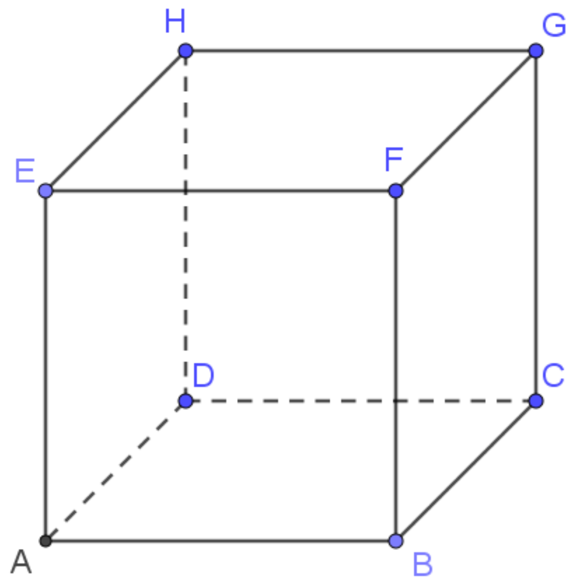
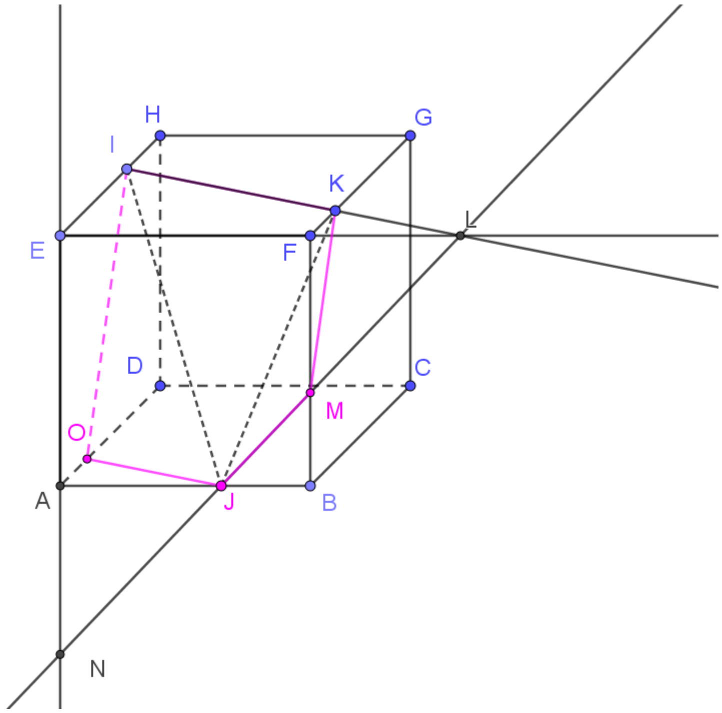
☙ Vecteurs, droites et plans de l'espace 1 : activité 2

Exemple 1 (Section d'un cube par un plan)



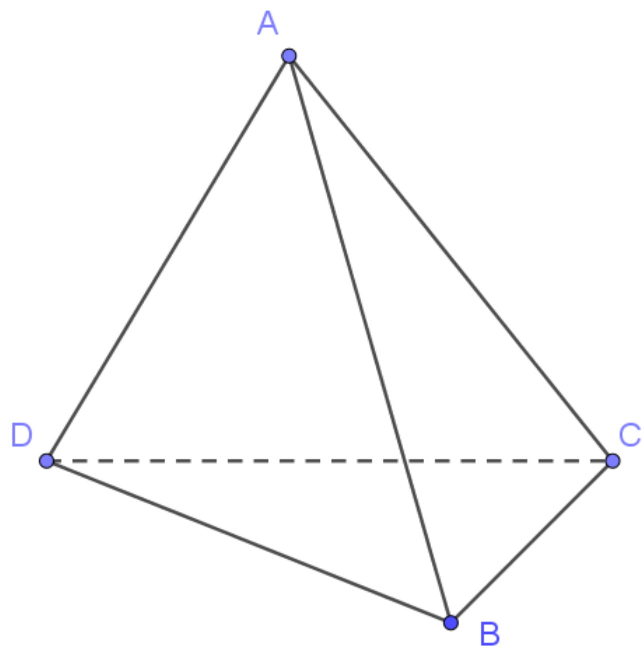
Déterminer la section du cube $ABCDEFGH$ par le plan (IJK) tel que :

$$\overrightarrow{EI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{EH}$$
$$\overrightarrow{AJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$$
$$\overrightarrow{FK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{FG}$$



On commence par placer les point I, J et K sur le cube.
Ces trois plans définissent un plan qui va, soit être sécant avec les plans engendrés par les 8 faces du cube, soit leur être parrallèle.
Si les intersections ont lieu sur les faces du cube, ces différentes intersections constitueront la section du cube avec le plan (IJK) ; l'objectif sera de déterminer deux points d'intersection entre une face et le plan (IJK), le segment issu de ces deux points sera la trace de (IJK) sur cette face.
Le segment $[IK]$ est déjà sur la face $EFGH$ donc il sera la trace de (IJK) sur le cube.
On a déjà un point d'intersection entre le plan (IJK) et la face $EFBA$, c'est le point J. Les droites (IK) et (EF) sont sécantes en L (les droites ne sont pas parrallèles par construction) donc le point L est un point du plan $(EFBA)$: la droite (LJ) est l'intersection de (IJK) et $(EFBA)$, la trace de cette droite sur la face $EFBA$ est le segment $[JM]$. On a en même temps obtenu deux points à la fois dans (IJK) et dans $(FGCB)$: M et K, la droite (MK) est donc l'intersection de (IJK) et $(FGCB)$. Par conséquent, la trace de (IJK) sur le cube est le segment $[KM]$.
On va chercher la trace sur la face $EHDA$: la droite (JM) et la droite (EA) sont sécantes en le point N, le point I et le point N sont donc à la fois sur le plan (IJK) et sur le plan $(EHDA)$. La droite (IN) est donc l'intersection des plans (IJK) et $(EHDA)$, sa trace sur la face $EHDA$ est donc le segment $[OI]$.
Les points O et J sont à la fois des points des plans (IJK) et $(ABCD)$: la trace de la section de (IJK) sur la face $ABCD$ est donc le segment $[OJ]$.
Il faudrait chercher la section du plan (IJK) avec le plan $(DCGH)$ mais si on suit le même raisonnement que précédemment, on va se rendre compte que la droite suivant laquelle le plan (IJK) et le plan $(DCGH)$ sont sécants ne passe par la face $DCGH$.
On a donc bien trouvé la section du plan (IJK) sur le cube $ABCDEFGH$.

Exemple 2 (Section d'un tétraèdre par un plan)

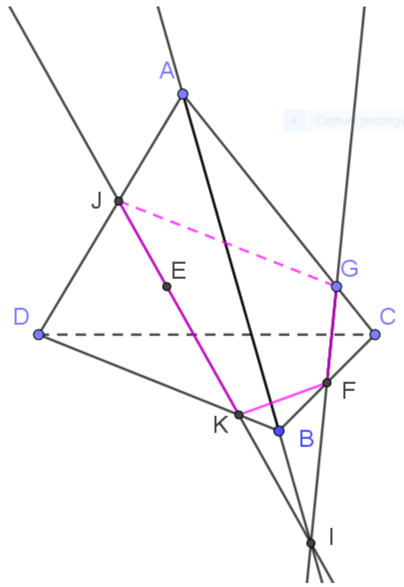


Déterminer la section du tétraèdre $ABCD$ par le plan (EFG) tel que :

$\overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{CG} = \frac{1}{5}\overrightarrow{CA}$

E centre de gravité du triangle ABD



On commence par placer les points définis par les relations vectorielles et on rappelle que le centre de gravité est l'intersection des médianes.
On doit regarder si le plan (EGF) laisse une trace sur le tétraèdre, c'est-à-dire si les plans engendrés par les faces du tétraèdre coupent le plan (EGF) sur les faces du tétraèdre.
Les points G et F sont à la fois dans le plan (EGF) et le plan (ABC) donc la trace du plan (EGF) sur le plan (ABC) est le segment $[GF]$.
Les droites (AB) et (GF) sont sécantes en I : les points I et E sont à la fois dans le plan (EGF) et dans le plan (ABD), la droite (EK) est donc la droite suivant laquelle les plans (ABD) et (EGF) sont sécants. La trace de (EK) sur la face (ADB) est donc le segment $[JK]$.
Les points K et F sont à la fois sur le plan (EGF) et sur le plan (DBC) : la trace de (EGF) sur le plan (DBC) est donc le segment $[KF]$.
Les points J et G sont à la fois sur le plan (EGF) et sur le plan (ADC) : la trace de (EGF) sur le plan (ADC) est donc le segment $[JG]$