

## ∞ Fonction logarithme 3

1. On considère la fonction suivante définie sur  $]0; +\infty[$  :

$$g(x) = 3x - 3 + 3\ln(x)$$

- a. Calculer la limite de  $g$  en  $0^+$
  - b. Calculer la limite de  $g$  en  $+\infty$
  - c. Calculer la dérivée de  $g$ .
  - d. Déterminer le signe de  $g'(x)$ .
  - e. En déduire le tableau de variation de  $g(x)$ .
  - f. Déterminer le nombre de solutions de  $g(x) = 0$ .
2. On considère la fonction suivante définie sur  $]0; +\infty[$  :

$$f(x) = \frac{3x-3}{x} \ln(x)$$

- a. Calculer la limite de  $f$  en  $0^+$
- b. Calculer la limite de  $f$  en  $+\infty$
- c. Calculer la dérivée de  $f$ .
- d. Déterminer le signe de  $f'(x)$ .
- e. En déduire le tableau de variation de  $f(x)$ .
- f. En déduire le nombre de solutions de  $f(x) = 0$ .

**Correction :**

1. a. On sait que :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} 3x - 3 = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} 3\ln(x) = -\infty \text{ par propriété du cours}$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow 0^+} 3x - 3 + 3\ln(x) = -\infty$$

b.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x - 3 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x\ln(x) = +\infty \text{ par propriété du cours}$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x - 3 + 3\ln(x) = +\infty$$

c.

$$g'(x) = 3 + 3 \times \frac{1}{x}$$

d.

$$g'(x) \geq 0 \quad \forall x > 0$$

e. On a :

$x$	0	$+\infty$
$g'(x)$		+
$g(x)$		$-\infty$

f. La fonction  $g$  est croissante de  $-\infty$  à  $+\infty$ , donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe une unique valeur  $\alpha > 0$  telle que  $g(\alpha) = 0$ .

$$g(0.99) < 0$$

$$g(1.0) > 0$$

$$\text{donc } 0.99 < \alpha < 1.0$$

2. a. On sait que :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x-3}{x} &= -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) &= -\infty \text{ par propriété du cours} \\ \text{donc } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x-3}{x} \ln(x) &= +\infty\end{aligned}$$

b. On sait que :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x-3}{x} &= 3 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) &= +\infty \text{ par propriété du cours} \\ \text{donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x-3}{x} \ln(x) &= +\infty\end{aligned}$$

c. On sait que :

$$\begin{aligned}f'(x) &= \left( \frac{3x-3}{x} \ln(x) \right)' \\ &= \left( \frac{3x-3}{x} \right)' \ln(x) + \left( \frac{3x-3}{x} \right) \ln(x)' \\ &= \left( \frac{(3x-3)' \times x - (3x-3) \times x'}{x^2} \right) \ln(x) + \left( \frac{3x-3}{x} \right) \times \frac{1}{x} \\ &= \left( \frac{3x - (3x-3)}{x^2} \right) \ln(x) + \left( \frac{3x-3}{x^2} \right) \\ &= \frac{(3x - 3x + 3) \ln(x) + 3x - 3}{x^2} \\ &= \frac{3x - 3 + 3 \ln(x)}{x^2} \\ &= \frac{g(x)}{x^2}\end{aligned}$$

d. On a :

$x$	0	$\alpha$	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

**e.**

$$f(\alpha) = \frac{3\alpha - 3}{\alpha} \ln(\alpha)$$

$$\text{or } g(\alpha) = 3\alpha - 3 + 3\ln(\alpha)$$

$$\text{donc } f'(\alpha) = \frac{-3\ln^2(\alpha)}{\alpha} < 0$$

Comme  $f$  est continue, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, on déduit que  $f$  s'annule en deux valeurs  $x_1$  et  $x_2$  :  $0 < x_1 < \alpha$  et  $x_2 > \alpha$