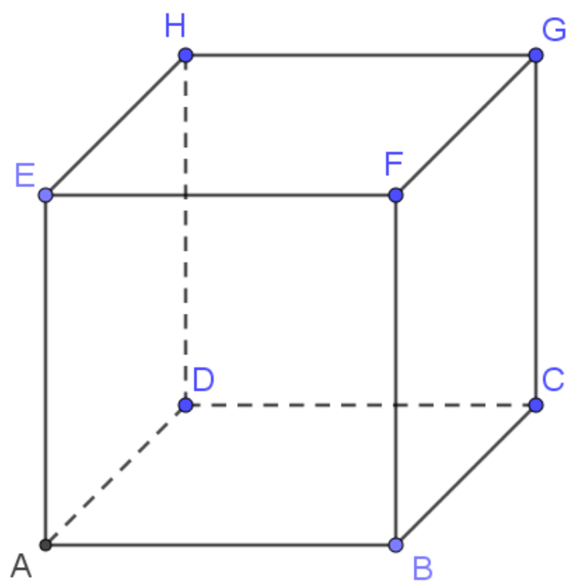
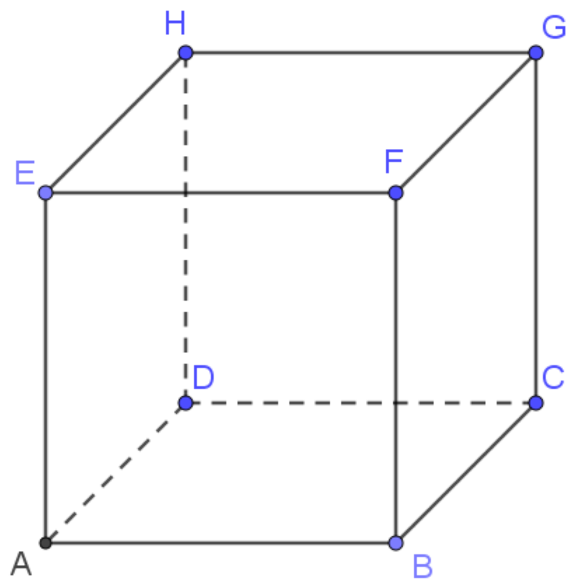
☙ Vecteurs, droites et plans de l'espace 1 : activité 1, correction

Exemple 1 (Perspective cavalière) *La perspective cavalière est une manière de représenter en deux dimensions des objets en trois dimensions.*
Cette représentation ne présente pas de point de fuite (ou encore point à l'infini) : la taille des objets ne diminue pas quand il s'éloignent. Le dessin ci-dessous représente un cube en perspective cavalière :



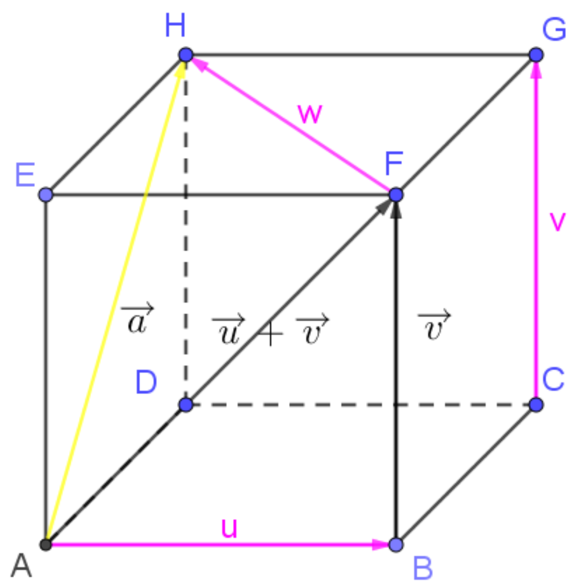
1. *Est ce la perspective cavalière conserve la mesure ?* *Non : AE = EH alors que ce n'est pas le cas sur le dessin*
2. *Est ce la perspective cavalière conserve la perpendicularité ?* *Non :* (EH) *et* (EF) *sont perpendiculaires mais ce n'est pas le cas sur le dessin*
3. *Est ce la perspective cavalière permet à deux droites de se couper sur le dessin sans être sécantes dans l'espace ?* *Oui, c'est le cas avec les droites* (HG) *et* (BC)
4. *Est ce que la perspective cavalière conserve le parallélisme ?* *Oui*
5. *Est ce que la perspective cavalière conserve les proportions ?* *Oui*

Exemple 2 (Combinaison linéaire de vecteurs)



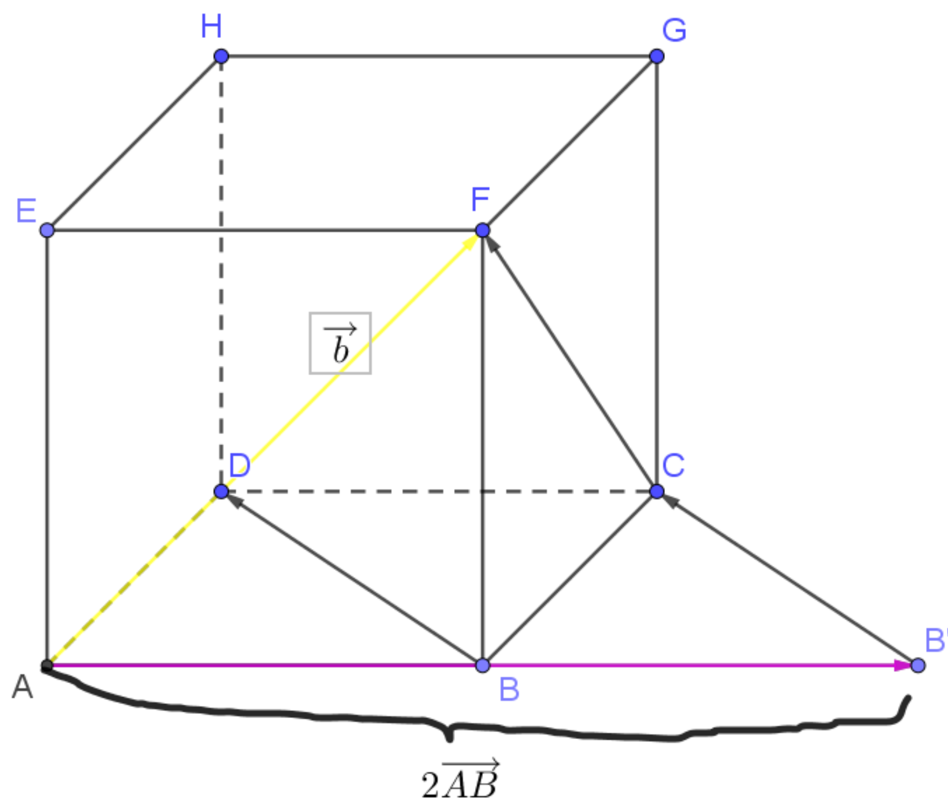
1. *Sur le graphique précédent, réprésenter les vecteurs données par :*

$$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{FH}$$
$$\overrightarrow{b} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{FC}$$
$$\overrightarrow{c} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{BF} - \overrightarrow{AC}$$

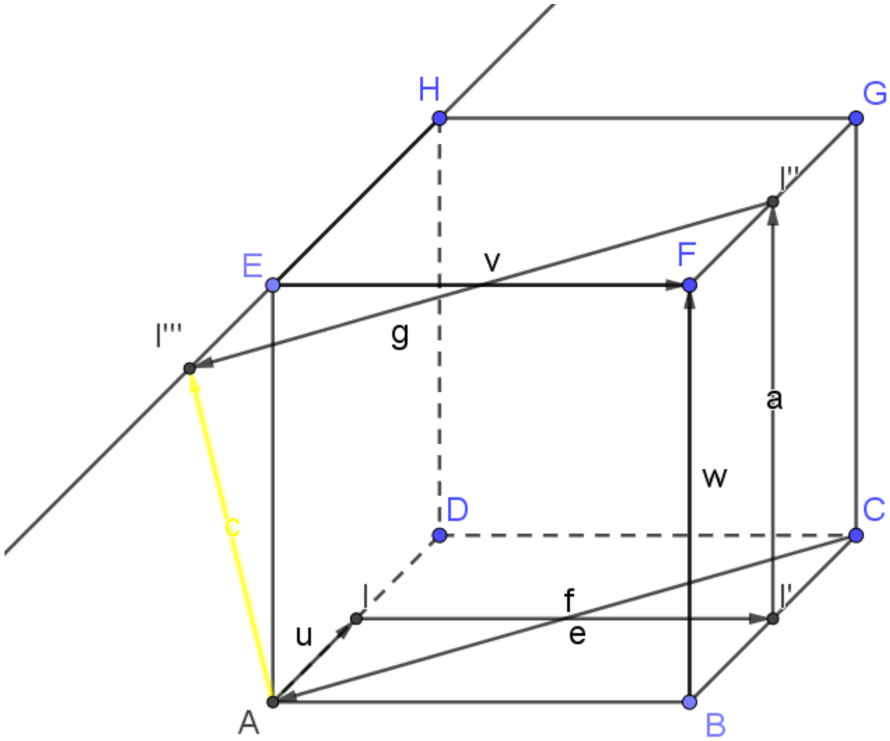


On commence en partant du point A car c'est le premier point qui intervient dans l'égalité caractérisant $\overrightarrow{a}$.
Le vecteur $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$ par translation de vecteur transforme le point A en le point B.

Au point B, on dessine un représentant du vecteur $\overrightarrow{CG}$ appelé $\overrightarrow{v}$, qui est aussi le vecteur $\overrightarrow{BF}$: cette translation de vecteur va transformer le point B en le point F.
Au point F, la translation de vecteur induite par $\overrightarrow{FH}$ va transformer le point F en le point H. Finalement, le vecteur $\overrightarrow{a}$ transforme le point A en le point H, ce qui signifie que le vecteur $\overrightarrow{a}$ a pour représentant le vecteur $\overrightarrow{AH}$.



On commence en partant du point A car c'est le premier point qui intervient dans l'égalité caractérisant $\overrightarrow{b}$.
On a tracé le vecteur $2\overrightarrow{AB}$ sur le dessin en le faisant commencer en A la transformation de ce point par cette translation de vecteur donne le point B'.
En B', on trace une représentant de $\overrightarrow{BD}$, la transformation de B' par cette translation de vecteur est B''. Le quadrilatère $BB'B''D$ est un parrallélogramme car $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{B'B''}$, par conséquent $\overrightarrow{DB''} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AB}$ car B est le milieu de $[BB']$ par construction de B'. Or $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ donc $\overrightarrow{DB''} = \overrightarrow{DC'}$ ce qui implique que $C = B''$.
On maintenant effectuer la translation de vecteur $-\overrightarrow{FC}$, ce qui revient à faire la translation de vecteur $\overrightarrow{CF}$: par cette transformation, le point C devient le point F.
Finalement, le vecteur $\overrightarrow{b}$ transforme le point A en le point F, ce qui signifie que le vecteur $\overrightarrow{b}$ a pour représentant le vecteur $\overrightarrow{AF}$.



On commence en partant du point A car c'est le premier point qui intervient dans l'égalité caractérisant $\overrightarrow{c}$.
On place le point I milieu du segment $[AD]$, la translation de vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ transforme A en I.
En I, on trace un représentant de $\overrightarrow{EF}$: il transforme le point I en un point I' qui est le milieu de $[BC]$ que l'on peut justifier en appliquant deux fois le théorème de Thalès, une fois dans le triangle ADC et une fois dans le triangle ABC.
En I', on trace un représentant de $\overrightarrow{BF}$: il transforme le point I' en un point I'' qui est le milieu de $[BC]$ que l'on peut justifier en appliquant, à nouveau, deux fois le théorème de Thalès.
En I'', la translation de vecteur $-\overrightarrow{AC}$ est également la translation de vecteur $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{GE}$, elle transforme I'' en I''' et encore une fois, en se servant du théorème de Thalès, on peut montrer que $\overrightarrow{EI'''} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HE}$.
Finalement, le vecteur $\overrightarrow{c}$ transforme le point A en le point I''', ce qui signifie que le vecteur $\overrightarrow{c}$ a pour représentant le vecteur $\overrightarrow{AI'''}$.

2. *En se basant sur le graphique précédent, on appelle M le centre du rectangle $ABCD$.*
Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{CE}$, $\overrightarrow{MG}$ et $\overrightarrow{MF}$ comme combinaisons linéaires des vecteurs $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$.
Une grande partie de ce qui suit sera basée sur la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{CE} &= \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{ME} \\
&= \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AE} \\
&= \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AE} \\
&= 2\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{AE} \quad \text{car } M \text{ est le milieu de } [AC] \\
&= 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AE} \quad \text{car } M \text{ est le milieu de } [AC]
\end{aligned}$$

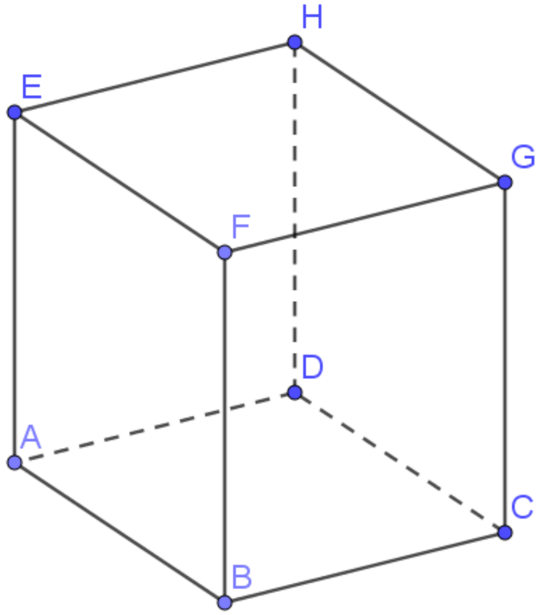
Comme M est le milieu de $[AC]$, alors $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{MC}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MG} &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AG}\\ &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CG}\\ &= \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AE}\\ &= \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AE}\end{aligned}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{MA}$ sont opposés donc leur somme est nulle.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MF} &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AF}\\ &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF}\\ &= -\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB}\end{aligned}$$

Exemple 3 (Base de l'espace) *Le dessin suivant représente un cube $ABCDEFGH$:*



1. *Déterminer une base de l'espace, c'est-à-dire un triplet de vecteurs à partir desquels on peut exprimer n'importe quel autre vecteur de l'espace.*
   Le triplet $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ constitue une base de l'espace car ces trois vecteurs ne sont pas coplanaires.
   Cela signifie que les droites dirigées par ces vecteurs ne sont pas toutes les trois dans un même plan et qu'aucun vecteur n'est colinéaire à un autre.
2. *Décomposer le vecteur $\overrightarrow{AG}$ dans cette base.*
   On utilise la relation de Chasles :
$$\begin{aligned} \overrightarrow{AG} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} \\ &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} \end{aligned}$$
   car $ABCDEFGH$ est un cube.
3. *Soit I le milieu de $[AH]$ et J le point de $[FI]$ tel que :*
$$\overrightarrow{FJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{FI}$$
   Démontrer que les points E, J et C sont alignés.
   On va exprimer les vecteurs $\overrightarrow{EJ}$ et $\overrightarrow{EC}$ dans la base choisie à la première ques-

tion pour ensuite constater qu'ils seront colinéaires :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{EJ} &= \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FJ}\\ &= \overrightarrow{EF} + \frac{2}{3}\overrightarrow{FI}\\ &= \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EI}\right)\\ &= \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{FE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EH} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EA}\right)\\ &= \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EA}\right)\\ &= \overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}\\ &= \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{EC} &= \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\\ &= -\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\\ &= 3\overrightarrow{EJ}\end{aligned}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{EJ}$ et $\overrightarrow{EC}$ sont donc colinéaires : les points E, J et F sont donc alignés.

4. *Donner les coordonnées de I et J dans le repère d'origine A et de base celle trouvée à la question* 1.
Il suffit d'exprimer les vecteurs $\overrightarrow{AJ}$ et $\overrightarrow{AI}$ en fonction de ceux qui constituent le repère choisi :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AJ} &= \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EJ}\\ &= \overrightarrow{AE} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}\\ &= \frac{2}{3}\overrightarrow{AE} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}\end{aligned}$$

Les coordonnées du point J dans le repère choisi sont donc : $\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$$

Les coordonnées du point I dans le repère choisi sont donc : $\left(0;\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$

5. *Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AK}$ avec K de coordonnées* $(1;3;-1)$.
C'est la démarche inverse de la question précédente; les coordonées de K nous permettent d'écrire :

$$\overrightarrow{AK} = 1\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AE}$$