Compléments sur la dérivation : exercices

Exercice 1 *Dans chacun des cas suivants, déterminer $u \circ v$ puis $v \circ u$ en précisant à chaque fois l'ensemble de définition :*

$$u(x) = 5x + 3 \quad v(x) = \sqrt{x}$$
$$u(x) = x^2 \quad v(x) = e^x$$
$$u(x) = x^3 - 1 \quad v(x) = \frac{1}{x}$$
$$u(x) = \sqrt{x} \quad v(x) = e^x$$

Exercice 2 *Décomposer chacune des fonctions suivantes sous la forme $v \circ u$:*

$$f(x) = \frac{3}{x^2} + \frac{5}{x} - 2 \quad sur\ ]-\infty; 0[\cap]0; +\infty[$$
$$g(x) = e^{\frac{x}{2}} \quad sur\ \mathbb{R}$$
$$h(x) = |x^2 - 1| \quad sur\ \mathbb{R}$$

Exercice 3 *Donner les fonctions dérivées des fonctions suivantes, définies et dérivables sur $\mathbb{R}$:*

$$f(x) = (x^2 + 5)^5$$
$$g(x) = (x^2 + 5)^{-3}$$
$$h(x) = (x^2 + 2x + 2)^4$$
$$k(x) = (1 - 3x)^{10}$$

Exercice 4 *Donner les fonctions dérivées des fonctions suivantes, définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, puis déterminer leur sens de variation.*

$$f(x) = \sqrt{2 + x^2}$$
$$g(x) = \sqrt{7x^2 + 3x + 1}$$
$$h(x) = \sqrt{x^4 + x^2 + 1}$$
$$k(x) = \sqrt{6x^4 + 3}$$

Exercice 5 *Donner les fonctions dérivées des fonctions suivantes :*

$$f(x) = e^{3x}$$
$$g(x) = e^{x-4}$$
$$h(x) = e^{\frac{1}{x}}$$
$$k(x) = e^{\sqrt{x}}$$

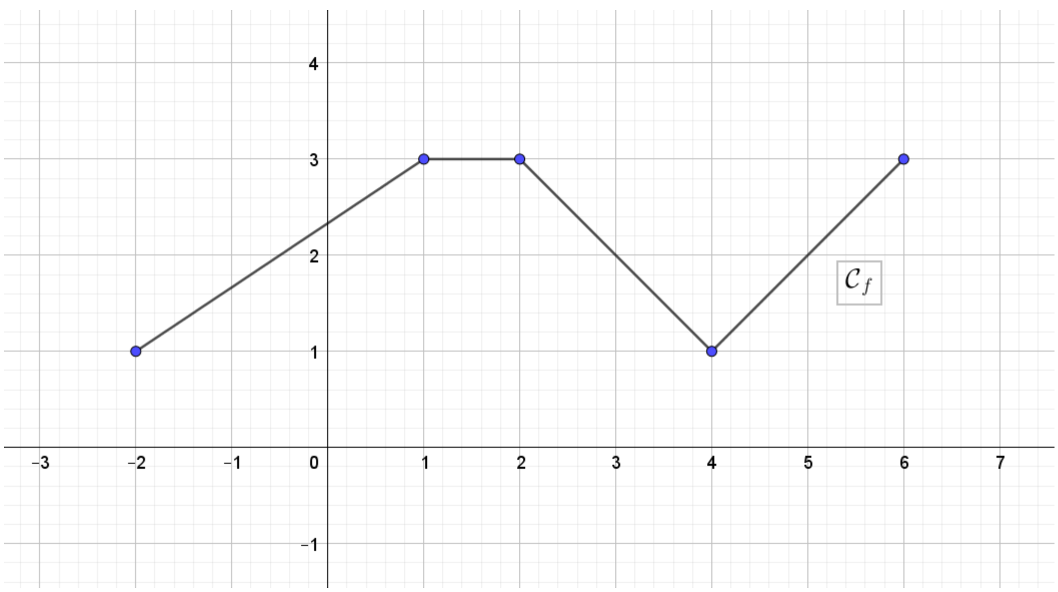
Exercice 6 *Donner les fonctions dérivées des fonctions suivantes :*

$$f(x) = \sqrt{1 - e^x}$$
$$g(x) = \sqrt{25x^2 - 10x + 1}$$
$$h(x) = \sqrt{\frac{x-2}{x+2}}$$
$$k(x) = \sqrt{(1 + 3x)^3}$$

Exercice 7 *Dans chacun des cas, la fonction f est deux dérivable sur un intervalle que l'on déterminera :*

$$f(x) = e^x$$
$$f(x) = 3x^2 - 7$$
$$f(x) = \frac{1}{x}$$
$$f(x) = e^{3x^2+2}$$
$$f(x) = x^3 + e^x$$
$$f(x) = xe^x$$
$$f(x) = e^{x^3-5}$$

Exercice 8 *Soit f une fonction affine définie par morceaux sur l'intervalle $[-2;6]$ dont la représentation graphique dans un repère orthonormé est donnée ci-dessous.*



1. *Donner l'expression de $f(x)$ en fonction de x.*
2. *Déterminer graphiquement la convexité de f sur l'intervalle $[-2;4]$, puis sur l'intervalle $[2;6]$.*

Exercice 9 *Donner un exemple de fonction qui est à la fois convexe et concave sur $\mathbb{R}$.*

Exercice 10 *Étudier la convexité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$f(x) = x^3 - x^2 + x + 1$$

Préciser les éventuels points d'inflexion de sa courbe représentative.

Exercice 11 *f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$f(x) = 5x^2 e^x$$

On admet que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. *Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.*
2. *Étudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation complet.*
3. *Étudier la convexité de la fonction f.*

4. *Préciser les éventuels points d'inlfexion de sa courbe représentative.*
5. *Vérifier en traçant la courbe sur la calculatrice.*

Exercice 12 *Soit f la fonction définie sur* $]-1;+\infty[$ *par :*

$$f(x)=\sqrt{1+x}$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

1. *Démontrer que f est concave.*
2. *Tracer sur l'écran d'un calculatrice $\mathscr{C}_f$ et la droite d'équation $y=\frac{1}{2}x+1$.*
3. *Démontrer que pour tout réel x appartenant à* $]-1;+\infty[$ *:*

$$\sqrt{1+x}\leq 1+\frac{x}{2}$$

Exercice 13 *Soit f la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$$f(x)=xe^x+1$$

et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.

1. *Déterminer la convexité de f.*
2. *Déterminer l'équaton réduite de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $x=0$.*
3. *En déduire que, pour tout réel x appartenant à* $]-2;+\infty[$ *: $f(x)\geq x+1$.*
4. *Retrouver le résultat précédent en résolvant algébriquement l'inéquation : $f(x)\geq x+1$*

Exercice 14 *On considère la fonction f, définie sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$$f(x)=\sqrt{x^2+9}$$

On admet que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. *Montrer que la fonction f est paire.*
2. *Étudier le sens de variation de f sur* $[0;+\infty[$.
3. *Étudier la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.*
4. *Déduire des questions précédentes le tableau de variation de f sur* $\mathbb{R}$.
5. *Déterminer l'équation de la tangente Δ à la courbe $\mathscr{C}$ représentative de f au point d'abscisse* 3.
6. *Vérifier que, pour tout réel x :*

$$f''(x)=\frac{9}{(x^2+9)\sqrt{x^2+9}}$$

7. *En déduire les positions relatives de $\mathscr{C}$ et de Δ.*

Exercice 15 *On appelle fonction "satisfaction" toute fonction dérivable qui prend des valeurs comprises entre* 0 *et* 100.
Lorsque la fonction "satisfaction" atteint la valeur 100*, on dit qu'il y a "saturation".*
On définit aussi la fonction "envie" comme la fonction dérivée de la fonction "satisfaction".
La direction des ressources humaines d'une entreprise modélise la satisfaction d'un salarié en fonction du salaire annuel qu'il percoit. On admet que la fonction "satisfaction" h est définie sur l'intervalle $[10;50]$ *par :*

$$h(x)=\frac{90}{1+e^{-0.25x+6}}$$

où x est exprimé en millier d'euros.

1. *Tracer la fonction h, conjecturer quant à la convexité de cette fonction ainsi que le sens de variation de la fonction "envie". En donner une interprétation concrète.*
2. *D'après ce modèle, serait-il possible d'atteindre la saturation ? Justifier.*
3. *Vérifier que, pour tout $x \in [10;50]$:*

$$h''(x) = \frac{5.625e^{-0.25x+6}\left(e^{-0.25x+6}-1\right)}{(1+e^{-0.25x+6})^2}$$

4. *En déduire la convexité de la fonction h.*
5. *A partir de quel salaire annuel peut-on estimer que la fonction "envie" décroît ? Justifier.*