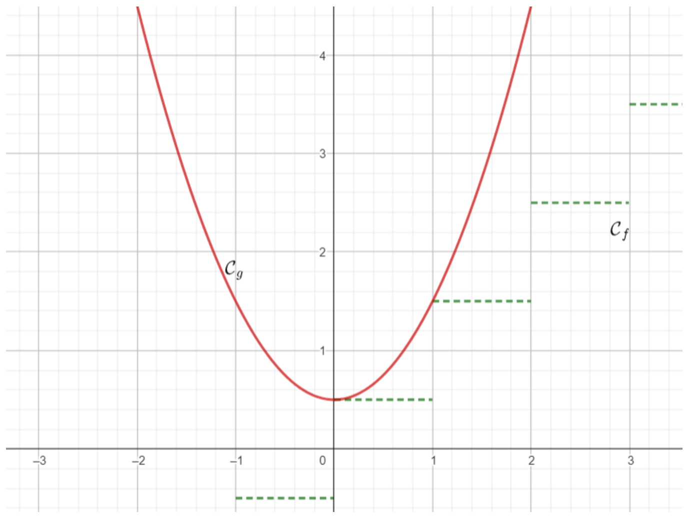
Continuité des fonctions d'une variable réelle : activité

Dans le dessin ci-dessous, la courbe en trait plein représente la fonction g et la courbe en trait pointillé représente la fonction f.



1. En terme de représentation graphique, quelle est la différence entre les deux courbes ?
   La courbe représentant f a des sauts, tandis que la courbe représentant g ne contient pas de sauts.
   On dit que l'on peut tracer la courbe représentant f ne peut être tracée sans lever le crayon tandis que c'est le cas pour la courbe représentant g.
   On dit que la fonction f est discontinue et que la fonction g est continue.

2. Donner la valeur de $g(0)$ et $g(1)$.
   Graphiquement, on peut en déduire que $g(0) = \frac{1}{2}$ et $g(1) = \frac{3}{2}$.
3. Déterminer :

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \frac{1}{2}$$
$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\frac{1}{2}$$
$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \frac{3}{2}$$
$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \frac{1}{2}$$

4. Que dire de $f(0)$ et $f(1)$?
   Comme la limite à gauche et à droite de f en 0 sont différentes, il n'existe pas d'image de 0 par f : on dit que la fonction n'est pas continue en 0.
   Idem pour 1.

5. Donner le nombre de solutions de $g(x) = 0.8$ sur $]-\infty; +\infty[$ et le nombre de solutions sur $[0; +\infty[$.
Graphiquement, on constate que cette équation a deux solutions sur $]-\infty; +\infty[$ mais une seule solution sur $[0; +\infty[$.
6. Quelle est la monotonie de g sur $]-\infty; +\infty[$?
La fonction g semble décroissante sur $]-\infty; 0]$ et croissante sur $[0; +\infty[$.

7. Donner le nombre de solutions de $f(x) = 0.8$ sur $]-\infty; +\infty[$ et le nombre de solutions sur $[0; +\infty[$.
Cette équation n'a aucune solution sur $]-\infty; +\infty[$.
8. Donner une conclusion sur les solutions des équations $h(x) = \alpha$ sur $[a; b]$ quand $h(a) < \alpha$ et $h(b) > \alpha$ ou quand $h(a) > \alpha$ et $h(b) < \alpha$ avec h une fonction continue.
Si f est continue sur $[a; b]$ avec $h(a) < \alpha$ et $h(b) > \alpha$ ou quand $h(a) > \alpha$ et $h(b) < \alpha$, alors l'équation $f(x) = \alpha$ admet au moins une solution sur $[a; b]$.
Si de plus f est monotone sur $[a; b]$, alors la solution est unique ; c'est ce qu'on appelle le théorème des valeurs intermédiaires.