Devoir maison 7 : correction

Exercice 1 **1.** *On considère la fonction p définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$p(x) = x^3 + 3x^2 + 5x - 1$$

a. *Donner la limite de p en $-\infty$ et en $+\infty$.*

On sait que :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} 3x^2 = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} 5x - 1 = \infty \end{cases}$$

Par somme de limites, on en déduit que :

$$\lim_{x \to \infty} p(x) = +\infty$$

On sait que :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} 3x^2 = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} 5x - 1 = -\infty \end{cases}$$

On a donc une forme indéterminée du type $-\infty + \infty$. On va mettre en facteur par le terme de plus haut degré, x^3 :

$$p(x) = x^3 + 3x^2 + 5x - 1 = x^3 \left(1 + \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right)$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} 1 + \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2} - \frac{1}{x^3} = 1 \end{cases}$$

Par produit de limites, on en déduit que :

$$\lim_{x \to +\infty} p(x) = -\infty$$

b. *Calculer la dérivée de p.*

On a :

$$p'(x) = 3x^2 + 6x + 5$$

c. *Déterminer le signe de p'.*

On doit commencer par calculer le discriminant de $3x^2 + 6x + 5 = 0$:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \times 3 \times 5 = -24 < 0$$

Comme il est négatif, cela signifie que le signe de $p'(x)$ est constant, c'est le signe de a : par conséquent, p' est strictement positif.

d. *On suppose qu'il existe α tel que $p(\alpha) = 0$.*
Déterminer, à la calculatrice, une valeur de α à 10^{-2} près.

A la calculatrice, on trouve :

$$p(0.17) \approx -0.058$$
$$p(0.18) \approx 0.003$$

On en déduit que $0.17 < \alpha < 0.18$.

e. *Construire le tableau de variation de p et y inclure α.*

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$p'(x)$		$+$	
$p(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

2. *On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{1+x^2}$$

a. *Donner la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$.*
On sait que :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 1+x^2 = +\infty \end{cases}$$

Par quotient de limites, on en déduit que :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

On sait que :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} 1+x^2 = +\infty \end{cases}$$

On en déduit que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ est une forme indéterminée du type $\frac{\infty}{\infty}$.
On va donc factoriser et faire un changement de variables afin de pouvoir appliquer une croissance comparée :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{e^{-x}}{1+x^2} \\ &= \frac{e^{-x}}{x^2} \times \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \end{aligned}$$

On sait que :

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = 1$$

On pose maintenant $X = -x$:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}}{x^2} = \lim_{X\to+\infty} \frac{e^X}{X^2} = +\infty \text{ par croissance comparée}$$

Finalement, on en déduit, par produit de limites, que :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

b. *Calculer $f'(x)$ et en déduire le tableau de variation de f.*

On a :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\frac{e^{-x}}{1+x^2}\right)' \\
&= \frac{(e^{-x})' \times (1+x^2) - e^{-x} \times (1+x^2)'}{(1+x^2)^2} \\
&= \frac{-e^{-x} \times (1+x^2) - e^{-x} \times 2x}{(1+x^2)^2} \\
&= \frac{e^{-x}\left(-1-x^2-2x\right)}{(1+x^2)^2} \\
&= \frac{-e^{-x}(1+x)^2}{(1+x^2)^2}
\end{aligned}$$

On déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$-e^{-x}$			$-$		
$(1+x)^2$		$+$	0	$+$	
$(1+x^2)^2$			$+$		
$f'(x)$		$-$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$		$\searrow$		0

c. *Montrer que :*

$$f''(x) = \frac{e^{-x}(x+1)p(x)}{(1+x^2)^3}$$

On a :

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \left(f'(x)\right)' \\
&= \left(\frac{-e^{-x}(1+x)^2}{(1+x^2)^2}\right)' \\
&= \frac{\left(-e^{-x}(1+x)^2\right)' \times (1+x^2)^2 - \left(-e^{-x}(1+x)^2\right) \times \left((1+x^2)^2\right)'}{\left((1+x^2)^2\right)^2} \\
&= \frac{\left(-(e^{-x})'(1+x)^2 - e^{-x}\left((1+x)^2\right)'\right) \times (1+x^2)^2 - \left(-e^{-x}(1+x)^2\right) \times 2 \times 2x(1+x^2)}{(1+x^2)^4} \\
&= \frac{(e^{-x}(1+x)^2 - e^{-x} \times 2(1+x)) \times (1+x^2)^2 - \left(-e^{-x}(1+x)^2\right) \times 2 \times 2x(1+x^2)}{(1+x^2)^4} \\
&= \frac{(e^{-x}(1+x)^2 - e^{-x} \times 2(1+x)) \times (1+x^2) - \left(-e^{-x}(1+x)^2\right) \times 2 \times 2x}{(1+x^2)^3} \\
&= \frac{e^{-x}(1+x)\left((1+x)-2) \times (1+x^2) + (1+x) \times 2 \times 2x\right)}{(1+x^2)^3} \\
&= \frac{e^{-x}(1+x)\left((x-1) \times (1+x^2) + (1+x) \times 4x\right)}{(1+x^2)^3} \\
&= \frac{e^{-x}(1+x)\left(x+x^3-1-x^2+4x+4x^2\right)}{(1+x^2)^3} \\
&= \frac{e^{-x}(1+x)\left(x^3+3x^2+5x-1\right)}{(1+x^2)^3} \\
&= \frac{e^{-x}(1+x)p(x)}{(1+x^2)^3}
\end{aligned}$$

d. *En déduire les coordonnées des points d'inflexion de f et les intervalles où f est convexe et également ceux où elle est concave.*
Les points d'inflexion sont les endroits où la courbe change de convexité : leur abscisses correspondent aux valeurs où la dérivée seconde s'annule en changeant de signe :

x	$-\infty$		-1		α		$+\infty$
e^{-x}				+			
$(1+x)$		$-$	0	+			
$p(x)$			$-$		0	+	
$f''(x)$		+	0	$-$	0	+	

Finalement les points d'inflexions sont $(-1; f(-1)) = \left(-1; \frac{e}{2}\right)$ et $(\alpha; f(\alpha))$:

✏ *Sur $]-\infty; -1]$ et sur $[\alpha; +\infty[$, la fonction f est convexe.*

✏ *Sur $[-1; \alpha]$, la fonction est concave.*

Exercice 2 *Dans un repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ de l'espace, on considère les points :*

$$A(0;3;-1)$$
$$B(2;-2;0)$$
$$C(4;1;5)$$
$$D(2;21;12)$$

1. *Montrer que les points A, B et C définissent un plan.*
On calcule les coordonnées des deux vecteurs et on montre qu'ils ne sont pas colinéaires :

$$\overrightarrow{AB}\,(2;-5;1)$$
$$\overrightarrow{AC}\,(4;-2;6)$$

Si les deux vecteurs étaient colinéaires, on devrait avoir $\frac{4}{2}=\frac{-2}{-5}=\frac{6}{1}$*, ce qui n'est pas le cas.*

2. *Le point D appartient-il à ce plan ?*
Le point D appartient au plan (ABC) *si et seulement si les trois vecteurs* $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ *et* $\overrightarrow{AD}$ *sont liés.*
Si ces trois vecteurs sont liés, alors il existe α *et* β *des réels tels que :*

$$\overrightarrow{AD}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}2=2\alpha+4\beta\\18=-5\alpha-2\beta\\13=1\alpha+6\beta\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}2=2\alpha+4\beta\\36=-10\alpha-4\beta\\13=1\alpha+6\beta\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}38=-8\alpha\\36=-10\alpha-4\beta\\13=1\alpha+6\beta\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=-\frac{19}{4}\\36=-10\times\left(-\frac{19}{4}\right)-4\beta\\13=1\alpha+6\beta\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=-\frac{19}{4}\\36=\frac{190}{4}-4\beta\\13=1\alpha+6\beta\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=-\frac{19}{4}\\36-\frac{190}{4}=-4\beta\\13=1\alpha+6\beta\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=-\frac{19}{4}\\\frac{144-190}{4}=-4\beta\\13=1\alpha+6\beta\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=-\frac{19}{4}\\\beta=\frac{46}{16}\\13=1\alpha+6\beta\end{cases}$$

Or :

$$1\alpha+6\beta=-\frac{19}{4}+6\times\frac{46}{16}=\frac{-76+276}{16}=\frac{200}{16}\neq 13$$

Le système de trois équations à trois inconnues est donc incompatible : il n'y a pas de solutions et par conséquent, les trois vecteurs ne sont donc pas liés.
Le point D appartient donc au plan (ABC)*.*

Exercice 3 *Dans un repère* $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ *de l'espace, on considère les points :*

$$A(-4;2;3)$$
$$B(1;5;2)$$
$$C(0;5;4)$$
$$D(-6;-1;-2)$$

1. *Démontrer que :*

$$\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$$

On calcule les coordonnées des trois vecteurs et de la combinaison linéaire :

$$\overrightarrow{AB}\,(5;3;-1)$$
$$\overrightarrow{AC}\,(4;3;1)$$
$$\overrightarrow{AD}\,(-2;-3;-5)$$
$$2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC} = (10-12;6-9;-2-3) = (-2;-3;-5) = \overrightarrow{AD}$$

2. *Que peut-on en déduire concernant les points A, B, C et D ?*
Comme les trois vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ *et* $\overrightarrow{AD}$ *sont liées, alors le point D est dans le plan* (ABC).