Dérivation : cours

1 Fonction dérivée

Définition

On dit que la fonction f est dérivable sur un intervalle I lorsqu'elle est dérivable en tout nombre x de cet intervalle et on note f' la fonction qui a tout nombre x de cet intervalle associe le nombre dérivée de f en x. Cette fonction s'appelle la **fonction dérivée** de f.

Propriétés

Les fonctions dérivées des fonctions usuelles sont données par le tableau suivant :

Fonction f	définie sur	Dérivée f'	définie sur
$f(x) = k$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = mx + p$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = m$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n, \quad n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x^n}, \quad n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \sqrt{x}$	$\mathbb{R}^+ = [0; +\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}^{+*} =]0; +\infty[$

Preuve

Nous allons faire la démonstration pour la fonction carré et la fonction invers ainsi que pour la racine carré.

1. **La fonction carré** Soit $x \in \mathbb{R}$ et $\epsilon > 0$:

$$\begin{aligned} &\frac{(x+\epsilon)^2 - x^2}{\epsilon} \\ =&\frac{x^2 + 2x\epsilon + \epsilon^2 - x^2}{\epsilon} \\ =&2x + \epsilon \end{aligned}$$

Cette expression a pour limite $2x$ quand ϵ tend vers 0.
On en déduit que $f'(x) = 2x$.

2. **La fonction inverse** Soit $x \in \mathbb{R}^*$ et $\epsilon > 0$:

$$\begin{aligned} &\frac{\frac{1}{x+\epsilon} - \frac{1}{x}}{\epsilon} \\ =&\frac{\frac{x-(x+\epsilon)}{x(x+\epsilon)}}{\epsilon} \\ =&\frac{\frac{-\epsilon)}{x(x+\epsilon)}}{\epsilon} \\ =&-\frac{1}{x(x+\epsilon)} \end{aligned}$$

Cette expression a pour limite $-\frac{1}{x^2}$ quand ϵ tend vers 0.
On en déduit que $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

3. **La fonction racine carré** Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\epsilon > 0$:

$$\begin{aligned}
&\frac{\sqrt{x+\epsilon}-\sqrt{x}}{\epsilon} \\
&= \frac{(\sqrt{x+\epsilon}-\sqrt{x})(\sqrt{x+\epsilon}+\sqrt{x})}{\epsilon(\sqrt{x+\epsilon}+\sqrt{x})} \\
&= \frac{(\sqrt{x+\epsilon}-\sqrt{x})(\sqrt{x+\epsilon}+\sqrt{x})}{\epsilon(\sqrt{x+\epsilon}+\sqrt{x})} \\
&= \frac{x+\epsilon-x}{\epsilon(\sqrt{x+\epsilon}+\sqrt{x})} \\
&= \frac{\epsilon}{\epsilon(\sqrt{x+\epsilon}+\sqrt{x})} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x+\epsilon}+\sqrt{x}}
\end{aligned}$$

Cette expression a pour limite $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ quand ϵ tend vers 0. Reprenons ce taux d'accroissement pour $x = 0$:

$$\begin{aligned}
&\frac{\sqrt{0+\epsilon}-\sqrt{0}}{\epsilon} \\
&= \frac{\sqrt{\epsilon}}{\epsilon} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}
\end{aligned}$$

Cette expression tend vers $+\infty$ quand ϵ tend vers 0 : la fonction $\sqrt{x}$ n'est donc pas dérivable en 0.

2 Opérations sur les fonctions

Propriétés

Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un même intervalle I :

Fonction	**Fonction dérivée**
ku avec $k \in \mathbb{R}$	ku'
$u + v$	$u' + v'$
$u \times v$	$u' \times v + u \times v'$
$\frac{1}{u}$ avec $u(x) \neq 0$	$-\frac{u'}{u^2}$
$\frac{u}{v}$ avec $v(x) \neq 0$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$

Preuve

Nous allons faire la démonstration pour le produit.

Soient u et v deux fonctions dérivables sur I et $x \in I$:

$$\begin{aligned}
&\frac{u(x+\epsilon)v(x+\epsilon)-u(x)v(x)}{\epsilon}\\
=&\frac{u(x+\epsilon)v(x+\epsilon)-u(x)v(x)}{\epsilon}\\
=&\frac{u(x+\epsilon)v(x+\epsilon)-u(x)v(x+\epsilon)+u(x)v(x+\epsilon)-u(x)v(x)}{\epsilon}\\
=&\frac{u(x+\epsilon)v(x+\epsilon)-u(x)v(x+\epsilon)}{\epsilon}+\frac{u(x)v(x+\epsilon)-u(x)v(x)}{\epsilon}\\
=&\frac{(u(x+\epsilon)-u(x))v(x+\epsilon)}{\epsilon}+\frac{u(x)(v(x+\epsilon)-v(x))}{\epsilon}
\end{aligned}$$

La première partie de l'expression tend vers $u'(x)v(x)$ quand ϵ tend vers 0 tandis que la seconde tend vers $u(x)v'(x)$.
On en déduit que la dérivée de la fonction $u(x)v(x)$ est $u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$.

Propriétés

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I, a et b deux réels et J l'ensemble des réels tels que $ax+b \in J$.
Alors la fonction $g(x) = f(ax+b)$ est définie set dérivable sur J et :

$$g'(x) = af'(ax+b)$$

Preuve

Soit x tel que $ax+b \in J$ et $\epsilon > 0$ tel que $a(x+\epsilon)+b \in J$:

$$\begin{aligned}
&\frac{g(x+\epsilon)-g(x)}{\epsilon}\\
=&\frac{f(a(x+\epsilon)+b)-f(ax+b)}{\epsilon}\\
=&\frac{f(ax+a\epsilon+b)-f(ax+b)}{\epsilon}\\
=&\frac{f(ax+a\epsilon+b)-f(ax+b)}{\epsilon}\\
=&a\times\frac{f(ax+a\epsilon+b)-f(ax+b)}{a\epsilon}
\end{aligned}$$

On pose $\epsilon' = a\epsilon$:

$$\begin{aligned}
&\frac{g(x+\epsilon)-g(x)}{\epsilon}\\
=&a\times\frac{f(ax+b+\epsilon')-f(ax+b)}{\epsilon'}
\end{aligned}$$

On a l'équivalence $\epsilon \to 0 \Leftrightarrow \epsilon' \to 0$ donc quand ϵ tend vers 0, $\frac{g(x+\epsilon)-g(x)}{\epsilon}$ tend vers $af'(ax+b)$.

Propriétés

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $u(I)$. La fonction $g(x) = f(u(x))$ est définie et dérivable sur I et :

$$g'(x) = u'(x)f'(u(x))$$

3 Variation d'une fonction

Propriétés

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et f' sa fonction dérivée :

- ✏ $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in I \Leftrightarrow f$ est croissante sur I.
- ✏ $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in I \Leftrightarrow f$ est décroissante sur I.
- ✏ $f'(x) = 0$ pour tout $x \in I \Leftrightarrow f$ est constante sur I.

Propriétés

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et f' sa fonction dérivée.
Si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$ (respectivement $f'(x) < 0$), alors f est strictement croissante sur I (respectivement strictement décroissante)

Propriétés

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I contenant a et f' sa fonction dérivée.
La fonction f' s'annule et change de signe en $a \Leftrightarrow f$ admet un extremum local en a.