Exemples corrigés sur les lois de probabilités

Exercice 1 *Calculer chacune des probabilités suivantes :*

1. $P(2 < X < 2,3)$ *pour* $X \sim \mathcal{U}(1;3)$.
   Par définition, on peut écrire $P(2 < X < 2,3) = \frac{1}{3-1} \times (2,3-2) = 0,15$
2. $P(X < 2)$ *pour* $X \sim \mathcal{U}(0;10)$.
   Par définition, on peut écrire $P(X < 2) = P(0 < X < 2) = \frac{2-0}{10-0} = \frac{1}{5}$.
3. $P(X > 1,05)$ *pour* $X \sim \mathcal{U}(1;1,1)$.
   Par définition, on peut écrire $P(X > 1,05) = P(1,05 < X < 1,1) = \frac{1,1-1.05}{1,1-1} = \frac{0,05}{0,1} = 0,5$.
4. $P(X > 0)$ *pour* $X \sim \mathcal{U}(1;1,1)$.
   Par définition, on peut écrire $P(X > 0) = P(0 < X < 1) + P(1 < X < 1,1) = 0 + \frac{1}{1,1-1} \times (1,1-1) = 1$

Exercice 2 *On s'intéresse à la durée de vie, exprimée en semaines, d'un composant électronique. On modélise cette situation en supposant que la durée de vie de ce composant est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre* λ.
Une étude statistique montre qu'environ 50% *d'un lot important de ces composants sont encore en état de marche au bout de* 200 *semaines.*

1. *Montrer que* $\lambda = \frac{\ln(2)}{200}$.
   La traduction mathématiques de la dernière phrase est la suivante :

$$P(X < 200) = 0.5 \Leftrightarrow \int_0^{200} \lambda e^{-\lambda x} dx = 0.5 \Leftrightarrow \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^{200} \Leftrightarrow -e^{-200\lambda} + 1 = 0.5$$
$$\Leftrightarrow e^{-200\lambda} = 0.5 \Leftrightarrow -200\lambda = \ln(0.5) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2) \Leftrightarrow \lambda = \frac{\ln(2)}{200}$$

2. *Quelle est la probabilité qu'un de ces composants pris au hasard ait une durée de vie supérieure à* 300 *semaines ?*
   On cherche la probabilité suivante $P(X < 300)$ *qui vaut :*

$$P(X < 300) = \int_0^{300} \lambda e^{-\lambda x} dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^{300} = -e^{-300 \times \frac{\ln(2)}{200}} + 1 = 1 - e^{-1,5\ln(2)} = 1 - 2^{-1,5} \approx 0,65$$

Exercice 3 *Une entreprise produit en grande quantité des pièces détachées destinées à l'industrie. L'objectif de cet exercice est d'étudier l'exploitation de divers outils mathématiques pour analyser la qualité de cette production.*

A. Loi normale

Une pièce est conforme lorsque sa longueur, exprimée en millimètres, appartient à l'intervalle [74,4 ; 75,6].
On note L la variable aléatoire qui, à chaque pièce prélevée au hasard dans la production, associe sa longueur. On suppose que la variable aléatoire L suit la loi normale d'espérance 75 *et d'écart type* 0,25.

1. *Calculer* $P(74,4 \leqslant L \leqslant 75,6)$.
   Pour calculer cette probabilité, on se sert de la calculatrice et on trouve $P(74,4 \leqslant L \leqslant 75,6) \approx 0,9836$.
2. *Quelle valeur doit-on donner à h pour avoir* $P(75-h \leqslant L \leqslant 75+h) = 0,95$ *?*
   On a $P(75-h \leqslant L \leqslant 75+h) = P(L \leq 75+h) - P(L \leq 75-h) = P(L \leq 75+h) - (1 - P(L \leq 75-h))$ *par symétrie de cette loi normale* $N(75;0,25)$ *par rapport à la droite* $x = 75$ *; finalement* $P(75-h \leqslant L \leqslant 75+h) = 2P(L \leq 75+h) - 1$.
   Par conséquent, on obtient $P(75-h \leqslant L \leqslant 75+h) = 0,95 \Leftrightarrow 2P(L \leq 75+h) - 1 = 0,95 \Leftrightarrow P(L \leq 75+h) = \frac{1+0,95}{2} = 0,975$.
   En utilisant la calculatrice, on trouve $75 + h \approx 75,489$ *d'où* $h \approx 0,489$.

B. Loi binomiale

Les pièces produites par l'entreprise sont livrées par lots de 20*. On note D l'événement : « une pièce prélevée au hasard dans la production n'est pas conforme ». On suppose que* $P(D) = 0,02$*. On prélève au hasard* 20 *pièces dans la production. La production est assez importante pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage aléatoire avec remise. On considère la variable aléatoire* X *qui, à un lot de 20 pièces, associe le nombre de pièces non conformes qu'il contient.*

1. *Justifier que la variable aléatoire* X *suit la loi binomiale de paramètres* 20 *et* 0,02.
   La variable aléatoire X *compte le nombre de succès d'une répétition de* 20 *épreuves de Bernouilli (car deux issues), indépendantes (car tirage avec remise) et de même paramètre* 0,02*. Par conséquent,* X *suit la loi* $B(20; 0,02)$.
2. *Calculer la probabilité* $P(X = 0)$.
   En utilisant la calculatrice, on trouve $P(X = 0) \approx 0,6676$.
3. *Calculer la probabilité qu'il y ait au moins une pièce non conforme dans ce lot de* 20 *pièces.*
   On cherche $P(X \geq 1)$*, or on peut exprimer cette probabilité de la façon suivante :* $P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X \leq 0) = 1 - P(X = 0) \approx 0.3324$.
4. *Calculer l'espérance mathématiques,* $E(X)$*, de cette variable aléatoire et interpréter le résultat.*
   Par définition, on a $E(X) = 20 \times 0,02 = 0,4$ *: cela signifie que sur* 20 *pièces, en moyenne* 0,4 *pièces sont conforme, autrement* 2 *pièces sur* 100.

Exercice 4 *Une entreprise spécialisée produit des boules de forme sphérique pour la compétition. Le responsable de la qualité cherche à analyser la production.*
Il mesure pour cela la masse des boules d'un échantillon (E) de 50 *pièces de la production concernée, et obtient les résultats suivants pour la série statistique des masses :*

Masse en g	1195	1196	1197	1198	1199	1200	1201	1202	1203	1204
Nombre de boules	*1*	*3*	*4*	*6*	*8*	*11*	*6*	*5*	*3*	*3*

Une boule est dite « de bonne qualité » si sa masse en grammes m *vérifie* $1197 \leqslant m \leqslant 1203$.

1. **a.** *Calculer, pour l'échantillon (E), le pourcentage de boules de bonne qualité.*
   On compte le nombre de boules dont la masse est entre 1197 *et* 1203 *grammes. D'après le tableau on trouve* 43 *et comme il y a, en tout,* 50 *boules dans le prélèvement, alors le pourcentage de boules de bonne qualité est* $43 \div 50 \times 100 = 86\%$.

   b. *Déterminer la moyenne et l'écart type de la série des masses de cet échantillon. (On donnera des valeurs approchées au gramme près.)*
   En utilisant la calculatrice, on trouve 1199,76 *comme moyenne et* 2,18 *comme écart type.*

   Dans la suite de l'exercice, on admet que la probabilité qu'une boule soit de bonne qualité est : $p = 0,86$.

   Les résultats des différentes probabilités seront donnés au millième près.
2. *L'entreprise livre des lots de boules à un client. On assimile le choix de chaque pièce d'un lot à un tirage avec remise.*
   On désigne par X *la variable aléatoire qui, à un lot donné de* 50 *boules, associe le nombre de boules de bonne qualité.*

   a. *Justifier que* X *suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres* n *et* p.
   La variable aléatoire X *compte le nombre de succès d'une répétition de* 50 *épreuves de Bernouilli (car deux issues), indépendantes (car tirage avec remise) et de même probabilité* 0.86*. Donc* X *suit la loi* $\mathscr{B}(50; 0.86)$.

b. *Déterminer la probabilité qu'il y ait au moins* 48 *boules de bonne qualité dans le lot.*
On cherche la probabilité suivante $P(X \geq 48) = 1 - P(X < 48) = 1 - P(X \leq 47) \approx 0.02209$.

3. *On décide d'approcher la loi binomiale suivie par la variable aléatoire* X *par une loi normale d'espérance* m *et d'écart type* σ.

a. *Justifier que* $m = 43$ *et* $\sigma \approx 2,45$.
Comme $50 \times 0.86 = 43 > 30$ *alors on peut approcher la loi* $\mathscr{B}(50; 0.86)$ *par la loi* $\mathcal{N}(50 \times 0.86; \sqrt{50 \times 0.86 \times 0.14})$, *c'est à dire* $m = 43$ *et* $\sigma \approx 2.45$.

b. *Déterminer, à l'aide de cette loi normale, une approximation de la probabilité qu'il y ait au moins* 48 *boules de bonne qualité dans le lot.*
Appelons Y *la variable suivant la loi normale précédente. On cherche la probabilité suivante :* $P(Y \geq 48) = 1 - P(Y \leq 48) \approx 0.02064$.

Exercice 5 *Une fabrique de desserts dispose d'une chaîne automatisée pour remplir des pots de crème glacée.*
La masse en grammes de crème glacée contenue dans chacun des pots peut être modélisée par une variable aléatoire X *qui suit la loi normale d'espérance* 100 *et d'écart type* 0,43.

Afin de contrôler le remplissage des pots, le responsable qualité souhaite disposer de certaines probabilités. Le tableau ci-dessous présente le calcul, effectué à l'aide d'un tableur, des probabilités de quelques événements pour une loi normale d'espérance 100 *et d'écart type* 0,43.

a	$p(X \leqslant a)$
98	0,00000165
98,5	0,00024299
99	0,01002045

a	$p(X \leqslant a)$
99,5	0,12245722
100	0,50000000
100,5	0,87754278

a	$p(X \leqslant a)$
101	0,98997955
101,5	0,99975701
102	0,99999835

Les résultats seront donnés à 10^{-2} près.
Pour les calculs de probabilités, on utilisera éventuellement le tableau précédent ou la calculatrice.

1. *Déterminer la probabilité de l'événement* "$X > 99$".
En utilisant la calculatrice, on trouve 0.99.

2. *Déterminer la probabilité de l'événement* "$99 \leqslant X \leqslant 101$".
En utilisant le tableau, on trouve $0,98997955 - 0,01002045 \approx 0.98$.

3. *Le pot est jugé conforme lorsque la masse de crème glacée est comprise entre* 99 *grammes et* 101 *grammes. Déterminer la probabilité pour qu'un pot prélevé aléatoirement soit non conforme.*
On cherche la probabilité de l'événement contraire de "$99 \leqslant X \leqslant 101$", *on trouve donc* $1 - P(99 \leqslant X \leqslant 101) \approx 0.02$ *: la probabilité qu'un pot prélevé soit non conforme est* 0.02.