Activités sur les limites 2 : correction

Exemple 1 *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{3\}$ par $f(x)=\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}x+1}{x+3}\right)$. On va déterminer la limite de f en $+\infty$ en plusieurs étapes :*

1. *Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction $\frac{\frac{\pi}{2}x+1}{x+3}$ en faisant une levée d'indétermination.*
   On a :

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty}\frac{\pi}{2}x+1=+\infty\\
&\lim_{x\to+\infty}x+3=+\infty\\
\textit{donc } &\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\pi}{2}x+1}{x+3} \textit{ est du type } \frac{+\infty}{+\infty}
\end{aligned}$$

   On factorise par x au numérateur et au dénominateur car c'est le monôme de plus haut de degré :

$$\begin{aligned}
&\frac{\frac{\pi}{2}x+1}{x+3}=\frac{x\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{x}\right)}{x\left(1+\frac{3}{x}\right)}=\frac{\frac{\pi}{2}+\frac{1}{x}}{1+\frac{3}{x}}\\
\textit{or } &\lim_{x\to+\infty}\frac{\pi}{2}+\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}\\
&\lim_{x\to+\infty}1+\frac{3}{x}=1\\
\textit{donc } &\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\pi}{2}x+1}{x+3}=\frac{\frac{\pi}{2}}{1}=\frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

   Cette fonction a une asymptote d'équation $y=\frac{\pi}{2}$ en $+\infty$.

2. *Déterminer la limite de $\sin(u)$ quand u tend vers $\frac{\pi}{2}$.*
   On a :

$$\lim_{u\to\frac{\pi}{2}}=\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$$

3. *En déduire la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.*
   On a :

$$\begin{aligned}
&g(x)=\frac{\frac{\pi}{2}x+1}{x+3}\\
&\lim_{x\to+\infty}g(x)=\frac{\pi}{2}\\
&\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\sin\left(g(x)\right)=\lim_{u\to\frac{\pi}{2}}sin(u)=1
\end{aligned}$$

   Cette fonction a une asymptote d'équation $y=1$ en $+\infty$.

Exemple 2 *Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ par $g(x)=\frac{1}{1+\frac{1}{x-2}}$. On va déterminer la limite de g en 2 en plusieurs étapes :*

1. *Déterminer la limite en 2^+ et 2^- de la fonction $1+\frac{1}{x-2}$.*
   On a :

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to2^+}1+\frac{1}{x-2}=1+\frac{1}{0^+}=+\infty\\
&\lim_{x\to2^-}1+\frac{1}{x-2}=1+\frac{1}{0^-}=-\infty
\end{aligned}$$

2. *Déterminer la limite de* $\frac{1}{u}$ *quand* u *tend vers* $+\infty$ *et quand* u *tend vers* $-\infty$.
On a :

$$\lim_{u\to+\infty} \frac{1}{u} = \frac{1}{+\infty} = 0$$
$$\lim_{u\to-\infty} \frac{1}{u} = \frac{1}{-\infty} = 0$$

3. *En déduire la limite de* $g(x)$ *quand* x *tend vers* 2.
On pose :

$$h(x) = 1 + \frac{1}{x-2}$$
$$\lim_{x\to2^+} g(x) = \lim_{x\to2^+} \frac{1}{h(x)} = \lim_{u\to+\infty} \frac{1}{u} = 0$$
$$\lim_{x\to2^-} g(x) = \lim_{x\to2^-} \frac{1}{h(x)} = \lim_{u\to-\infty} \frac{1}{u} = 0$$

La fonction $g(x)$ *a pour limite* 0 *en* 2.
A priori, elle n'était pas définie en $x = 2$ *mais on vient de montrer qu'elle avait une limite finie en* $x = 2$ *: on peut la prolonger en* $x = 2$ *par* 0.