ஃ Continuité des fonctions de la variable réelle : exercices

Exercice 1 *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$\begin{cases} 3+x & si\ x \leq -1 \\ x^2+x & si\ x > -1 \end{cases}$$

1. *Représenter graphiquement la fonction f.*
2. *f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?*

Exercice 2 *On désigne par f la fonction continue définie sur l'intervalle* $[-10;8]$ *dont le tableau de variation est le suivant :*

x	10		-4		5		8
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	*-1*	$\nearrow$	*10*	$\searrow$	*-5*	$\nearrow$	*15*

Déterminer le nombre de solutions sur $[-10;8]$ *de chacune des équations suivantes :*

$$f(x) = 0$$
$$f(x) = 11$$
$$f(x) = -7$$

Exercice 3 1. *A l'aide d'une calculatrice, conjecturer le nombre de solutions de l'équation :*

$$x^3 - 6x + 2 = 0$$

2. *Montrer que l'intervalle* $[-1;2]$ *contient une des solutions précédentes.*

Exercice 4 *On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$f(x) = x^5 + x^3$$

1. *Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.*
2. *Étudier les variations de f.*
3. *Démontrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.*
4. *Donner un encadrement d'amplitude 0.001 de cette solution.*

Exercice 5 *Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$\begin{cases} -x+3 & si\ x < -3 \\ 3-x & si\ x \geq -3 \end{cases}$$

1. *La fonction f est-elle continue en -3 ?*
2. *La fonction f est-elle dérivable en -3 ? On reviendra à la d'éfinition de la dérivabilité pour la justification.*
3. *Interpréter graphiquement les résultats précédents.*

Exercice 6 *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$f(x) = -x^4 + 2x^3 + 3x + 1$$

1. *Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.*
2. *Étudier les variations de f'.*
3. *Justifier que l'équation $f'(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$, que l'on notera α. Donner un encadrement de α entre deux entiers consécutifs.*
4. *En déduire le tableau de signes de f'.*
5. *Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.*

Exercice 7

1. *Montrer que l'équation $2x^3 - 3x^2 - 1 = 0$ admet une unique solution, notée α, et que cette solution est comprise entre 1.6 et 1.7.*
2. *On considère la fonction f, définie sur $]C - \infty; -1[\cap] - 1; +\infty[$ par :*

$$f(x) = \frac{1-x}{1+x^3}$$

Étudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

3. *Étudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.*
4. *Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0 et étudier la position de la courbe par rapport à cette tangente.*
5. *Représenter graphiquement la fonction f et la tangente.*