Fonction logarithme 2

On considère la fonction suivante définie sur $]0;+\infty[$:

$$f(x) = 1x^2 + 4x + 2 - 12x^2\ln(x)$$

1. Calculer la limite de f en 0^+
2. Calculer la limite de f en $+\infty$
3. Calculer la dérivée de f.
4. Calculer la dérivée seconde de f.
5. Déterminer le signe de $f''(x)$.
6. En déduire le tableau de variation de $f'(x)$.
7. Déterminer le nombre de solutions de $f'(x) = 0$ et en donner un encadrement d'amplitude 10^{-2}.
8. En déduire le tableau de variation de $f(x)$.
9. Déterminer le nombre de solutions de $f(x) = 0$.

Correction :

1. On sait que :

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0^+} 1x^2+4x+2=2\\
&\lim_{x\to 0^+} 12x^2\ln(x)=0 \quad \text{par propriété du cours}\\
\text{donc } &\lim_{x\to 0^+} 1x^2+4x+2-12x^2\ln(x)=2
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to +\infty} 1x^2+4x+2=+\infty\\
&\lim_{x\to +\infty} -12x^2\ln(x)=-\infty \quad \text{par propriété du cours}\\
\text{donc } &\lim_{x\to +\infty} 1x^2+4x+2-12x^2\ln(x)=-\infty \quad \text{par prédominance de } x^2\ln(x)
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 2x+4-12\left(x^2\ln(x)\right)'\\
&= 2x+4-12\left((x^2)'\ln(x)+x^2\times\ln(x)'\right)\\
&= 2x+4-12\left(2x\ln(x)+x^2\times\frac{1}{x}\right)\\
&= 2x+4-12\left(2x\ln(x)+x\right)\\
&= -10x+4-24\ln(x)
\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
f''(x) &= -10-24\left(x\ln(x)\right)'\\
&= -10-24\left(x'\ln(x)+x\times\ln(x)'\right)\\
&= -10-24\left(\ln(x)+x\times\frac{1}{x}\right)\\
&= -10-24\left(\ln(x)+1\right)\\
&= -34-24\ln(x)
\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}
f'(x) &\geq 0\\
-34-24\ln(x) &\geq 0\\
-24\ln(x) &\geq 34\\
\ln(x) &\leq \frac{34}{-24}\\
x &\leq e^{\frac{34}{-24}}
\end{aligned}$$

6. On a :

x	0		$e^{\frac{34}{-24}}$		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$	4	$\nearrow$	$4+24e^{\frac{34}{-24}}$	$\searrow$	$-\infty$

7. D'après le tableau de variation, comme $4>0$, la fonction f' ne peut pas s'annuler sur l'intervalle $]0;e^{\frac{34}{-24}}]$.
Pour $x > e^{\frac{34}{-24}}$, la fonction est décroissante de $4+24e^{\frac{34}{-24}} > 0$ vers $-\infty$, donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe une unique valeur $\alpha > e^{\frac{34}{-24}}$ telle que $f'(\alpha) = 0$.
En utilisant la calculatrice, on trouve :

$$f'(0.24) > 0$$
$$f'(0.25) < 0$$
$$0.24 < \alpha < 0.25$$

8. On a :

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	2	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$-\infty$

9. D'après le tableau de variation, comme $2>0$, la fonction f ne peut pas s'annuler sur l'intervalle $]0;\alpha]$.
Pour $x > \alpha$, la fonction est décroissante de $f(\alpha) > 0$ vers $-\infty$, donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe une unique valeur $\beta > \alpha$ telle que $f(\beta) = 0$.

$$f(1.48) < 0$$
$$f(1.47) > 0$$
$$\text{donc } 1.47 < \beta < 1.48$$