Fonction logarithme 7

On considère la fonction suivante définie sur $]0;+\infty[$:

$$f(x) = (12 - 4\ln(x))\ln(x)$$

1. Calculer la limite de f en 0^+
2. Calculer la limite de f en $+\infty$
3. Calculer la dérivée de f.
4. Déterminer le signe de $f'(x)$.
5. En déduire le tableau de variation de $f(x)$.
6. En déduire le nombre de solutions de $f(x) = 0$ et un encadrement d'amplitude 10^{-2} de cette solution.

Correction :

1. On sait que :

$$\lim_{x\to 0^+} (12-4\ln(x)) = +\infty$$
$$\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$$
$$\text{donc } \lim_{x\to 0^+} (12x-4\ln(x))\ln(x) = -\infty$$

2.

$$\lim_{x\to +\infty} (12-4\ln(x)) = -\infty$$
$$\lim_{x\to +\infty} \ln(x) = +\infty$$
$$\text{donc } \lim_{x\to +\infty} (12x-4\ln(x))\ln(x) = -\infty$$

3.

$$\begin{aligned} f'(x) &= ((12-4\ln(x))\ln(x))' \\ &= (12-4\ln(x))'\ln(x) + (12-4\ln(x))\ln(x)' \\ &= -4\times\frac{1}{x}\ln(x) + (12-4\ln(x))\frac{1}{x} \\ &= \frac{12-8\ln(x)}{x} \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\Leftrightarrow 12-8\ln(x) > 0 \\ &\Leftrightarrow \ln(x) < \frac{12}{8} \\ &\Leftrightarrow x < e^{\frac{12}{8}} \end{aligned}$$

5. On a :

x	0		$e^{\frac{12}{8}}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	15.75	↘	$-\infty$

6. Comme la fonction g est continue, croissante de $-\infty$ à $15.75 > 0$, alors, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit qu'il existe une unique solution $\alpha_1 \in]0; e^{\frac{12}{8}}[$ tel que $g(\alpha_1) = 0$.
Comme la fonction g est continue, croissante de $15.75 > 0$ à $-\infty$, alors, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit qu'il existe une unique

solution $\alpha_2 \in]e^{\frac{12}{8}} ; +\infty[$ tel que $g(\alpha_2) = 0$.

$$\begin{aligned} f(0.99) &< 0 \\ f(1.0) &> 0 \\ \text{donc } 0.99 < \alpha_1 &< 1.0 \\ f(20.08) &> 0 \\ f(20.09) &< 0 \\ \text{donc } 20.08 < \alpha_2 &< 20.09 \end{aligned}$$

En regardant plus attentivement, on se rend compte que $\alpha_1 = 1$ et $\alpha_2 = e^{\frac{12}{4}}$.