Récurrences 2

On considère la suite :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 0.9u_n + 0.9 \\ u_0 = 12 \end{cases}$$

1. Montrer par récurrence que :

$$9 \leq u_{n+1} \leq u_n$$

2. En déduire que la suite converge et en déduire sa limite.

1. Initialisation :

On a :

$$u_1 = 0.9u_0 + 0.9 = 11.7$$
$$\text{donc } 9 \leq u_1 \leq 12 = u_0$$

L'initialisation est établie.

Hérédité :
On suppose que la propriété est vraie pour un certain rang $n \geq 0$:

$$9 \leq u_{n+1} \leq u_n \quad \text{c'est l'hypothèse de récurrence}$$

On part de cette hypothèse :

$$\begin{aligned}
& 9 \leq u_{n+1} \leq u_n \\
\Rightarrow & 0.9 \times 9 \leq 0.9 \times u_{n+1} \leq 0.9 \times u_n \\
\Rightarrow & 8.1 \leq 0.9 \times u_{n+1} \leq 0.9 \times u_n \\
\Rightarrow & 8.1 + 0.9 \leq 0.9 \times u_{n+1} + 0.9 \leq 0.9 \times u_n + 0.9 \\
\Rightarrow & 9.0 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}
\end{aligned}$$

L'hérédité est établie.

2. On vient de montrer que la suite est décroissante et minorée, par conséquent, d'après le théorème de convergence monotone, la suite converge vers l un nombre réel qui vérifie :

$$\begin{aligned}
& l = 0.9 \times l + 0.9 \\
\Leftrightarrow & l - 0.9 \times l = 0.9 \\
\Leftrightarrow & l \times 0.1 = 0.9 \\
\Leftrightarrow & l = \frac{0.9}{0.1} = 9
\end{aligned}$$