꩜ Équations différentielles

1 Equations différentielles du premier ordre

Exemple 1 *On considère le bac de stockage cylindrique représenté ci-dessous.*
À l'instant t, en seconde (s), on note $h(t)$ la hauteur d'eau, en mètre (m), dans le bac, $Q_e(t)$ le débit d'entrée, en $m^3 s^{-1}$, et $Q_v(t)$ le débit de vidange, en $m^3 s^{-1}$.

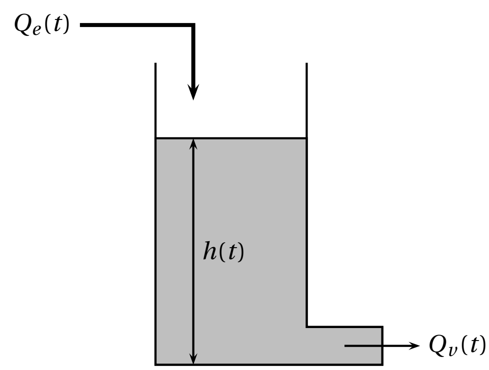
À l'instant $y = 0$, le bac est vide, donc :

$$h(0) = 0.$$

La conservation de la matière et des approximations permettent d'écrire, pour tout $t \geqslant 0$:

$$Q_e(t) = 8h'(t) + 2h(t)$$

où S est l'aire de la base du bac, exprimée en m^2, et h' la fonction dérivée de h.



On a donc : $8h'(t) + 2h(t) = Q_e(t)$.

On veut que la hauteur d'eau $h(t)$ atteigne 10 *cm, soit* 0,1 *m.*
Pour cela, on agit sur le débit d'entrée $Q_e(t)$.

On va supposer que pour $t \geqslant 0$: $Q_e(t) = 0,2$.
La fonction h est donc solution sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ de l'équation différentielle :

$$8y' + 2y = 0,2 \qquad (E)$$

1. **a.** *Donner les solutions sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ de l'équation différentielle : $8y' + 2y = 0 \quad (E_0)$.*

   b. *Déterminer une solution particulière constante $y_0 : t \mapsto c$, avec c constante réelle. de l'équation différentielle (E).*

   c. *Donner les solutions sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ de l'équation différentielle (E).*

2. *L'une des quatre expressions ci-dessous est celle de $h(t)$, pour tout réel $t \geqslant 0$. Laquelle ? Justifier la réponse.*

A $h(t) = -0,1e^{-0,25t} + 0,2$	***C*** $h(t) = -0,1e^{-4t} + 0,1$
B $h(t) = -0,1e^{-0,25t} + 0,1$	***D*** $h(t) = -0,2e^{-0,25t} + 0,1$

3. **a.** *Quelle est la limite de $h(t)$ quand t tend vers $+\infty$? Justifier brièvement.*

   b. *Estimer au bout de combien de temps $h(t)$ atteint 95 % de 0,1 m. Indiquer la démarche suivie.*

2 Equations différentielles du second ordre

Exemple 2 *Sous certaines conditions de charge, la vitesse de rotation d'un moteur à courant continu soumis à une tension constante U, exprimée en Volt (V), est solution de l'équation différentielle*

$$(E): \quad \frac{1}{4}y'' + y' + y = \frac{U}{k}, \text{ où } k \text{ est une valeur caractéristique du moteur.}$$

1. *On note (E_0) l'équation homogène associée à (E). On a donc :*

$$(E_0): \quad \frac{1}{4}y'' + y' + y = 0.$$

   Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E_0).

2. *Vérifier que la fonction constante $g: \quad t \longmapsto \frac{U}{k}$ est une solution de l'équation différentielle (E).*
3. *En déduire les solutions de l'équation différentielle de (E).*
4. *En prenant $k = \frac{2}{3}$ et $U = 10$ V la solution de l'équation différentielle (E) vérifiant les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$.*

Exemple 3 *On considère l'équation différentielle suivante :*

$$(E') \;:\; s''(t) + 9s(t) = 9sin(2t)$$

1. *Résoudre l'équation différentielle :*

$$(E'_0) \;:\; s''(t) + 9s(t) = 0$$

2. *Montrer que $h(t) = \frac{9}{5}\sin(2t)$ est solution particulière de $h(t)$.*
3. *En déduire les solutions de (E).*

Exemple 4 *On considère l'équation différentielle (E) :*

$$y'' + 5y' + 4y = 10,$$

où y est une fonction de la variable x, définie et deux fois dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$, y' la fonction dérivée de y et y'' sa fonction dérivée seconde.

1. **a.** *Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $r^2 + 5r + 4 = 0$.*
   b. *En déduire les solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E_0) :*

$$y'' + 5y' + 4y = 0.$$

2. *Déterminer une solution constante de (E) sous la forme d'une constante.*
3. *L'étude du système mécanique montre que f est la solution de l'équation différentielle (E) vérifiant les conditions initiales $f(0) = 5$ et $f'(0) = -1$. Déterminer une expression de $f(t)$ en fonction de t.*

3 Résumé

3.1 Rappels sur les méthodes de résolutions classiques : premier ordre

Équations homogènes

$$(E_0)\ :\ y'(t) + ay(t) = 0$$

Les solutions sont de la forme $f_0(t) = Ke^{-at}$ avec K un nombre réel dont la valeur dépend des conditions initiales.
Si jamais l'équation est de la forme :

$$(E_0)\ :\ cy'(t) + dy(t) = 0$$

on se ramène au cas précedent en divisant par c :

$$(E_0)\ :\ y'(t) + \frac{d}{c}y(t) = 0$$

Équations avec second membre

$$(E)\ :\ y'(t) + ay(t) = s(t)$$

1. Premier cas : $s(t)$ est une constante α et une solution particulière est $g(t) = \frac{\alpha}{a}$.
   Soit on donne la réponse directement, soit il peut arriver qu'on nous demande de trouver cette solution par le biais d'une démonstration.
   Dans ce cas, on procède de la sorte :
   - ✏ On appelle $g(t) = C$ la solution constante.
   - ✏ $g'(t) = 0$.
   - ✏ $g'(t) + ag(t) = \alpha \Leftrightarrow 0 + a \times C = \alpha \Leftrightarrow C = \frac{\alpha}{a}$
2. Deuxième cas : $s(t)$ n'est pas une constante et on vérifie que $g(t)$ donné dans l'énoncé est une solution particulière.
   On calcule $g'(t)$ puis $g'(t) + ag'(t)$ et on doit trouver $s(t)$.

Les solutions de (E) sont de la forme :

$$f(t) = f_0(t) + h(t)$$

où $f_0(t)$ est la solution de (E_0).
Si jamais l'équation est de la forme :

$$(E_0)\ :\ cy'(t) + dy(t) = s(t)$$

on se ramène au cas précedent en divisant par c :

$$(E_0)\ :\ y'(t) + \frac{d}{c}y(t) = \frac{s(t)}{c}$$

Équation complète avec condition initiale

On donne une information supplémentaire sur la fonction f solution de l'équation différentielle (E) : $f(0) = b$.
On demande alors de déterminer la solution de (E) : cela revient à déterminer la valeur de K.
Pour le faire, on doit résoudre cette équation du premier ordre, d'inconnue K :

$$f(0) = b \Leftrightarrow Ke^{-a\times 0} + h(0) = b \Leftrightarrow K = b - h(0)$$

La suite de la résolution dépend de la valeur de $h(0)$.

Exemple 5 *On considère l'équation différentielle* $(E)\ :\ y' - 4y = 2e^{3t}$ *où l'inconnue* y *est une fonction de la variable réelle* t *et* y' *sa dérivée.*

1. *Résoudre l'équation différentielle* $(E_0)\ :\ y' - 4y = 0$.
   $\longrightarrow$ *Il n'y a pas à transformer l'équation puisqu'il y a* 1 *devant* y'.
   Devant y*, il y a* -4 *donc les solutions de* (E_0) *sont de la forme* Ke^{+4t} *avec* $K \in \mathbb{R}$.
2. *Déterminer une solution particulière* h *de* (E) *sous la forme* $h(t) = ae^{3t}$ *où* a *est une constante réelle à déterminer.*
   $\longrightarrow$ *La fonction* h *est une solution de* (E)*, donc on l'égalité suivante :*

$$\begin{aligned} & h'(t) - 4h(t) = 2e^{3t} \\ \Leftrightarrow & (ae^{3t})' - 4ae^{3t} = 2e^{3t} \\ \Leftrightarrow & a(e^{3t})' - 4ae^{3t} = 2e^{3t} \\ \Leftrightarrow & a \times 3e^{3t} - 4ae^{3t} = 2e^{3t} \\ \Leftrightarrow & -ae^{3t} = 2e^{3t} \\ \Leftrightarrow & a = \frac{2e^{3t}}{-e^{3t}} = -2 \end{aligned}$$

   Finalement, $h(t) = -2e^{3t}$.
3. *En déduire les solutions de* (E).
   $\longrightarrow$ *Les solutions de* (E) *sont donc de la forme :* $f(t) = Ke^{+4t} - 2e^{3t}$.
4. *Déterminer la solution* f *de* (E) *vérifiant la condition initiale* $f(0) = 0$.
   $\longrightarrow$ *On remplace* t *par* 0 *dans l'expression de* f *précédemment exprimée :* $f(0) = K - 2$.
   Cette expression doit être égale à 0 *donc* $K = 2$ *et par conséquent* $f(t) = 2e^{4t} - 2e^{3t}$.

3.2 Rappels sur les méthodes de résolutions classiques : second ordre

Équations homogènes

$$(E_0)\ :\ ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0$$

avec $a \neq 0$.
On doit commencer par résoudre l'équation du second ordre suivante :

$$(E_c)\ :\ ar^2 + br + c = 0$$

1. **Premier cas :** $\Delta = b^2 - 4ac > 0$.
   (E_c) a deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2.
   Les solutions de (E_0) sont de la forme $Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$ avec $A, B \in \mathbb{R}$.
2. **Deuxième cas :** $\Delta = b^2 - 4ac = 0$.
   (E_c) a une solution réelle double r_0.
   Les solutions de (E_0) sont de la forme $(At + B)e^{r_0 t}$ avec $A, B \in \mathbb{R}$.
3. **Troisième cas :** $\Delta = b^2 - 4ac < 0$.
   (E_c) a deux solutions complexes conjuguées $z_1 = \alpha + \beta i$ et $z_2 = \alpha - \beta i$.
   Les solutions de (E_0) sont de la forme $e^{\alpha t}\left(A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t)\right)$ avec $A, B \in \mathbb{R}$.

Équations sans second membre

$$(E)\ :\ ay''(t) + by'(t) + cy(t) = s(t)$$

L'énoncé nous donne une fonction $h(t)$ et nous demande de vérifier qu'elle est bien une solution de (E). On calcule $h'(t)$ puis $h''(t) = \left(h'(t)\right)'$.
Ensuite on calcule :

$$ah''(t) + bh'(t) + ch(t)$$

et cette expression doit être égale à $s(t)$.
Les solutions de (E) sont de la forme :

$$f(t) = f_0(t) + h(t)$$

où $f_0(t)$ est la solution de (E_0).
Premier cas : $s(t)$ est une constante α et une solution particulière est $g(t) = \frac{\alpha}{c}$.
Soit on donne la réponse directement, soit il peut arriver qu'on nous demande de trouver cette solution par le biais d'une démonstration.
Dans ce cas, on procède de la sorte :

- ✏ On appelle $g(t) = C$ la solution constante.
- ✏ $g'(t) = 0$.
- ✏ $g''(t) = 0$.
- ✏ $ag''(t) + bg'(t) + cg(t) = \alpha \Leftrightarrow a \times 0 + b \times 0 + c \times C = \alpha \Leftrightarrow C = \frac{\alpha}{c}$

Deuxième cas : $s(t)$ n'est pas une constante et on vérifie que $g(t)$ donné dans l'énoncé est une solution particulière.
On calcule $g'(t)$, $g''(t)$ puis $ag''(t) + bg'(t) + cg(t)$ et on doit trouver $s(t)$.
Quelque soit le cas, les solutions de (E) sont de la forme :

$$f(t) = f_0(t) + h(t)$$

où $f_0(t)$ est la solution de (E_0).

Équation complète avec conditions initiales
C'est la partie la plus difficile.
On donne deux informations supplémentaires sur la fonction f solution de l'équation différentielle (E) : $f(0) = \epsilon$ et $f'(0) = \sigma$.
On demande alors de déterminer la solution de (E) : cela revient à déterminer la valeur de A et B.
On doit alors résoudre un système d'équation à deux inconnues.
La première équation s'obtient directement :

$$f(0) = \epsilon \Leftrightarrow f_0(0) + h(0) = \epsilon$$

Suivant les solutions de l'équation homogène, on obtient :

$$\begin{aligned}
&Ae^{r_1 \times 0} + Be^{r_2 \times 0} + h(0) = \epsilon \Leftrightarrow A + B + h(0) = \epsilon \\
\text{ou } &(A \times 0 + B)e^{r_0 \times 0} + h(0) = \epsilon \Leftrightarrow B + h(0) = \epsilon \\
\text{ou } &e^{\alpha \times 0}\left(A\cos(\beta \times 0) + B\sin(\beta \times 0)\right) + h(0) = \epsilon \Leftrightarrow A + h(0) = \epsilon
\end{aligned}$$

La seconde requiert plus de travail : on doit d'abord dériver $f(t)$. Cette étape est délicate dans le sens où les constantes A et B seront présentes. On obtient les résultats suivants, en fonction de ce que nous avions pour équation homogène :

$$\begin{aligned}
&\left(Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} + h(t)\right)' = Ar_1e^{r_1 t} + Br_2e^{r_2 t} + h'(t) \\
\text{ou } &\left((At + B)e^{r_0 t} + h(t)\right)' = Ae^{r_0 t} + (At + B)r_0e^{r_0 t} + h'(t) \\
\text{ou } &\left(e^{\alpha t}\left(A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t)\right) + h(t)\right)' \\
&= \alpha e^{\alpha t}\left(A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t)\right) + e^{\alpha t}\left(-\beta A\sin(\beta t) + B\beta\cos(\beta t)\right) + h'(t)
\end{aligned}$$

Ensuite, on remplace t par 0 et on obtient comme seconde équation, suivant l'équation homogène :

$$Ar_1 + Br_2 + h'(0) = \sigma$$
$$\text{ou } A + Br_0 + h'(0) = \sigma$$
$$\text{ou } \alpha A + B\beta + h'(0) = \sigma$$

Enfin, il s'agit de résoudre un système d'équation à deux inconnues : par substitution, par combinaison linéaire ou encore avec la calculatrice.
Nous allons caractériser cela dans les exemples suivants.

Exemple 6 *On considère les équations suivantes :*

$$\begin{aligned}(E)\ &:\ y''(t) + 6y'(t) + 9y(t) = 9e^{-6t}\\(E_0)\ &:\ y''(t) + 6y'(t) + 9y(t) = 0\end{aligned}$$

1. *Résoudre $r^2 + 6r + 9 = 0$.*
   $\longrightarrow$ *On calcule le discriminant Δ :*
   $$\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \times 1 \times 9 = 36 - 36 = 0$$
   Cette équation a donc une solution double $r_0 = -\frac{b}{2a} = -3$.
2. *Résoudre l'équation (E_0).*
   $\longrightarrow$ *Les solutions de (E_0) sont de la forme $(At + B)e^{-3t}$ avec $A, B \in \mathbb{R}$.*
3. *Montrer que $g(t) = e^{-6t}$ est solution particulière de (E).*
   $\longrightarrow$ *On va calculer la dérivée première de g puis la dérivée seconde :*
   $$\begin{aligned}g'(t) &= \left(e^{-6t}\right)' = -6e^{-6t}\\g''(t) &= \left(-6e^{-6t}\right)' = -6\left(e^{-6t}\right)' = -6 \times \left(-6e^{-6t}\right) = 36e^{-6t}\end{aligned}$$
   Maintenant, on remplace g dans l'équation différentielle :
   $$\begin{aligned}g''(t) + 6g'(t) + 9g(t) &= 36e^{-6t} + 6 \times \left(-6e^{-6t}\right) + 9 \times e^{-6t}\\&= 36e^{-6t} - 36e^{-6t} + 9e^{-6t}\\&= 9e^{-6t}\end{aligned}$$
   On obtient bien le fait que $g''(t) + 6g'(t) + 9g(t) = 9e^{-6t}$: g est donc une solution particulière de (E)
4. *Donner les solutions de (E).*
   $\longrightarrow$ *Les solutions de (E) sont donc de la forme $f(t) = (At + B)e^{-3t} + e^{-6t}$, avec $A, B \in \mathbb{B}$.*
5. *Déterminer la solution f de (E) telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$.*
   $\longrightarrow$ *On va commencer par la condtion la plus facile :*
   $$\begin{aligned}f(0) = 0 &\Leftrightarrow (A \times 0 + B)e^{-3\times 0} + e^{-6\times 0} = 0\\&\Leftrightarrow B + 1 = 0\\&\Leftrightarrow B = -1\end{aligned}$$
   Avant de passer à la seconde condition, nous allons dériver $f(t)$:
   $$f'(t) = Ae^{-6t} - 3(At + B)e^{-6t} - 6e^{-6t} = (A - 3At - 3B - 6)e^{-6t}$$
   On va maintenant remplacer B par la valeur que nous avons trouvé et t par 0 :
   $$\begin{aligned}f'(0) = 0 &\Leftrightarrow (A - 3A \times 0 - 3 \times -(1) - 6)e^{-6\times 0} = 0\\&\Leftrightarrow (A - 2) \times 1 = 0\\&\Leftrightarrow A = 2\end{aligned}$$
   Finalement, on obtient $f(t) = (2t - 1)e^{-3t} + e^{-6t}$

Exemple 7 *On considère les équations suivantes :*

$$\begin{aligned}(E) &: y''(t)+6y'(t)+5y(t)=4e^{-t}\\ (E_0) &: y''(t)+6y'(t)+5y(t)=0\end{aligned}$$

1. *Résoudre $r^2+6r+5=0$.*
   $\longrightarrow$ *On calcule le discriminant Δ :*

   $$\Delta=b^2-4ac=6^2-4\times1\times5=36-20=16>0$$

   Il y a donc deux solutions distinctes :

   $$x_1=\frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-6-\sqrt{16}}{2}=\frac{-6-4}{2}=-5\quad x_2=\frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-6+\sqrt{16}}{2}=\frac{-6+4}{2}=-1$$

2. *Résoudre l'équation (E_0).*
   $\longrightarrow$ *Les solutions de (E_0) sont de la forme $Ae^{-5t}+Be^{-t}$ avec $A,B\in\mathbb{R}$.*
3. *Montrer que $g(t)=te^{-t}$ est solution particulière de (E).*
   $\longrightarrow$ *On calcule $g'(t)$ puis $g''(t)$ et enfin $g''(t)+6g'(t)+5g(t)$:*

   $$\begin{aligned}&g'(t)=(te^{-t})'=t'e^{-t}+t\times(e^{-t})'=e^{-t}+t\times(-e^{-t})=(1-t)e^{-t}\\ &g''(t)=\left((1-t)e^{-t}\right)'=(1-t)'e^{-t}+(1-t)\times(e^{-t})'=-1e^{-t}-(1-t)e^{-t}=(t-2)e^{-t}\\ &g''(t)+6g'(t)+5g(t)=(t-2)e^{-t}+6(1-t)e^{-t}+5te^{-t}=(t-2+6-6t+5t)e^{-t}=4e^{-t}\end{aligned}$$

   On obtient bien l'égalité $g''(t)+6g'(t)+5g(t)=4e^{-t}$: g est donc solution particulière de (E).
4. *Donner les solutions de (E).*
   $\longrightarrow$ *Les solutions de (E) sont de la forme $f(t)=Ae^{-5t}+Be^{-t}+te^{-t}$.*
5. *Déterminer la solution f de (E) telle que $f(0)=0$ et $f'(0)=1$.*
   $\longrightarrow$ *On va commencer par exploiter la première condition qui est plus simple :*

   $$f(0)=0\Leftrightarrow Ae^0+Be^0+0e^0=0\Leftrightarrow A+B=0$$

   Avant de passer à la seconde condition, il faut dériver $f(t)$:

   $$f'(t)=-5Ae^{-5t}-Be^{-t}+(1-t)e^{-t}$$

   On utilise maintenant la seconde condition :

   $$f'(0)=0\Leftrightarrow -5Ae^0-Be^0+(1-0)e^0=0\Leftrightarrow 5A-B=-1$$

   On doit résoudre le système de deux équations à deux inconnues :

   $$\begin{cases}A+B=0\\-5A-B=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A+B=0\\-5A-B+(A+B)=-1+0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A+B=0\\-4A=-1\end{cases}$$

   J'obtiens ce résultat après avoir ajouté la première et la deuxième ligne en mettant les termes de gauche ensemble à gauche et ceux de droite ensemble à droite.
   On trouve donc $A=\frac{1}{4}$ et $B=-\frac{1}{4}$, finalement :

   $$f(t)=\frac{1}{4}e^{-5t}-\frac{1}{4}e^{-t}+te^{-t}$$

Exemple 8 *On considère les équations suivantes :*

$$\begin{aligned}(E) &: y''(t)+2y'(t)+5y(t)=4e^{-t}\\ (E_0) &: y''(t)+6y'(t)+5y(t)=0\end{aligned}$$

1. *Résoudre* $r^2 + 2r + 5 = 0$.
   $\longrightarrow$ *On calcule le discriminant* Δ *:*

$$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times 1 \times 5 = 4 - 20 = -16 < 0$$

   Il y a donc deux solutions complexes conjuguées :

$$z = \frac{b + \sqrt{|\Delta|}i}{2a} = \frac{-2+4i}{2} = -1 + 2i$$
$$\bar{z} = -1 - 2i$$

2. *Résoudre l'équation* (E_0).
   $\longrightarrow$ *Les solutions de* (E_0) *sont de la forme* $e^{-t}(A\cos(2t) + B\sin(2t))$ *avec* A *et* B *des nombres réels.*
3. *Montrer que* $g(t) = e^{-t}$ *est solution particulière de* (E).
   $\longrightarrow$ *On calcule* $g'(t)$ *puis* $g''(t)$ *et enfin* $g''(t) + 2g'(t) + 5g(t)$ *:*

$$g'(t) = (e^{-t})' = -e^{-t}$$
$$g''(t) = (g'(t))' = (-e^{-t})' = e^{-t}$$
$$g''(t) + 2g'(t) + 5g(t) = e^{-t} + 2 \times (-e^{-t}) + 5 \times e^{-t} = 4e^{-t}$$

   On obtient bien l'égalité $g''(t) + 2g'(t) + 5g(t) = 4e^{-t}$ *:* g *est donc solution particulière de* (E).
4. *Donner les solutions de* (E).
   $\longrightarrow$ *Les solutions de* (E) *sont de la forme* $f(t) = e^{-t}(A\cos(2t) + B\sin(2t)) + e^{-t}$ *avec* A *et* B *des nombres réels.*
5. *Déterminer la solution* f *de* (E) *telle que* $f(0) = 0$ *et* $f'(0) = 1$.
   $\longrightarrow$ *On commence par la condition la plus accessible,* $f(0) = 0$ *:*

$$f(0) = 0 \Leftrightarrow e^0(A\cos(0) + B\sin(0)) + e^0 = 0 \Leftrightarrow A + 1 = 0 \Leftrightarrow A = -1$$

   Ensuite, on dérive $f(t)$ *:*

$$\begin{aligned} f'(t) &= \left(e^{-t}(A\cos(2t) + B\sin(2t)) + e^{-t}\right)' \\ &= (e^{-t})' \times (A\cos(2t) + B\sin(2t)) + e^{-t} \times (A\cos(2t) + B\sin(2t))' + (e^{-t})' \\ &= -e^{-t}(A\cos(2t) + B\sin(2t)) + e^{-t} \times (-2A\sin(2t) + 2B\cos(2t)) - e^{-t} \end{aligned}$$

   Maintenant, on remplace A *par* -1 *et* t *par* 0 *avec* $f'(0) = 1$ *:*

$$\begin{aligned} f'(0) = 0 &\Leftrightarrow -e^0(-1\cos(0) + B\sin(0)) + e^0 \times (-2A\sin(0) + 2B\cos(0)) - e^0 = 1 \\ &\Leftrightarrow +1 + 1 \times 2B - 1 = 1 \\ &\Leftrightarrow B = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

   Finalement, $f(t) = e^{-t}\left(-\cos(2t) + \frac{1}{2}\sin(2t)\right) + e^{-t}$