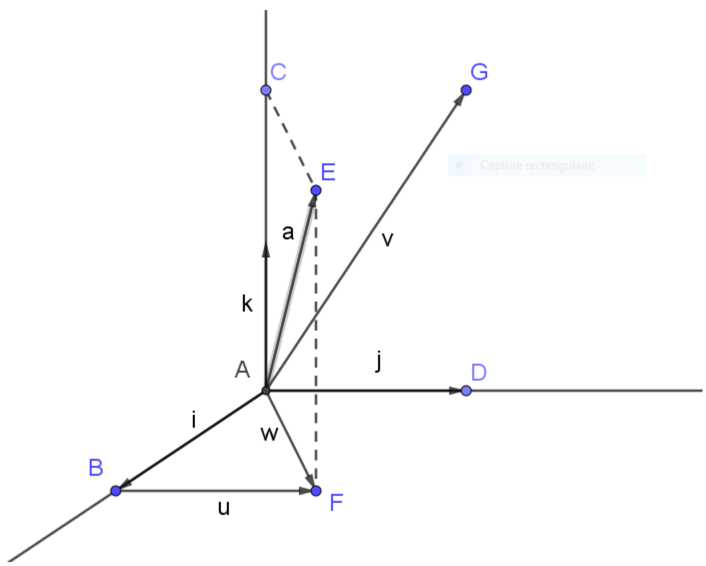
Orthogonalité et distance dans l'espace : activité

1. **Rappels sur le produit scalaire dans un plan** .
   - **a.** Rappeler la formule du produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ en fonction de AB, AC et BC.
   - **b.** Rappeler la formule d'Al-Kashi.
   - **c.** Rappeler l'expression du produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ en fonction de $||\overrightarrow{AB}||$, $||\overrightarrow{AC}||$ et l'angle α entre les deux vecteurs.
     Rappeler la définition de la norme d'un vecteur.
   - **d.** Rappeler l'expression analytique du produit scalaire de deux vecteurs dans un repère orthonormé.
   - **e.** Que dire du produit scalaire quand les deux vecteurs sont orthogonaux?
2. **Produit scalaire de deux vecteurs de l'espace**
   On se place maintenant dans l'espace où les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont de norme 1 et orthogonaux deux à deux.



On suppose que :

$$\overrightarrow{AB} = \vec{i}$$
$$\overrightarrow{AC} = 2\vec{k}$$
$$\overrightarrow{AD} = \vec{j}$$

ABFD parallélogramme

   - **a.** Comment appelle-t-on le triplet $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$?
   - **b.** Exprimer $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et $\vec{a}$ en fonction de $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$.
   - **c.** Deux vecteurs sont-ils toujours coplanaires?
   - **d.** Dans quel plan se trouvent les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$?

e. Exprimer le produit scalaire $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$ dans ce plan, en fonction de AD, AG et $\widehat{GAD}$

f. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$ dans ce plan en utilisant l'expression analytique.

g. Dans quel plan se trouvent les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{w}$?

h. Exprimer le produit scalaire $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{w}$ dans ce plan puis vérifier le résultat en utilisant, dans ce plan, l'expression analytique.

i. Comparer les résultats obtenus pour les produits scalaires avec l'application :

$$f(\overrightarrow{m}, \overrightarrow{n}) = x_{\overrightarrow{m}} \times x_{\overrightarrow{n}} + y_{\overrightarrow{m}} \times y_{\overrightarrow{n}} + z_{\overrightarrow{m}} \times z_{\overrightarrow{n}}$$

j. Conclure quant aux formules possibles pour un produit scalaire de deux vecteurs de l'espace.