Exemple 2

Exemple 2 : Dans l'exemple précédent, on a vu que le résultat de l'opération :

$$\lim_{x\to a} = \frac{0}{0}$$

ne pouvait pas être prévue sans plus de précisions.
Nous allons déterminer quelles autres opérations ne peuvent pas être déterminées dans plus de précisions et comment conclure suivant les informations à notre disposition.
Nous allons nous baser sur le tableau de valeurs suivant :

$C1$	$C2$	$C3$	$C4$	$C5$	$C6$	$C7$	$C8$	$C9$
x	$x+1$	x^2	$\frac{1}{x+1}$	$x+1-(x)$	$x-x^2$	$\frac{x^2}{x+1}$	$\frac{x}{x+1}$	$\frac{x^2}{x^3}$
10^{10}	$\approx 10^{10}$	10^{20}	$\approx 10^{-10}$	1	$-\approx 10^{20}$	$\approx 10^{10}$	≈ 1	10^{-10}
10^{20}	$\approx 10^{20}$	10^{40}	$\approx 10^{-20}$	1	$-\approx 10^{40}$	$\approx 10^{20}$	≈ 1	10^{-20}
10^{30}	$\approx 10^{30}$	10^{60}	$\approx 10^{-30}$	1	$-\approx 10^{60}$	$\approx 10^{30}$	≈ 1	10^{-30}
10^{40}	$\approx 10^{40}$	10^{80}	$\approx 10^{-40}$	1	$-\approx 10^{80}$	$\approx 10^{40}$	≈ 1	10^{-40}
10^{50}	$\approx 10^{50}$	10^{100}	$\approx 10^{-50}$	1	$-\approx 10^{100}$	$\approx 10^{50}$	≈ 1	10^{-50}
10^{60}	$\approx 10^{60}$	10^{120}	$\approx 10^{-60}$	1	$-\approx 10^{120}$	$\approx 10^{60}$	≈ 1	10^{-60}

1. Quelles colonnes dans le tableur nous donne des indications sur le résultat de la limite $\frac{\infty}{\infty}$?
   Les colonnes $C7$ à $C9$ nous donnent des informations sur le résultat de la limite $\frac{\infty}{\infty}$.
2. Conjecturer du résultat de cette limite en fonction du numérateur et du dénominateur.
   On se place dans le cas où le numérateur et le dénominateur sont des polynômes.

On étudie donc le cas de figure suivant :

$$\begin{cases} \text{numérateur } = P(x) \\ \lim\limits_{x \to +\infty} P(x) = +\infty \\ \text{numérateur } = Q(x) \\ \lim\limits_{x \to +\infty} Q(x) = +\infty \end{cases}$$

On peut conjecturer les propriétés suivantes pour la limite de $\frac{P(x)}{Q(x)}$ en $+\infty$

✏ degré de $P(x) >$ degré $Q(x)$: limite infinie

✏ degré de $P(x) <$ degré $Q(x)$: limite 0

✏ degré de $P(x) =$ degré $Q(x)$: limite constante

Le degré d'un polynôme est l'exposant de la plus grande puissance x^n.
Quand les deux polynômes ont le même degré, une étude sur des exemples, en faisant intervenir un tableur, nous permet de conjecturer que la limite du quotient $\frac{P(x)}{Q(x)}$ en $+\infty$ est $\frac{p_n}{q_n}$ avec p_n le terme devant x^n dans $P(X)$ et q_n le terme devant x^n dans $Q(X)$; n étant le degré commun de P et Q.

3. Quelles colonnes dans le tableur nous donne des indications sur le résultat de la limite $\infty - \infty$?
Les colonnes $C5$ à $C6$ nous donnent des informations sur le résultat de la limite $+\infty - \infty$.

4. Conjecturer du résultat de cette limite en fonction des termes intervenants dans la différence.
On peut conjecturer les propriétés suivantes pour la limite de $P(x) - Q(x)$ en $+\infty$

✏ degré de $P(x) >$ degré $Q(x)$: limite $-\infty$

✏ degré de $P(x) <$ degré $Q(x)$: limite $+\infty$

✏ degré de $P(x) =$ degré $Q(x)$: tout est possible

5. Conjecturer les résultats des limites suivantes :

$$\infty + \infty$$
$$\infty^2$$
$$(-\infty)^2$$
$$\frac{1}{\infty}$$
$$\frac{1}{0}$$

$$+\infty + \infty = +\infty$$
$$\infty^2 = +\infty$$
$$(-\infty)^2 = +\infty$$
$$\frac{1}{\infty} = 0$$
$$\frac{1}{0} = \infty$$

6. Déterminer la limite des fonctions suivantes en $+\infty$:

$$x \times \frac{1}{x}$$
$$x \times \frac{1}{x^2}$$
$$x^2 \times \frac{1}{x}$$

Que peut-on en conclure sur la limite $0 \times \infty$?
On va d'abord justifier le fait que l'on parle de $0 \times \infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} x = +\infty$$
$$\lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$$
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

et on a :

$$\begin{aligned} x \times \frac{1}{x} &= 1 \to 1 \\ x \times \frac{1}{x^2} &= \frac{1}{x} \to 0 \\ x^2 \times \frac{1}{x} &= x \to +\infty \end{aligned}$$

Cette forme d'opérations sur les limites est une forme indéterminée

7. Faire le bilan des opérations prévisibles sur les limites et de celles qu'on ne peut pas prédire sans plus d'informations sur les fonctions.

✏ **Formes indéterminées :**

$$0 \times \infty$$
$$\frac{0}{0}$$
$$\frac{\infty}{\infty}$$
$$+\infty - \infty$$

✏ **Formes prévisibles :** Celles vues plus haut et celles faisant opérer des constantes non nulles : des multiplications, additions, soustraction et divisions de constantes non nulles donnent les nombres réels correspondants comme limite.
L'infini peut aussi changer de signe si on le multiplie par une constante négative.