 \\ 8x_1 - 4x_2 + 28x_3 - 44x_4 = 11 \\ -8x_1 + 4x_2 - 4x_3 + 12x_4 = -5 \end{cases}$$

Bài 8.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -3 \\ 2x_1 + 2x_2 = 0 \\ -3x_2 + 4x_3 = 1 \\ x_1 + x_3 = -1 \end{cases}$$

Bài 9.

$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 3x_3 = -3 \\ -x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 4 \\ -4x_2 + 2x_3 = 2 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \end{cases}$$

Bài 10.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

Bài 11.

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 0 \\ 6x_1 + x_2 - 8x_3 + 9x_4 = 0 \\ 2x_1 + 6x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

Bài 12.

$$\begin{cases} x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$$

HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP NGÀY 14/01

Cách giải HPT tuyến tính:

1) Cách 1: dùng phép khử Gauss để đưa về ma trận bậc thang cho HPT có dạng Ax = b.

2) Cách 2: tìm nghịch đảo của A → x = $A^{-1}b$.

VD: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & -1 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 3x_1 & + & 5x_2 & - & 2x_3 & = & -1 \end{cases}$$

Ma trận hệ số | ma trận mở rộng → đưa về ma trận bậc thang

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

Chọn 1 dòng (thường là dòng 1) có số đầu tiên khác (nếu là 1 thì tốt) → nếu chưa phải là 1, ta chia hai vế cho số đó. (TRÁI THẾ NÀO → PHẢI THẾ ĐÓ)

+ Nếu dòng 1 có số đầu tiên = 0 → ta chọn dòng khác.

Tiếp theo, ta biến đổi các dòng khác: $d_x \to d_x - kd_1$ (trong đó: k là số đầu tiên của dòng x):

$$d_2 \to d_2 - 2d_1 \text{ và } d_3 \to d_3 - 3d_1.$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Tiếp tục với dòng 2 → ý tưởng tượng trên, ta **muốn số đầu tiên phải là 1 (leading one).**

Ta đổi chỗ dòng 2 và 3: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 3 \end{array}\right)$

Sau đó đổi dấu dòng 2 (bản chất là ta nhân cả 2 vế cho -1): $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 3 & 3 \end{array}\right)$

$d_3 \to d_3 + 2d_2$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$ → $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -1 \\ x_2 - x_3 = -2 \\ x_3 = -1 \end{cases}$

$d_2 \to d_2 + d_3$, $d_1 \to d_1 + d_3$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$

$d_1 \to d_1 - 2d_2:$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \to \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = -3 \\ x_3 = -1 \end{cases}$, xong.

Nguyên tắc biến đổi: $d_x \to d_x \pm$ số lần * dòng khác, nếu không làm vầy mà d_x * số lần nào đó rồi ghép với dòng khác thì có ổn không?

- Giải hệ PT → OK.
- Tìm ma trận nghịch đảo → OK.
- Tìm rank (hạng) → OK.
- Tính định thức → sai.

Chẳng hạn: $d = (5 \quad ....)$ và dòng cơ sở $d_1 = (1 ...)$: viết $d = d - 5d_1$ thay vì $d = 5d_1 - d$

Bài 2.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 6 \\ 3x_1 - 5x_2 = 7 \\ x_1 + 5x_3 = 9 \end{cases}$$

Ở đây, ta có 1 HPT có 3 biến nhưng đến 4 PT.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 6 \\ 3 & -5 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 5 & 9 \end{array}\right) \xrightarrow[d_4 \to d_4 - d_1]{\substack{d_2 \to d_2 - 2d_1 \\ d_3 \to d_3 - 3d_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 6 & 8 \end{array}\right)$$

Ta thấy d3 giống d2, còn d4 tỷ lệ gấp đôi d2 → bỏ 2 dòng đó đi → $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{array}\right)$.

Ta thấy đây là 1 ma trận gần giống dạng bậc thang nhưng bị thiếu dòng cuối.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 1 \\ x_2 + 3x_3 = 4 \end{cases}$$

Đặt $x_3 = t \in \mathbb{R}$ → $x_2 = 4 - 3t$ và $x_1 = 2x_2 + x_3 + 1 = 2(4 - 3t) + t + 1 = -5t + 9$.

Do đó: (x1, x2, x3) = (-5t + 9, 4-3t, t) với t tùy ý.

//ở đây, ta có họ nghiệm phụ thuộc theo t (ứng với x3), vậy thì có cách nào biến đổi nào khác mà họ nghiệm tính theo x2 hoặc x1 không? → không nhất thiết có 1 dạng nghiệm duy nhất.

- r(A) = r(A|B) = n (số biến) → có nghiệm duy nhất.
- r(A) = r(A|B) < n (số biến) → vô số nghiệm.
- r(A) < r(A|B) → vô nghiệm.

Làm tiếp 2 VD bên dưới:

VD4.

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 - 5x_2 - 3x_3 = 2 \end{cases}$$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 3 & -5 & -3 & 2 \end{array}\right)$ → đổi chỗ dòng 1, 2: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & -1 & 1 \\ 3 & -5 & -3 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[d_3 \to d_3 - 3d_1]{d_2 \to d_2 - 2d_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 4 & -6 & -1 \end{array}\right)$.

Viết lại: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & -3/2 & -1/4 \end{array}\right) \xrightarrow{d_3 \to d_3 - d_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 \end{array}\right)$

ta có r(A|B) = 3, trong khi r(A) = 2 < 3, hệ vô nghiệm.

(hạng: rank(A) → sau khi biến đổi ra dạng ma trận tam giác thì ta đếm số dòng mà trên đó có số bắt đầu khác 0).

VD7.

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 1 \\ 6x_1 - 3x_2 - 5x_4 = 3 \\ 8x_1 - 4x_2 + 28x_3 - 44x_4 = 11 \\ -8x_1 + 4x_2 - 4x_3 + 12x_4 = -5 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & -2 & -4 & 2 & 1 \\ 6 & -3 & 0 & -5 & 3 \\ 8 & -4 & 28 & -44 & 11 \\ -8 & 4 & -4 & 12 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{d_2 \to d_2 - d_1 \\ d_3 \to d_3 - 2d_1 \\ d_4 \to d_4 + 2d_1}} \left(\begin{array}{cccc|c} 4 & -2 & -4 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & 36 & -48 & 9 \\ 0 & 0 & -12 & 16 & -3 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & -2 & -4 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & 36 & -48 & 9 \\ 0 & 0 & -12 & 16 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{d_2 \to d_2 - d_1/2} \left(\begin{array}{cccc|c} 4 & -2 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & -8 & 3/2 \\ 0 & 0 & 36 & -48 & 9 \\ 0 & 0 & -12 & 16 & -3 \end{array}\right)$$

Ta thấy các d2, d3, d4 tỷ lệ nhau → r(A) = r(A|B) = 2 → HPT có vô nghiệm có 2 biến tự do.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & -2 & -4 & 2 & 1 \\ & & 6 & -8 & 3/2 \end{array}\right) \to \begin{cases} 4x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 1 \\ 6x_3 - 8x_4 = 3/2 \end{cases}.$$

Đặt $x_4 = t, x_2 = s$ → $x_3 = \frac{1}{4} + \frac{4t}{3}$ và $x_1 = \frac{1}{4}(2x_2 + 4x_3 - 2x_4 + 1) = \frac{1}{4} + \frac{5}{6}t + \frac{1}{2}s$.

Họ nghiệm ở dạng vector: $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} 5/6 \\ 0 \\ 4/3 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1/4 \\ 0 \\ 1/4 \\ 0 \end{pmatrix}$

Câu 2. Tìm ma trận nghịch đảo và định thức của ma trận:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

<u>Nghịch đảo:</u>

* Ghép với ma trận đơn vị (A|I) → biến đổi dòng cột cho ma trận A để đưa về đơn vị → khi đó, ma trận mới (I| A^{-1}).

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[d_3 \to d_3 - 2d_1]{d_2 \to d_2 - 3d_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{d_3 \to d_3 + d_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -5 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{d_3 \to d_3/2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5/2 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{d_1 \to d_1 - 2d_2 - d_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 19/2 & -5/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5/2 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right).$$

Biến đổi xong thì ma trận bên phải thu được chính là nghịch đảo cần tìm.

* Tính định thức của A → tính adj của A → xong rồi chia cho định thức.

<u>Định thức</u>:

$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ → $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$ = ad – bc.

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ → **Cách 1:** khai triển theo dòng, chẳng hạn là dòng 1:

$$1\cdot\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - 2.\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + 1.\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1.(7.4 - 3.3) - 2(3.4 - 3.2) + 1.(3.3 - 7.2) = 2.$$

(số nằm ở hàng và cột khác chẵn lẻ thì nhận dấu $-$, còn cùng chẵn lẻ thì nhận dấu $+$)

Nguyên tắc: ta có thể khai triển theo dòng/cột tùy ý → ra cùng 1 đáp số, tuy nhiên, nên chọn các dòng/cột có nhiều số 0; nói chung sẽ về ma trận có cấp thấp hơn.

Cách 2: dùng công thức $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \\ 2 & 3 \end{matrix}$ → tích huyền trừ tích sắc = 1.7.4 + 2.3.2 + 1.3.3 – 2.7.1 – 3.3.1 – 4.3.2 = 2.

Câu 3. Cho $\boldsymbol{x} = (1,2,3)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)$ và $\boldsymbol{z} = (4,2,1)$. Tính $2\boldsymbol{x}$, $-3\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{y} - 3\boldsymbol{z}$, $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})$, $(\boldsymbol{x}, 2\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z})$, $\|\boldsymbol{x}\|$, $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$.

2x = (2,4,6)

-3y = (-3y1, -3y2, -3y3)

x + 3y – 3z = (1 + 2y1 – 3.4, 2 + 2y2 – 3.2, 3 + 2y3 – 3.1)

$\langle x, z \rangle$ = tích vô hướng = 1.4 + 2.2 + 3.1 = 4 + 4 + 3 = 11.

$\| x \|$ = độ dài của vector x = $\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2}$ = $\sqrt{14}$.

$\| x - y \|$ = $\|(1 - y_1, 2 - y_2, 3 - y_3)\|$ = $\sqrt{(1 - y_1)^2 + (2 - y_2)^2 + (3 - y_3)^2}$.

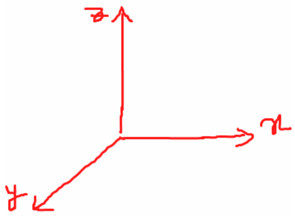
Câu 4. Xác định xem các tập vector sau có tạo thành cơ sở của $\mathbb{R}^3$

a) $(1,2,-1), (1,0,2), (2,1,1)$
b) $(-1,3,2), (-3,1,3), (2,10,2)$
c) $(67,13,-47), (\pi, -7.84, 0), (3,0,0)$

R^3 → tập hợp các vector có 3 thành phần, mỗi thành phần là các số thực.

Hệ trục Oxyz → 3 trục tọa độ Ox, Oy, Oz với các vector tương ứng là:

(1,0,0), (0,1,0) và (0,0,1).



Tại sao gọi là cơ sở: vì dùng các vector đó → ta có thể biểu diễn được mọi vector khác trong **R^3.** Đó là cơ sở "đẹp" → gọn, dễ biến đổi.

Trên thực tế, ta không nhất thiết chỉ có 1 cơ sở mà còn nhiều cái khác:

+ Số lượng = 3 = số chiều.

+ Các vector đó phải độc lập tuyến tính.

Cách kiểm tra các vector độc lập tuyến tính, chẳng hạn xét câu a)

Xét các số a, b, c sao cho:

$$a(1,2,-1)+b(1,0,2)+c(2,1,1)=(0,0,0).$$

Nếu ở đây, chỉ có $a=b=c=0$ → độc lập tuyến tính; còn nếu có nhiều bộ khác, nghĩa là vector này có thể biểu diễn theo các vector kia → phụ thuộc.

$$\begin{cases} 1.a+1.b+2.c=0 \\ 2.a+0.b+1.c=0 \\ -1.a+2.b+1.c=0 \end{cases}$$

Hệ này là hệ thuần nhất (do VP có tất cả các số = 0) nên sẽ có 1 nghiệm tầm thường là $a=b=c=0$. Để đây là nghiệm duy nhất thì cần có:

ma trận hệ số khả nghịch ⇔ det(A) khác 0.

Ma trận hệ số ở đây tạo được bằng cách xếp các vector theo chiều dọc.

Câu 1. Cho:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Kiểm tra xem các phép toán sau có thực hiện được không, nếu có thì cho biết kết quả:

$$AB, A(3B + C), ABC, B^T A, BC^T$$

Câu 2. Tìm ma trận nghịch đảo và định thức của ma trận:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

Câu 3. Cho $\boldsymbol{x} = (1, 2, 3)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)$ và $\boldsymbol{z} = (4, 2, 1)$. Tính $2\boldsymbol{x}$, $-3\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{y} - 3\boldsymbol{z}$, $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})$, $(\boldsymbol{x}, 2\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z})$, $\|\boldsymbol{x}\|$, $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$.

Câu 4. Xác định xem các tập vector sau có tạo thành cơ sở của $\mathbb{R}^3$

a) $(1, 2, -1), (1, 0, 2), (2, 1, 1)$
b) $(-1, 3, 2), (-3, 1, 3), (2, 10, 2)$
c) $(67, 13, -47), (\pi, -7.84, 0), (3, 0, 0)$

Câu 5. Xác định xem 4 vector sau có tạo thành một cơ sở của $\mathbb{R}^4$

$$(1,1,0,0), (1,0,1,0), (0,0,1,1), (0,1,0,1)$$

Câu 6. Dùng thuật giải Gram-Schmidt phân rã QR các ma trận sau

a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & 7 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

f) $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

g) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

BÀI TẬP TUẦN 2

(file PDF đề bài gồm 6 câu có trên trang web môn học)

Câu 1. Cho:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Kiểm tra xem các phép toán sau có thực hiện được không, nếu có thì cho biết kết quả:

$$AB, A(3B + C), ABC, B^T A, BC^T$$

Với 2 ma trận: X kích thước a x b, Y kích thước c x d:

* Phép cộng trừ X, Y → cùng size : a = c và b = d → thực hiện trên các phần tử tương ứng.

* Phép nhân số cho X → luôn thực hiện được: nhân số đó vào từng vị trí.

* Phép chuyển vị X^T → đổi size : b x a.

* Phép nhân X x Y (không có giao hoán) : b = c → kết quả là Z có size : a x d.

(thực hiện nhiều phép nhân vô hướng cho hàng của ma trận X và cột của Y).

A : 2 x 2, B : 2 x 3, C : 2 x 3, D = 3 x 1.

- A.B : được.
- A(3B+C) : được.
- ABC : (AB)C → EC với E : 2 x 3, mà C : 2 x 3 → không được !!
- (B^T)A : (3 x 2) x (2 x 2) → được.
- B(C^T) : (2 x 3) x (3 x 2) → được.

Phép nhân <u>không có giao hoán</u>, nhưng <u>có kết hợp</u> không ?

ABC = (AB)C=A(BC).

Câu 2. Tìm ma trận nghịch đảo và định thức của ma trận:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

1) Tính định thức:

+ Khai triển theo dòng cột: theo cột 1 → 1.(7.4-3.3) – 3.(2.4-3.1) + 2.(2.3-7.1) = 1.19 – 3.5 + 2.(-1) = 2.

(ưu tiên dòng/cột có nhiều số 0).

+ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \\ 2 & 3 \end{matrix}$ (bổ sung thêm 2 cột 1, 2 ở phía sau) → tính theo quy tắc:

"tích huyền trừ tích sắc"

1.7.4+2.3.2+1.3.3 – 2.7.1 – 3.3.1 – 4.3.2 = 28+12+9-14-9-24 = 2.

(đúng bản chất của định nghĩa định thức, lấy hoán vị, nghịch thế).

Tính nghịch đảo →

Cách 1: viết 2 ma trận liền kề

(đã cho | đơn vị) → (đơn vị | nghịch đảo).

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[d_3 \to d_3 - 2d_1]{d_2 \to d_2 - 3d_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{d_3 \to (d_3 + d_2)/2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5/2 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{d_1 \to d_1 - 2d_2 - d_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 19/2 & -5/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5/2 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right).$$

Cách 2: Hoặc có cách khác là tính các ma trận bù → ở đây là ma trận 3 x 3 nên cần tính 9 định thức bù cấp 2 → rồi tất cả chia cho định thức đã tính ở trên.

Ta thấy → nếu định thức = 0 → không khả nghịch, tức là không có nghịch đảo → không thể có (A)^-1.

Câu 3. Cho $\boldsymbol{x} = (1,2,3)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)$ và $\boldsymbol{z} = (4,2,1)$. Tính $2\boldsymbol{x}$, $-3\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{y} - 3\boldsymbol{z}$, $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})$, $(\boldsymbol{x}, 2\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z})$, $\|\boldsymbol{x}\|$, $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$.

Ta có 3 vector 3 chiều.

<x,z>: tích vô hướng; ||x|| : module = căn(tổng bình phương).

Quy tắc: thực hiện phép tính cho mỗi chiều độc lập nhau.

Riêng phép nhân vô hướng: (x1, x2, x3) nhân vô hướng (y1, y2, y3) →

x1.y1+x2.y2+x3.y3 (kq : con số).

Câu 3. Cho $\boldsymbol{x} = (1,2,3)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)$ và $\boldsymbol{z} = (4,2,1)$. Tính $2\boldsymbol{x}$, $-3\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{y} - 3\boldsymbol{z}$, $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})$, $(\boldsymbol{x}, 2\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z})$, $\|\boldsymbol{x}\|$, $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$.

2x = (2,4,6)

-3y = (-3y1, -3y2, -3y3).

x+2y-3z = (1+2y1-12, 2+2y2-6, 3+2y3-3) = (2y1 – 11, 2y2 – 4, 2y3).

<x,z> = 1.4+2.2+3.1=11.

<x,2y+z> = ((1,2,3), (2y1+4, 2y2+2, 2y3+1)) = 1(2y1+4)+2(2y2+2)+3(2y3+1)

= 2y1+4y2+6y3+11.

||x|| = căn(1^2+2^2+3^2)=căn(14).

||x-y|| = ||(1-y1, 2-y2, 3-y3)|| = căn((1-y1)^2+(2-y2)^2+(3-y3)^2).

Câu 4. Xác định xem các tập vector sau có tạo thành cơ sở của $\mathbb{R}^3$

a) $(1,2,-1), (1,0,2), (2,1,1)$
b) $(-1,3,2), (-3,1,3), (2,10,2)$
c) $(67,13,-47), (\pi,-7.84,0), (3,0,0)$

R^3 → không gian vector (tất cả các bộ có 3 số thực).

Hệ sinh (span) → tập hợp các vector độc lập tuyến tính → dùng để sinh ra các vector khác: sinh ra bằng cách ghép nhiều vector với các hệ số nào đó.

VD: 4.vector 1 – 2.vector2 + vector 3 → kết quả là 1 vector mới.

Cơ sở (basic) → hệ sinh có số lượng vector = dim(không gian). Để kiểm tra 1 nhóm các vector có là cơ sở không:

+ Số lượng.

+ Độc lập tuyến tính !!!

a) Số lượng = 3.

Giả sử có các số thực (scalar) a, b, c sao cho: a.(1,2,-1)+b(1,0,2)+c(2,1,1)=(0,0,0).

$$\begin{cases} a+b+2c=0 \\ 2a+0b+c=0 \\ -a+2b+c=0 \end{cases} \text{ (hệ thuần nhất)}$$

- Nếu giải điều kiện ra a=b=c=0 → xong → ĐLTT.

- Ngược lại nếu có vô số nghiệm → phụ thuộc tuyến tính → không là cơ sở!

Để làm được điều này, ta có 2 cách làm:

- Tính định thức → khác 0 → xong!

- Biến đổi trên dòng → tính rank(ma trận hệ số) → nếu rank < 3 → phụ thuộc; còn rank = 3 → OK.

Để ý thêm: ma trận hệ số tạo thành nhờ việc xếp các vector theo chiều dọc.

Câu 5. Xác định xem 4 vector sau có tạo thành một cơ sở của $\mathbb{R}^4$

$$(1,1,0,0), (1,0,1,0), (0,0,1,1), (0,1,0,1)$$

- Kiểm tra: số lượng vector = số chiều không gian = 4.

- Kiểm tra tính độc lập tuyến tính.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(gần giống ma trận tam giác trên);

Mỗi cột đều có số 1 tương ứng (leading one) → ma trận có rank = 4 → bộ 4 vector trên là ĐLTT.

Do đó: ta có cơ sở (basic) của R^4.

Câu 6. Dùng thuật giải Gram-Schmidt phân rã QR các ma trận sau

a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & 7 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Thuật giải Gram-Schmidt biến 1 tập hợp các vector đã cho trước → tập hợp "đẹp"

VD: Oxyz → (1,0,0), (0,1,0) và (0,0,1) : đẹp, đôi một vuông góc (tích vô hướng của 2 vector trong nhóm là số 0), dễ dùng.

Thuật giải. (Gram-Schmidt)
Input: Họ các vector $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_r$ cùng kích thước. **Output:** Thông báo nếu họ không độc lập tuyến tính; ngược lại, trả về họ trực giao $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_r$ hoặc họ trực chuẩn $\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \dots, \boldsymbol{q}_r$ là các cơ sở của $\mathrm{Sp}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_r)$.
Bước 1. $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{u}_1$ Nếu $\boldsymbol{v}_1 = 0$ thông báo họ không độc lập tuyến tính và kết thúc. **Bước 2.** $\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{u}_2 - \frac{\langle \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}_1 \rangle}{\lVert \boldsymbol{v}_1 \rVert^2} \boldsymbol{v}_1$ Nếu $\boldsymbol{v}_2 = 0$ thông báo họ không độc lập tuyến tính và kết thúc. **Bước 3.** $\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{u}_3 - \frac{\langle \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{v}_1 \rangle}{\lVert \boldsymbol{v}_1 \rVert^2} \boldsymbol{v}_1 - \frac{\langle \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{v}_2 \rangle}{\lVert \boldsymbol{v}_2 \rVert^2} \boldsymbol{v}_2$ Nếu $\boldsymbol{v}_3 = 0$ thông báo họ không độc lập tuyến tính và kết thúc. ... (đủ r bước hoặc kết thúc với thông báo họ không độc lập tuyến tính) **Bước chuẩn hóa (normalizing) (nếu cần họ trực chuẩn).** $$\boldsymbol{q}_1 = \frac{\boldsymbol{v}_1}{\lVert \boldsymbol{v}_1 \rVert}, \boldsymbol{q}_2 = \frac{\boldsymbol{v}_2}{\lVert \boldsymbol{v}_2 \rVert}, \dots, \boldsymbol{q}_r = \frac{\boldsymbol{v}_r}{\lVert \boldsymbol{v}_r \rVert}$$

Set = tập hợp; family = họ.

Họ mới gồm các vector là:

+ Tổ hợp tuyến tính của các vector hệ cũ.

+ Các vector này đôi một vuông góc → tích vô hướng 2 cái bất kỳ = 0.

Xét 3 vector: u1 = (1,2,-2), u2 = (1,-1, 4) và u3 = (2,1,1) → trực giao hóa hệ này.

Bước 1 : v1 = u1 = (1,2,-2).

Bước 2 : v2 = u2 $-\frac{\langle u_2, v_1\rangle}{\| v_1 \|^2}\cdot v_1$ =(1,-1,4) - $\frac{-9}{9}\cdot(1,2,-2)$ =(1,-1,4)+(1,2,-2)=(2,1,2) //

chú ý: tính xong bước nào thì kiểm tra nhanh lại thử các vector có vuông nhau hay không.

Bước 3 : v3 = u3 - $\frac{\langle u_3, v_1\rangle}{\| v_1 \|^2}\cdot v_1$ - $\frac{\langle u_3, v_2\rangle}{\| v_2 \|^2}\cdot v_2$ = (2,1,1) - $\frac{2}{9}(1,2,-2)$ - $\frac{7}{9}(2,1,2)$

= (2/9, -2/9, -1/9) = (2,-2,-1) / 9.

Ở trên, ta có 3 vector v1, v2, v3 tạo thành họ trực giao (đôi một vuông góc).

Chuẩn → vector đơn vị, là vector có module = 1.

Chuyển vector (a,b,c) về đơn vị → chia cho module = căn(a^2+b^2+c^2).

(a/ căn(a^2+b^2+c^2), b/ căn(a^2+b^2+c^2), c/ căn(a^2+b^2+c^2)).

Chuẩn hóa: v1 có module = căn(1^2+2^2+2^2)=3 → (1/3, 2/3, -2/3).

v2 → (2/3, 1/3, 2/3); v2 → (2/3, -2/3, -1/3).

Họ mới gọi là họ trực chuẩn.

Phân rã QR (QR decomposition)

Mệnh đề. (Phân rã QR) Nếu A là ma trận $m \times n$ gồm n vector cột độc lập tuyến tính thì A có thể được phân tích thành

$$A = QR$$

với Q là ma trận $m \times n$ gồm n vector cột trực chuẩn và R là ma trận $n \times n$ tam giác trên khả nghịch.

Thuật giải. (QR-decomposition)
Input: Ma trận A kích thước $m \times n$. **Output:** Thông báo nếu các cột của A không độc lập tuyến tính; ngược lại, trả về Q, R.
Bước 1. Xác định n cột của $A = [\boldsymbol{u}_1 \mid \boldsymbol{u}_2 \mid \dots \mid \boldsymbol{u}_n]$. **Bước 2.** Thực hiện thuật giải Gram-Schmidt trực chuẩn hóa $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_n$. Thông báo nếu các cột của A không độc lập tuyến tính và kết thúc; ngược lại, được $\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \dots, \boldsymbol{q}_n$ là họ trực chuẩn tương ứng. **Bước 3.** Xây dựng ma trận Q gồm n cột $\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \dots, \boldsymbol{q}_n$ $Q = [\boldsymbol{q}_1 \mid \boldsymbol{q}_2 \mid \dots \mid \boldsymbol{q}_n]$ **Bước 4.** Xây dựng ma trận R kích thước $n \times n$ như sau $R = \begin{bmatrix} \langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{q}_1 \rangle & \langle \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{q}_1 \rangle & \cdots & \langle \boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{q}_1 \rangle \\ 0 & \langle \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{q}_2 \rangle & \cdots & \langle \boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{q}_2 \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \langle \boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{q}_n \rangle \end{bmatrix}$ **Bước 5.** Trả về $A = QR$.

→ Đọc thử thuật giải.

Sau khi làm được thuật toán Gram-Schmidt → đã gần xong!!!

a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ = Q.R

u1 = (1,2,-2), u2 = (1,-1,4) và u3 = (2,1,1) : 3 cột.

Trực chuẩn → q1 = (1/3, 2/3, -2/3), q2 = (2/3, 1/3, 2/3), (2/3, -2/3, -1/3).

$$Q = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ -2/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix} \rightarrow R = \begin{pmatrix} u_1q_1 & u_2q_1 & u_3q_1 \\ 0 & u_2q_2 & u_3q_2 \\ 0 & 0 & u_3q_3 \end{pmatrix}.$$

VD. Phân rã QR cho ma trận sau:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{q}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \boldsymbol{q}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}-2\\1\\1\end{bmatrix}, \boldsymbol{q}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}$$

Tính các tích vô hướng

$$\langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{q}_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(1 \times 1 + 1 \times 1 + 1 \times 1) = \frac{3}{\sqrt{3}}$$

$$\langle \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{q}_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(0 \times 1 + 1 \times 1 + 1 \times 1) = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\langle \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{q}_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(0 \times 1 + 0 \times 1 + 1 \times 1) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\langle \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{q}_2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(0 \times (-2) + 1 \times 1 + 1 \times 1) = \frac{2}{\sqrt{6}}$$

$$\langle \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{q}_2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(0 \times (-2) + 0 \times 1 + 1 \times 1) = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$\langle \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{q}_3 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(0 \times 0 + 0 \times (-1) + 1 \times 1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Từ đó ta có

$$R = \begin{bmatrix}\langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{q}_1 \rangle & \langle \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{q}_1 \rangle & \langle \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{q}_1 \rangle\\ 0 & \langle \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{q}_2 \rangle & \langle \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{q}_2 \rangle\\ 0 & 0 & \langle \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{q}_3 \rangle\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{3}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$$

Như vậy, một phân rã QR của A là

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\1 & 1 & 0\\1 & 1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{3}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$$

** Sử dụng phương pháp bình phương nhỏ nhất để giải các bài tập sau.*

Bài 1) Cho mô hình $y = ax + b$. Tìm các tham số a và b để mô hình phù hợp với từng bộ dữ liệu sau.

a)

x	0	1	2
y	0	2	7

b)

x	0	2	3	3
y	1	0	1	2

Bài 2) Cho mô hình $y = a_0 + a_1x + a_2x^2$. Tìm các tham số a_0, a_1 và a_2 để mô hình phù hợp với từng bộ dữ liệu sau.

a)

x	2	3	5	6
y	0	-10	-48	-76

b)

x	1	0	1	2
y	-2	-1	0	4

Bài 3) Cho mô hình $y = a + \frac{b}{x}$. Tìm các tham số a và b để mô hình phù hợp với bộ dữ liệu sau:

x	1	3	6
y	7	3	1

Bài 4) Cho mô hình $y = a + b\sqrt{x}$. Tìm các tham số a và b để mô hình phù hợp với bộ dữ liệu sau:

x	3	7	10
y	1.5	2.5	3

Bài 5) Định luật Hooke trong vật lý phát biểu rằng độ dài x của lò xo là một hàm tuyến tính của độ lớn lực y tác dụng lên lò xo đó. Khi đó, chúng ta sẽ biểu diễn mối quan hệ này bằng công thức $y = a + bx$. Bằng cách thí nghiệm, người ta thu được kết quả sau:

x	0	2	4	6
y	6.1	7.6	8.7	10.4

Hãy tìm các tham số a và b phù hợp nhất có thể biết trong quá trình thực hiện các thí nghiệm trên có thể có xuất hiện sai số nhỏ.

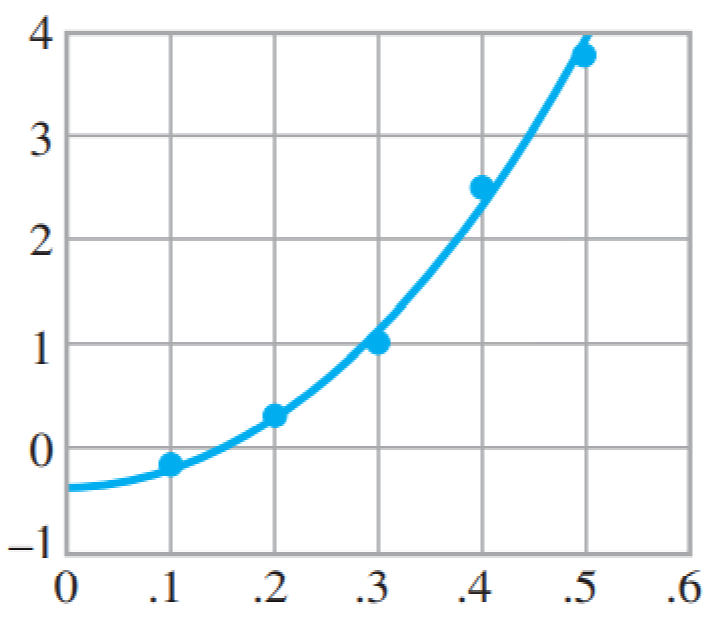
Bài 6) Một vật rơi theo phương thẳng đứng theo phương trình sau:

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g t^2 \qquad (1)$$

Người ta thực hiện thí nghiệm thu được kết quả như sau:

t	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
s	-0.18	0.31	1.03	2.48	3.73

Biểu diễn kết quả trên, ta thu được đồ thị sau, trong đó đường cong có dạng của phương trình (1):



Hãy tìm các tham số s_0, v_0 và g phù hợp nhất.

BÀI TẬP TUẦN 4

Phương pháp tổng bình phương nhỏ nhất

(least square method)

Giả sử ta được cho trước một tập hợp các điểm (x1, y1), (x2, y2), ..., (xn, yn) → cần viết PT một đường thẳng có dạng y = ax+b để "xấp xỉ" các điểm đó. Nếu tất cả các điểm thẳng hàng → quá lý tưởng.

Độ lệch: thế x1 vào PT → |y1 – (a.x1+b)|.

Cần có tiêu chí (hàm mục tiêu):

+ Nếu chọn F = tổng các độ lệch |y1-(ax1+b)|+|y2-(ax2+b)|+...+|yn-(axn+b)| → muốn tìm min thì phải tính đạo hàm tìm cực trị, nhưng đối trị tuyệt đối thì thực hiện không dễ → không nên chọn!

+ Nếu chọn F = tổng bình phương các độ lệch

|y1-(ax1+b)|^2 +|y2-(ax2+b)|^2+...+|yn-(axn+b)|^2.

→ Bình phương dễ tính đạo hàm, tìm cực trị.

VD. tìm a, b để biểu thức 2 biến (3-(4a+b))^2+(4-(a+b))^2+... → có thể làm theo kiểu phổ thông. Ở nội dung "hồi quy tuyến tính" cũng có, cụ thể là:

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

$$\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta}\bar{x}$$

Tính chất: |v|^2 = $v^T.v$. Chuẩn Euclid bình phương:

$$\text{vector } u = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \rightarrow |u|\text{^}2 = 1\text{^}2+2\text{^}2+3\text{^}2 = 14.$$

$$u^T = (1,2,3) \rightarrow u^Tu = (1,2,3)\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = 1\text{^}2+2\text{^}2+3\text{^}2=14 = |u|\text{^}2.$$

Ma trận chuyển vị: $(A.B)^T = B^T.A^T$.

A kích thước m x n, ma trận A^T kích thước n x m → A^TA = ma trận vuông n x n.

Chú ý: Ax = b → x = $A^{-1}b$, nhưng ở đây A không vuông nên không có nghịch. Việc làm ở bên dưới, ta vẫn tính được x = $(A^TA)^{-1}A^T.b$ → nhân với ma trận giả nghịch đảo.

Cơ sở lý thuyết.

Theo từ ngữ toán học, chúng ta muốn tìm nghiệm của "phương trình"

$$A\mathbf{x} \approx \mathbf{b},$$

với A là một ma trận cỡ m-nhân-n (với $m > n$) và $\mathbf{x}$ và $\mathbf{b}$ theo thứ tự đó là vectơ cột với n- và m-hàng. Một cách chính xác hơn, ta muốn làm tối thiểu chuẩn Euclidean bình phương của phần dư $A\mathbf{x} - \mathbf{b}$, nghĩa là, đại lượng

$$\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|^2 = ([A\mathbf{x}]_1 - \mathbf{b}_1)^2 + ([A\mathbf{x}]_2 - \mathbf{b}_2)^2 + \cdots + ([A\mathbf{x}]_m - \mathbf{b}_m)^2,$$

với $[A\mathbf{x}]_i$ ký hiệu phần tử thứ i của vectơ $A\mathbf{x}$. Do đó mà có cái tên "bình phương tối thiểu".

Sử dụng sự kiện bình phương chuẩn của $\mathbf{v}$ là $\mathbf{v}^T\mathbf{v}$, với $\mathbf{v}^T$ ký hiệu cho ma trận chuyển của $\mathbf{v}$, ta viết lại biểu thức trên như là

$$(A\mathbf{x} - \mathbf{b})^T(A\mathbf{x} - \mathbf{b}) = (A\mathbf{x})^T(A\mathbf{x}) - \mathbf{b}^T A\mathbf{x} - (A\mathbf{x})^T\mathbf{b} + \mathbf{b}^T\mathbf{b}.$$

Hai hạng tử ở giữa là như nhau, do đó giá trị tối thiểu có thể được tìm tại zero của đạo hàm theo biến $\mathbf{x}$,

$$2A^T A\mathbf{x} - 2A^T\mathbf{b} = \mathbf{0}.$$

Do vậy là tối thiểu $\mathbf{x}$ là nghiệm của **phương trình normal** sau đây

$$A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}.$$

Để ý rằng điều này tương đương với một hệ phương trình tuyến tính. Ma trận $A^T A$ ở phía bên trái là một ma trận vuông, và khả nghịch nếu như A có đầy rank theo cột (nghĩa là, nếu như rank của A là n). Trong trường hợp đó, nghiệm của hệ phương trình tuyến tính là duy nhất và được cho bởi

$$\mathbf{x} = (A^T A)^{-1} A^T\mathbf{b}.$$

Ma trận $(A^T A)^{-1} A^T$ gọi là ma trận giả nghịch đảo của A. Chúng ta không thể sử dụng ma trận nghịch đảo thật sự của A (nghĩa là, A^{-1}), vì nó không tồn tại do A không phải là một ma trận vuông ($m \neq n$).

$$x = (A^T A)^{-1} A^T.b \rightarrow \text{công thức xấp xỉ.}$$

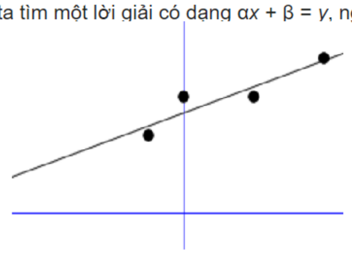
Xét VD bên dưới:

(0;3), (2;3), (4;4), (-1;2)

PT đường: $ax+b = (x \;\; 1)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Cho các điểm (0, 3), (2, 3), (4, 4), (−1, 2). Chúng ta tìm một lời giải có dạng $\alpha x + \beta = y$, nghĩa là,

$$(x \quad 1)\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = y$$



Chúng ta sau đó có thể lập ma trận A:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 4 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 21 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

và vectơ $\mathbf{b}$

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

và sau đó

$$A^T\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 20 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Do đó, phương trình normal là

$$A^T A\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = A^T\mathbf{b}$$

$$\begin{pmatrix} 21 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Sau đó,

$$(A^T A)^{-1} = \frac{1}{59}\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -5 & 21 \end{pmatrix}$$

and

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \frac{1}{59}\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -5 & 21 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 20 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20/59 \\ 152/59 \end{pmatrix}$$

và đường thẳng tốt nhất là $(20/59)x + 152/59 = y$.

Bắt đầu làm bài tập:

** Sử dụng phương pháp bình phương nhỏ nhất để giải các bài tập sau.*

Bài 1) Cho mô hình $y = ax + b$. Tìm các tham số a và b để mô hình phù hợp với từng bộ dữ liệu sau.

a)

x	0	1	2
y	0	2	7

b)

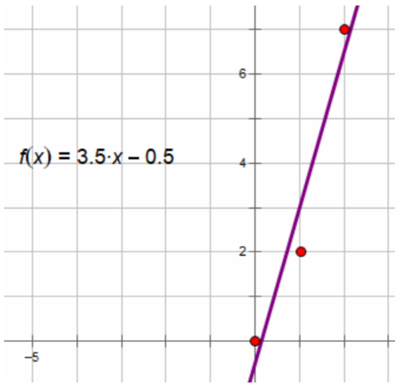
x	0	2	3	3
y	1	0	1	2

1a) Viết ax + b = (x 1)$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Lập ma trận hệ số:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ y = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Tính toán: $A^T.A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ và $A^T.y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 9 \end{pmatrix}$.

Giải hệ $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 5a + 3b = 16 \\ 3a + 3b = 9 \end{cases} \rightarrow$ a = 7/2, b = -1/2.



Tham khảo link này để vẽ đồ thị: https://geogebra.org/calculator

b) Kết quả: a = 1/6, b = 2/3.

Các điểm là: (0,1), (2,0), (3,1) và (3,2).

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

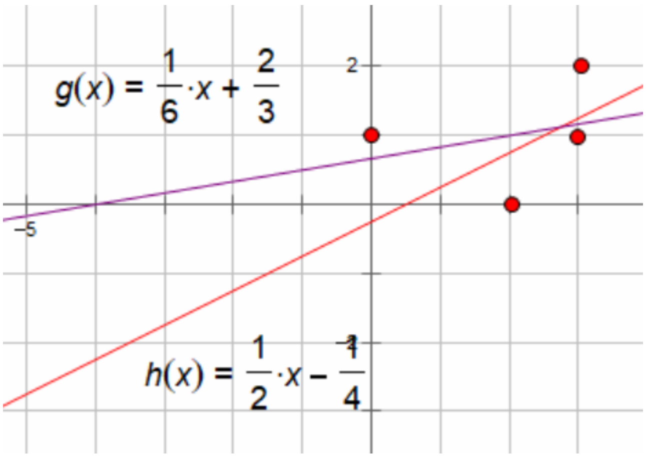
$$A^T A = \begin{pmatrix} 22 & 8 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^T b = \begin{pmatrix} 9 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 22 & 8 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{2}, b = \frac{-1}{4}$$

Tích $A^Tb = (9\ 4)$ → giải hệ đúng là: a=1/6, b=2/3.



- Với các đường xấp xỉ "có vẻ" giống nhau, ta cần có kinh nghiệm nhất định để chọn ra đồ thị tốt nhất.

Bài 2) Cho mô hình $y = a_0 + a_1x + a_2x^2$. Tìm các tham số a_0, a_1 và a_2 để mô hình phù hợp với từng bộ dữ liệu sau.

a)

x	2	3	5	6
y	0	-10	-48	-76

b)

x	1	0	1	2
y	-2	-1	0	4

Bài 2b: ta viết $ax^2+bx+c = (x^2 \;\; x \;\; 1)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Lập bảng dữ liệu mới:

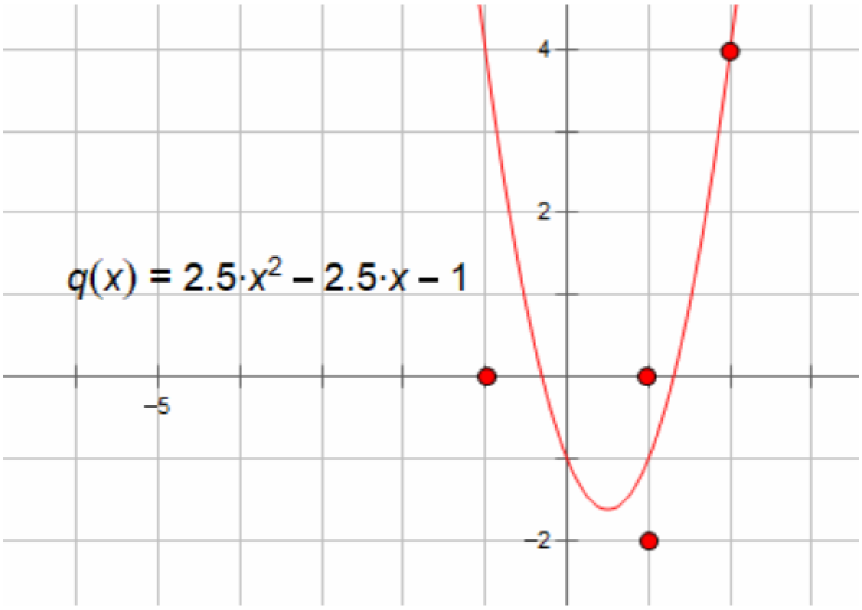
x	1	0	1	2
x^2	1	0	1	4
y	-2	-1	0	4

Ta có: $A = (x^2 \;\; x \;\; 1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ → $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ và $y = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Tính: $A^T.A = \begin{pmatrix} 18 & 10 & 6 \\ 10 & 6 & 4 \\ 6 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ và $A^T y = \begin{pmatrix} 14 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$ → giải hệ như bài 1.

$$\begin{pmatrix} 18 & 10 & 6 \\ 10 & 6 & 4 \\ 6 & 4 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

→ a = 2.5 , b = -2.5, c = -1.



Bằng cách tương tự, ta có thể xấp xỉ cho mọi tập dữ liệu cho trước bởi đường thẳng, đường bậc 2, bậc 3, ..., bậc n tùy ý: nhưng chú ý số dữ liệu >> bậc n.

Bài 3) Cho mô hình $y = a + \frac{b}{x}$. Tìm các tham số a và b để mô hình phù hợp với bộ dữ liệu sau:

x	1	3	6
y	7	3	1

Bài 4) Cho mô hình $y = a + b\sqrt{x}$. Tìm các tham số a và b để mô hình phù hợp với bộ dữ liệu sau:

x	3	7	10
y	1.5	2.5	3

3) Đối chiếu bài 1, ta cần xấp xỉ y ~ ax+b = (x 1)$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Ở bài này, cần xấp xỉ

y ~ a+b/x = (1 1/x) $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, hoặc ta có thể đặt t = 1/x.

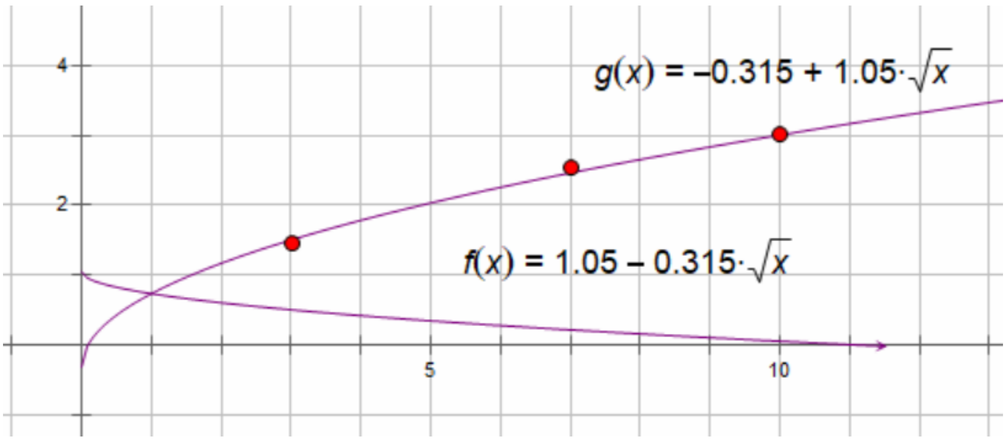
Lập bảng giá trị:

x	1	3	6
t = 1/x	1	1/3	1/6
y	7	3	1

Do đó: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1/3 \\ 1 & 1/6 \end{pmatrix}$ và y = $\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, biến cần tìm $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ → làm tương tự bài 1.

Đối với câu 4: ta thêm dòng căn(x).

Kết quả: a = -0.315 và b = 1.05.



Bài toán xấp xỉ dữ liệu bởi một đồ thị → rất phổ biến trong thực tế. VD: đồ thị để mô tả số ca nhiễm covid.

Dựa trên dữ liệu → chọn mô hình → dùng phương pháp LQ (hoặc các pp nâng cao).

Khó ở chỗ là CHỌN ĐƯỢC ĐÚNG MÔ HÌNH.

Việc chọn lựa mô hình thích hợp dựa vào kinh nghiệm cá nhân.

Có những mô hình phức tạp: y=a.e^x+b.căn(x)+c/x → giải y hệt như trên.

Đặt vấn đề: nếu ở bài 3, có 1 dữ liệu có x = 0 → không thể thế vào; bài 4, có dữ liệu x < 0 → cũng vậy, xử lý thế nào?

Có 2 cách để xử lý:

* Đổi mô hình, không nên chọn các mô hình như thế.
* Tinh chỉnh dữ liệu, loại các điểm không hợp lý đi.

Ở đây, nếu hệ vô số nghiệm → biết chọn cặp (a,b) nào?

Vấn đề đó xảy ra khi ma trận $A^T.A$ không khả nghịch (det = 0), ma trận này đối xứng nên việc không khả nghịch (các dòng có sự phụ thuộc tuyến tính).

Bài 5) Định luật Hooke trong vật lý phát biểu rằng độ dài x của lò xo là một hàm tuyến tính của độ lớn lực y tác dụng lên lò xo đó. Khi đó, chúng ta sẽ biểu diễn mối quan hệ này bằng công thức $y = a + bx$. Bằng cách thí nghiệm, người ta thu được kết quả sau:

x	0	2	4	6
y	6.1	7.6	8.7	10.4

Hãy tìm các tham số a và b phù hợp nhất có thể biết trong quá trình thực hiện các thí nghiệm trên có thể có xuất hiện sai số nhỏ.

→ y hệt bài 1.

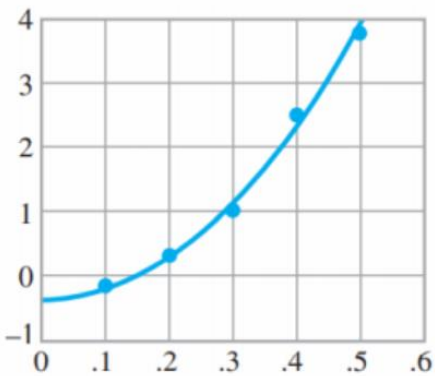
Bài 6) Một vật rơi theo phương thẳng đứng theo phương trình sau:

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g t^2 \qquad (1)$$

Người ta thực hiện thí nghiệm thu được kết quả như sau:

t	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
s	-0.18	0.31	1.03	2.48	3.73

Biểu diễn kết quả trên, ta thu được đồ thị sau, trong đó đường cong có dạng của phương trình (1):



Hãy tìm các tham số s_0, v_0 và g phù hợp nhất.

→ Số g ~ 9.8.

Tổ hợp tuyến tính và cơ sở

Cho họ (tập, hệ) các vector $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_r \in \mathbb{R}^n$ và các số thực $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$.

Ta nói vector

$$\alpha_1 \boldsymbol{u}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{u}_2 + \cdots + \alpha_r \boldsymbol{u}_r$$

là một **tổ hợp tuyến tính** (linear combination) của $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_r$ với các **hệ số** (coefficient) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$.

Ta nói họ $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_r$ là **phụ thuộc tuyến tính** (linearly dependent) nếu có vector nào đó là một tổ hợp tuyến tính của các vector còn lại. Ngược lại, họ được nói là **độc lập tuyến tính** (linearly independent).

Tập tất cả các tổ hợp tuyến tính của $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_r$ được gọi là **linear span** (tiếng Việt???) của $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_r$, kí hiệu $\mathrm{Sp}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_r)$. Tức là

$$\mathrm{Sp}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_r) = \{\alpha_1 \boldsymbol{u}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{u}_2 + \cdots + \alpha_r \boldsymbol{u}_r : \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r \in \mathbb{R}\}$$

Ta nói $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_r$ là một **cơ sở** (basis) của $\mathrm{Sp}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_r)$ nếu $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_r$ độc lập tuyến tính.

Trực giao và trực chuẩn

Cho 2 vector $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n), \boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

Ta định nghĩa **tích vô hướng** (inner product, dot product) của $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ là

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

Ta nói $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ **trực giao** (orthogonal, perpendicular), kí hiệu $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y}$, nếu

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = 0$$

Ta định nghĩa **chuẩn** (norm, length) của $\boldsymbol{x}$ là

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle} = \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2 + \cdots + {x_n}^2}$$

Ta nói $\boldsymbol{x}$ là **vector đơn vị** (unit vector) nếu

$$\|\boldsymbol{x}\| = 1$$

Ta nói họ (hệ, tập) các vector $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_r \in \mathbb{R}^n$ là **trực giao** (orthogonal) nếu chúng đôi một trực giao, tức là

$$\langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j \rangle = 0, \forall i \neq j$$

Ta nói họ (hệ, tập) các vector $\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \dots, \boldsymbol{q}_r \in \mathbb{R}^n$ là **trực chuẩn** (orthonormal) nếu chúng là họ trực giao các vector đơn vị, tức là

$$\begin{cases} \langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j \rangle = 0, \forall i \neq j \\ \|\boldsymbol{v}_i\| = 1, \forall i \end{cases}$$

Ta nói ma trận Q vuông cấp n là **ma trận trực giao** (orthogonal matrix) nếu các vector cột của nó lập thành họ trực chuẩn. Khi đó ta cũng có các vector dòng của nó lập thành họ trực chuẩn. Tức là

$$Q^T Q = QQ^T = I_n$$

$$Q^{-1} = Q^T$$

Trực giao hóa Gram-Schmidt

Thuật giải. (Gram-Schmidt)
Input: Họ các vector $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_r$ cùng kích thước. **Output:** Thông báo nếu họ không độc lập tuyến tính; ngược lại, trả về họ trực giao $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_r$ hoặc họ trực chuẩn $\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \dots, \boldsymbol{q}_r$ là các cơ sở của $\mathrm{Sp}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_r)$.
Bước 1. $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{u}_1$ Nếu $\boldsymbol{v}_1 = 0$ thông báo họ không độc lập tuyến tính và kết thúc. **Bước 2.** $\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{u}_2 - \frac{\langle \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}_1 \rangle}{\|\boldsymbol{v}_1\|^2} \boldsymbol{v}_1$ Nếu $\boldsymbol{v}_2 = 0$ thông báo họ không độc lập tuyến tính và kết thúc. **Bước 3.** $\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{u}_3 - \frac{\langle \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{v}_1 \rangle}{\|\boldsymbol{v}_1\|^2} \boldsymbol{v}_1 - \frac{\langle \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{v}_2 \rangle}{\|\boldsymbol{v}_2\|^2} \boldsymbol{v}_2$ Nếu $\boldsymbol{v}_3 = 0$ thông báo họ không độc lập tuyến tính và kết thúc. ... (đủ r bước hoặc kết thúc với thông báo họ không độc lập tuyến tính) **Bước chuẩn hóa (normalizing) (nếu cần họ trực chuẩn).** $$\boldsymbol{q}_1 = \frac{\boldsymbol{v}_1}{\|\boldsymbol{v}_1\|}, \boldsymbol{q}_2 = \frac{\boldsymbol{v}_2}{\|\boldsymbol{v}_2\|}, \dots, \boldsymbol{q}_r = \frac{\boldsymbol{v}_r}{\|\boldsymbol{v}_r\|}$$

Ví dụ 1. Dùng thuật giải Gram-Schmidt trực chuẩn hóa họ 3 vector sau (nếu họ độc lập tuyến tính)

$$\boldsymbol{u}_1 = (-1, 1, -1, 1), \boldsymbol{u}_2 = (-1, 3, -1, 3), \boldsymbol{u}_3 = (0, 2, 0, 2)$$

Hướng dẫn giải:

Bước 1.

$$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{u}_1 = (-1, 1, -1, 1)$$

$$\|\boldsymbol{v}_1\|^2 = (-1)^2 + 1^2 + (-1)^2 + 1^2 = 4$$

Bước 2.

$$\langle \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}_1 \rangle = (-1) \times (-1) + 3 \times 1 + (-1) \times (-1) + 3 \times 1 = 8$$

$$\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{u}_2 - \frac{\langle \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}_1 \rangle}{\|\boldsymbol{v}_1\|^2} \boldsymbol{v}_1 = (-1, 3, -1, 3) - \frac{8}{4}(-1, 1, -1, 1) = (1, 1, 1, 1)$$

$$\|\boldsymbol{v}_2\|^2 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 = 4$$

Bước 3.

$$\langle \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{v}_1 \rangle = 0 \times (-1) + 2 \times 1 + 0 \times (-1) + 2 \times 1 = 4$$

$$\langle \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{v}_2 \rangle = 0 \times 1 + 2 \times 1 + 0 \times 1 + 2 \times 1 = 4$$

$$\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{u}_3 - \frac{\langle \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{v}_1 \rangle}{\|\boldsymbol{v}_1\|^2}\boldsymbol{v}_1 - \frac{\langle \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{v}_2 \rangle}{\|\boldsymbol{v}_2\|^2}\boldsymbol{v}_2 = (0, 2, 0, 2) - \frac{4}{4}(-1, 1, -1, 1) - \frac{4}{4}(1, 1,1, 1) = 0$$

Như vậy, họ không độc lập tuyến tính.

Ví dụ 2. Dùng thuật giải Gram-Schmidt trực chuẩn hóa họ 3 vector sau

$$\boldsymbol{u}_1 = (1, 1, 1), \boldsymbol{u}_2 = (0, 1, 1), \boldsymbol{u}_3 = (0, 0, 1)$$

***<u>Hướng dẫn giải</u>*:**

Bước 1.

$$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{u}_1 = (1, 1, 1)$$

$$\|\boldsymbol{v}_1\|^2 = 1^2 + 1^2 + 1^2 = 3$$

Bước 2.

$$\langle \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}_1 \rangle = 0 \times 1 + 1 \times 1 + 1 \times 1 = 2$$

$$\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{u}_2 - \frac{\langle \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}_1 \rangle}{\|\boldsymbol{v}_1\|^2}\boldsymbol{v}_1 = (0, 1, 1) - \frac{2}{3}(1, 1, 1) = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$$\|\boldsymbol{v}_2\|^2 = \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

Bước 3.

$$\langle \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{v}_1 \rangle = 0 \times 1 + 0 \times 1 + 1 \times 1 = 1$$

$$\langle \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{v}_2 \rangle = 0 \times \left(-\frac{2}{3}\right) + 0 \times \left(\frac{1}{3}\right) + 1 \times \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

$$\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{u}_3 - \frac{\langle \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{v}_1 \rangle}{\|\boldsymbol{v}_1\|^2}\boldsymbol{v}_1 - \frac{\langle \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{v}_2 \rangle}{\|\boldsymbol{v}_2\|^2}\boldsymbol{v}_2 = (0, 0, 1) - \frac{1}{3}(1, 1, 1) - \frac{1/3}{2/3}\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$\|\boldsymbol{v}_3\|^2 = 0^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Như vậy, ta có họ trực giao tương ứng

$$\boldsymbol{v}_1 = (1, 1, 1), \boldsymbol{v}_2 = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), \boldsymbol{v}_3 = \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Để có họ trực chuẩn ta làm thêm bước chuẩn hóa

$$\boldsymbol{q}_1 = \frac{\boldsymbol{v}_1}{\|\boldsymbol{v}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1), \boldsymbol{q}_2 = \frac{\boldsymbol{v}_2}{\|\boldsymbol{v}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(-2,1,1), \boldsymbol{q}_3 = \frac{\boldsymbol{v}_3}{\|\boldsymbol{v}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,1)$$

Phân rã QR (QR decomposition)

Mệnh đề. (Phân rã QR) Nếu A là ma trận $m \times n$ gồm n vector cột độc lập tuyến tính thì A có thể được phân tích thành

$$A = QR$$

với Q là ma trận $m \times n$ gồm n vector cột trực chuẩn và R là ma trận $n \times n$ tam giác trên khả nghịch.

Thuật giải. (QR-decomposition)
Input: Ma trận A kích thước $m \times n$. **Output:** Thông báo nếu các cột của A không độc lập tuyến tính; ngược lại, trả về Q, R.
Bước 1. Xác định n cột của $A = [\boldsymbol{u}_1 \mid \boldsymbol{u}_2 \mid \dots \mid \boldsymbol{u}_n]$. **Bước 2.** Thực hiện thuật giải Gram-Schmidt trực chuẩn hóa $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_n$. Thông báo nếu các cột của A không độc lập tuyến tính và kết thúc; ngược lại, được $\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \dots, \boldsymbol{q}_n$ là họ trực chuẩn tương ứng. **Bước 3.** Xây dựng ma trận Q gồm n cột $\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \dots, \boldsymbol{q}_n$ $$Q = [\boldsymbol{q}_1 \mid \boldsymbol{q}_2 \mid \dots \mid \boldsymbol{q}_n]$$ **Bước 4.** Xây dựng ma trận R kích thước $n \times n$ như sau $$R = \begin{bmatrix} \langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{q}_1 \rangle & \langle \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{q}_1 \rangle & \cdots & \langle \boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{q}_1 \rangle \\ 0 & \langle \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{q}_2 \rangle & \cdots & \langle \boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{q}_2 \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \langle \boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{q}_n \rangle \end{bmatrix}$$ **Bước 5.** Trả về $A = QR$.

Ví dụ 3. (tiếp theo Ví dụ 2) Phân rã QR ma trận sau

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Hướng dẫn giải:

Các cột của A

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{u}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dùng thuật giải Gram-Schmidt trực chuẩn hóa $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ được (xem Ví dụ 2)

$$\boldsymbol{q}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \boldsymbol{q}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}-2\\1\\1\end{bmatrix}, \boldsymbol{q}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}$$

Tính các tích vô hướng

$$\langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{q}_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(1 \times 1 + 1 \times 1 + 1 \times 1) = \frac{3}{\sqrt{3}}$$

$$\langle \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{q}_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(0 \times 1 + 1 \times 1 + 1 \times 1) = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\langle \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{q}_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(0 \times 1 + 0 \times 1 + 1 \times 1) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\langle \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{q}_2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(0 \times (-2) + 1 \times 1 + 1 \times 1) = \frac{2}{\sqrt{6}}$$

$$\langle \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{q}_2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(0 \times (-2) + 0 \times 1 + 1 \times 1) = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$\langle \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{q}_3 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(0 \times 0 + 0 \times (-1) + 1 \times 1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Từ đó ta có

$$R = \begin{bmatrix}\langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{q}_1 \rangle & \langle \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{q}_1 \rangle & \langle \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{q}_1 \rangle\\ 0 & \langle \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{q}_2 \rangle & \langle \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{q}_2 \rangle\\ 0 & 0 & \langle \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{q}_3 \rangle\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{3}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$$

Như vậy, một phân rã QR của A là

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\1 & 1 & 0\\1 & 1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{3}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$$

TRỊ RIÊNG. VECTOR RIÊNG.

Nhắc lại lý thuyết:

- Cho ma trận $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, tức là A là một **ma trận vuông** cấp n. Xét **số thực** λ và **vector** $x \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ sao cho $x \neq 0$. Khi đó, nếu ta có:

$$Ax = \lambda x$$

thì ta nói λ là một **trị riêng** của ma trận A và x là một **vector riêng** của ma trận A ứng với trị riêng λ.

- Lưu ý: Một vector riêng x chỉ tương ứng với **duy nhất một** trị riêng λ. Nhưng một trị riêng λ có thể tương ứng với **nhiều** vector riêng khác nhau, các vector riêng tập hợp thành một không gian vector gọi là **không gian riêng** ứng với trị riêng λ. Như vậy, một trị riêng λ chỉ tương ứng với **duy nhất một** không gian riêng.

- Để **xác định cụ thể hóa một không gian vector** (tức là có thể nêu ra được các vector thuộc không gian vector cũng như không thuộc không gian vector; kiểm tra một vector có thuộc không gian vector hay không; xác định dạng của các vector thuộc không gian vector;…), ta chỉ cần xác định **cơ sở của không gian vector** là đủ → đây là yêu cầu cần đạt được của bài 1.

- Ta có:

$$\begin{aligned} &Ax = \lambda x \\ \Leftrightarrow\quad &Ax = \lambda I x \\ \Leftrightarrow\quad &(\lambda I - A)x = 0 \end{aligned}$$

Do $Ix = x, \forall x$ nên thay vì λx ta có thể ghi $\lambda I x$. Do đó, ta có $Ax = \lambda I x$. Nhưng tại sao ta lại ghi $(\lambda I - A)x$ mà không ghi $(\lambda - A)x$ vì cả hai đều cùng ám chỉ $\lambda x - Ax$? Để ý ta thấy rằng λ là **số thực** trong khi A là **ma trận** nên phép trừ trong $\lambda - A$ là không hợp lệ trong khi $\lambda I - A$ hoàn toàn hợp lệ. Chính vì vậy, cách ghi $(\lambda I - A)x$ là **cách ghi đúng** về mặt toán học và $(\lambda - A)x$ là **cách ghi sai** về mặt toán học.

- Quy trình tìm trị riêng và cơ sở của không gian riêng ứng với ma trận A sẽ bắt đầu từ việc **tìm trị riêng trước**. Để tìm trị riêng, ta xét phương trình:

$$(\lambda I - A)x = 0$$

Trong phương trình này, ta luôn có vector 0 là nghiệm. Do đó, phương trình này chỉ có 2 trường hợp có thể xảy ra là có **một nghiệm duy nhất** hoặc **vô số nghiệm**. Thêm nữa, ta biết đặc điểm của trị riêng là nó đi kèm với các vector riêng (các vector này khác vector 0). Khi đó, các vector riêng sẽ đóng vai trò là nghiệm của phương trình trên, tức là ứng với trường hợp có **vô số nghiệm**. Như vậy, điều kiện của trị riêng là khiến cho phương trình trên có **vô số nghiệm**.

Phương trình có vô sô nghiệm khi và chỉ khi $\det(\lambda I - A) = 0$. (Để hiểu vì sao ta có được điều này, xem lại lý thuyết của môn đại số tuyến tính).

Phương trình $\det(\lambda I - A) = 0$ được gọi là **phương trình đặc trưng**.

Tóm lại, để tìm tất cả các trị riêng của ma trận A, ta sẽ tìm tất cả các λ thỏa mãn phương trình đặc trưng, tức là **giải phương trình** $\det(\lambda I - A) = 0$.

Sau khi đã có được tất cả trị riêng, bước tiếp theo là **tìm cơ sở của không gian riêng** ứng với từng trị riêng. Để tìm cơ sở của không gian riêng, ta sẽ **thế trị riêng** tương ứng vào phương trình $(\lambda I - A)x = 0$. Khi đó, không gian riêng sẽ chính là **không gian nghiệm** của phương trình $(\lambda I - A)x = 0$.

Mặt khác, cách tìm cơ sở của không gian nghiệm là giải hệ phương trình tìm **nghiệm tổng quát**. Lúc đó, nghiệm tổng quát sẽ có dạng $x = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_m v_m$ thì cơ sở của không gian nghiệm chính là $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$. Khi đã có cơ sở của không gian nghiệm thì đó chính là **cơ sở của không gian riêng**.

Đến đây, ta đã xong phần cách làm của bài 1.

- **Ghi chú**: Giải thích lý do tại sao khi nghiệm tổng quát sẽ có dạng $x = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_m v_m$ thì cơ sở của không gian nghiệm chính là $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$:

Để ra được nghiệm tổng quát, ta sẽ gán các biến tự do $x_{i_1}, \dots, x_{i_m}$ bằng các giá trị $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ và các biến còn lại được tính dựa trên $\alpha_1, \dots, \alpha_m$.

Khi đó, ở kết quả cuối cùng, chỉ có duy nhất vector v_1 có thành phần thứ i_1 nhận giá trị 1, còn các vector khác sẽ có giá trị 0 ở thành phần này. Tương tự, chỉ có duy nhất vector v_2 có thành phần thứ i_2 nhận giá trị 1, còn các vector khác sẽ có giá trị 0 ở thành phần này,…. Tức là ở các thành phần $i_1, \dots, i_m$ chỉ có duy nhất một vector có giá trị 1 còn các vector khác sẽ có giá trị 0. Chính do điều đó, $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ phải **độc lập tuyến tính**.

Ngoài ra, tất cả các nghiệm đều thỏa dạng $x = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_m v_m$ và với mọi giá trị $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ thì $x = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_m v_m$ đều là nghiệm nên không gian nghiệm chính là **không gian sinh** bởi $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$.

Từ những lý do trên, $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ chính là **cơ sở của không gian nghiệm**.

CHÉO HÓA MA TRẬN

Nhắc lại lý thuyết:

- Cho ma trận $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, tức là A là một **ma trận vuông** cấp n. Xét ma trận khả nghịch $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ và ma trận đường chéo $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Khi đó, nếu ta có:

$$D = P^{-1}AP$$

thì ta nói ma trận A **chéo hóa được** và P là **ma trận làm chéo hóa** ma trận A, còn D là **dạng chéo** của ma trận A.

- Quá trình **chéo hóa** là quá trình tìm các ma trận P và D ở trên → Đây là yêu cầu của bài 2.

- Nếu ta viết $P = (p_1| \dots |p_n)$ và $D = diag(d_1, \dots, d_n)$ thì ta có:

$$\begin{aligned} & D = P^{-1}AP \\ \Leftrightarrow\ & AP = PD \\ \Leftrightarrow\ & A(p_1| \dots |p_n) = (p_1| \dots |p_n)diag(d_1, \dots, d_n) \\ \Leftrightarrow\ & A(p_1| \dots |p_n) = (d_1p_1| \dots |d_np_n) \end{aligned}$$

Điều này tương đương với $\begin{cases} Ap_1 = d_1p_1 \\ \quad\vdots \\ Ap_n = d_np_n \end{cases}$. Từ đây ta có thể suy ra rằng các số thực $d_1, \dots, d_n$ là **các trị riêng** và các vector $p_1, \dots, p_n$ là **các vector riêng lần lượt tương ứng với các trị riêng** $d_1, \dots, d_n$.

- Do P **khả nghịch** nên $\{p_1, \dots, p_n\}$ phải **độc lập tuyến tính**. Do đó, nếu ma trận A **chéo hóa được** thì ma trận A có n **vector riêng độc lập tuyến tính**. Ngược lại, nếu ma trận A có n **vector riêng độc lập tuyến tính** thì ta có thể tạo thành ma trận khả nghịch P và ma trận đường chéo D bằng cách ghép các vector riêng và các trị riêng tương ứng. Khi đó, ta có $AP = PD$ hay $D = P^{-1}AP$ hay ma trận A **chéo hóa được**.

Nói tóm lại, ma trận A **chéo hóa được** khi và chỉ khi ma trận A có n **vector riêng độc lập tuyến tính**.

- Để xác định được ma trận A chéo hóa được hay không thì trước hết ta cần xác định **số lượng tối đa** vector riêng độc lập tuyến tính mà ma trận A có thể có → Nếu có đủ thì chéo hóa được, ngược lại nếu không có đủ sẽ không chéo hóa được.

- Với một ma trận vuông A bất kỳ, từ bài 1, ta có thể tìm được tất cả **các trị riêng** cũng như **cơ sở của các không gian riêng** tương ứng với các trị riêng đó. Như vậy, ta gọi $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ là **các trị riêng** của A và $B_1 = \{v_{1,1}, \dots, v_{1,k_1}\}, \dots, B_m = \{v_{m,1}, \dots, v_{m,k_m}\}$ là **cơ sở của các không gian riêng** của A lần lượt tương ứng với $\lambda_1, \dots, \lambda_m$. Cần lưu ý là các trị riêng $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ **đôi một khác nhau**, tức là $\lambda_i \neq \lambda_j, \forall i \neq j$.

Giả sử phương trình $(\alpha_{1,1}v_{1,1} + \dots + \alpha_{1,k_1}v_{1,k_1}) + \dots + (\alpha_{m,1}v_{m,1} + \dots + \alpha_{m,k_m}v_{m,k_m}) = 0$ có nghiệm $(\alpha_{1,1}, \dots, \alpha_{1,k_1}, \dots, \alpha_{m,1}, \dots, \alpha_{m,k_m})$ **khác 0**. Do thứ tự giữa các vector trong mỗi cơ sở cũng như thứ tự giữa cặp trị riêng và cơ sở là **không quan trọng và có thể thay đổi** nên ta có thể giả sử $\alpha_{1,1} \neq 0$ mà không mất tính tổng quát.

Khi đó, ta đặt $\begin{cases} v_1 = \alpha_{1,1}v_{1,1} + \dots + \alpha_{1,k_1}v_{1,k_1} \\ \qquad\vdots \\ v_m = \alpha_{m,1}v_{m,1} + \dots + \alpha_{m,k_m}v_{m,k_m} \end{cases}$ thì phương trình trở thành $v_1 + \dots + v_m = 0$, đồng thời ta cũng có:

$$\begin{cases} Av_1 = \alpha_{1,1}Av_{1,1} + \cdots + \alpha_{1,k_1}Av_{1,k_1} = \alpha_{1,1}\lambda_1 v_{1,1} + \cdots + \alpha_{1,k_1}\lambda_1 v_{1,k_1} = \lambda_1 v_1 \\ \vdots \\ Av_m = \alpha_{m,1}Av_{m,1} + \cdots + \alpha_{m,k_m}Av_{m,k_m} = \alpha_{m,1}\lambda_m v_{m,1} + \cdots + \alpha_{m,k_m}\lambda_m v_{m,k_m} = \lambda_m v_m \end{cases}$$

Ngoài ra, do $\alpha_{1,1} \neq 0$ nên $v_1 \neq 0$ vì $B_1 = \{v_{1,1}, \dots, v_{1,k_1}\}$ **độc lập tuyến tính**.

Đặt: $d_{i,j} = \lambda_i - \lambda_j, \forall i, j$. Khi đó: $d_{i,i} = 0, \forall i$ và $d_{i,j} \neq 0, \forall i \neq j$ do các trị riêng **đôi một khác nhau**.

Ta có:

$$\begin{aligned} 0 &= A(v_1 + \cdots + v_m) - \lambda_m(v_1 + \cdots + v_m) \\ &= d_{1,m}v_1 + \cdots + d_{m,m}v_m \\ &= d_{1,m}v_1 + \cdots + d_{m-1,m}v_{m-1} + 0v_m \\ &= d_{1,m}v_1 + \cdots + d_{m-1,m}v_{m-1} \end{aligned}$$

Ta lại có:

$$\begin{aligned} 0 &= A\left(d_{1,m}v_1 + \cdots + d_{m-1,m}v_{m-1}\right) - \lambda_{m-1}\left(d_{1,m}v_1 + \cdots + d_{m-1,m}v_{m-1}\right) \\ &= d_{1,m}d_{1,m-1}v_1 + \cdots + d_{1,m}d_{m-1,m-1}v_{m-1} \\ &= d_{1,m}d_{1,m-1}v_1 + \cdots + d_{1,m}d_{m-2,m-1}v_{m-2} + d_{1,m}0v_{m-1} \\ &= d_{1,m}d_{1,m-1}v_1 + \cdots + d_{1,m}d_{m-2,m-1}v_{m-2} \end{aligned}$$

Cứ tiếp tục làm tương tự như vậy, ta có: $0 = d_{1,m} \dots d_{1,2}v_1$.

Nhưng điều đó không thể xảy ra do vector $v_1 \neq 0$ và $d_{1,m}, \dots, d_{1,2} \neq 0$.

Vậy phương trình $\left(\alpha_{1,1}v_{1,1} + \cdots + \alpha_{1,k_1}v_{1,k_1}\right) + \cdots + \left(\alpha_{m,1}v_{m,1} + \cdots + \alpha_{m,k_m}v_{m,k_m}\right) = 0$ **không thể có nghiệm khác 0**.

Nói cách khác, $B = B_1 \cup \dots \cup B_m$ **phải độc lập tuyến tính**.

Ngoài ra, các vector riêng sẽ là tổ hợp tuyến tính của một trong các $B_1, \dots, B_m$ hay nói cách khác, các vector riêng đều là tổ hợp tuyến tính của B.

Như vậy, **số lượng tối đa vector riêng độc lập tuyến tính** mà ma trận A có thể có chính là **số lượng vector** của B, tức là $|B|$.

- Từ chứng minh trên, ta rút ra được 2 điều:

+ Tập hợp các vector $B = B_1 \cup \dots \cup B_m$ **độc lập tuyến tính**.

+ **Số lượng vector riêng độc lập tuyến tính tối đa** có thể có là $|B|$.

Do đó, để chéo hóa ma trận A, bước đầu tiên ta thực hiện là **tìm tất cả các trị riêng và cơ sở của các không gian riêng** tương ứng. Từ đó, ta thu được tập hợp B. Nếu B **không có đủ** n vector thì ta kết luận ma trận A **không thể chéo hóa được**. Ngược lại, nếu B **có đủ** n vector thì ta kết luận ma trận A **chéo hóa được** và ta sử dụng n vector của B để xây dựng ma trận P và ma trận D bằng cách **ghép các vector riêng và trị riêng tương ứng** như đã nói ở trên.

<u>Hướng dẫn bài 3.</u>

Nhắc lại lý thuyết:

- Cho ma trận $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, tức là A là một **ma trận vuông** cấp n. Xét **ma trận trực chuẩn** $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ và **ma trận đường chéo** $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Khi đó, nếu ta có:

$$D = Q^T A Q$$

thì ta nói ma trận A **chéo hóa trực giao được**.

- **Ma trận trực chuẩn** $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ là một ma trận khả nghịch thỏa $Q^{-1} = Q^T$.

- Như vậy, khái niệm **chéo hóa trực giao** đã bao gồm khái niệm **chéo hóa**. Tức là, ma trận A **chéo hóa trực giao được** thì nó cũng **chéo hóa được** nhưng **điều ngược lại chưa chắc đúng**.

- Do việc chứng minh đòi hỏi những kiến thức nằm ra ngoài khuôn khổ môn học nên ta sẽ thừa nhận không chứng minh định lý sau: Ma trận A **chéo hóa trực giao được** khi và chỉ khi ma trận A là **ma trận đối xứng**. (Mặc dù vậy, chiều thuận có thể chứng minh dễ dàng do $A^T = (QDQ^T)^T = (Q^T)^T D^T Q^T = QDQ^T = A$ nên A là m trận đối xứng).

- **Ma trận đối xứng** A là một ma trận vuông thỏa $A^T = A$.

- Nhờ định lý trên, ta chỉ cần **kiểm tra ma trận có đối xứng** hay không. Nếu có đối xứng thì ma trận đó chéo hóa trực giao được (và tất nhiên cũng sẽ chéo hóa được). Ngược lại, nếu không đối xứng thì ma trận đó không chéo hóa trực giáo được (nhưng không kết luận được gì về tính chéo hóa).

- Nếu ma trận A đối xứng thì ta sẽ tìm các ma trận Q và D như sau:

+ Đầu tiên, vì là ma trận đối xứng nên ma trận A chéo hóa được. Do đó, theo cách làm bài 2, ta có thể tìm được các ma trận P và D thỏa $D = P^{-1}AP$.

+ Áp dụng thuật Gram-Schmidt để thực hiện phân rã QR cho ma trận P. Cần lưu ý là ma trận P **khả nghịch** nên phân rã QR **luôn thực hiện được**.

+ Ma trận Q thu được từ phân ra QR ma trận P và ma trận D thu được từ quá trình chéo hóa ma trận A chính là 2 ma trận mà ta cần tìm.

- Giải thích sơ lược cách làm trên: Cho ma trận A đối xứng.

Xét hai vector riêng v_1 và v_2 bất kỳ sao cho trị riêng tương ứng của chúng là λ_1 và λ_2 phải khác nhau, tức là $\lambda_1 \neq \lambda_2$:

$$\lambda_1 v_1^T v_2 = (\lambda_1 v_1)^T v_2 = (Av_1)^T v_2 = v_1^T A^T v_2 = v_1^T A v_2 = v_1^T \lambda_2 v_2 = \lambda_2 v_1^T v_2$$

Nên $(\lambda_1 - \lambda_2) v_1^T v_2 = 0 \Rightarrow v_1^T v_2 = 0 \Leftrightarrow \langle v_1, v_2 \rangle = 0$

Nói cách khác, đối với **ma trận đối xứng**, **hai vector riêng** ứng với **hai trị riêng khác nhau** sẽ **trực giao với nhau**. Điều này suy ra rằng một vector riêng thuộc một không gian riêng sẽ **trực giao với** các vector riêng thuộc các không gian riêng **khác**.

Ta đã biết ma trận P được tạo từ các vector cột của $B = B_1 \cup \ldots \cup B_m$, trong đó $B_1, \ldots, B_m$ là cơ sở của các không gian riêng. Kết hợp với điều chứng minh trên, quá trình trực giao hóa P là quá trình trực giao hóa B mà do ma trận A đối xứng nên kết quả thu được sẽ giống với trực giao hóa từng cơ sở $B_1, \dots, B_m$ rồi ghép lại với nhau. Chính vì vậy, mỗi vector trực chuẩn sẽ là tổ hợp tuyến tính của một trong các cơ sở $B_1, \dots, B_m$ nên các vector trực chuẩn cũng sẽ đồng thời là vector riêng của ma trận A (lưu ý điều này chỉ đúng với ma trận A đối xứng).

Do các vector trực chuẩn được dùng để tạo thành ma trận Q là các vector riêng nên ta có thể dùng Q để chéo hóa.

Định nghĩa 1. Cho S là một tập hữu hạn, dãy các biến ngẫu nhiên $\{X_0, X_1, \dots\}$ nhận giá trị trên S được gọi là một **xích Markov** (Markov chain) nếu

$$\Pr(X_{n+1} = i | X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_n = j) = \Pr(X_{n+1} = i | X_n = j) = \Pr(X_1 = i | X_0 = j) = p_{ij}$$

với mọi $x_0, x_1, \dots, i, j \in S$ và $n \in \mathbb{N}$.

Tập S được gọi là tập trạng thái hay **không gian trạng thái** (state space) của xích.

Khi $X_n = s$, ta thường nói là xích ở trạng thái s tại thời điểm n.

Lưu ý: Với định nghĩa trên, ta có xích Markov *thời gian rời rạc* (discrete-time), *đồng nhất* (time-homogeneous) và *hữu hạn trạng thái* (finite state space).

Định nghĩa 2. Cho xích Markov $\{X_0, X_1, \dots\}$ có tập trạng thái S với $|S| = k$, ma trận $P \in \mathbb{R}^{k \times k}$ sau được gọi là **ma trận chuyển** (transition matrix) của xích

$$P_{ij} = p_{ij} = \Pr(X_1 = i | X_0 = j).$$

Nhận xét: P là ma trận gồm các số không âm và tổng các phần tử trên mỗi cột là 1.

Định nghĩa 3. Cho biến ngẫu nhiên rời rạc X nhận giá trị trên tập hữu hạn $S = \{1, 2, \dots, k\}$, vector $\pi \in \mathbb{R}^k$ sau được được gọi là (vector) **phân phối** (distribution) của X

$$\pi_i = \Pr(X = i).$$

Cho xích Markov $\{X_0, X_1, \dots\}$, phân phối của X_n được gọi là phân phối của xích tại thời điểm n. Phân phối của X_0 được gọi là **phân phối đầu** (initial distribution) của xích.

Mệnh đề 4. Cho xích Markov $\{X_0, X_1, \dots\}$ có tập trạng thái S và ma trận chuyển P, với mọi $n \in \mathbb{N}$ ta có

$$P_{ij}^n = \Pr(X_{t+n} = i | X_t = j) = \Pr(X_n = i | X_0 = j)$$

với mọi $i, j \in S$ và $t \in \mathbb{N}$.

P^n được gọi là **ma trận chuyển n bước** (n-step transition matrix) của xích.

Mệnh đề 5. Cho xích Markov $\{X_0, X_1, \dots\}$ với ma trận chuyển P và π_t là phân phối của xích tại thời điểm t, ta có

$$\pi_{t+n} = P^n \pi_t$$

với mọi $t, n \in \mathbb{N}$. Đặc biệt,

$$\pi_n = P^n \pi_0$$

với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Lưu ý: các vector phân phối được xem như là vector cột.

Định nghĩa 6. Cho xích Markov $\{X_0, X_1, \dots\}$ với ma trận chuyển P, phân phối π có tính chất

$$\lim_{n \to \infty} P_{ij}^n = \pi_i$$

với mọi i, j được gọi là **phân phối giới hạn** (limiting distribution) của xích.

Mệnh đề 7. Các phát biểu sau đây tương đương nhau

(i) π là phân phối giới hạn của xích $\{X_0, X_1, \dots\}$.

(ii) Với mọi phân phối đầu và mọi trạng thái i,
$$\lim_{n\to\infty} \Pr(X_n = i) = \pi_i.$$

(iii) Với mọi phân phối đầu α,
$$\lim_{n\to\infty} P^n \alpha = \pi.$$

(iv)
$$\lim_{n\to\infty} P^n = \Pi$$
với Π là ma trận có tất cả các cột đều là π.

<u>*Nhận xét*</u>:

- Xích có thể không có phân phối giới hạn nhưng nếu có thì là duy nhất.
- Khi xích có phân phối giới hạn là π, ta có thể hiểu π_i là "xác suất dài hạn" xích ở trạng thái i, nghĩa là xác suất xích ở trạng i sau một thời gian rất dài, không phụ thuộc vào phân phối đầu.

Định nghĩa 8. Cho xích Markov $\{X_0, X_1, \dots\}$ với ma trận chuyển P, phân phối π có tính chất

$$\pi = P\pi$$

được gọi là **phân phối dừng** (stationary distribution) của xích.

<u>*Nhận xét*</u>:

- Xích có thể không có, có 1 hoặc nhiều phân phối dừng.
- Khi xích "rơi" vào một phân phối dừng thì xích sẽ "dừng" ở phân phối đó (xích không thay đổi phân phối), nghĩa là nếu có n để $\pi_n = \pi$ là một phân phối dừng thì $\pi_t = \pi, \forall t \geq n$.
- Phân phối giới hạn nếu có, là một phân phối dừng.

Định nghĩa 9. Ma trận chuyển P được gọi là **chính qui** (regular) nếu có n để P^n gồm toàn các phần tử dương.

Mệnh đề 10. Nếu xích Markov $\{X_0, X_1, \dots\}$ có ma trận chuyển P chính qui thì xích có phân phối giới hạn cũng là phân phối dừng duy nhất.

Ví dụ 11. Cho xích Markov $\{X_0, X_1, \dots\}$ với tập trạng thái $S = \{1, 2, 3\}$, ma trận chuyển

$$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 1 \\ 0.8 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

và phân phối đầu $\pi_0 = (0.5, 0.5, 0)$. Ta có ma trận chuyển 3 bước

$$P^3 = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.488 & 0.360 & 0.040 \\ 0.224 & 0.544 & 0.480 \\ 0.288 & 0.096 & 0.480 \end{bmatrix} \end{array}$$

Phân phối của X_3

$$\pi_3 = P^3\pi_0 = \begin{bmatrix} 0.424 \\ 0.384 \\ 0.192 \end{bmatrix}$$

Do đó ta có

$$\Pr(X_{10} = 2|X_7 = 1, X_6 = 3) = \Pr(X_{10} = 2|X_7 = 1) = P^3_{2,1} = 0.224$$

$$\Pr(X_4 = 2, X_3 = 1) = \Pr\,(X_3 = 1)\Pr\,(X_4 = 2|X_3 = 1) = (\pi_3)_1 P_{2,1} = 0.424 \times 0.8 = 0.3392$$

Vì P^3 gồm toàn các số dương nên P chính qui nên P có phân phối giới hạn π cũng là phân phối dừng duy nhất, do đó π là nghiệm (duy nhất) của hệ sau:

$$\begin{cases} \pi = (a, b, c) \\ a, b, c \geq 0 \\ a + b + c = 1 \\ P\pi = \pi \end{cases}$$

Giải hệ này (hệ PTTT với điều kiện không âm) ta có nghiệm

$$\pi = \left(\frac{15}{47}, \frac{20}{47}, \frac{12}{47}\right)$$

Như vậy, không phụ thuộc vào phân phối đầu, sau một khoảng thời gian rất dài, ta có xích ở các trạng thái 1, 2, 3 với xác suất lần lượt là 0.3192, 0.4255, 0.2553.

Lưu ý: ta cũng có thể tìm giới hạn của P^n (nhờ chéo hóa để tìm công thức của P^n) nhưng khó hơn (tốn thời gian hơn).

XÍCH MARKOV & MA TRẬN CHUYỂN TRẠNG THÁI

Mệnh đề 4. Cho xích Markov $\{X_0, X_1, \ldots\}$ có tập trạng thái S và ma trận chuyển P, với mọi $n \in \mathbb{N}$ ta có

$$P_{ij}^n = \Pr(X_{t+n} = i | X_t = j) = \Pr(X_n = i | X_0 = j)$$

với mọi $i, j \in S$ và $t \in \mathbb{N}$.

P^n được gọi là **ma trận chuyển n bước** (n-step transition matrix) của xích.

Mệnh đề 5. Cho xích Markov $\{X_0, X_1, \ldots\}$ với ma trận chuyển P và π_t là phân phối của xích tại thời điểm t, ta có

$$\pi_{t+n} = P^n \pi_t$$

với mọi $t, n \in \mathbb{N}$. Đặc biệt,

$$\pi_n = P^n \pi_0$$

với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Pr(X_(t+n)=i | Xt = j) xác suất để chuyển từ trạng thái Xt → X_(t+n), nghĩa là trải qua n bước; coi nó giống như: X0 → X_n, cũng qua n bước.

~ BT tìm đường đi trong graph cho bởi ma trận cạnh kề A: đi từ đỉnh u → v với đường đi ngắn nhất thông qua k bước → lũy thừa ma trận A^k rồi mới xét các giá trị trong A^k.

Ban đầu, có trạng thái pi_0 → sau n bước → có trạng thái pi_n tính bằng cách P^n.pi_0.

1. Cho xích Markov với ma trận chuyển trạng thái P như sau:

$$P = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{pmatrix}$$

Tìm $\pi_n, n = 1,2,3,4,5$ nếu $\pi_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2. Cho xích Markov với ma trận chuyển trạng thái P như sau:

$$P = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.1 & 0.7 \\ 0.6 & 0.4 & 0.2 \\ 0.2 & 0.5 & 0.1 \end{pmatrix}$$

Tìm $\pi_n, n = 1,2,3$ nếu $\pi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

~ BT di dân: mỗi năm, có 0.8 dân ở nông thôn đi lên TP và 0.3 dân ở TP đi về nông thôn → sau k năm, tỷ số dân TP & nông thôn sẽ thay đổi ra sao.

2) $P = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.1 & 0.7 \\ 0.6 & 0.4 & 0.2 \\ 0.2 & 0.5 & 0.1 \end{pmatrix}$ → pi_1 = $\begin{pmatrix} 0.2 & 0.1 & 0.7 \\ 0.6 & 0.4 & 0.2 \\ 0.2 & 0.5 & 0.1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7 \\ 0.2 \\ 0.1 \end{pmatrix}$.

Tương tự với pi_2, pi_3.

1) pi_1 = $\begin{pmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 \\ 0.2 \end{pmatrix}$.

pi_2 = $\begin{pmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{pmatrix}$. pi_1 = $\begin{pmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.8 \\ 0.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7 \\ 0.3 \end{pmatrix}$.

pi_3 = $\begin{pmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{pmatrix}$. pi_2 = $\begin{pmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0.7 \\ 0.3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.65 \\ 0.35 \end{pmatrix}$.

→ có sự thay đổi thỏa mãn tổng 2 số trong trạng thái pi_k là 1.

Đặt vấn đề: để tính pi_n với n rất lớn → ta phải lũy thừa được ma trận P lên.

+ Lập trình: lũy thừa ma trận mũ n → for hoặc đệ quy (dùng cách lũy thừa nhanh để ma trận P^n).

+ Tính toán thủ công: dùng chéo hóa ma trận → tìm ma trận đồng dạng P = $Q^{-1}DQ$ xong rồi lũy thừa.

Bài A.2. (A.2.=B.2.) (Tổng = 6 điểm) Người ta khảo sát một mô hình di cư dân số giữa hai vùng đô thị và nông thôn với quy luật như sau: Hằng năm, có **50%** dân số vùng nông thôn chuyển về vùng đô thị và đồng thời có **25%** dân số vùng đô thị chuyển về vùng nông thôn sinh sống. Giả sử x, y tương ứng là số dân vùng nông thôn và vùng đô thị ở thời điểm ban đầu ($x, y > 0$).

(a) (4 điểm) Hỏi sau k năm dân số của vùng nông thôn và vùng đô thị là bao nhiêu?

(b) (2 điểm) Giả sử ban đầu số người sống ở nông thôn và đô thị là bằng nhau. Có thể đến lúc nào đó dân số của vùng đô thị vượt quá **80%** tổng dân số của cả hai vùng không? Giải thích câu trả lời.

Hướng dẫn giải

(a) (4 điểm)

Cách 1:

- Gọi x_k, y_k tương ứng là số dân tại các vùng nông thôn và vùng đô thị sau k năm. Ví dụ, $x_0 = x, y_0 = y$. Ta có $x_{k+1} = \frac{1}{2}x_k + \frac{1}{4}y_k, y_{k+1} = \frac{3}{4}y_k + \frac{1}{2}x_k$. Nói cách khác

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix}.$$

- Từ đó suy ra,

$$\begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix} = A^n \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix},$$

trong đó $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$.

- Đa thức đặc trưng của A là $x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{1}{4} = (x-1)(x-\frac{1}{4})$. Từ đây, ta suy ra A có các véctơ riêng $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ tương ứng với các giá trị riêng $1, 1/4$. Vậy, nếu ta đặt $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, thì $P^{-1}AP = D$, trong đó D là ma trận đường chéo với các hệ số trên đường chéo lần lượt là 1 và $1/4$. Ta dễ dàng tính được $P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$.

- Suy ra $A = PDP^{-1}$ và

$$A^k = PD^kP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4^n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} + \frac{2}{3\cdot 4^k} & \frac{1}{3} - \frac{1}{3\cdot 4^k} \\ \frac{2}{3} - \frac{2}{3\cdot 4^k} & \frac{2}{3} + \frac{1}{3\cdot 4^k} \end{bmatrix}.$$

- Từ đó,

$$x_k = \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3\cdot 4^k}\right)x + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3\cdot 4^k}\right)y,$$

$$y_k = \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3\cdot 4^k}\right)x + \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3\cdot 4^k}\right)y.$$

3. Cho xích Markov với 3 trạng thái 1, 2, 3 và có ma trận xác suất chuyển như sau:

$$P = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.3 & 0.4 \\ 0.3 & 0.3 & 0.1 \\ 0.1 & 0.4 & 0.5 \end{pmatrix}$$

a) Tính $P(X_2 = 2, X_1 = 2 | X_0 = 1)$

b) Tính $P(X_{10} = 2 | X_7 = 1, X_6 = 3)$

c) Tính $P(X_4 = 2, X_3 = 1)$ biết phân phối đầu là $\begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.4 \\ 0.2 \end{pmatrix}$.

a) Ta có:

P(X2=2, X1=2|X0 =1) = P(X2=2|X1=1,X0=1).P(X1=1|X0=1).

= P(X2=2|X1=1).P(X1=1|X0=1).

= P(X1=2|X0=1).P(X1=1|X0=1).

= phần tử tại vị trí 2,1 nhân phần tử tại vị trí 1,1 của P

= 0.3 x 0.6 = 0.18.

b) P(X10=2|X7=1,X6=3) = P(X10=2|X7=1) = P(X3=2|X0=1) = phần tử tại vị trí 2,1 của ma trận P^3. Ta có:

$$P^3 = \begin{pmatrix} 0.47 & 0.464 & 0.474 \\ 0.254 & 0.23 & 0.234 \\ 0.256 & 0.306 & 0.292 \end{pmatrix}.$$

Do đó xác suất cần tính = phần tử ở vị trí (2,1) → 0.254.

VD: P(X5=3|X0=2) = phần tử tại vị trí 3,2 của P^5.

VD: P(X2022 = 1| X2002 = 3) = P(X20 = 1|X0 = 3) = phần tử tại vị trí 1,3 của P^20.

c) P(X4=2, X3=1) = P(X3=1).P(X4=2|X3=1) = $(pi_3)_1$.P(X1=2|X0=1)

= $(pi_3)_1$. phần tử thứ (2,1) của ma trận P.

= $(pi_3)_1$. 0.3.

Ta tính pi3 = P^3.pi0 = $\begin{pmatrix} 0.47 & 0.464 & 0.474 \\ 0.254 & 0.23 & 0.234 \\ 0.256 & 0.306 & 0.292 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.4 \\ 0.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4684 \\ 0.2404 \\ 0.2912 \end{pmatrix}$ (đừng nên làm tròn).

Do đó: phần tử $(pi_3)_1$ là phần tử thứ 1 của phân phối thứ 3 là 0.4684.

→ Xác suất cần tìm = 0.4684 x 0.3 = 0.14652.

Đối chiếu với BT cũ trên lớp:

Ví dụ 11. Cho xích Markov $\{X_0, X_1, \dots\}$ với tập trạng thái $S = \{1,2,3\}$, ma trận chuyển

$$P = \begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 0.2 & 0 & 1 \\ 2 & 0.8 & 0.4 & 0 \\ 3 & 0 & 0.6 & 0 \end{array}$$

và phân phối đầu $\pi_0 = (0.5, 0.5, 0)$. Ta có ma trận chuyển 3 bước

$$P^3 = \begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 0.488 & 0.360 & 0.040 \\ 2 & 0.224 & 0.544 & 0.480 \\ 3 & 0.288 & 0.096 & 0.480 \end{array}$$

Phân phối của X_3

//xét P(X10=2|X7=1) = P(X3=2|X0=1) = P^3 ← phần tử tại vị trí 2,1 của ma trận.

Định nghĩa 1. Cho S là một tập hữu hạn, dãy các biến ngẫu nhiên $\{X_0, X_1, \dots\}$ nhận giá trị trên S được gọi là một **xích Markov** (Markov chain) nếu

$$\Pr(X_{n+1} = i | X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_n = j) = \Pr(X_{n+1} = i | X_n = j) = \Pr(X_1 = i | X_0 = j) = p_{ij}$$

với mọi $x_0, x_1, \dots, i, j \in S$ và $n \in \mathbb{N}$.

Tập S được gọi là tập trạng thái hay **không gian trạng thái** (state space) của xích.

BT tương tự:

Bài 1 : Cho xích Markov 3 trạng thái 0, 1, 2 với ma trận xác suất chuyển :

$$P = \begin{bmatrix} 0,6 & 0,3 & 0,1 \\ 0,3 & 0,3 & 0,4 \\ 0,4 & 0,1 & 0,5 \end{bmatrix}$$

a. Tính $P\{X_2 = 1, X_1 = 1 | X_0 = 0\}$.
b. Tính $P\{X_2 = 1, X_3 = 1 | X_1 = 0\}$.
c. Biết quá trình xuất phát với trạng thái $X_0 = 1$.
   Tính $P\{X_0 = 1, X_1 = 0, X_2 = 2\}$.
d. Giả sử phân phối đầu là $\alpha_0 = 0,5$; $\alpha_1 = 0,5$.
   Tính $P\{X_0 = 1, X_1 = 1, X_2 = 0\}$.
   $P\{X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 0\}$.

$$\pi_3 = P^3\pi_0 = \begin{bmatrix} 0.424 \\ 0.384 \\ 0.192 \end{bmatrix}$$

Do đó ta có

$$\Pr(X_{10} = 2 | X_7 = 1, X_6 = 3) = \Pr(X_{10} = 2 | X_7 = 1) = P^3_{2,1} = 0.224$$

$$\Pr(X_4 = 2, X_3 = 1) = \Pr(X_3 = 1)\Pr(X_4 = 2 | X_3 = 1) = (\pi_3)_1 P_{2,1} = 0.424 \times 0.8 = 0.3392$$

Vì P^3 gồm toàn các số dương nên P chính qui nên P có phân phối giới hạn π cũng là phân phối dừng duy nhất, do đó π là nghiệm (duy nhất) của hệ sau:

$$\begin{cases} \pi = (a, b, c) \\ a, b, c \geq 0 \\ a + b + c = 1 \\ P\pi = \pi \end{cases}$$

Giải hệ này (hệ PTTT với điều kiện không âm) ta có nghiệm

$$\pi = \left(\frac{15}{47}, \frac{20}{47}, \frac{12}{47}\right)$$

Như vậy, không phụ thuộc vào phân phối đầu, sau một khoảng thời gian rất dài, ta có xích ở các trạng thái 1, 2, 3 với xác suất lần lượt là 0.3192, 0.4255, 0.2553.

Lưu ý: ta cũng có thể tìm giới hạn của P^n (nhờ chéo hóa để tìm công thức của P^n) nhưng khó hơn (tốn thời gian hơn).

4. Tìm trạng thái ổn định π trong các trường hợp ma trận chuyển trạng thái được cho như sau:

a) $P = \begin{pmatrix} 1/3 & 3/4 \\ 2/3 & 1/4 \end{pmatrix}$

b) $P = \begin{pmatrix} 0.81 & 0.26 \\ 0.19 & 0.74 \end{pmatrix}$

c) $P = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/4 \\ 1/3 & 1/2 & 3/4 \end{pmatrix}$

a) Cách làm: tìm một bộ số (a,b) sao cho $P.\pi = \pi$ với π=(a,b) và a+b=1 & a,b >= 0.

Xét hệ: $\begin{pmatrix} 1/3 & 3/4 \\ 2/3 & 1/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ → a/3+3b/4 =a & 2a/3+b/4=b & a+b=1.

Chú ý 2 PT đầu của hệ là phụ thuộc nhau nên chỉ cần chọn 1 trong 2 và giải hệ → (a,b)=(9/17, 8/17).

b) $\begin{pmatrix} 0.81 & 0.26 \\ 0.19 & 0.74 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ → 0.81a+0.26b = a & a+b=1 → (a,b) = (26/45, 19/45).

Ở đây, ta không xét điều kiện: 0.19a+0.74b=b → 0.19a = 0.26b (tương đương nhau).

c) Tương tự.

$\begin{pmatrix} 1/3 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/4 \\ 1/3 & 1/2 & 3/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ → a/3+b/2+0=a, a/3+0+c/4=b, a/3+b/2+3c/4 =c &

a+b+c=1. Giải ra: (a,b,c) = (3/19, 4/19, 12/19).

1. Cho xích Markov với ma trận chuyển trạng thái P như sau:

$$P = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{pmatrix}$$

Tìm $\pi_n, n = 1,2,3,4,5$ nếu $\pi_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2. Cho xích Markov với ma trận chuyển trạng thái P như sau:

$$P = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.1 & 0.7 \\ 0.6 & 0.4 & 0.2 \\ 0.2 & 0.5 & 0.1 \end{pmatrix}$$

Tìm $\pi_n, n = 1,2,3$ nếu $\pi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. Cho xích Markov với 3 trạng thái 1, 2, 3 và có ma trận xác suất chuyển như sau:

$$P = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.3 & 0.4 \\ 0.3 & 0.3 & 0.1 \\ 0.1 & 0.4 & 0.5 \end{pmatrix}$$

a) Tính $P(X_2 = 2, X_1 = 2 | X_0 = 1)$

b) Tính $P(X_{10} = 2 | X_7 = 1, X_6 = 3)$

c) Tính $P(X_4 = 2, X_3 = 1)$ biết phân phối đầu là $\begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.4 \\ 0.2 \end{pmatrix}$.

4. Tìm trạng thái ổn định π trong các trường hợp ma trận chuyển trạng thái được cho như sau:

a) $P = \begin{pmatrix} 1/3 & 3/4 \\ 2/3 & 1/4 \end{pmatrix}$

b) $P = \begin{pmatrix} 0.81 & 0.26 \\ 0.19 & 0.74 \end{pmatrix}$

c) $P = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/4 \\ 1/3 & 1/2 & 3/4 \end{pmatrix}$

XÍCH MARKOV & MA TRẬN CHUYỂN TRẠNG THÁI

Mệnh đề 4. Cho xích Markov $\{X_0, X_1, \dots\}$ có tập trạng thái S và ma trận chuyển P, với mọi $n \in \mathbb{N}$ ta có

$$P_{ij}^n = \Pr(X_{t+n} = i | X_t = j) = \Pr(X_n = i | X_0 = j)$$

với mọi $i, j \in S$ và $t \in \mathbb{N}$.

P^n được gọi là **ma trận chuyển n bước** (n-step transition matrix) của xích.

Mệnh đề 5. Cho xích Markov $\{X_0, X_1, \dots\}$ với ma trận chuyển P và π_t là phân phối của xích tại thời điểm t, ta có

$$\pi_{t+n} = P^n \pi_t$$

với mọi $t, n \in \mathbb{N}$. Đặc biệt,

$$\pi_n = P^n \pi_0$$

với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Pr(X_(t+n)=i | Xt = j) xác suất để chuyển từ trạng thái Xt → X_(t+n), nghĩa là trải qua n bước; coi nó giống như: X0 → X_n, cũng qua n bước.

~ BT tìm đường đi trong graph cho bởi ma trận cạnh kề A: đi từ đỉnh u → v với đường đi ngắn nhất thông qua k bước → lũy thừa ma trận A^k rồi mới xét các giá trị trong A^k.

Ban đầu, có trạng thái pi_0 → sau n bước → có trạng thái pi_n tính bằng cách $P^n.pi_0$.

1. Cho xích Markov với ma trận chuyển trạng thái P như sau:

$$P = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{pmatrix}$$

Tìm $\pi_n, n = 1,2,3,4,5$ nếu $\pi_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2. Cho xích Markov với ma trận chuyển trạng thái P như sau:

$$P = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.1 & 0.7 \\ 0.6 & 0.4 & 0.2 \\ 0.2 & 0.5 & 0.1 \end{pmatrix}$$

Tìm $\pi_n, n = 1,2,3$ nếu $\pi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

~ BT di dân: mỗi năm, có 0.8 dân ở nông thôn đi lên TP và 0.3 dân ở TP đi về nông thôn → sau k năm, tỷ số dân TP & nông thôn sẽ thay đổi ra sao.

2) $P = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.1 & 0.7 \\ 0.6 & 0.4 & 0.2 \\ 0.2 & 0.5 & 0.1 \end{pmatrix}$ → pi_1 = $\begin{pmatrix} 0.2 & 0.1 & 0.7 \\ 0.6 & 0.4 & 0.2 \\ 0.2 & 0.5 & 0.1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7 \\ 0.2 \\ 0.1 \end{pmatrix}$.

Tương tự với pi_2, pi_3.

1) pi_1 = $\begin{pmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 \\ 0.2 \end{pmatrix}$.

$$pi\_2 = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{pmatrix} . \, pi\_1 = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.8 \\ 0.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7 \\ 0.3 \end{pmatrix}.$$

$$pi\_3 = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{pmatrix} . \, pi\_2 = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0.7 \\ 0.3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.65 \\ 0.35 \end{pmatrix}.$$

→ có sự thay đổi thỏa mãn tổng 2 số trong trạng thái pi_k là 1.

Đặt vấn đề: để tính pi_n với n rất lớn → ta phải lũy thừa được ma trận P lên.

+ Lập trình: lũy thừa ma trận mũ n → for hoặc đệ quy (dùng cách lũy thừa nhanh để ma trận P^n).

+ Tính toán thủ công: dùng chéo hóa ma trận → tìm ma trận đồng dạng P = $Q^{-1}DQ$ xong rồi lũy thừa.

Bài A.2. (A.2.=B.2.) (Tổng = 6 điểm) Người ta khảo sát một mô hình di cư dân số giữa hai vùng đô thị và nông thôn với quy luật như sau: Hằng năm, có **50%** dân số vùng nông thôn chuyển về vùng đô thị và đồng thời có **25%** dân số vùng đô thị chuyển về vùng nông thôn sinh sống. Giả sử x, y tương ứng là số dân vùng nông thôn và vùng đô thị ở thời điểm ban đầu ($x, y > 0$).

(a) (4 điểm) Hỏi sau k năm dân số của vùng nông thôn và vùng đô thị là bao nhiêu?

(b) (2 điểm) Giả sử ban đầu số người sống ở nông thôn và đô thị là bằng nhau. Có thể đến lúc nào đó dân số của vùng đô thị vượt quá **80%** tổng dân số của cả hai vùng không? Giải thích câu trả lời.

Hướng dẫn giải

(a) (4 điểm)

Cách 1:

- Gọi x_k, y_k tương ứng là số dân tại các vùng nông thôn và vùng đô thị sau k năm. Ví dụ, $x_0 = x, y_0 = y$. Ta có $x_{k+1} = \frac{1}{2}x_k + \frac{1}{4}y_k, y_{k+1} = \frac{3}{4}y_k + \frac{1}{2}x_k$. Nói cách khác

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix}.$$

- Từ đó suy ra,

$$\begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix} = A^n \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix},$$

trong đó $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$.

- Đa thức đặc trưng của A là $x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{1}{4} = (x-1)(x-\frac{1}{4})$. Từ đây, ta suy ra A có các véctơ riêng $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ tương ứng với các giá trị riêng $1, 1/4$. Vậy, nếu ta đặt $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, thì $P^{-1}AP = D$, trong đó D là ma trận đường chéo với các hệ số trên đường chéo lần lượt là 1 và $1/4$. Ta dễ dàng tính được $P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$.

- Suy ra $A = PDP^{-1}$ và

$$A^k = PD^kP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4^n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} + \frac{2}{3\cdot 4^k} & \frac{1}{3} - \frac{1}{3\cdot 4^k} \\ \frac{2}{3} - \frac{2}{3\cdot 4^k} & \frac{2}{3} + \frac{1}{3\cdot 4^k} \end{bmatrix}.$$

- Từ đó,

$$x_k = \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3 \cdot 4^k}\right)x + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3 \cdot 4^k}\right)y,$$

$$y_k = \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3 \cdot 4^k}\right)x + \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4^k}\right)y.$$

3. Cho xích Markov với 3 trạng thái 1, 2, 3 và có ma trận xác suất chuyển như sau:

$$P = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.3 & 0.4 \\ 0.3 & 0.3 & 0.1 \\ 0.1 & 0.4 & 0.5 \end{pmatrix}$$

a) Tính $P(X_2 = 2, X_1 = 2 | X_0 = 1)$

b) Tính $P(X_{10} = 2 | X_7 = 1, X_6 = 3)$

c) Tính $P(X_4 = 2, X_3 = 1)$ biết phân phối đầu là $\begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.4 \\ 0.2 \end{pmatrix}$.

a) Ta có:

P(X2=2, X1=2|X0 =1) = P(X2=2|X1=1,X0=1).P(X1=1|X0=1).

= P(X2=2|X1=1).P(X1=1|X0=1).

= P(X1=2|X0=1).P(X1=1|X0=1).

= phần tử tại vị trí 2,1 nhân phần tử tại vị trí 1,1 của P

= 0.3 x 0.6 = 0.18.

b) P(X10=2|X7=1,X6=3) = <u>P(X10=2|X7=1)</u> = <u>P(X3=2|X0=1)</u> = phần tử tại vị trí 2,1 của ma trận P^3. Ta có:

$$P^3 = \begin{pmatrix} 0.47 & 0.464 & 0.474 \\ 0.254 & 0.23 & 0.234 \\ 0.256 & 0.306 & 0.292 \end{pmatrix}.$$

Do đó xác suất cần tính = phần tử ở vị trí (2,1) → 0.254.

VD: P(X5=3|X0=2) = phần tử tại vị trí 3,2 của P^5.

VD: P(X2022 = 1| X2002 = 3) = P(X20 = 1|X0 = 3) = phần tử tại vị trí 1,3 của P^20.

c) P(X4=2, X3=1) = P(X3=1).P(X4=2|X3=1) = $(pi_3)_1$.P(X1=2|X0=1)

= $(pi_3)_1$. phần tử thứ (2,1) của ma trận P.

= $(pi_3)_1$. 0.3.

Ta tính pi3 = P^3.pi0 = $\begin{pmatrix} 0.47 & 0.464 & 0.474 \\ 0.254 & 0.23 & 0.234 \\ 0.256 & 0.306 & 0.292 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.4 \\ 0.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4684 \\ 0.2404 \\ 0.2912 \end{pmatrix}$ (đừng nên làm tròn).

Do đó: phần tử $(pi_3)_1$ là phần tử thứ 1 của phân phối thứ 3 là 0.4684.

→ Xác suất cần tìm = 0.4684 x 0.3 = 0.14652.

Đối chiếu với BT cũ trên lớp:

Ví dụ 11. Cho xích Markov $\{X_0, X_1, \ldots\}$ với tập trạng thái $S = \{1, 2, 3\}$, ma trận chuyển

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 1 \\ 0.8 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

và phân phối đầu $\pi_0 = (0.5, 0.5, 0)$. Ta có ma trận chuyển 3 bước

$$P^3 = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{bmatrix} 0.488 & 0.360 & 0.040 \\ 0.224 & 0.544 & 0.480 \\ 0.288 & 0.096 & 0.480 \end{bmatrix} \end{array}$$

Phân phối của X_3

//xét P(X10=2|X7=1) = P(X3=2|X0=1) = P^3 ← phần tử tại vị trí 2,1 của ma trận.

Định nghĩa 1. Cho S là một tập hữu hạn, dãy các biến ngẫu nhiên $\{X_0, X_1, \ldots\}$ nhận giá trị trên S được gọi là một **xích Markov** (Markov chain) nếu

$$\Pr(X_{n+1} = i | X_0 = x_0, X_1 = x_1, \ldots, X_n = j) = \Pr(X_{n+1} = i | X_n = j) = \Pr(X_1 = i | X_0 = j) = p_{ij}$$

với mọi $x_0, x_1, \ldots, i, j \in S$ và $n \in \mathbb{N}$.

Tập S được gọi là tập trạng thái hay **không gian trạng thái** (state space) của xích.

BT tương tự:

Bài 1 : Cho xích Markov 3 trạng thái 0, 1, 2 với ma trận xác suất chuyển :

$$P = \begin{bmatrix} 0,6 & 0,3 & 0,1 \\ 0,3 & 0,3 & 0,4 \\ 0,4 & 0,1 & 0,5 \end{bmatrix}$$

a. Tính $P\{X_2 = 1, X_1 = 1 | X_0 = 0\}$.
b. Tính $P\{X_2 = 1, X_3 = 1 | X_1 = 0\}$.
c. Biết quá trình xuất phát với trạng thái $X_0 = 1$.
   Tính $P\{X_0 = 1, X_1 = 0, X_2 = 2\}$.
d. Giả sử phân phối đầu là $\alpha_0 = 0,5$; $\alpha_1 = 0,5$.
   Tính $P\{X_0 = 1, X_1 = 1, X_2 = 0\}$.
   $P\{X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 0\}$.

$$\pi_3 = P^3\pi_0 = \begin{bmatrix} 0.424 \\ 0.384 \\ 0.192 \end{bmatrix}$$

Do đó ta có

$$\Pr(X_{10} = 2 | X_7 = 1, X_6 = 3) = \Pr(X_{10} = 2 | X_7 = 1) = P^3_{2,1} = 0.224$$

$$\Pr(X_4 = 2, X_3 = 1) = \Pr(X_3 = 1)\Pr(X_4 = 2 | X_3 = 1) = (\pi_3)_1 P_{2,1} = 0.424 \times 0.8 = 0.3392$$

Vì P^3 gồm toàn các số dương nên P chính qui nên P có phân phối giới hạn π cũng là phân phối dừng duy nhất, do đó π là nghiệm (duy nhất) của hệ sau:

$$\begin{cases} \pi = (a, b, c) \\ a, b, c \geq 0 \\ a + b + c = 1 \\ P\pi = \pi \end{cases}$$

Giải hệ này (hệ PTTT với điều kiện không âm) ta có nghiệm

$$\pi = \left(\frac{15}{47}, \frac{20}{47}, \frac{12}{47}\right)$$

Như vậy, không phụ thuộc vào phân phối đầu, sau một khoảng thời gian rất dài, ta có xích ở các trạng thái 1, 2, 3 với xác suất lần lượt là 0.3192, 0.4255, 0.2553.

__Lưu ý__: ta cũng có thể tìm giới hạn của P^n (nhờ chéo hóa để tìm công thức của P^n) nhưng khó hơn (tốn thời gian hơn).

4. Tìm trạng thái ổn định π trong các trường hợp ma trận chuyển trạng thái được cho như sau:

a) $P = \begin{pmatrix} 1/3 & 3/4 \\ 2/3 & 1/4 \end{pmatrix}$

b) $P = \begin{pmatrix} 0.81 & 0.26 \\ 0.19 & 0.74 \end{pmatrix}$

c) $P = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/4 \\ 1/3 & 1/2 & 3/4 \end{pmatrix}$

a) Cách làm: tìm một bộ số (a,b) sao cho $P.\pi = \pi$ với π=(a,b) và a+b=1 & a,b >= 0.

Xét hệ: $\begin{pmatrix} 1/3 & 3/4 \\ 2/3 & 1/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ → a/3+3b/4 =a & 2a/3+b/4=b & a+b=1.

Chú ý 2 PT đầu của hệ là phụ thuộc nhau nên chỉ cần chọn 1 trong 2 và giải hệ → (a,b)=(9/17, 8/17).

b) $\begin{pmatrix} 0.81 & 0.26 \\ 0.19 & 0.74 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ → 0.81a+0.26b = a & a+b=1 → (a,b) = (26/45, 19/45).

Ở đây, ta không xét điều kiện: 0.19a+0.74b=b → 0.19a = 0.26b (tương đương nhau).

c) Tương tự.

$\begin{pmatrix} 1/3 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/4 \\ 1/3 & 1/2 & 3/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ → a/3+b/2+0=a, a/3+0+c/4=b, a/3+b/2+3c/4 =c & a+b+c=1. Giải ra: (a,b,c) = (3/19, 4/19, 12/19).