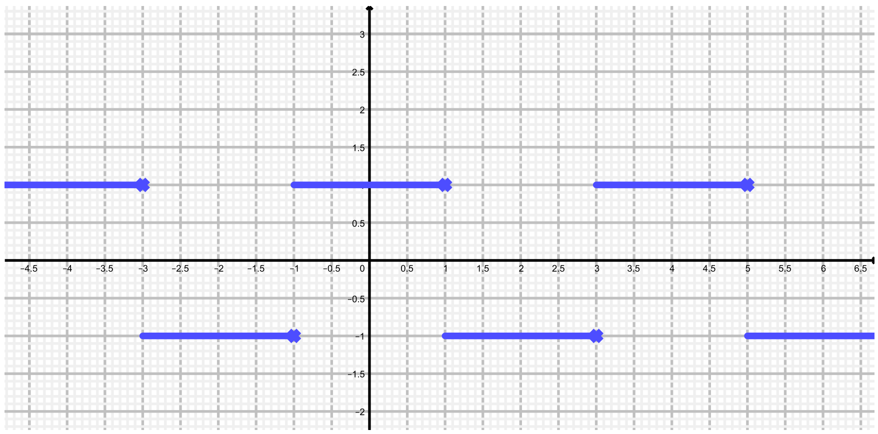
Séries de Fourier : correction des exemples

Exemple 1 *On considère la fonction f périodique dont on donne une partie de la représentation graphique ci-dessous :*



1. *Quelle est la période T de cette fonction ?*
2. *Quelle est sa pulsation ω ?*
3. *Quelle est sa parité ?*
4. *Donner l'expression des a_n et des b_n.*
5. *En appliquant le théorème de Dirichlet en $t = 0$, en déduire la valeur de la série :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

Correction :

1. La fonction est périodique de période 4.
2. La pulsation de la fonction est $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.
3. La fonction est paire car sa représentation graphique est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
4. Comme la fonction est paire, les coefficients b_n sont tous nuls.
On a :

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)dt \\
&= \frac{2}{4}\int_0^{2} f(t)dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{1} 1dt \text{ car la fonction est nulle sur } [1;2] \\
&= \frac{1}{2}[t]_0^1 \\
&= \frac{1}{2}(1-0) \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Ensuite, pour $n \geq 1$:

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(n\omega t)dt \\
&= \frac{4}{4}\int_0^{1} \cos(\frac{n\pi}{2}t)dt \\
&= \left[\frac{1}{\frac{n\pi}{2}}\sin(\frac{n\pi}{2}t)\right]_0^1 \\
&= \frac{2}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\times 1\right) - \frac{2}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\times 0\right) \\
&= \frac{2}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\times 1\right) - 0 \\
&= \frac{2}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)
\end{aligned}$$

On peut simplifier les a_n en fonction de la parité de n :

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{si n} = 2k \\ 2\frac{(-1)^k}{(2k+1)\pi} & \text{si n} = 2k+1 \end{cases}$$

5. Le théorème de Dirichlet nous qu'en les points où la courbe ne fait pas de sauts :

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t)\right)$$

Aux endroits où il y a les sauts, on prendra la moyenne des deux valeurs que semble prendre la courbe à cet endroit. Ici la simplification donne :

$$\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\cos(n\omega t) \\
&= \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{+\infty} 2\frac{(-1)^n}{(2n+1)\pi}\cos\left((2n+1)\frac{\pi}{2}t\right)
\end{aligned}$$

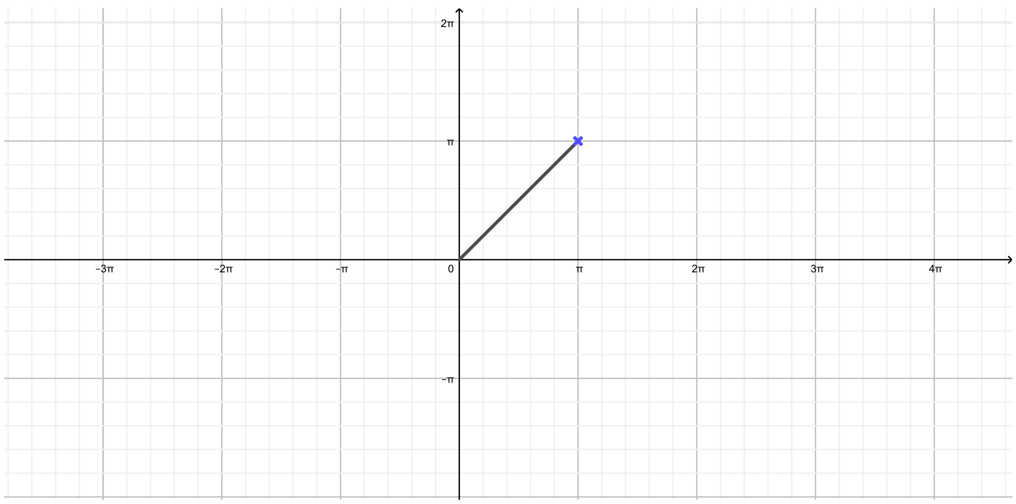
En prenant $t = 0$, on trouve :

$$\begin{aligned} f(0) &= \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{+\infty} 2\frac{(-1)^n}{(2n+1)\pi}\cos(0) \\ &= \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{+\infty} 2\frac{(-1)^n}{(2n+1)\pi} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Donc :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} = \frac{\pi}{4}$$

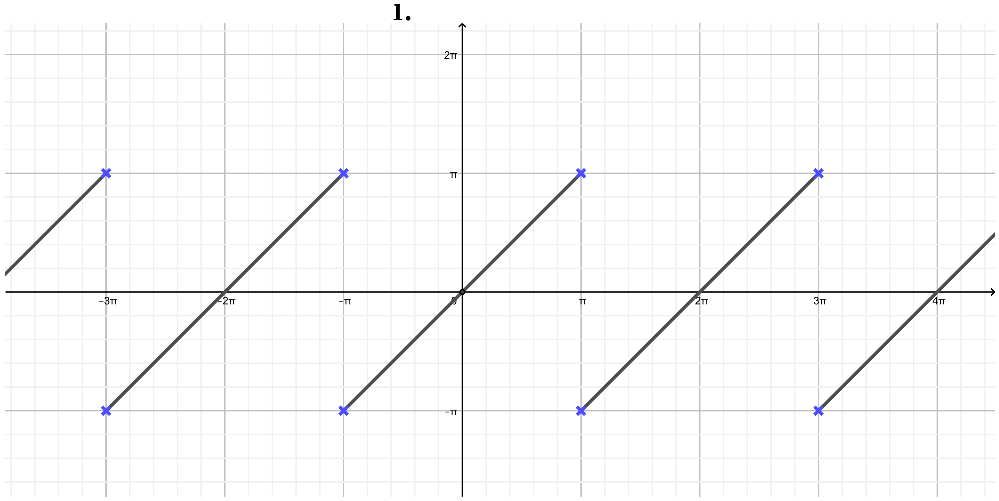
Exemple 2 *On considère la fonction f 2π périodique et impaire dont on donne une partie de la représentation graphique ci-dessous :*



1. *Compléter le graphique.*
2. *Quelle est la période T de cette fonction ?*
3. *Quelle est sa pulsation ω ?*
4. *Donner l'expression des a_n et des b_n.*
5. *En appliquant le théorème de Dirichlet en $t = \frac{\pi}{2}$, retrouver la valeur de la série :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

1.



2. La période de cette fonction est $T = 2\pi$.

3. La pulsation de cette fonction est $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$

4. Comme la fonction est impaire, tous les a_n sont nuls, a_0 compris.
Pour $n \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\sin(n\omega t)dt \\
&= \frac{4}{2\pi}\int_0^{\pi} t\sin(nt)dt \text{ car la fonction est affine de coefficient directeur 1 et d'ordonnée à l'origine 0} \\
&= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{t}{n}\cos(nt) + \frac{1}{n^2}\sin(nt)\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\left(-\frac{\pi}{n}\cos(n\pi) + \frac{1}{n^2}\sin(n\pi)\right) - \left(-\frac{0}{n}\cos(n\times 0) + \frac{1}{n^2}\sin(n\times 0)\right)\right] \\
&= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi}{n}\cos(n\pi) + 0 - 0 + 0\right) \\
&= -\frac{2}{n}\cos(n\pi)
\end{aligned}$$

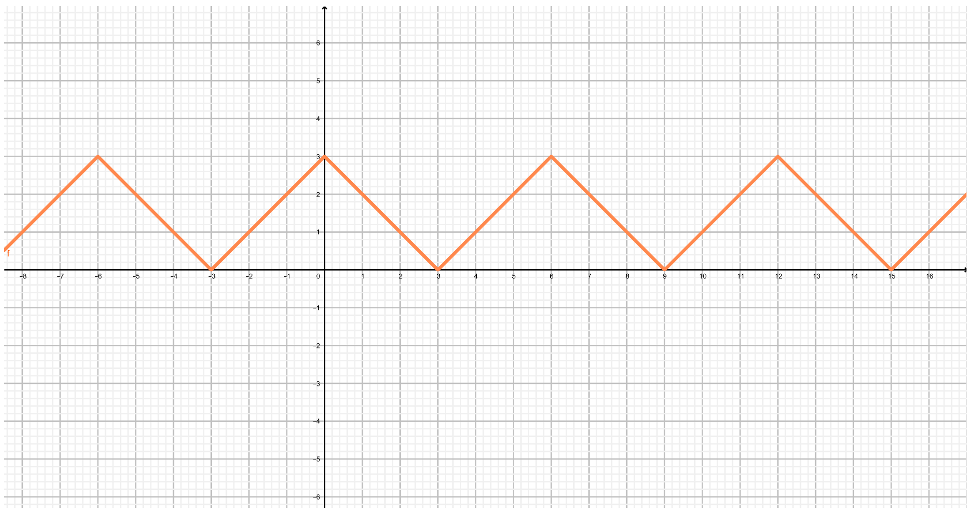
5. L'abscisse $\frac{\pi}{2}$ n'est pas un point de discontinuité, donc le théorème de Dirichlet permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
&f\left(\frac{\pi}{2}\right) \\
=&\frac{\pi}{2} \\
=&a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos\left(n\omega\frac{\pi}{2}\right) + b_n\sin\left(n\omega\frac{\pi}{2}\right)\right) \\
=&0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(0\times\cos\left(n\omega\frac{\pi}{2}\right) - \frac{2}{n}\cos(n\pi)\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right) \\
=&\sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{2}{n}\cos(n\pi)\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) \\
=&\sum_{n=0}^{+\infty} -\frac{2}{2n+1}\times\cos(2\pi n + \pi)\sin\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) \\
=&\sum_{n=0}^{+\infty} -\frac{2}{2n+1}\times(-1)\times(-1)^n
\end{aligned}$$

Donc :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$$

Exemple 3 *On considère la fonction f périodique dont on donne une partie de la représentation graphique ci-dessous :*



1. *Quelle est la période T de cette fonction ?*

2. *Quelle est sa pulsation ω ?*
3. *Quelle est sa parité ?*
4. *Donner l'expression des a_n et des b_n.*
5. *En appliquant le théorème de Dirichlet en $t = 0$, retrouver la valeur de la série :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

6. *En déduire la valeur de la série :*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

Correction :

1. La période de cette fonction est $T = 6$.
2. La pulsation de cette fonction est $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$
3. La fonction est paire car sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
4. Comme la fonction est paire, les coefficients b_n sont nuls pour $n \geq 1$.
   On a :

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)dt \\ &= \frac{2}{6}\int_0^3 f(t)dt \\ &= \frac{1}{3} \text{ aire sous la courbe entre 0 et 3} \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

   Pour $n \geq 1$, on a :

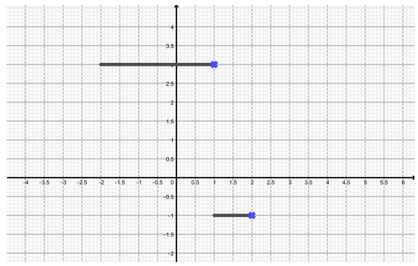
$$\begin{aligned} a_n &= \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(n\omega t)dt \\ &= \frac{4}{6}\int_0^3 (3-t)\cos(n\omega t)dt \text{ après avoir déterminé l'expression de f sur } [0;3] \\ &= \frac{2}{3}\left(\int_0^3 3\cos(n\omega t)dt - \int_0^3 t\cos(n\omega t)dt\right) \\ &= \frac{2}{3}\left(\left[\frac{3}{\frac{n\pi}{3}}\sin\left(\frac{n\pi}{3}t\right)\right]_0^3 - \left[\frac{t}{\frac{n\pi}{3}}\sin\left(\frac{n\pi}{3}t\right) + \frac{1}{\left(\frac{n\pi}{3}\right)^2}\cos\left(\frac{n\pi}{3}t\right)\right]_0^3\right) \\ &= \frac{2}{3}\left(\left[\frac{9}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{3}t\right)\right]_0^3 - \left[\frac{t}{\frac{n\pi}{3}}\sin\left(\frac{n\pi}{3}t\right) + \frac{9}{n^2\pi^2}\cos\left(\frac{n\pi}{3}t\right)\right]_0^3\right) \\ &= \frac{2}{3}\left[\frac{9}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{3}\times 3\right) - \frac{9}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{3}\times 0\right)\right] \\ &- \frac{2}{3}\left[\frac{3}{\frac{n\pi}{3}}\sin\left(\frac{n\pi}{3}\times 3\right) + \frac{9}{n^2\pi^2}\cos\left(\frac{n\pi}{3}\times 3\right) - \left(\frac{0}{\frac{n\pi}{3}}\sin\left(\frac{n\pi}{3}\times 0\right) + \frac{9}{n^2\pi^2}\cos\left(\frac{n\pi}{3}\times 0\right)\right)\right] \\ &= \frac{2}{3}[0-0] - \frac{2}{3}\left[0 + \frac{9}{n^2\pi^2}\cos(n\pi) - 0 + \frac{9}{n^2\pi^2}\right] \\ &= \frac{2}{3}\times\frac{9}{n^2\pi^2}(\cos(n\pi) - 1) \\ &= -\frac{6}{n^2\pi^2}(1-\cos(n\pi)) \end{aligned}$$

5. La valeur $t = 0$ n'est pas une valeur de discontinuité de f, donc le théorème

de Dirichlet nous permet d'écrire :

$$
\begin{aligned}
& f(0) = 0 \\
\Leftrightarrow & 0 = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos(n\omega \times 0) + b_n \sin(n\omega \times 0)\right) \\
\Leftrightarrow & 0 = \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{6}{n^2\pi^2}\left(1 - \cos(n\pi)\right)\cos(0) \\
\Leftrightarrow & 0 = \frac{3}{2} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{6}{(2n+1)^2\pi^2} \times 2 \\
\Leftrightarrow & \frac{3}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{12}{(2n+1)^2\pi^2} \\
\Leftrightarrow & \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}
\end{aligned}
$$

Exemple 4 *On considère la fonction f périodique dont on donne une partie de la représentation graphique ci-dessous :*



1. *Quelle est la période T de cette fonction ?*
2. *Quelle est sa pulsation ω ?*
3. *Quelle est sa parité ?*
4. *Donner l'expression des a_n et des b_n.*
5. *En appliquant le théorème de Parseval, retrouver la valeur de la série :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

Correction :

1. La période de la fonction est $T = 4$.
2. La pulsation de la fonction est $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.
3. La fonction n'a pas de parité apparente : on va devoir calculer tous les coefficients a_n et b_n.
4. Avant de commencer, on rappelle que la fonction f vaut 2 sur $[-2;1]$ et -1 sur $[1;2]$

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{T}\int_{-2}^{2} f(t)dt \\
&= \frac{1}{4}(\text{ aire sous la courbe sur } [-2;1] - \text{ aire au dessus de la courbe sur } [1;2]) \\
&= \frac{1}{4}(3\times 3 - 1\times 1) \\
&= \frac{1}{4}\times 8 \\
&= 2
\end{aligned}$$

Ensuite, pour $n \geq 1$:

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{T}\int_{-2}^{2} f(t)\cos(n\omega t)dt \\
&= \frac{2}{4}\left(\int_{-2}^{1} 3\cos\left(\frac{n\pi}{2}t\right)dt + \int_{1}^{2} -\cos\left(\frac{n\pi}{2}t\right)dt\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\left[\frac{3}{\frac{n\pi}{2}}\sin\left(\frac{n\pi}{2}t\right)\right]_{-2}^{1} + \left[-\frac{1}{\frac{n\pi}{2}}\sin\left(\frac{n\pi}{2}t\right)\right]_{1}^{2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{6}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\times 1\right) - \frac{6}{n\pi}\sin\left(\frac{-n\pi}{2}\times 2\right) - \frac{2}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\times 2\right) + \frac{2}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\times 1\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{6}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 0 - 0 + \frac{2}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right) \\
&= \frac{4}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)
\end{aligned}$$

ensuite :

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{T}\int_{-2}^{2} f(t)\sin(n\omega t)\,dt\\
&= \frac{2}{4}\left(\int_{-2}^{1} 3\sin\left(\frac{n\pi}{2}t\right)dt + \int_{1}^{2} -\sin\left(\frac{n\pi}{2}t\right)dt\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\left[-\frac{3}{\frac{n\pi}{2}}\cos\left(\frac{n\pi}{2}t\right)\right]_{-2}^{1} + \left[\frac{1}{\frac{n\pi}{2}}\cos\left(\frac{n\pi}{2}t\right)\right]_{1}^{2}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(-\frac{6}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\times 1\right) + \frac{6}{n\pi}\cos\left(\frac{-n\pi}{2}\times 2\right) + \frac{2}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\times 2\right) - \frac{2}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\times 1\right)\right)\\
&= -\frac{4}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{4}{n\pi}\cos(n\pi)
\end{aligned}$$

On va maintenant simplifier les expressions en fonctions de la parité de n et $\frac{n}{2}$ pour $n \geq 1$:

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2k \\ -4\frac{(-1)^k}{(2k+1)\pi} & \text{si } n = 2k+1 \end{cases}$$

$$b_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 4k \\ -4\frac{1}{(4k+1)\pi} & \text{si } n = 4k+1 \\ 8\frac{1}{(4k+2)\pi} & \text{si } n = 4k+2 \\ -4\frac{1}{(4k+3)\pi} & \text{si } n = 4k+3 \end{cases}$$

5. Le théorème de Parseval nous permet de relier l'expression de la valeur efficace au carré de la fonction f sur une période et une série :

$$\mu_{eff}^2 = \frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)^2\,dt = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right)$$

On a :

$$\frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)^2\,dt$$

$$= \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} f(t)^2\,dt = \frac{1}{4}\left(\int_{-2}^{1} 3^2\,dt + \int_{1}^{2}(-1)^2\,dt\right) = \frac{1}{4}\left(\int_{-2}^{1} 9\,dt + \int_{1}^{2} 1\,dt\right) = \frac{1}{4}(9\times(1-(-2)) + 1\times(2-1)) = 7$$

Ensuite :

$$a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right)$$

$$= 2^2 + \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{4(-1)^n}{(2n+1)\pi}\right)^2 + \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\left(-\frac{4}{(4k+1)\pi}\right)^2 + \left(\frac{4}{(2k+1)\pi}\right)^2 + \left(-\frac{4}{(4k+3)\pi}\right)^2\right)\right)$$

$$= 4 + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{48}{(2n+1)^2\pi^2}$$

$$= 4 + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{24}{(2n+1)^2\pi^2}$$

On en déduit la relation suivante :

$$\begin{aligned}
& 4 + \frac{1}{\pi^2}\times\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{24}{(2n+1)^2} = 7\\
\Leftrightarrow & \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{3\pi^2}{24}\\
\Leftrightarrow & \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}
\end{aligned}$$