Fonctions polynômes du second degré : cours

1 Rappels et forme canonique

Définitions : polynômes et trinômes

1. Toute expression de la forme $a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + .. + a_nx^n$ où, pour tout i, $a_i \in \mathbb{R}$ avec $a_n \neq 0$ est appelée **polynôme de degré** n.
2. Toute expression de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$ est un polynôme de degré 2 ou **trinôme**. C'est la **forme développée** du trinôme.
3. Toute fonction f qui, à x, associe $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$ est appelée fonction trinôme.

Définition : discriminant

Soit $ax^2 + bx + c$ un trinôme. On appelle **discriminant** du trinôme, que l'on notera Δ et prononcera "delta", le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$.

Théorème : forme canonique

Tout trinôme $ax^2 + bx + c$ peut s'écrire sous la forme $k(x-\alpha)^2 + \beta$ où k, α et β sont des réels. Cette forme s'appelle **forme canonique** du trinôme.

1. $k = a$
2. $\alpha = \frac{-b}{2a}$
3. $\beta = -\frac{\Delta}{4a}$
4. La fonction trinôme $f(x) = ax^2 + bx + c$ admet un extremum atteint en $x_0 = \alpha = -\frac{b}{2a}$ qui vaut $f(x_0) = f(\alpha) = \beta = -\frac{\Delta}{4a}$:
   - ✏ c'est un minimum si a est positif.
   - ✏ c'est un maximum si a est négatif.

Preuve

Pour $a \neq 0$ et $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
ax^2+bx+c &= a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)\\
&= a\left(\underbrace{x^2+2\times\frac{b}{2a}\times x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2}_{\text{identité reparquable}}-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right)\\
&= a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right)\\
&= a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{4ac}{4a^2}\right)\\
&= a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right)\\
&= a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{-\Delta}{4a^2}\right) \text{ on développe}\\
&= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+a\times\frac{-\Delta}{4a^2}\\
&= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{-\Delta}{4a}
\end{aligned}$$

On obtient bien les coefficients attendus.
La preuve sur les extrema sera faite plus tard dans l'année.

2 Racines et résolution d'équations

Définitions : racines d'un trinôme

Soit un trinôme ax^2+bx+c. On appelle **racine** du trinôme tout réel solution de l'équation $ax^2+bx+c=0$.

Propriétés : expression des racines

Soit un trinôme ax^2+bx+c.

- ✏ Si $\Delta < 0$, alors le trinôme **n'a pas de racine réelle** ; autrement dit, l'équation $ax^2+bx+c=0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.
- ✏ Si $\Delta = 0$, alors le trinôme **a une racine double** $x_0 = \alpha = -\frac{b}{2a}$
- ✏ Si $\Delta > 0$, alors le trinôme **a deux racines réelle distinctes** :

$$x_1 = \alpha = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$x_2 = \alpha = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

47 Pour $\Delta = 0$, les formules permettant d'obtenir les racines dans le cas où

$\Delta > 0$ donnent deux fois la même racine ; c'est pourquoi on parle de racine double.

Preuve

On reprend la fin de la preuve précédente :

$$ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c=0 &\Leftrightarrow a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a} = 0 \\ &\Leftrightarrow a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a} \\ &\Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} \end{aligned}$$

Le terme de droite est supérieur ou égal à 0 pour toutes les valeurs de x.

- ✏ Si $\Delta < 0$, le membre de droite est strictement négatif, par conséquent l'équation $ax^2+bx+c=0$ n'a pas de solution.
- ✏ Si $\Delta = 0$, l'équation $ax^2+bx+c=0$ devient :

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x+\frac{b}{2a} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a}$$

- ✏ Si $\Delta > 0$, l'équation $ax^2+bx+c=0$ devient :

$$\begin{aligned} &\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0 \\ \Leftrightarrow &\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2 = 0 \\ \Leftrightarrow &\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0 \text{ en utilisant } a^2-b^2=(a+b)(a-b) \end{aligned}$$

On a désormais une équation produit nul : le produit des deux termes est vaut zéro si et seulement l'un de ces termes est égal à 0. Autrement dit :

$$\begin{aligned} &ax^2+bx+c=0 \\ \Leftrightarrow\ & x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = 0 \text{ ou } x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \\ \Leftrightarrow\ & x = -\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ ou } x = -\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \\ \Leftrightarrow\ & x = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ ou } x = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \end{aligned}$$

On obtient bien les deux solutions attendues.

3 Forme factorisée, signe d'un trinôme

□

Soit un trinôme $ax^2 + bx + c$.

- si le trinôme a deux racines x_1 et x_2 alors $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$
- si le trinôme a une racine double x_0, alors $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$
- si le trinôme n'a pas de racine réelle, une telle factorisation est impossible

Quand elle existe, cette écriture est appelée **forme factorisée** du trinôme

Preuve

On suppose que $\Delta \geq 0$ sinon on a pas de racines réelles et donc pas de factorisation les faisant intervenir à envisager

$$\begin{aligned}
&ax^2 + bx + c\\
=&a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a}\\
=&a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right)\\
=&a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right)\\
=&a\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)
\end{aligned}$$

En mettant au même dénominateur et en fonction de la valeur de Δ, on obtient la décomposition attendue.

Propriétés : signe du trinôme

Soit un trinôme $ax^2 + bx + c$.

- Si le trinôme n'a pas de racine, $ax^2 + bx + c$ ne s'annule pas et est strictement du signe de a pour tout x
- Si le trinôme a une raison, $ax^2 + bx + c$ est du signe de a et s'annule une seule fois en $x_0 = -\frac{b}{2a}$.
- Si le trinôme a deux racines $x_1 < x_2$, $ax^2 + bx + c$ est :
  1. du signe de a sur $]-\infty; x_1[\cup]x_2; +\infty[$.
  2. du signe opposé de a sur $]x_1; x_2[$
  3. nul en x_1 et x_2
- En résumé, $ax^2 + bx + c$ est du signe de a sauf entre les éventuelles racines.

Preuve

1. Commençons par le cas où le trinôme n'a pas de racine. Le trinôme $ax^2 + bx + c$ ne s'annule donc pas, par continuité (il n'y a pas de "saut" de valeurs), il est donc soit positif pour toutes les valeurs de x, soit négatif pour toutes les valeurs de x. Ce trinôme est donc du même signe

que $f(0) = c$. Or :

$$b^2 - 4ac < 0 \Leftrightarrow 0 \leq b^2 < 4ac$$

Cela signifie que a et c sont du même signe : finalement $ax^2 + bx + c$ est donc du signe de a.

2. Traitons le cas où Δ est nul. On sait que :

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$$

or $(x - x_0)^2 \geq 0$ donc $a(x - x_0)^2$ est du signe de a : le trinôme est bien du signe de a et s'annule en $-\frac{b}{2a}$

3. Finissons avec le cas $\Delta > 0$. On sait que :

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

On va faire un tableau de signes pour déterminer le signe de notre trinôme :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
a				signe de a			
$x - x_1$		$-$	0	$+$			
$x - x_2$			$-$		0	$+$	
$(x - x_1)(x - x_2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$ax^2 + bx + c$ $= a(x - x_1)(x - x_2)$		signe de a	0	$-$signe de a	0	signe de a	

4 Somme et produit des racines d'un trinôme

Propriétés : somme et produit des racines d'un trinôme

Soit un trinôme $ax^2 + bx + c$.
Si f admet des réels x_1 et x_2 comme racines :

- ✏ $S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$: la somme des racines vaut $-\frac{b}{a}$.
- ✏ $P = x_1 x_2 = \frac{c}{a}$: le produit des racines vaut $\frac{c}{a}$.

Preuve

Dans le cas où le trinôme a deux racines distinctes :

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= a\,(x-x_1)\,(x-x_2) \\ &= a(x^2-x_1\times x-x_2\times x+x_1\times x_2) \\ &= a(x^2-(x_1\times x+x_2)x+x_1\times x_2) \\ &= ax^2-a(x_1\times x+x_2)x+ax_1\times x_2 \end{aligned}$$

En identifiant les coefficients, on constate :

$$-\,a(x_1\times x+x_2)=b \qquad\qquad +ax_1\times x_2=c$$

ce sont bien les relations attendues.

5 Représentation graphique