Récurrences 3

On considère la suite :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 0.3u_n + 3.5 \\ u_0 = -2 \end{cases}$$

1. Montrer par récurrence que :

$$u_n \leq u_{n+1} \leq 5$$

2. En déduire que la suite converge et en déduire sa limite.

1. **Initialisation :**

   On a :

   $$u_1 = 0.3u_0 + 3.5 = 2.9$$
   $$\text{donc } u_0 = -2 \leq u_1 \leq 5$$

   L'initialisation est établie.

   Hérédité :
   On suppose que la propriété est vraie pour un certain rang $n \geq 0$:

   $$u_n \leq u_{n+1} \leq 5 \quad \text{c'est l'hypothèse de récurrence}$$

   On part de cette hypothèse :

   $$\begin{aligned}
   & u_n \leq u_{n+1} \leq 5 \\
   \Rightarrow & 0.3 \times u_n \leq 0.3 \times u_{n+1} \leq 0.3 \times 5 \\
   \Rightarrow & 0.3 \times u_n \leq 0.3 \times u_{n+1} \leq 1.5 \\
   \Rightarrow & 0.3 \times u_n + 3.5 \leq 0.3 \times u_{n+1} + 3.5 \leq 1.5 + 3.5 \\
   \Rightarrow & u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 5
   \end{aligned}$$

   L'hérédité est établie.

2. On vient de montrer que la suite est croissante et majorée, par conséquent, d'après le théorème de convergence monotone, la suite converge vers l un nombre réel qui vérifie :

   $$\begin{aligned}
   & l = 0.3 \times l + 3.5 \\
   \Leftrightarrow & l - 0.3 \times l = 3.5 \\
   \Leftrightarrow & l \times 0.7 = 3.5 \\
   \Leftrightarrow & l = \frac{3.5}{0.7} = 5
   \end{aligned}$$