Suites numériques : exercices

Exercice 1

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 8$ et, pour tout entier naturel : n $u_{n+1} = 0,4u_n + 3$. dont on a calculé les premiers termes grâce à un tableur :

	A	B
1	0	8
2	1	[redacted]
3	2	[redacted]
4	3	5,192
5	4	5,0768
6	5	5,03072
7	6	5,012288
8	7	5,0049152
9	8	5,00196608
10	9	5,000786432
11	10	5,000314573
12	11	5,000125829
13	12	5,000050332
14	13	5,000020133
15	14	5,000008053
16	15	5,000003221
17	16	5,000001288
18	17	5,000000515
19	18	5,000000206
20	19	5,000000082
21	20	5,000000033
22		

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Quelle formule a-t-on pu saisir dans la cellule B2 de la feuille de calcul afin d'obtenir les premiers termes de cette suite par recopie vers le bas ?
3. En utilisant cette copie d'écran, que peut-on conjecturer sur la limite de la suite (u_n) ?
4. On considère l'algorithme suivant :

Les variables sont l'entier naturel N et le réel U.	
Initialisation :	Affecter à N la valeur 0
	Affecter à U la valeur 8
Traitement :	TANT QUE U $- 5 > 0,01$
	Affecter à N la valeur N + 1
	Affecter à U la valeur $0,4$U $+ 3$
	Fin TANT QUE
Sortie :	Afficher N

   Par rapport à la suite (u_n), quelle est la signification de l'entier N affiché ?

5. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - 5$. On admet que la suite (v_n) est géométrique de premier terme $v_0 = 3$ et de raison $0,4$.
   (a) Exprimer v_n en fonction de n.
   (b) Déterminer la limite de la suite (v_n).
   (c) Le résultat précédent permet-il de valider la conjecture faite à la question 3 ?
   Pourquoi ?

Exercice 2

1. L'algorithme ci-dessous permet de calculer les termes successifs d'une suite que l'on appellera (u_n).

Entrée :	Saisir la valeur de l'entier naturel n
Traitement :	Affecter 2 à la variable u
	Pour i variant de 1 à n
	Affecter $1,5u$ à u
	Fin de Pour
Sortie :	Afficher u

Quelles valeurs affiche cet algorithme lorsque l'on saisit $n = 1$, puis $n = 2$ et enfin $n = 3$?

2. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 1,5u_n$.
   (a) Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Préciser ses éléments caractéristiques.
   (b) Pour tout entier naturel n, donner l'expression du terme u_n en fonction de n.
3. On considère la suite (S_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n.$$

   (a) Calculer les valeurs des termes S_0, S_1 et S_2.
   (b) Quelles modifications doit-on faire à l'algorithme précédent pour qu'il affiche la valeur du terme S_n pour un n donné ?
   Écrire ce nouvel algorithme sur sa copie.
   (c) Calculer le terme S_n en fonction de l'entier naturel n.
   (d) En déduire la limite de la suite (S_n).

Exercice 3

« *En 2009, les Français ont en moyenne produit* 374 *kg de déchets ménagers par habitant.* »

Source Ademe

Le maire d'une commune de 53700 habitants constata avec déception que ses administrés avaient produit 23000 tonnes de déchets en 2009, Il décida alors de mettre en place une nouvelle campagne de sensibilisation au recyclage des papiers, plastiques, verres et métaux.

Cela permit à la ville d'atteindre 400 kg de déchets ménagers en moyenne par habitant en 2011 et d'espérer réduire ensuite cette production de 1,5 % par an pendant 5 ans.

1. Justifier la déception du maire en 2009.
2. On note $d_0 = 400$. Pour tout nombre entier naturel non nul n, on note d_n la quantité (en kg) de déchets ménagers produite par habitant de cette ville durant l'année $2011 + n$.
   (a) Montrer que $d_1 = 0,985d_0$.
   (b) Déterminer la nature de la suite (d_n). Exprimer d_n en fonction de n puis calculer la limite de la suite (d_n).
   (c) Quelle devrait être, à ce rythme là , la production en kilogrammes de déchets ménagers par habitant dans cette ville en 2014 ?
3. On considère l'algorithme suivant :

Les variables sont l'entier naturel N et le réel d.	
Initialisation :	Affecter à N la valeur 0
	Affecter à d la valeur 400
Traitement :	Tant que $d > 374$
	Affecter à N la valeur $N + 1$
	Affecter à d la valeur $0,985d$
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher N

Donner la valeur affichée pour N et interpréter ce résultat.

Exercice 4

On considère la suite (u_n) vérifiant $u_0 = \frac{3}{2}$, et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{u_n+1}{3}$.

1. Calculer u_1 et u_2. La suite (u_n) est-elle une suite géométrique ?
2. Pour tout nombre entier naturel n, on pose $v_n = u_n - \frac{1}{2}$. Justifier que (v_n) est une suite géométrique. En préciser le premier terme et la raison.
3. Exprimer v_n, puis u_n en fonction de n. En déduire la limite de la suite (u_n) en $+\infty$.