༄ Compléments sur la dérivation : activités 1

Exemple 1 1. *Déterminer la dérivées des fonctions suivantes :*

$$e^{ax+b} \xrightarrow{'} ae^{ax+b}$$
$$k \xrightarrow{'} 0$$
$$x \xrightarrow{'} 1$$
$$x^2 \xrightarrow{'} 2x$$
$$x^n \text{ avec } n \in \mathbb{N} \xrightarrow{'} nx^{n-1}$$
$$\frac{1}{x} \xrightarrow{'} -\frac{1}{x^2}$$
$$\frac{1}{x^n} \text{ avec } n \in \mathbb{N}^* \xrightarrow{'} \frac{-n}{x^{n+1}}$$

2. *Donner la formule de la dérivée d'un produit.*
$(u \times v)' = u' \times v + u \times v'$

3. *En déduire les dérivées suivantes :*

$$xe^{-x} = x'e^{-x} + x \times \left(e^{-x}\right)' = e^{-x} - xe^{-x}$$
$$x^2 e^{2x+1} \left(x^2\right)' \times e^{2x+1} + x^2 \times \left(e^{2x+1}\right)' = 2xe^{2x+1} + 2x^2 e^{2x+1}$$

4. *Donner la dérivée d'un quotient.*

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

5. *En déduire les dérivées suivantes :*

$$\frac{x+2}{x-3} \xrightarrow{'} \frac{(x+2)' \times (x-3) - (x+2) \times (x-3)'}{(x-3)^2} = \frac{x-3-(x+2)}{(x-3)^2} = \frac{-5}{(x-3)^2}$$
$$\frac{e^x}{x^2+1} \xrightarrow{'} \frac{(e^x)' \times (x^2+1) - e^x (x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{e^x \times (x^2+1) - 2xe^x}{(x^2+1)^2} = \frac{e^x (x^2-2x+1)}{(x^2+1)^2}$$

6. *Quel est le lien entre le signe de f' et la monotonie de f ?*

✏ *La fonction f est croissante* $\Leftrightarrow f'(x) \geq 0$.

✏ *La fonction f est décroissante* $\Leftrightarrow f'(x) \leq 0$.

7. *Rappeler la formule donnant l'expression de la tangente au point $x = a$ à la courbe $\mathscr{C}$ représentant la fonction f.*

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Exemple 2 *On veut déterminer la dérivée de la fonction $f(x) = e^{h(x)}$ avec $h(x)$ une fonction dérivable.*

1. *Écrire le taux d'accroissement dont nous devons déterminer la limite afin d'obtenir la dérivée de f en x.*
On doit étudier le taux d'accroissement suivant :

$$t(\epsilon) = \frac{e^{h(x+\epsilon)} - e^{h(x)}}{\epsilon}$$

avec ϵ un nombre réel non nul.

2. *Déterminer la limite de :*

$$\frac{e^{h(x+\epsilon)-h(x)}-1}{h(x+\epsilon)-h(x)}$$

quand ϵ *tend vers* 0.
Comme la différence $h(x+\epsilon)-h(x)$ *tend vers* 0 *quand* ϵ *tend vers* 0*, ce taux d'accroissement tend vers la dérivée en* 0 *de* e^x*, c'est à dire* 1.

3. *En déduire la dérivée cherchée.*

$$\begin{aligned} t(\epsilon) &= \frac{e^{h(x+\epsilon)}-e^{h(x)}}{\epsilon} = \frac{e^{h(x)}\left(e^{h(x+\epsilon)-h(x)}-1\right)}{\epsilon} \\ &= e^{h(x)} \times \frac{h(x+\epsilon)-h(x)}{\epsilon} \times \frac{e^{h(x+\epsilon)-h(x)}-1}{h(x+\epsilon)-h(x)} \end{aligned}$$

La limite de cette expression quand ϵ *tend vers* 0 *est donc* $e^{h(x)}h'(x)$.
Globalement :

$$\left(f(g(x))\right)' = g'(x) \times f'(g(x))$$