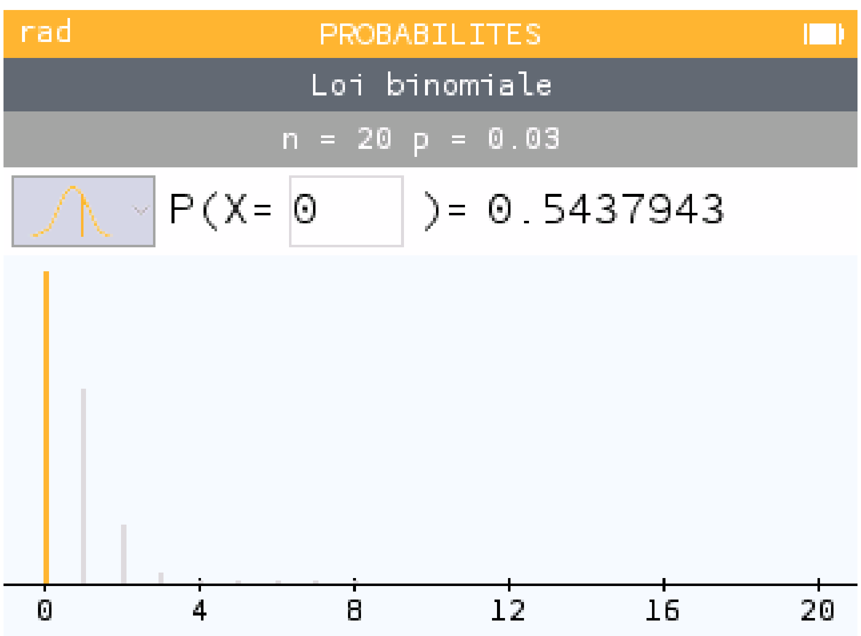
Exemples

Les explications de manipulations avec la calculatrice seront données pour la numworks.

Exemple 1 :

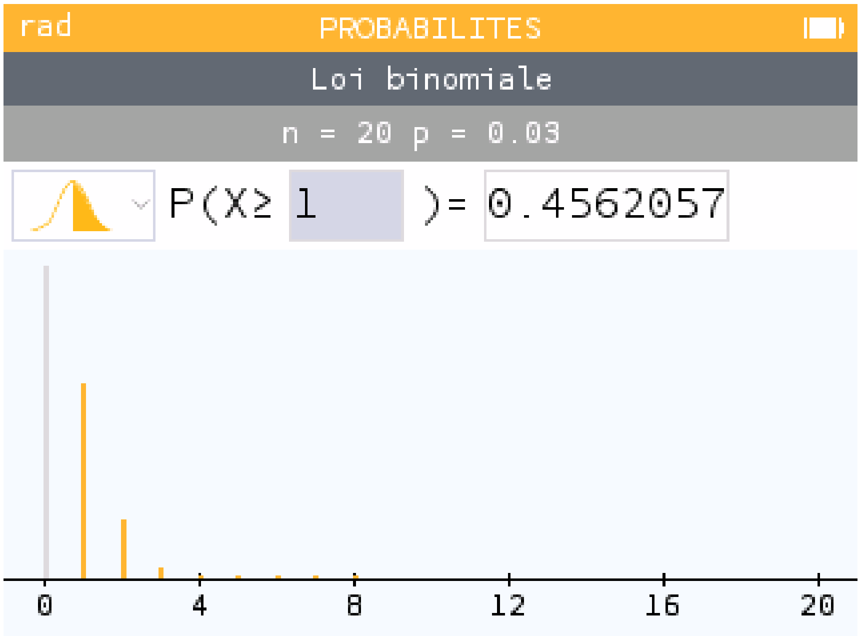
Une entreprise produit en grande quantité des pièces détachées destinées à l'industrie. Les pièces produites par l'entreprise sont livrées par lots de 20.
On note D l'événement : « une pièce prélevée au hasard dans la production n'est pas conforme ».
On suppose que $P(D) = 0,03$.
On prélève au hasard 20 pièces dans la production. La production est assez importante pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage aléatoire avec remise.
On considère la variable aléatoire X qui, à un lot de 20 pièces, associe le nombre de pièces non conformes qu'il contient.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres 20 et $0,03$.
   La variable aléatoire X compte le nombre de succès d'une répétition de 20 épreuves de Bernouilli (car deux issues), indépendantes (car tirages avec remise) et de même paramètre 0.03.
   Donc $X \sim \mathscr{B}(20, 0.03)$
2. Calculer la probabilité $P(X = 0)$.
   On a $P(X = 0) \approx 0.5438$.



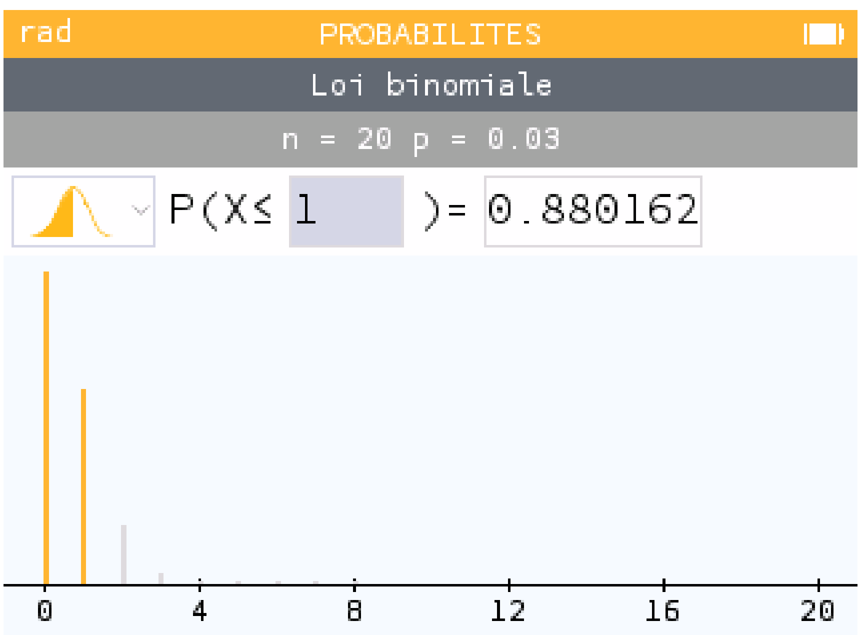
3. Calculer la probabilité qu'il y ait au moins une pièce non conforme dans ce lot de 20 pièces.
   On cherche la probabilité suivante $P(X \geq 1)$, elle s'écrit de la façon suivante :

$$P(X \geq 1) \approx 0.4562$$



4. Calculer la probabilité qu'il y ait au plus une pièce non conforme dans ce lot de 20 pièces.
On cherche la probabilité suivante $P(X \leq 1)$, elle s'écrit de la façon suivante :

$$P(X \leq 1) \approx 0.88$$

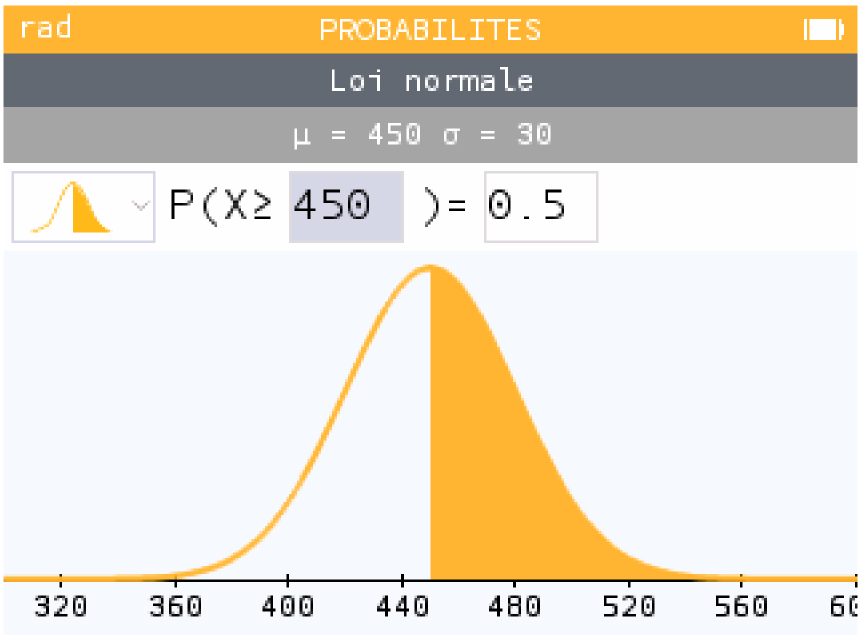


5. Calculer l'espérance mathématiques, $E(X)$, de cette variable aléatoire et interpréter le résultat.
L'espérance mathématique de X est le produit des paramètres de la loi binomiale, c'est-à-dire $20 \times 0.03 = 0.6$: cela signifie qu'en moyenne, sur un prélèvement de 20 pièces, il y en a 0.6 qui ne sont pas conformes.

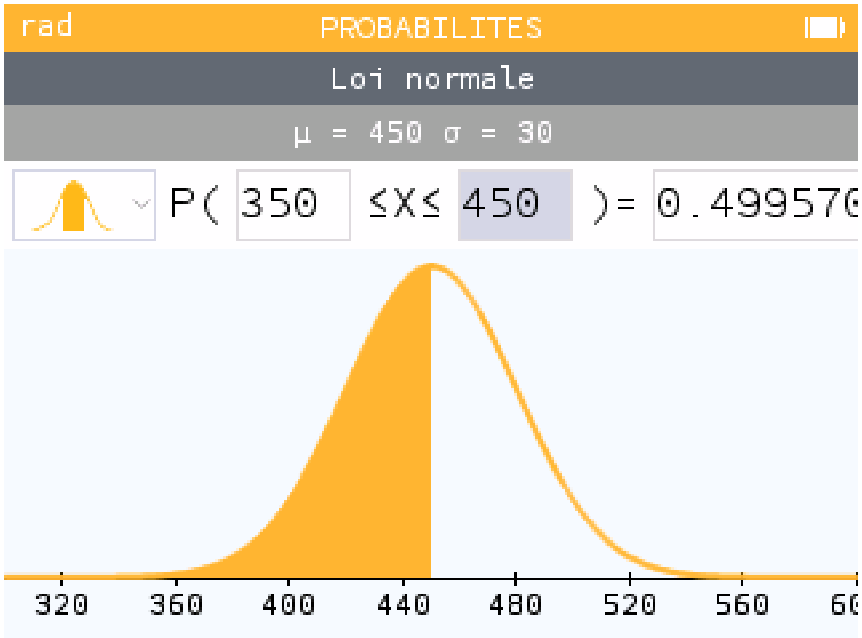
Exemple 2 :

Une entreprise de transport dispose d'un nombre important de camions. On admet que la distance quotidienne parcourue par chaque camion, exprimée en kilomètres, peut être modélisée par une variable aléatoire X qui suit la loi normale d'espérance 450 et d'écart type 30.

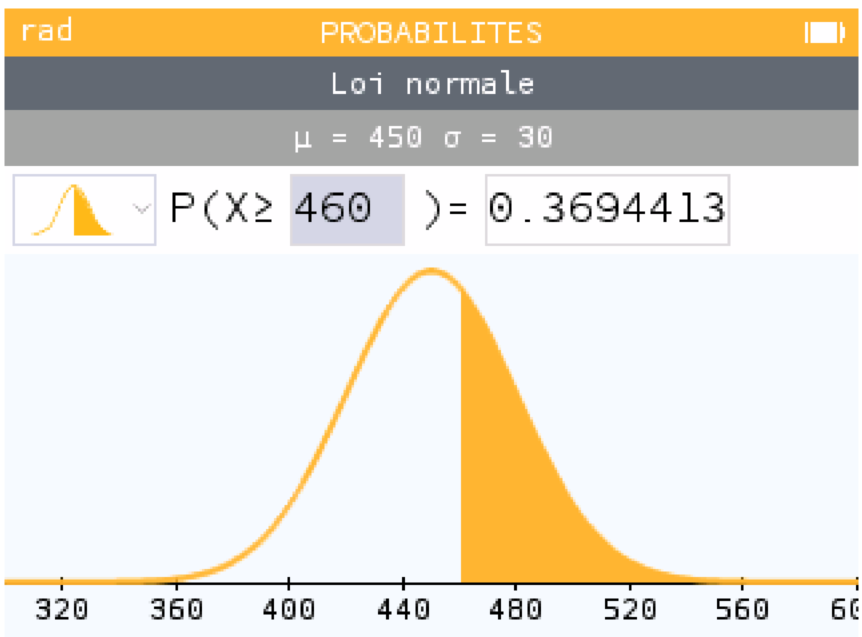
1. Donner la distance moyenne parcourue en un jour par un camion.
   La distance moyenne est l'espérance de la loi normale, c'est-à-dire 450 kilomètres.
2. Déterminer la probabilité qu'un camion parcoure au moins 450 km en un jour.
   On cherche $P(X \geq 450) = 0.5$.



3. Déterminer la probabilité qu'un camion parcoure entre 350 km et 400 km en un jour.
   On cherche $P(350 \leq X \leq 400) \approx 0.0473$.

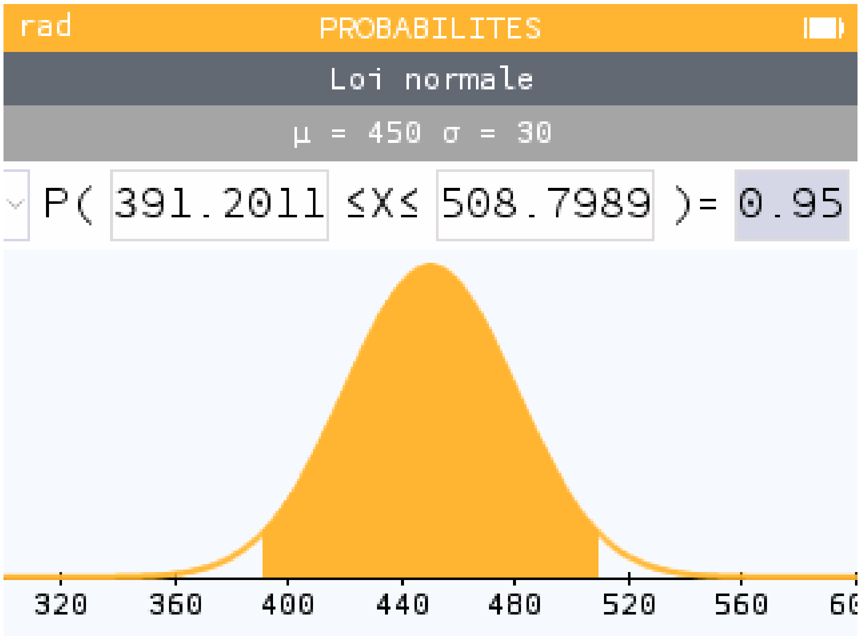


4. Déterminer la probabilité qu'un camion parcoure plus de 460 km en un jour.
On cherche $P(X \geq 460) \approx 0.369$.



5. Le directeur de l'entreprise cherche la valeur $h >$ pour laquelle, il y a $P(450 - h \leq X \leq 450 + h) = 0,95$. Déterminer la valeur de $h > 0$.
On a :

$$P(450 - h \leq X \leq 450 + h) = 0,95$$



Le fait de rentrer à droite la valeur 0.95 nous permet d'obtenir un intervalle centré sur l'espérance; on en déduit que $450+h \approx 508.799$ et donc $h \approx 58.799$.

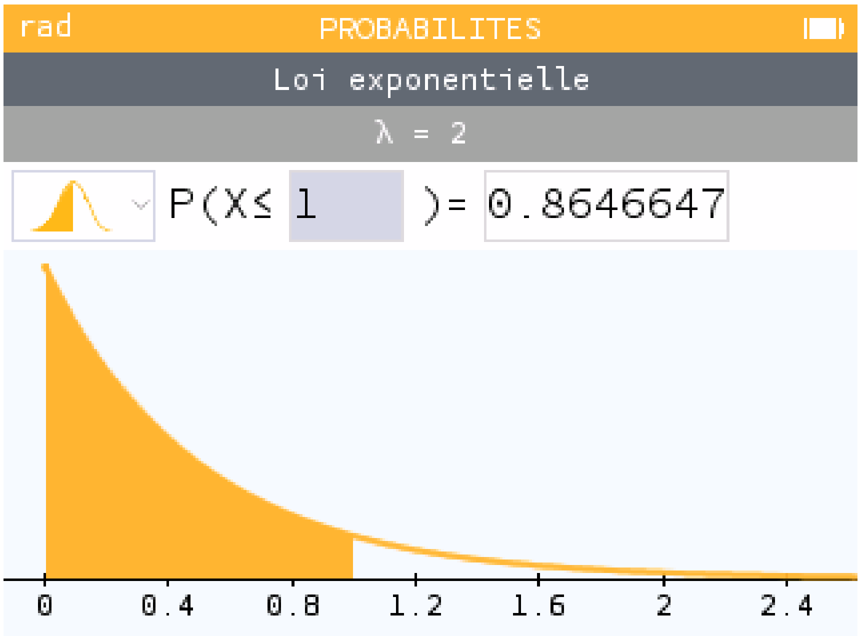
Exemple 3 :

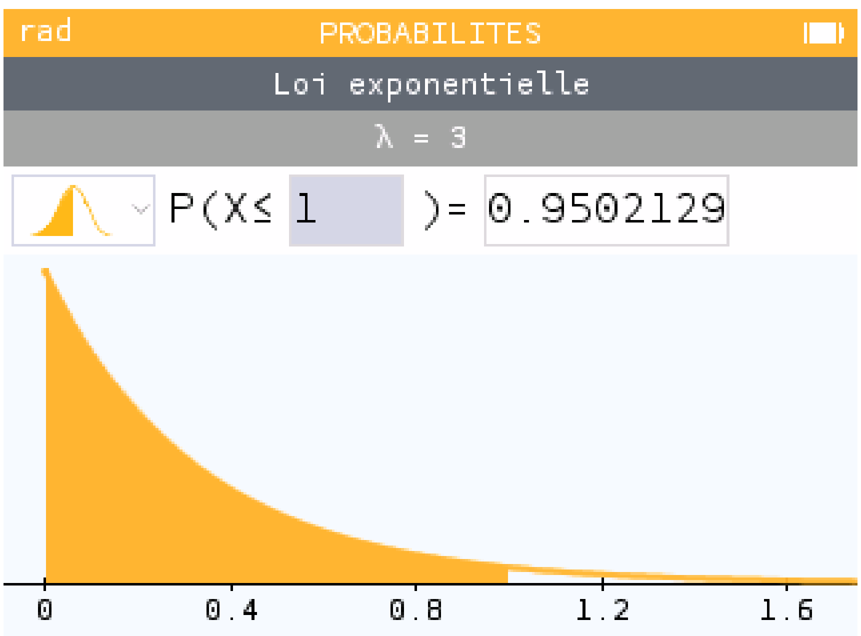
Dans un supermarché, il y a 18 caisses. Dans trois de ces caisses, la probabilité d'attente est modélisée par une loi exponentielle de paramètre 2.
Dans les autres caisses, la probabilité d'attente est modélisée par une loi exponentielle de paramètre 3.
On appelle A l'événement " le client choisi au hasard les caisses de paramètre 2" et B l'événement " le client choisi au hasard les autres caisses".
Un client choisi au hasard parmi les 18 caisses, on appelle X le son temps d'attente.

1. Quelles valeurs peut prendre la variable X ?
   La variable X peut prendre toutes les valeurs de l'intervalle $[0; +\infty[$.
2. Calculer $P(A)$.
   On a $P(A) = \frac{3}{18} = \frac{1}{6}$.
3. Calculer $P(B)$.
   On a $P(B) = \frac{15}{18} = \frac{5}{6}$.
4. Soit $x \geq 0$, calculer $P(X \leq x|A)$.
   Comme le temps d'attente aux caisses de type A suit une loi exponentielle de paramètre 2 alors on a :
   $$P(X \leq x|A) = \int_0^x 2e^{-2x}\,dx = \left[-e^{-2x}\right]_0^x = 1 - e^{2x}$$
5. Soit $x \geq 0$, calculer $P(X \leq x|B)$.
   Comme le temps d'attente aux caisses de type B suit une loi exponentielle de paramètre 3 alors on a :
   $$P(X \leq x|B) = \int_0^x 3e^{-3x}\,dx = \left[-e^{-3x}\right]_0^x = 1 - e^{3x}$$

6. En déduire la probabilité suivante : $P(X \leq 1)$.
On utilise la formule suivante faisant intervenir des probabilités conditionnelles :

$$P(X \leq 1) = P(X \leq 1|A) \times P(A) + P(X \leq 1|B) \times P(B) \approx 0.86 \times \frac{1}{6} + 0.95 \times \frac{5}{6} \approx 0.935$$

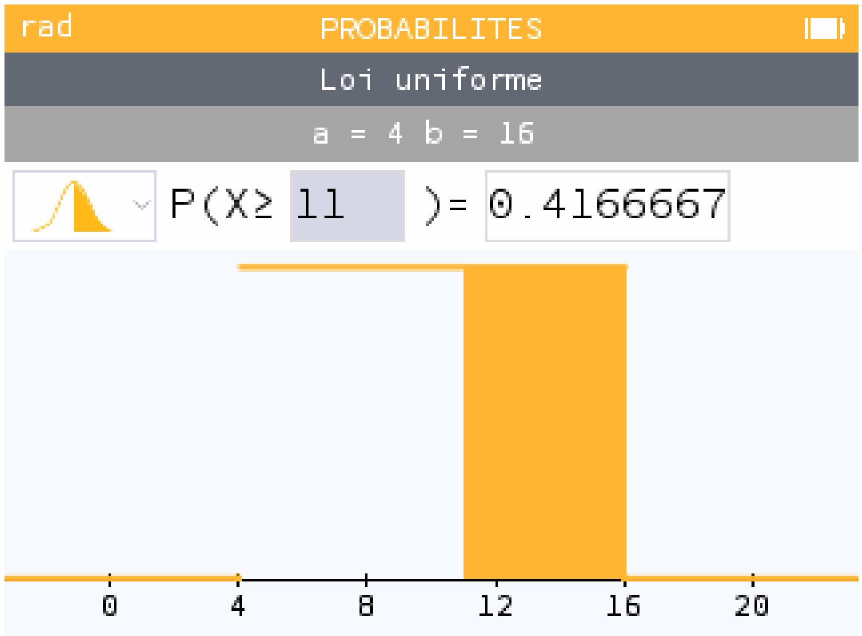




Exemple 4 :

À l'aide d'un interrogation notée sur 20, le professeur annonce qu'en raison de nombreuses triches, il a donné des notes au hasard entre 4 et 16.
On appelle X la variable donnant la note d'un élève pris au hasard.

1. Quelle loi suit la variable X ?
   La variable X suit la loi uniforme de paramètres 4 et 16 ou sur l'intervalle $[4;16]$.
2. Quelle est la probabilité qu'un élève ait une note supérieure à 11 ?
   On cherche la probabilité suivante $P(X \geq 11) = \frac{16-11}{16-4} = \frac{5}{12}$.



3. Un élève n'ayant pas triché espérait avoir une note supérieure à 14. Le professeur souhaitant le rassurer lui annonce que sa note est supérieure à 11. Quelle est la probabilité que sa note soit supérieure à 14 ?
   On cherche la probabilité qu'un élève ait plus de 14 sachant qu'il a plus de 11, c'est une probabilité conditionnelle que l'on peut exprimer de la façon suivante :
   $$P(X \geq 14 | X \geq 11) = \frac{P(X \geq 14}{P(X \geq 11)} = \frac{\frac{16-14}{16-4}}{\frac{16-11}{16-4}} = \frac{16-14}{16-11} = \frac{2}{5}$$
   On peut voir la probabilité cherchée suivante $P(Y \geq 14)$ avec Y qui suit la loi uniforme sur $[11;16]$. On retrouve le même résultat que précédemment.
4. Quelle note un élève peut espérer obtenir ?
   On doit calculer l'espérance de X qui est la demi-somme des deux paramètres, c'est-à-dire $\frac{4+16}{2} = 10$.

Exemple 5 :

On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E) \;\; 3y'(t) + 5y(t) = 8e^t$$

dont on veut vérifier qu'une solution particulière est $h(t) = e^t$.
On commence par résoudre l'équation suivante : $3y'(t) + 5y(t) = 0$. Les solutions de cette équation sont de la forme $f_0(t) = Ke^{-\frac{5}{3}t}$ avec $K \in \mathbb{R}$.
Pour montrer que h est une solution particulière, on calcule $3h'(t) + 5h'(t)$, on a :

$$3h'(t) + 5h(t) = 3 \times (e^t)' + 5 \times e^t = 3e^t + 5e^t = 8e^t$$

ce qui est bien la valeur du membre de droite dans l'équation (E), donc h est bien solution particulière de (E).
Les solutions de (E) sont de la forme $Ke^{-\frac{5}{3}t}+e^t$ avec K une nombre réel que l'on peut choisir comme on veut.
Si on veut la solution f qui vérifie $f(0)=0$, on doit résoudre :

$$\begin{aligned} &Ke^{-\frac{5}{3}\times 0}+e^0=0\\ \Leftrightarrow &K\times 1+1=0\\ \Leftrightarrow &K=-1\end{aligned}$$

Donc $f(t)=-e^{-\frac{5}{3}t}+e^t$.

Exemple 6 :

On veut résoudre l'équation suivante

$$(E)\ :\ y''(t)+2y'(t)+10y(t)=13$$

colorblue On résout l'équation $r^2+2r+10=0$ pour résoudre l'équation $y''(t)+2y'(t)+10y'(t)=0$.
On calcule le discriminant Δ, on trouve :

$$\Delta=2^2-4\times 10=-36<0$$

On a donc deux solutions complexes conjuguées :

$$\begin{aligned} r&=\frac{-2+6i}{2}=-1+3i\\ \bar{r}&=-1-3i\end{aligned}$$

Les solutions de $y''(t)+2y'(t)+10y'(t)=0$ sont de la forme :

$$f_0(t)=e^{-t}(A\cos(3t)+B\sin(3t)) \text{ avec A,B } \in\mathbb{R}$$

Une solution particulière de (E) est $\frac{13}{10}$.
Les solutions de (E) sont donc de la forme $f(t)=e^{-t}(A\cos(3t)+B\sin(3t))+\frac{13}{10}$ avec $A,B\in\mathbb{R}$.

Exemple 7 :

On veut résoudre l'équation suivante et montrer que $h(t)=t$ en est une solution particulière :

$$(E)\ :\ y''(t)-2y'(t)+y(t)=2$$

On résout l'équation $r^2-2r+1=0$ pour résoudre l'équation $y''(t)-2y'(t)+y(t)=0$
On calcule le discriminant Δ, on trouve :

$$\Delta=(-2)^2-4\times 1=0$$

On a donc une solution réelle double :

$$r=\frac{2}{2}=1$$

Les solutions de $y''(t)-2y'(t)+y'(t)=0$ sont de la forme :

$$f_0(t)=(At+B)e^t \text{ avec A,B } \in\mathbb{R}$$

Ensuite une solution particulière de (E) est $\frac{2}{1}$.
Les solutions de (E) sont de la forme $f(t) = (At+B)e^t + 2$ avec $A, B \in \mathbb{R}$.

Exemple 8 :

On veut résoudre l'équation suivante et montrer que $h(t) = e^{2t}$ en est une solution particulière :

$$(E)\ :\ y''(t) + 3y'(t) - 4y(t) = 6e^{2t}$$

color On résout l'équation $r^2 + 3r - 4 = 0$ pour résoudre l'équation $y''(t) + 3y'(t) - 4y(t) = 0$ On calcule le discriminant Δ, on trouve :

$$\Delta = 3^2 - 4 \times 1 \times (-4) = 25$$

On a donc deux solutions réelles distinctes :

$$r_1 = \frac{-3+\sqrt{\Delta}}{2a} = 1$$
$$r_2 = \frac{-3-\sqrt{\Delta}}{2a} = -4$$

Les solutions de $y''(t) + 3y'(t) - 4y'(t) = 0$ sont de la forme :

$$f_0(t) = Ae^t + Be^{-4t} \text{ avec A,B } \in \mathbb{R}$$

Ensuite il faut calculer $h''(t) + 3h'(t) - 4h(t)$ et vérifier que l'on tombe bien sur $6e^{2t}$.
Les solutions de (E) sont de la forme $f(t) = Ae^t + Be^{-4t} + 6e^{2t}$ avec $A, B \in \mathbb{R}$.