↜ Probabilités et variables aléatoires : cours

1 Répétition d'expérience indépendantes

Définition

Plusieurs expériences sont identiques et indépendantes si :

- ✏ elles ont les même issues.
- ✏ la probabilités de ces issues ne changent pas entre les expériences.

Exemple 1 *Dans un salle de* 30 *élèves, il y a* 5 *gauchers : on choisit au hasard un élève et on regarde s'il est gaucher ou droitier.*
On repète l'expérience plusieurs fois mais de deux manières différentes.

- ✏ *dans un premier temps, une fois l'élève choisi, il retourne à sa place et on réitère l'expérience.*
  A chaque expérience, on a les deux mêmes issues : gaucher ou droitier.
  La probabilité d'être gaucher est : $\frac{5}{30}$ *et la probabilité d'être droitier est* $\frac{25}{30}$ *pour chaque expérience.*
  Les expériences sont identiques et indépendantes.
- ✏ *dans un second temps, une fois l'élève choisi, il sort de la salle et on réitère l'expérience.*
  A chaque expérience, on a les deux mêmes issues : gaucher ou droitier.
  Pour la première expérience, la probabilité d'être gaucher est : $\frac{5}{30}$ *et la probabilité d'être droitier est* $\frac{25}{30}$.
  Si un gaucher a été choisi à la première expérience, pour la seconde expérience, la probabilité d'être gaucher est : $\frac{4}{29}$ *et la probabilité d'être droitier est* $\frac{25}{29}$.
  Si un droitier a été choisi à la première expérience, pour la seconde expérience, la probabilité d'être gaucher est : $\frac{5}{29}$ *et la probabilité d'être droitier est* $\frac{24}{29}$.
  Les issues n'ont plus les mêmes probabilités d'une expérience à l'autre : les expériences ne sont pas identiques et indépendantes.

Formule explicite

On considère une expérience aléatoire à deux issues A et B.
On répète l'expérience deux fois de suite de façon indépendante :

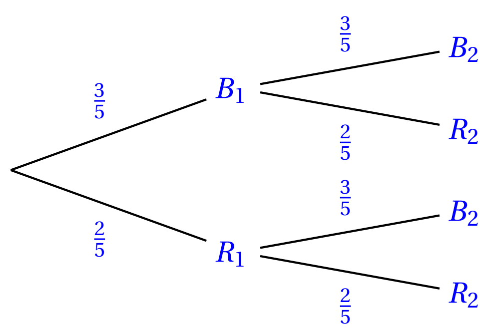
- ✏ la probabilité d'obtenir l'issue A suivie de l'issue B est $P(A) \times P(B)$.
- ✏ la probabilité d'obtenir l'issue B suivie de l'issue A est $P(B) \times P(A)$.
- ✏ la probabilité d'obtenir l'issue A suivie de l'issue A est $P(A) \times P(A) = P(A)^2$.
- ✏ la probabilité d'obtenir l'issue B suivie de l'issue B est $P(B) \times P(B) = P(B)^2$.

Exemple 2 *On considère l'expérience suivante :*
une urne contient 3 *boules blanches et deux rouges. On tire au hasard une boule et on la remet dans l'urne. On répète l'expérience deux fois de suite.*

1. *Représenter l'ensemble des issues de ces expériences dans un arbre.*
2. *Déterminer la probabilité d'obtenir deux boules blanches.*
3. *Déterminer la probabilité d'obtenir une boule blanche et une boule rouge.*
4. *Déterminer la probabilité d'obtenir au moins une boule blanche.*

1. *On appelle B_1 l'événement " on tire une boule blanche en premier ", B_2 l'événement " on tire une boule blanche en deuxième " et R_1 l'événement " on tire une boule rouge en premier ", R_2 l'événement " on tire une boule rouge en deuxième ".*
Peu importe le moment où on prélève les boules, comme il y a tirage avec remise :

$$P(B_1) = P(B_2) = \frac{3}{5} = 0.6$$
$$P(R_1) = P(R_2) = \frac{2}{5} = 0.4$$



2. *On appelle BB l'événement " obtenir deux boules blanches à la fin des deux prélèvements " :*

$$P(BB) = P(B_1) \times P_{B_1}(B_2) = 0.6 \times 0.6 = 0.36$$

3. *On appelle $BR - RB$ l'événement " obtenir une boule blanche et une boule rouge à la fin des deux prélèvements " :*

$$P(BR - RB) = P(B_1 \cap R_2) + P(B_2 \cap R_1) = P(B_1) \times P_{B_1}(R_2) + P(R_1) \times P_{R_1}(B_2) = 0.6 \times 0.4 + 0.4 \times 0.6 = 0.48$$

4. *On appelle AMB l'événement " obtenir au moins une boule blanche à la fin des deux prélèvements " :*

$$\begin{aligned} P(AMB) &= P(B_1 \cap R_2) + P(B_2 \cap R_1) + P(B_1 \cap B_2) \\ &= P(B_1) \times P_{B_1}(R_2) + P(R_1) \times P_{R_1}(B_2) + P(B_1) \times P_{B_1}(B_2) \\ &= 0.6 \times 0.4 + 0.4 \times 0.6 + 0.6 \times 0.6 \\ &= 0.84 \end{aligned}$$

Généralisation

Quand on répète n fois une expérience aléatoire de façon indépendante ayant pour issues à chaque étape i, A_i et $\overline{A}_i$, alors :

$$P(A_1 \cap A_2 \cap .... \cap A_n) = P(A_1) \times P(A_2) \times ... \times P(A_n)$$

2 Épreuve de Bernouilli

Définition

Une épreuve de Bernouilli est une éxpérience aléatoire à deux issues A et $\overline{A}$, souvent notés succès et échec.

Définition

1. Une loi de Bernouilli est une loi de probabilité à deux issues, succès et échec, telles :
   - ✏ La probabilité de succès est p.
   - ✏ La probabilité d'échec est de $1-p$.

   La valeur $p \in [0;1]$ est le paramètre de la loi de Bernouilli.
2. Une variable aléatoire X suit une loi de Bernouilli quand elle peut prendre deux valeurs 0 (l'échec) et 1 (le succès) :

$$P(X=0) = 1-p$$
$$P(X=1) = p$$

Propriété

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de Bernouilli de paramètre p :

- ✏ l'espérance de X, notée $E(X)$, vaut p.
- ✏ la variance de X, notée $V(X)$, vaut $p(1-p)$.

3 Schéma de Bernouilli, loi binomiale

3.1 Schéma de Bernouilli

Définition

Un schéma de Bernouilli est la répétition de n épreuves de Bernouilli identiques et indépendantes pour lesqules la probabilité du succès est p.
Son univers est $\{0;1\}^n$.

3.2 Loi binomiale

Définition

On considère un schéma de Bernouilli composé de n épreuves de Bernouilli identiques et indépendantes.
Un loi binomiale est une loi de probabilité définie sur l'ensemble $[\![0\ ;\ n]\!]$ qui donne le nombre de succès de l'expérience.
On dit que n et p sont les paramètres de la loi binomiale que l'on notera $\mathscr{B}(n;p)$.
Si X suit une loi binomiale de paramètres n et p, on écrira $X \sim \mathscr{B}(n;p)$.

3.3 Expression de la loi binomiale à l'aide des coefficients binomiaux

Définition

On réalise une expérience suivant un schéma de Bernouilli de paramètres n et p.
Soit un entier naturel k tel que $0 \leq k \leq n$.
On appelle coefficient binomial, noté $\binom{n}{k}$, le nombre de chemins conduisant à k succès parmi n épreuves sur l'arbre représentant l'expérience.
On a :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

avec $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n \quad$ pour $n \geq 1$

avec $0! = 1$

Propriété

On réalise une expérience suivant un schéma de Bernouilli de paramètres n et p.
On associe à l'expérience la variable aléatoire X qui suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n;p)$.

Pour tout entier naturel k tel que $0 \leq k \leq n$, on a :

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Preuve

On sait que $X \sim \mathscr{B}(n;p)$.
On cherche, pour $k \in [\![0\ ;\ n]\!]$, la valeur $P(X=k)$.
On a besoin de savoir combien, sur l'arbre pondéré modélisant la situation, il y a de chemins avec k succès et $n-k$ échec par conséquent.
Ce nombre est le coefficient binomial $\binom{n}{k}$.
Chacun de ces chemins a la même probabilité : $p^k(1-p)^{n-k}$.
On en déduit que :

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Exemple 3 (Calculs des probabilités en utilisant les coefficients binomiaux) *Une urne contient* 4 *boules gagnantes et* 6 *boules perdantes.*
On tire au hasard quatre fois de suite une boule, en remettant la boule choisie dans l'urne entre chaque tirage.
On appelle X la variable aléatoire qui associe le nombre de tirages gagnants.

1. *Prouver que X suit une loi binomiale.*
2. *Déterminer la loi de probabilité de X.*
3. *Calculer la probabilité d'obtenir* 3 *boules gagnantes.*

1. *On répète* 4 *fois une expérience à deux issues : boules gagnantes (* 4 *sur* 10 *) et boules perdantes (* 6 *sur* 10 *).*
Le succès est d'obtenir une boule gagnante : la probabilité est de $\frac{4}{10}$.
Les expériences sont indépendantes car les tirages sont avec remise.
La variable aléatoire X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(4;\frac{4}{10})$.
2. *Déterminer la loi de X, c'est exprimer la valeur de la probabilité de chaque événement $P(X=k)$ pour $0 \leq k \leq 4$.*
On a :

$$P(X=k) = \binom{4}{k}\left(\frac{4}{10}\right)^k\left(\frac{6}{10}\right)^{n-k}$$

3. *On a :*

$$\begin{aligned} P(X=3) &= \binom{4}{3}\left(\frac{4}{10}\right)^{3}\left(\frac{6}{10}\right)^{4-3} \\ &= \frac{4!}{3!(4-3)!}\left(\frac{2}{5}\right)^{3}\left(\frac{3}{5}\right)^{1} \\ &= 4\times\frac{8}{125}\times\frac{3}{5} \\ &= \frac{96}{625} \\ &= 0.1536 \end{aligned}$$

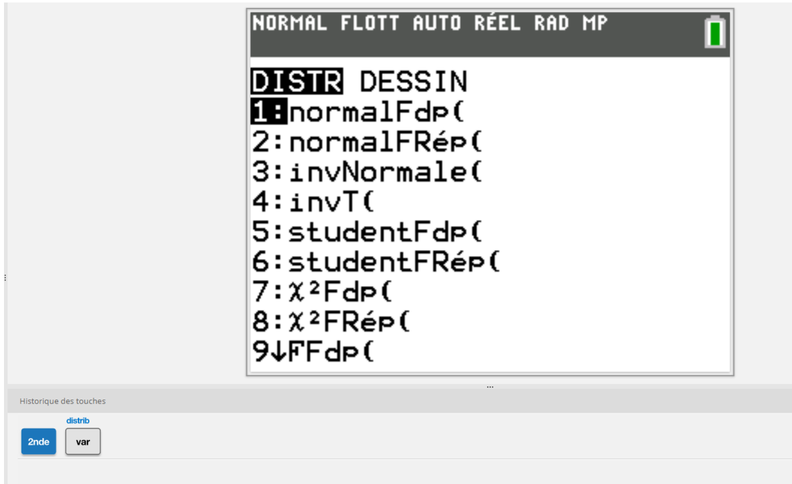
Exemple 4 (Utilisation de la calculatrice) *On fait l'hypothèse que* 60% *des électeurs ont voté pour le candidat A.*
On interroge au hasard à la sortie des urnes 50 *personnes.*
Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de personnes qui ont voté pour le candidat A.

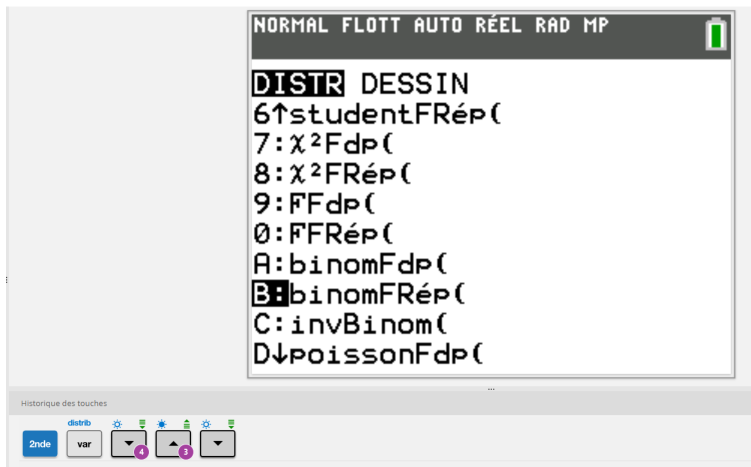
1. *Déterminer des réels a et b tels que* $P(a \le X \le b) \ge 0.95$
2. *Donner une interprétation du résultat précédent.*

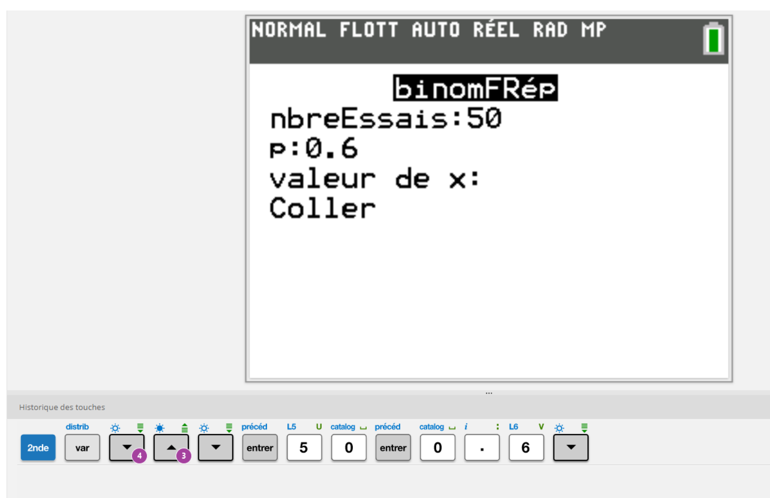
1. *La variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres* 50 *et* 0.6.
   Les réels a et b ne seront pas uniques mais on va chercher un plus petit intervalle qui vérifie cette inégalité.
   On sait que :

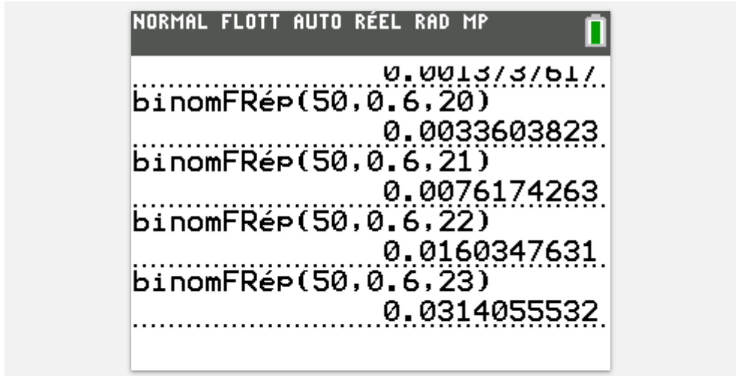
   $$P(a \le X \le b) = P(X \le b) - P(X \le a-1)$$

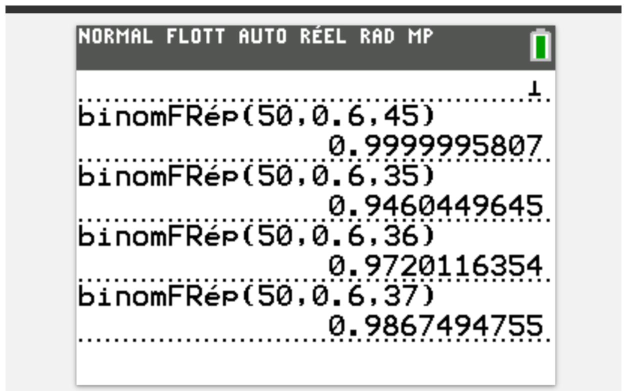
   Si on a $P(X \le b) \ge 0.975$ *et* $P(X \le a-1) \le 0.025$, *alors* $P(a \le X \le b) \ge 0.95$ *: on va chercher le plus grand a qui vérifie cette propriété et le plus petit b qui vérifie cette propriété.*
   On va calculer les différentes valeurs de $P(X \le k)$ *avec la calculatrice :*
   Avec la TI :


NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP
DISTR DESSIN
1:normalFdp(
2:normalFRép(
3:invNormale(
4:invT(
5:studentFdp(
6:studentFRép(
7:χ²Fdp(
8:χ²FRép(
9↓FFdp(
Historique des touches
distrib
2nde
var


NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP
DISTR DESSIN
6↑studentFRép(
7:χ²Fdp(
8:χ²FRép(
9:FFdp(
0:FFRép(
A:binomFdp(
B:binomFRép(
C:invBinom(
D↓poissonFdp(
Historique des touches
distrib
2nde
var


NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP
binomFRép
nbreEssais:50
p:0.6
valeur de x:
Coller
Historique des touches
distrib
2nde
var
entrer
5
0
entrer
0
.
6





Grâce à ces calculs, on trouve $a - 1 = 23$ *et* $b = 36$.
Finalement $P(24 \leq X \leq 36) \geq 0.95$.

2. *Il y a une probabilité au moins égale à* 0.95 *que les personnes interrogées au hasard en sortant des urnes soient comprises entre* 24 *et* 36.