

Exercice 1 Soit la fonction définie sur l'intervalle [2;10] par : $f(x) = (x-10)(2-x)e^x$

1. Pour tout réel x de l'intervalle [2;10], on pose $F(x) = (-x^2 + 14x - 34)e^x$ Montrer que la fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle [2;10]. On doit dériver F et montrer que le résultat est égal à f. Pour bien constater la future égalité, on va développer les facteurs devant e^x dans f:

$$f(x) = (x-10)(2-x)e^{x}$$
$$= (2x-x^{2}+20-10x)e^{-x}$$
$$= (-x^{2}-8x+20)e^{-x}$$

Ensuite, on calcule la dérivée de F en appliquant la formule de dérivation d'un produit :

$$F'(x) = ((-x^2 + 14x - 34)e^x)'$$

$$= (-x^2 + 14x - 34)'e^x + (-x^2 + 14x - 34) \times (e^x)'$$

$$= (-2x + 14)e^x + (-x^2 + 14x - 34)e^x$$

$$= (-2x + 14 - x^2 + 14x - 34)e^x$$

$$= (-x^2 - 8x + 20)e^x$$

$$= f(x)$$

La dernière ligne montre bien que F est une primitive de f

2. Calculer l'aire exacte, en unité d'aire, de la surface comprise entre l'axe des abscisses, la courbe (C), les droites d'équations x = 2 et x = 10.

Comme la fonction f est positive sur [2;10] (on le vérifie pas mais un tableau de signe rapide donne le résultat), l'aire cherchée est l'intégrale de f entre 2 et 10:

$$\int_{2}^{10} f(x)dx$$
= $[F(x)]_{2}^{10} = F(10) - F(2) = 6e^{10} + 10e^{2}$

On s'arrête là car on veut une valeur exacte

Exercice 2 Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^1 3e^{-8x} dx = \left[\frac{3}{-8} e^{-8x} \right]_0^1 = -\frac{3}{8} e^{-8} + \frac{3}{8} e^0 = -\frac{3}{8} e^{-8} + \frac{3}{8} \approx 0.37487420151454$$
 (1)

$$\int_{1}^{5} \frac{1}{x+7} dx = \left[1 \ln(x+7)\right]_{1}^{5} = 1 \ln(12) - 1 \ln(8) \approx 0.40546510810816 \tag{2}$$

Exercice 3 Soit $f(x) = x^2 + 3x + 5$ et $g(x) = 2x^2 - 5x - 4$ associées respectivement aux courbes \mathscr{C}_f et \mathscr{C}_g .

1. Montrer que pour $x \in [-1; 9]$, $f(x) - g(x) \ge 0$. On simplifie f - g et ensuite on calcule le discriminant de polynôme :

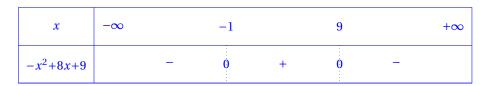
$$f(x) - g(x) = x^2 + 3x + 5 - (2x^2 - 5x - 4) = x^2 + 3x + 5 - 2x^2 + 5x + 4 = -x^2 + 8x + 9$$

On en déduit que $\Delta = b^2 - 4ac = 8^2 - 4 \times (-1) \times 9 = 64 + 36 = 100$. Il y a donc deux solutions réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8 + \sqrt{100}}{-2} = -1$$
$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-8 - \sqrt{100}}{-2} = 9$$

Intégrales TSTI2D

On peut maintenant construire le tableau de signes, en utilisant le fait que le signe de a est toujours sur les bords extérieurs :



- **2.** Déterminer une primitive de f(x) g(x). Une primitive de f(x) - g(x) est $-\frac{x^3}{3} + 4x^2 + 9x$
- **3.** En déduire l'aire de la surface comprise entre les deux courbes \mathscr{C}_f et \mathscr{C}_g pour $x \in [-1;9]$.

Comme f(x)-g(x) est positive sur [-1;9], alors l'intégrale entre -1 et 9 de f-g est l'aire recherchée :

$$\int_{-1}^{9} \left(f(x) - g(x) \right) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 4x^2 + 9x \right]_{-1}^{9} = -\frac{9^3}{3} + 4 \times 9^2 + 9 \times 9 - \left(-\frac{(-1)^3}{3} + 4 \times (-1)^2 + 9 \times (-1) \right) = \frac{500}{3}$$