

Exercices sur les lois de probabilités

Exercice 1 On note X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de défauts sur le verre d'une ampoule.

On admet que X obéit à la loi de Poisson de paramètre $\lambda = 5$.

Calculer la probabilité des événements suivants :

1. Il n'y a aucun défaut sur l'ampoule.
2. Il y a plus de deux défauts sur l'ampoule.
3. Le nombre de défauts est compris entre deux et cinq (bornes comprises).

Exercice 2 On considère un stock important de gaines. On note E l'événement : "une gaine prélevée au hasard dans le stock n'est pas conforme pour le diamètre intérieur". On suppose que $p(E) = 0,096$.

On prélève au hasard 50 gaines dans le stock pour vérification du diamètre intérieur. Le stock est suffisamment important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 50 gaines.

On considère la variable aléatoire Y qui, à tout prélèvement de 50 gaines ainsi défini, associe le nombre de gaines non conformes pour le diamètre intérieur de ce prélèvement.

1. Justifier que la variable aléatoire Y suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, cinq gaines ne soient pas conformes pour le diamètre intérieur.
3. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, au plus deux gaines ne soient pas conformes pour le diamètre intérieur.

Exercice 3 On prélève au hasard une pièce dans une production. La probabilité que cette pièce ne soit pas conforme est 0,035.

1. Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de pièces défectueuses dans un lot de 100 pièces. Les pièces sont prises au hasard et le tirage est assimilé à un tirage avec remise.
Quelle loi suit X ?

2. Compléter le tableau suivant en utilisant la calculatrice :

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$P(X = k)$										

3. On définit deux événements :

⇒ A = "le nombre de pièces défectueuses est 2"

⇒ B = "le nombre de pièces défectueuse est supérieur à 2".

Calculer $P(A)$ et $P(B)$.

4. Un lot de 100 pièces est envoyé à un client, le lot est accepté s'il contient au plus 4 pièces défectueuses.
En utilisant le tableau, calculer la probabilité que le client refuse le lot.
5. En utilisant le tableau, déterminer le plus petit n tel que :

$$P(X > n) < 0.03$$

6. Calculer l'espérance de cette loi et son écart-type, qui est la dispersion des valeurs de X par rapport à son espérance.

Exercice 4 Une machine fabrique un très grand nombre de pièces d'un même modèle. Les résultats approchés seront donnés à 10^{-2} près.

Partie A :

Une pièce fabriquée est conforme si son épaisseur est comprise en 14,3 et 15,5 mm. On considère la variable aléatoire X qui, à chaque pièce prélevée au hasard dans la production d'une journée, associe son épaisseur en millimètres. La variable aléatoire X suit la loi normale de moyenne m et d'écart type σ . La moyenne m dépend du réglage de la machine.

1. Dans cette question, on suppose que $\sigma = 0,35$. De plus, la machine a été réglée de sorte que $m = 15$.
 - a. Calculer la probabilité qu'une pièce prélevée soit conforme.
 - b. Calculer le nombre réel positif h tel que $p(15 - h \leq X \leq 15 + h) = 0,95$.
 - c. Interpréter le résultat de la question 1b à l'aide d'une phrase.
2. La machine est désormais réglée de sorte que $m = 14,9$.
Quel devrait être alors l'écart type pour que le pourcentage de pièces conformes soit égal à 90% ?

Partie B :

On admet que la proportion de pièces conformes dans la production d'une journée est de 90%. On prélève au hasard un lot de 50 pièces dans la production pour vérification de l'épaisseur. La production est suffisamment importante pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise. On désigne par Y la variable aléatoire prenant le nombre de pièces non conformes dans ce lot.

1. La variable aléatoire Y suit une loi binomiale.
Préciser les paramètres de cette loi.
2. Calculer la probabilité qu'il y ait exactement deux pièces non conformes dans ce lot.
3. On admet que la loi de probabilité de Y peut être approchée par une loi de Poisson.
 - a. Justifier que le paramètre λ de cette loi de Poisson est égal à 5.
 - b. En utilisant cette loi de Poisson, calculer la probabilité que le lot contienne au plus deux pièces non conformes.

Partie C :

Pour améliorer sa production, l'usine achète une deuxième machine. On sait que 40% des pièces sont fabriquées par la première machine M_1 , les autres pièces étant fabriquées par la nouvelle machine M_2 . Par ailleurs, 90% des pièces fabriquées par la machine M_1 sont conformes. De plus, une étude faite sur la production journalière globale de l'usine a montré que 6% des pièces produites sont non conformes. On prélève au hasard une pièce dans la production journalière globale de l'usine. On définit les événements suivants :

1. A : « La pièce prélevée provient de la machine M_1 . »
 2. \bar{A} : « La pièce prélevée provient de la machine M_2 . »
 3. C : « La pièce est conforme. »
1. Montrer que la probabilité que la pièce prélevée provienne de la machine M_1 et soit non conforme est 0,04.
 2. Recopier et compléter avec des probabilités, le tableau suivant :

	C	\bar{C}	
A			
\bar{A}			
		0,06	

3. Calculer la probabilité que la pièce prélevée provienne de la machine M_1 sachant que cette pièce est conforme.
4. Les événements A et C sont-ils indépendants? Justifier la réponse.

Exercice 5 Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Dans cet exercice, les résultats seront arrondis à 10^{-3} près.

PARTIE A

La société Sun-NRJY fabrique des cellules photovoltaïques qu'elle assemble ensuite pour former des panneaux qui seront installés sur le toit de bâtiments pour produire de l'électricité.

Ces cellules, à base de silicium, sont très fines (environ $250\mu\text{m}$) et très fragiles. On estime que 1,5 % des cellules fabriquées présenteront un défaut (fissure, casse, ...) et seront donc inutilisables.

À la sortie de la production, on forme des lots de 75 cellules. La production étant très importante on peut assimiler la constitution d'un lot de 75 cellules à 75 tirages indépendants avec remise.

On note X la variable aléatoire qui associe à chaque lot de 75 cellules le nombre de cellules inutilisables qu'il contient.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Quelle est la probabilité qu'un lot ne contienne aucune cellule inutilisable?
3. Un panneau est constitué de 72 cellules. Quelle est la probabilité d'avoir suffisamment de cellules sans défaut dans un seul lot pour pouvoir fabriquer un panneau?

PARTIE B

Les 72 cellules utilisées pour constituer un panneau sont ensuite raccordées entre elles (soudures) puis placées sous une vitre de protection et insérées dans un cadre en aluminium. Les panneaux ainsi fabriqués sont alors expédiés chez un installateur.

À la réception des panneaux, l'installateur constate que certains panneaux présentent des défauts qui peuvent être de deux types, des défauts électriques (cellules fissurées, soudures défectueuses, ...), des défauts de structure (cadre abîmé, verre brisé, ...).

Une étude statistique a permis d'établir que 2 % des 500 panneaux reçus par l'installateur avaient un défaut électrique, que 1 % des panneaux avaient un défaut de structure et que parmi les panneaux présentant un défaut de structure, 40 % avaient aussi un défaut électrique.

On choisit au hasard un panneau.

- On appelle E l'évènement : « le panneau présente un défaut électrique ».
- On appelle S l'évènement : « le panneau présente un défaut de structure ».

1. Compléter le tableau d'effectifs du document réponse.
2. Quelle est la probabilité qu'un panneau pris au hasard parmi ceux livrés à l'installateur ne présente aucun défaut?
3. Les événements E et S sont-ils indépendants? Expliquer.

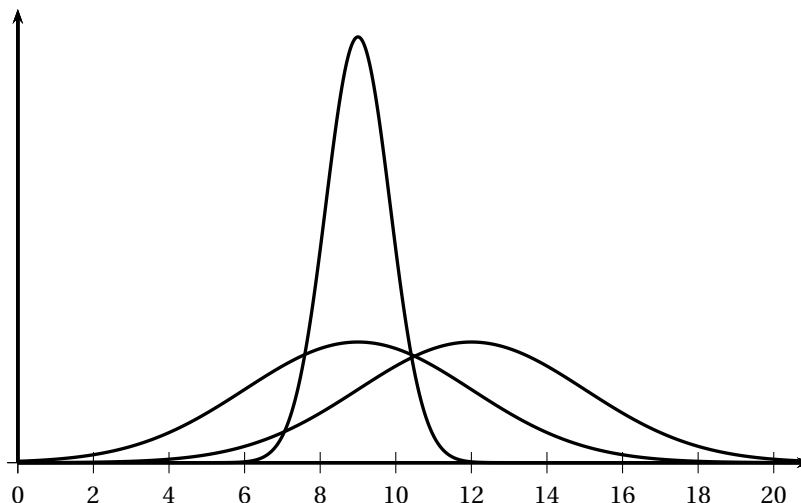
PARTIE C

Dix de ces panneaux sont installés sur le toit d'une maison située dans une région à ensoleillement régulier et produisent de l'électricité.

On désigne par Y la variable aléatoire qui, à chaque journée, associe la production électrique fournie par ces 10 panneaux, exprimée en kWh.

La variable Y suit la loi normale de paramètres $\mu = 9$ et $\sigma = 3$.

1. Quelle est la probabilité que la production journalière soit comprise entre 6 et 12 kWh ?
2. Parmi les trois fonctions de densités de probabilité représentées ci-dessous, laquelle peut être celle de la loi de Y ? Justifier.



3. Les occupants de la maison consomment en moyenne 10 kWh par jour (hors chauffage et eau chaude).
 - a. Quelle est la probabilité que la production journalière des panneaux soit supérieure à la consommation moyenne quotidienne ?
 - b. Quelle devrait être la consommation moyenne quotidienne de cette famille, en kWh, pour que cette probabilité soit environ de 90 % ? On arrondira la réponse au dixième.

Exercice 6 Dans cette partie, on étudie la durée de vie de ce dispositif. La durée de vie de chaque composant est une variable aléatoire.

1. On désigne par t un nombre réel strictement positif. On admet que la probabilité $p(t)$ que le composant A ait une durée de vie strictement inférieure à t est donnée par

$$p(t) = \int_0^t 0,0004e^{-0,0004x} dx.$$

Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-2} , que le composant A ait une durée de vie strictement inférieure à 1 000 heures.

2. Sur le document réponse 2 est donné l'arbre pondéré décrivant la situation du dispositif au bout de 1 000 heures.
 C_1 désigne l'événement « le composant A est en état de fonctionnement » et C_2 désigne l'événement « le composant B est en état de fonctionnement ».
 - a. Compléter l'arbre du document réponse 2 et indiquer le détail des calculs des probabilités dans la colonne « Probabilités ».
 - b. Déterminer la probabilité de l'événement C_2 .
 - c. Les événements C_1 et C_2 sont indépendants ? Justifier la réponse.
 - d. Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-2} , qu'au bout de 1 000 heures, le dispositif soit en état de fonctionnement.

Partie B

Dans cette partie, les résultats approchés seront arrondis à 10^{-3} près.

Une entreprise produit en grande série le composant A dont il est question dans la partie A. Une étude statistique permet d'admettre que la probabilité qu'un composant ait une durée de vie supérieure à 1 000 heures est 0,67. Les durées de vie des composants sont indépendantes les unes des autres.

Pour un échantillon de 50 composants, on note X la variable aléatoire égale au nombre de composants ayant une durée de vie supérieure à 1 000 heures.

1. On admet que X suit une loi binomiale.

Préciser les paramètres de cette loi.

2. Calculer la probabilité $p(X = 42)$.

3. Ci-dessous est donné un extrait du tableau, obtenu à l'aide d'un tableur, donnant les valeurs des probabilités

$p(X \leq k)$, où k désigne un nombre entier naturel appartenant à l'intervalle $[0; 50]$.

	A	B	C	D
1	k	$p(X \leq k)$		
2	38	0,937 149 61		
3	39	0,968 259 95		
4	40	0,985 629 89		
5	41	0,994 231 41		
6	42	0,997 973 63		
7	43	0,999 387 18		
8	44	0,999 843 76		
9	45	0,999 967 36		
10	46	0,999 994 64		
11	47	0,999 999 35		
12	48	0,999 999 95		
13	49	1		
14	50	1		
15				
16				

À l'aide de ce tableau, déterminer la probabilité que le nombre de composants ayant une durée de vie supérieure à 1 000 heures parmi cet échantillon soit strictement supérieur à 42.

4. Sur l'annexe, le diagramme en bâtons représente les valeurs de $p(X \leq k)$ en fonction de k .

- a. À l'aide de ce diagramme, déterminer le plus petit nombre entier naturel k_1 tel que

$$p(X \leq k_1) > 0,025,$$

puis le plus petit nombre entier naturel k_2 tel que

$$p(X \leq k_2) > 0,975,$$

- b. Peut-on affirmer : « le nombre de composants dont la durée de vie est supérieure à 1 000 heures appartient à l'intervalle $[27; 40]$ avec une probabilité supérieure à 0,95 » ? Justifier la réponse.

Partie C

Dans cette partie, on décide d'approcher la loi de la variable aléatoire X par la loi normale de moyenne 33,5 et d'écart type 3,3.

On note Y une variable aléatoire suivant la loi normale de moyenne $\mu = 33,5$ et d'écart type $\sigma = 3,3$.

1. Justifier le choix des paramètres μ et σ .
2. Calculer la probabilité $P(Y \leq 42)$ arrondie à 10^{-2} .
3. Déterminer la plus petite valeur, arrondie à 10^{-1} , du nombre réel a tel que

$$p(33,5 - a \leq Y \leq 33,5 + a) \geq 0,95.$$