Géométrie

Vecteurs colinéaires

Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leurs coordonnées sont proportionnelles.

Droites parallèles

Deux droites sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs directeurs respectifs sont colinéaires.

Droites orthogonales et perpendiculaires

Deux droites sont orthogonales si et seulement si leur vecteur directeur respectif sont orthogonaux.
Deux droites sont perpendiculaires si et seulement si leurs vecteurs directeurs respectifs sont orthogonaux et les droites sont sécantes.

Projeté orthogonal d'un point sur un plan

A un point de l'espace et $(\mathscr{P})$ un plan dont $\vec{n}$ est un vecteur normal.
H est le projeté orthogonal de A sur $(\mathscr{P})$ si et seulement si :

- ✏ $H \in (\mathscr{P})$
- ✏ $\overrightarrow{AH}$ orthogonal à $(\mathscr{P}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AH}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires.

Distance d'un point à un plan

Soit $(\mathscr{P})$ un plan de vecteur normal $\vec{n}$ et A un point de ce plan.
La distance d'un point M est :

$$\frac{|\overrightarrow{AM}.\vec{n}|}{||\vec{n}||}$$

Projeté orthogonal d'un point sur une droite

Soit A un point de l'espace et $(\mathscr{D})$ une droite de vecteur directeur $\vec{u}$.
H est le projeté orthogonal de A sur $(\mathscr{D})$ si et seulement si :

- ✏ $H \in (\mathscr{D})$
- ✏ $\overrightarrow{AH}$ orthogonal à $(\mathscr{D}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AH}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux.

Représentation paramétrique d'une droite

Soit A un point de l'espace et un vecteur $\vec{u}(a;b;c)$.
La droite $(\mathscr{D})$ passe par le point A et est de direction $\vec{u}$ si et seulement si sa représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \end{cases}, \in \mathbb{R}$$

Un point $M(x;y;z)$ appartient à la droite $(\mathscr{D})$ si et seulement si il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\begin{cases} x = x_A + t_0 a \\ y = y_A + t_0 b \\ z = z_A + t_0 c \end{cases}, \in \mathbb{R}$$

Un point $M(x;y;z)$ appartient à la droite $(\mathscr{D})$ si et seulement si il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$: autrement dit si les deux vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

Équation cartésienne d'un plan

Soit A un point de l'espace et un vecteur $\vec{n}(a;b;c)$.
Le plan $(\mathscr{P})$ est le plan passant par A de vecteur normal $\vec{n}$ si et seulement si :

- ✏ ce plan a une équation cartésienne de la forme $ax + by + cz + d = 0$.
- ✏ $ax_A + by_A + cz_A + d = 0$.

Un point $M(x;y;z)$ appartient au plan $(\mathscr{P})$ si seulement si $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$.
Un point $M(x;y;z)$ appartient au plan $(\mathscr{P})$ si seulement si $ax + by + cz + d = 0$.

Plan engendré par trois points

Soit A, B et C trois points de l'espace.
Ces trois points sont dans un même plan et ils engendrent ce plan si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont non colinéaires

Vecteur normal à un plan

Soit A, B et C trois points de l'espace qui engendrent un plan.
Pour obtenir un vecteur $\vec{n}(x;y;z)$ normal au plan précédent, il suffit de résoudre le système :

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB}.\vec{n} = 0 \\ \overrightarrow{AC}.\vec{n} = 0 \end{cases}$$

On va obtenir une expression des vecteurs normaux en fonction d'un paramètre.

Intersection d'un plan et d'une droite

Soit $(\mathscr{D})$ une droite admettant une représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \end{cases} \quad , \ \in \mathbb{R}$$

et $\mathscr{P}$ un plan admettant l'équation cartésienne suivante :

$$a'x + b'y + c'z + d' = 0$$

- ✏ Si le vecteur normal $\vec{n}(a', b', c')$ au plan $\mathscr{P}$ et le vecteur directeur $\vec{u}(a, b, c)$ sont orthogonaux (donc de produit scalaire nul), alors le plan et la droite sont parallèles ou la droite est inclus dans le plan.

- ✏ Sinon le plan et la droite sont sécantes en un unique point $I(x_I; y_I; z_I)$. Pour trouver ses coordonnées, on écrit qu'il existe un réel t_0 tel que :

$$\begin{cases} x = x_A + t_0 a \\ y = y_A + t_0 b \\ z = z_A + t_0 c \end{cases}$$

et on remplace ces expression de x, y et z dans l'équation de $\mathscr{P}$ afin de trouver t_0 :

$$a'(x_A + t_0 a) + b'(y = y_A + t_0 b) + c'(z_A + t_0 c) + d' = 0$$