Récurrences 6

On considère la suite :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{16u_n+120}{u_n+14} \\ u_0 = 16 \end{cases}$$

1. Calculer u_1.
2. On considère la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{16x+120}{x+14}$$

   Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = f(u_n)$

   a. Montrer que la fonction f est croissante sur $[0;+\infty[$.

   b. Résoudre l'équation $f(x) = x$ sur $[0;+\infty[$.

   c. En déduire que $f(x) > 12$ pour $x > 12$

   d. Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N} :\ u_n > 12$
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(12-u_n)(u_n+10)}{u_n+14}$$

4. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
5. En déduire que la suite (u_n) converge et donner sa limite.
6. On définit la suite (v_n) pour tout entier naturel par :

$$v_n = \frac{u_n-12}{u_n+10}$$

   Calculer v_0
7. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{4}{26}$.
8. Déterminer la limite de (v_n) puis celle de (u_n).

1. On a :

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{16 \times u_0 + 120}{u_0 + 14} \\ &= \frac{16 \times 16 + 120}{16 + 14} \\ &= \frac{376}{30} \end{aligned}$$

2. **a.** On va calculer la dérivée de la fonction f :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(16x+120)' \times (x+14) - (16x+120) \times (x+14)'}{(x+14)^2} \\ &= \frac{16 \times (x+14) - (16x+120) \times 1}{(x+14)^2} \\ &= \frac{16x + 224 - 16x - 120}{(x+14)^2} \\ &= \frac{104}{(x+14)^2} \end{aligned}$$

Comme la dérivée de la fonction est strictement positive, on en déduit que la fonction f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$

b. On a :

$$\begin{aligned} & f(x) = x \\ \Leftrightarrow & \frac{16x+120}{x+14} = x \\ \Leftrightarrow & 16x + 120 = x(x+14) \\ \Leftrightarrow & 16x + 120 = x^2 + 14x \\ \Leftrightarrow & x^2 - 2x - 120 = 0 \end{aligned}$$

On doit résoudre l'équation du second degré en commençant par calculer le discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 484 > 0$$

Il y a donc deux racines réelles disctinctes :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2+\sqrt{484}}{2} = 12 \\ x_2 &= \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2-\sqrt{484}}{2} = -10 \end{aligned}$$

c. On sait que f est croissante pour $x > 0$, donc :

$$x > 12 \Rightarrow f(x) > f(12) = 12$$

Initialisation :
On a $u_0 = 16 > 12$
L'initialisation est établie.
Hérédité :

On suppose que la propriété est vraie pour un rang $n \geq 0$:

$$u_n > 12 : \text{ c'est l'hypothèse de récurrence}$$

On démarre de l'hypothèse de récurrence :

$$u_n > 12 \Rightarrow u_{n+1} = f(u_n) > f(12) = 12 \text{ par croissance de } f$$

L'hérédité est établie.
Donc, $\forall n \in \mathbb{N} : u_n > 12$

3. On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{16u_n - 120}{u_n + 14} - u_n \\ &= \frac{16u_n - 120}{u_n + 14} - \frac{(u_n + 14)u_n}{u_n + 14} \\ &= \frac{-u_n^2 + 2u_n - 120}{u_n + 14} \end{aligned}$$

Or :

$$\frac{(12 - u_n)(u_n + 10)}{u_n + 14} = \frac{12u_n - 12 \times 10 - u_n^2 - 10u_n}{u_n + 14} = \frac{-u_n^2 + 2u_n - 120}{u_n + 14}$$

4. Comme $u_n > 12$ alors $12 - u_n < 0$, $u_n + 10 > 0$ et $u_n + 14 > 0$, par conséquent, $u_{n+1} - u_n < 0$ et donc la suite (u_n) est décroissante.

5. Comme la suite (u_n) est décroissante et minorée par 12, alors d'après le théorème de convergence monotone, elle converge vers une limite l qui vérifie $f(l) = l$.
On a donc le choix entre 12 et -10 pour l et comme l est positif, on en déduit que $l = 12$.

6. On a :

$$v_0 = \frac{u_0 - 12}{u_0 + 10} = \frac{4}{6}$$

7. On a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{u_{n+1} - 12}{u_{n+1} + 10} \\ &= \frac{\frac{16u_n + 120}{u_n + 14} - 12}{\frac{16u_n + 120}{u_n + 14} + 10} \\ &= \frac{4u_n - 48}{26u_n + 260} \\ &= \frac{4}{26} \times \frac{u_n - 12}{u_n + 10} \\ &= \frac{4}{26} \times v_n \end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison $\frac{4}{26}$ et de premier terme de $v_0 = \frac{4}{6}$.

8. On peut exprimer en fonction de n et de v_0 :

$$v_n = \frac{4}{6}\left(\frac{4}{26}\right)^n$$

Comme la raison est comprise entre 0 et 1, la suite tend vers 0 et on a :

$$\begin{aligned} & v_n = \frac{u_n - 12}{u_n + 10} \\ \Leftrightarrow\, & v_n(u_n + 10) = u_n - 12 \\ \Leftrightarrow\, & v_n u_n - u_n = -10v_n - 12 \\ \Leftrightarrow\, & u_n = \frac{-10v_n - 12}{v_n - 1} \end{aligned}$$

Par opération sur les limites, on en déduit que la limite de (u_n) est $\frac{-12}{-1} = 12$