

On considère la fonction suivante définie sur]0; $+\infty$ [:

$$f(x) = 2x^2 + 10x + 2 - 13x^2 \ln(x)$$

- 1. Calculer la limite de f en 0^+
- 2. Calculer la limite de f en $+\infty$
- **3.** Calculer la dérivée de f.
- **4.** Calculer la dérivée seconde de f.
- **5.** Déterminer le signe de f''(x).
- **6.** En déduire le tableau de variation de f'(x).
- **7.** Déterminer le nombre de solutions de f'(x) = 0 et en donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} .
- **8.** En déduire le tableau de variation de f(x).
- **9.** Déterminer le nombre de solutions de f(x) = 0.

Logarithme TG

Correction:

1. On sait que:

$$\lim_{x \to 0^{+}} 2x^{2} + 10x + 2 = 2$$

$$\lim_{x \to 0^{+}} 13x^{2} \ln(x) = 0 \quad \text{par propriété du cours}$$

$$\text{donc } \lim_{x \to 0^{+}} 2x^{2} + 10x + 2 - 13x^{2} \ln(x) = 2$$

2.

$$\lim_{x \to +\infty} 2x^2 + 10x + 2 = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} -13x^2 \ln(x) = -\infty \quad \text{par propriété du cours}$$
 donc
$$\lim_{x \to +\infty} 2x^2 + 10x + 2 - 13x^2 \ln(x) = -\infty \quad \text{par prédominance de } x^2 \ln(x)$$

3.

$$f'(x) = 4x + 10 - 13(x^{2}\ln(x))'$$

$$= 4x + 10 - 13((x^{2})'\ln(x) + x^{2} \times \ln(x)')$$

$$= 4x + 10 - 13(2x\ln(x) + x^{2} \times \frac{1}{x})$$

$$= 4x + 10 - 13(2x\ln(x) + x)$$

$$= -9x + 10 - 26\ln(x)$$

4.

$$f''(x) = -9 - 26 (x \ln(x))'$$

$$= -9 - 26 (x' \ln(x) + x \times \ln(x)')$$

$$= -9 - 26 (\ln(x) + x \times \frac{1}{x})$$

$$= -9 - 26 (\ln(x) + 1)$$

$$= -35 - 26 \ln(x)$$

5.

$$f'(x) \ge 0$$
$$-35 - 26\ln(x) \ge 0$$
$$-26\ln(x) \ge 35$$
$$\ln(x) \le \frac{35}{-26}$$
$$x \le e^{\frac{35}{-26}}$$

6. On a:

Logarithme TG

x	0		$e^{\frac{35}{-26}}$		+∞
f''(x)		+	0	-	
f'(x)	10		$10 + 26e^{\frac{35}{-26}}$		$-\infty$

7. D'après le tableau de variation, comme 10 > 0, la fonction f' ne peut pas s'annuler sur l'intervalle $]0; e^{\frac{35}{-26}}]$.

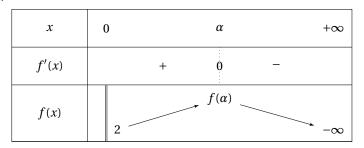
Pour $x > e^{\frac{35}{-26}}$, la fonction est décroissante de $10 + 26e^{\frac{35}{-26}} > 0$ vers $-\infty$, donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe une unique valeur $\alpha > e^{\frac{35}{-26}}$ telle que $f'(\alpha) = 0$.

En utilisant la calculatrice, on trouve :

$$f'(0.26) > 0$$

 $f'(0.27) < 0$
 $0.26 < \alpha < 0.27$

8. On a:



9. D'après le tableau de variation, comme 2 > 0, la fonction f ne peut pas s'annuler sur l'intervalle $]0; \alpha]$.

Pour $x>\alpha$, la fonction est décroissante de $f(\alpha)>0$ vers $-\infty$, donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe une unique valeur $\beta>\alpha$ telle que $f(\beta)=0$.

$$f(1.85) < 0$$

$$f(1.84) > 0$$

$$donc 1.84 < \beta < 1.85$$