Suites 1 : exercices

Exercice 1 *Soit a un entier naturel. On définit la suite* (u_n) *par :*

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right) \end{cases}$$

1. *Quelle est le mode de génération de cette suite ?*
2. *Écrire une fonction en Python qui calcule les termes de cette suite, n et a étant choisis par l'utilisateur.*
3. *Que remarque-t-on quand on pour* $a = 2$ *et* $n = 10$ *puis* $a = 5$ *et* $n = 20$ *? Conjectuer quant à la limite de cette suite pour* $a > 0$.

Exercice 2 *On appelle suite de Syracuse une suite* (u_n) *d'entiers naturels définie de la façon suivante :*

$$u_0 \text{ un entier naturel non nul que l'on choisit}$$
$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{u_n}{2} & \text{si } u_n \text{ pair} \\ u_{n+1} = 3u_n + 1 & \text{si } u_n \text{ impair} \end{cases}$$

1. *Quelle est le mode de génération de cette suite ?*
2. *Écrire une fonction en Python qui calcule les termes de cette suite, n et a étant choisis par l'utilisateur.*
3. *Que remarque-t-on pour* $u_0 = 1, u_0 = 10$ *et* $u_0 = 20$ *pour n assez grand ?*

Exercice 3
1. *Écrire une fonction en Python qui calcule les termes de la suite de Fibonacci.*
2. *A l'aide de la caculatrice, déterminer au bout de combien de mois* u_n *dépassera* 1000.

Exercice 4 *On considère la suite* (u_n) *définie, pour tout entier naturel n, par :*

$$u_n = \frac{n+1}{n+2}$$

1. *Quel est le mode de génération de la suite ?*
2. *Calculer son terme initial.*
3. *Calculer* u_1 *et* u_2.
4. *Quelle est la monotonie de cette suite ?*
5. *Conjecturer quant à la limite de cette suite.*

Exercice 5 *Soient les suites* u_n *et* v_n *définies sur* $\mathbb{N}$ *par :*

$$u_n = 3n^2 - n + 2$$
$$\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = 2v_n - 3n \end{cases}$$

1. *Exprimer en fonction de n :*

$$un+1$$
$$u_n + 1$$
$$u_{n-1}$$
$$u_{2n}$$
$$u_{3n-1}$$

2. *Exprimer v_n en fonction de v_{n-1} et n.*
3. *Exprimer v_{n+2} en fonction de v_{n+1} et n*

Exercice 6 1. *En étudiant les variations d'une fonction que l'on précisera, étudier le sens de variation des suites suivantes :*

$$u_n = -n^2 + 10n + 1 \qquad\qquad v_n = \frac{2}{n} \ (n \geq 1)$$

Conjecturer quant à la limite de ces suites.

2. *Peut-on exploiter cette méthode avec la suite suivante :*

$$\begin{cases} z_0 = 4 \\ z_{n+1} = z_n + 9 - n^2 \end{cases} \quad ?$$

Expliquer pourquoi et étudier les variations de cette suite.

Exercice 7 *On considère la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par :*

$$u_n = \frac{1.5^n}{n+1}$$

1. *A l'aide de la calculatrice, conjecturer le sens de variation ainsi que la limite de cette suite.*
2. *A près avoir justifié que la suite u est strictement positive, montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$:*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3n+3}{2n+4}$$

3. *Résoudre sur $\mathbb{N}$ l'inéquation :*

$$\frac{3n+3}{2n+4} \geq 1$$

Valider ou invalider alors la conjecture émise quant à la variation de la suite.

Exercice 8 *Pour chacune des suites définies ci-dessous :*

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = \sqrt{2+1} \\ u_2 = \sqrt{2+\sqrt{2+1}} \\ u_n = \sqrt{2+\sqrt{2+..\sqrt{2+1}}} \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = \frac{1}{2+1} \\ u_2 = \frac{1}{2+\frac{1}{2+1}} \\ u_n = \frac{1}{2+\frac{1}{..+\frac{1}{2+1}}} \end{cases}$$

1. *Déterminer une fonction f telle que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on ait $u_{n+1} = f(u_n)$.*
2. *Conjecturer du comportement à l'infini de la suite.*