Représentations paramétriques et équations cartésiennes : correction de l'activité

On considère l'espace muni d'un repère orthonormée $(O; \vec{i}\,; \vec{j}\,; \vec{k}\,)$ et trois points A, B et C tels que :

$$A(2;1;1)$$
$$B(1;1;0)$$
$$C(1;0;1)$$

1. Montrer que les points A, B et C engendrent un plan.
On détermine les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB}\,(-1;0;-1)$$
$$\overrightarrow{AC}\,(-1;-1;0)$$

Les points A, B et C engendrent un plan si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.
On regarde si les coordonnées de ces vecteurs sont proportionnelles ou pas :

$$\frac{x_{\overrightarrow{AB}}}{x_{\overrightarrow{AC}}} = \frac{-1}{-1} = 1$$
$$\frac{y_{\overrightarrow{AB}}}{y_{\overrightarrow{AC}}} = \frac{0}{-1} = 0 \neq 1$$

Les coordonnées ne sont pas proportionnelles, les vecteurs ne sont donc pas colinéaires et par conséquent, les points A, B et C engendrent le plan (ABC).

2. Déterminer les coordonnées du vecteurs $\overrightarrow{BC}$.
On a :

$$\overrightarrow{BC}\,(0;-1;1)$$

3. Traduire le fait que le point M appartienne à la droite (BC) en termes de vecteurs. Le point M appartient à la droite (BC) si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BM}$ sont colinéaires.
Autrement dit, il faut qu'il existe un nombre réel t tel que :

$$\overrightarrow{BM} = t \times \overrightarrow{BC}$$

4. Traduire la propriété précécente en terme d'égalité de coordonnées sachant que celle de M sont $(x; y; z)$.
On reprend le fait qu'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{BM} = t \times \overrightarrow{BC} \\
\Leftrightarrow &\begin{cases} x - x_B = t \times x_{\overrightarrow{BC}} \\ y - y_B = t \times y_{\overrightarrow{BC}} \\ z - z_B = t \times z_{\overrightarrow{BC}} \end{cases} \\
\Leftrightarrow &\begin{cases} x - 1 = t \times 0 \\ y - 1 = t \times (-1) \\ z - 0 = t \times 1 \end{cases} \\
\Leftrightarrow &\begin{cases} x = 0t + 1 \\ y = -t + 1 \\ z = 1t \end{cases}
\end{aligned}$$

5. Calculer un vecteur normal $\overrightarrow{n}$ au plan (ABC).
On va chercher un vecteur $\overrightarrow{n}$ de coordonnées $(a; b; c)$ qui est à la fois orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$:

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} \overrightarrow{n}.\overrightarrow{AB} = 0 \\ \overrightarrow{n}.\overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \\
\Leftrightarrow &\begin{cases} -a - c = 0 \\ -a - b = 0 \end{cases} \\
\Leftrightarrow &\begin{cases} a = -c \\ a = -b \end{cases} \\
\Leftrightarrow &(a; b; c) = a(1; -1; -1)
\end{aligned}$$

On peut choisir de prendre comme vecteur orthogonal le vecteur $\bar{n}(1; -1; -1)$.

6. Caractériser le fait que le point M soit sur le plan (ABC) en faisant intervenir le vecteur $\overrightarrow{n}$.
Le point M appartient au plan (ABC) si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\bar{n}$ sont orthogonaux.

Autrement dit, si $\overrightarrow{AM}.\bar{n} = 0$.

7. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

On reprend l'égalité précédente :

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{AM}.\bar{n} = 0\\
\Leftrightarrow &(x-2)\times 1 + (y-1)\times(-1) + (z-1)\times(-1) = 0\\
\Leftrightarrow &x-2-(y-1)-(z-1) = 0\\
\Leftrightarrow &x-2-y-z+1 = 0\\
\Leftrightarrow &x-y-z-1 = 0
\end{aligned}$$