Correction des exercices sur la fonction exponentielle.

Exemple 5 : Dériver $Ln(exp(x))$

méthode 1 : on utilise la dérivée de Ln

$$(Ln(u(x)))' = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

donc $$(Ln(exp(x)))' = \frac{exp(x)'}{exp(x)}$$

méthode 2 : Je simplifie $Ln(exp(x)) = x$

=> $(Ln(exp(x)))' = (x)' = 1$

Conclusion :

$$\frac{exp(x)'}{exp(x)} = 1$$

=> $\boxed{exp(x)' = exp(x)}$

$$(e^x)' = e^x$$

x	$-\infty$		$+\infty$
$(e^x)'$		$+$	
e^x	0	$\nearrow$	$+\infty$

Exercice 1 :

exemple 1 :

$$e^{3x-7} = 3$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(e^{3x-7}\right) = \ln(3)$$

$$\Leftrightarrow 3x-7 = \ln(3)$$

$$\Leftrightarrow 3x = \ln(3)+7$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\ln(3)+7}{3}$$

⚠ $e^x > 0$

exemple 2 :

$$7^x \geqslant 500$$

$$\ln(7^x) \geqslant \ln(500)$$

$$x \underbrace{\ln(7)}_{>0 \text{ car } 7>1} \geqslant \ln(500)$$

donc $x \geqslant \dfrac{\ln(500)}{\ln(7)}$

- $e^x = 5 \Leftrightarrow \ln(e^x) = \ln(5) \Leftrightarrow x = \ln(5)$
- $e^x = 0$: impossible car $e^x > 0$
- $e^{3x-2} = 5 \Leftrightarrow \ln\left(e^{3x-2}\right) = \ln(5)$

$$\Leftrightarrow 3x-2 = \ln(5)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x = \frac{\ln(5)+2}{3}}$$

- $e^{-5x+2} = 8 \Leftrightarrow \ln\left(e^{-5x+2}\right) = \ln(8)$

$$\Leftrightarrow -5x+2 = \ln(8)$$

$$\Leftrightarrow -5x = \ln(8)-2$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\ln(8)-2}{-5}$$

$e^{5x+2} \geqslant 5$

$\Leftrightarrow \ln\left(e^{5x+2}\right) \geqslant \ln(5)$

$\Leftrightarrow 5x+2 \geqslant \ln(5)$

$\Leftrightarrow 5x \geqslant \ln(5)-2$

$\Leftrightarrow x \geqslant \dfrac{\ln(5)-2}{5}$

$e^{-3x+2} \leqslant 1$

$\Leftrightarrow \ln\left(e^{-3x+2}\right) \leqslant \ln(1)$

$\Leftrightarrow -3x+2 \leqslant 0$

$\Leftrightarrow -3x \leqslant -2$

$\Leftrightarrow x \geqslant \dfrac{-2}{-3} = \dfrac{2}{3}$

$5^{x} \geqslant 5000 \Leftrightarrow \ln\left(5^{x}\right) \geqslant \ln(5000)$

$\Leftrightarrow x\ln(5) \geqslant \ln(5000)$

$\Leftrightarrow x \geqslant \dfrac{\ln(5000)}{\ln(5)}$ car $\ln(5)>0$ car $5>1$

<u>Exercice 2 :</u> 1) $e^{2x}+e^{x}-2 \geqslant 0$

Calcul de Δ, le discriminant

$e^{2x} = e^{x}\times e^{x} = \left(e^{x}\right)^2$

Posons $U = e^{x} \Rightarrow U^2+U-2 \geqslant 0$

$\Delta = b^2-4ac$

$= 1^2-4\times 1\times(-2)$

$= 9 > 0$

J'ai 2 solutions réelles distinctes

$u_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1+\sqrt{9}}{2} = \dfrac{-1+3}{2} = 1$

$u_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1-3}{2} = -2$

<u>Bilan</u> : $U^2+U-2 = (U-1)(U+2)$

donc $e^{2x}+e^{x}-2 = \left(e^{x}-1\right)\left(e^{x}+2\right)$

$e^{x}+2>0$ pour tous les x

$e^{x}-1 \geqslant 0 \Leftrightarrow \ln(e^{x}) \geqslant \ln(1)$

$\Leftrightarrow x \geqslant 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$e^{x}+2$			$+$		
$e^{x}-1$		$-$	0	$+$	
$e^{2x}+e^{x}+2$		$-$	0	$+$	

 1TSELT

Conclusion : $e^{2x}+e^{x}-2\geqslant 0$

$\iff x\geqslant 0$

2) $e^{2x}-3e^{x}+2\leqslant 0$

$\downarrow$

$U^2-3U+2\leqslant 0$

$\Delta=(-3)^2-4\times 1\times 2=1>0$: deux solutions réelles distinctes

$u_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{3+1}{2}=2$

$u_2=\dfrac{3-1}{2}=1$

$\Rightarrow U^2-3U+2=(U-1)(U-2)$

$e^{2x}-3e^{x}+2=(e^{x}-1)(e^{x}-2)$

$e^{x}-1\geqslant 0\iff e^{x}\geqslant 1\iff \ln(e^{x})\geqslant \ln(1)\iff x\geqslant 0$

$e^{x}-2\geqslant 0\iff e^{x}\geqslant 2\iff \ln(e^{x})\geqslant \ln(2)\iff x\geqslant \ln(2)$

x	$-\infty$		0		$\ln(2)$		$+\infty$
$e^{x}-1$		$-$	0	$+$			
$e^{x}-2$				$-$	0	$+$	
$e^{2x}-3e^{x}+2$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$e^{2x}-3e^{x}+2\leqslant 0\iff x\in[0;\ln(2)]$

Exercice 3 :

population = $f(t)$

population de départ = pour $t=0$ $= 12\times e^{0{,}05\times 0} = 12\times e^0 = 12$

tripler <=> $\boxed{36}$ ici

Finalement, on cherche t tel que :

$$f(t) \geqslant 36 \iff 12e^{0{,}05t} \geqslant 36$$
$$\iff e^{0{,}05t} \geqslant \frac{36}{12} = 3$$
$$\iff \ln\left(e^{0{,}05t}\right) \geqslant \ln(3)$$
$$\iff 0{,}05t \geqslant \ln(3) \iff t \geqslant \frac{\ln(3)}{0{,}05} \approx 21{,}97$$

il faut attendre 22ans pour voir la population tripler

2) On cherche t tel que :

$$f(t) \leqslant 20$$
$$\iff 12e^{0{,}05t} \leqslant 20$$
$$\iff e^{0{,}05t} \leqslant \frac{20}{12} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$
$$\iff \ln\left(e^{0{,}05t}\right) \leqslant \ln\left(\frac{5}{3}\right)$$
$$\iff 0{,}05t \leqslant \ln\left(\frac{5}{3}\right)$$
$$\iff t \leqslant \frac{\ln(5/3)}{0{,}05} \approx 10{,}21$$

La nourriture sera suffisante 10 ans après 2000

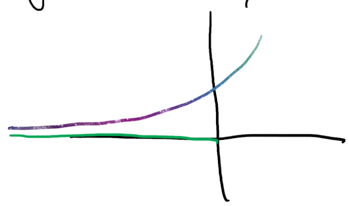
(si je prends 11ans, comme $11 > 10{,}21$, $f(11) > 20$: pas possible de nourrir la population)

Exercice 4 :

1) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \dfrac{0}{0+1} = 0$

Il y a une asymptote d'équation $y = 0$ en $-\infty$

$-\infty$



2) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \dfrac{+\infty}{+\infty + 1}$: FI

en haut et en bas, il y a le même terme dominant $\Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$

$\Rightarrow \underset{x \to +\infty}{f(x)} \sim \dfrac{e^x}{e^x} = 1$ et asymptote d'équation $y = 1$ en $+\infty$

3) $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x+1}$ on a une fraction $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$

$(e^x)' = e^x$

$(e^{2x})' = 2e^{2x}$

$(e^{-3x+1})' = -3e^{-3x+1}$

$$f'(x) = \frac{(e^x)' \times (e^x+1) - e^x \times (e^x+1)'}{(e^x+1)^2}$$

$$= \frac{e^x(e^x+1) - e^x \times e^x}{(e^x+1)^2}$$

$$= \frac{e^x \times e^x + e^x - e^x \times e^x}{(e^x+1)^2}$$

$$= \frac{e^x}{(e^x+1)^2} > 0$$

4)

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		+	
f	0	$\nearrow$	1

Exercice 5 :

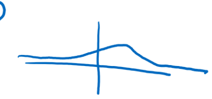
$$f(x) = \frac{e^{x}}{e^{2x}+1}$$

1) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \frac{0}{0+1} = \frac{0}{1} = 0$

il y a une asymptote d'équation $y=0$ en $-\infty$

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \frac{+\infty}{+\infty+1}$: F I or $e^{x} << e^{2x} = (e^{x})^2$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$



il y a une asymptote d'équation $y=0$ en $+\infty$

3) $f(x) = \frac{e^{x}}{e^{2x}+1}$

$$f'(x) = \frac{(e^{x})' \times (e^{2x}+1) - e^{x} \times (e^{2x}+1)'}{(e^{2x}+1)^2}$$

$$= \frac{e^{x} \times (e^{2x}+1) - e^{x} \times 2e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$$

$$= \frac{e^{x}\left[e^{2x}+1-2e^{2x}\right]}{(e^{2x}+1)^2}$$

$$= \frac{e^{x}(1-e^{2x})}{(e^{2x}+1)}$$

$1 - e^{2x} \geq 0$

$\Leftrightarrow -e^{2x} \geq -1$

$\Leftrightarrow e^{+2x} \leq \frac{-1}{-1} = 1$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$f(1)$	$\searrow$	0

$f(1) = \frac{e^{1}}{e^{2}+1}$

Calculer les dérivées suivantes :

1) $e^{3x} \xrightarrow{\ '\ } 3e^{3x}$

2) $e^{-2x} \xrightarrow{\ '\ } -2e^{-2x}$

3) $e^{-2x+5} \xrightarrow{\ '\ } -2e^{-2x+5}$

4) $xe^{x} \xrightarrow{\ '\ } x' \times e^{x} + x \times (e^{x})' = 1 \times e^{x} + x \times e^{x}$

5) $x e^{2x} \xrightarrow{\ '\ } x' \times e^{2x} + x \times (e^{2x})' = 1 \times e^{2x} + x \times 2e^{2x}$

6) $\frac{e^{-x}}{x} \xrightarrow{\ '\ } \frac{(e^{-x})' \times x - e^{-x} \times x'}{x^2} = \frac{-e^{-x} \times x - e^{-x}}{x^2}$