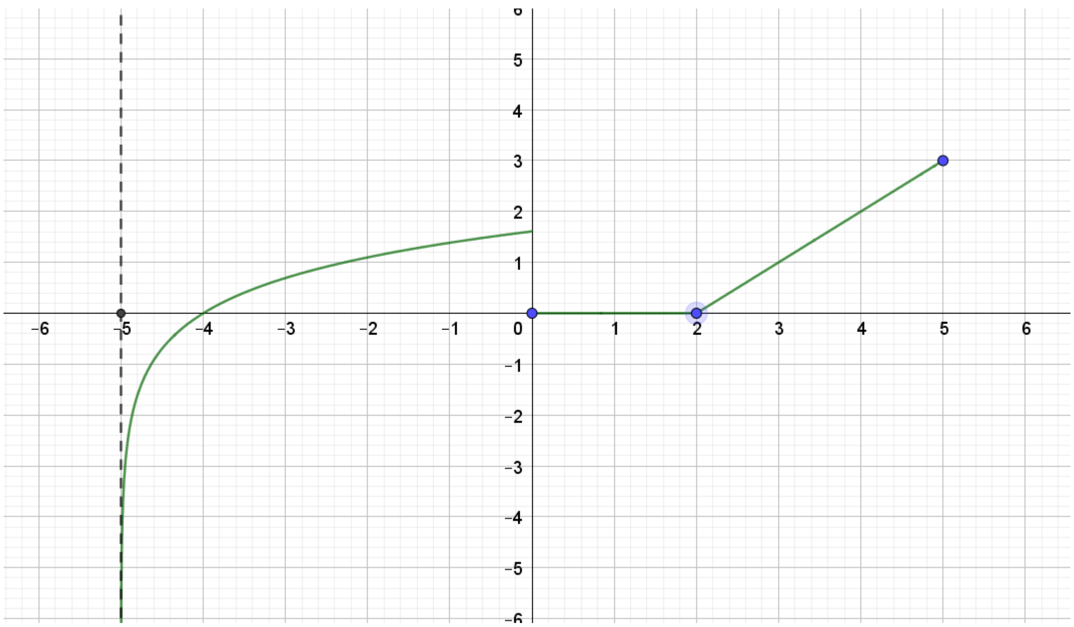
☙ Continuité des fonctions de la variable réelle : cours

1 Notion de continuité

C'est le mathématicien allemand Karl Weierstrass (1815; 1897) qui apporte les premières définitions rigoureuses au concept de limite et de continuité d'une fonction.

Exemple 1 (Études graphiques) *Graphiquement, une fonction f sera continue en a si on peut tracer la courbe sans lever le crayon au niveau de l'abscisse a.*



La fonction f n'est pas continue en -5, ni en 0 mais elle l'est en 2 et 5 où on ne s'intéresse pas à ce qu'il peut y avoir à droite de ce point puisque la fonction f n'y est manifestement pas définie.

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant un réel a.

- ✏ f est continue en a si : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.
- ✏ f est continue sur I si f est continue en tout point de I.

Exemple 2 ✏ *Les fonctions* $x \to |x|$, $x \to x^n$ *(* $n \in \mathbb{N}$ *), et par extension les fonctions polynômiales, sont continues sur* $\mathbb{R}$.

- ✏ *Les fonctions* $x \to \sin(x)$ *et* $x \to \cos(x)$ *sont continues sur* $\mathbb{R}$.
- ✏ *La fonction* $x \to \sqrt{x}$ *est continue sur* $[0;+\infty[$.
- ✏ *La fonction* $x \to \frac{1}{x}$ *est continue sur* $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$.

Théorème

Une fonction dérivable sur un intervalle I est continue sur cet intervalle.

Exemple 3 *On considère la fonction* f *définie sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$$f(x) = \begin{cases} -x+2 & \text{pour } x < 3 \\ x-4 & \text{pour } 3 \le x < 5 \\ -2x+13 & \text{pour } x \ge 5 \end{cases}$$

La fonction f *est-elle continue sur* $\mathbb{R}$ *?*
Comme les fonctions $x \to -x+2$, $x \to x-4$ *et* $x \to -2x+13$ *sont des fonctions polynômiales, alors* f *est continue sur* $]-\infty;3[\cup]3;5[\cup]5;+\infty[$.
Pour quela fonction f *soit continue en* 3 *et* 5, *il va falloir étudier les limites à gauche et à droite en ces valeurs.*

$$\lim_{\substack{x\to 3\\ x<3}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 3\\ x<3}} -x+2 = -3+2 = -1$$

$$\lim_{\substack{x\to 3\\ x\geq 3}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 3\\ x>3}} x-4 = 3-4 = -1 = f(3) \text{ par définition de } f$$

$$\lim_{\substack{x\to 5\\ x<5}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 5\\ x<5}} x-4 = 5-4 = 1$$

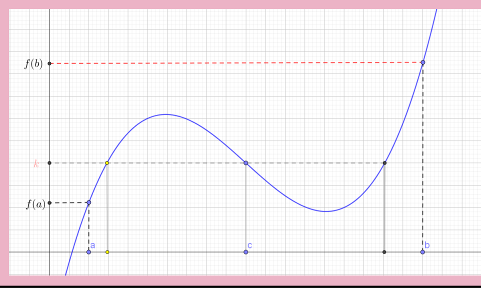
$$\lim_{\substack{x\to 5\\ x\geq 5}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 5\\ x\geq 5}} -2x+13 = -2\times 5+13 = 3 = f(5) \text{ par définition de } f$$

On constate qu'en $x = 3$, *la limite à gauche et à droite coïncide avec* $f(3)$ *: la fonction est donc continue en* $x = 3$.
On constate qu'en $x = 5$, *la limite à gauche diffère de la limite à droite, qui est la valeur de* $f(5)$ *par construction de la fonction : la fonction est n'est donc pas continue en* $x = 5$.
La fonction est donc continue sur $]-\infty;5[$ *et sur* $]5;+\infty[$.

2 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème des valeurs intermédiaires

On considère la fonction définie et continue sur un intervalle $[a;b]$.
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.



Remarque 1 ✏ *Dans ces conditions, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[a;b]$.*

✏ *Dans le cas où la fonction f est strictement monotone sur l'intervalle $[a;b]$ alors le réel c est unique.*

✏ *Dans le cas où $f(a)$ et $f(b)$ sont des signes contraires alors il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = 0$.*

Étapes à justifier pour résoudre $f(x) = 0$

Pour montrer que $f(x) = 0$ sur l'intervalle $[a;b]$, on démontre que :

1. f est continue sur $[a;b]$.
2. f change de signe sur $[a;b]$.
3. f est strictement monotone sur $[a;b]$.

Les deux premières conditions nous garantissent l'existence de la solution et la dernière son unicité.
Pour avoir unicité, il faudra choisir un intervalle plus petit inclus dans $[a;b]$.

Exemple 4 *On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.*

1. *Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement une solution sur l'intervalle $[2,5;5]$.*
   La fonction f est polynômiale sur l'intervalle $[2.5;5]$ donc elle y est continue.
   De plus :

$$f(2.5) = 2.5^3 - 3 \times 2.5^2 + 2 = 15.625 - 3 \times 6.25 + 2 = -1.125 < 0$$
$$f(5) = 5^3 - 3 \times 5^2 + 2 = 125 - 3 \times 25 + 2 = 52 > 0$$

Donc f change de signe sur $[2,5;5]$.
Nous venons de montrer l'existence d'une solution à l'équation $f(x) = 0$ sur $[2.5;5]$.
Pour montrer l'unicité de cette solution, il reste à montrer que f est croissante sur $[2.5;5]$ *; pour cela, nous allons calculer f' :*

$$f'(x) = \left(x^3 - 3x^2 + 2\right)' = 3x^2 - 3 \times 2x = 3x(x-2)$$

Or sur $[2,5;5]$, *on sait que $x > 0$ et $x - 2 > 0$ donc f' y est positive, par conséquent f est croissante sur* $[2.5;5]$.
Il existe donc une unique solution α à l'équation $f(x) = 0$.

2. *En utilisant la calculatrice, donner un encadrement au centième de cette solution appelée α.*
On va faire plusieurs tableau de valeurs.
Le premier aura pour pas 1 *et on le commencera à* 2 *pour finir à* 5. *On trouve :*

$$f(2) = -2$$
$$f(3) = 2$$

La solution est donc entre deux 2 *et* 3.
On refait un tableau de valeurs commençant à 2 *et finissant à* 3, *avec un pas de* 0.1. *On trouve :*

$$f(2.7) = -0.187$$
$$f(2.8) = 0.432$$

La solution est donc entre 2.7 *et* 2.8.
On refait un tableau de valeurs commençant à 2.7 *et finissant à* 2.8, *avec un pas de* 0.01. *On trouve :*

$$f(2.73) = -0.0132$$
$$f(2.74) = 0.04802$$

La solution est donc entre deux 2.73 *et* 2.74.
On a donc $2.73 < \alpha < 2.74$.

Algorithme de Dichotomie

Une fois quand nous avons montré l'existence et l'unicité sur $[a;b]$ d'une solution α à l'équation $f(x) = 0$, un algorithme de Dichotomie permet de trouver un encadrement de α.
On commence par calculer $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$. Si ce nombre vaut 0, c'est terminé, sinon, en fonction de la monotonie de f, c'est que α est dans l'intervalle $[a;\frac{a+b}{2}]$ ou $[\frac{a+b}{2};b]$. On continue le raisonnement jusqu'à obtenir un intervalle de longueur p choisie au départ, ce qui nous donnera une valeur de α d'amplitude inférieure à p.

Exemple 5 *Déterminer la solution sur* $[2;4]$ *de l'équation* $f(x)=0$ *avec* $f(x)=x^3-7x$.

On commence par justifier que cette solution existe et est unique.
La fonction f *est polynômiale donc continue sur* $[2;4]$, *de plus :*

$$f(2)=-6$$
$$f(4)=36$$

La fonction change donc de signe sur $[2;4]$.
On vient de montrer l'existence de la solution.
Pour l'unicité, on calcule la dérivée :

$$f'(x)=3x^2-7=3\left(x-\sqrt{\frac{7}{3}}\right)\left(x+\sqrt{\frac{7}{3}}\right)$$

Or $2=\sqrt{4}>\sqrt{\frac{7}{3}}$ *donc* f' *est strictement positive sur* $[2;4]$ *: la fonction* f *est donc croissante sur* $[2;4]$ *: l'unicité est alors assurée.*

```
def dichotomie(a,b,p):
    x=(a+b)/2
    y=x**3-7*x
    t=b-a
    u=[]
    while t>p:
        if y>0:
            t=t/2
            u=[x-t,x]
            x=x-t
            y=x**3-7*x
        else:
            t=t/2
            u=[x,x+t]
            x=x+t
            y=x**3-7*x
    return u
```

En faisant tourner l'algorithme avec $p=0.1$, *on trouve que* $2.625<\alpha<2.6875$ *: l'amplitude de l'encadrement est bien inférieure à* 0.1.

3 Application à l'étude d'une suite

Théorème

Soit une fonction f définie et continue sur un intervalle I et soit (u_n) telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_n \in I$$
$$u_{n+1} = f(u_n)$$

Si (u_n) converge vers l de I alors $f(l) = l$.

Exemple 6 *Étudier la suite définie par :*

$$\begin{cases} u_0 = 8 \\ u_{n+1} = 0.85u_n + 1.8 \end{cases}$$

On va montrer par récurrence que $8 \leq u_n \leq 12 \ \ \forall n \in \mathbb{N}$.
Initialisation :
La valeur u_0 vaut 8 et elle est bien inclue dans l'intervalle $[8;12]$: on a montré l'initialisation.
Hérédité :
On suppose que pour un indice $n \geq 0$, $8 \leq u_n \leq 12$. On va montrer que $8 \leq u_{n+1} \leq 12$:

$$\begin{aligned} & 8 \leq u_n \leq 12 \\ \Leftrightarrow & 6.8 \leq 0.85u_n \leq 10.2 \\ \Leftrightarrow & 6.8 + 1.8 \leq 0.85u_n + 1.8 \leq 10.2 + 1.8 \\ \Leftrightarrow & 8.6 \leq u_{n+1} \leq 12 \end{aligned}$$

On vient de montrer l'hérédité : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $8 \leq u_n \leq 12$.
On va maintenant montrer que la suite (u_n) est croissante, par récurrence.

Initialisation :
On a $u_1 = 0.85 \times 12 + 1.8 = 8.6 > 8 = u_0$: on a montré l'initialisation.
Hérédité :
On suppose que pour un indice $n \geq 0$, $u_{n+1} > u_n$; on va montrer que $u_{n+2} > u_{n+1}$:

$$u_{n+2} = 0.85u_{n+1} + 1.8 \geq 0.85u_n + 1.8 = u_{n+1}$$

On vient de montrer l'hérédité : la suite (u_n) est donc croissante.
Comme la suite est croissante et majorée, elle converge, d'après le théorème de convergence monotone, vers $l \in \mathbb{R}$.
D'après le théorème ci-dessus, on sait que :

$$0.85l + 1.8 = l \Leftrightarrow l = 12$$

Propriétés

Soit f une fonction f définie et dérivable sur $[0;+\infty[$ et une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = f(n)$:

- ✏ Si f est croissante sur l'intervalle $[0;+\infty[$ alors la suite (u_n) est croissante.
- ✏ Si f est décroissante sur l'intervalle $[0;+\infty[$ alors la suite (u_n) est décroissante.