༄ Devoir maison 8 : correction

Partie I : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$g(x) = \ln(x) + 3x - 3.$$

1. Déterminer les limites de g en $+\infty$ et 0.
On sait que :

$$\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$$
$$\lim_{x \to 0^+} 3x = 0$$
$$\lim_{x \to 0^+} -3 = -3$$

Par somme de limites, on en déduit que :

$$\lim_{x \to 0^+} \ln(x) + 3x - 3 = -\infty$$

Ensuite, on a :

$$\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$$
$$\lim_{x \to +\infty} 3x = +\infty$$
$$\lim_{x \to +\infty} -3 = -3$$

Par somme de limites, on en déduit que :

$$\lim_{x \to +\infty} \ln(x) + 3x - 3 = +\infty$$

2. Déterminer le sens de variation de la fonction g sur $]0\,;\,+\infty[$.
Pour déterminer le sens de variation de g, il est nécessaire de calculer sa dérivée :

$$g'(x) = \frac{1}{x} + 3$$

Cette fonction est strictement positive pour $x > 0$, par conséquent, la fonction g est croissante sur $]0\,;\,+\infty[$.

3. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]0\,;\,+\infty[$.
La fonction g est croissante de $]0\,;\,+\infty[$ vers $]-\infty;+\infty[$ et la fonction g est continue par somme de fonctions continues, donc par le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit qu'il existe un unique $\alpha \in]0\,;\,+\infty[$ tel que $g(\alpha) = 0$ car $0 \in]-\infty;+\infty[$.

4. Calculer $g(1)$ puis déterminer le signe de g sur $]0\,;\,+\infty[$.
On sait que $g(1) = \ln(1) + 3 - 3 = 0$, on en déduit que $\alpha = 1$, par unicité, et que le tableau de signes de g est le suivant :

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

Partie II : Étude d'une fonction f

On considère la fonction f, définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \left(3 - \frac{1}{x}\right)(\ln(x) - 2).$$

1. **a.** On admet que la fonction f est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ et on note f' sa dérivée.
Démontrer que, pour tout x de $]0\ ;\ +\infty[$, on a :

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}.$$

On utilise la formule de dérivation d'un produit :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{x^2} \times (\ln(x) - 2) + \left(3 - \frac{1}{x}\right) \times \frac{1}{x} \\
&= \frac{(\ln(x) - 2)}{x^2} + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2} \\
&= \frac{(\ln(x) - 2)}{x^2} + \frac{3x}{x^2} - \frac{1}{x^2} \\
&= \frac{(\ln(x) - 2) + 3x - 1}{x^2} \\
&= \frac{\ln(x) + 3x - 3}{x^2} \\
&= \frac{g(x)}{x^2}
\end{aligned}$$

b. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $]0\ ;\ +\infty[$.

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	-4	↗	$+\infty$

La justification des limites aux bornes est la suivante :

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \to 0^+} 3 - \frac{1}{x} = -\infty \\
&\lim_{x \to 0^+} \ln(x) - 2 = -\infty \\
\text{donc, par produit de limites : } &\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \\
&\lim_{x \to +\infty} 3 - \frac{1}{x} = 3 \\
&\lim_{x \to +\infty} \ln(x) - 2 = +\infty \\
\text{donc, par produit de limites : } &\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty
\end{aligned}$$

2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$ sur $]0\ ;\ +\infty[$ puis dresser le tableau de signes de f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
La fonction f est continue pour $x > 0$:

- ✏ la fonction f est décroissante de $]0;1]$ vers $[-4;+\infty[$: d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique $\alpha \in]0;1[$ tel que $f(\alpha) = 0$.
- ✏ la fonction f est croissante de $[1;+\infty[$ vers $[-4;+\infty[$: d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique $\beta \in]1;+\infty[$ tel que $f(\beta) = 0$.

On en déduit le tableau de signes suivant :

x	0		α		β		$+\infty$
$f(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	

On peut trouver α et β en résolvant l'équation suivante :

$$
\begin{aligned}
& f(x) = 0 \\
\Leftrightarrow & \left(3 - \frac{1}{x}\right)(\ln(x) - 2) = 0 \\
\Leftrightarrow & 3 - \frac{1}{x} = 0 \text{ ou } \ln(x) - 2 = 0 \\
\Leftrightarrow & \frac{1}{x} = 3 \text{ ou } \ln(x) = 2 \\
\Leftrightarrow & x = \frac{1}{3} \text{ ou } \ln(x) = e^2
\end{aligned}
$$

Finalement, $\alpha = \frac{1}{3}$ et $\beta = e^2$.

Partie III : Étude d'une fonction F admettant pour dérivée la fonction f

On admet qu'il existe une fonction F dérivable sur $]0~;~+\infty[$ dont la dérivée F' est la fonction f.
Ainsi, on a : $F' = f$.
On note $\mathscr{C}_F$ la courbe représentative de la fonction F dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$. On ne cherchera pas à déterminer une expression de $F(x)$.

1. Étudier les variations de F sur $]0~;~+\infty[$.
   La dérivée de F est f, on peut donc en déduire le tableau de variation de F, mais sans les valeurs à l'intérieur :

x	0		$\frac{1}{3}$		e^2		$+\infty$
$f(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	
$F(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

2. La courbe $\mathscr{C}_F$ représentative de F admet-elle des tangentes parallèles à l'axe des abscisses ?
   Justifier la réponse.
   La courbe $\mathscr{C}_F$ représentative de F admet des tangentes parallèles à l'axe des abscisses quand la dérivée de F, c'est-à dire f, s'annule en changeant de signe ; cela a lieu deux fois, en $x = \frac{1}{3}$ et en $x = e^2$.