Fonction logarithme 6

On considère la fonction suivante définie sur $]-\frac{4}{18};+\infty[$:

$$f(x) = \ln(18x+4) - 3x + 4$$

1. Calculer la limite de f en $-\frac{4}{18}$
2. Calculer la limite de f en $+\infty$
3. Calculer la dérivée de f.
4. Déterminer le signe de $f'(x)$.
5. En déduire le tableau de variation de $f(x)$.
6. En déduire le nombre de solutions de $f(x) = 0$ et un encadrement d'amplitude 10^{-2} de cette solution.

Correction :

1. On sait que :

$$\lim_{x \to -\frac{4}{18}^+} \ln(18x+4) = -\infty$$
$$\lim_{x \to -\frac{4}{18}^+} -3x+4 = \frac{4}{18} \times 3 + 4$$
$$\text{donc } \lim_{x \to -\frac{4}{18}^+} \ln(18x+4) + 3x + 4 = -\infty$$

2.

$$\lim_{x \to +\infty} \ln(18x+4) = +\infty$$
$$\lim_{x \to +\infty} -3x+4 = -\infty$$
$$\text{donc } \lim_{x \to +\infty} \ln(18x+4) - 3x + 4 = -\infty \quad \text{par dominance de } x$$

3.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{18}{18x+4} - 3 \\ &= \frac{18 - 3 - (18x+4)}{18x+4} \\ &= \frac{18 - 54x - 12)}{18x+4} \\ &= \frac{6-54x}{18x+4} \\ &= \frac{6-54x}{18x+4} \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\Leftrightarrow \frac{6-54x}{18x+4} > 0 \\ &\Leftrightarrow 6 - 54x > 0 \text{ car } 18x+4 > 0 \\ &\Leftrightarrow x < \frac{6}{54} \end{aligned}$$

5. On a :

x	$-\frac{4}{18}$		$\frac{6}{54}$		$+\infty$
$g'(x)$	||	$+$	0	$-$	
$g(x)$	|| $-\infty$	↗	5.4584261358947	↘	$-\infty$

6. Comme la fonction$g$ est continue, croissante de $-\infty$ à $5.4584261358947 > 0$, alors, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit qu'il existe une unique solution $\alpha_1 \in]-\frac{4}{18}; \frac{6}{54}[$ tel que $g(\alpha_1) = 0$.
Comme la fonction$g$ est continue, croissante de $5.4584261358947 > 0$ à $-\infty$

, alors, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit qu'il existe une unique solution $\alpha_2 \in]-\frac{4}{18};+\infty[$ tel que $g(\alpha_2)=0$.

$$\begin{aligned}
&f(-0.22222222222222) < 0\\
&f(-0.21222222222222) > 0\\
\text{donc } & -0.22222222222222 < \alpha_1 < -0.21222222222222\\
&f(2.64) > 0\\
&f(2.65) < 0\\
\text{donc } & 2.64 < \alpha_2 < 2.65
\end{aligned}$$