Intégrale : correction du devoir maison

Exercice 1 *Soit la fonction définie sur l'intervalle* $[2;10]$ *par :* $f(x) = (x-10)(2-x)e^x$

1. *Pour tout réel* x *de l'intervalle* $[2;10]$*, on pose* $F(x) = (-x^2+14x-34)e^x$ *Montrer que la fonction* F *est une primitive de la fonction* f *sur l'intervalle* $[2;10]$.
   On doit dériver F et montrer que le résultat est égal à f*. Pour bien constater la future égalité, on va développer les facteurs devant* e^x *dans* f *:*

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-10)(2-x)e^x \\ &= (2x-x^2+20-10x)e^{-x} \\ &= (-x^2-8x+20)e^{-x} \end{aligned}$$

   Ensuite, on calcule la dérivée de F en appliquant la formule de dérivation d'un produit :

$$\begin{aligned} F'(x) &= \left((-x^2+14x-34)e^x\right)' \\ &= (-x^2+14x-34)'e^x + (-x^2+14x-34)\times(e^x)' \\ &= (-2x+14)e^x + (-x^2+14x-34)e^x \\ &= (-2x+14-x^2+14x-34)e^x \\ &= (-x^2-8x+20)e^x \\ &= f(x) \end{aligned}$$

   La dernière ligne montre bien que F est une primitive de f

2. *Calculer l'aire exacte, en unité d'aire, de la surface comprise entre l'axe des abscisses, la courbe (C), les droites d'équations* $x=2$ *et* $x=10$.
   Comme la fonction f *est positive sur* $[2;10]$ *(on le vérifie pas mais un tableau de signe rapide donne le résultat), l'aire cherchée est l'intégrale de* f *entre* 2 *et* 10 *:*

$$\int_2^{10} f(x)dx$$
$$= [F(x)]_2^{10} = F(10)-F(2) = 6e^{10}+10e^2$$

   On s'arrête là car on veut une valeur exacte

Exercice 2 *Calculer les intégrales suivantes :*

$$\int_0^1 3e^{-8x}dx = \left[\frac{3}{-8}e^{-8x}\right]_0^1 = -\frac{3}{8}e^{-8} + \frac{3}{8}e^0 = -\frac{3}{8}e^{-8} + \frac{3}{8} \approx 0.37487420151454 \qquad (1)$$

$$\int_1^5 \frac{1}{x+7}dx = [1\ln(x+7)]_1^5 = 1\ln(12) - 1\ln(8) \approx 0.40546510810816 \qquad (2)$$

Exercice 3 *Soit* $f(x) = x^2+3x+5$ *et* $g(x) = 2x^2-5x-4$ *associées respectivement aux courbes* $\mathscr{C}_f$ *et* $\mathscr{C}_g$.

1. *Montrer que pour* $x \in [-1;9]$, $f(x)-g(x) \geq 0$.
   On simplifie $f-g$ *et ensuite on calcule le discriminant de polynôme :*

   $f(x)-g(x) = x^2+3x+5-(2x^2-5x-4) = x^2+3x+5-2x^2+5x+4 = -x^2+8x+9$

   On en déduit que $\Delta = b^2-4ac = 8^2-4\times(-1)\times 9 = 64+36 = 100$.
   Il y a donc deux solutions réelles distinctes :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8+\sqrt{100}}{-2} = -1 \\ x_2 &= \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8-\sqrt{100}}{-2} = 9 \end{aligned}$$

On peut maintenant construire le tableau de signes, en utilisant le fait que le signe de a est toujours sur les bords extérieurs :

x	$-\infty$		-1		9		$+\infty$
$-x^2+8x+9$		$-$	0	$+$	0	$-$	

2. *Déterminer une primitive de $f(x)-g(x)$.*
Une primitive de $f(x)-g(x)$ est $-\frac{x^3}{3}+4x^2+9x$

3. *En déduire l'aire de la surface comprise entre les deux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ pour* $x\in[-1;9]$.
Comme $f(x)-g(x)$ est positive sur $[-1;9]$, alors l'intégrale entre -1 et 9 de $f-g$ est l'aire recherchée :

$$\int_{-1}^{9}\left(f(x)-g(x)\right)dx=\left[-\frac{x^3}{3}+4x^2+9x\right]_{-1}^{9}=-\frac{9^3}{3}+4\times 9^2+9\times 9-\left(-\frac{(-1)^3}{3}+4\times(-1)^2+9\times(-1)\right)=\frac{500}{3}$$