

## ♻ Récurrences 7

On considère la suite :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{2} \left( u_n + \frac{a}{u_n} \right) \\ u_0 = 13 \end{cases}$$

1. Déterminer la fonction  $f$  telle que :

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

2. Démontrer que  $f$  est croissante sur  $[\sqrt{9}; +\infty[$
3. Démontrer que pour tout entier naturel  $n \in \mathbb{N}$  :

$$u_n \geq u_{n+1} \geq \sqrt{9}$$

4. En déduire que la suite  $(u_n)$  converge vers une limite réelle  $l$ . Déterminer  $l$ .

1. On remplace tous les  $u_n$  par  $x$  :

$$f(x) = \frac{1}{2} \left( x + \frac{9}{x} \right)$$

2. On calcule la dérivée de  $f(x)$  :

$$f'(x) = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{9}{x^2} \right)$$

On détermine le signe de  $f'(x)$  :

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{9}{x^2} \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{9}{x^2} \right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{9}{x^2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 \geq 9$$

$$\Rightarrow x \geq \sqrt{9}$$

Donc la fonction  $f$  est croissante pour  $x \geq \sqrt{9}$

### 3. Initialisation :

On a :

$$u_1 = \frac{1}{2} \left( u_0 + \frac{9}{u_0} \right)$$

$$\sqrt{9} \leq u_1 = 6.8461538461538 \leq u_0 = 13$$

L'initialisation est établie.

#### Hérédité :

On suppose que la propriété est vraie pour un certain rang  $n \geq 0$  :

$$u_n \geq u_{n+1} \geq \sqrt{9} \text{ c'est l'hypothèse de récurrence}$$

On part de l'hypothèse de récurrence :

$$u_n \geq u_{n+1} \geq \sqrt{9}$$

$$\Rightarrow f(u_n) \geq f(u_{n+1}) \geq f(\sqrt{9}) = \frac{1}{2} \left( \sqrt{9} + \frac{9}{\sqrt{9}} \right) = \sqrt{9}$$

$$\Rightarrow u_{n+1} \geq u_{n+2} \geq \sqrt{9}$$

L'hérédité est établie.

Donc pour tout entier naturel  $n \in \mathbb{N}$  :  $u_n \geq u_{n+1} \geq \sqrt{9}$  Comme la suite est décroissante et minorée, d'après le théorème de convergence monotone, la suite converge vers une limite  $l \in \mathbb{R}$ .

Cette limite vérifie :

$$\begin{aligned}
 l &= \frac{1}{2} \left( l + \frac{9}{l} \right) \\
 \Leftrightarrow 2l &= l + \frac{9}{l} \\
 \Leftrightarrow 2l^2 &= l^2 + 9 \\
 \Leftrightarrow l &= \pm \sqrt{9}
 \end{aligned}$$

Comme les termes de la suite dépassent tous  $\sqrt{9}$ , on en déduit que  $l = \sqrt{9}$ .