Devoir maison 1 : 20/09/2022

Exercice 1 *On définit la suite (u_n) par la relation de récurrence suivante :*

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3 \end{cases}$$

Démontrer, par récurrence, que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq n$$

Initialisation :
On vérifie la propriété au rang $n = 0$.
On a $u_0 = 1 \geq 0$: l'initialisation est donc établie.
Hérédité :
On suppose que la propriété est vraie à un rang $n \geq 0$:

$$u_n \geq n : \text{ c'est l'hypothèse de récurrence}$$

On va montrer qu'elle est vraie au rang $n+1$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3 &\geq 3n - 2n + 3 \text{ hypothèse de récurrence} \\ &\geq n + 3 \\ &\geq n + 1 \end{aligned}$$

On vient donc d'établir l'hérédité.
Par conséquent : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq n$.

Exercice 2 *On définit la suite (v_n) par la relation de récurrence suivante :*

$$\begin{cases} v_0 = 5 \\ v_{n+1} = 4v_n - 3 \end{cases}$$

Démontrer, par récurrence, que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = 4^{n+1} + 1$$

Initialisation :
On vérifie la propriété au rang $n = 0$.
On a $v_0 = 5$ et $4^{0+1} + 1 = 4 + 1 = 5$: l'initialisation est établie.
Hérédité :
On suppose que la propriété est vraie à un rang $n \geq 0$:

$$v_n = 4^{n+1} + 1 : \text{ c'est l'hypothèse de récurrence}$$

On va montrer qu'elle est vraie au rang $n+1$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} = 4v_n - 3 &= 4\left(4^{n+1} + 1\right) - 3 \text{ hypothèse de récurrence} \\ &= 4^{n+2} + 4 - 3 \\ &= 4^{n+2} + 1 \end{aligned}$$

On vient donc d'établir l'hérédité.
Par conséquent : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = 4^{n+1} - 3$.