Variables aléatoires : activités

Une grande école organise un test de sélection pour recruter ses futurs étudiants.
Dans ce test, il y a 40 questions, qui sont toutes indépendantes les unes des autres.
Chacune des questions propose quatre solutions possibles dont une seule est correcte.
Pour réussir ce test, un étudiant doit répondre correctement à au moins 36 questions.
Un étudiant mal préparé se demande quelle est la probabilité d'obtenir une note donnée, s'il répondait au hasard à chaque question.
On appelle la variable aléatoire donnant le nombre de réponses correctes obtenues en répondant au hasard.

1. Pour une question donnée du test, quelle est la probabilité qu'il y réponde correctement au hasard ?
   Il y a une seule solution correcte parmi les quatre proposées : la probabilité de la trouver en répondant au hasard est $\frac{1}{4}$.
2. Combien y-a-t-il de façon d'obtenir 20 réponses correctes ? 37 réponses correctes ?
   Il y a autant de façon d'obtenir 20 réponses correctes que le nombre de façon de choisir 20 éléments parmi 40 : ce nombre est $\binom{40}{20}$.
   Il y a autant de façon d'obtenir 37 réponses correctes que le nombre de façon de choisir 37 éléments parmi 40 : ce nombre est $\binom{40}{37}$.
3. Si l'étudiant a 20 réponses correctes, combien de questions sont incorrectes ?
   Si l'étudiant a 37 réponses correctes, combien de questions sont incorrectes ?
   Si l'étudiant a 20 réponses correctes, $40-20=20$ sont incorrectes.
   Si l'étudiant a 37 réponses correctes, $40-37=3$ sont incorrectes.
4. En déduire les expressions de $P(X=20)$ et $P(X=37)$.
   Chaque réponse correcte a une probabilité de $\frac{1}{4}$ tandis que chaque réponse incorrecte a une probabilité de $\frac{3}{4}$: la probabilité de chaque combinaison de 20 réponses correctes et 20 réponses incorrectes est donc $\left(\frac{1}{4}\right)^{20}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{20}$.
   Comme on a $\binom{40}{20}$ combinaisons précédemment évoquées, on en déduit que :
   $$P(X=20)=\binom{40}{20}\times\left(\frac{1}{4}\right)^{20}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{40-20}$$
   Chaque réponse correcte a une probabilité de $\frac{1}{4}$ tandis que chaque réponse incorrecte a une probabilité de $\frac{3}{4}$: la probabilité de chaque combinaison de 37 réponses correctes et 3 réponses incorrectes est donc $\left(\frac{1}{4}\right)^{37}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{3}$.
   Comme on a $\binom{40}{37}$ combinaisons précédemment évoquées, on en déduit que :
   $$P(X=37)=\binom{40}{37}\times\left(\frac{1}{4}\right)^{37}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{40-37}$$
5. Exprimer $P(X\leq 37)$ comme une somme de probabilités.
   On a :
   $$P(X\leq 37)=P(X=0)+P(X=1)+..+P(X=36)+P(X=37)$$
6. Exprimer $P(X\geq 37)$ en fonction de $P(X\leq 36)$.
   On a :
   $$P(X\geq 37)=1-P(X<37)=1-P(X\leq 36)$$

7. Exprimer $P(X \geq 37)$ comme une somme de probabilité.
On a :

$$P(X \geq 37) = P(X = 37) + P(X = 38) + P(X = 39) + P(X = 40)$$

8. Est-ce que l'étudiant qui répond au hasard a choisi une stratégie qui a de bonnes chances de réussir ?
Pour répondre à cette question, il faut calculer la probabilité précédente :

$$\begin{aligned} P(X \geq 37) &= P(X = 37) + P(X = 38) + P(X = 39) + P(X = 40) \\ &= \binom{40}{37} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{37} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{40-37} + \binom{40}{38} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{38} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{40-38} + \binom{40}{39} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{39} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{40-39} \\ &+ \binom{40}{40} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{40} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{40-40} \\ &\approx 0 \end{aligned}$$

Il est fort peu probable que l'étudiant réussisse en suivant cette stratégie.
Le calcul précédent peut être également fait en utilisant la calculatrice et en se servant du fait que, vu comment la variable X suit une loi binomiale.
En effet, X compte le nombre de succès (ici le fait d'avoir une bonne réponse) d'une répétition de 40 épreuves de Bernouilli (car chaque question a deux issues possibles : soit on y répond correctement soit incorrectement) qui sont indépendantes entre elles et qui offrent la même probabilité, $\frac{1}{4}$, d'avoir un succès.
C'est ce qu'on appelle une loi binomiale $\mathscr{B}\left(40; \frac{1}{4}\right)$

9. En répondant au hasard, quelle note peut-il espérer avoir ?
On doit calculer ce qu'on appelle l'espérance de X, noté $E(X)$, qui correspond à une moyenne pondérée :
les effectifs sont les nombres k de bonnes réponses possibles et le coefficient associé à k est la probabilité $P(X = k)$.
Finalement :

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=0}^{40} k \times P(X = k) \\ &= \sum_{k=0}^{40} k \times \binom{40}{k} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{k} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{40-k} \\ &= \sum_{k=1}^{40} k \times \frac{40!}{k!(40-k)!} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{k} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{40-k} \\ &= \sum_{k=1}^{40} \times \frac{40!}{(k-1)!(40-k)!} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{k} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{40-k} \\ &= \sum_{q=0}^{39} \times \frac{40!}{q!(39-k)!} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{q+1} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{39-q} \text{ en posant q=k-1} \\ &= 40 \times \frac{1}{4} \sum_{q=0}^{39} \times \frac{39!}{q!(39-k)!} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{q} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{39-q} \\ &= 40 \times \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\right)^{39} \text{ d'après la formule du binôme de Newton} \\ &= 40 \times \frac{1}{4} \times 1 \\ &= 10 \end{aligned}$$

On constate que le résultat est le produit des paramètres de cette loi.
En répondant au hasard, en moyenne, un étudiant aura 10 réponses correctes.