Activités sur la représentation d'une suite de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$

On considère la suite définie par la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{4} \\ u_{n+1} = u_n^2 + \frac{1}{2} \end{cases}$$

- 1. Représenter u_0 , u_1 , u_2 et u_3 sur le graphique ci-dessus.
- **2.** Conjecturer quant à la limite de la suite (u_n) .
- **3.** Déterminer le signe du trinôme $x^2 x + \frac{1}{4}$.
- **4.** En déduire les variations de la suite (u_n) .
- **5.** Montrer par récurrence que la suite (u_n) est dans l'intervalle $[0; \frac{1}{2}]$.
- **6.** En déduire que la suite (u_n) converge et donner sa limite.

