Combinatoire et dénombrement : activités

Exemple 1 (Ensemble des parties d'un ensemble) *Soit E l'ensemble des opérations élémentaires pour faire un calcul :*

$$E = \{+, -, \times, \div\}$$

Dans les questions qui vont suivre, on va appeler **calculs** *un ensemble constitué des opérations de E, utilisées chacune au plus une fois.*

1. *Faire la suite de tous les calculs qu'il est possible de faire en suivant cette règle.*
2. *On appelle $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble des opérations, c'est également l'ensemble des sous ensembles de E.*
   Donner le cardinal de $\mathscr{P}(E)$.
3. *Donner le lien entre le nombre 2, le cardinal de E et le cardinal de $\mathscr{P}(E)$.*
4. *Conjecturer quant à la généralisation de la relation précédente, peu importe le cardinal de l'ensemble fini E.*

Exemple 2 (k-uplets) *Un nombre binaire est un nombre formé de 0 et de 1 : chaque entier naturel correspond à un nombre binaire et réciproquement.*
C'est de cette manière que les nombres entiers ont été codés dans les premiers ordinateurs.

1. *Écrire tous les nombres binaires différents à 4 chiffres que l'on peut écrire avec des 0 et des 1. Ces différents nombres sont appelés des 4-uplets.*
2. *Établir un lien entre 2, 4 et le cardinal de l'ensemble des nombres précédemment trouvés.*
3. *Combien de nombres décimaux à deux chiffres peut-on écrire ? Ces différents nombres sont appelés des 2-uplets. Faire le lien entre le cardinal de l'ensemble de ces nombres et les deux nombres 2 et 10.*
4. *En déduire le nombre de k-uplets d'un ensemble E de cardinal n.*

Exemple 3 (Permutation et produit cartésien) *Un club de vacances propose trois activités pour le matin, à faire dans l'ordre souhaité : vélo, canoë, randonnée ; et deux activités l'après-midi : atelier culinaire et atelier poterie, à faire dans l'ordre souhaité.*

1. *Écrire tous les menus possibles pour le matin. On appelle un des menus possibles du matin une permutation. Combien y en a-t-il ?*
2. *Écrire tous les menus possibles pour l'après midi. On appelle un des menus possibles de l'après-midi une permutation. Combien y en a-t-il ?*
3. *On appelle factorielle n, noté $n!$, le nombre $n! = 1 \times 2 \times .. \times n$, avec par convention, $0! = 1$.*
   Exprimer le cardinal de chaque ensemble des deux premières questions, en fonction d'une factorielle.

4. *Conjecturer quant à la formule donnant le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments.*
5. *Écrire tous les menus possibles pour la journée. Les menus de la journée forment ce qu'on appelle un produit cartésien des menus du matin et des menus de l'après-midi.*
6. *Conjecturer quant à la formule donnant le cardinal du produit cartésien* $E \times Y$ *de deux ensembles finis* E *et* Y.

Exemple 4 (Arrangements et combinaisons) *En classe de* $1G$*, un élève doit choisir entre* 3 *spécialités parmi* 5.

1. *Lister toutes les combinaisons possibles.*
2. *Combien y en a-t-il ? Exprimer ce nombre comme un quotient de factorielles.*
3. *Qu'ont de particuliers ces* 3*-uplets ?*
4. *Conjecturer quant au nombre de combinaisons de k éléments parmi un ensemble à n éléments.*
5. *Dans les* 3*uplets que nous avons déterminés précédemment, l'ordre n'a pas d'importance, autrement dit le triplet* $\{M, PC, SVT\}$ *est le même que celui* $\{PC, SVT, M\}$.
   Lister les différents triplets d'ordres différents que l'on peut écrire et exprimer leur cardinal avec une factorielle.
6. *En déduire le nombre de* 3*-uplets d'élements différents où l'ordre de ces éléments a une importance,parmi un ensemble à* 5 *éléments. On appelle ce type de* k*-uplets un arrangement.*
7. *Conjecturer quant au nombre d'arrangements de k éléments dans un ensemble à n éléments.*