Vecteurs, droites et plans de l'espace : cours

1 Vecteurs de l'espace

Vecteur de l'espace

Un vecteur de l'espace est défini par une direction de l'espace, un sens et une norme (longueur).

Remarques

Les vecteurs de l'espace suivent les mêmes règles de construction qu'en géométrie plane : relation de Chasles, propriétés en rapport avec la colinéarité,...

Translation

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur de l'espace. On appelle translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ la transformation qui au point M associe le point M', tel que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{u}$.

Remarques

Les translations gardent les même propriétés qu'en géométrie plane.

Combinaison linéaire

Soit $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de l'espace.
Tout vecteur de la forme $\alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v} + \gamma\overrightarrow{w}$, avec α, β et γ des nombres réels, est appelé combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$.

2 Droites de l'espace

Vecteurs colinéaires

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v} \neq$ deux vecteurs, ils sont colinéaires s'il existe un nombre réel $k \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{v}$$

Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont tous les deux le vecteur nul alors ils sont colinéaires.

Vecteur directeur

On appelle vecteur directeur d'une droite $\mathscr{D}$ tout vecteur non nul qui possède la même direction que la droite $\mathscr{D}$.

Droite passant par A et de vecteur directeur donné

Soit A un point de l'espace et $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul de l'espace. La droite $\mathscr{D}$ passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ est l'ensemble des points M tels que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires.

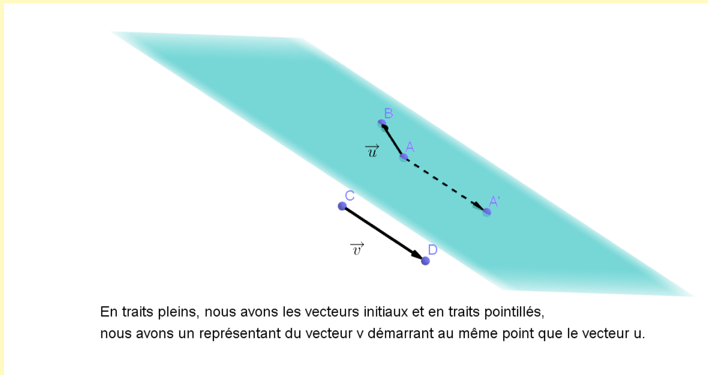
Droite parallèle

Deux droites de l'espace de vecteurs directeurs respectifs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires.

3 Plans de l'espace

Direction d'un plan de l'espace

Deux vecteurs non colinéaires déterminent la direction d'un plan.



Caractérisation d'un plan de l'espace

Soit A un pont et deux vecteurs de l'espace $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.
L'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v}$, avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ est le plan passant par A et dirigé par les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.
Le triplet $\left(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ est alors un repère de ce plan.

Plans déterminés par le même couple de vecteurs

Deux plans déterminés par le même couple de vecteurs non colinéaires sont parallèles.

Remarque

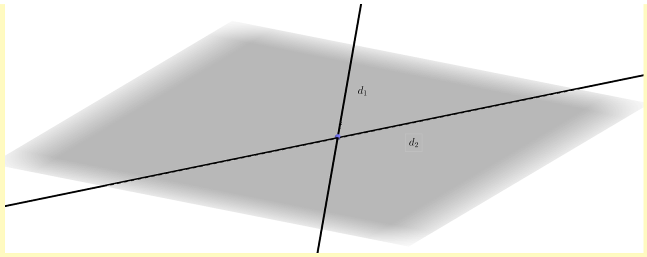
Pour démontrer que deux plans sont parallèles, il suffira alors de trouver deux vecteurs non colinéaires du premier plan et de montrer qu'ils sont respectivement colinéaires à deux vecteurs (non colinéaires) du second plan.

4 Positions relatives de droites et de plans de l'espace

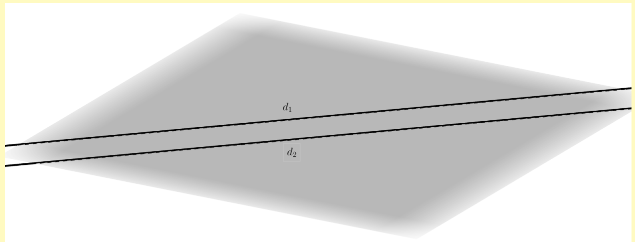
Positions relatives de deux droites

Deux droites de l'espace sont soit dans un même plan (c'est-à-dire coplanaires) soit non coplanaires.
On distinguera plusieurs cas de figure que l'on va chacun illustrer par un dessin :

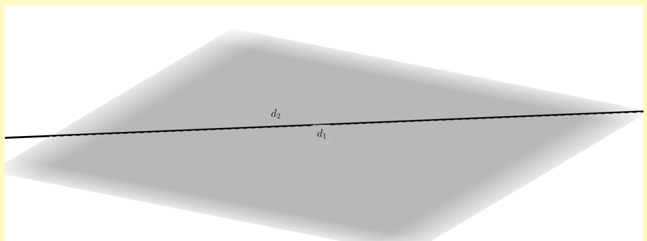
1. Si d_1 et d_2 sont coplanaires.
   ✏ d_1 et d_2 sont sécantes.



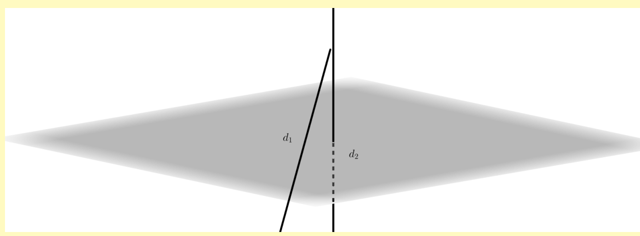
✏ d_1 et d_2 sont parallèles.



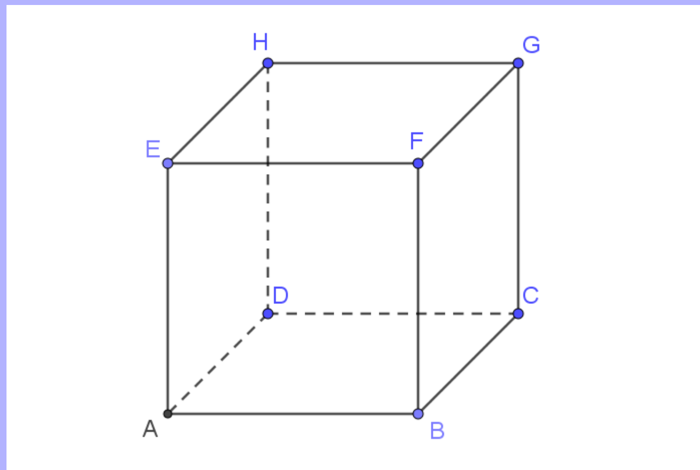
✏ d_1 et d_2 sont confondues.



2. Si d_1 et d_2 sont non coplanaires.



Exemple

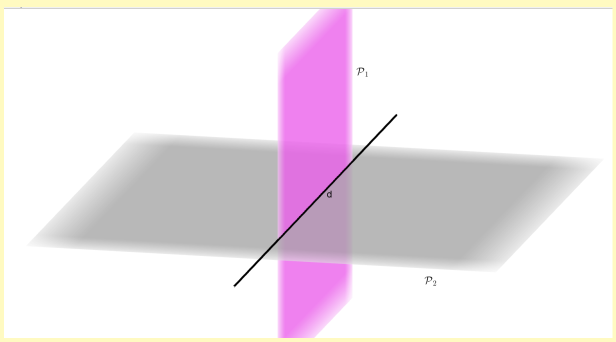


- ✏ Les droites (EH) et (FG) sont coplanaires et parallèles.
- ✏ Les droites (EH) et (EF) sont coplanaires et sécantes.
- ✏ Les droites (AB) et (HD) sont non coplanaires.

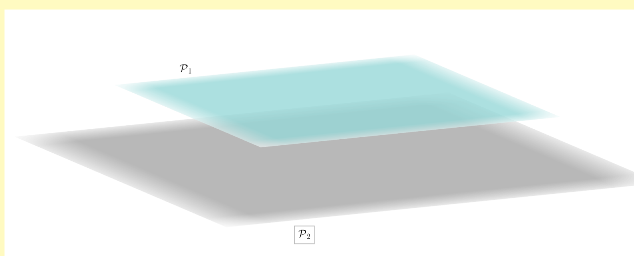
Positions relatives de deux plans

Deux plans de l'espace sont sécants ou parallèles.
On distinguera plusieurs cas de figure dont certains seront illustrés par un dessin :

- ✏ $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont sécants en une droite d.

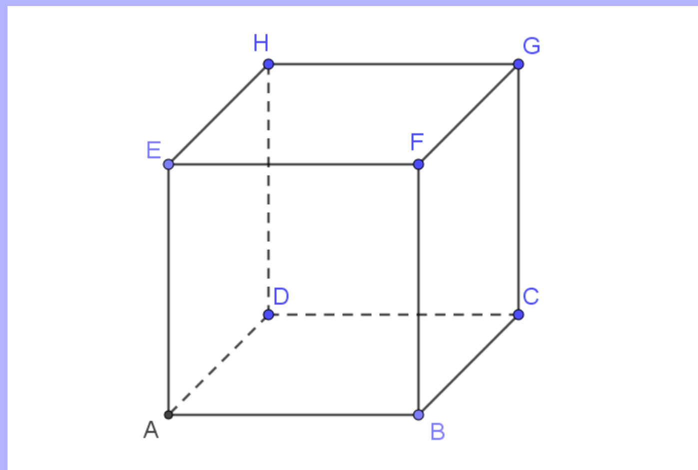


- ✏ $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont parallèles.



- ✏ $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont confondus.

Exemple

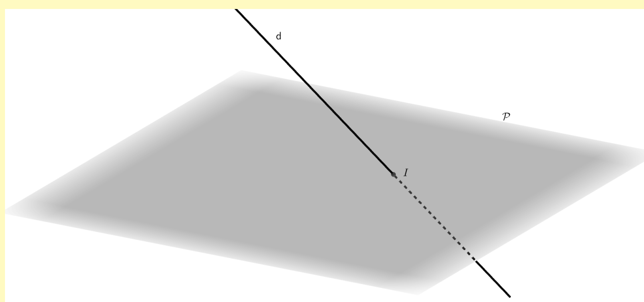


- ✏ Les plans $ABCD$ et $EFGH$ sont parallèles .
- ✏ Les plans $ABCD$ et $ABFE$ sont sécants suivant la droite (AB).

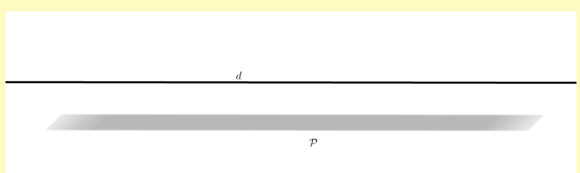
Positions relatives d'une droite et d'un plan

Une droite et un plan de l'espace sont soit sécants soit parallèles.
On distinguera plusieurs cas de figure que l'on va chacun illustrer par un dessin :

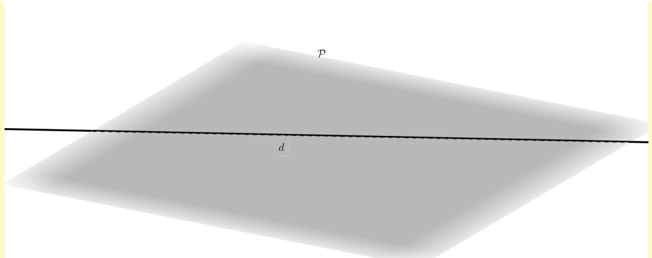
- ✏ d et $\mathscr{P}$ sont sécants.



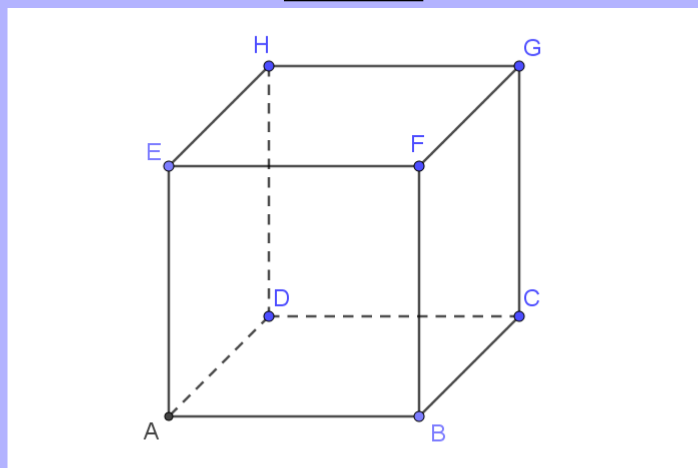
- ✏ d et $\mathscr{P}$ sont strictement parallèles.



- ✏ d et $\mathscr{P}$ sont parallèles avec d inclus dans $\mathscr{P}$.



Exemple



- La droite (GI) et le plan (ABC) sont sécants en I.
- La droite (EG) est incluse dans le plan (EFG).
- La droite (EG) et le plan (ABC) sont parallèles.

5 Bases et repères de l'espace

Vecteurs coplanaires

Trois vecteurs sont coplanaires s'ils possèdent des représentants appartenants à un même plan.

Caractérisation de trois vecteurs coplanaires

Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de l'espace sont coplanaires, s'il existe un couple de réels $(x; y)$ tels que :

$$\vec{u} = x\vec{v} + y\vec{w}$$

Caractérisation de trois vecteurs non coplanaires

Soit $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ trois vecteurs non coplanaires.

Pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$, il existe un unique triplet $(x; y; z)$ de réels tels que :

$$\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$$

Soit $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$ trois vecteurs non coplanaires de l'espace.
On appelle base de l'espace le triplet $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.

Soit $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$ trois vecteurs non coplanaires de l'espace et O un point de l'espace.
On appelle repère de l'espace le triplet $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.