Épreuve de spécialité : mathématiques

EXERCICE 1

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse exacte rapporte un point.
Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point. Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1. On considère les suites (u_n) et (v_n) telles que, pour tout entier naturel n,

$$u_n = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n \qquad \text{et} \qquad v_n = 1 + \left(\frac{1}{4}\right)^n.$$

On considère de plus une suite (w_n) qui, pour tout entier naturel n, vérifie $u_n \leqslant w_n \leqslant v_n$.
On peut affirmer que :

a. Les suites (u_n) et (v_n) sont géométriques.
b. La suite (w_n) converge vers 1.
c. La suite (u_n) est minorée par 1.
d. La suite (w_n) est croissante.

2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = xe^{x^2}$.
La fonction dérivée de f est la fonction f' définie sur $\mathbb{R}$ par :

a. $f'(x) = 2xe^{x^2}$
b. $f'(x) = (1+2x)e^{x^2}$
c. $f'(x) = \left(1+2x^2\right)e^{x^2}$
d. $f'(x) = \left(2+x^2\right)e^{x^2}$.

3. Que vaut $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{2x^2-2x+1}$?

a. -1 **b.** 0 **c.** $\frac{1}{2}$ **d.** $+\infty$.

4. On considère une fonction h continue sur l'intervalle $[-1 ; 1]$ telle que

$$h(-1) = 0 \qquad h(0) = 2 \qquad h(1) = 0.$$

On peut affirmer que :

a. La fonction h est croissante sur lintervalle $[-1\ ;\ 0]$.

b. La fonction h est positive sur lintervalle $[-1\ ;\ 1]$.

c. Il existe au moins un nombre réel a dans l'intervalle $[0 ; 1]$ tel que $h(a) = 1$.

d. L'équation $h(x) = 1$ admet exactement deux solutions dans l'intervalle $[-1\ ;\ 1]$.

5. On suppose que g est une fonction dérivable sur l'intervalle $[-4\ ;\ 4]$. On donne ci-contre la représentation graphique de sa fonction dérivée g'.

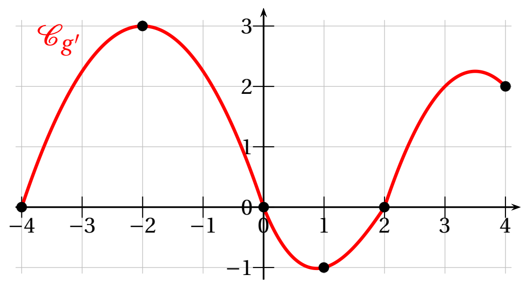
On peut affirmer que :

a. g admet un maximum en -2.

b. g est croissante sur l'intervalle $[1 ; 2]$.

c. g est convexe sur l'intervalle $[1 ; 2]$.

d. g admet un minimum en 0.



EXERCICE 2 *En 2020, une influenceuse sur les réseaux sociaux compte* 1000 *abonnés à son profil. On modélise le nombre d'abonnés ainsi : chaque année, elle perd 10 % de ses abonnés auxquels s'ajoutent* 250 *nouveaux abonnés. Pour tout entier naturel n, on note* u_n *le nombre d'abonnés à son profil en l'année* $(2020 + n)$*, suivant cette modélisation. Ainsi* $u_0 = 1000$.

1. Calculer u_1.

2. Justifier que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,9u_n + 250$.

3. La fonction Python nommée « suite » est définie ci-dessous. Dans le contexte de l'exercice, interpréter la valeur renvoyée par **suite(10)**.

```
def suite( n) :
    u = 1000
    for i in range(n) :
        u = 0,9*u + 250
    return u
```

4. **a.** Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant 2500$.

   b. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

   c. Déduire des questions précédentes que la suite (u_n) est convergente.

5. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - 2500$ pour tout entier naturel n.

   a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $0,9$ et de terme initial $v_0 = -1500$.

   b. Pour tout entier naturel n, exprimer v_n en fonction de n et montrer que :

$$u_n = -1500 \times 0,9^n + 2500.$$

   c. Déterminer la limite de la suite (u_n) et interpréter dans le contexte de l'exercice.

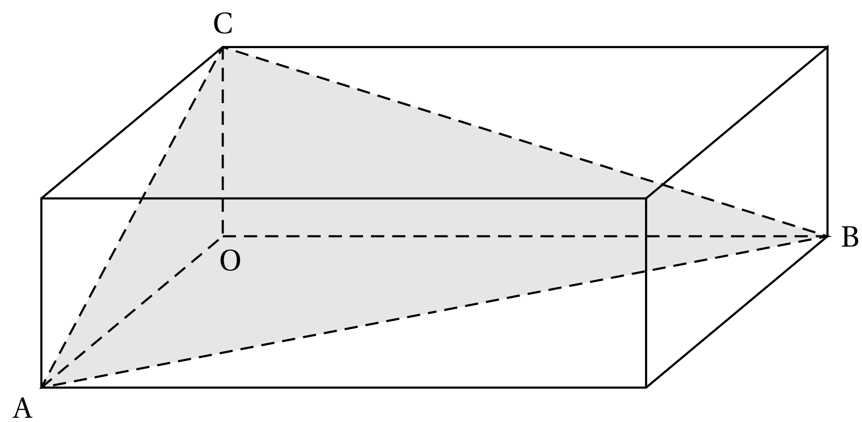
6. Écrire un programme qui permet de déterminer en quelle année le nombre d'abonnés dépassera 2200.

   Déterminer cette année.

EXERCICE 3

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$, on considère les points :

- ✏ A de coordonnées (2 ; 0 ; 0)
- ✏ B de coordonnées (0 ; 3 ; 0)
- ✏ C de coordonnées (0 ; 0 ; 1).



L'objectif de cet exercice est de calculer l'aire du triangle ABC.

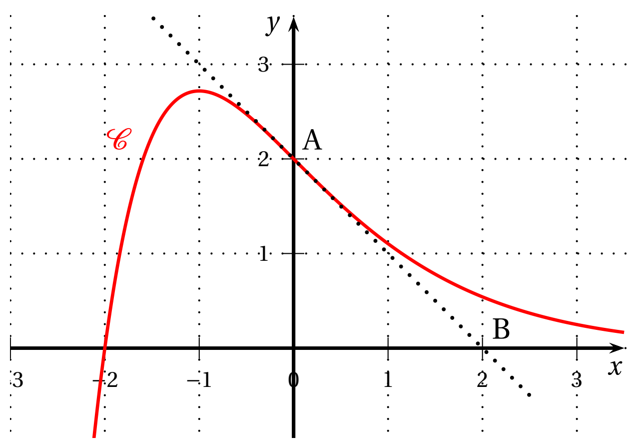
1. Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\2\\6\end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC).
2. On appelle H le projeté orthogonal de O sur le plan (ABC).
   Que dire des vecteurs $\overrightarrow{OH}$ et $\vec{n}$?
3. Un point M appartient au plan (ABC) si :

   $$\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$$

   Montrer que le point I de coordonnées $\left(\frac{18}{49}\,;\,\frac{12}{49}\,;\,\frac{36}{49}\right)$ appartient au plan (ABC)
4. Montrer que le point I est sur la droite (OH).
5. En déduire à quel autre point est égal I.
6. Calculer la distance OH.
7. On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par : $V = \frac{1}{3}\mathscr{B}h$, où $\mathscr{B}$ est l'aire d'une base et h est la hauteur de la pyramide correspondant à cette base.
   En calculant de deux façons différentes le volume de la pyramide OABC, déterminer l'aire du triangle ABC.

EXERCICE 4

On a représenté ci-dessous, dans un repère orthonormé, une portion de la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$:



On considère les points A(0 ; 2) et B(2 ; 0).

Partie 1

Sachant que la courbe $\mathscr{C}$ passe par A et que la droite (AB) est la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A, donner par lecture graphique :

1. La valeur de $f(0)$ et celle de $f'(0)$.

2. Un intervalle sur lequel la fonction f semble convexe.

Partie 2

On admet que pour tout nombre réel x, $f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{-x}$.

1. On rappelle que f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.

a. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = (-x-1)\mathrm{e}^{-x}$.

b. Étudier le signe de $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et dresser le tableau des variations de f sur $\mathbb{R}$.
On ne précisera ni la limite de f en $-\infty$ ni la limite de f en $+\infty$.
On calculera la valeur exacte de l'extremum de f sur $\mathbb{R}$.

2. On rappelle que f'' désigne la fonction dérivée seconde de la fonction f.

a. Calculer pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x)$.

b. Peut-on affirmer que f est convexe sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$?