Récurrences 6

On considère la suite :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{18u_n+70}{u_n+15} \\ u_0 = 14 \end{cases}$$

1. Calculer u_1.
2. On considère la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{18x+70}{x+15}$$

   Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = f(u_n)$

   a. Montrer que la fonction f est croissante sur $[0;+\infty[$.

   b. Résoudre l'équation $f(x) = x$ sur $[0;+\infty[$.

   c. En déduire que $f(x) > 10$ pour $x > 10$

   d. Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N} :\ u_n > 10$
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(10-u_n)(u_n+7)}{u_n+15}$$

4. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
5. En déduire que la suite (u_n) converge et donner sa limite.
6. On définit la suite (v_n) pour tout entier naturel par :

$$v_n = \frac{u_n-10}{u_n+7}$$

   Calculer v_0
7. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{8}{25}$.
8. Déterminer la limite de (v_n) puis celle de (u_n).

1. On a :

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{18 \times u_0 + 70}{u_0 + 15} \\ &= \frac{18 \times 14 + 70}{14 + 15} \\ &= \frac{322}{29} \end{aligned}$$

2. a. On va calculer la dérivée de la fonction f :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(18x+70)' \times (x+15) - (18x+70) \times (x+15)'}{(x+15)^2} \\ &= \frac{18 \times (x+15) - (18x+70) \times 1}{(x+15)^2} \\ &= \frac{18x + 270 - 18x - 70}{(x+15)^2} \\ &= \frac{200}{(x+15)^2} \end{aligned}$$

Comme la dérivée de la fonction est strictement positive, on en déduit que la fonction f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$

b. On a :

$$\begin{aligned} &f(x) = x \\ &\Leftrightarrow \frac{18x+70}{x+15} = x \\ &\Leftrightarrow 18x + 70 = x(x+15) \\ &\Leftrightarrow 18x + 70 = x^2 + 15x \\ &\Leftrightarrow x^2 - 3x - 70 = 0 \end{aligned}$$

On doit résoudre l'équation du second degré en commençant par calculer le discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 289 > 0$$

Il y a donc deux racines réelles disctinctes :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 + \sqrt{289}}{2} = 10 \\ x_2 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 - \sqrt{289}}{2} = -7 \end{aligned}$$

c. On sait que f est croissante pour $x > 0$, donc :

$$x > 10 \Rightarrow f(x) > f(10) = 10$$

Initialisation :
On a $u_0 = 14 > 10$
L'initialisation est établie.
Hérédité :

On suppose que la propriété est vraie pour un rang $n \geq 0$:

$$u_n > 10 : \text{ c'est l'hypothèse de récurrence}$$

On démarre de l'hypothèse de récurrence :

$$u_n > 10 \Rightarrow u_{n+1} = f(u_n) > f(10) = 10 \text{ par croissance de } f$$

L'hérédité est établie.
Donc, $\forall n \in \mathbb{N} : u_n > 10$

3. On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{18u_n - 70}{u_n + 15} - u_n \\ &= \frac{18u_n - 70}{u_n + 15} - \frac{(u_n + 15)u_n}{u_n + 15} \\ &= \frac{-u_n^2 + 3u_n - 70}{u_n + 15} \end{aligned}$$

Or :

$$\frac{(10 - u_n)(u_n + 7)}{u_n + 15} = \frac{10u_n - 10 \times 7 - u_n^2 - 7u_n}{u_n + 15} = \frac{-u_n^2 + 3u_n - 70}{u_n + 15}$$

4. Comme $u_n > 10$ alors $10 - u_n < 0$, $u_n + 7 > 0$ et $u_n + 15 > 0$, par conséquent, $u_{n+1} - u_n < 0$ et donc la suite (u_n) est décroissante.

5. Comme la suite (u_n) est décroissante et minorée par 10, alors d'après le théorème de convergence monotone, elle converge vers une limite l qui vérifie $f(l) = l$.
On a donc le choix entre 10 et -7 pour l et comme l est positif, on en déduit que $l = 10$.

6. On a :

$$v_0 = \frac{u_0 - 10}{u_0 + 7} = \frac{4}{7}$$

7. On a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{u_{n+1} - 10}{u_{n+1} + 7} \\ &= \frac{\frac{18u_n+70}{u_n+15} - 10}{\frac{18u_n+70}{u_n+15} + 7} \\ &= \frac{8u_n - 80}{25u_n + 175} \\ &= \frac{8}{25} \times \frac{u_n - 10}{u_n + 7} \\ &= \frac{8}{25} \times v_n \end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison $\frac{8}{25}$ et de premier terme de $v_0 = \frac{4}{7}$.

8. On peut exprimer en fonction de n et de v_0 :

$$v_n = \frac{4}{7}\left(\frac{8}{25}\right)^n$$

Comme la raison est comprise entre 0 et 1, la suite tend vers 0 et on a :

$$\begin{aligned}
& v_n = \frac{u_n - 10}{u_n + 7} \\
\Leftrightarrow & v_n(u_n + 7) = u_n - 10 \\
\Leftrightarrow & v_n u_n - u_n = -7v_n - 10 \\
\Leftrightarrow & u_n = \frac{-7v_n - 10}{v_n - 1}
\end{aligned}$$

Par opération sur les limites, on en déduit que la limite de (u_n) est $\frac{-10}{-1} = 10$