Représentations paramétriques et équations cartésiennes

Exercice 1 *Soit $\mathscr{D}$ la droite passant par le point A et dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}$, donnés ci-dessus.*
Dans chacun des cas suivants, déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}$ et une autre point de cette droite.

1. $A(-2;4;1)$ *et* $\overrightarrow{u}(3;2;1)$
2. $A(5;0;-4)$ *et* $\overrightarrow{u}(-2;4;3)$
3. $A(-7;8;2)$ *et* $\overrightarrow{u}(0;2;-3)$
4. $A(16;4;0)$ *et* $\overrightarrow{u}(-3;3;0)$

Exercice 2 *Soient* $G(4;-6;-7)$ *et* $F(8;-3;-5)$ *deux points de l'espace.*
Déterminer une représentation paramétrique de la droite (FG).

Exercice 3 *On considère une droite Δ dont une représentation paramétrique est :*

$$\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 7 - t \\ z = -11 - t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

1. *Justifier que les points* $A(-5;11;-7)$ *et* $B(9;-3;-21)$ *appartiennent à la droite* Δ.
2. *Les points A et B sont-ils alignés avec le point* $C(-4;4;6)$ *?*
3. *Que peut-on en déduire sur la position relative du point C et de la droite Δ ?*

Exercice 4 *On considère les droites Δ_1 et Δ_2 dont on donne respectivement pour chacune une représentation paramétrique :*

$$\begin{cases} x = 3t - 6 \\ y = t \\ z = 4 \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} x = -3t' + 3 \\ y = 2t' - 3 \\ z = t' + 2 \end{cases} \qquad t' \in \mathbb{R}$$

1. *Justifier que le point* $A(-3;1;4)$ *appartient à chacune de ces deux droites.*
2. *Que peut-on en déduire sur la position relative de Δ_1 et Δ_2 ?*
3. *Ces deux droites sont-elles perpendiculaires ? confondues ?*

Exercice 5 *On considère la droite $(\mathscr{D})$ dont une représentation paramétrique est :*

$$\begin{cases} x = 4 - 3t \\ y = -1 + 2t \\ z = 3 + 2t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

Le point $B(4;-1;3)$ *est-il le projeté orthogonal sur la droite $(\mathscr{D})$ du point* $A(-1;0;1)$ *? Justifier.*

Exercice 6 *On considère les plans définis par les équations cartésiennes suivantes :*

$$\begin{aligned}(\mathscr{P}_1) &: 2x-5y+z-4=0\\(\mathscr{P}_2) &: x+3y-z+12=0\\(\mathscr{P}_3) &: 8x-y+5=0\\(\mathscr{P}_4) &: x-z=0\end{aligned}$$

Déterminer les coordonnées d'un vecteur normal à chacun de ces plans.

Exercice 7 *On considère le plan $\mathscr{P}$ qui passe par le point A et donc le vecteur $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal.*
Déterminer une équation cartésienne de $\mathscr{P}$ dans chacun des cas suivants :

$$\begin{array}{ll} A(-2;4;1) & \overrightarrow{n}(4;2;-1)\\ A(5;3;-2) & \overrightarrow{n}(1;-3;5)\\ A(3;3;-5) & \overrightarrow{n}(1;0;-1)\\ A(3;3;-5) & \overrightarrow{n}(0;-2;3)\end{array}$$

Exercice 8 *On considère les points $A(1;-1;4)$, $B(2;-3;0)$ et $C(2;-1;5)$.*

1. *Justifier que ces trois plans définissent bien un plan.*
2. *Justifier que le vecteur $\overrightarrow{n}(2;5;-2)$ est un vecteur normal à ce plan.*
3. *En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).*

Exercice 9 *On considère un plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne $5x-3y+2z=0$ ainsi que les points $A(1;1;-1)$, $B\left(0;3;\frac{9}{2}\right)$ et $C(4;0;-10)$.*
Justifier que le plan $(\mathscr{P})$ est le plan (ABC).

Exercice 10 *On considère le plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne $-x+2y+2z-1=0$ et le point $A(1;1;1)$.*
Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathscr{P}$.

Exercice 11 *On considère le plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne $3x-5y+2z+1=0$ et la droite Δ de représentation paramétrique :*

$$\begin{cases} x=2-2t\\ y=5-3t\\ z=2t\end{cases}$$

1. *Justifier que la droite Δ et le plan $\mathscr{P}$ ne sont pas parallèles.*
2. *Justifier qu'un point $M(x;y;z)$ appartient à l'intersection de plan et de cette droite s'il existe $t\in\mathbb{R}$ tel que :*

$$3(2-2t)-5(5-3t)+2(2t)+1=0$$

3. *En déduire l'intersection entre le plan et la droite.*

Exercice 12 *L'espace est rapporté un repère orthonormal où l'on considère :*

- *les points* $A(2\,;\,-1\,;\,0)$ $B(1\,;\,0\,;\,-3)$, $C(6\,;\,6\,;\,1)$ *et* $E(1\,;\,2\,;\,4)$ *;*
- *Le plan* $\mathscr{P}$ *d'équation cartésienne* $2x-y-z+4=0$.

1. a. *Démontrer que le triangle ABC est rectangle en A.*

b. *Calculer le produit scalaire* $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$ *puis les longueurs BA et BC.*

c. *En déduire la mesure en degrés de l'angle* $\widehat{ABC}$ *arrondie au degré.*

2. a. *Démontrer que le plan* $\mathscr{P}$ *est parallèle au plan ABC.*

b. *En déduire une équation cartésienne du plan ABC.*

c. *Déterminer une représentation paramétrique de la droite* $\mathscr{D}$ *orthogonale au plan ABC et passant par le point E.*

d. *Démontrer que le projeté orthogonal H du point E sur le plan ABC a pour coordonnées* $\left(4\,;\,\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{5}{2}\right)$.

3. *On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par* $\mathscr{V}=\dfrac{1}{3}\mathscr{B}h$ *où* $\mathscr{B}$ *désigne l'aire d'une base et h la hauteur de la pyramide associée à cette base.*
Calculer l'aire du triangle ABC puis démontrer que le volume de la pyramide ABCE est égal à $16{,}5$ *unités de volume.*

Exercice 13 *L'espace est muni d'un repère orthonormé* $\left(O,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.
On considère :

- *le point* $A(1\,;\,-1\,;\,-1)$ *;*
- *le plan* $\mathscr{P}_1$*, d'équation :* $5x+2y+4z=17$ *;*
- *le plan* $\mathscr{P}_2$ *d'équation :* $10x+14y+3z=19$ *;*
- *la droite* $\mathscr{D}$ *de représentation paramétrique :*

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 1+2t\\ y &=& -t\\ z &=& 3-2t\end{array}\right. \qquad \text{où } t \text{ décrit } \mathbb{R}.$$

1. *Justifier que les plans* $\mathscr{P}_1$ *et* $\mathscr{P}_2$ *ne sont pas parallèles.*

2. *Démontrer que* $\mathscr{D}$ *est la droite d'intersection de* $\mathscr{P}_1$ *et* $\mathscr{P}_2$.

3. a. *Vérifier que A n'appartient pas à* $\mathscr{P}_1$.

b. *Justifier que A n'appartient pas à* $\mathscr{D}$.

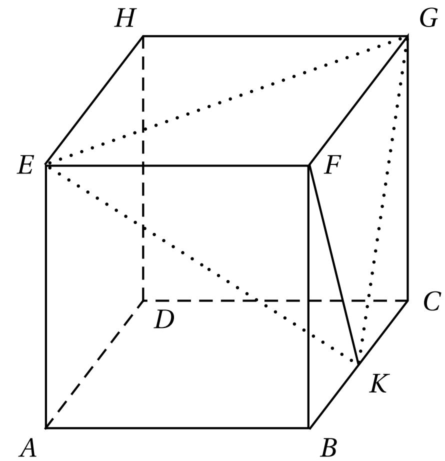
4. *Pour tout réel t, on note M le point de* $\mathscr{D}$ *de coordonnées* $(1+2t\,;\,-t\,;\,3-2t)$.
On considère alors la fonction f qui à tout réel t associe AM^2*, soit* $f(t)=AM^2$.

a. *Démontrer que pour tout réel t, on a :* $f(t)=9t^2-18t+17$.

b. *Démontrer que la distance AM est minimale lorsque M a pour coordonnées* $(3\ ;\ -1\ ;\ 1)$.

5. *On note H le point de coordonnées* $(3\ ;\ -1\ ;\ 1)$.
Démontrer que la droite (AH) est perpendiculaire à $\mathscr{D}$.

Exercice 14 *On considère un cube ABCDEFGH.*



On appelle K le milieu du segment [BC].
On se place dans le repère $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AE}\right)$ *et on considère le tétraèdre EFGK.*
On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par :

$$V = \frac{1}{3} \times \mathscr{B} \times h$$

où $\mathscr{B}$ *désigne l'aire d'une base et h la hauteur relative à cette base.*

1. *Préciser les coordonnées des points E, F, G et K.*

2. *Montrer que le vecteur* $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ *est orthogonal au plan (EGK).*

3. *Démontrer que le plan (EGK) admet pour équation cartésienne :* $2x - 2y + z - 1 = 0$.

4. *Déterminer une représentation paramétrique de la droite* (d) *orthogonale au plan (EGK) passant par F.*

5. *Montrer que le projeté orthogonal L de F sur le plan (EGK) a pour coordonnées* $\left(\frac{5}{9}\ ;\ \frac{4}{9}\ ;\ \frac{7}{9}\right)$.

6. *Justifier que la longueur LF est égale à* $\dfrac{2}{3}$.

7. *Calculer l'aire du triangle EFG. En déduire que le volume du tétraèdre EFGK est égal à* $\dfrac{1}{6}$.

8. *Déduire des questions précédentes l'aire du triangle EGK.*

9. *On considère les points P milieu du segment [EG], M milieu du segment [EK] et N milieu du segment[GK]. Déterminer le volume du tétraèdre FPMN.*