Orthogonalité et distance dans l'espace

Vecteur de l'espace

Un vecteur de l'espace est défini par une direction de l'espace, un sens et une norme (longueur).

Remarques

Les vecteurs de l'espace suivent les mêmes règles de construction qu'en géométrie plane : relation de Chasles, propriétéz en rapport avec la colinéarité,...

1 Produit scalaire de deux vecteurs

1.1 Définition

Produit scalaire de l'espace

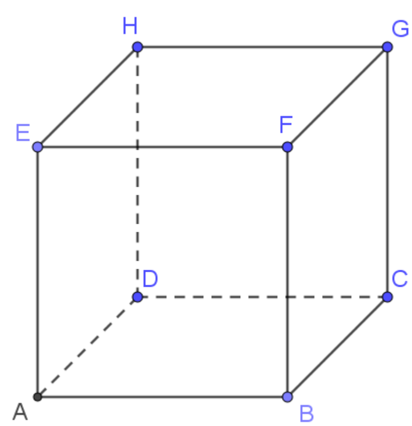
Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace. Il existe un plan $\mathscr{P}$ contenant un représentant de chacun des vecteurs trois points A, B et C tels que :

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\left(\widehat{BAC}\right) = ||\overrightarrow{u}||.||\overrightarrow{v}||.\cos(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})$$

Exemple 1 *ABCDEFGH est un cube d'arrête a.*



On a :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AF} = AB \times AF \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}a^2$$

1.2 Propriétés

Les propriétés du plan sont conservées dans l'espace.

Propriétés

Soit $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de l'espace :

- $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u} = ||\overrightarrow{u}||^2$.
- $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}.\overrightarrow{u}$.
- $\overrightarrow{u}.(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}.\overrightarrow{w}$
- $(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}).\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}.\overrightarrow{u}+\overrightarrow{w}.\overrightarrow{u}$
- $(k\overrightarrow{u}).\overrightarrow{v} = \overrightarrow{u}.(k\overrightarrow{v}) = k(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}), k \in \mathbb{R}$.
- $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux ou au moins l'un des deux vecteurs est nul.

1.3 Identités remarquables

Propriétés

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace :

- $||\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}||^2 = ||\overrightarrow{u}||^2 + 2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + ||\overrightarrow{v}||^2$.
- $||\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}||^2 = ||\overrightarrow{u}||^2 - 2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + ||\overrightarrow{v}||^2$.

1.4 Formules de polarisation

Propriétés

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace :

- $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\left(||\overrightarrow{u}||^2 + ||\overrightarrow{v}||^2 - ||\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}||^2\right)$
- $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\left(||\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}||^2 - ||\overrightarrow{u}||^2 - ||\overrightarrow{v}||^2\right)$
- $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \frac{1}{4}\left(||\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}||^2 - ||\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}||^2\right)$

2 Produit scalaire dans un repère orthonormé

2.1 Base et repère orthonormé

Base de l'espace

Une base $(\overrightarrow{i}\,;\overrightarrow{j}\,;\overrightarrow{k})$ de l'espace est orthonormée si :

- les vecteurs $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$ sont deux à deux orthogonaux.
- les vecteurs $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$ sont unitaires :

$$\overrightarrow{i} = \overrightarrow{j} = \overrightarrow{k} = 1$$

Repère de l'espace

Une repère $(O; \overrightarrow{i}\,;\overrightarrow{j}\,;\overrightarrow{k})$ de l'espace est orthonormé, si sa base $(\overrightarrow{i}\,;\overrightarrow{j}\,;\overrightarrow{k})$ est orthormée.

2.2 Expression analytique du produit scalaire

Propriétés

Soit $\vec{u}\,(x,y,z)$ et $\vec{v}\,(x',y',z')$ deux vecteurs de l'espace muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\,)$. Alors :

$$\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'$$

$$||\vec{u}\,|| = \sqrt{\vec{u}.\vec{u}} = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

2.3 Expression de la distance entre deux points

Propriétés

Soit $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$ deux points de l'espace :

$$AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$$

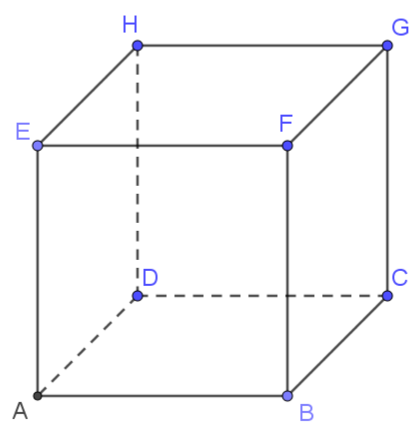
3 Orthogonalité

3.1 Orthogonalité de deux droites

Définitions

- ✏ Deux droites de l'espace sont orthogonales lorsque leurs parallèles passant par le même point quelconque sont perpendiculaires.
- ✏ Deux droites de l'espace sont orthogonales lorsque les vecteurs directeurs de ces droites sont orthogonaux.
- ✏ Deux droites de l'espace sont perpendiculaires lorsqu'elles sont orthogonales et sécantes (et par conséquent coplanaires).
- ✏ Des droites perpendiculaires sont orthogonales mais la réciproque n'est pas forcement vraie.

Exemple 2 *ABCDEFGH est un cube.*



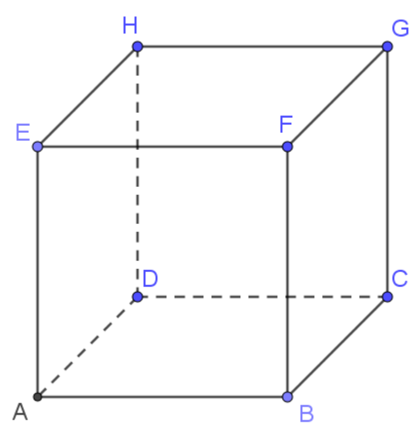
Les droites (EH) et (EF) sont perpendiculaires : EFGH est un carré et (EF) et (EH) sont sécantes en E.
Les droites (BC) et (EF) sont orthogonales : $(BC)//(FG)$ et (FG) est perpendiculaire à (EF), leur point de concours est en F.
Pourtant la droite (BC) est dans le plan $(ABCD)$ et la droite (EF) est dans le plan $(EFGH)$: ces deux plans sont parrallèles par construction du cube donc non sécants.
Par conséquent, les droites (BC) et (EF) ne sont pas perpendiculaires.

3.2 Orthogonalité d'une droite et d'un plan

Propriétés

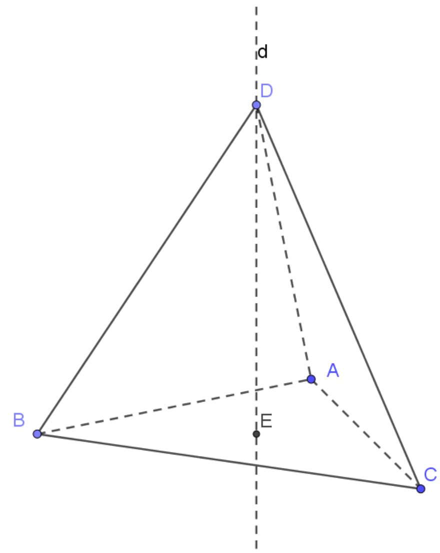
- ✏ Une droite Δ est orthogonale à un plan $\mathscr{P}$ si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes de $\mathscr{P}$.
- ✏ Si une droite Δ est orthogonale à un plan $\mathscr{P}$ alors elle est orthogonale à toutes les droites de $\mathscr{P}$.

Exemple 3 *ABCDEFGH est un cube.*



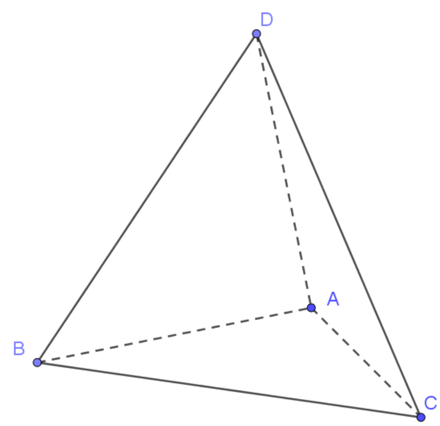
(AE) est perpendiculaire aux droites (AD) et (AB).
(AB) et (AD) sont sécantes et définissent le plan (ABC).
Donc (AE) est orthogonal au plan (ABC).

Exemple 4 *ABC est un triangle équilatéral. E est le point d'intersection de ses médianes. La droite d passant par E est orthogonale au plan (ABC). La pyramide $ABCD$ est telle que D soit un point de la droite d. Démontrer que les droites (BD) et (AC) sont orthogonales.*



La droite d est orthogonale au plan (ABC) donc elle est orthogonale à (AC).
La droite (BE) est la médiane issue de B dans le triangle ABC qui est équilatéral, c'est donc également la médiatrice de $[AC]$: $(BE) \perp (AC)$.
La droite (AC) est orthogonale aux deux droites non parallèles (BE) et (ED) du plan (BED) : elle est donc orthogonale au plan (BED) entier.
Par conséquent, (AC) est orthogonale à chacune des droites de (BED), en particulier la droite (BD).

Exemple 5 *Soit un tétraèdre $ABCD$ d'arêtes de longueur l.*
Démontrer que les arêtes $[AD]$ et $[BC]$ sont orthogonales.



On va se servir du produit scalaire :

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}\\
=&\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}\right).\left(\overrightarrow{BC}\right)\\
=&\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{BC}\\
=&\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CB}\\
=&CA\times CB\times\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)-CD\times CB\times\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \text{ car les triangles sont équilatéraux}\\
=&l^2\times\frac{1}{2}-l^2\times\frac{1}{2}\\
=&0
\end{aligned}$$

Par conséquent, les droites (AD) et (BC) sont orthogonaux.

4 Vecteur normal à un plan

Définitions

Un vecteur non nul $\overrightarrow{u}$ de l'espace est normal à un plan $\mathscr{P}$ lorsqu'il est orthogonal à tout vecteur admettant un représentant dans $\mathscr{P}$.

Propriétés

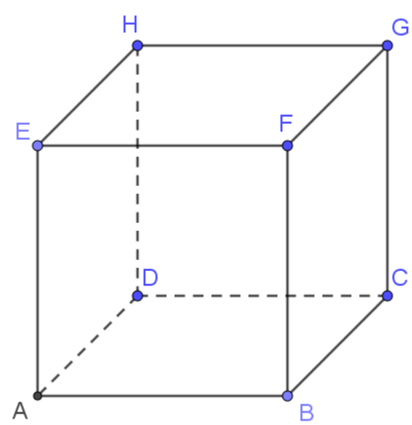
Soit A un point A et un vecteur $\overrightarrow{n}$ non nul de l'espace.

- L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n} = 0$ est un plan de l'espace.
- Réciproquement, prenons $\mathscr{P}$ un plan de l'espace. Pour tout point A de $\mathscr{P}$ et tout vecteur normal $\overrightarrow{n}$ de $\mathscr{P}$, $\mathscr{P}$ est l'ensemble des points tels que $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n} = 0$.

Théorème

Un vecteur non nul $\overrightarrow{n}$ de l'espace est normal à un plan $\mathscr{P}$,s'il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de $\mathscr{P}$.

Exemple 6 *ABCDEFGH est un cube.*



Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{CF}$ est normal au plan (ABG).
La droite (CF) et la droite (BG) sont perpendiculaires car le quadrilatère FGCB est un carré.
Le plan $(FGCB)$ est orthogonal à la droite (AB) : comme $ABCD$ est un carré, alors $(AB) \perp (BC)$, comme $EFGH$ est un carré, alors $(EF) \perp (FG)$, or $(EF)//(AB)$ donc (AB) et (FG) sont orthonogales.
La droite (AB) est alors orthogonale à deux droites non parallèles du plan $(EFGH)$, elle est alors orthogonale au plan entier : en particulier, elle est orthogonale à (CF).
On a donc montré que la droite (CF) était orthogonale aux deux droites sécantes (BG) et (AB) du plan (ABG) : elle est donc orthogonale à ce plan entier.

Exemple 7 *Dans un repère orthonormé, on considère les points suivants :*

$$A(1;2;-2)$$
$$B(-1;3;1)$$
$$C(2;0;-2)$$

Déterminer un vecteur normal au plan (ABC).
On va calculer deux vecteurs du plan (ABC) *:*

$$\overrightarrow{AB}(-2;1;3)$$
$$\overrightarrow{AC}(1;-2;0)$$

On appelle $\overrightarrow{u}(x;y;z)$ *un vecteur normal de* (ABC) *:*

$$\begin{cases}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u}=0\\ \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{u}=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}-2x+y+3z=0=0\\ x-2y=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}-2x+y+3z=0=0\\ 2x-4y=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}-2x+y+3z=0=0\\ -3y+3z=0\end{cases}\quad \textit{en ajoutant les deux lignes}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}-2x+y+3z=0=0\\ y=z\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}-2x+z+3z=0=0\\ y=z\end{cases}\quad \textit{on remplace y par z dans la première équation}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}-2x+4z=0\\ y=z\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=2z\\ y=z\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\overrightarrow{u}=z(2;1;1)$$

On peut choisir comme vecteur normal au plan (ABC) *le vecteur* $(2;1;1)$.

5 Projection orthogonale

5.1 Projection orthogonale d'un point sur une droite

Définitions

Soit un point A et une droite d de l'espace.
La projection orthogonale de A sur d est le point H appartenant à d tel que la droite (AH) soit perpendiculaire à la droite d.

5.2 Projection orthogonale d'un point sur un plan

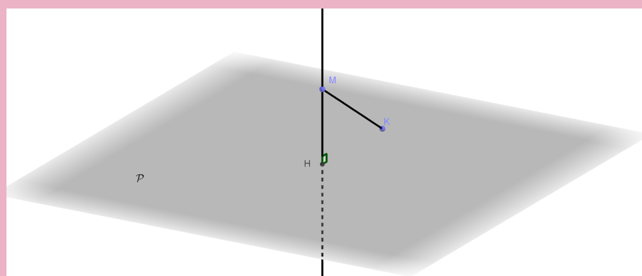
Définitions

Soit un point A et une plan $\mathscr{P}$ de l'espace.
La projection orthogonale de A sur $\mathscr{P}$ est le point H appartenant à d tel que la droite (AH) soit perpendiculaire au plan $\mathscr{P}$.

Propriétés

Le projeté orthogonal d'un point M sur un plan $\mathscr{P}$ est le point H le plus proche de M.

Preuve



On reprend les notations de l'énoncé de la propriété et on va essayer de montrer que $MH < MK$ quel que soit le point K de $\mathscr{P}$, différent de H.
Comme $(MH) \perp (HK)$ par construction du projeté orthogonal, on peut écrire, grace au théorème de Pythagore :

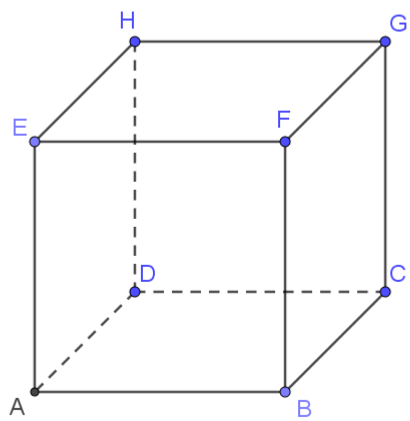
$$MK^2 = MH^2 + HK^2$$

Comme le point $H \neq K$ alors la distance $HK > 0$, par conséquent :

$$MK^2 - MH^2 = HK^2 \Rightarrow MK^2 - MH^2 > 0 \Rightarrow MK^2 > MH^2 \Rightarrow MK > MH$$
par croissance de la fonction carré sur les nombres positifs

Par conséquent, dès que $K \neq H$: $MK > MH$; ce qui signifie que H est le point de $\mathscr{P}$ le plus proche de M.

Exemple 8 *On considère un cube $ABCDEFGH$.*
Calculer la distance du point G au plan (BDE).



L'objectif consiste à trouver le projeté orthogonal K de G sur le plan (BDE) et GK sera la distance cherchée.
On va se placer dans le repère orthonormé $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE})$. Les coordonnée des points B, D et E sont :

$$\begin{aligned}
&B(1;0;0)\\
&D(0;1;0)\\
&E(0;0;1)\\
&G(1;1;1)\\
\text{donc } &\overrightarrow{BD}=(-1;1;0)\\
&\overrightarrow{BE}=(-1;0;1)
\end{aligned}$$

Ces deux derniers vecteurs engendrent le plan (BDE) car ils sont non parallèles et sécants.
Appelons $\overrightarrow{n}(x;y;z)$ un vecteur normal de (BDE) :

$$\begin{aligned}
&\begin{cases}\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{n}=0\\ \overrightarrow{BE}.\overrightarrow{n}=0\end{cases}\\
\Leftrightarrow &\begin{cases}-x+y=0\\ -x+z=0\end{cases}\\
\Leftrightarrow &\begin{cases}x=y\\ x=z\end{cases}\\
\Leftrightarrow &\overrightarrow{n}=x(1;1;1)
\end{aligned}$$

On peut décider que $\overrightarrow{n}=(1;1;1)$.
On suppose que les coordonnées de k sont (a,b,c). Il existe $k\in\mathbb{R}$ tel que :

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{GK}=k\overrightarrow{n}\\
\Leftrightarrow &(a-1;b-1;c-1)=k(1;1;1)\\
\Leftrightarrow &a=b=c=k+1
\end{aligned}$$

De plus, le point K est dans le plan (BDE) donc le vecteur $\overrightarrow{BK}$ est une droite de ce plan et par conséquent combinaison linéaire des deux vecteurs qui l'engendrent :

$$\begin{aligned}
&\exists\mu,\lambda\ \ \overrightarrow{BK}=\mu\overrightarrow{BD}+\lambda\overrightarrow{BE}\\
\Leftrightarrow &\exists\mu,\lambda\ \ (k;k+1;k+1)=(-\mu-\lambda;\mu;\lambda)\\
\Rightarrow &,\ \textit{en ajoutant les trois coordonnées } 3k+2=0\\
\Rightarrow &k=-\frac{2}{3}
\end{aligned}$$

Finalement : $\overrightarrow{GK}=\left(-\frac{2}{3};-\frac{2}{3};-\frac{2}{3}\right)$ *et* $GK=\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{2}{3}\sqrt{3}$.

Propriétés

Soient A un point de l'espace et $\mathscr{P}$ un plan passant par un point B et de vecteur normal $\overrightarrow{n}$.
Soit H le projeté orthogonal de A sur $\mathscr{P}$, on a :

$$AH=\frac{|\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{n}|}{||\overrightarrow{n}||}$$

Exemple 9 *Reprenons l'exemple précédent et concluons différemment.*
On a trouvé un vecteur normal $\overrightarrow{n} = (1;1;1)$ *; on peut donc écrire :*

$$\begin{aligned}
GK &= \frac{|\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{n}|}{||\overrightarrow{n}||} \\
&= \frac{|(0;-1;-1).(1;1;1)|}{||(1;1;1)||} \\
&= \frac{|-2|}{\sqrt{3}} \\
&= \frac{2}{3}\sqrt{3}
\end{aligned}$$