Exercices sur les logarithmes

Exercice 1 *Déterminer la dérivée des fonctions suivantes :*

1. $f(x) = \ln(3x+2)$ *sur* $I =]-\frac{2}{3}; +\infty[$.
2. $g(x) = \ln(x^2+1)$ *sur* $\mathbb{R}$.
3. $h(x) = x\ln(x^2+3)$ *sur* $\mathbb{R}$.
4. $i(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$ *sur* $]0; +\infty[$.

Exercice 2 *Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes :*

1. $f(x) = \frac{3}{2x-4}$ *sur* $I =]2; +\infty[$.
2. $g(x) = \frac{x}{x^2+1}$ *sur* $I = \mathbb{R}$.
3. $h(x) = 2 + \frac{1}{2x-1} + \frac{1}{(2x-1)^2}$ *sur* $I =]\frac{1}{2}; +\infty[$.
4. $j(x) = \frac{2}{x^2-1}$ *sur* $]1; +\infty[$ *après avoir vérifié que* $j(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$ *pour* $x > 1$.

Exercice 3 *On donne* $\ln(2) \approx 0.69$ *et* $\ln(5) \approx 1.61$. *Sans utiliser le logarithme de la calculatrice, en déduire des valeurs approchées des nombres suivants :*

— $\ln(10)$.
— $\ln(0.1)$.
— $\ln(0.2)$.
— $\ln(80)$.

Exercice 4 *Résoudre dans* $\mathbb{N}$ *les inéquations suivantes :*

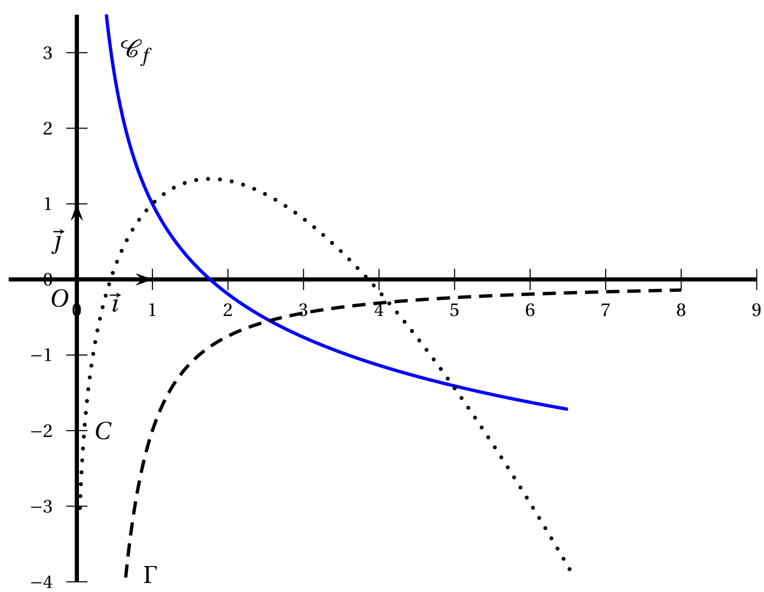
$$2^n \leq 1000$$
$$0.5^n \leq 0.001$$

Exercice 5 *Soit* f *la fonction définie sur* $]0\ ;\ +\infty[$ *par :*

$$f(x) = \frac{1}{x} - \ln x.$$

On appelle $\mathscr{C}_f$ *sa courbe représentative dans un repère orthonormal* $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. *Sur le graphique ci-dessous, on donne* $\mathscr{C}_f$ *et les courbes* C *et* Γ. *L'une de ces deux courbes représente graphiquement la dérivée* f' *de* f, *et l'autre une des primitives* F *de* f.
   - **a.** *Indiquer laquelle des deux courbes* C *et* Γ *représente graphiquement* f'. *Justifier.*
   - **b.** *Par lecture graphique, donner* $F(1)$.



2. *Dans cette question, on pourra vérifier la cohérence des résultats obtenus avec les courbes représentatives données sur le dessin.*
   a. *Déterminer la limite de la fonction f quand x tend vers* 0. *Interpréter graphiquement cette limite.*
   b. *Déterminer la limite de la fonction f quand x tend vers* $+\infty$.
   c. *Calculer $f'(x)$ et montrer que l'on peut écrire :* $f'(x) = \dfrac{-x-1}{x^2}$.
   d. *Etudier le signe de $f'(x)$ puis donner le tableau de variations de f.*
3. *Soit H la fonction définie sur* $]0\,;\,+\infty[$ *par :*

$$H(x) = x - (x-1)\ln x.$$

   a. *Montrer que H est une primitive de f sur* $]0\,;\,+\infty[$.
   b. *En déduire l'expression de la fonction F de la question 1.*
   c. *Déterminer la limite de* $\frac{H(x)}{x^2}$ *en* $+\infty$.