Récurrences 6

On considère la suite :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{5u_n+6}{u_n+4} \\ u_0 = 7 \end{cases}$$

1. Calculer u_1.
2. On considère la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{5x+6}{x+4}$$

   Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = f(u_n)$

   a. Montrer que la fonction f est croissante sur $[0; +\infty[$.

   b. Résoudre l'équation $f(x) = x$ sur $[0; +\infty[$.

   c. En déduire que $f(x) > 3$ pour $x > 3$

   d. Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N} : \; u_n > 3$
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(3-u_n)(u_n+2)}{u_n+4}$$

4. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
5. En déduire que la suite (u_n) converge et donner sa limite.
6. On définit la suite (v_n) pour tout entier naturel par :

$$v_n = \frac{u_n-3}{u_n+2}$$

   Calculer v_0
7. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{2}{7}$.
8. Déterminer la limite de (v_n) puis celle de (u_n).

1. On a :

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{5 \times u_0 + 6}{u_0 + 4} \\ &= \frac{5 \times 7 + 6}{7 + 4} \\ &= \frac{41}{11} \end{aligned}$$

2. **a.** On va calculer la dérivée de la fonction f :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(5x+6)' \times (x+4) - (5x+6) \times (x+4)'}{(x+4)^2} \\ &= \frac{5 \times (x+4) - (5x+6) \times 1}{(x+4)^2} \\ &= \frac{5x + 20 - 5x - 6}{(x+4)^2} \\ &= \frac{14}{(x+4)^2} \end{aligned}$$

Comme la dérivée de la fonction est strictement positive, on en déduit que la fonction f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$

b. On a :

$$\begin{aligned} & f(x) = x \\ & \Leftrightarrow \frac{5x+6}{x+4} = x \\ & \Leftrightarrow 5x + 6 = x(x+4) \\ & \Leftrightarrow 5x + 6 = x^2 + 4x \\ & \Leftrightarrow x^2 - 1x - 6 = 0 \end{aligned}$$

On doit résoudre l'équation du second degré en commençant par calculer le discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 25 > 0$$

Il y a donc deux racines réelles disctinctes :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 + \sqrt{25}}{2} = 3 \\ x_2 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 - \sqrt{25}}{2} = -2 \end{aligned}$$

c. On sait que f est croissante pour $x > 0$, donc :

$$x > 3 \Rightarrow f(x) > f(3) = 3$$

Initialisation :
On a $u_0 = 7 > 3$
L'initialisation est établie.
Hérédité :

On suppose que la propriété est vraie pour un rang $n \geq 0$:

$$u_n > 3 : \text{ c'est l'hypothèse de récurrence}$$

On démarre de l'hypothèse de récurrence :

$$u_n > 3 \Rightarrow u_{n+1} = f(u_n) > f(3) = 3 \text{ par croissance de } f$$

L'hérédité est établie.
Donc, $\forall n \in \mathbb{N} : u_n > 3$

3. On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{5u_n - 6}{u_n + 4} - u_n \\ &= \frac{5u_n - 6}{u_n + 4} - \frac{(u_n + 4)u_n}{u_n + 4} \\ &= \frac{-u_n^2 + 1u_n - 6}{u_n + 4} \end{aligned}$$

Or :

$$\frac{(3 - u_n)(u_n + 2)}{u_n + 4} = \frac{3u_n - 3 \times 2 - u_n^2 - 2u_n}{u_n + 4} = \frac{-u_n^2 + 1u_n - 6}{u_n + 4}$$

4. Comme $u_n > 3$ alors $3 - u_n < 0$, $u_n + 2 > 0$ et $u_n + 4 > 0$, par conséquent, $u_{n+1} - u_n < 0$ et donc la suite (u_n) est décroissante.

5. Comme la suite (u_n) est décroissante et minorée par 3, alors d'après le théorème de convergence monotone, elle converge vers une limite l qui vérifie $f(l) = l$.
On a donc le choix entre 3 et -2 pour l et comme l est positif, on en déduit que $l = 3$.

6. On a :

$$v_0 = \frac{u_0 - 3}{u_0 + 2} = \frac{4}{5}$$

7. On a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{u_{n+1} - 3}{u_{n+1} + 2} \\ &= \frac{\frac{5u_n+6}{u_n+4} - 3}{\frac{5u_n+6}{u_n+4} + 2} \\ &= \frac{2u_n - 6}{7u_n + 14} \\ &= \frac{2}{7} \times \frac{u_n - 3}{u_n + 2} \\ &= \frac{2}{7} \times v_n \end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison $\frac{2}{7}$ et de premier terme de $v_0 = \frac{4}{5}$.

8. On peut exprimer en fonction de n et de v_0 :

$$v_n = \frac{4}{5}\left(\frac{2}{7}\right)^n$$

Comme la raison est comprise entre 0 et 1, la suite tend vers 0 et on a :

$$\begin{aligned}
&v_n = \frac{u_n - 3}{u_n + 2} \\
\Leftrightarrow\, & v_n(u_n + 2) = u_n - 3 \\
\Leftrightarrow\, & v_n u_n - u_n = -2v_n - 3 \\
\Leftrightarrow\, & u_n = \frac{-2v_n - 3}{v_n - 1}
\end{aligned}$$

Par opération sur les limites, on en déduit que la limite de (u_n) est $\frac{-3}{-1} = 3$