Equations différentielles du second ordre exercices : corrigé

Exercice

On considère l'équation différentielle $(E) : y'' - 3y' + 2y = -2e^x + 6$.

1. *Résoudre dans* $\mathbb{R}$, *l'équation :* $r^2 - 3r + 2 = 0$.
2. *En déduire les solutions sur* $\mathbb{R}$ *de l'équation différentielle* $(E_0) : y'' - 3y' + 2y = 0$.
3. *Soit* g *la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $g(x) = 2xe^x + 3$.*Démontrer que la fonction* g *est une solution particulière de l'équation différentielle* (E).
4. *En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle* (E).
5. *Déterminer la solution* f *de l'équation différentielle* (E) *qui vérifie les conditions initiales* $f(0) = 2$ *et* $f'(0) = 1$.

- Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation : $r^2 - 3r + 2 = 0$.

- Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation : $r^2 - 3r + 2 = 0$.
  $\rightarrow$ On commence par calculer le discriminant Δ :
  $\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 1 > 0$.
  Comme $\Delta > 0$, il y a deux solutions réelles distinctes :

$$r_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3-1}{2} = 1$$
$$r_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3+1}{2} = 2$$

- Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation : $r^2 - 3r + 2 = 0$.
  $\rightarrow$ On commence par calculer le discriminant Δ :
  $\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 1 > 0$.
  Comme $\Delta > 0$, il y a deux solutions réelles distinctes :

$$r_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3-1}{2} = 1$$
$$r_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3+1}{2} = 2$$

- En déduire les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E_0) : $y'' - 3y' + 2y = 0$.

- Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation : $r^2 - 3r + 2 = 0$.
  $\rightarrow$ On commence par calculer le discriminant Δ :
  $\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 1 > 0$.
  Comme $\Delta > 0$, il y a deux solutions réelles distinctes :

$$r_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3-1}{2} = 1$$
$$r_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3+1}{2} = 2$$

- En déduire les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E_0) : $y'' - 3y' + 2y = 0$.
  $\rightarrow$ On en déduit que les solutions de (E_0) sont de la forme :

$$f_0(x) = Ae^{2x} + Be^{x} \text{ avec } A, B \in \mathbb{R}$$

- Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2xe^x + 3$.Démontrer que la fonction g est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

- Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2xe^x + 3$.Démontrer que la fonction g est une solution particulière de l'équation différentielle (E).
  $\rightarrow$ On doit montrer que $g''(x) - 3g'(x) + 2g(x) = -2e^x + 6$.
  On a :

  $$g'(x) = (2xe^x + 3)' = 2(xe^x)' = 2(x' \times e^x + x \times (e^x)') = 2(e^x + xe^x) = 2e^x + 2xe^x$$
  $$g''(x) = (2e^x + 2xe^x)' = (2e^x)' + (2xe^x)' = 2e^x + (2e^x + 2xe^x) = 2xe^x + 4e^x$$
  donc $g''(x) - 3g'(x) + 2g(x)$
  $=4e^x + 2xe^x - 3(2e^x + 2xe^x) + 2(2xe^x + 3)$
  $=4e^x + 2xe^x - 6e^x - 6xe^x + 4xe^x + 6$
  $= -2e^x + 6$

  Donc g est bien une solution de (E).

- En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

- En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
  $\rightarrow$ Les solutions de (E) sont de la forme :

$$f(x) = f_0 + g(x) = Ae^{2x} + Be^{x} + 2xe^{x} + 3 \text{ avec } A, B \in \mathbb{R}$$

- En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
  $\rightarrow$ Les solutions de (E) sont de la forme :

$$f(x) = f_0 + g(x) = Ae^{2x} + Be^{x} + 2xe^{x} + 3 \text{ avec } A, B \in \mathbb{R}$$

- Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie les conditions initiales $f(0) = 2$ et $f'(0) = 1$.

- En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
  $\rightarrow$ Les solutions de (E) sont de la forme :

$$f(x) = f_0 + g(x) = Ae^{2x} + Be^{x} + 2xe^{x} + 3 \text{ avec } A, B \in \mathbb{R}$$

- Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie les conditions initiales $f(0) = 2$ et $f'(0) = 1$.
  $\rightarrow$ On calcule $f'(x)$: $f'(x) = 2Ae^{2x} + Be^{x} + g'(x) = 2Ae^{2x} + Be^{x} + 2e^{x} + 2xe^{x}$.
  On a : $\begin{cases} f(0) = 2 \\ f'(0) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Ae^{2\times 0} + Be^{0} + 2 \times 0 \times e^{0} + 3 = 2 \\ 2Ae^{2\times 0} + Be^{0} + 2e^{0} + 2 \times 0e^{0} = 1 \end{cases}$
  $\Leftrightarrow \begin{cases} A + B + 3 = 2 \\ 2A + B + 2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + B = -1 \\ 2A + B = -1 \end{cases}$
  $\Leftrightarrow \begin{cases} A + B = -1 \\ 2A + B - A - B = -1 - (-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = -1 \\ A = 0 \end{cases}$
  Donc la solution f cherchée est $f(x) = -e^{x} + 2xe^{x} + 3$.

Exercice

On considère l'équation différentielle : $(E) y'' - y' - 2y = (-6x - 4)e^{-x}$

1. *Résoudre sur* $\mathbb{R}$ *l'équation différentielle* :$(E_0) y'' - y' - 2y = 0$.
2. *Soit* h *la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par :* $h(x) = (x^2 + 2x)e^{-x}$.*Démontrer que* h *est une solution particulière de l'équation différentielle* (E).
3. *En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle* (E).
4. *Déterminer la solution* f *de l'équation différentielle* (E) *qui vérifie les conditions initiales :* $f(0) = 1$ *et* $f'(0) = 1$.

- Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle :$(E_0) y" - y' - 2y = 0$.

- Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle :$(E_0) y'' - y' - 2y = 0$.
  $\rightarrow$ On commence par résoudre l'équation caractéristique correspondante : $r^2 - r - 2 = 0$.
  On a $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 9 > 0$, il y a donc deux solutions réelles distinctes à l'équation caractéristique :

$$r_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1-3}{2} = -1$$
$$r_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1+3}{2} = 2$$

  On en déduit la forme des solutions de l'équation (E) :

$$f_0 = Ae^{-x} + Be^{2x} \text{ avec } A, B \in \mathbb{R}$$

- Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = (x^2 + 2x)e^{-x}$.Démontrer que h est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

- Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = (x^2 + 2x)e^{-x}$.Démontrer que h est une solution particulière de l'équation différentielle (E).
  $\rightarrow$ On doit vérifier que $h''(x) - h'(x) - 2h(x) = (-6x - 4)e^{-x}$. On a :

$h'(x) = ((x^2 + 2x)e^{-x})' = (x^2 + 2x)'e^{-x} + (x^2 + 2x)(e^{-x})'$

$= (2x + 2)e^{-x} - (x^2 + 2x)e^{-x} = (2 - x^2)e^{-x}$

$h''(x) = ((2 - x^2)e^{-x})' = (2 - x^2)'e^{-x} + (2 - x^2) \times (e^{-x})' = -2xe^{-x} - (2 - x^2)e^{-x}$

$= (x^2 - 2x - 2)e^{-x}$

donc $h''(x) - h'(x) - 2h(x)$

$= (x^2 - 2x - 2)e^{-x} - (2 - x^2)e^{-x} - 2(x^2 + 2x)e^{-x}$

$= (x^2 - 2x - 2 - (2 - x^2) - 2(x^2 + 2x))e^{-x}$

$= (x^2 - 2x - 2 - 2 + x^2 - 2x^2 - 4x)e^{-x}$

$= (-6x - 4)e^{-x}$

donc h est bien solution de (E).

- En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

- En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
  $\rightarrow$ Les solutions de (E) sont de la forme :

$$f(x) = f_0(x) + h(x) = Ae^{-x} + Be^{2x} + (x^2 + 2x)e^{-x} \text{ avec } A, B \in \mathbb{R}$$

- En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
  $\rightarrow$ Les solutions de (E) sont de la forme :

$$f(x) = f_0(x) + h(x) = Ae^{-x} + Be^{2x} + (x^2 + 2x)e^{-x} \text{ avec } A, B \in \mathbb{R}$$

- Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie les conditions initiales : $f(0) = 1$ et $f'(0) = 1$.

- En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
  $\rightarrow$ Les solutions de (E) sont de la forme :

$$f(x) = f_0(x) + h(x) = Ae^{-x} + Be^{2x} + (x^2 + 2x)e^{-x} \text{ avec } A, B \in \mathbb{R}$$

- Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie les conditions initiales : $f(0) = 1$ et $f'(0) = 1$.
  $\rightarrow$ On commence par calculer $f'(x)$: $f'(x) = -Ae^{-x} + 2Be^{2x} + (2 - x^2)e^{-x}$.
  On a : $\begin{cases} f(0) = 1 \\ f'(0) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Ae^{-\times 0} + Be^{2\times 0} + (0^2 + 2\times 0)e^{-0} = 1 \\ -Ae^{-0} + 2Ae^{2\times 0} + (2 - 0^2)e^{-0} = 1 \end{cases}$
  $\Leftrightarrow \begin{cases} A + B = 1 \\ -A + 2B + 2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + B = 1 \\ -A + 2B = -1 \end{cases}$
  $\Leftrightarrow \begin{cases} A + B = 1 \\ -A + 2B + A + B = 1 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 0 \end{cases}$
  Donc la solution f cherchée est $f(x) = e^{-x} + (x^2 + 2x)e^{-x}$.

Exercice

On considère l'équation différentielle $(E) : y'' - 2y' + y = \frac{x^2}{2} - x - 1.$

1. *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *l'équation différentielle* $(E_0) : y'' - 2y' + y = 0$
2. *Déterminer les constantes réelles* a, b, c *pour que la fonction* g *définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $g(x) = ax^2 + bx + c$ *soit une solution particulière de l'équation* (E).
3. *Déduire du* **1.** *et du* **2.** *l'ensemble des solutions de l'équation différentielle* (E).
4. *Déterminer la solution* f *de l'équation* (E) *qui vérifie les conditions initiales* $f(0) = 0$ *et* $f(1) = e + \frac{3}{2}$.

- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E_0) : $y'' - 2y' + y = 0$.

- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E_0) : $y'' - 2y' + y = 0$.
  $\rightarrow$ On commence par résoudre l'équation caractéristique correspondante : $r^2 - 2r + 1 = 0$.
  Le discriminant de cette équation est $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 0$, il y a donc une solution double $r_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{2}{2} = 1$.
  On en déduit la forme des solutions de l'équation (E_0) :

$$f_0(x) = (Ax + B)e^x \text{ avec } A, B \in \mathbb{R}$$

Exercice 3 : correction

- Déterminer les constantes réelles a, b, c pour que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = ax^2 + bx + c$ soit une solution particulière de l'équation (E).

- Déterminer les constantes réelles a, b, c pour que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = ax^2 + bx + c$ soit une solution particulière de l'équation (E).
  $\rightarrow$ Ici on sait que g est solution de (E) et il faut trouver à quelles conditions cela est vrai.
  On a :

$$
\begin{aligned}
& g'(x) = 2ax + b \\
& g''(x) = 2a \\
& \text{donc } g''(x) - 2g'(x) + g(x) = \frac{x^2}{2} - x - 1 \\
& \Leftrightarrow 2a - 2(2ax + b) + ax^2 + bx + c = \frac{x^2}{2} - x - 1 \\
& \Leftrightarrow ax^2 + (-4a + b)x + 2a - 2b + c = \frac{x^2}{2} - x - 1 \\
& \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}, \quad -4a + b = -1, \quad 2a - 2b + c = -1 \\
& \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}, \; b = 1, \; c = 0
\end{aligned}
$$

Donc $g(x) = \frac{1}{2}x^2 + x$.

Exercice 3 : correction

- Déduire du **1.** et du **2.** l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

- Déduire du **1.** et du **2.** l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
  $\rightarrow$ Les solutions de l'équation (E) sont donc de la forme :

$$f(x) = f_0(x) + g(x) = (Ax + B)e^x + \frac{1}{2}x^2 + x \text{ avec } A, B \in \mathbb{R}$$

- Déduire du **1.** et du **2.** l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
  $\rightarrow$ Les solutions de l'équation (E) sont donc de la forme :

$$f(x) = f_0(x) + g(x) = (Ax + B)e^x + \frac{1}{2}x^2 + x \text{ avec } A, B \in \mathbb{R}$$

- Déterminer la solution f de l'équation (E) qui vérifie les conditions initiales $f(0) = 0$ et $f(1) = e + \frac{3}{2}$.

- Déduire du **1.** et du **2.** l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
  $\rightarrow$ Les solutions de l'équation (E) sont donc de la forme :

$$f(x) = f_0(x) + g(x) = (Ax + B)e^x + \frac{1}{2}x^2 + x \text{ avec } A, B \in \mathbb{R}$$

- Déterminer la solution f de l'équation (E) qui vérifie les conditions initiales $f(0) = 0$ et $f(1) = e + \frac{3}{2}$.
  $\rightarrow$ On a : $\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(1) = e + \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (A \times 0 + B)e^0 + \frac{1}{2} \times 0^2 + 0 = 0 \\ (A \times 1 + B)e^1 + \frac{1}{2} \times 1^2 + 1 = e + \frac{3}{2} \end{cases}$
  $\Leftrightarrow \begin{cases} B = 0 \\ (A + B)e + \frac{3}{2} = e + \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 0 \\ A = 1 \end{cases}$
  Donc la solution f cherchée est $f(x) = xe^x + \frac{1}{2}x^2 + x$.

Exercice 4

Exercice

L'étude d'un système mécanique conduit à considérer lŠéquation différentielle $(E) : y" + 4y' + 104y = -10,1e^{-t}$ *où* y *est une fonction de la variable réelle* t *, définie et deux fois dérivable sur* $[0; +1[$.

1.
   1. *Montrer que les solutions complexes de lŠéquation* $r^2 + 4r + 104 = 0$ *sont* $r_1 = -2 + 10i$ *et* $r_2 = -2 - 10i$.
   2. *En déduire lŠensemble des solutions de lŠéquation différentielle* $(E_0) : y" + 4y' + 104y = 0$.
2. *Montrer que la fonction* h*, définie sur* $[0; +1[$ *par* $h(t) = -0,1e^{-t}$*, est une solution de lŠéquation différentielle* (E).
3. *En déduire lŠensemble des solutions de lŠéquation différentielle* (E).
4. *Montrer que la solution* f *de lŠéquation différentielle* (E) *définie sur* $[0; +1[$ *par :* $f(t) = -0,1[e^{-t} - cos(10t)e^{-2t}]$ *vérifie les conditions initiales* $f(0) = 0$ *et* $f'(0) = -0,1$.

- Montrer que les solutions complexes de l'équation $r^2 + 4r + 104 = 0$ sont $r_1 = -2 + 10i$ et $r_2 = -2 - 10i$.

- Montrer que les solutions complexes de l'équation $r^2 + 4r + 104 = 0$ sont $r_1 = -2 + 10i$ et $r_2 = -2 - 10i$.
  $\rightarrow$ On va montrer que $r_1^2 + 4r_1 + 104 = 0$ ainsi que $r_2^2 + 4r_2 + 104 = 0$. Montrons le pour r_1, ce sera la même chose pour r_2 :

$$
\begin{aligned}
& r_1^2 + 4r_1 + 104 \\
=& (-2 + 10i)^2 + 4(-2 + 10i) + 104 \\
=& (-2)^2 + 2 \times (-2) \times 10i + (10i)^2 - 8 + 40i + 104 \\
=& 4 - 40i + 100i^2 - 8 + 40i + 104 \\
=& 4 - 40i \boxed{-} 100 - 8 - 40i + 104 \\
= & 0
\end{aligned}
$$

  Donc r_1 est bien une solution de l'équation caractéristique associée à (E_0).
- En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E_0) : $y'' + 4y' + 104y = 0$.

- Montrer que les solutions complexes de l'équation $r^2 + 4r + 104 = 0$ sont $r_1 = -2 + 10i$ et $r_2 = -2 - 10i$.
  $\rightarrow$ On va montrer que $r_1^2 + 4r_1 + 104 = 0$ ainsi que $r_2^2 + 4r_2 + 104 = 0$. Montrons le pour r_1, ce sera la même chose pour r_2 :

$$\begin{aligned}
& r_1^2 + 4r_1 + 104 \\
=& (-2+10i)^2 + 4(-2+10i) + 104 \\
=& (-2)^2 + 2 \times (-2) \times 10i + (10i)^2 - 8 + 40i + 104 \\
=& 4 - 40i + 100i^2 - 8 + 40i + 104 \\
=& 4 - 40i \boxed{-} 100 - 8 - 40i + 104 \\
=& 0
\end{aligned}$$

  Donc r_1 est bien une solution de l'équation caractéristique associée à (E_0).
- En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E_0) : $y'' + 4y' + 104y = 0$.
  $\rightarrow$ Les solutions de (E_0) sont de la forme :

$$f_0(x) = e^{-2x}(A\cos(10x) + B\sin(10x)) \text{ avec } A, B \in \mathbb{R}$$

  Le -2 vient de la partie réelle de r_1 et 10 vient de la partie imaginaire de r_1.

- Montrer que la fonction h, définie sur $[0; +1[$ par $h(t) = -0,1e^{-t}$, est une solution de lŠéquation différentielle (E).

- Montrer que la fonction h, définie sur $[0; +1[$ par $h(t) = -0,1e^{-t}$, est une solution de lŠéquation différentielle (E).
  $\rightarrow$ On va montrer que $h''(t) + 4h'(t) + 104h(t) = -10,1e^{-t}$.
  On a :

$$h'(t) = 0.1e^{-t}$$
$$h''(t) = -0.1e^{-t}$$
$$\text{donc } h''(t) + 4h'(t) + 104h(t)$$
$$= -0.1e^{-t} + 4 \times 0.1e^{-t} + 104 \times (-0.1e^{-t})$$
$$= -0.1e^{-t} + 0.4e^{-t} - 10.4e^{-t}$$
$$= -10.1e^{-t}$$

Donc h est bien une solution de (E).

- En déduire lŠensemble des solutions de lŠéquation différentielle (E).

- En déduire lŠensemble des solutions de lŠéquation différentielle (E).
  $\rightarrow$ Les solutions de (E) sont de la forme :

$$f(t) = f_0(t) + h(t) = e^{-2t}(A\cos(10t) + B\sin(10t)) - 0.1e^{-t} \text{ avec } A, B \in \mathbb{R}$$

- En déduire lŠensemble des solutions de lŠéquation différentielle (E).
  $\rightarrow$ Les solutions de (E) sont de la forme :

  $$f(t) = f_0(t) + h(t) = e^{-2t}(A\cos(10t) + B\sin(10t)) - 0.1e^{-t} \text{ avec } A, B \in \mathbb{R}$$

- Montrer que la solution f de lŠéquation différentielle (E) définie sur $[0; +1[$ par : $f(t) = -0,1[e^{-t} - cos(10t)e^{-2t}]$ vérifie les conditions initiales $f(0) = 0$ et $f'(0) = -0,1$.

Exercice 4 : correction

- En déduire lŠensemble des solutions de lŠéquation différentielle (E).
  $\rightarrow$ Les solutions de (E) sont de la forme :

  $$f(t) = f_0(t) + h(t) = e^{-2t}(A\cos(10t) + B\sin(10t)) - 0.1e^{-t} \text{ avec } A, B \in \mathbb{R}$$

- Montrer que la solution f de lŠéquation différentielle (E) définie sur $[0; +1[$ par : $f(t) = -0,1[e^{-t} - cos(10t)e^{-2t}]$ vérifie les conditions initiales $f(0) = 0$ et $f'(0) = -0,1$.
  $\rightarrow$ La fonction f est bien de la forme précédemment citée en prenant $A = 0.1$ et $B = 0$.
  Ensuite on a $f(0) = -0,1[e^{-0} - cos(10 \times 0)e^{-2\times 0}] = -0,1[1-1] = 0$.
  De plus, on a $f'(t) = 0.1e^{-t} - \sin(10t)e^{-2t} - 0.2\cos(10t)e^{-2t}$ donc $f'(0) = 0.1e^{-0} - \sin(10\times 0)e^{-2\times 0} - 0.2\cos(10\times 0)e^{-2\times 0} = 0.1 - 0 - 0.2 = -0.1$.
  Finalement f est bien la solution vérifiant les conditions données.

Exercice

On considère l'équation différentielle $(E) : y" + 2y' + 5y = 4\cos(x) - 2\sin(x)$.

1. *Résoudre* $(E_0) : y" + 2y' + 5y = 0$.
2. *Montrer que* $g(x) = \cos(x)$ *est une solution particulière de* (E).
3. *En déduire l'ensemble des solutions de* (E).

Exercice 5

- Résoudre (E_0) : $y'' + 2y' + 5y = 0$.

- Résoudre (E_0) : $y'' + 2y' + 5y = 0$.
  $\rightarrow$ On commence par résoudre l'équation caractéristique associée $r^2 + 2r + 5 = 0$.
  On a $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times 5 = -16 < 0$, il y a donc deux solutions complexes conjuguées :

  $$r_1 = \frac{-b - \sqrt{|\Delta|}i}{2a} = \frac{-2-4i}{2} = -1-2i \quad r_2 = \frac{-b + \sqrt{|\Delta|}i}{2a} = \frac{-2+4i}{2} = -1+2i$$

  On en déduit la forme des solutions de (E_0) :

  $$f_0(x) = e^{-x}(A\cos(2x) + B\sin(2x)) \text{ avec } A, B \in \mathbb{R}$$

- Montrer que $g(x) = \cos(x)$ est une solution particulière de (E).

- Montrer que $g(x) = \cos(x)$ est une solution particulière de (E).
  $\rightarrow$ On va montrer que $g''(x) + 2g'(x) + 5g(x) = 4\cos(x) - 2\sin(x)$.
  On a :

$$\begin{aligned}
&g'(x) = -\sin(x)\\
&g''(x) = -\cos(x)\\
&\text{donc } g''(x) + 2g'(x) + 5g(x)\\
&= -\cos(x) + 2(-\sin(x)) + 5\cos(x)\\
&= 4\cos(x) - 2\sin(x)
\end{aligned}$$

donc g est bien solution de (E).

- Montrer que $g(x) = \cos(x)$ est une solution particulière de (E).
  $\rightarrow$ On va montrer que $g''(x) + 2g'(x) + 5g(x) = 4\cos(x) - 2\sin(x)$.
  On a :
  $$\begin{aligned} g'(x) &= -\sin(x) \\ g''(x) &= -\cos(x) \\ &\text{donc } g''(x) + 2g'(x) + 5g(x) \\ &= -\cos(x) + 2(-\sin(x)) + 5\cos(x) \\ &= 4\cos(x) - 2\sin(x) \end{aligned}$$
  donc g est bien solution de (E).
- En déduire l'ensemble des solutions de (E).

- Montrer que $g(x) = \cos(x)$ est une solution particulière de (E).
  $\rightarrow$ On va montrer que $g''(x) + 2g'(x) + 5g(x) = 4\cos(x) - 2\sin(x)$.
  On a :

$$\begin{aligned} g'(x) &= -\sin(x) \\ g''(x) &= -\cos(x) \\ &\text{donc } g''(x) + 2g'(x) + 5g(x) \\ &= -\cos(x) + 2(-\sin(x)) + 5\cos(x) \\ &= 4\cos(x) - 2\sin(x) \end{aligned}$$

  donc g est bien solution de (E).
- En déduire l'ensemble des solutions de (E).
  $\rightarrow$ Les solutions de (E) sont de la forme :

$$f(x) = f_0(x) + g(x) = e^{-x}(A\cos(2x) + B\sin(2x)) + \cos(x) \text{ avec } A, B \in \mathbb{R}$$