Intégrale : exercices corrigés

Exercice 1 *Soit la fonction définie sur l'intervalle* $[-1\ ;\ 1]$ *par* $f(x)=(1-x^2)e^x$.

1. *Pour tout réel x de l'intervalle* $[-1\ ;\ 1]$, *on pose* $F(x)=(-1+2x-x^2)e^x$. *Montrer que la fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle* $[-1\ ;\ 1]$.
2. *Calculer l'aire exacte, en unité d'aire, de la surface comprise entre l'axe des abscisses, la courbe (C), les droites d'équations* $x=-1$ *et* $x=1$.

Correction :

1. On doit montrer que la fonction $F'(x)$ est égale à la fonction $f(x)$.
La fonction $F(x)$ est le produit de deux fonctions $u(x)=-1+2x-x^2$ et $v(x)=e^x$:

$$\begin{cases} u(x)=-1+2x-x^2 & \to u'(x)=2-2x \\ v(x)=e^x & \to v'(x)=e^x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} F(x)=(u(x)\times v(x))' &= u'(x)\times v(x)+u(x)\times v(x)' \\ &= (2-2x)\times e^x+(-1+2x-x^2)\times e^x \quad \text{on met en facteur par } e^x \\ &= (2-2x+(-1+2x-x^2))e^x \\ &= (2-2x-1+2x-x^2)e^x \\ &= (1-x^2)e^x \\ &= f(x) \end{aligned}$$

F est donc bien une primitive de f.

2. Dans cette question, on doit calculer une aire. Calculer une aire revient à calculer une intégrale quand une fonction est positive.
Comme pour $x\in[-1;1]$, $1-x^2\geq 0$ et $e^x>0$, alors $f(x)\geq 0$: c'est donc bien le cas ici.
En général, on ne vous fera pas vérifier cette condition sans vous le demander explicitement. On utilisera souvent le fait qu'une fonction exponentielle est strictement positive ou encore le signe d'une polynôme du second degré en passant par le calcul du discriminant Δ .
L'aire cherchée, en unité d'aires, est la valeur suivante :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} f(x)\,dx &= [F(x)]_{-1}^{+1} \\ &= F(1)-F(-1) \\ &= (-1+2\times 1-1^2)e^1-(-1+2\times(-1)-(-1)^2)e^{-1} \\ &= 0\times e^1-(-4)e^{-1} \\ &= 4e^{-1} \end{aligned}$$

On s'arrête ici car on nous demande la valeur exacte. Si on nous avait demandé une valeur approchée, on aurait ajouté une étape avec un arrondi à la précision demandée.

Exercice 2 *On considère la fonction g définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $g(x)=x^2-4$.
On note (C) *la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthonormal d'unité graphique le centimètre.*
On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-3\ ;\ +\infty[$ *par* $f(x)=3\ln(x+3)$.
On note (C') *la courbe représentative de la fonction f dans le même repère que la précédente.*
On se propose de déterminer l'aire de la partie D du plan, limitée par les courbes (C) *et* (C') *et les droites d'équations* $x=-2$ *et* $x=3$.

1. *On considère la fonction F définie sur* $]-3\,;\,3]$ *par* $F(x) = 3(x+3)\ln(x+3) - 3x$.
   Vérifier que F est une primitive de la fonction f.
2. *On admet que pour tout x de l'intervalle* $[-2\,;\,3]$, $g(x) \leqslant f(x)$.
   Donner la valeur exacte de l'aire de la partie D en cm^2 *puis une valeur approchée au* mm^2 *près.*

Correction :

1. On doit montrer que la fonction $F'(x)$ est égale à la fonction $f(x)$:

$$\begin{aligned}
F'(x) &= (3(x+3)\ln(x+3) - 3x)' \\
&= (3(x+3)\ln(x+3))' - (3x)' \\
&\quad \text{on va dériver directement le terme après le moins et celui à gauche en faisant la dérivée d'un produit} \\
&= 3 \times \left((x+3)' \times \ln(x+3) + (x+3) \times \ln(x+3)'\right) - 3 \\
&\quad \text{le 3 devant peut se mettre en facteur puisque c'est une constante} \\
&= 3 \times \left(1 \times \ln(x+3) + (x+3) \times \frac{1}{x+3}\right) - 3 \\
&\quad \text{on simplifie le numérateur et le dénominateur identique} \\
&= 3 \times (\ln(x+3) + 1) - 3 \\
&= 3\ln(x+3) + 3 - 3 \\
&= 3\ln(x+3) \\
&= f(x)
\end{aligned}$$

   F est donc bien une primitive de f.

2. Dans cette question, on doit calculer une aire de la surface entre deux courbes.
   Celle au dessus de l'autre est f à cause de l'inégalité pour $x \in [-2\,;\,3]$, $g(x) \leqslant f(x)$.
   L'aire cherchée est donc :

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^{3} (f(x) - g(x))\,dx &= [F(x) - G(x)]_{-2}^{+3} \\
&\quad \text{avec } G \text{ une primitive de } g \text{ que nous déterminer en utilisant le tableau des primitives} \\
&= \left[3(x+3)\ln(x+3) - 3x - (\frac{x^3}{3} - 4x)\right]_{-2}^{+3} \\
&= \left[3(x+3)\ln(x+3) - 3x - \frac{x^3}{3} + 4x\right]_{-2}^{+3} \\
&= \left[3(x+3)\ln(x+3) - \frac{x^3}{3} + x\right]_{-2}^{+3} \\
&= 3(3+3)\ln(3+3) - \frac{3^3}{3} + 3 - \left(3(-2+3)\ln(-2+3) - \frac{(-2)^3}{3} + (-2)\right) \\
&= 18\ln(6) - 9 + 3 - \left(3 \times 1 \times \ln(1) - \frac{(-8)}{3} - 2\right) \\
&= 18\ln(6) - 6 - \frac{8}{3} + 2 \\
&= 18\ln(6) - \frac{20}{3} \text{c'est la valeur exacte} \\
&\approx 26\text{cm}^2 \\
&\approx 2559\text{mm}^2
\end{aligned}$$

   On trouve le même résultat à la calculatrice : ici, et contrairement à l'exercice 1, on aura une partie des points si on ne donne que les valeurs approchées.