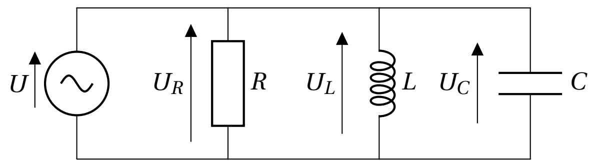
Mathématiques-Génie électrique : correction de l'exercice 4

Exercice 1 *Un circuit composé d'une résistance R, d'une inductance L et d'un condensateur C sont branchés en parallèle et alimentés par une tension alternative sinusoïdale u(t) de fréquence f = 100 Hz, de valeur efficace* $24V$ *sans déphasage.*
La tension aux bornes de chaque élément R, L et C (l'intensité i est prise comme référence des phases est respectivement :



1. *Calculer la tension $\underline{U}$ délivrée par le générateur.*
L'expression de la tension $\underline{U}$ s'écrit :

$$\begin{aligned}
&U(t) = \textit{tension efficace} \times \sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi)\\
&\textit{avec tension efficace} = 24V\\
&\varphi = 0\\
&\omega = 2\pi \times f = 2\pi \times 100\\
\textit{donc } &U(t) = 24\sqrt{2}\sin(2\pi \times 100t + \varphi)\\
\textit{ainsi } &\underline{U} = 24
\end{aligned}$$

2. *On a les valeurs suivantes : la résistance $R = 100\Omega$, l'inductance $L = 0.5H$ et du condensateur $C = 15\mu F$.*
Calculer les intensités $\underline{I_R}$, $\underline{I_L}$ et $\underline{I_C}$.
Comme les dipôles sont en parallèle, les tensions à leur bornes sont égales.
Pour déterminer les différentes intensités, on va utiliser la loi d'Ohm pour les impédances :

$$\begin{aligned}
\underline{I_R} &= \frac{\underline{U_R}}{\underline{Z_R}} = \frac{\underline{U}}{R} = \frac{24}{100} = 0.24\\
\underline{I_L} &= \frac{\underline{U_L}}{\underline{Z_L}} = \frac{\underline{U}}{L\omega i} = \frac{24}{2\pi \times 100 \times 0.5i} = -0.076i\\
\underline{I_C} &= \frac{\underline{U_C}}{\underline{Z_C}} = \frac{\underline{U}}{-\frac{1}{C\omega i}} = 24 \times 2\pi \times 100 \times 15 \times 10^{-6} i = 0.226i
\end{aligned}$$

3. *En déduire la valeur de $\underline{I}$, intensité débitée par le générateur, et préciser le déphasage.* *L'intensité débitée par le générateur est la somme des intensités débitées par les trois autres dipôles car le circuit est en parallèle. Donc :*

$$\underline{I} = \underline{I_R} + \underline{I_L} + \underline{I_C} = 0.24 - 0.076i + 0.226i = 0.24 + 0.15i$$

4. *Déterminer la valeur de l'impédance $\underline{Z}$ du montage.*
D'après la loi d'Ohm :

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{24}{0.24 + 0.15i} = \frac{24(0.24 - 0.15i)}{0.24^2 + 0.15^2} = 71.91 - 44.94i$$

5. *Donner l'expression de l'impédance $\underline{Z}$ dans un cadre plus général où les grandeurs ne sont pas connues.*
Cette fois, on va calculer l'impédance $\underline{Z}$ en utlisant la formule pour les impédances équivalentes :

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{\underline{Z_R}} + \frac{1}{\underline{Z_L}} + \frac{1}{\underline{Z_C}} \\
\Leftrightarrow &\frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{L\omega i} + \frac{1}{-\frac{1}{C\omega} i} \\
\Leftrightarrow &\frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R} - \frac{1}{L\omega} i + C\omega i \\
\Leftrightarrow &\frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R} + \left(-\frac{1}{L\omega} + C\omega\right) i \\
\Leftrightarrow &\underline{Z} = \frac{1}{\frac{1}{R} + \left(-\frac{1}{L\omega} + C\omega\right) i} \\
\Leftrightarrow &\underline{Z} = \frac{\frac{1}{R} - \left(-\frac{1}{L\omega} + C\omega\right) i}{\frac{1}{R^2} + \left(-\frac{1}{L\omega} + C\omega\right)^2}
\end{aligned}
$$

6. *Pour quelle valeur de la fréquence f a-t-on la résonance ?*
La résonance correspond, dans un circuit RLC en parallèle, à une impédance équivalence $\underline{Z}$ réelle.
Cela se traduit de la façon suivante :

$$
-\frac{1}{L\omega} + C\omega = 0 \Leftrightarrow C\omega = \frac{1}{L\omega} \Leftrightarrow CL\omega^2 = 1 \Leftrightarrow \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Leftrightarrow f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}
$$