Évaluation du 25/09/2020 : correction

Exercice 1 *Résoudre l'équation différentielle suivante :*

$$(E)\ :\ 5y'(t) - 15y(t) = 5e^{4t}$$

de condition initiale $f(0) = 1$ après avoir vérifié que la fonction $g(t) = e^{4t}$ était une solution particulière de (E).
On commence par résoudre l'équation homogène :

$$(E)\ :\ 5y'(t) - 15y(t) = 0$$

Les solutions de cette équation sont de la forme $Ke^{\frac{15}{5}t} = Ke^{3t}$ avec K une constante réelle.
On calcule ensuite $5g'(t) - 15g(t)$:

$$5g'(t) - 15g(t) = 5(e^{4t})' - 15e^{4t} = 5 \times 4e^{4t} - 15e^{4t} = 20e^{4t} - 15e^{4t} = 5e^{4t}$$

La fonction g est donc bien une solution particulière de (E).
Les solutions de (E) sont de la forme $Ke^{3t} + e^{4t}$ avec K une constante réelle.
En ce qui concerne la condition initiale, on doit résoudre l'équation :

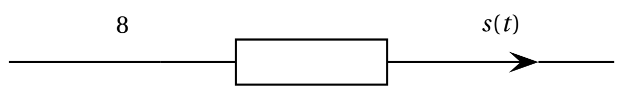
$$Ke^{3\times 0} + e^{4\times 0} = 1 \Leftrightarrow K + 1 = 0 \Leftrightarrow K = 0$$

La solution cherchée est donc $0 \times e^{3t} + e^{4t} = e^{4t}$

Exercice 2 *On considère un système entrée-sortie du premier ordre. Le signal de sortie est modélisé par une fonction causale s telle que $s(0) = 0$ et vérifiant l'équation différentielle suivante :*

$$8s'(t) + 4s(t) = 8$$

Le signal d'entrée prend, à tout instant t, la valeur 8.



1. *Résoudre l'équation différentielle*

$$8y'(t) + 4y(t) = 0$$

Les solutions de cette équations homogène sont de la forme $Ke^{-\frac{4}{8}t} = Ke^{-0.5t}$ avec K une constante réelle.

2. *On considère l'équation différentielle (E) :*

$$8y'(t) + 4y(t) = 8$$

Déterminer la fonction constante h solution de cette équation différentielle.
On appelle α cette solution :

$$8\alpha' + 4\alpha = 8 \Leftrightarrow 8 \times 0 + 4\alpha = 8 \Leftrightarrow \alpha = \frac{8}{4} = 2$$

3. *Justifier que, pour tout nombre réel t positif ou nul, on a :*

$$s(t) = 2 - 2e^{-0,5t}$$

Les solutions de (E) sont de la forme $s(t) = Ke^{-0.5t} + 2$ avec K une constante réelle.
Comme $s(0) = 0$ alors :

$$Ke^{-0.5\times 0} + 2 = 0 \Leftrightarrow K + 2 = 0 \Leftrightarrow K = -2$$

La fonction $s(t) = -2e^{-0.5t} + 2 = 2(1 - e^{-0.5t})$ est celle qui vérifie les conditions requises.

4. **a.** *Étudier le sens de variation de la fonction s sur l'intervalle* $[0; +\infty]$.
On doit calculer la dérivée de la fonction $s(t)$ puis déterminer son signe :

$$s'(t) = \left(2(1 - e^{-0.5t})\right)' = 2\left(1' - (e^{-0.5t})'\right) = e^{0.5t} > 0$$

On en déduit que la fonction est strictement croissante.

b. *Déterminer la valeur du nombre réel ℓ, limite de $s(t)$ quand t tend vers* $+\infty$.
On a :

$$\lim_{t\to+\infty} 2(1 - e^{-0.5t}) = \lim_{t\to+\infty} 2 - 2e^{-0.5t}) = 2 - 0 = 2$$

5. *On appelle temps de réponse du système la valeur du nombre réel t à partir de laquelle $s(t)$ atteint* 95% *de la valeur de la limite ℓ calculée précédemment.*
Déterminer une valeur approchée du temps de réponse du système.
On veut résoudre l'équation :

$$\begin{aligned}
&2(1 - e^{-0.5t}) = 2 \times 0.95\\
\Leftrightarrow &1 - e^{-0.5t} = 0.95\\
\Leftrightarrow &e^{-0.5t} = 0.05\\
\Leftrightarrow &-0.5t = \ln(0.05)\\
\Leftrightarrow &t = \frac{\ln(0.05)}{-0.05} \approx 59.91
\end{aligned}$$

Le temps de réponse du système est d'environ 60 *secondes si l'unité de temps est en seconde.*