Récurrences 5

On considère la suite :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 16u_n - 150n - 290 \\ u_0 = 30 \end{cases}$$

1. Calculer u_1.
2. On pose : $\forall n \in \mathbb{N} :\ v_n = u_n - 10n - 20$.
   Montrer que la suite (v_n) est géométrique . Donner la raison et le premier terme.
3. En déduire que l'expression de v_n en fonction de n.
4. En déduire que l'expression de u_n en fonction de n.
5. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

1. On a :

$$u_1 = 16u_0 - 150 \times 0 - 290 = 190$$

2. On a :

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= u_{n+1} - 10(n+1) - 20\\
v_{n+1} &= 16u_n - 150n - 290 - 10(n+1) - 20\\
v_{n+1} &= 16u_n - (150+10)n - 20 - 290 - 10\\
v_{n+1} &= 16u_n - 160n - 320\\
v_{n+1} &= 16\left(u_n - \frac{160}{16}n - \frac{320}{16}\right)\\
v_{n+1} &= 16\left(u_n - 10n - 20\right)\\
v_{n+1} &= 16v_n
\end{aligned}$$

3. Comme la suite (v_n) est géométrique de raison 16, on peut en déduire que :

$$\begin{aligned}
v_n &= 16^n v_0\\
v_n &= 16^n(u_0 - 20)\\
v_n &= 10 \times 16^n
\end{aligned}$$

4. On a :

$$\begin{aligned}
&v_n = u_n - 10n - 20\\
\Leftrightarrow &u_n = v_n + 10n + 20\\
\Leftrightarrow &u_n = 10 \times 16^n + 10n + 20
\end{aligned}$$

5. On doit déterminer le signe de $u_{n+1} - u_n$:

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= 10 \times 16^{n+1} + 10(n+1) + 20 - (10 \times 16^n + 10n + 20)\\
&= 10 \times 16^n(16-1) + 10n + 10 + 20 - 10n - 20\\
&= 150 \times 16^n + 10 > 0
\end{aligned}$$

Comme $u_{n+1} - u_n > 0$, on en déduit que la suite (u_n) est croissante.