Évaluation du 25/09/2020 : correction

Exercice 1 *Résoudre l'équation différentielle suivante de condition initiale $f(0) = 0$:*

$$(E) \;:\; y'(t) - 3y(t) = 2e^{5t}$$

après avoir vérifié que $g(t) = e^{5t}$ était une solution particulière de (E).
On commence par résoudre l'équation homogène :

$$(E) \;:\; y'(t) - 3y(t) = 0$$

Les solutions de cette équation sont de la forme $Ke^{\frac{3}{1}t} = Ke^{3t}$ avec K une constante réelle.
On calcule ensuite $g'(t) - 3g(t)$:

$$g'(t) - 3g(t) = (e^{5t})' - 3e^{5t} = 5e^{4t} - 3e^{4t} = 2e^{4t}$$

La fonction g est donc bien une solution particulière de (E).
Les solutions de (E) sont de la forme $Ke^{3t} + e^{5t}$ avec K une constante réelle.
En ce qui concerne la condition initiale, on doit résoudre l'équation :

$$Ke^{3\times 0} + e^{5\times 0} = 0 \Leftrightarrow K + 1 = 0 \Leftrightarrow K = -1$$

La solution cherchée est donc $0 \times -e^{3t} + e^{5t}$

Exercice 2 *Résoudre l'équation différentielle suivante de condition initiale $f(0) = 1$:*

$$(E) \;:\; 3y'(t) + 6y(t) = 18$$

après avoir cherché une solution particulière sous la forme d'une constante $g(t) = \alpha$.
On commence par résoudre l'équation homogène :

$$(E) \;:\; 3y'(t) + 6y(t) = 0$$

Les solutions de cette équation sont de la forme $Ke^{-\frac{6}{3}t} = Ke^{-2t}$ avec K une constante réelle.
On déterminer ensuite la constante α :

$$3\alpha' + 6\alpha = 18 \Leftrightarrow 3 \times 0 + 6\alpha = 18 \Leftrightarrow 6\alpha = 18 \Leftrightarrow \alpha = \frac{18}{6} = 3$$

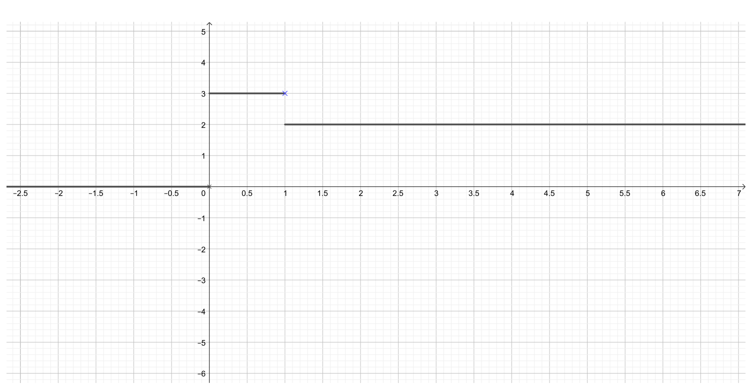
Les solutions de (E) sont de la forme $Ke^{3t} + 3$ avec K une constante réelle.
En ce qui concerne la condition initiale, on doit résoudre l'équation :

$$Ke^{3\times 0} + 3 = 1 \Leftrightarrow K + 3 = 1 \Leftrightarrow K = -2$$

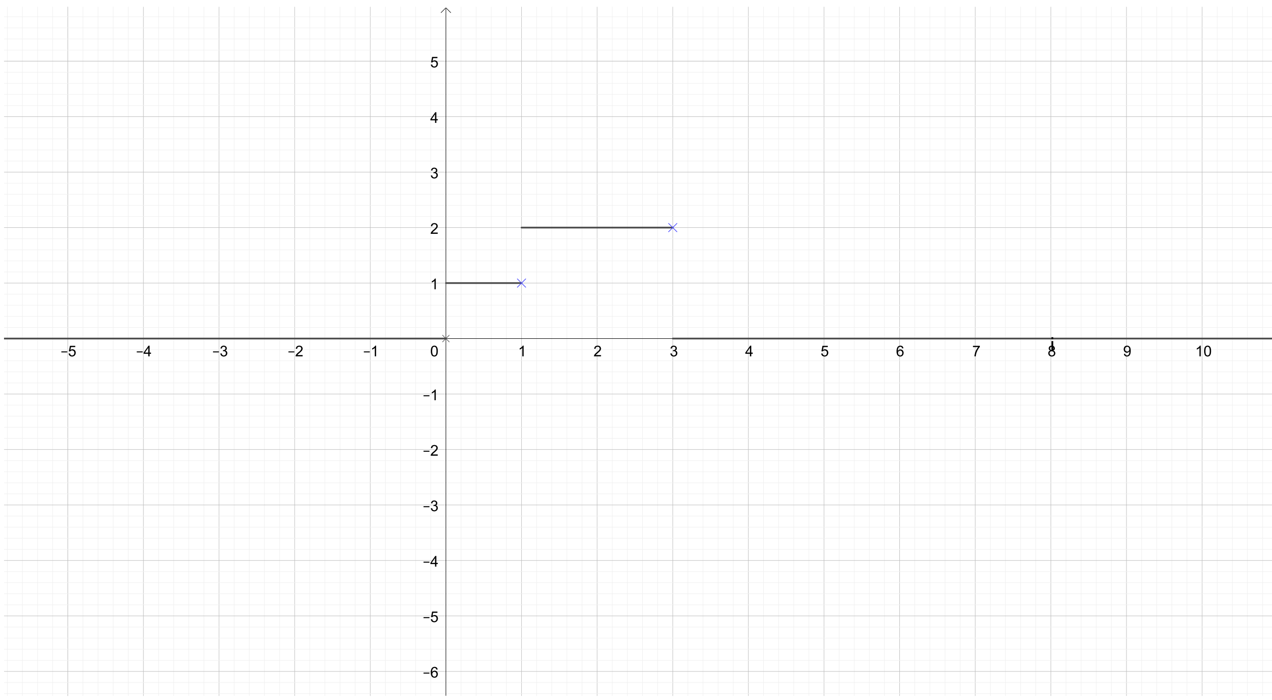
La solution cherchée est donc $-2e^{-3t} + 3$

Exercice 3 *Représenter graphiquement les fonctions suivantes :*

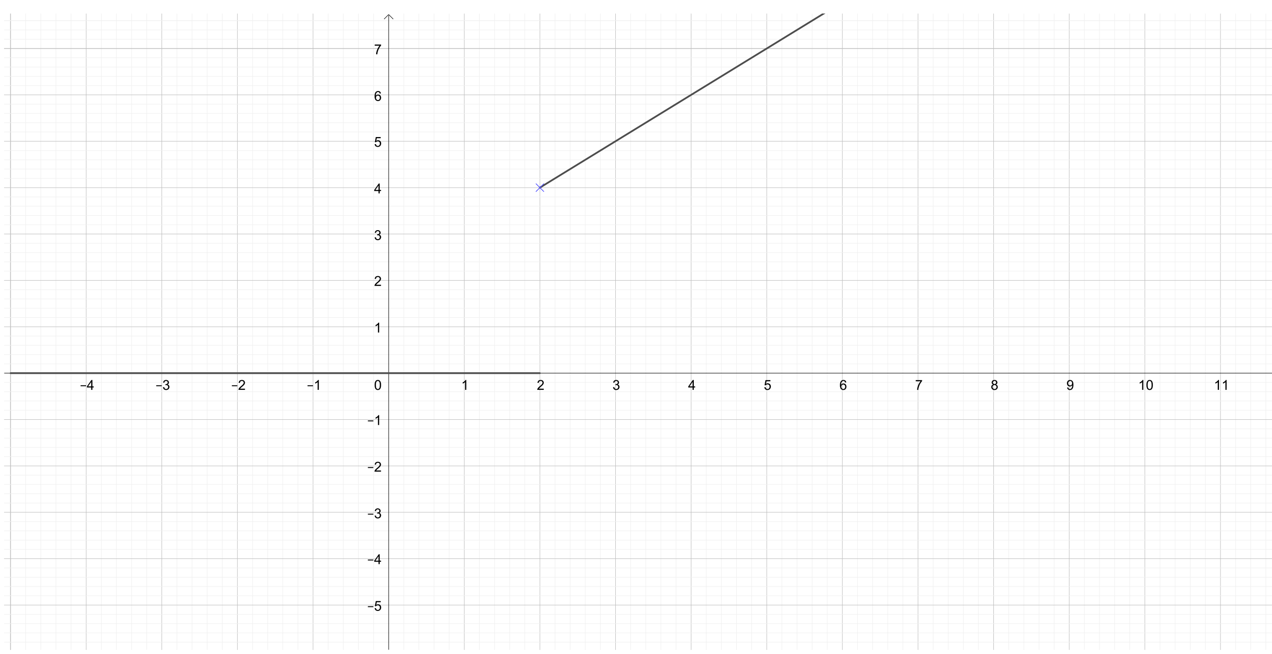
$$f(t) = 3\mathscr{U}(t) - 1\mathscr{U}(t-1)$$



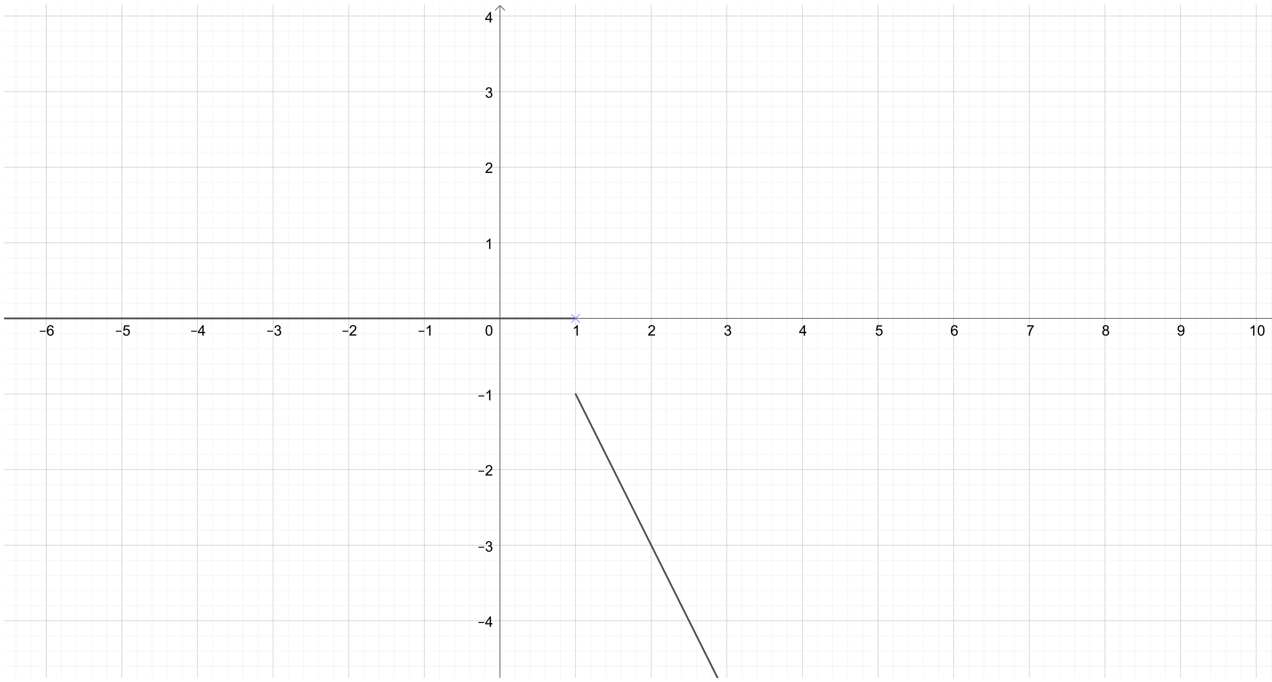
$$g(t) = \mathscr{U}(t) + \mathscr{U}(t-1) - 2\mathscr{U}(t-3)$$



$$h(t) = (t+2)\mathscr{U}(t-2)$$



$$i(t) = (-2t+1)\mathscr{U}(t-1)$$


4
3
2
1
−6
−5
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
−1
−2
−3
−4