Récurrences 2

On considère la suite :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 0.2u_n + 1.6 \\ u_0 = 9 \end{cases}$$

1. Montrer par récurrence que :

$$2 \leq u_{n+1} \leq u_n$$

2. En déduire que la suite converge et en déduire sa limite.

1. **Initialisation :**

   On a :

$$u_1 = 0.2u_0 + 1.6 = 3.4$$
$$\text{donc } 2 \leq u_1 \leq 9 = u_0$$

   L'initialisation est établie.

   Hérédité :
   On suppose que la propriété est vraie pour un certain rang $n \geq 0$:

$$2 \leq u_{n+1} \leq u_n \quad \text{c'est l'hypothèse de récurrence}$$

   On part de cette hypothèse :

$$\begin{aligned}
& 2 \leq u_{n+1} \leq u_n \\
\Rightarrow & 0.2 \times 2 \leq 0.2 \times u_{n+1} \leq 0.2 \times u_n \\
\Rightarrow & 0.4 \leq 0.2 \times u_{n+1} \leq 0.2 \times u_n \\
\Rightarrow & 0.4 + 1.6 \leq 0.2 \times u_{n+1} + 1.6 \leq 0.2 \times u_n + 1.6 \\
\Rightarrow & 2.0 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}
\end{aligned}$$

   L'hérédité est établie.

2. On vient de montrer que la suite est décroissante et minorée, par conséquent, d'après le théorème de convergence monotone, la suite converge vers l un nombre réel qui vérifie :

$$\begin{aligned}
& l = 0.2 \times l + 1.6 \\
\Leftrightarrow & l - 0.2 \times l = 1.6 \\
\Leftrightarrow & l \times 0.8 = 1.6 \\
\Leftrightarrow & l = \frac{1.6}{0.8} = 2
\end{aligned}$$