Fonction logarithme 6

On considère la fonction suivante définie sur $]-\frac{2}{19};+\infty[$:

$$f(x) = \ln(19x+2) - 3x + 2$$

1. Calculer la limite de f en $-\frac{2}{19}$
2. Calculer la limite de f en $+\infty$
3. Calculer la dérivée de f.
4. Déterminer le signe de $f'(x)$.
5. En déduire le tableau de variation de $f(x)$.
6. En déduire le nombre de solutions de $f(x) = 0$ et un encadrement d'amplitude 10^{-2} de cette solution.

Correction :

1. On sait que :

$$\lim_{x \to -\frac{2}{19}^+} \ln(19x+2) = -\infty$$
$$\lim_{x \to -\frac{2}{19}^+} -3x+2 = \frac{2}{19} \times 3 + 2$$
$$\text{donc} \lim_{x \to -\frac{2}{19}^+} \ln(19x+2) + 3x + 2 = -\infty$$

2.

$$\lim_{x \to +\infty} \ln(19x+2) = +\infty$$
$$\lim_{x \to +\infty} -3x+2 = -\infty$$
$$\text{donc} \lim_{x \to +\infty} \ln(19x+2) - 3x + 2 = -\infty \quad \text{par dominance de } x$$

3.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{19}{19x+2} - 3 \\ &= \frac{19 - 3 - (19x+2)}{19x+2} \\ &= \frac{19 - 57x - 6)}{19x+2} \\ &= \frac{13 - 57x}{19x+2} \\ &= \frac{13 - 57x}{19x+2} \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\Leftrightarrow \frac{13-57x}{19x+2} > 0 \\ &\Leftrightarrow 13 - 57x > 0 \text{ car } 19x+2 > 0 \\ &\Leftrightarrow x < \frac{13}{57} \end{aligned}$$

5. On a :

x	$-\frac{2}{19}$		$\frac{13}{57}$		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$g(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	3.1616161641825	$\searrow$	$-\infty$

6. Comme la fonction$g$ est continue, croissante de $-\infty$ à $3.1616161641825 > 0$, alors, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit qu'il existe une unique solution $\alpha_1 \in]-\frac{2}{19}; \frac{13}{57}[$ tel que $g(\alpha_1) = 0$.
Comme la fonction$g$ est continue, croissante de $3.1616161641825 > 0$ à $-\infty$

, alors, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit qu'il existe une unique solution $\alpha_2 \in]-\frac{2}{19};+\infty[$ tel que $g(\alpha_2) = 0$.

$$\begin{aligned} & f(-0.10526315789474) < 0 \\ & f(-0.095263157894737) > 0 \\ \text{donc } & -0.10526315789474 < \alpha_1 < -0.095263157894737 \\ & f(1.87) > 0 \\ & f(1.88) < 0 \\ \text{donc } & 1.87 < \alpha_2 < 1.88 \end{aligned}$$