Fonction logarithme népérien : activités

Exemple 1 (Lien avec la fonction exponentielle) ***1.*** *Rappeler les relations fonctionnelles de la fonction exponentielle.*

On sait que :

$$e^{x+y} = e^x \times e^y$$
$$e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$$
$$e^0 = 1$$
$$e^{nx} = \left(e^x\right)^n$$

2. *Rappeler le tableau de variations de la fonction exponentielle.*

x	$-\infty$	*0*	$+\infty$
$(e^x)' = e^x$		$+$	
e^x	*0*	*1*	$+\infty$

3. *Démontrer que l'équation* $e^x = 2$ *a une unique solution dans* $\mathbb{R}$.
On note $\ln(2)$ *cette solution.*
On sait que la fonction $f(x) = e^x - 2$ *est continue :* $f(0) = 1 - 2 = -1$ *et* $f(1) = e^1 - 2 > 2^1 - 2 > 0$.
On peut donc appliquer le théorème des valeurs intermédiaires : il existe $\alpha \in]0;1[$ *tel que* $f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow f(\alpha) = 2$.
Comme la fonction f *est strictement croissante, on en déduit l'unicité de* α.

4. *D'une manière plus générale, pour quelles valeurs de b l'équation* $e^x = b$ *a-t-elle une unique solution ?*
On note $\ln(b)$ *cette solution.*
Comme la fonction exponentielle est strictement positive, l'équation précédente ne peut pas avoir de solutions pour $x \leq 0$.
Supposons $b > 0$, *on pose* h *la fonction :*

$$h(x) = e^x - b$$

Comme la fonction $x \to e^x$ *tend vers* 0 *en* $-\infty$, *il existe un* $x_1 \in \mathbb{R}$ *tel que* $-x_1$ *suffisamment grand qui vérifie :*

$$e^{x_1} < b \Leftrightarrow h(x_1) < 0$$

Comme la fonction $x \to e^x$ *tend vers* $+\infty$ *en* $+\infty$, *il existe un* $x_2 > x_1$ *(par croissance de* $x \to e^x$ *) tel que* x_1 *suffisamment grand qui vérifie :*

$$e^{x_2} > b \Leftrightarrow h(x_2) > 0$$

Comme la fonction h *est continue, on peut appliquer le théorème des valeurs intermédiaires : il existe* $x_0 \in]x_1; x_2[$.
Comme la fonction h *est strictement croissante, on en déduit l'unicité de* x_0.
Finalement, on vient de montrer que l'équation $e^x = b$, $b > 0$, *a une unique solution appelée* $\ln(b)$ *; si* $b \geq 0$, *il n'y a aucune solution.*

5. *Déterminer* $\ln(1)$, $\ln(e)$, $\ln(e^2)$ *et* $\ln\left(\frac{1}{e}\right)$.
Le nombre $\ln(1)$ *est la valeur de* x *pour laquelle* $e^x = 1$, *on sait que cette valeur est* $x = 0$: $\ln(1) = 0$.
Le nombre $\ln(e)$ *est la valeur de* x *pour laquelle* $e^x = e = e^1$, *on sait que cette valeur est* $x = 1$: $\ln(e) = 1$.
Le nombre $\ln(e^2)$ *est la valeur de* x *pour laquelle* $e^x = e^2$, *on sait que cette valeur est* $x = 2$: $\ln(e^2) = 2$.
Le nombre $\ln\left(\frac{1}{e}\right)$ *est la valeur de* x *pour laquelle* $e^x = \frac{1}{e} = e^{-1}$, *on sait que cette valeur est* $x = 0$: $\ln\left(\frac{1}{e}\right) = -1$.

6. *Déterminer une relation entre* $\ln(x \times y)$ *d'un côté et* $\ln(x)$ *et* $\ln(y)$ *d'un autre côté; préciser les valeurs de* x *et de* y.
On sait que pour $x > 0$ *et* $y > 0$:

$$\begin{array}{ll} e^{\ln(x)} = x & \\ e^{\ln(y)} = y & \qquad e^{\ln(x)} \times e^{\ln(y)} = x \times y \Leftrightarrow e^{\ln(x)+\ln(y)} = xy = e^{\ln(xy)} \end{array}$$

Par conséquent, on en déduit que : $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$ *pour* $x, y > 0$.
En suivant un raisonnement équivalent, on peut montrer que pour $x, y > 0$: $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$.

7. *Donner une nouvelle expression de* $\ln\left(x^n\right)$ *; préciser les valeurs de* x *et de* n.
On va montrer, par récurrence sur $n\mathbb{N}$ *que, pour* $x > 0$:

$$\ln\left(x^n\right) = n\ln(x)$$

Initialisation : *On commence par le montrer pour* $n = 0$: $x^0 = 1$, $\ln(x^0) = \ln(1) = 0$ *et* $0 \times \ln(x) = 0$ *; l'initialisation est établie.*
Hérédité : *Supposons que la propriété est vraie pour un entier* $n \geq 0$: $\ln\left(x^n\right) = n\ln(x)$.
Démontrons cette propriété pour $n + 1$:

$$\begin{aligned} \ln\left(x^{n+1}\right) = \ln\left(x^n \times x\right) = \ln\left(x^n\right) + \ln(x) & \\ = n\ln(x) + \ln(x) & \text{ en utilisant l'hypothèse de récurrence} \\ = (n+1)\ln(x) & \end{aligned}$$

La propriété est établie au rang $n + 1$ *: on vient de montrer l'hérédité.*
Finalement, pour $n \in \mathbb{N}$ *et* $x > 0$:

$$\ln\left(x^n\right) = n\ln(x)$$

8. *Donner une nouvelle expression de* $\ln\left(\frac{1}{x}\right)$ *; préciser les valeurs de* x.
Pour $x > 0$, *on a* $\frac{1}{x} > 0$, *donc on peut calculer son logarithme :*

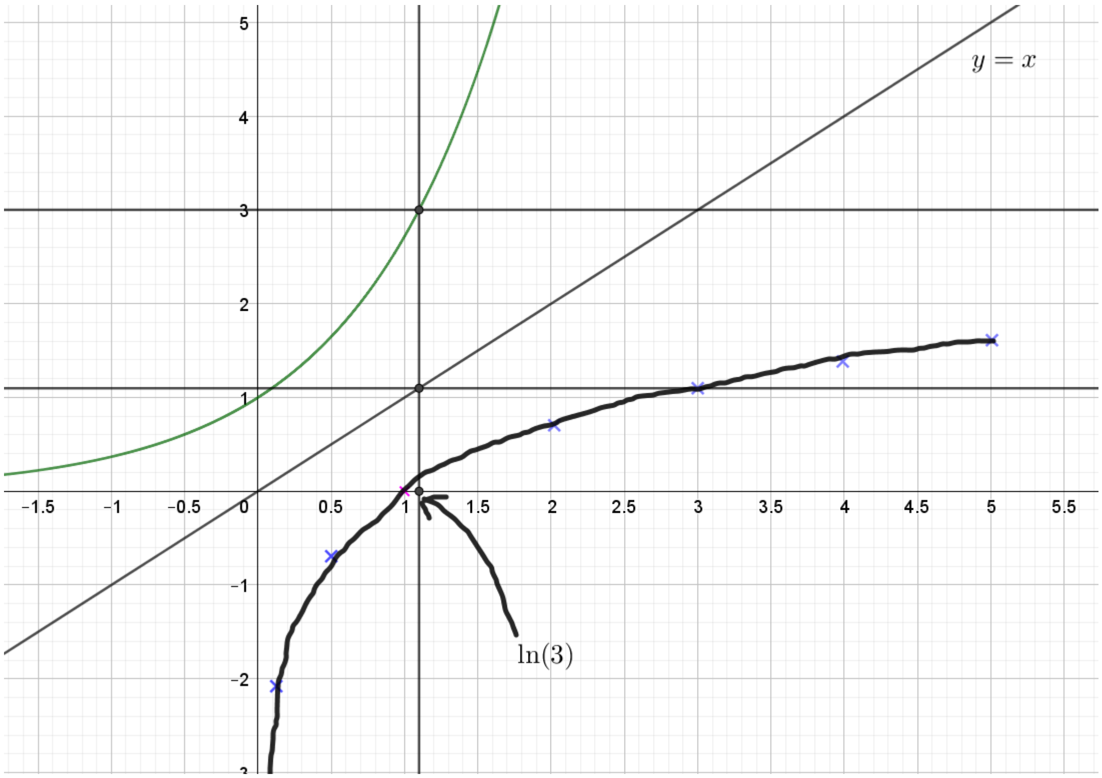
$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) + \ln(x) = \ln\left(\frac{1}{x} \times x\right) = \ln(1) = 0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$$

9. *Que vaut* $e^{\ln(x)}$ *? En déduire la dérivée de* $\ln(x)$ *et préciser pour quelles valeurs de* x *on peut la calculer.*
Par définition de $\ln(x)$, *on sait que* $e^{\ln(x)} = x$, *les fonctions impliquées sont toutes dérivables et en utilisant la formule de dérivation d'un produit :*

$$e^{\ln(x)} = x \Leftrightarrow \left(e^{\ln(x)}\right)' = x' \Leftrightarrow (\ln(x))' \times e^{\ln(x)} = 1 \Leftrightarrow (\ln(x))' \times x = 1 \Leftrightarrow (\ln(x))' = \frac{1}{x}$$

La dérivée de la fonction $\ln(x)$ *est* $\frac{1}{x}$.

Exemple 2 (Courbe représentative de $x \to \ln(x)$) *La courbe ci-dessous est la représentation graphique de la fonction $x \to e^x$.*



1. *A l'aide de cette courbe, déterminer* $\ln(3)$.
2. *Placer le point* $(3; \ln(3))$.
3. *De même, placer les points* $(1; \ln(1))$, $(2; \ln(2))$, $(4; \ln(4))$, $(5; \ln(5))$, $(0.5; \ln(0.5))$, $(0.125; \ln(0.125))$.
4. *Relier ces points par une courbe, que remarque-t-on ?*

Pour tracer les différents $\ln(b)$ *et* $(b, \ln(b)$*, on va utiliser la droite* $y = x$ *et on va détailler la méthode avec* $b = 3$.
On trace la droite $y = 3$*, et on repère le point d'intersection avec la courbe représentant* f.
On trace la droite (Δ) *parallèle à l'axe des ordonnées passant par ce point d'intersection ; le point d'intersection de cette nouvelle droite avec l'axe des abscisses nous donne la valeur de* $\ln(3)$ *sur l'axe des abscisses.*
Pour obtenir le point $(3; \ln(3))$ *relativement précisemment, on repère le point d'intersection de la droite* (Δ) *et de la droite représentant* $y = x$*. On trace la droite* (d) *passant par ce point et parallèle à l'axe des abscisses : le point d'absisse* 3 *sur cette droite est le point de coordonnées* $(3; \ln(3))$.
Une fois plusieurs points du type $(b; \ln(b))$ *tracés, on obtient une allure de la courbe* $x \to \ln(x)$ *en les reliant : on constate que cette courbe est symétrique à la courbe représentant* e^x *par rapport à la droite d'équation* $y = x$.

A la fin du XVIème siècle, les mesures astronomiques nécessaires à la navigation ou à l'astronomie nécessitent des calculs compliqués et particulièrement longs à effectuer à la main. En 1614, l'écossais John Neper publie un court traité dans lequel il explique un « procédé sur et rapide » permettant de remédier à « l'ennui de ces longues opérations » : l'utilisation des logarithmes . Un demi-siècle plus tard, l'invention par Newton et Leibniz du calcul différentiel permettra de découvrir que, en plus de son utilité pratique pour les calculs, la fonction logarithme de Neper a des propriétés théoriques remarquables : dérivée simple , lien avec $\exp(x)$

Exemple 3 (Algorithmes de Briggs) *On peut construire plusieurs fonctions à partir du logarithme népérien, qui sont appelées logarithmes de base $b > 0$ et définies ainsi :*

$$x \to \frac{\ln(x)}{\ln(b)}$$

D'ailleurs, historiquement, ce n'est pas la fonction logarithme népérien qui a été conceptualisée initialement.
Une de ces fonctions logarithmes fréquemment utilisée est la fonction logarithme de base 10, appelée logarithme décimal et noté $\log$.
Le mathématicien anglais Henry Briggs ($1556-1630$) a mis en place de nombreuses méthodes de calculs pour déterminer des valeurs de la fonction $\log$.

1. *Dans un premier temps, son objectif a été de donner un encadrement du nombre de chiffres du nombre 2^n.*
   On appelle k_n le nombre de chiffres de 2^n.
   Donner un encadrement de 2^n par des puissances de 10 et k_n.
   Le nombre 10^{k_n} se compose d'un 1 suivi de k_n zéros : il a donc k_n+1 chiffres, ainsi :

$$10^{k_n-1} \leq 2^n \leq 10^{k_n}$$

2. *En déduire un encadrement de $\log(2)$ ainsi que sa précision.*
   D'après le graphique de l'exemple précédent et l'expression de la dérivée de $\ln(x)$, on sait que la fonction $x \to \ln(x)$ est croissante.
   On peut appliquer le $\ln$ sans changer le sens des inégalités :

$$\begin{aligned}
&10^{k_n-1} \leq 2^n \leq 10^{k_n} \\
\Rightarrow &\ln\left(10^{k_n-1}\right) \leq \ln\left(2^n\right) \leq \ln\left(10^{k_n}\right) \\
\Rightarrow &(k_n-1)\ln(10) \leq n\ln(2) \leq k_n\ln(10) \\
\Rightarrow &(k_n-1) \leq n\log(2) \leq k_n \\
\Rightarrow &\frac{k_n-1}{n} \leq \log(2) \leq \frac{k_n}{n}
\end{aligned}$$

   On a un écart de $\frac{1}{n}$ entre le terme de gauche et de droite, la précision est de $\frac{1}{n}$.

3. *Pour obtenir une approximation de $\log(2)$, il faut calculer 2^n ce qui requiert n calculs : beaucoup trop quand n devient grand, sachant que Briggs avait fait les calculs avec $n = 10^{14}$.*
   Pour aller plus vite et surtout faire moins de calculs (et potentiellement moins d'erreurs), il a utilisé ce qu'on appelle de nos jours un algorithme d'exponentiation rapide, dont les premières étapes sont ci-dessous :

$$\begin{aligned}
&\textit{Calcul de } 2^{10} : 2^2 = 4 ; 2^4 = (2^2)^2 ; 2^8 = (2^4)^2 \Rightarrow 2^{10} = 2^8 \times 2^2 \\
&\textit{Calcul de } 2^{100} : 2^{20} = (2^{10})^2 ; 2^{40} = (2^{20})^2 ; 2^{80} = (2^{40})^2 \Rightarrow 2^{100} = 2^{80} \times 2^{20} \\
&\textit{Calcul de } 2^{1000} : 2^{200} = (2^{100})^2 ; 2^{400} = (2^{200})^2 ; 2^{800} = (2^{400})^2 \Rightarrow 2^{1000} = 2^{800} \times 2^{200}
\end{aligned}$$

   En se servant de cet exemple, compléter l'algorithme suivant :

```
def briggs(n):
    n1=0
```

```
i=2
a=2
while n1<n:
    n1=n1+1
    a=a**i
    b=a**2
    c=b**2
    d=c*a
    l=len(str(d))
    a=d
print('2^(10^',n1,') admet',l,'chiffres')
```

4. *Déterminer la valeur renvoyée par cet algorithme quand $n = 6$.*
On trouve 301030.

5. *Est ce qu'une division par une puissance de* 10 *requiert beaucoup de calculs ?*
Une division par une puissance de 10 *consiste simplement à décaler la virgule vers la gauche un nombre de fois égal à l'exposant.*

6. *En déduire une approximation de* $\log(2)$ *avec une précision de* 10^{-5}.
On en déduit qu'une valeur de $\log(2)$ *par excès est* 0.301030*, à* 10^{-5}*.*

7. *Euler (*1707 – 1783*) reprend les travaux de Briggs et donne un algorithme pour calculer* $\log(5)$ *:*

Soit la base logarithmique $a = 10$, qui eſt celle des tables ordinaires, & propoſons-nous de trouver le logarithme approché de 5. Comme ce nombre eſt renfermé entre les limites 1 & 10, dont les logarithmes ſont 0 & 1, on procédera de la maniere ſuivante à l'extraction des racines, & on continuera les opérations juſqu'à ce qu'on ſoit arrivé à des limites, qui ne different plus du nombre propoſé 5.

$A =$ 1,000000 ;	$lA =$ 0, 0000000	ſoit
$B =$ 10,000000 ;	$lB =$ 1, 0000000 ;	$C = \sqrt{AB}$
$C =$ 3,162277 ;	$lC =$ 0, 5000000 ;	$D = \sqrt{BC}$
$D =$ 5,623413 ;	$lD =$ 0, 7500000 ;	$E = \sqrt{CD}$
$E =$ 4,216964 ;	$lE =$ 0, 6250000 ;	$F = \sqrt{DE}$
$F =$ 4,869674 ;	$lF =$ 0, 6875000 ;	$G = \sqrt{DF}$
$G =$ 5,232991 ;	$lG =$ 0, 7187500 ;	$H = \sqrt{FG}$
$H =$ 5,048065 ;	$lH =$ 0, 7031250 ;	$I = \sqrt{FH}$
$I =$ 4,958069 ;	$lI =$ 0, 6 53125 ;	$K = \sqrt{HI}$
$K =$ 5,002865 ;	$lK =$ 0, 6992187 ;	$L = \sqrt{IK}$
$L =$ 4,980416 ;	$lL =$ 0, 6972656 ;	$M = \sqrt{KL}$
$M =$ 4,991627 ;	$lM =$ 0, 6982421 ;	$N = \sqrt{KM}$
$N =$ 4,997242 ;	$lN =$ 0, 6987304 ;	$O = \sqrt{KN}$
$O =$ 5,000052 ;	$lO =$ 0, 6989745 ;	$P = \sqrt{NO}$
$P =$ 4,998647 ;	$lP =$ 0, 6988525 ;	$Q = \sqrt{OP}$
$Q =$ 4,999350 ;	$lQ =$ 0, 6989135 ;	$R = \sqrt{OQ}$
$R =$ 4,999701 ;	$lR =$ 0, 6989440 ;	$S = \sqrt{OR}$
$S =$ 4,999876 ;	$lS =$ 0, 6989592 ;	$T = \sqrt{OS}$
$T =$ 4,999963 ;	$lT =$ 0, 6989668 ;	$V = \sqrt{OT}$
$V =$ 5,000008 ;	$lV =$ 0, 6989707 ;	$W = \sqrt{TV}$
$W =$ 4,999984 ;	$lW =$ 0, 6989687 ;	$X = \sqrt{WV}$
$X =$ 4,999997 ;	$lX =$ 0, 6989697 ;	$Y = \sqrt{VX}$
$Y =$ 5,000003 ;	$lY =$ 0, 6989702 ;	$Z = \sqrt{XY}$
$Z =$ 5,000000 ;	$lZ =$ 0, 6989700 ;	

Ainſi, en prenant des moyennes proportionnelles, on eſt parvenu à trouver $Z = 5{,}000000$, à quoi répond le logarithme cherché 0,698970, en ſuppoſant la baſe logarithmique $= 10$. Par conſéquent $10^{\frac{69897}{100000}} = 5$ à-peu-près. C'eſt de cette maniere que BRIGGS & ULACQ ont calculé la table ordinaire des logarithmes, quoiqu'on ait imaginé depuis des méthodes plus expéditives pour les trouver.

On peut traduire cet algorithme, en python, pour calculer le logarithme de x entier en base b entier, avec une précision de 10^{-p} *:*

```
from math import *

def BriggsLog(x,B,p):
    A=1
    logA=0
    logB=1
    while abs(A-B)>10**(-p):
        if sqrt(A*B)<=x:
            A=sqrt(A*B)
            logA=(logA+logB)/2
        if sqrt(A*B)>x:
            B=sqrt(A*B)
            logB=(logA+logB)/2
    return round(logA,p)
```

Compléter cet algorithme.

8. *Calculer* $\log(2)$ *par cet algorithme, lequel est le plus rapide entre celui-ci et le précédent ?*
On trouve 0.30103 *et cet algorithme semble plus rapide que le précédent.*