

## Limites et dérivations

### Applications aux polynômes et aux fractions rationnelles : exercices

**Exercice 1** Soit  $f(x)$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = x^3 + x^2 - x + 5$$

1. Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .
2. Déterminer la limite de  $f$  en  $-\infty$ .
3. Calculer la dérivée de  $f$ .
4. Déterminer le signe de  $f'$ .
5. En déduire le tableau de variation de  $f$  avec les limites et les extrema.

**Exercice 2** Soit  $f(x)$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = 4x^3 + 2x^2 - x + 3$$

1. Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .
2. Déterminer la limite de  $f$  en  $-\infty$ .
3. Calculer la dérivée de  $f$ .
4. Déterminer le signe de  $f'$ .
5. En déduire le tableau de variation de  $f$  avec les limites et les extrema.

**Exercice 3** Soit  $f(x)$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \frac{2x + 1}{x^2 + 1}$$

1. Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ . En déduire une interprétation graphique.
2. Déterminer la limite de  $f$  en  $-\infty$ . En déduire une interprétation graphique.
3. Calculer la dérivée de  $f$ .
4. Déterminer le signe de  $f'$ .

5. En déduire le tableau de variation de  $f$  avec les limites et les extrema.

**Exercice 4** Soit  $f(x)$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \frac{5x^2 + 1}{2x^2 + 4}$$

1. Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ . En déduire une interprétation graphique.
2. Déterminer la limite de  $f$  en  $-\infty$ . En déduire une interprétation graphique.
3. Calculer la dérivée de  $f$ .
4. Déterminer le signe de  $f'$ .
5. En déduire le tableau de variation de  $f$  avec les limites et les extrema.

**Exercice 5** Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{3\}$  par :

$$f(x) = \frac{2x^2 - x - 3}{x - 3}$$

1. Pourquoi la fonction n'est-elle pas définie en 3 ?
2. Déterminer la limite de  $f$  en  $3^-$ .
3. Déterminer la limite de  $f$  en  $3^+$ .
4. Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ . En déduire une interprétation graphique.
5. Déterminer la limite de  $f$  en  $-\infty$ . En déduire une interprétation graphique.
6. Calculer la dérivée de  $f$ .
7. Déterminer le signe de  $f'$ .
8. En déduire le tableau de variation de  $f$  avec les limites et les extrema.
9. Montrer que :

$$f(x) = 2x + 7 + \frac{18}{(x - 3)^2}$$

En déduire une interprétation graphique.