☙ Suites 1 : devoir maison pour le 29/11/2021, correction

Exercice 1 *Soit la suite u définie, pour tout entier $n \geq 1$, par :*

$$u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

1. *Calculer pour $n \geq 1$ $u_{n+1} - u_n$. Détailler.*
   Pour $n \geq 1$:

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1+1} - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\\
&= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\\
&= \frac{2}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n}\\
&= \frac{2n(n+2) - n(n+1) - (n+1)(n+2)}{n(n+1)(n+2)}\\
&= \frac{2n^2 + 4n - n^2 - n - (n^2 + 3n + 2)}{n(n+1)(n+2)}\\
&= \frac{2n^2 + 4n - n^2 - n - n^2 - 3n - 2}{n(n+1)(n+2)}\\
&= \frac{-2}{n(n+1)(n+2)}
\end{aligned}$$

2. *En déduire que u est monotone à partir d'un certain rang à préciser.*
   Pour $n \geq 1$ $u_{n+1} - u_n < 0$: la suite est donc décroissante pour $n \geq 1$.

Exercice 2 *Soit u la suite définie par :*

$$\begin{cases} t_0 = 1 \\ t_{n+1} = t_n + n^2 - 9 \quad \text{pour } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Déteminer la monotonie de u.
Pour $n \geq 0$:

$$t_{n+1} - t_n = n^2 - 9 = \begin{cases} \geq 0 & \text{if } n \geq 3 \\ \leq 0 & \text{if } n \leq 3 \end{cases}$$

Par conséquent, la suite est croissante pour $n \geq 3$ et décroissante pour $n \leq 3$.

Exercice 3 *Le tableau ci-dessous indique le taux de Français possesseurs d'un Smartphone entre 2012 et 2017 :*

Année	2012	2013	2014	2015	2016	2017
Taux(%)	28	39	46	58	65	73

Soit la suite $(t_n)_n$ définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$t_n = -0.298n^2 + 10.512n + 27.93$$

On admet qu'elle permet d'obtenir une bonne modélisation de ce taux d'équipement pour l'année $2012 + n$.

1. *Calculer les trois premiers termes de la suite $(t_n)_n$ et les comparer au taux réels.*
   Après calculs, on trouve :

$$t_0 = \approx 27.93$$
$$t_1 = \approx 38.14$$
$$t_2 = \approx 47.76$$

   En arrondissant à l'unité les valeurs de cette suite, on obtient les valeurs du tableau : la modélisation est bonne pour ces valeurs.

2. *Étudier les variations de la suite $(t_n)_n$. Ce modèle est-il réaliste sur le long terme ? Expliquer.*
   Il suffit d'étudier les variations de la fonction $f(t) = -0.298t^2 + 10.512t + 27.93$. Comme $a < 0$, la fonction sera croissante puis décroissante, le changement de variation a lieu pour $t = -\frac{b}{2a} \approx 17.63$.
   Cela signifie que pour $n \geq 18$, la suite t_n sera décroissante : le modèle ne sera plus réaliste au dela de cette valeur. En effet, de plus en plus de personnes possèdent un smartphone : le pourcentage de personnes possèdant un smartphone ne peut pas diminuer.
3. *A l'aide la calculatrice, indiquer l'année à partir de laquelle, selon ce modèle, on peut estimer que le taux de personnes possesseurs d'un Smartphone dépassera 95%.*
   A la calculatrice, on trouve :

$$t_8 \approx 92.954$$
$$t_9 \approx 98.4$$

   Donc c'est pour $n = 9$ que la suite dépasse pour la première fois 95% ; $n = 9$ correspond à l'année $2012 + 9 = 2021$, c'est donc en 2021 que le taux de personnes possesseurs d'un Smartphone dépassera 95%.

Exercice 4 *Soit la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et :*

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n(1 + 2n)}$$

1. *Calculer les quatre premiers termes de la suite u sous la forme de fractions irréductibles. Conjecturer alors d'une expression explicite de $u_n = f(n)$.*

$$\begin{aligned}
u_0 &= \frac{1}{1} \\
u_1 &= \frac{u_0}{1 + u_0(1 + 2 \times 0)} = \frac{1}{1 + 1 \times (1 + 0)} = \frac{1}{2} \\
u_2 &= \frac{u_1}{1 + u_1(1 + 2 \times 1)} = \frac{\frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2} \times 3} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{2}} = \frac{1}{5} \\
u_3 &= \frac{u_2}{1 + u_2(1 + 2 \times 2)} = \frac{\frac{1}{5}}{1 + \frac{1}{5} \times 5} = \frac{\frac{1}{5}}{2} = \frac{1}{10}
\end{aligned}$$

   On constate que pour ces termes :

$$\begin{aligned}
u_n &= f(n) = \frac{1}{n^2 + 1} \\
u_0 &= \frac{1}{1} = \frac{1}{0^2 + 1} \\
u_1 &= \frac{1}{2} = \frac{1}{1^2 + 1} \\
u_2 &= \frac{1}{5} = \frac{1}{2^2 + 1} \\
u_3 &= \frac{1}{10} = \frac{1}{3^2 + 1}
\end{aligned}$$

2. *Démontrer la conjecture émise en question 1.*
   Pour cela, on calculera $f(0)$ et on le comparera à u_0 puis on montrera que :

$$\frac{f(n)}{1 + f(n)(1 + 2n)} = f(n + 1)$$

On a $f(0)=\frac{1}{0^2+1}=\frac{1}{1}=1$.
De plus :

$$\begin{aligned}
&\frac{f(n)}{1+f(n)(1+2n)}\\
&=\frac{\frac{1}{n^2+1}}{1+\frac{1}{n^2+1}\times(1+2n)}\\
&=\frac{\frac{1}{n^2+1}}{1+\frac{1+2n}{n^2+1}}\\
&=\frac{\frac{1}{n^2+1}}{\frac{n^2+1}{n^2+1}+\frac{1+2n}{n^2+1}}\\
&=\frac{\frac{1}{n^2+1}}{\frac{n^2+1+1+2n}{n^2+1}}\\
&=\frac{\frac{1}{n^2+1}}{\frac{(n+1)^2+1}{n^2+1}}\\
&=\frac{1}{(n+1)^2+1}
\end{aligned}$$

On constate que la suite $(f(n))$ *et* (u_n) *vérifie la même relation de récurrence et ont le même premier terme.*
Par conséquent, chacun des termes suivants des deux suites séront égaux : finalement, $u_n=f(n)=\frac{1}{1+n^2}$ *pour* $n\in\mathbb{N}$.