✎ Fonction logarithme 1

On considère la fonction suivante définie sur $]0;+\infty[$:

$$f(x) = 3x + 4 - 2x\ln(x)$$

1. Calculer la limite de f en 0^+
2. Calculer la limite de f en $+\infty$
3. Calculer la dérivée de f.
4. Déterminer le signe de $f'(x)$.
5. En déduire le tableau de variation de $f(x)$.
6. Déterminer le nombre de solutions de $f(x) = 0$ et en donner un encadrement d'amplitude 10^{-2}.

Correction :

1. On sait que :

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0^+} 3x+4=4\\
&\lim_{x\to 0^+} 2x\ln(x)=0 \quad \text{par propriété du cours}\\
\text{donc } &\lim_{x\to 0^+} 3x+4-2x\ln(x)=4
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to +\infty} 3x+4=+\infty\\
&\lim_{x\to +\infty} -2x\ln(x)=-\infty \quad \text{par propriété du cours}\\
\text{donc } &\lim_{x\to +\infty} 3x+4-2x\ln(x)=-\infty \quad \text{par prédominance de } x\ln(x)
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 3-2\,(x\ln(x))'\\
&= 3-2\left(x'\ln(x)+x\times\ln(x)'\right)'\\
&= 3-2\left(\ln(x)+x\times\frac{1}{x}\right)'\\
&= 3-2\,(\ln(x)+1)'\\
&= 1-2\ln(x)
\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
f'(x) &\geq 0\\
1-2\ln(x) &\geq 0\\
-2\ln(x) &\geq -1\\
\ln(x) &\leq \frac{-1}{-2}\\
x &\leq e^{\frac{-1}{-2}}
\end{aligned}$$

5. On a :

x	0		$e^{\frac{-1}{-2}}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ 4	$\nearrow$	$4+2e^{\frac{-1}{-2}}$	$\searrow$	$-\infty$

6. D'après le tableau de variation, comme $4>0$, la fonction f ne peut pas s'annuler sur l'intervalle $]0;e^{\frac{-1}{-2}}]$.
Pour $x>e^{\frac{-1}{-2}}$, la fonction est décroissante de $4+2e^{\frac{-1}{-2}}>0$ vers $-\infty$, donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe une unique valeur

$\alpha > e^{\frac{-1}{-2}}$ telle que $f(\alpha) = 0$.
En utilisant la calculatrice, on trouve :

$$f(1.64) > 0$$
$$f(1.65) < 0$$
$$1.64 \leq \alpha \leq 1.65$$