Fonction logarithme 3

1. On considère la fonction suivante définie sur $]0;+\infty[$:

$$g(x) = 3x - 3 + 3\ln(x)$$

   a. Calculer la limite de g en 0^+
   b. Calculer la limite de g en $+\infty$
   c. Calculer la dérivée de g.
   d. Déterminer le signe de $g'(x)$.
   e. En déduire le tableau de variation de $g(x)$.
   f. Déterminer le nombre de solutions de $g(x) = 0$.

2. On considère la fonction suivante définie sur $]0;+\infty[$:

$$f(x) = \frac{3x-3}{x}\ln(x)$$

   a. Calculer la limite de f en 0^+
   b. Calculer la limite de f en $+\infty$
   c. Calculer la dérivée de f.
   d. Déterminer le signe de $f'(x)$.
   e. En déduire le tableau de variation de $f(x)$.
   f. En déduire le nombre de solutions de $f(x) = 0$.

Correction :

1. **a.** On sait que :

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0^+} 3x-3 = -3\\
&\lim_{x\to 0^+} 3\ln(x) = -\infty \quad \text{par propriété du cours}\\
\text{donc } &\lim_{x\to 0^+} 3x-3+3\ln(x) = -\infty
\end{aligned}
$$

b.

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to +\infty} 3x-3 = +\infty\\
&\lim_{x\to +\infty} 3x\ln(x) = +\infty \quad \text{par propriété du cours}\\
\text{donc } &\lim_{x\to +\infty} 3x-3+3\ln(x) = +\infty
\end{aligned}
$$

c.

$$g'(x) = 3 + 3 \times \frac{1}{x}$$

d.

$$g'(x) \geq 0 \quad \forall x > 0$$

e. On a :

x	0		$+\infty$
$g'(x)$	$\Vert$	$+$	
$g(x)$	$\Vert$	$-\infty$ $\nearrow$	$-\infty$

f. La fonction g est croissante de $-\infty$ à $+\infty$, donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe une unique valeur $\alpha > 0$ telle que $g(\alpha) = 0$.

$$
\begin{gathered}
g(0.99) < 0\\
g(1.0) > 0\\
\text{donc } 0.99 < \alpha < 1.0
\end{gathered}
$$

2. **a.** On sait que :

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0^+} \frac{3x-3}{x} = -\infty\\
&\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty \quad \text{par propriété du cours}\\
\text{donc } &\lim_{x\to 0^+} \frac{3x-3}{x}\ln(x) = +\infty
\end{aligned}$$

b. On sait que :

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to +\infty} \frac{3x-3}{x} = 3\\
&\lim_{x\to +\infty} \ln(x) = +\infty \quad \text{par propriété du cours}\\
\text{donc } &\lim_{x\to +\infty} \frac{3x-3}{x}\ln(x) = +\infty
\end{aligned}$$

c. On sait que :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\frac{3x-3}{x}\ln(x)\right)'\\
&= \left(\frac{3x-3}{x}\right)'\ln(x) + \left(\frac{3x-3}{x}\right)\ln(x)'\\
&= \left(\frac{(3x-3)'\times x-(3x-3)\times x'}{x^2}\right)\ln(x) + \left(\frac{3x-3}{x}\right)\times\frac{1}{x}\\
&= \left(\frac{3x-(3x-3)}{x^2}\right)\ln(x) + \left(\frac{3x-3}{x^2}\right)\\
&= \frac{(3x-3x+3)\ln(x)+3x-3}{x^2}\\
&= \frac{3x-3+3\ln(x)}{x^2}\\
&= \frac{g(x)}{x^2}
\end{aligned}$$

d. On a :

x	0		α		$+\infty$
$g'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	|| $+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

e.

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \frac{3\alpha - 3}{\alpha} \ln(\alpha) \\ \text{or } g(\alpha) &= 3\alpha - 3 + 3\ln(\alpha) \\ \text{donc } f(\alpha) &= \frac{-3\ln^2(\alpha)}{\alpha} < 0 \end{aligned}$$

Comme f est contine, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, on déduit que f s'annule en deux valeurs x_1 et x_2 : $0 < x_1 < \alpha$ et $x_2 > \alpha$