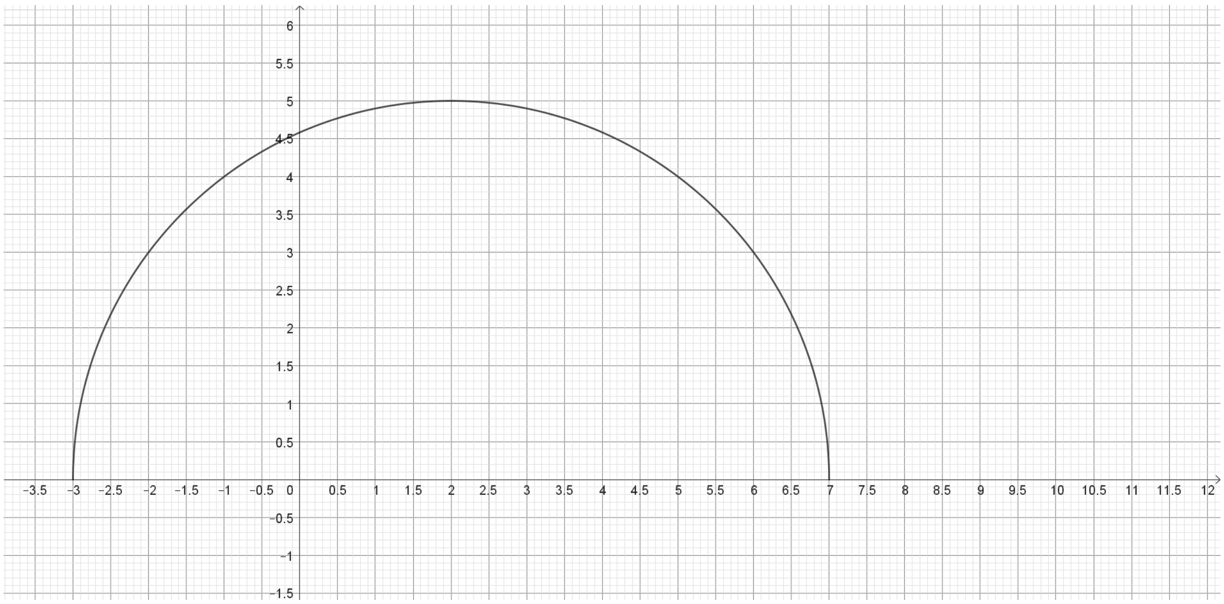
# Calculs d'intégrales : exercices

**Exercice 1** *La courbe d'une fonction h, définie sur l'intervalle* $[-3;7]$*, est représentée par le demi-cercle ci-dessous dans un repère orthonormé :*




*Déterminer :*

$$\int_{-3}^{7} h(s)ds$$

$$\int_{2}^{7} h(s)ds$$

**Exercice 2** *Calculer les intégrales suivantes :*

$$A = \int_{1}^{2} (5x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 3x + 5)dx$$

$$B = \int_{1}^{2} \frac{1}{x^3} dx$$

$$C = \int_{0}^{2} \frac{3x+1}{3x^2+2x+1} dx$$

$$D = \int_{0}^{3} \frac{1}{\sqrt{2x+3}} dx$$

$$E = \int_{0}^{1} e^{-5x+1} dx$$

**Exercice 3** *En utilisant une intégration par partie, calculer les intégrales suivantes :*

$$A = \int_0^{\pi} x\cos(x)\,dx$$
$$B = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} xe^{-2x}$$
$$C = \int_1^e \ln(t)\,dt$$
$$D = \int_1^e \ln(t)^2\,dt$$
$$E = \int_1^e \frac{\ln(x)}{x}\,dx$$

**Exercice 4** *On considère la fonction $F$ définie sur $[1;+\infty[$ par :*

$$F(x) = \int_1^x \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,dt$$

1. *Montrer que F est dérivable sur $[1;+\infty[$ et préciser l'expression de $F'(x)$ pour $x \in [1;+\infty[$.*
2. *En déduire le sens de variation de $F$.*
3. *Vérifier que, pour $t \geq 1$, on a :*

$$\frac{\ln(t)}{(1+t)^2} \leq f(t) \leq \frac{\ln(t)}{t^2}$$

4. *Pour $x \geq 1$, on pose :*

$$I(x) = \int_1^x \frac{\ln(t)}{t^2}\,dt$$

*Calculer $I(x)$.*

5. *Pour $x \geq 1$, on pose :*

$$J(x) = \int_1^x \frac{\ln(t)}{(1+t)^2}\,dt$$

*En utilisant l'égalité :*

$$\forall t \geq 1,\quad \frac{1}{t(t+1)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}$$

*calculer $J(x)$.*

6. *Déduire de ce qui précède que, pour $x \geq 1$, on a :*

$$\ln(2) + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) - \frac{\ln(x)}{x+1} \leq F(x) \leq 1 - \frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x}$$

7. *On admet que $F(x)$ converge en $+\infty$ vers $l$.*
   *Sans calculer $l$, vérifier que :*

$$\ln(2) \leq l \leq 1$$

8. *On définit sur $[1;+\infty[$ la fonction $G$ par :*

$$G(x) = F\left(\frac{1}{x}\right) - F(x)$$

   *Calculer $G'(x)$ pour $x \geq 1$.*
9. *Vérifier que, pour tout $x \geq 1$, $G(x) = 0$.*
10. *En déduire une relation que vérifie la fonction $F$.*

**Exercice 5** *On considère la suite $(I_n)$ définie pour tout entier naturel $n$ non nul, par :*

$$I_n = \int_1^e (\ln(t))^n \, dt$$

1. *Montrer que, pour tout entier naturel $n$ non nul, on a $I_n \geq 0$.*
2. *Montrer que la suite $(I_n)$ est décroissante.*
3. *Que peut-on en déduire pour la suite $(I_n)$ ?*
4. *Calculer $I_1$.*
5. *Démontrer que, pour tout entier naturel $n$ non nul :*

$$I_{n+1} = e - (n+1)I_n$$

   *En déduire les valeurs de $I_2$ et de $I_3$.*
6. *Conjecturer, à l'aide d'une calculatrice, la limite $l$ de la suite $(I_n)$ en l'infini.*
7. *En raisonnant par l'absurde, montrer que $l = 0$.*

**Exercice 6** *L'exercice est constitué de deux parties indépendantes.*

## Partie I

*Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on désigne par $f_n$ la fonction définie sur* $[0\ ;\ 1]$ *par :*

$$f_n(x) = x^n e^x$$

*On note $C_n$ la courbe représentative de la fonction $f_n$ dans un repère $\left(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$ du plan.*
*On désigne par $(I_n)$ la suite définie pour tout entier n supérieur ou égal à 1 par :*

$$I_n = \int_0^1 x^n e^x \, \mathrm{d}x.$$

1. **a.** *On désigne par $F_1$ la fonction définie sur* $[0;1]$ *par :*

$$F_1(x) = (x-1)e^x.$$

*Vérifier que $F_1$ est une primitive de la fonction $f_1$.*

**b.** *Calculer $I_1$.*

2. *À l'aide d'une intégration par parties, établir la relation pour tout n supérieur ou égal à 1 ,*

$$I_{n+1} = e - (n+1)I_n.$$

3. *Calculer $I_2$.*
4. *On considère la fonction* `mystere` *écrite dans le langage Python :*

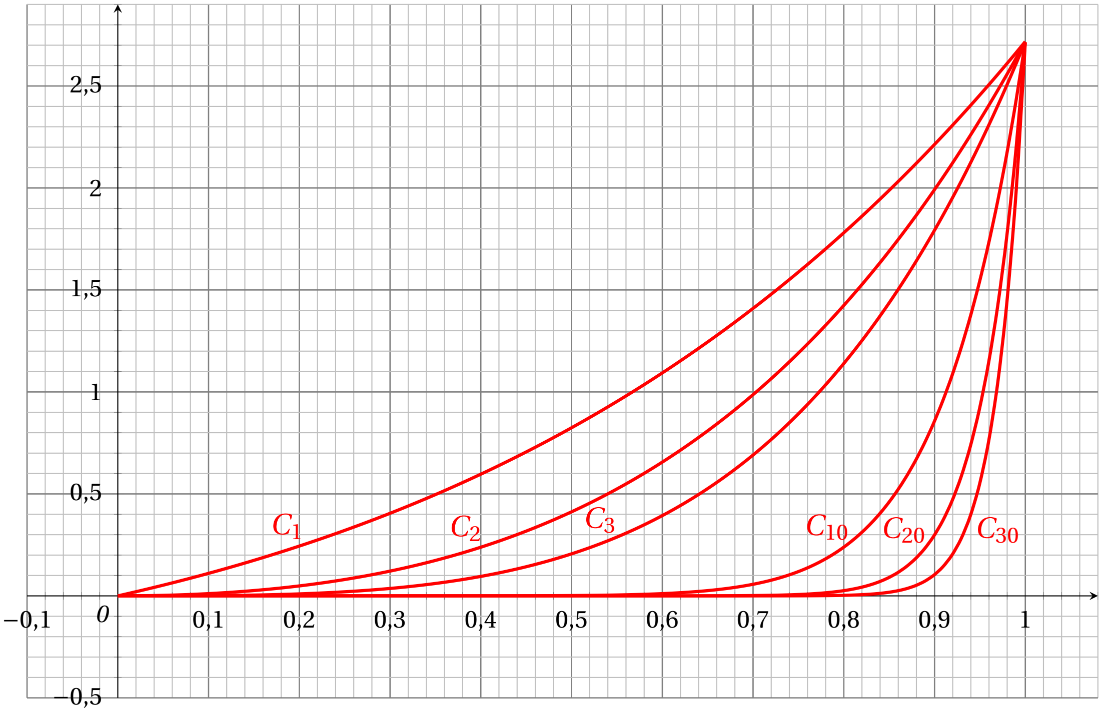
```
from math import e # la constante d'Euler e

def mystere(n):
  a = 1
  L = [a]
  for i in range(1,n):
    a = e - (i + 1)*a
    L.append(a)
  return L
```

*À l'aide des questions précédentes, expliquer ce que renvoie l'appel* `mystere(5)`.

## Partie II

**1.** *Sur le graphique ci-dessous, on a représenté les courbes* $C_1, C_2, C_3, C_{10}, C_{20}$ *et* $C_{30}$.




**a.** *Donner une interprétation graphique de* $I_n$.

**b.** *Quelle conjecture peut-on émettre sur la limite de la suite* $(I_n)$ *?*

**2.** *Montrer que pour tout n supérieur ou égal à 1,*

$$0 \leqslant I_n \leqslant e\int_0^1 x^n \, \mathrm{d}x.$$

**3.** *En déduire* $\lim_{n\to+\infty} I_n$.

**Exercice 7** *On considère la suite* $(I_n)$ *définie par* $I_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x}\, dx$ *et pour tout entier naturel n non nul*

$$I_n = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x}\, dx.$$

**1.** *Montrer que* $I_0 = \ln(2)$.

**2.** **a.** *Calculer* $I_0 - I_1$.

**b.** *En déduire* $I_1$.

3. **a.** *Montrer que, pour tout entier naturel n,* $I_n - I_{n+1} = \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{n+1}$.

   **b.** *Proposer un algorithme permettant de déterminer, pour un entier naturel n donné, la valeur de* $I_n$.

4. *Soit n un entier naturel non nul.*
   *On admet que si x appartient à l'intervalle* $\left[0\ ;\ \frac{1}{2}\right]$ *alors* $0 \leqslant \dfrac{x^n}{1-x} \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

   **a.** *Montrer que pour tout entier naturel n non nul,* $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{2^n}$.

   **b.** *En déduire la limite de la suite* $(I_n)$ *lorsque n tend vers* $+\infty$.

5. *Pour tout entier naturel n non nul, on pose*

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3} + \ldots + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n}.$$

   **a.** *Montrer que pour tout entier naturel n non nul,* $S_n = I_0 - I_n$.

   **b.** *Déterminer la limite de* $S_n$ *lorsque n tend vers* $+\infty$.

**Exercice 8** ***Partie A***

*Soit la fonction f définie et dérivable sur* $[1\ ;\ +\infty[$ *telle que, pour tout nombre réel x supérieur ou égal à 1,*

$$f(x) = \frac{1}{x}\ln(x).$$

*On note* $\mathscr{C}$ *la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.*

1. *Démontrer que la courbe* $\mathscr{C}$ *admet une asymptote horizontale.*
2. *Déterminer la fonction dérivée* $f'$ *de la fonction f sur* $[1\ ;\ +\infty[$.
3. *Étudier les variations de la fonction f sur* $[1\ ;\ +\infty[$.

***Partie B***

*On considère la suite* $(u_n)$ *définie par*

$$u_n = \int_1^2 \frac{1}{x^{n+1}}\ln(x)\,dx \text{ pour tout entier naturel } n.$$

1. *Démontrer que* $u_0 = \dfrac{1}{2}[\ln(2)]^2$.
   *Interpréter graphiquement ce résultat.*
2. *Prouver que, pour tout entier naturel n et pour tout nombre réel x de l'intervalle [1 ; 2], on a*

$$0 \leqslant \frac{1}{x^{n+1}}\ln(x) \leqslant \frac{1}{x^{n+1}}\ln(2).$$

3. *En déduire que, pour tout entier naturel*[1] *n, on a*

$$0 \leqslant u_n \leqslant \frac{\ln(2)}{n}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right).$$

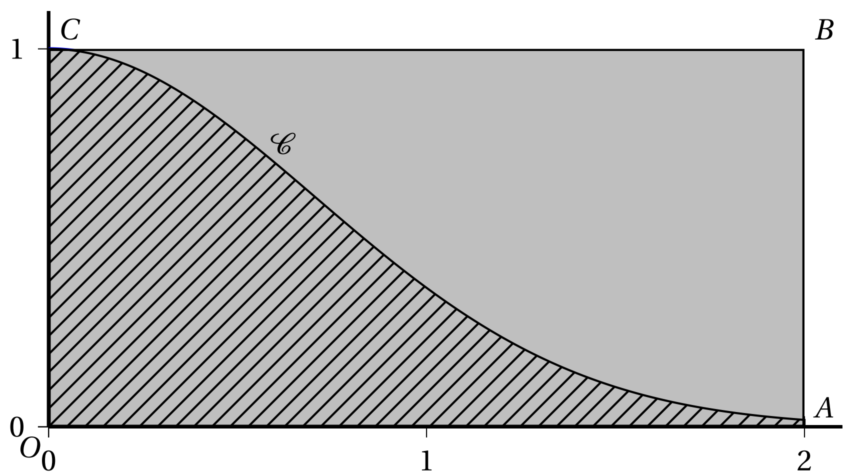
4. *Déterminer la limite de la suite* $(u_n)$.

**Exercice 9** *On considère la suite* $(u_n)$ *définie pour tout entier naturel n par :*

$$u_n = \int_0^n e^{-x^2}\,dx.$$

*On ne cherchera pas à calculer* $u_n$ *en fonction de n.*

1. **a.** *Montrer que la suite* $(u_n)$ *est croissante.*
   **b.** *Démontrer que pour tout réel* $x \geqslant 0$, *on a :* $-x^2 \leqslant -2x+1$, *puis :*
   $e^{-x^2} \leqslant e^{-2x+1}$.
   *En déduire que pour tout entier naturel n, on a :* $u_n < \dfrac{e}{2}$.
   **c.** *Démontrer que la suite* $(u_n)$ *est convergente. On ne cherchera pas à calculer sa limite.*
2. *Dans cette question, on se propose d'obtenir une valeur approchée de* $u_2$.
   *Dans le repère orthonormé* $\left(O\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\right)$ *ci-dessous, on a tracé la courbe* $\mathscr{C}_f$ *représentative de la fonction* $f$ *définie sur l'intervalle [0 ; 2] par* $f(x) = e^{-x^2}$, *et le rectangle OABC où A(2 ; 0), B(2 ; 1) et C(0 ; 1).*
   *On a hachuré le domaine* $\mathscr{D}$ *compris entre la courbe* $\mathscr{C}_f$, *l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation* $x = 2$.




   *On considère l'expérience aléatoire consistant à choisir un point M au hasard à l'intérieur du rectangle OABC.*
   *On admet que la probabilité p que ce point appartienne au domaine est :* $p = \dfrac{\text{aire de } \mathscr{D}}{\text{aire de OABC}}$.

1. tout entier naturel non nul semble plus correct

***a.*** *Justifier que* $u_2 = 2p$.

***b.*** *On considère l'algorithme suivant :*

| | |
|---|---|
| *L1* | ***Variables*** *:* $N$, $C$ *nombres entiers ;* $X$, $Y$, $F$ *nombres réels* |
| *L2* | ***Entrée*** *: Saisir* $N$ |
| *L3* | ***Initialisation*** *:* $C$ *prend la valeur* 0 |
| *L4* | ***Traitement*** *:* |
| *L5* | *Pour k variant de 1 à* $N$ |
| *L6* | $X$ *prend la valeur d'un nombre aléatoire entre 0 et 2* |
| *L7* | $Y$ *prend la valeur d'un nombre aléatoire entre 0 et 1* |
| *L8* | *Si* $Y \leqslant e^{-x^2}$ *alors* |
| *L9* | $C$ *prend la valeur* $C+1$ |
| *L10* | *Fin si* |
| *L11* | *Fin pour* |
| *L12* | *Afficher C* |
| *L13* | $F$ *prend la valeur* $C/N$ |
| *L14* | *Afficher F* |

i. *Que permet de tester la condition de la ligne L8 concernant la position du point* $M(X\ ;\ Y)$ *?*

ii. *Interpréter la valeur F affichée par cet algorithme.*

iii. *Que peut-on conjecturer sur la valeur de F lorsque N devient très grand ?*

***c.*** *En faisant fonctionner cet algorithme pour* $N = 10^6$, *on obtient* $C = 441138$.

*On admet dans ce cas que la valeur F affichée par l'algorithme est une valeur approchée de la probabilité p à* $10^{-3}$ *près.*

*En déduire une valeur approchée de* $u_2$ *à* $10^{-2}$ *près.*