# Résumé sur les lois de probabilités

## Loi uniforme

Cette loi intervient dans ces situations de choix aléatoires ou quand le terme "au hasard dans un intervalle ou entre deux valeurs" intervient. Par exemple pour $X$ qui suit la loi uniforme sur $[a;b]$ :

$$\begin{aligned}
&P(X \leq y) = \frac{y-a}{b-a} = \int_a^y \frac{1}{b-a}\,dt \\
&P(X \geq x) = \frac{b-x}{b-a} = \int_x^b \frac{1}{b-a}\,dt \\
&P(x \leq X \leq y) = \frac{y-x}{b-a} = \int_x^y \frac{1}{b-a}\,dt \\
&P(X = x) = 0
\end{aligned}$$

avec $x, y \in [a;b]$.
L'espérance de cette loi est $\frac{a+b}{2}$.
La fonction de densité de cette loi est $f(t) = \frac{1}{b-a}$.
La variable $X$ ne pourra prendre ses valeurs qu'entre $a$ et $b$ et la probabilité qu'elle prenne ses valeurs ailleurs sera nulle.
On écrira $X \sim \mathscr{U}([a,b])$.

## Loi exponentielle

Cette loi intervient lors de vieillissements sans mémoire : l'écoulement du temps n'a pas d'influence sur le comportement de la variable.
Par exemple, pour $X$ qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda$ :

$$\begin{aligned}
&P(X \leq t) = 1 - e^{-\lambda \times t} = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx \\
&P(X \geq t) = e^{-\lambda \times t} \\
&P(X = t) = 0
\end{aligned}$$

avec $t \geq 0$.
L'espérance de cette loi est $\frac{1}{\lambda}$. La fonction de densité de cette loi est $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$. La variable $X$ ne pourra prendre que des valeurs positives.

## Loi binomiale : phrase à connaître

La loi binomiale est une loi discrète, contrairement aux trois autres lois étudiées qui sont continues, elle ne peut prendre que des valeurs entières entre 0 et $n$, une valeur entière donnée par l'énoncé.
Pour justifier qu'une variable $X$ suit une loi binomiale, on écrira la phrase suivante :
"La variable $X$ compte le nombre de répétitions d'une succession de $n$ épreuves de Bernouilli( car deux issues ), indépendantes ( car tirage avec remise ) et de même probabilité $p$".
Les valeurs $n$ et $p$ seront donnés dans l'énoncé.
On écrira $X \sim \mathscr{B}(n,p)$.

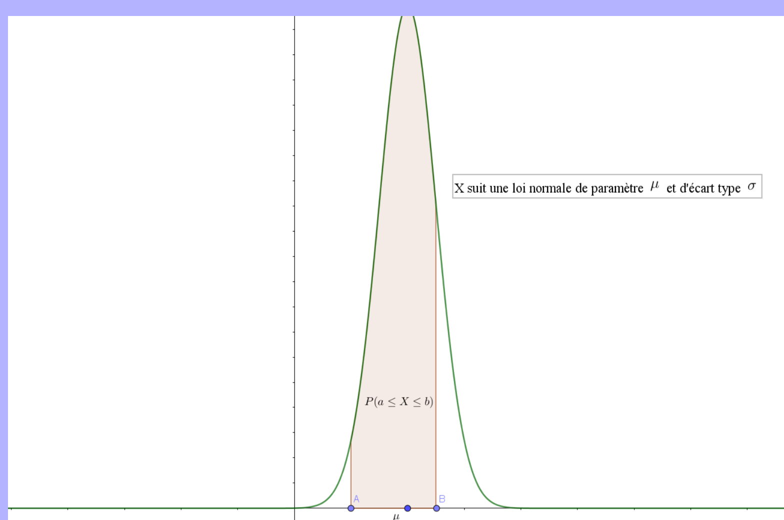
## Calculatrice

Les calculs se feront systématiquement à la calculatrice :

1. $P(X = k)$.
   Sur la TI, on fera $\boxed{2nd}$ $\boxed{Var}$ puis le menu des distributions, on prendra BinomFpd ou la sinon la première concernant la loi binomiale dans le menu.
   Le nombre d'essai ou trials sera $n$, la probabilité $p$ et la valeur de $X$ sera k.
   Sur la casio, on ira dans le menu STAT puis dans DIST et enfin dans BINOM. Dans ce menu, on prendra la première fonction en partant de la gauche puis BinomialPD$(n, p, k)$
2. $P(X \leq k)$.
   Sur la TI, on fera $\boxed{2nd}$ $\boxed{Var}$ puis le menu des distributions, on prendra BinomFrep ou la sinon la deuxième concernant la loi binomiale dans le menu.
   Le nombre d'essai ou trials sera $n$, la probabilité $p$ et la valeur de $X$ sera k.
   Sur la casio, on ira dans le menu STAT puis dans DIST et enfin dans BINOM. Dans ce menu, on prendra la deuxième fonction en partant de la gauche puis BinomialCD$(n, p, k)$.
3. $P(X \geq k) = 1 - P(X \leq k - 1)$ sauf pour $P(X \geq 0)$ qui vaut toujours 1.
4. $P(i \leq X \leq j) = P(X \leq j) - P(X \leq i - 1)$.

## Loi normale, espérance et écart-type

La loi normale correspond à une probabilité qui est est définie comme l'aire sous une courbe entre deux valeurs sur l'axe des abscisses :




Sur le dessin, l'aire en couleur correspond à la probabilité que $X$ soit compris entre $a$ et $b$.
La valeur $\mu$ est l'espérance de la loi normale, $x = \mu$ est un axe de symétrie pour la courbe.
La valeur $\sigma$ est l'écart-type de la loi normale, elle représente la dispersion de la loi autour de son espérance : plus $\sigma$ est petit, plus la courbe est resserrée autour de $x = \mu$.

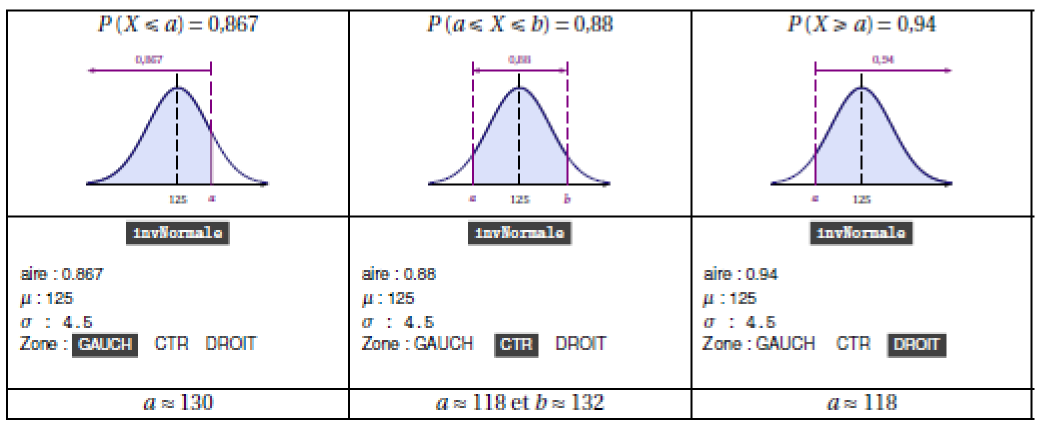
## Probabilité à connaître

$$P(\mu-2\sigma \leq X \leq \mu+2\sigma) \approx 0.95$$

## Calculatrice TI

✏ TI :

1. $P(X \leq t)$ se calcule avec normalFDR ( après avoir fait $\boxed{2nde}$ $\boxed{var}$ ), upper=t et lower=$-10^9$.
2. $P(X \geq t)$ se calcule avec normalFDR, upper=$10^9$ et upper=t.
3. $P(u \leq X \leq t)$ se calcule avec normalFDR, lower=u et upper=t.
4. $P(\mu-h \leq Y \leq \mu+h) = 0.95 \Leftrightarrow 2P(Y \leq \mu+h) - 1 = 0.95 \Leftrightarrow P(Y \leq \mu+h) = \frac{1.95}{2}$, on trouve la valeur de $\mu+h$ en utilisant $FracNormale$ : aire ou area, c'est $\frac{1.95}{2}$ et gauche si on le demande.
   Si les fonctions suivantes sont disponibles, on peut aussi faire :




## Calculatrice CASIO

✏ dans le menu calculs, on appuie sur $\boxed{OPTN}$

✏ on appuie sur $\boxed{F5}$ pour aller dans STAT

✏ on appuie sur $\boxed{F3}$ pour aller dans DIST

✏ on appuie sur $\boxed{F1}$ pour aller dans NORM

✏ on appuie sur $\boxed{F2}$ pour aller dans Ncd :

1. $P(X \leq t)$ se calcule avec NormCD$(-10^9, t, \sigma, \mu)$
2. $P(X \geq t)$ se calcule avec NormCD$(t, 10^9, \sigma, \mu)$
3. $P(u \leq X \leq t)$ se calcule avec NormCD$(u, t, \sigma, \mu)$
4. $P(\mu-h \leq Y \leq \mu+h) = 0.95 \Leftrightarrow 2P(Y \leq \mu+h) - 1 = 0.95 \Leftrightarrow P(Y \leq \mu+h) = \frac{1.95}{2}$, on trouve la valeur de $\mu+h$ en utilisant
   $InvNormCD(0.975, \sigma, \mu)$

## Approximation de la loi binomiale par la loi normale

Une loi binomiale $\mathscr{B}(n;p)$ peut être approchée par une loi normale de moyenne $n \times p$ et d'écart-type $\sqrt{n \times p \times (1-p)}$.