Récurrences 4

On considère la suite :

$$\begin{cases} u_{n+1} = -\frac{1}{28}u_n^2 + \frac{32}{28}u_n \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

1. Donner l'expression de f telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$
2. Résoudre l'équation : $f(x) = x$
3. Montrer que f est croissante sur $[0;16]$.
4. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N} :\ 0 \leq u_n \leq 4$.
5. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N} :\ u_n \leq u_{n+1}$.
6. En déduire que la suite est convergente et donner sa limite.

1. On remplace tous les u_n par des x et on obtient :

$$f(x) = -\frac{1}{28}x^2 + \frac{32}{28}x$$

2. Résoudre l'équation : $f(x) = x$

$$\begin{aligned}
& f(x) = x \\
\Leftrightarrow & -\frac{1}{28}x^2 + \frac{32}{28}x = x \\
\Leftrightarrow & -\frac{1}{28}x^2 + \frac{32}{28}x - x = 0 \\
\Leftrightarrow & x\left(-\frac{1}{28}x + \frac{4}{28}\right) = 0 \\
\Leftrightarrow & x = 0 \text{ ou } -\frac{1}{28}x = -\frac{4}{28} \\
\Leftrightarrow & x = 0 \text{ ou } x = \frac{-\frac{4}{28}}{-\frac{1}{28}} \\
\Leftrightarrow & x = 0 \text{ ou } x = 4
\end{aligned}$$

3. Pour montrer que f est croissante, on doit calculer sa dérivée et ensuite déterminer son signe :

$$f'(x) = -\frac{2}{28}x + \frac{32}{28}$$

4. On doit maintenant résoudre l'inéquation suivante :

$$\begin{aligned}
& f'(x) \geq 0 \\
\Leftrightarrow & -\frac{2}{28}x + \frac{32}{28} \geq 0 \\
\Leftrightarrow & -\frac{2}{28}x \geq \frac{32}{28} \\
\Leftrightarrow & x \leq \frac{-\frac{32}{28}}{-\frac{2}{28}} \\
\Leftrightarrow & x \leq 16
\end{aligned}$$

Par conséquent sur l'intervalle $[0;16]$, la fonction f est croissante.

5. **Initialisation** :
On a :

$$0 \leq u_0 = 1 \leq 4$$

L'initialisation est établie.
Hérédité :

On suppose que la propriété est vraie pour un certain rang $n \geq 0$:

$$0 \leq u_n \leq 4 \text{ c'est l'hypothèse de récurrence}$$

On part de l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned}
& 0 \leq u_n \leq 4 \\
\Rightarrow & 0 \leq f(u_n) \leq f(4) \text{ car f est croissante} \\
\Rightarrow & 0 \leq u_{n+1} \leq 4 \text{ d'après les questions précédentes}
\end{aligned}$$

L'hérédité est établie.
Donc $\forall n \in \mathbb{N} :\ 0 \leq u_n \leq 4$

6. **Initialisation** :
   On a :

$$u_1 = f(u_0) = f(1) = 1.1071428571429 > 1 = u_0$$

   L'initialisation est établie.

7. **Hérédité** :
   On suppose que la propriété est vraie pour un certain rang $n \geq 0$:

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \text{ c'est l'hypothèse de récurrence}$$

   On part de l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} & 0 \leq u_n \leq u_{n+1} \\ \Rightarrow & 0 \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \text{ car f est croissante} \\ \Rightarrow & 0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \end{aligned}$$

   L'hérédité est établie.
   Donc $\forall n \in \mathbb{N} : \ u_n \leq u_{n+1}$

8. En déduire que la suite est convergente et donner sa limite.
   Comme la suite est croissante et majorée, d'après le théorème de convergence monotone, la suite converge vers un nombre réel l qui vérifie :

$$\begin{aligned} & f(l) = l \\ \Leftrightarrow & l = 0 \text{ ou } l = 4 \end{aligned}$$

   Comme la suite est croissante et que $u_0 > 0$, alors l ne peut pas être nul donc $l = 4$