Fonction logarithme : exercices

Exercice 1 *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *les équations suivantes :*

$2e^x - 3 = 0 \quad e^{-x+1} - 1 = 0 \quad e^{2x} = 4 \quad (2e^x - 1)(e^x + 5) = 0$

$\ln(x) = 3 \quad \ln(x) = -7 \quad 2\ln(x) - 1 = 0 \quad (\ln(x) + 5)(4\ln(x) - 5) = 0 \quad (\ln(x))^2 = 9$

$\ln(x) = -5 \quad -6\ln(x) + 3 = 0 \quad \ln(x)(2\ln(x) - 7) = 0$

Exercice 2 *Simplifier les nombres suivants pour les écrire en fonction de* $\ln(2)$ *et* $\ln(5)$ *uniquement :*

$$a = \ln(10) - \ln\left(\frac{1}{4}\right) \quad b = \ln(0.05) \quad c = \ln\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right) \quad d = 2\ln(5e^2) + \ln(4e^{-1})$$

Exercice 3 *Soit* (u_n) *une suite géométrique de raison* $q > 0$ *et de premier terme* $u_0 > 0$.
On pose $v_n = \ln(u_n)$.
Démontrer que la suite (v_n) *est arithmétique.*

Exercice 4 *Soit* f *la fonction définie, pour tout réel* x*, par :*

$$f(x) = \ln(1 + e^x)$$

Démontrer que, pour tout réel x *:*

$$f(x) = x + \ln(1 + e^{-x})$$

Exercice 5 *Déterminer le plus entier naturel tel que :*

$$0.99^n \leq 10^{-30}$$
$$1.02^n > 10^{2022}$$

Exercice 6 *Soit* (u_n) *la suite géométrique de premier terme* $u_0 = 1$ *et de raison* $q = 1.001$.
Déterminer, s'il existe, le plus petit entier naturel n *tel que :* $u_n > 10000$.

Exercice 7 *Soit* f *la fonction définie sur* $]0;+\infty[$ *par :*

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{2x + 1}$$

1. *Déterminer la limite de* f *lorsque* x *tend vers* 0.
2. *Vérifier que, pour tout réel* $x > 0$ *:*
$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x} \times \frac{1}{2 + \frac{1}{x}}$$
3. *En déduire la limite de* $f(x)$ *lorsque* x *tend vers* $+\infty$.
4. *Interpréter graphiquement les résultats précédents.*

Exercice 8 *Résoudre les équations suivantes après avoir déterminé sur quel ensemble on peut les résoudre :*

$$\ln((x-3)(2x+1)) = \ln(4)$$
$$\ln(x-3) + \ln(2x+1) = 2\ln(2)$$

Exercice 9 *Résoudre les inéquations suivantes après avoir déterminé sur quel ensemble on peut les résoudre :*

$$\ln(3x-4) < 0$$
$$\ln(-x+3) \geq 1$$
$$\ln(-x+1)\ln(x)$$
$$\ln(3+2x) < \ln(x-3)$$

Exercice 10 *Le carbone* 14 *est un isotope radioactif du carbone permettant de dater les restes d'êtres vivants, comme les squelettes ou les fossiles.*
La formule suivante donne l'âge T, en année, d'un échantillon en fonction du pourcentage p de carbone 14 *restant :*

$$T = 8264\ln\left(\frac{100}{p}\right)$$

1. *Le squelette d'un homme de Néandertal contient* 2% *du carbone* 14 *initialement contenu dans ses os.*
   Estimer l'âge de ce squelette.
2. *La datation au carbone* 14 *a permis d'estimer l'âge d'une momie à* 2500 *ans.*
   Quelle proportion de carbone 14 *contient-elle encore ?*

Exercice 11 *Soit f la fonction définie sur $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ par :*

$$f(x) = \ln(2x-1) - x + 1$$

1. *Déterminer la limite de $f(x)$ en $\frac{1}{2}$.*
2. *Montrer que, pour tout réel $x > \frac{1}{2}$:*

   $$f(x) = \ln(x) - x + 1 + \ln\left(2 - \frac{1}{x}\right)$$

   En déduire la limite de $f(x)$ en $+\infty$.
3. *Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions distinctes α et β avec $\alpha < \beta$.*
4. *Donner la valeur exacte de α et un encadrement de β d'amplitude 10^{-2}*

Exercice 12 *Soit f la fonction définie sur $]1;+\infty[$ par :*

$$f(x) = x - \frac{\ln(x)}{x^2}$$

et soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. *Soit g la fonction définie sur* $]1;+\infty[$ *par :*

$$g(x) = x^2 - 1 + \ln(x)$$

Montrer que la fonction g est positive sur $[1;+\infty[$.

2. *Montrer que, pour tout* $x \in [1;+\infty[$ *:*

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x}$$

3. *En déduire le sens de variation de f sur* $[1;+\infty[$.
4. *On note $\mathscr{D}$ la droite d'équation $y = x$.*
Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite $\mathscr{D}$.
5. *Pour tout entier naturel* ≥ 2, *on note respectivement M_k et N_k les points d'abscisses k de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$.*
Déterminer la limite de M_kN_k quand k tend vers $+\infty$.
6. *Écrire un algorithme en python permettant de déterminer le plus petit entier k_0 supérieur ou égal à* 2 *tel que la distance M_kN_k soit inférieure ou égale à* 10^{-2}.