Récurrences 5

On considère la suite :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 19u_n - 126n - 227 \\ u_0 = 16 \end{cases}$$

1. Calculer u_1.
2. On pose : $\forall n \in \mathbb{N} :\ v_n = u_n - 7n - 13$.
   Montrer que la suite (v_n) est géométrique . Donner la raison et le premier terme.
3. En déduire que l'expression de v_n en fonction de n.
4. En déduire que l'expression de u_n en fonction de n.
5. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

1. On a :

$$u_1 = 19u_0 - 126 \times 0 - 227 = 77$$

2. On a :

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= u_{n+1} - 7(n+1) - 13\\
v_{n+1} &= 19u_n - 126n - 227 - 7(n+1) - 13\\
v_{n+1} &= 19u_n - (126+7)n - 13 - 227 - 7\\
v_{n+1} &= 19u_n - 133n - 247\\
v_{n+1} &= 19\left(u_n - \frac{133}{19}n - \frac{247}{19}\right)\\
v_{n+1} &= 19\,(u_n - 7n - 13)\\
v_{n+1} &= 19v_n
\end{aligned}$$

3. Comme la suite (v_n) est géométrique de raison 19, on peut en déduire que :

$$\begin{aligned}
v_n &= 19^n v_0\\
v_n &= 19^n(u_0 - 13)\\
v_n &= 3 \times 19^n
\end{aligned}$$

4. On a :

$$\begin{aligned}
&v_n = u_n - 7n - 13\\
\Leftrightarrow\, &u_n = v_n + 7n + 13\\
\Leftrightarrow\, &u_n = 3 \times 19^n + 7n + 13
\end{aligned}$$

5. On doit déterminer le signe de $u_{n+1} - u_n$:

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= 3 \times 19^{n+1} + 7(n+1) + 13 - (3 \times 19^n + 7n + 13)\\
&= 3 \times 19^n(19-1) + 7n + 7 + 13 - 7n - 13\\
&= 54 \times 19^n + 7 > 0
\end{aligned}$$

Comme $u_{n+1} - u_n > 0$, on en déduit que la suite (u_n) est croissante.