Semaine du 07/02/2023 : devoir maison pour la rentrée, correction

Suites et récurrences

Suites arithmétiques et géométriques

1. Soit (u_n) une suite arithmétique de raison u_0 et de raison r telle que :

$$u_1 = 5$$
$$u_3 = 11$$

a. Déterminer u_0 et r.
Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = u_0 + r \times n$$

Donc on peut écrire :

$$u_1 = u_0 + r \times 1 = 5$$
$$u_3 = u_0 + r \times 3 = 11$$

Ainsi :

$$u_3 - u_1 = u_0 + r \times 3 - (u_0 + r \times 1) = 2r = 11 - 5 = 6$$

On trouve alors $r = 3$ et de l'égalité $u_1 = 5 = u_0 + r = u_0 + 3$, on trouve $u_0 = 2$.

b. Calculer $u_0 + u_1 + .. + u_{10}$.
On utilise la formule de la somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique :

$$u_0 + u_1 + .. + u_{10} = \frac{(10 - 0 + 1) \times (u_0 + u_{10})}{2} = \frac{11 \times (2 + 2 + 3 \times 10)}{2} = 187$$

2. Soit (u_n) une suite géométrique de raison u_0 et de raison q telle que :

$$u_3 = 250$$
$$u_4 = 1250$$

a. Déterminer u_0 et q.
Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = u_0 \times q^n$$

Par conséquent, on obtient :

$$u_3 = u_0 \times q^3 = 250$$
$$u_4 = u_0 \times q^4 = 1250$$

donc :

$$\frac{u_4}{u_3} = \frac{u_0 \times q^4}{u_0 \times q^3} = q = \frac{1250}{250} = 5$$

L'égalité $u_3 = u_0 \times q^3 = u_0 \times 125 = 250$ nous donne : $u_0 = 2$.

b. Calculer $u_0 + u_1 + .. + u_5$.
On utilise la formule de la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique :

$$u_0 + u_1 + .. + u_5 = u_0 \times \frac{1 - q^{5-0+1}}{1-q} = 2 \times \frac{1-5^6}{1-5} = 7812$$

3. Montrer, par récurrence, que pour $a > 0$ et pour tout entier naturel n non nul :

$$(1+a)^n \geq 1 + na$$

Initialisation :

Comme n est non nul, on commence par $n = 1$.
On a $(1+a)^1 = 1+a$ et 1+na=1+1×a=1+a donc $(1+a)^1 \geq 1+1\times a$: l'initialisation est établie.
Hérédité :
On suppose que pour un indice $n \geq 1$, on a :

$$(1+a)^n \geq 1+na \quad \text{c'est l'hypothèse de récurrence}$$

On va montrer que la propriété est vraie au rang $n+1$:

$$\begin{aligned} & (1+a)^{n+1} \\ =& (1+a)^n \times (1+a) \\ \geq& (1+na)\times(1+a) \\ \geq& 1+na+a+na^2 \\ \geq& 1+na+a \quad \text{car } na^2 \geq 0 \\ \geq& 1+(n+1)a \end{aligned}$$

L'hérédité est établie : $\forall n \geq 1 \ : \ (1+a)^n \geq 1+na$.

4. Soit la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 0.8u_n + 2 \\ u_0 = 5 \end{cases}$$

a. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, \ 0 \leq u_n \leq 10$.
Initialisation :
On a $u_0 = 5$ donc $0 \leq u_0 \leq 10$: l'initialisation est établie.
Hérédité :
On suppose que la propriété est vraie pour un certain rang $n \geq 0$:

$$0 \leq u_n \leq 10 \quad \text{c'est l'hypothèse de récurrence}$$

On va montrer que la propriété est vraie au rang $n+1$:

$$\begin{aligned}
&0 \leq u_n \leq 10\\
\Rightarrow &0.8 \times 0 \leq 0.8 \times u_n \leq 0.8 \times 10\\
\Rightarrow &0 \leq 0.8u_n \leq 8\\
\Rightarrow &0+2 \leq 0.8u_n+2 \leq 8+2\\
\Rightarrow &0 \leq 2 \leq 0.8u_n+2 \leq 10 \text{ or } u_{n+1} = 0.8u_n+2\\
\Rightarrow &0 \leq 2 \leq u_{n+1} \leq 10
\end{aligned}$$

L'hérédité est établie.
Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 10$.

b. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
On va montrer que le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$ est positif :

$$u_{n+1} - u_n = 0.8u_n + 2 - u_n = -0.2u_n + 2 = -0.2(u_n - 10)$$

Or $-0.2 < 0$ et $u_n - 10 \leq 0$ pour tout entier naturel n d'après la question précédente.
Par conséquent, le produit $-0.2(u_n - 10)$ est positif : la suite (u_n) est alors croissante.

c. En déduire que la suite (u_n) est convergente et justifier la valeur de sa limite.
Comme la suite (u_n) est croissante et majorée par 10, d'après le théorème de convergence monotone, elle converge vers $l \in \mathbb{R}$.
De plus, on sait que cette limite vérifie, par continuité de $f(x) = 0.8x + 2$:

$$0.8l + 2 = l \Leftrightarrow -0.2l = -2 \Leftrightarrow l = 10$$

d. Montrer que la suite (v_n), définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 10$ est géométrique et donner l'expression de son terme général.

Pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 10 \\ &= 0.8u_n + 2 - 10 \\ &= 0.8u_n - 8 \\ &= 0.8(u_n - 10) \\ &= 0.8v_n \end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison 0.8 et son premier terme est $v_0 = u_0 - 10 = 5 - 10 = -5$.
Par conséquent, pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n = v_0 \times 0.8^n \Leftrightarrow u_n - 10 = -5 \times 0.8^n \Leftrightarrow u_n = -5 \times 0.8^n + 10$$

Analyse

Fonction exponentielle

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^x - x$$

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
   On a :
   $$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$
   $$\lim_{x \to -\infty} -x = +\infty$$
   donc par somme de limites, on en déduit que :
   $$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$
   On a :
   $$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$$
   $$\lim_{x \to +\infty} -x = -\infty$$
   on donc une forme indéterminée du type $+\infty - \infty$. On doit alors factoriser par x :
   $$f(x) = x\left(\frac{e^x}{x} - 1\right)$$
   Par croissance comparée, on obtient :
   $$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$
   $$\text{donc } \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} - 1 = +\infty$$
   $$\text{et } \lim_{x \to +\infty} x = +\infty$$

Ainsi, par produit de limites, on en déduit que :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

2. Calculer la dérivée de la fonction f.
On a :

$$f'(x) = e^x - 1$$

3. Déterminer le signe de $f'(x)$.
On va résoudre l'inéquation $f'(x) \geq 0$:

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 1 \Leftrightarrow \ln(e^x) \geq \ln(1) \Leftrightarrow x \geq 0$$

4. En déduire le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(0) = 1$	$\nearrow$	$+\infty$

5. Justifier qu'il n'existe aucune valeur $\alpha \in \mathbb{R}$ telle que $f(\alpha) = 0$.
La fonction f est continue comme somme de fonctions continues et comme $f(x) \geq 1$ d'après le tableau de variation, alors on en déduit que la fonction f ne peut pas s'annuler : il n'existe pas de $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(\alpha) = 0$.

6. Calculer $f''(x)$.
On a $f''(x) = e^x$.

7. Que dire de la convexité ou la concavité de f ?
Comme $f''(x) = e^x > 0$, alors la fonction f est convexe sur $\mathbb{R}$.

8. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentant f en $\ln(2)$.
L'expression de la tangente à la courbe représentant f en $\ln(2)$ est :

$$y = f'(\ln(2))(x - \ln(2)) + f(2) = 1(x - \ln(2)) + 2 - \ln(2) = x + 2 - 2\ln(2)$$

Par convexité de la fonction f sur $\mathbb{R}$, on en déduit que pour tout nombre réel x :

$$f(x) \geq x + 2 - 2\ln(2)$$

☣ Analyse

Fonction logarithme

Soit la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = x\ln(x) - x + 1$$

1. Déterminer les limites de f en 0^+ et en $+\infty$.
On a :

$$\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$$

par produit et sommes de limites, on obtient une forme indéterminée de la forme $+\infty - \infty$.
On va alors factoriser par x :

$$f(x) = x\ln(x) - x + 1 = x\left(\ln(x) - 1 + \frac{1}{x}\right)$$
$$\text{or } \lim_{x\to+\infty} \ln(x) - 1 + \frac{1}{x} = +\infty$$
$$\text{et } \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$$

et par produit de limites, on en déduit que :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

Ensuite par croissance comparée :

$$\lim_{x\to0^+} x\ln(x) = 0$$

et on sait que :

$$\lim_{x \to 0^+} -x+1 = 1$$

finalement, on en déduit que :

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$$

2. Calculer la dérivée de la fonction f.
On a :

$$f'(x) = (x\ln(x))' - 1 = (x)' \times \ln(x) + x \times (\ln(x))' - 1 = \ln(x) + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln(x)$$

3. Déterminer le signe de $f'(x)$.
On va résoudre l'inéquation $f'(x) \geq 0$:

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \ln(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^{\ln(x)} \geq e^0 \Leftrightarrow x \geq 1$$

4. En déduire le tableau de variation de f.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$f(0) = 0$	$\nearrow$	$+\infty$

5. Justifier qu'il n'existe qu'une seule valeur $\alpha \in]0; +\infty[$ telle que $f(\alpha) = 0$.
Quelle est la valeur de α ?
On sait que $f(1) = 0$.

La fonction f est continue par somme et produit de fonctions continues.
Sur $]0;1[$ la fonction est strictement décroissante et $f(x) > f(1) = 0$.
Sur $]1;+\infty[$ la fonction est strictement croissante et $f(x) > f(1) = 0$.
Comme la fonction n'a pas de saut par sa continuité, elle ne peut pas prendre ailleurs qu'en $x = 1$ la valeur 0.

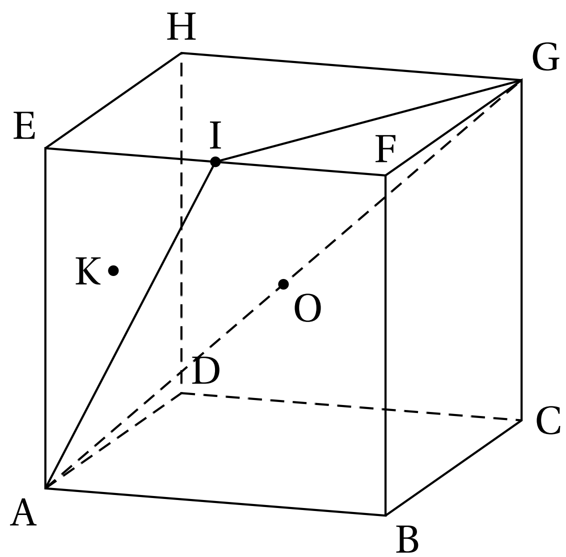
6. Calculer $f''(x)$.
On a :

$$f''(x) = \frac{1}{x} > 0$$

7. Que dire de la convexité ou la concavité de f ?
Comme la dérivée seconde est strictement positif pour $x > 0$, alors la fonction f est convexe pour $x > 0$.

Géométrie

On considère le cube ABCDEFGH d'arête de longueur 1.
L'espace est muni du repère orthonormé $\left(A\,;\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AD}\,,\overrightarrow{AE}\right)$. Le point I est le milieu du segment [EF], K le centre du carré ADHE et O le milieu du segment [AG].



Le but de l'exercice est de calculer de deux manières différentes, la distance du point B au plan (AIG).

Partie 1. Première méthode

1. Donner, sans justification, les coordonnées des points A, B, et G.

   On admet que les points I et K ont pour coordonnées $I\left(\frac{1}{2}\,;\,0\,;\,1\right)$ et $K\left(0\,;\,\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\right)$.

$$A\,(0;0;0)$$
$$B\,(1;0;0)$$
$$G\,(1;1;1)$$

2. Démontrer que la droite (BK) est orthogonale au plan (AIG).
Il suffit de montrer que le vecteur $\overrightarrow{BK}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de (AIG).
On a :

$$\overrightarrow{BK}\left(-1;\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$$
$$\overrightarrow{AI}\left(\frac{1}{2};0;1\right)$$
$$\overrightarrow{AG}(1;1;1)$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AI}$ sont non colinéaires car les coordonnées de leur vecteurs ne sont pas proportionnels.
Calculons les produits scalaires de $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AI}$ avec $\overrightarrow{BK}$:

$$\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{BK} = -1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 0$$
$$\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BK} = -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times 0+1\times\frac{1}{2} = 0$$

Par conséquent, les vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AI}$ sont orthogonaux au vecteur $\overrightarrow{BK}$: le vecteur $\overrightarrow{BK}$ est donc normal au plan (AIG).

3. Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (AIG) est : $2x - y - z = 0$.
Comme les coordonnées d'un vecteur normal au plan (AIG) sont $\left(-1;\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ et donc aussi $(2;-1;-1)$, alors l'équation du plan (AIG) est de la forme :

$$2x - y - z + d = 0$$

avec d un nombre réel que nous allons déterminer en utilisant des points connus du plan.
Comme le point A appartient au plan (AIG), ses coordonnées vérifient l'équation du plan (AIG) :

$$2x_A - y_A - z_A + d = 0 \Leftrightarrow 0-0-0+d = 0 \Leftrightarrow d = 0$$

Finalement, l'équation du plan (AIG) est :

$$2x - y - z = 0$$

4. Donner une représentation paramétrique de la droite (BK).
Une représentation paramétrique de la droite (BK) est :

$$\begin{cases} x = x_B + t x_{\overrightarrow{BK}} \\ y = y_B + t y_{\overrightarrow{BK}} \\ z = z_B + t z_{\overrightarrow{BK}} \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - t \\ y = \frac{1}{2}t \\ z = \frac{1}{2}t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$$

5. En déduire que le projeté orthogonal L du point B sur le plan (AIG) a pour coordonnées $\mathrm{L}\left(\dfrac{1}{3}\,;\,\dfrac{1}{3}\,;\,\dfrac{1}{3}\right)$.
Comme le vecteur $\overrightarrow{BK}$ est normal au plan (AIG), le projeté orthogonal de B sur (AIG) est l'intersection de (BK) et de la droite (AIG).
Ainsi, comme L appartient à la droite (BK), alors il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\begin{cases} x_L = 1 - t \\ y_L = \frac{1}{2}t \\ z_L = \frac{1}{2}t \end{cases}$$

Comme L est dans le plan (AIG), alors ses coodonnées vérifient l'équation du plan (AIG) :

$$2x_L - y_L - z_L = 0 \Leftrightarrow 2(1-t) - \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}t = 0 \Leftrightarrow 2 - 2t - t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{2}{3}$$

Finalement, en remplaçant t par $\frac{2}{3}$ dans l'expression des coordonnées de L, on en déduit que :

$$\begin{cases} x_L = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \\ y_L = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \\ z_L = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

6. Déterminer la distance du point B au plan (AIG).
La distance du point B au plan (AIG) est la distance entre le projeté orthogonal de B sur (AIG) et B, c'est à dire BL.
On calcule les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{BL}$:

$$\overrightarrow{BL}\left(\frac{1}{3} - 1\ ;\ \frac{1}{3} - 0\ ;\ \frac{1}{3} - 0\right) = \left(-\frac{2}{3} ; \frac{1}{3} ; \frac{1}{3}\right)$$

$$\text{donc } BL = \sqrt{\left(\frac{-2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{6}{9}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

Partie 2. Deuxième méthode

On rappelle que le volume V d'une pyramide est donné par la formule $V = \dfrac{1}{3} \times b \times h$, où b est l'aire d'une base et h la hauteur associée à cette base.

1. a. Justifier que dans le tétraèdre ABIG, [GF] est la hauteur relative à la base AIB.
Il suffit de montrer que la droite (GF) est orthogonale au plan (AIB).
Or le plan (AIB) et le plan (ABC) sont les mêmes et par construction du cube, la droite (GF) et le plan (ABC) sont orthogonaux.
Par conséquent, [GF] est la hauteur relative à la base AIB car F appartient au plan (AIB).

b. En déduire le volume du tétraèdre ABIG.
On peut donc écrire déterminer le volume V du tétraèdre $ABIG$:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \times GF \times \text{ aire de AIB} \\ &= \frac{1}{3} \times 1 \times \frac{AE \times AB}{2} \\ &= \frac{1}{3} \times 1 \times \frac{1 \times 1}{2} \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

2. On admet que $\text{AI} = \text{IG} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$ et que $\text{AG} = \sqrt{3}$.

Démontrer que l'aire du triangle isocèle AIG est égale à $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$ unité d'aire.
Comme $AI = IG$ alors le triangle AIG est isocèle en I : sa médiane issue de I, IO est donc aussi la hauteur issue de I et ainsi :

$$\text{aire de AIG } = \frac{AG \times IO}{2}$$

Il nous reste à déterminer la longueur IO :

$$\begin{aligned} &O\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) \\ &I\left(\frac{1}{2}; 0; 1\right) \\ &\overrightarrow{IO}\left(0; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right) \\ &IO = \sqrt{0^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}\text{aire de AIG } &= \frac{AG \times IO}{2}\\ &= \frac{\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}\\ &= \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{2}}{4}\\ &= \frac{\sqrt{6}}{4}\end{aligned}$$

3. En déduire la distance du point B au plan (AIG).
On peut exprimer le volume V d'une autre manière :

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \times BL \times \text{ aire de AIG}\\ \Leftrightarrow BL &= \frac{3V}{\text{aire de AIG}}\\ \Leftrightarrow BL &= \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{6}}{4}}\\ \Leftrightarrow BL &= \frac{2}{\sqrt{6}}\\ \Leftrightarrow BL &= \frac{2\sqrt{6}}{6}\\ \Leftrightarrow BL &= \frac{\sqrt{6}}{3}\end{aligned}$$