Suites et récurrences

Suites géométriques

1. Une suite (u_n) est géométrique de raison q et de premier terme u_0 vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad u_{n+1} = q \times u_n$$
$$\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n = u_0 \times q^n$$

   Pour montrer qu'une suite est géométrique, on partira de l'expression de u_{n+1} et on essaiera d'y faire apparaître le terme u_n multiplié une valeur indépendante de n qui sera la raison.

2. Pour $q \neq 1$, la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique s'écrit, pour $n > p$:

$$u_p + u_{p+1} + .. + u_n = u_p \times \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$$

3. On peut déterminer le comportement à l'infini de la suite géoémtrique $\left(q^n\right)$:
   - ✏ convergente vers 0 si $-1 < q < 1$.
   - ✏ divergente vers $+\infty$ si $q > 1$.
   - ✏ convergente vers 1 si $q = 1$.
   - ✏ sans limite dans les autres cas.

Suites arithmétiques

1. Une suite (u_n) est arithmétique de raison r et de premier terme u_0 vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad u_{n+1} = u_n + r$$
$$\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n = u_0 + nr$$

   Pour montrer qu'une suite est arithmétique, on montrera que la différence $u_{n+1} - u_n$ est toujours égale à la même valeur, la raison, peu importe la valeur de n.

2. La somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique s'écrit, pour $n > p$:

$$u_p + u_{p+1} + .. + u_n = \frac{(n-p+1)(u_p+u_n)}{2}$$

Monotonie d'une suite

Pour montrer qu'une suite (u_n) est monotone, on va étudier la différence $u_{n+1} - u_n$ pour $n \in \mathbb{N}$:

- ✏ si $u_{n+1} - u_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$: (u_n) est croissante.
- ✏ si $u_{n+1} - u_n \leq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$: (u_n) est décroissante.

Exemples d'étude de suite du type $u_{n+1} = f(u_n)$

1. On étude la suite :

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n - u_n \ln(u_n) \\ u_0 = 0.5 \end{cases}$$

   a. Déterminer f telle que $u_{n+1} = f(u_n)$.
   On remplace tous les u_n par des x et on obtient :

$$f(x) = x - x\ln(x)$$

b. Montrer que f est croissante sur $[0.5;1]$.
La fonction f est dérivable pour $x>0$ et on a :

$$f'(x) = -\ln(x)$$

Pour $0.5 \leq x \leq 1$, on sait que $\ln(x) \leq 0$, donc $f'(x) \geq 0$ pour $0.5 \leq x \leq 1$: f est donc croissante pour $x \in [0.5, 1]$.

c. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0.5 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.
Initialisation :
On a $u_1 = f(u_0) = u_0 - u_0\ln(u_0)$ donc $u_1 - u_0 = -u_0\ln(u_0)$.
Or $\ln(u_0) \leq 0$ car $u_0 \leq 1$ donc $-u_0\ln(u_0) \geq 0$: par conséquent, $u_1 \geq u_0$ et l'initialisation est alors établie.
Hérédité :
On suppose que la propriété est vraie pour un certain rang $n \geq 0$:

$$0.5 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1 : \text{ c'est l'hypothèse de récurrence}$$

On regarder si la propriété est vraie au rang $n+1$. On part de l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned}
& 0.5 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1 \\
\Rightarrow & f(0.5) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(1) \text{ par croissance de } f \\
\Rightarrow & u_1 \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(1) \text{ or } u_1 \geq u_0 = 0.5 \\
\Rightarrow & 0.5 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 1
\end{aligned}$$

L'hérédité est alors établie.
Pour tout $n \in \mathbb{N},\ 0.5 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.

d. Montrer que la suite (u_n) est convergente.
La suite (u_n) est croissante et majorée par 1 donc, d'après le théorème de convergence monotone, u_n converge.

e. Déterminer sa limite l.
La limite l de la suite vérifie :

$$l = f(l) \Leftrightarrow l = l - l\ln(l) \Leftrightarrow l\ln(l) = 0 \Leftrightarrow l = 0 \text{ ou } l = 1$$

Comme (u_n) est décroissante, alors $l < 0.5 < 1$ donc $l = 0$.

2. On étudie la suite :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 0.9u_n + 100 \\ u_0 = 2000 \end{cases}$$

a. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ 1000 < u_{n+1} \leq u_n$.
Initialisation :
On a $u_1 = 0.9 \times 2000 + 100 = 1800 + 100 = 1900$ donc $1000 < u_1 < u_0$: l'initialisation est établie.
Hérédité : On suppose que la propriété est vraie pour un certain rang $n \geq 0$:

$$1000 < u_{n+1} \leq u_n \text{ c'est l'hypothèse de récurrence}$$

On va regarder si la propriété est vraie au rang $n+1$.
On part de l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned}
& 1000 < u_{n+1} \leq u_n \\
\Rightarrow & 0.9 \times 1000 < 0.9 \times u_{n+1} \leq 0.9u_n \\
\Rightarrow & 900 + 100 < 0.9 \times u_{n+1} + 100 \leq 0.9u_n + 100 \\
\Rightarrow & 1000 < u_{n+2} \leq u_{n+1}
\end{aligned}$$

L'héréditе est alors établie.
Par conséquent, $\forall n \in \mathbb{N},\ 1000 < u_{n+1} \leq u_n$.

b. La suite (u_n) est-elle convergente ?
La suite (u_n) est décroissante et minorée donc, d'après le théorème de convergence monotone, elle converge.

c. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 1000$.

i. Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 0.9.
Pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 1000 \\ &= 0.9u_n + 100 - 1000 \\ &= 0.9u_n - 900 \\ &= 0.9(u_n - 1000) \\ &= 0.9v_n \end{aligned}$$

La suite est donc géométrique de raison 0.9.

ii. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 1000(1 + 0.9^n)$.
Comme la suite est géométrique de raison 0.9 et de premier terme $v_0 = u_0 - 1000 = 1000$, alors :

$$\begin{aligned} &\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = 1000 \times 0.9^n \\ \Leftrightarrow &\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n - 1000 = 1000 \times 0.9^n \\ \Leftrightarrow &\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 1000 + 1000 \times 0.9^n = 1000(1 + 0.9^n) \end{aligned}$$

iii. Déterminer la limite de la suite (u_n).
Comme la raison de 0.9 est dans $]-1;1[$ alors la suite 0.9^n converge vers 0 donc, par somme et produit de limites, on en déduit que la suite u_n est 1000.