Compléments sur la dérivation : cours

1 Rappels de 1G

1.1 Fonction dérivée

Définition : dérivabilité en un point

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
Si pour $a \in I$:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = l$$

avec l un réel, alors f est **dérivable** en a et $f'(a) = l$: l est le **nombre dérivé** de f en a.

Définition

On dit que la fonction f est dérivable sur un intervalle I lorsqu'elle est dérivable en tout nombre x de cet intervalle et on note f' la fonction qui a tout nombre x de cet intervalle associe le nombre dérivée de f en x. Cette fonction s'appelle la **fonction dérivée** de f.

Propriétés

Les fonctions dérivées des fonctions usuelles sont données par le tableau suivant :

Fonction f	définie sur	Dérivée f'	définie sur
$f(x) = k$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = mx + p$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = m$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n, \quad n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \frac{1}{x^n}, \quad n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \sqrt{x}$	$\mathbb{R}^+ = [0;+\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}^{+*} =]0;+\infty[$
$f(x) = e^x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = e^x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = e^{kx}, \quad k \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = ke^{kx}$	$\mathbb{R}$

1.2 Opérations sur les fonctions

Propriétés

Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un même intervalle I :

Fonction	**Fonction dérivée**
ku avec $k \in \mathbb{R}$	ku'
$u + v$	$u' + v'$
$u \times v$	$u' \times v + u \times v'$
$\frac{1}{u}$ avec $u(x) \neq 0$	$-\frac{u'}{u^2}$
$\frac{u}{v}$ avec $v(x) \neq 0$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$

Propriétés

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I, a et b deux réels et J l'ensemble des réels tels que $ax+b \in J$.
Alors la fonction $g(x) = f(ax+b)$ est définie set dérivable sur J et :

$$g'(x) = af'(ax+b)$$

1.3 Variation d'une fonction

Propriétés

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et f' sa fonction dérivée :

- ✏ $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in I \Leftrightarrow f$ est croissante sur I.
- ✏ $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in I \Leftrightarrow f$ est décroissante sur I.
- ✏ $f'(x) = 0$ pour tout $x \in I \Leftrightarrow f$ est constante sur I.

Propriétés

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et f' sa fonction dérivée.
Si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$ (respectivement $f'(x) < 0$), alors f est strictement croissante sur I (respectivement strictement décroissante)

Propriétés

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I contenant a et f' sa fonction dérivée.
La fonction f' s'annule et change de signe en $a \Leftrightarrow f$ admet un extremum local en a.

1.4 Equation de la tangente en $x = a$

Propriétés

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I contenant a et f' sa fonction dérivée.
La tangente à la courbe $\mathscr{C}$ représentant f au point A est la meilleure approximation de la courbe par une droite au point A.
Cette droite a pour coefficient directeur $f'(a)$ et passe par A, son équation réduite est donc :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

2 Dérivées d'une fonction composée

Définition

Soit une fonction u définie sur un intervalle I et prenant ses valeurs dans un intervalle J.
Soit une fonction v définie sur un intervalle K tel que $J \subset K$.
On appelle fonction composée de u par v la fonction notée $v \circ u$ définie sur l'intervalle I par :

$$(v \circ u)(x) = v(u(x))$$

Propriétés

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $u(I)$. La fonction $g(x) = f(u(x))$ est définie et dérivable sur I et :

$$g'(x) = u'(x) f'(u(x))$$

Exemple 1 *Calculer la dérivée des fonctions composées suivantes :*

1. *f(x)*=$\sqrt{x-3}$.
   La fonction $x \to \sqrt{x-3}$ est la composée de deux fonctions :

$$\begin{aligned} f(x) &= (u \circ v)(x) \\ v(x) &= x-3 \quad v'(x) = 1 \\ u(x) &= \sqrt{x} \quad u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ f'(x) &= v'(x) \times u'(v(x)) \\ &= 1 \times \frac{1}{2\sqrt{x-3}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x-3}} \end{aligned}$$

2. $f(x) = v \circ u$ *et* $g(x) = u \circ v$ *avec :*

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{x} \\ v(x) &= \sqrt{x} \end{aligned}$$

   On a :

$$\begin{aligned} u'(x) &= -\frac{1}{x^2} \\ v'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ f'(x) &= u'(x) \times v'(u(x)) = -\frac{1}{x^2} \times \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{x}}} = -\frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}} \\ g'(x) &= v'(x) \times u'(v(x)) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \times \left(-\frac{1}{\sqrt{x}^2}\right) = -\frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

3. $f(x) = v \circ u$ *et* $g(x) = u \circ v$ *avec :*

$$\begin{aligned} u(x) &= x^2 + x \\ v(x) &= \frac{x}{x+1} \end{aligned}$$

   On a :

$$\begin{aligned} u'(x) &= 2x+1 \\ v'(x) &= \left(\frac{x}{x+1}\right)' = \frac{x' \times (x+1) - x \times (x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)-x}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2} \\ f'(x) &= u'(x) \times v'(u(x)) = (2x+1) \times \frac{1}{(x^2+x)^2} \\ g'(x) &= v'(x) \times u'(v(x)) = \frac{1}{(x+1)^2} \times \left(2\frac{x}{x+1} + 1\right) \end{aligned}$$

4. $f(x) = e^{x^2+1}$.

La fonction $x \to e^{x^2+1}$ est la composée de deux fonctions :

$$\begin{aligned} f(x) &= (u \circ v)(x) \\ v(x) &= x^2+1 \quad v'(x) = 2x \\ u(x) &= e^x \quad u'(x) = e^x \\ f'(x) &= v'(x) \times u'(v(x)) \\ &= 2xe^{x^2+1} \end{aligned}$$

Cas particuliers de fonctions composées

Fonction f	définie sur	Dérivée f'	définie sur
$\sqrt{u}$	$u(x) \geq 0$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$u(x) > 0$
u^n	$\mathbb{R}$ si $n \in \mathbb{N}^*$	$nu'(x)u^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$u^{-n} = \frac{1}{u^n}$	$u(x) \neq 0$ si $n \in \mathbb{N}^*$	$-nu'(x)u(x)^{-n-1} = \frac{-nu'(x)}{u^{n+1}}$	$u(x) \neq 0$
$f(x) = e^u$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = u'e^u$	$\mathbb{R}$

Exemple 2 *Déterminer la dérivée des fonctions définies par :*

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{3x^2+4x-1} \\ g(x) &= \left(2x^2+3x-3\right)^4 \\ h(x) &= 2e^{\frac{1}{x}} \end{aligned}$$

$$f(x) = (u \circ v)(x)$$
$$u(x) = \sqrt{x} \quad u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$
$$v(x) = 3x^2 + 4x - 1 \quad v'(x) = 6x + 4$$
$$\begin{aligned} f'(x) &= v'(x) \times u'(v(x)) \\ &= (6x+4) \times \frac{1}{2\sqrt{3x^2+4x-1}} \\ &= \frac{3x+2}{\sqrt{3x^2+4x-1}} \end{aligned}$$
$$g(x) = (m \circ n)(x)$$
$$m(x) = x^4 \quad m'(x) = 4x^3$$
$$n(x) = 2x^2 + 3x - 3 \quad n'(x) = 4x + 3$$
$$\begin{aligned} g'(x) &= n'(x) \times m'(n(x)) \\ &= (4x+3) \times 4 \times (2x^2+3x-3)^3 \\ &= 4(4x+3)(2x^2+3x-3)^3 \end{aligned}$$
$$h(x) = (a \circ b)(x)$$
$$a(x) = 2e^x \quad a'(x) = 2e^x$$
$$b(x) = \frac{1}{x} \quad b'(x) = -\frac{1}{x^2}$$
$$\begin{aligned} h'(x) &= b'(x) \times a'(b(x)) \\ &= -\frac{1}{x^2} \times 2e^{\frac{1}{x}} \\ &= -\frac{2e^{\frac{1}{x}}}{x^2} \end{aligned}$$

3 Etude d'une fonction composée

Exemple 3 *Soit* $f(x) = \sqrt{\frac{2x}{3x+1}}$ *et* $\mathscr{C}$ *sa courbe représentative.*

1. *Déterminer l'ensemble de définition de* f.
   La fonction f *est la composé de deux fonctions :*

$$f(x) = (u \circ v)$$
$$u(x) = \sqrt{x} \quad u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$
$$v(x) = \frac{2x}{3x+1} \quad v'(x) = \left(\frac{2x}{3x+1}\right)' = \frac{(2x)' \times (3x+1) - 2x \times (3x+1)'}{(3x+1)^2} = \frac{6x+2-6x}{(3x+1)^2} = \frac{2}{(3x+1)^2}$$

   La fonction u *est définie pour* $x \geq 0$ *et dérivable pour* $x > 0$ *: la fonction* f *est donc définie pour* $\frac{2x}{3x+1} \geq 0$*, il est nécessaire de faire une tableau de signes :*

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		0		$+\infty$
$2x$			$-$		0	$+$	
$3x+1$		$-$	0			$+$	
$v(x)$		$+$	$\parallel$	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	$\parallel$		0	$+$	

Finalement, l'ensemble de définition de f est $]-\infty;-\frac{1}{3}[\cup[0;+\infty[$ *et son ensemble de dérivation est* $]-\infty;-\frac{1}{3}[\cup]0;+\infty[$

2. *Étudier les limites de f au bornes de son ensemble de définition et en déduire les équations des asymptotes à la courbe $\mathscr{C}$.*
On doit déterminer les limites en $-\infty$, $-\frac{1}{3}$, 0 et $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{3x+1} \text{ est une FI du type } \frac{+\infty}{+\infty} \text{ on doit factoriser pour lever l'indétermination}$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{3x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x\left(3+\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{3+\frac{1}{x}}=\frac{2}{3}$$

La limite de f en $+\infty$ est donc $\sqrt{\frac{2}{3}}$ par composition de limites : on en déduit alors l'existence d'une asymptote d'équation $y=\sqrt{\frac{2}{3}}$ en $+\infty$ à la courbe $\mathscr{C}$.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{3x+1} \text{ est une FI du type } \frac{-\infty}{-\infty} \text{ on doit factoriser pour lever l'indétermination}$$
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{3x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{x\left(3+\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{3+\frac{1}{x}}=\frac{2}{3}$$

La limite de f en $-\infty$ est donc $\sqrt{\frac{2}{3}}$ par composition de limites : on en déduit alors l'existence d'une asymptote d'équation $y=\sqrt{\frac{2}{3}}$ en $-\infty$ à la courbe $\mathscr{C}$.

$$\lim_{x\to-\frac{1}{3}^-}\frac{2x}{3x+1}=\frac{-\frac{2}{3}}{0^-}=+\infty$$

La limite à gauche en $-\frac{1}{3}$ de f est $+\infty$: on en déduit alors l'existence d'une asymptote d'équation $x=-\frac{1}{3}$ à la courbe $\mathscr{C}$.

$$\lim_{x\to0^+}\frac{2x}{3x+1}=\frac{0}{0+1}=0$$

La limite à droite en 0 de f est 0

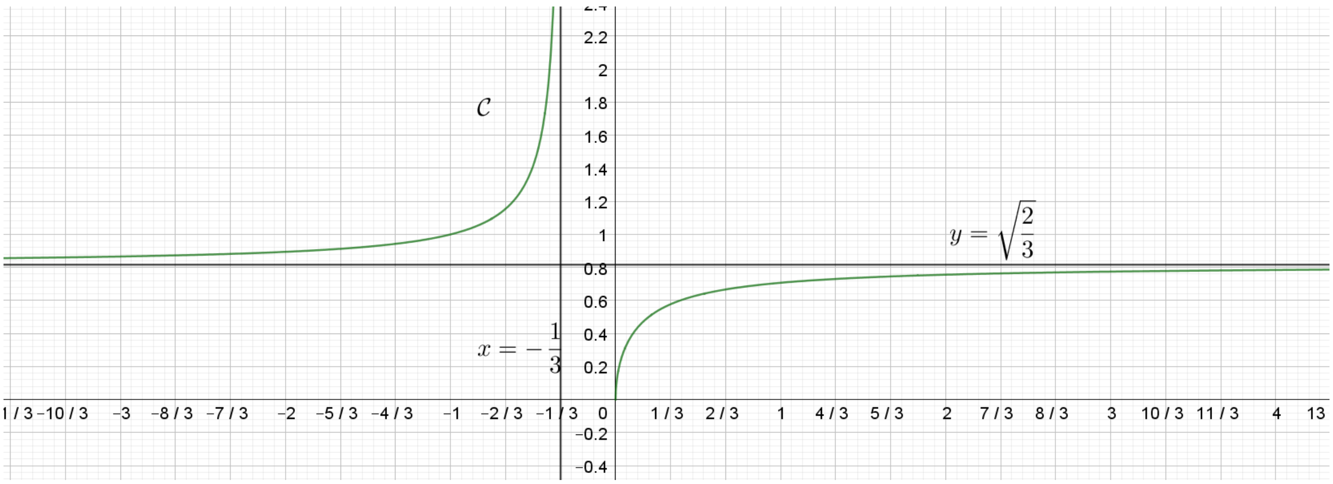
3. *Étudier les variations de f.*
On doit commencer par calculer la dérivée de f sur son ensemble de dérivation :

$$f'(x)=v'(x)\times u'(v(x))=\frac{2}{(3x+1)^2}\times\frac{1}{2\sqrt{\frac{2x}{3x+1}}}=\frac{1}{(3x+1)^{\frac{3}{2}}}>0$$

Par conséquent, la fonction f est croissante sur son ensemble de définition.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		0		$+\infty$
$f(x)$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\nearrow$	$+\infty$		0	$\nearrow$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$

4. *Tracer les asymptotes à la courbe $\mathscr{C}$ puis la courbe $\mathscr{C}$.*



Exemple 4 *Soit $f(x) = xe^{-\frac{x}{2}}$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$.*

1. *Étudier les limites de f à l'infini.*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} xe^{-\frac{x}{2}} = \lim_{X\to+\infty} \frac{1}{2}\frac{X}{e^X} = 0 \textit{ par comparaison de limites en posant } X = \frac{x}{2}$$

On en déduit une asymptote d'équation $y = 0$ à la courbe représentant f en $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} xe^{-\frac{x}{2}} = \lim_{X\to+\infty} -\frac{1}{2}\frac{X}{e^X} = -\infty \textit{ en posant } X = -\frac{x}{2}$$

2. *Calculer la dérivée de f.*

On va à la fois utiliser la dérivée d'un produit et la dérivée d'une fonction composée :

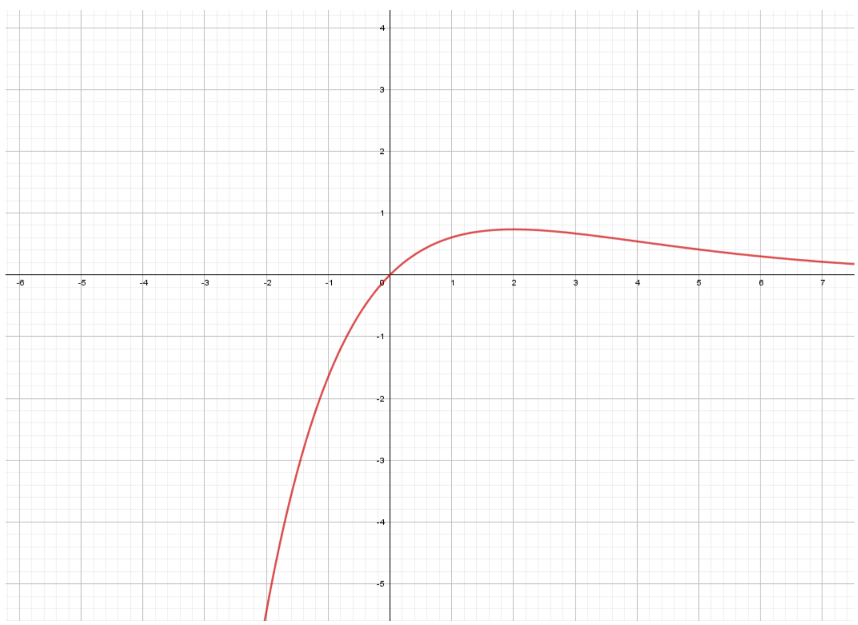
$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(xe^{-\frac{x}{2}}\right)' \\
&= x' \times \left(e^{-\frac{x}{2}}\right) + x \times \left(e^{-\frac{x}{2}}\right)' \\
&= e^{-\frac{x}{2}} + x \times \left(-\frac{x}{2}\right)' e^{-\frac{x}{2}} \\
&= e^{-\frac{x}{2}} + x \times \left(-\frac{1}{2}\right) e^{-\frac{x}{2}} \\
&= e^{-\frac{x}{2}}\left(1 - \frac{x}{2}\right)
\end{aligned}$$

3. *Dresser le tableau de variations de la fonction f.*
Pour établir le tableau de variations, il reste à déterminer le signe de $f'(x)$:

$$1-\frac{x}{2}\geq 0 \Leftrightarrow x\leq 2$$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$e^{-\frac{x}{2}}$			$+$		
$1-\frac{x}{2}$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\nearrow$	$2e^{-1}$	$\searrow$	0

4. *Tracer la courbe représentative de f.*



4 Dérivée seconde

Définition

Soit une fonction f dérivable sur un intervalle I dont la dérivée f' est dérivable sur I.
On appelle fonction dérivée seconde de f sur I la dérivée de f' et on note :

$$f''(x)=\left(f'(x)\right)'$$

Exemple 5 *On considère la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 2x - 7$*, on a :*

$$f'(x) = 2 \times 3x^2 - 5 \times 2x + 2 = 6x^2 - 10x + 2$$
$$f''(x) = \left(f'(x)\right)' = \left(6x^2 - 10x + 2\right)' = 12x - 10$$

5 Fonctions convexes et fonctions concave

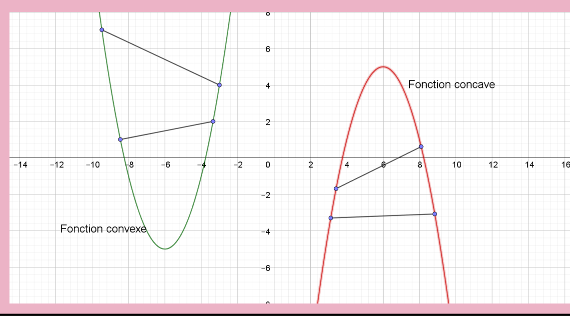
Définition

Une corde est un segment reliant deux points d'une courbe.

Définitions

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- ✏ La fonction f est convexe sur I si, sur l'intervalle $[a;b] \subset I$, sa courbe représentative est entièrement située en dessous de chacune de ses cordes construites sur $[a;b]$.
- ✏ La fonction f est concave sur I si, sur l'intervalle $[a;b] \subset I$, sa courbe représentative est entièrement située au-dessus de chacune de ses cordes construites $[a;b]$.



Définitions avec les tangentes

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- ✏ La fonction f est convexe sur I si, sur l'intervalle I, sa courbe représentative est entièrement située au dessus de chacune de ses tangentes.
- ✏ La fonction f est concave sur I si, sur l'intervalle I, sa courbe représentative est entièrement située en dessous de chacune de ses tangentes.

Propriétés

- ✏ La fonction carré $x \to x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
- ✏ La fonction cube $x \to x^3$ est concave sur $]-\infty;0]$ et convexe sur $]0;+\infty[$.
- ✏ La fonction inverse $x \to \frac{1}{x}$ est concave sur $]-\infty;0]$ et convexe sur $]0;+\infty[$.
- ✏ La fonction racine carré $x \to \frac{1}{x}$ est sur $[0;+\infty[$.

Propriétés

Soit I une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.

- La fonction est convexe sur $I \Leftrightarrow f'$ est croissante sur $I \Leftrightarrow f''(x) \geq 0 \ \ \forall x \in I$.
- La fonction est concave sur $I \Leftrightarrow f'$ est décroissante sur $I \Leftrightarrow f''(x) \leq 0 \ \ \forall x \in I$.

Preuve

1. La dernière équivalence vient des propriétées sur les dérivées, nous allons donc montrer que : la fonction est convexe sur $I \Leftrightarrow f'$ est croissante sur I.

 - f convexe implique f' croissante
 On rappelle l'expression de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point a :
 $$T_a(t) = f'(a)(t-a) + f(a)$$
 Comme la fonction est convexe, elle est au dessus de chacune de ses tangentes :
 $$f(x) \geq T_a(t) \quad \forall x, t, a \in I$$
 Soit x et y deux point de I, avec $x < y$; la propriété précédente nous permet d'écrire :
 $$f(x) \geq T_x(y) \Leftrightarrow f(x) \geq f'(y)(x-y) + f(y) \Leftrightarrow f(x) - f(y) \geq f'(y)(x-y) \Leftrightarrow \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \leq f'(y)$$
 car x-y < 0
 $$f(y) \geq T_y(x) \Leftrightarrow f(y) \geq f'(x)(y-x) + f(x) \Leftrightarrow f(y) - f(x) \geq f'(x)(y-x) \Leftrightarrow \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \geq f'(x)$$
 car y-x < 0

 On vient donc de montrer que :
 $$f'(x) \leq \frac{f(x)-f(y)}{x-y} = \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq f'(y)$$
 en particulier $f'(x) \leq f'(y)$ ce qui signifie que f est croissante.
 - f' croissante implique f convexe
 Soit $a \in I$, on pose :
 $$h_a(x) = f(x) - \big((x-a)f'(a) + f(a)\big)$$
 Cette fonction est dérivable par somme et produit de fonctions dérivables :
 $$h_a'(x) = f'(x) - f'(a) \begin{cases} \geq 0 & \forall x \geq a \\ \leq 0 & \forall x \leq a \end{cases}$$
 On obtient ces résultats grâce au fait que la fonction f est croissante.
 On déduit le tableau de variations suivants :

x	$Inf(I)$		a		$Sup(I)$
$h'_a(x)$		$-$	0	$+$	
$h_a(x)$		$\searrow$	$h_a(a)=0$	$\nearrow$	

On vient donc de montrer que $h_a(x) \geq 0$ pour $x \in I$, autrement dit :

$$\forall a \in I,\ \ \forall x \in I \quad f(x) - \big((x-a)f'(a) + f(a)\big) \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq (x-a)f'(a) + f(a)$$

Cela signifie que f est au dessus de chacune de ses tangentes : f est donc convexe.

2. ✐ f concave implique f' décroissante

On rappelle l'expression de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point a :

$$T_a(t) = f'(a)(t-a) + f(a)$$

Comme la fonction est concave, elle est en dessous de chacune de ses tangentes :

$$f(x) \leq T_a(t) \quad \forall x, t, a \in I$$

Soit x et y deux point de I, avec $x < y$; la propriété précédente nous permet d'écrire :

$$f(x) \leq T_x(y) \Leftrightarrow f(x) \leq f'(y)(x-y) + f(y) \Leftrightarrow f(x) - f(y) \leq f'(y)(x-y) \Leftrightarrow \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \geq f'(y)$$

car x-y < 0

$$f(y) \leq T_y(x) \Leftrightarrow f(y) \leq f'(x)(y-x) + f(x) \Leftrightarrow f(y) - f(x) \leq f'(x)(y-x) \Leftrightarrow \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq f'(x)$$

car y-x < 0

On vient donc de montrer que :

$$f'(y) \leq \frac{f(x)-f(y)}{x-y} = \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq f'(x)$$

en particulier $f'(x) \geq f'(y)$ ce qui signifie que f est croissante.

✐ f' décroissante implique f concave

Soit $a \in I$, on pose :

$$h_a(x) = f(x) - \big((x-a)f'(a) + f(a)\big)$$

Cette fonction est dérivable par somme et produit de fonctions dérivables :

$$h'_a(x) = f'(x) - f'(a) \begin{cases} \leq 0 & \forall x \geq a \\ \geq 0 & \forall x \leq a \end{cases}$$

On obtient ces résultats grâce au fait que la fonction f est croissante.
On déduit le tableau de variations suivants :

x	$Inf(I)$		a		$Sup(I)$
$h'_a(x)$		$+$	0	$-$	
$h_a(x)$		$\nearrow$	$h_a(a)=0$	$\searrow$	

On vient donc de montrer que $h_a(x) \leq 0$ pour $x \in I$, autrement dit :

$$\forall a \in I,\ \ \forall x \in I \quad f(x) - \big((x-a)f'(a) + f(a)\big) \leq 0 \Leftrightarrow f(x) \leq (x-a)f'(a) + f(a)$$

Cela signifie que f est en dessouss de chacune de ses tangentes : f est donc concave.

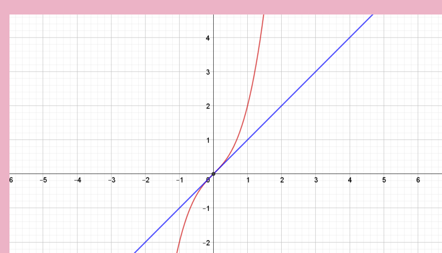
Exemple 6 *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 9x^2 + 4$.*
Étudier la convexité de la fonction f.
On va calculer la dérivée seconde de cette fonction :

$$f''(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 - 9x^2 + 4\right)'' = \left(\frac{1}{3} \times 3x^2 - 9 \times 2x\right)' = 2x - 18 \begin{cases} \textit{convexe pour } x \geq 9 \\ \textit{concave pour } x \leq 9 \end{cases}$$

6 Point d'inflexion

Définition

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
Un point d'inflexion est un point où la courbe traverse sa tangente en ce point.

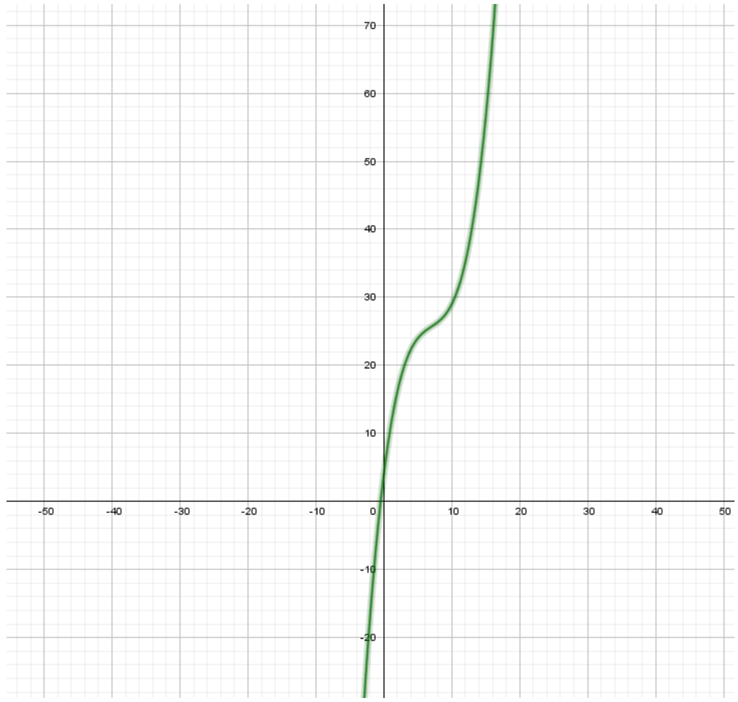


Remarque 1 *Au point d'inflexion, la fonction change de convexité.*

Exemple 7 *Une entreprise fabrique des clés USB avec un maximum de* 10000 *par mois.*
Le coût de fabrication C (en milliers d'euros) de x milliers de clés produites s'exprime par :

$$C(x) = 0.05x^3 - 1.05x^2 + 8x + 4$$

1. *A l'aide de la calculatrice, conjecturer quant à la convexité de la fonction C.*
   En déduire si la courbe possède un point d'inflexion.
   La courbe représentant la fonction f est :



En recadrant la fenêtre graphique convenablement, on se rend compte que la courbe est concave puis convexe, elle possède un point d'inflexion en $x \approx 7$; si on ne recadre pas la fenêtre graphique, on peut passer à côté de points d'inflexion et croire que la courbe est concave pour tout x.

2. *Démontrer ces résultats.*
On va calculer la dérivée seconde de f :

$$f''(x) = \left(f'(x)\right)' = \left(\left(0.05x^3 - 1.05x^2 + 8x + 4\right)'\right)' = \left(0.15x^2 - 2.1x + 8\right)' = 0.3x - 2.1$$

On détermine ensuite son signe :

$$\begin{cases} 0.3x - 2.1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 7 \\ 0.3x - 2.1 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 7 \end{cases}$$

Donc la fonction f est concave pour $x \leq 7$ et convexe pour $x \geq 7$: le changement de convexité a lieu en $x = 7$ qui est alors l'abscisse du point d'inflexion de la courbe.

3. *Interpréter ces résultats dans cadre du contexte modélisé par l'exercice.*
La croissance du coût de fabrication ralentit pour tant que moins de 7000 clées USB sont produites et à partir de 7000 clés USB la croissance du coût de fabrication s'accélère.

Exemple 8 *Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 2x^2$.*

1. *Étudier la convexité de la fonction f.*
On va calculer la dérivée seconde de la fonction f :

$$f''(x) = \left(\left(x^3 - 2x^2\right)'\right)' = \left(3x^2 - 4x\right)' = 6x - 4$$

On détermine ensuite son signe :

$$\begin{cases} 6x - 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{3}{3} \\ 6x - 4 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{2}{3} \end{cases}$$

Donc la fonction f est concave pour $x \leq \frac{2}{3}$ et convexe pour $x \geq \frac{2}{3}$: le changement de convexité a lieu en $x = \frac{2}{3}$ qui est alors l'abscisse du point d'inflexion de la courbe.

2. *Déterminer l'équation de la tangente à la fonction en* $x = -1$.
L'équation de la tangente à la courbe en $x = -1$ *est :*

$$y = f'(-1)(x-(-1)) + f(-1) = 7(x+1) - 3 = 7x + 4$$

3. *En déduire que pour tout réel x négatif, on a :*

$$x^3 - 2x^2 \leq 7x + 4$$

Comme la fonction est concave pour $x \leq \frac{2}{3}$*, elle est concave en* $x = -1$*. Cela signifie que la courbe est sous sa tangente en* $x = -1$*, c'est-à-dire :*

$$x^3 - 2x^2 \leq 7x + 4$$