☙ Limites et dérivées
Applications aux polynômes

1 Limites

1.1 Rappels

Définition 1 *Une fonction f est un processus qui à un nombre x associe un unique nombre y.*
Le nombre y est appelé image de x.
Le nombre x est un antécédent de y : il peut y avoir plusieurs antécédent par f pour un même nombre y.
Les antécédents se lisent sur l'axe des abscisses tandis que les images se lisent sur l'axed des ordonnées.

1.2 Limites en un point a

Définition 2 *On dit que la fonction f admet une limite $l \in \mathbb{R}$ en a si $f(x+\epsilon)$ est de plus en plus proche de l quand ϵ s'approchent de 0.*
On dit que la fonction f tend vers $+\infty$ en a si $f(x+\epsilon)$ peut devenir plus grand que n'importe quel nombre positif quand ϵ s'approche de 0.
On dit que la fonction f tend vers $-\infty$ en a si $f(x+\epsilon)$ peut devenir plus petit que n'importe quel nombre négatif quand ϵ s'approche de 0.

Définition 3 (Limite à droite) *On dit que la fonction f tend vers $+\infty$ en a^+ si $f(x+\epsilon)$ peut devenir plus grand que n'importe quel nombre positif quand ϵ s'approche de 0 en restant positif (à droite de a sur un dessin).*
On dit que la fonction f tend vers $-\infty$ en a^+ si $f(x+\epsilon)$ peut devenir plus petit que n'importe quel nombre négatif quand ϵ s'approche de 0 restant positif.

Définition 4 (Limite à gauche) *On dit que la fonction f tend vers $+\infty$ en a^- si $f(x+\epsilon)$ peut devenir plus grand que n'importe quel nombre positif quand ϵ s'approche de 0 en restant négatif (à gauche de a sur un dessin).*
On dit que la fonction f tend vers $-\infty$ en a^- si $f(x+\epsilon)$ peut devenir plus petit que n'importe quel nombre négatif quand ϵ s'approche de 0 restant positif.

1.3 Limites en $\pm\infty$

Définition 5 *On dit que la fonction f admet une limite $l \in \mathbb{R}$ en $+\infty$ si $f(x)$ est de plus en plus proche de l quand x devient un nombre positif de plus en plus grand.*
On dit que la fonction f admet une limite $l \in \mathbb{R}$ en $-\infty$ si $f(x)$ est de plus en plus proche de l quand x devient un nombre négatif de plus en plus petit.
On dit que la fonction f tend vers $+\infty$ en a si $f(x)$ peut devenir plus grand que n'importe quel nombre positif quand x devient un nombre positif de plus en plus grand.
On dit que la fonction f tend vers $-\infty$ en a si $f(x+\epsilon)$ peut devenir plus petit que n'importe quel nombre négatif quand x devient un nombre négatif de plus en plus petit..

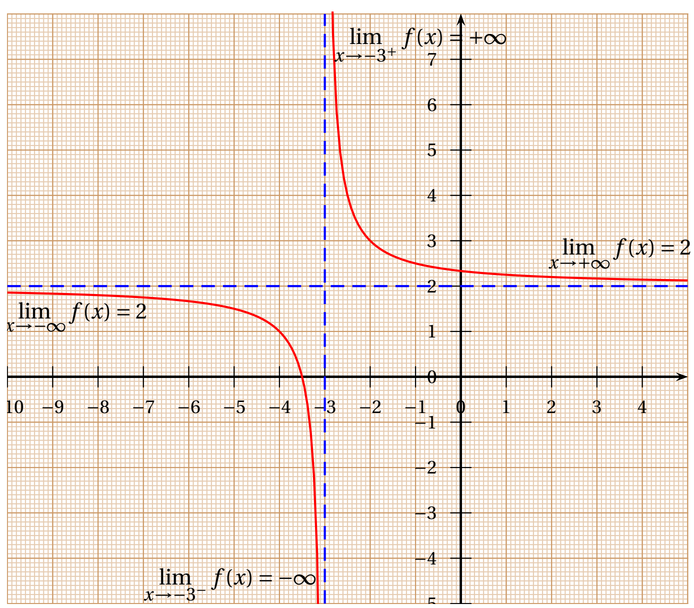
1.4 Opérations sur les limites et formes indéterminées

$$+\infty + \infty = +\infty$$
$$-\infty - \infty = -\infty$$
$$+\infty \times (+\infty) = +\infty$$
$$+\infty \times (-\infty) = -\infty$$
$$-\infty \times (-\infty) = +\infty$$
$$l \pm \infty = \pm\infty$$
$$l \times \infty = \infty \text{ si } l \neq 0$$
$$\frac{\infty}{l} = \infty$$
$$\frac{\infty}{0} = \infty \times \infty = \infty$$
$$\frac{0}{\infty} = 0$$
$$\frac{0}{0} = \frac{\infty}{\infty} = 0 \times \infty = \text{ forme indéterminée } = \text{ F.I}$$

La dénomination forme indéterminée signifie qu'on ne peut pas conclure sans avoir des informations supplémentaires sur les fonctions intervenants dans le calculs des limites.

1.5 Interprétation géométrique et asymptotes

Exemple 1 *Le graphique suivant illustre la notion de limites en un point et en l'infini :*



Propriétés 1 (Asymptotes horizontales et verticales)

- ✏ *Si $\lim_{x\to -\infty} f(x) = l$, alors on dit que la droite d'équation $y = l$ est asymptote horizontale à la courbe représentant f en $-\infty$.*
- ✏ *Si $\lim_{x\to +\infty} f(x) = l$, alors on dit que la droite d'équation $y = l$ est asymptote horizontale à la courbe représentant f en $+\infty$*
- ✏ *Si $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$, alors on dit que la droite d'équation $x = a$ est asymptote verticale à la courbe représentant f.*

✏ *Si* $\lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$, *alors on dit que la droite d'équation* $x = a$ *est asymptote verticale à la courbe représentant* f.

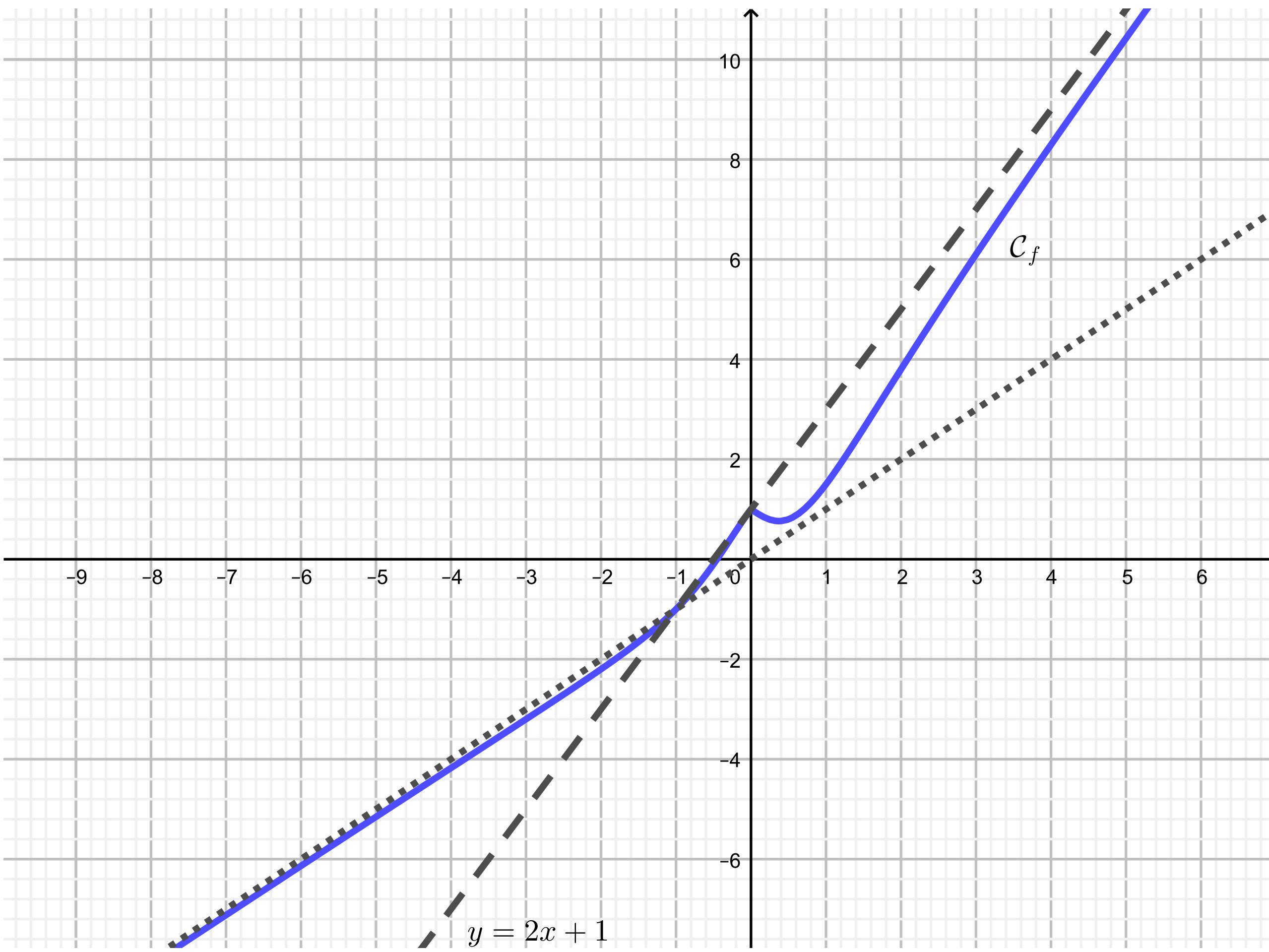
Sur le graphique précédent, la droite d'équation $y = 2$ est à la fois asymptote à la courbe en $+\infty$ et en $-\infty$ tandis que la droite d'équation $x = -3$ est asypmtote à la courbe.

Propriétés 2 (Asymptote oblique) *Si* $\lim_{x \to +\infty} f(x) - (ax + b) = 0$ *avec* $a \neq 0$ *alors la droite* $y = ax+b$ *est asymptote oblique à la courbe représentant* f *en* $+\infty$. *Si* $\lim_{x \to -\infty} f(x) - (ax + b) = 0$ *avec* $a \neq 0$ *alors la droite* $y = ax + b$ *est asymptote oblique à la courbe représentant* f *en* $-\infty$.

Exemple 2 *Dans le graphique qui suit, la courbe* $\mathscr{C}_f$ *admet deux asymptotes obliques :*

✏ $y = 2x + 1$ *en* $+\infty$.

✏ $y = x$ *en* $-\infty$.



2 Dérivation

2.1 Taux d'accroissement et limite en un point

Définition 6 *Soit* f *une fonction définie sur un intervalle* I.
Soit x *un point de cet intervalle et* ϵ *un nombre réel tel que* $x + \epsilon$ *soit encore un point*

de I.
On appelle taux d'accroissement de f en x, la fonction de $\epsilon > 0$ définie par :

$$\tau_x(\epsilon) = \frac{f(x+\epsilon) - f(x)}{\epsilon}$$

Propriétés 3 *On dit que la fonction f est dérivable en x si la fonction τ_x admet une limite finie l en quand ϵ tend vers 0. Dans ce cas, le nombre l est appelé nombre dérivée de f en x : $f'(x)$.*

Définition 7 *On dit que la fonction f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout point x de I.*

Propriétés 4 *Si f est dérivable en a, l'équation de la tangente à la courbe représentant f en a est :*

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

2.2 Dérivées et variations

Propriétés 5 *Soit f est dérivable sur I :*

1. *Si f' est positive sur I alors f est croissante sur I.*
2. *Si f' est négative sur I alors f est décroissante sur I.*
3. *Si f' s'annule en x en changeant de signe alors x est un maximum ou un minimum pour la fonction f.*

2.3 Opérations sur les dérivées

$$\begin{aligned}
&(k \times f)' = k \times f' \\
&(f+g)' = f' + g' \\
&(f \times g)' = f' \times g + f \times g' \\
&\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \times g - f' \times g}{g^2} \\
&\left[f(u(x))\right]' = u'(x) \times f'(u(x))
\end{aligned}$$

3 Polynômes

3.1 Polynômes, cas général

Définition 8 *Une fonction polynômiale est une fonction f de la forme :*

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + .. + a_1 x + a_0$$

avec n un entier plus grand que 1, appelé degré de f, et $a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0$ des nombres réels.

Propriétés 6 *Pour n un entier plus grand que 1, on a :*

$$\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$$

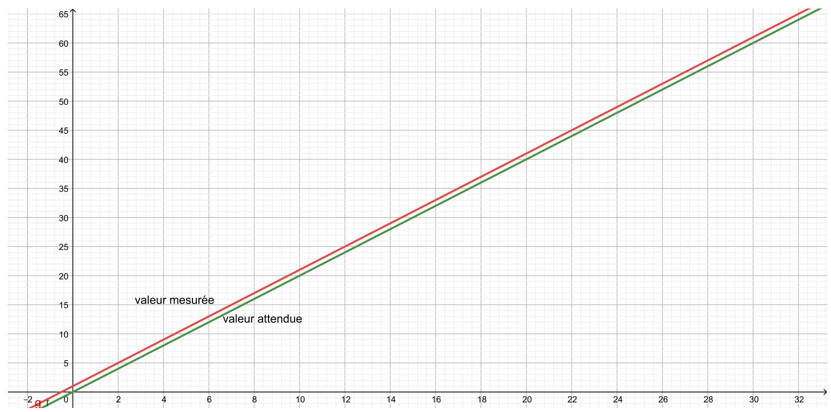
3.2 Fonctions affines

Définition 9 *Une fonction affine est une fonction polynômiale de degré* 1 *:*

$$f(x) = ax + b \text{ avec } a \neq 0$$

Propriétés 7 *La dérivée d'une fonction affine* $f'(x) = ax + b$ *est* a*.*
Par conséquent, la fonction f *sera soit toujours croissante, soit toujours décroissante.*

Exemple 3 *Quand on fait la mesure d'une grandeur physique, il y a plusieurs types d'erreurs possibles.*
L'une d'entre elle est l'erreur de zéro ou offset, la valeur mesurée present un décalage constant avec la valeur attendue : cela vient souvent d'une mauvaise tare de l'appareil de mesure. La représentation graphique, en prenant le bon repère, de cette erreur consiste en deux fonctions affines :



3.3 Polynôme du second degré

Définition 10 *Une fonction du second degré est une fonction polynômiale de degré* 2 *:*

$$f(x) = ax^2 + bx + c \text{ avec } a \neq 0$$

Propriétés 8 *La dérivée d'une fonction du second degré est :*

$$f'(x) = 2ax + b$$

Il y a un maximum en $x = -\frac{b}{2a}$ *quand* $a < 0$ *et un minimum en* $x = -\frac{b}{2a}$ *quand* $a > 0$*.*

3.4 Limites

Propriétés 9 *La limite d'un polynôme* $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + .. + a_1 x + a_0$ *en* $\pm\infty$ *est la même que la limite de* $a_n x^n$ *en* $\pm\infty$ *:*

$$\lim_{x \to +\infty} a_n x^n = \text{ signe de } a_n \infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} a_n x^n = \begin{cases} \text{signe de } a_n \infty & si\, n \text{ est pair} \\ -\text{ signe de } a_n \infty & si\, n \text{ est impair} \end{cases}$$

4 Fractions rationnelles

Définition 11 *Une fraction rationnelle est une fonction de la forme :*

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

avec P *et* Q *des polynômes.*

Propriétés 10 *Soit* $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ *avec :*

$$P(X) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + .. + a_1 x + a_0$$
$$Q(X) = b_n x^m + b_{m-1} x^{n-1} + .. + b_1 x + b_0$$

1. *Si le degré de* $P(x)$ *est strictement plus grand que celui de* $Q(X)$, *la limite en* $\pm\infty$ *sera* $\pm\infty$ *: il faudra regarder la limite de* $\frac{a_n}{b_n} x^{n-m}$ *à l'endroit concerné pour avoir plus de précisions sur le signe.*
2. *Si le degré de* $P(x)$ *est strictement plus petit que celui de* $Q(X)$, *la limite en* $\pm\infty$ *sera* 0.
3. *Si* $P(X)$ *et* $Q(X)$ *ont le même degré, la limite en* $\pm\infty$ *sera* $\frac{a_n}{b_m}$.

Remarque 1 *Si le degré de* P *est égal au degré de* Q *plus* 1 *alors on aura des asymptotes obliques en* $\pm\infty$.
L'énoncé guidera la détermination de l'équation de ces asymptotes.