

## ♻ Récurrences 2

On considère la suite :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 0.3u_n + 7.0 \\ u_0 = 13 \end{cases}$$

1. Montrer par récurrence que :

$$10 \leq u_{n+1} \leq u_n$$

2. En déduire que la suite converge et en déduire sa limite.

## 1. Initialisation :

On a :

$$u_1 = 0.3u_0 + 7.0 = 10.9$$
$$\text{donc } 10 \leq u_1 \leq 13 = u_0$$

L'initialisation est établie.

## Hérédité :

On suppose que la propriété est vraie pour un certain rang  $n \geq 0$  :

$$10 \leq u_{n+1} \leq u_n \quad \text{c'est l'hypothèse de récurrence}$$

On part de cette hypothèse :

$$\begin{aligned} 10 &\leq u_{n+1} \leq u_n \\ \Rightarrow 0.3 \times 10 &\leq 0.3 \times u_{n+1} \leq 0.3 \times u_n \\ \Rightarrow 3.0 &\leq 0.3 \times u_{n+1} \leq 0.3 \times u_n \\ \Rightarrow 3.0 + 7.0 &\leq 0.3 \times u_{n+1} + 7.0 \leq 0.3 \times u_n + 7.0 \\ \Rightarrow 10.0 &\leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \end{aligned}$$

L'hérédité est établie.

2. On vient de montrer que la suite est décroissante et minorée, par conséquent, d'après le théorème de convergence monotone, la suite converge vers  $l$  un nombre réel qui vérifie :

$$\begin{aligned} l &= 0.3 \times l + 7.0 \\ \Leftrightarrow l - 0.3 \times l &= 7.0 \\ \Leftrightarrow l \times 0.7 &= 7.0 \\ \Leftrightarrow l &= \frac{7.0}{0.7} = 10 \end{aligned}$$