Récurrences 2

On considère la suite :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 0.4u_n + 3.6 \\ u_0 = 10 \end{cases}$$

1. Montrer par récurrence que :

$$6 \leq u_{n+1} \leq u_n$$

2. En déduire que la suite converge et en déduire sa limite.

1. Initialisation :

On a :

$$\begin{aligned} u_1 &= 0.4u_0 + 3.6 = 7.6 \\ \text{donc } 6 \leq u_1 &\leq 10 = u_0 \end{aligned}$$

L'initialisation est établie.

Hérédité :
On suppose que la propriété est vraie pour un certain rang $n \geq 0$:

$$6 \leq u_{n+1} \leq u_n \quad \text{c'est l'hypothèse de récurrence}$$

On part de cette hypothèse :

$$\begin{aligned} & 6 \leq u_{n+1} \leq u_n \\ \Rightarrow & 0.4 \times 6 \leq 0.4 \times u_{n+1} \leq 0.4 \times u_n \\ \Rightarrow & 2.4 \leq 0.4 \times u_{n+1} \leq 0.4 \times u_n \\ \Rightarrow & 2.4 + 3.6 \leq 0.4 \times u_{n+1} + 3.6 \leq 0.4 \times u_n + 3.6 \\ \Rightarrow & 6.0 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \end{aligned}$$

L'hérédité est établie.

2. On vient de montrer que la suite est décroissante et minorée, par conséquent, d'après le théorème de convergence monotone, la suite converge vers l un nombre réel qui vérifie :

$$\begin{aligned} & l = 0.4 \times l + 3.6 \\ \Leftrightarrow & l - 0.4 \times l = 3.6 \\ \Leftrightarrow & l \times 0.6 = 3.6 \\ \Leftrightarrow & l = \frac{3.6}{0.6} = 6 \end{aligned}$$