

☞ Limites de fonctions : cours

1 Limite d'une fonction à l'infini

1.1 Limite finie à l'infini



Définition

⇒ On dit que la fonction f admet pour limite $L \in \mathbb{R}$ en $+\infty$ si tout intervalle ouvert contenant L contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment grand. On note :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$$

⇒ On dit que la fonction f admet pour limite $L \in \mathbb{R}$ en $-\infty$ si tout intervalle ouvert contenant L contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que $-x$ est suffisamment grand. On note :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$$



Définition d'asymptote

⇒ La droite d'équation $y = L$ est asymptote horizontale à la courbe représentative de la fonction f en $+\infty$ si

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$$

⇒ La droite d'équation $y = L$ est asymptote horizontale à la courbe représentative de la fonction f en $-\infty$ si

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$$

Lorsque x se rapproche de $+\infty$, ou $-\infty$ suivant le cas, la distance entre le point $(x; f(x))$ et $(x; L)$ diminue et s'approche de 0.

1.2 Limite infinie à l'infini

Définitions

☞ On dit que la fonction f admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si tout intervalle $]a; +\infty[$, avec a réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment grand et on note :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

☞ On dit que la fonction f admet pour limite $-\infty$ en $+\infty$ si tout intervalle $] -\infty; b[$, avec b réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment grand et on note :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

☞ On dit que la fonction f admet pour limite $+\infty$ en $-\infty$ si tout intervalle $]a; +\infty[$, avec a réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que $-x$ est suffisamment grand et on note :

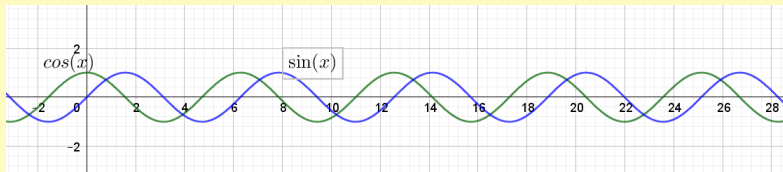
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

☞ On dit que la fonction f admet pour limite $-\infty$ en $-\infty$ si tout intervalle $] -\infty; b[$, avec b réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que $-x$ est suffisamment grand et on note :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

Remarques

- ⇒ Le fait d'avoir une limite égale à $+\infty$ en $+\infty$ ne signifie pas que la fonction est croissante.
- ⇒ Le fait d'avoir une limite égale à $-\infty$ en $+\infty$ ne signifie pas que la fonction est décroissante.
- ⇒ Une fonction n'a pas forcément de limite en $+\infty$: c'est le cas de la fonction sinus ainsi que de la fonction cosinus.



1.3 Limites des fonctions usuelles

Propriétés

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = +\infty \text{ pour } n \text{ pair}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty \text{ pour } n \text{ impair}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

2 Limite d'une fonction en un réel A



Définitions plus rigoureuses

- ⇒ On dit que la fonction f admet pour limite $+\infty$ quand x tend vers A par valeur négative (ou à gauche) si tout intervalle $]a; +\infty[$, a réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment proche de A tout en restant plus petit que A et on note :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$$

- ⇒ On dit que la fonction f admet pour limite $+\infty$ quand x tend vers A par valeur positif (ou à droite) si tout intervalle $]a; +\infty[$, a réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment proche de A tout en restant plus grand que A et on note :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$$

- ⇒ On dit que f admet pour limite $+\infty$ quand x tend vers A si la limite à gauche et la limite à droite de f en A est $+\infty$ et on note :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$$

- ⇒ On dit que la fonction f admet pour limite $-\infty$ quand x tend vers A par valeur négative si tout intervalle $] -\infty; b[$, b réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment proche de A tout en restant plus petit que A et on note :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$$

- ⇒ On dit que la fonction f admet pour limite $-\infty$ quand x tend vers A par valeur positif si tout intervalle $] -\infty; b[$, b réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment proche de A tout en restant plus grand que A et on note :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$$

- ⇒ On dit que f admet pour limite $-\infty$ quand x tend vers A si la limite à gauche et la limite à droite de f en A est $-\infty$ et on note :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$

Exemple 1 D'après le dessin suivant, on peut écrire les limites suivantes :

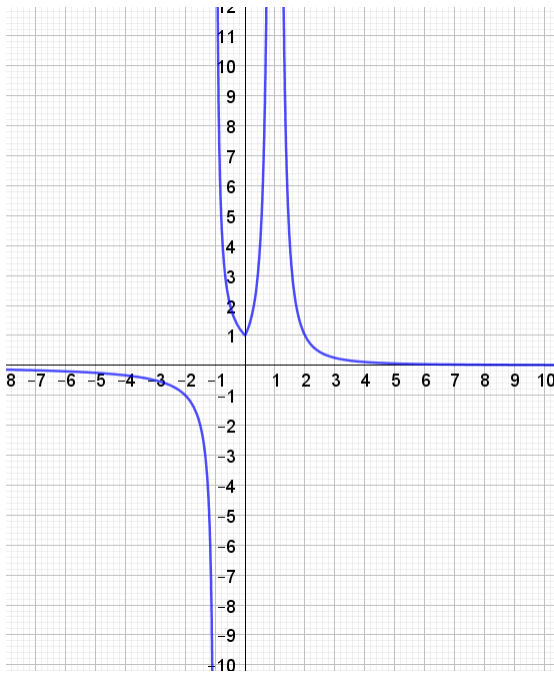
$$\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$



On a deux asymptotes verticales : $x = -1$ et $x = 1$.
On a une asymptote horizontale d'équation $y = 0$.

3 Opérations sur les limites

3.1 Limite d'une somme

Propriétés						
Si $\lim_{x \rightarrow a} u(x)$	L	L	L	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
Si $\lim_{x \rightarrow a} v(x)$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $\lim_{x \rightarrow a} [u(x) + v(x)]$	L+L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI	$-\infty$

3.2 Limite d'un produit



Propriétés

Si $\lim_{x \rightarrow a} u(x)$	L	$L \neq 0$	0	$\pm\infty$
Si $\lim_{x \rightarrow a} v(x)$	L'	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
alors $\lim_{x \rightarrow a} [u(x) \times v(x)]$	$L \times L'$	$\pm\infty$	FI	$\pm\infty$

Le signe que l'on choisira à la place de \pm sera déduit de la règle des signes.

3.3 Limite de l'inverse d'une fonction



Propriétés

On suppose que $u(x) \neq 0 \forall x \in I$.

Si $\lim_{x \rightarrow a} u(x)$	$L \neq 0$	0^-	0^+	$+\infty$	$-\infty$
alors $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{u(x)}$	$\frac{1}{L}$	$-\infty$	$+\infty$	0	0

3.4 Limite d'un quotient



Propriétés

On suppose que $u(x) \neq 0 \forall x \in I$.

Si $\lim_{x \rightarrow a} u(x)$	L	$L \neq 0$	L	0	$\pm\infty$	$\pm\infty$
et $\lim_{x \rightarrow a} v(x)$	L'	0^\pm	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	L'
alors $\lim_{x \rightarrow a} \frac{u(x)}{v(x)}$	$\frac{L}{L'}$	$\pm\infty$	0	FI	FI	$\pm\infty$

Le signe que l'on choisira à la place de \pm sera déduit de la règle des signes.



Remarques

Les formes indéterminées sont les suivantes :

$$+\infty - \infty \quad 0 \times \infty \quad \frac{\infty}{\infty} \quad \frac{0}{0}$$

Exemple 2 Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x-5)(3+x^2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1-2x}{x-3}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -3x^3 + 2x^2 - 6x + 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 5x + 1}{6x^2 - 5}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 + 2}{4x - 1}$$

⇒ On a :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x-5) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (3+x^2) = +\infty$$

$$\text{donc, par produit de limites } \lim_{x \rightarrow -\infty} (x-5)(3+x^2) = -\infty \times (+\infty) = -\infty$$

⇒ On a :

$$\lim_{x \rightarrow 3} 1-2x = 1-6 = -5$$

De plus :

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{x-3} = +\infty$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1-2x}{x-3} = -5 \times (+\infty) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{x-3} = -\infty$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1-2x}{x-3} = -5 \times (-\infty) = +\infty$$

⇒ On sait que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -3x^3 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -6x + 1 = -\infty$$

La limite de $\lim_{x \rightarrow +\infty} -3x^3 + 2x^2 - 6x + 1$ est du type $+\infty - \infty$; on doit factoriser par x^3 pour lever l'indétermination :

$$-3x^3 + 2x^2 - 6x + 1 = x^3 \left(-3 \frac{x^3}{x^3} + 2 \frac{x^2}{x^3} - 6 \frac{x}{x^3} + \frac{1}{x^3} \right) = x^3 \left(-3 + 2 \times \frac{1}{x} - 6 \times \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right)$$

Or :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -3 + 2 \times \frac{1}{x} - 6 \times \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} = -3$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} -3x^3 + 2x^2 - 6x + 1 = -3 \times (+\infty) = -\infty$$

⇒ On sait que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^2 - 5x + 1 = +\infty - 5 \times (-\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 6x^2 - 5 = +\infty$$

La limite de $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 5x + 1}{6x^2 - 5}$ est du type $\frac{+\infty}{+\infty}$; on va devoir factoriser par le monôme de plus haut de degré au numérateur et au dénominateur, c'est-à-dire x^2 :

$$\frac{2x^2 - 5x + 1}{6x^2 - 5} = \frac{x^2 \left(2 \times \frac{x^2}{x^2} - 5 \times \frac{x}{x^2} + \frac{1}{x^2} \right)}{x^2 \left(6 \times \frac{x^2}{x^2} - \frac{5}{x^2} \right)} = \frac{2 - 5 \times \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{6 - \frac{5}{x^2}}$$

Or :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - 5 \times \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{6 - \frac{5}{x^2}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \text{ par quotient de limites}$$

Donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 5x + 1}{6x^2 - 5} = \frac{1}{3}$$

⇒ On sait que :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 3x^2 + 2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 4x - 1 = -\infty$$

La limite de $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 + 2}{4x - 1}$ est de la forme $\frac{+\infty}{-\infty}$; on doit donc factoriser au numérateur par x^2 et au dénominateur par x :

$$\frac{3x^2 + 2}{4x - 1} = \frac{x^2 \left(3 \times \frac{x^2}{x^2} + \frac{2}{x^2} \right)}{x \left(4 \times \frac{x}{x} - \frac{1}{x} \right)} = x \times \frac{3 + \frac{2}{x^2}}{4 - \frac{1}{x}}$$

Or :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 + \frac{2}{x^2}}{4 - \frac{1}{x}} = \frac{3}{4} \text{ par quotient de limites}$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 + 2}{4x - 1} = -\infty \times \frac{3}{4} = -\infty \text{ par produit de limites}$$

Exemple 3 Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$$

⇒ On sait que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+1} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ est une EI du type $+\infty - \infty$; pour lever l'indétermination, on va multiplier par la quantité conjuguée :

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x+1}^2 - \sqrt{x}^2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$$

Or :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+1} + \sqrt{x} = +\infty$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

La limite cherchée est donc 0 : la courbe représentant f a une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $+\infty$.

⇒ On sait que :

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} x - 5 = 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} x - 5 = 0^-$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} \sqrt{x-1} - 2 = 0$$

donc $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$ est une EI du type $\frac{0}{0}$; on va à nouveau multiplier par la quantité conjuguée :

$$\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5} = \frac{(\sqrt{x-1}-2)(\sqrt{x-1}+2)}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)} = \frac{x-1-4}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)} = \frac{x-5}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)} = \frac{1}{\sqrt{x-1}+2}$$

Finalement :

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{\sqrt{x-1}+2} = \frac{1}{\sqrt{5-1}+2} = \frac{1}{4}$$

Exemple 4 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par :

$$f(x) = \frac{-2}{1-x}$$

Démontrer que la courbe représentative de la fonction f admet des asymptotes dont on précisera les équations.
On constate que le dénominateur vaut 0 quand $x = 1$ donc on va déterminer les limites à gauche et à droite de ce point puis les limites en $+\infty$ et $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-2}{1-x} = \frac{-2}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-2}{1-x} = \frac{-2}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{1-x} = \frac{-2}{-\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2}{1-x} = \frac{-2}{+\infty} = 0$$

Les deux premières égalités nous permettent de conclure à l'existence d'une asymptote verticale d'équation $x = 1$.
La troisième égalité nous permet de conclure à l'existence d'une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $+\infty$ et la quatrième égalité nous permet de conclure à l'existence d'une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $-\infty$.

4 Limite d'une fonction composée



Propriétés

Soit f et u deux fonctions.
 a, b et c sont des réels ou $-\infty$ ou $+\infty$:

$$x \xrightarrow{u} u(x) \xrightarrow{f} f[u(x)]$$

Si $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = b$ et $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = c$, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(u(x)) = c$.

Exemple 5 Soit f la fonction définie sur $] \frac{1}{2}; +\infty[$ par :

$$f(x) = \sqrt{2 - \frac{1}{x}}$$

Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

On a :

$$f(x) = u(v(x))$$

$$v(x) = 2 - \frac{1}{x}$$

$$u(x) = \sqrt{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} u(x) = \sqrt{2}$$

$$\text{par composition des limites } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} u(v(x)) = \sqrt{2}$$

5 Limites et comparaisons

5.1 Théorèmes de comparaisons



Théorèmes de comparaisons

- ⇒ Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle $]a; +\infty[$, a réel, telles que pour tout $x \geq a$, $f(x) \leq g(x)$:
 - ⇒ si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.
 - ⇒ si $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.
- ⇒ Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle $] -\infty; a[$, a réel, telles que pour tout $x \leq a$, $f(x) \leq g(x)$
 - ⇒ si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$.
 - ⇒ si $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

Exemple 6 Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} x + \sin(x)$.

La fonction $x \rightarrow \sin(x)$ n'a pas de limite en $+\infty$, en revanche on sait que :

$$-1 \leq \sin(x) \leq 1$$

On peut donc écrire :

$$x - 1 \leq x + \sin(x)$$

Or :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 = +\infty$$

Donc, en utilisant le théorème de comparaison, on en déduit que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x + \sin(x) = +\infty$

5.2 Théorème d'encadrement



Théorèmes de comparaisons

Soit f, g et h trois fonctions définies sur un intervalle $]a; +\infty[$, a réel, telles que pour tout $x \geq a$, on a $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$.

Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = L$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = L$.

On peut évidemment adapter ce théorème à la limite en $-\infty$ et en un point réel.

Exemple 7 Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cos(x)}{x^2 + 1}$.

La fonction $x \rightarrow x \cos(x)$ n'a pas de limite en $+\infty$, en revanche on sait que :

$$-1 \leq \cos(x) \leq 1$$

Comme on cherche la limite en $+\infty$, on peut supposer que $x > 0$ et par conséquent :

$$-1 \leq \cos(x) \leq 1$$

$$\Leftrightarrow -x \leq x \cos(x) \leq x$$

$$\Leftrightarrow -x \leq x \cos(x) \leq x$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x}{x^2 + 1} \leq x \cos(x) \leq \frac{x}{x^2 + 1} \text{ car } x^2 + 1 > 0$$

Il nous reste à déterminer la limite en $+\infty$ de $\frac{x}{x^2 + 1}$ qui, pour l'instant, est une FI du type $\frac{+\infty}{+\infty}$.

On va factoriser le numérateur par x et le dénominateur par x^2 :

$$\frac{x}{x^2 + 1} = \frac{x \times 1}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = \frac{1}{x \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = \frac{1}{x} \times \frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}}$$

Or, par somme et quotient de limites :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{x^2} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}} = 1$$

$$\text{donc } \frac{1}{x} \times \frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}} = 0 \times 1 = 0 \text{ par produit de limites}$$

Finalement, on vient de montrer que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2 + 1} = 0$$

donc, par théorème d'encadrement, on en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cos(x)}{x^2 + 1} = 0$.

6 Fonction exponentielle

6.1 Limites aux bornes



Propriétés

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$



Preuve

⇒ Pour la première égalité, on pose f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = e^x - x$$

Cette fonction est dérivable sur \mathbb{R} par somme de fonctions dérivables :

$$f'(x) = e^x - 1$$

La fonction $x \rightarrow e^x$ est croissante et elle vaut 1 pour $x = 0$, donc $f'(x)$ est positive pour $x \geq 0$: la fonction f est croissante pour $x \geq 0$:

$$f(x) \geq f(0) \Leftrightarrow f(x) \geq 1 \Leftrightarrow e^x - x \geq 1 \Leftrightarrow e^x \geq x + 1$$

Or la limite de la fonction $x \rightarrow x + 1$ est $+\infty$ en $+\infty$ donc, d'après les théorèmes de comparaison, on en déduit que la fonction $x \rightarrow e^x$ admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$.

⇒ Pour la seconde égalité, on écrit :

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x}$$

On peut donc écrire :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

Exemple 8 Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x + e^{-3x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{1 - \frac{1}{x}}$$

On a :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} x &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-3x} &= \lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0 \text{ en posant } X = 3x \\ \text{donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} x + e^{-3x} &= +\infty \text{ par somme de limites}\end{aligned}$$

Pour la fonction suivante, on va décomposer les limites :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - \frac{1}{x} &= 1 - 0 = 1 \text{ par somme de limites} \\ \lim_{x \rightarrow 1} e^x &= e \\ \text{donc, par composition de limites } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{1 - \frac{1}{x}} &= e\end{aligned}$$

6.2 Croissances comparées des fonctions puissances et exponentielles



Propriétés

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} &= +\infty \quad \text{et pour tout entier } n, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x &= 0 \quad \text{et pour tout entier } n, \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0\end{aligned}$$



Preuve

⇒ Commençons par la première ligne.

✎ On commence par la fonction $f(x) = \frac{e^x}{x}$.

On pose $h(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$; c'est une fonction dérivable par somme de fonctions dérivables :

$$h'(x) = e^x - x$$

D'après la preuve précédente, on sait que, pour $x \geq 0$, $e^x - x \geq 1$.

Donc, pour $x \geq 0$, $h'(x) > 0$: la fonction h est donc croissante sur $x > 0$.

On peut donc écrire :

$$\forall x \geq 0 \quad h(x) \geq h(0) \Leftrightarrow \forall x \geq 0 \quad h(x) \geq 1 \Leftrightarrow \forall x \geq 0 \quad e^x - \frac{x^2}{2} \geq 1$$

Par conséquent, pour $x > 0$:

$$e^x \geq 1 + \frac{x^2}{2} \Leftrightarrow \frac{e^x}{x} \geq \frac{1}{x} + \frac{x}{2}$$

Or, par somme de limites :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} + \frac{x}{2} = +\infty$$

et finalement, d'après le théorème de comparaison des limites :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

✎ Soit n un entier naturel supérieur ou égale à 1.

On a :


$$\frac{e^x}{x^n} = \frac{\left(e^{\frac{x}{n}}\right)^n}{x^n} = \frac{\left(e^{\frac{x}{n}}\right)^n}{n^n \left(\frac{x}{n}\right)^n} = \frac{1}{n^n} \times \left(\frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}}\right)^n$$

On pose maintenant $X = \frac{x}{n}$: X tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.

On peut donc écrire :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^n} \times \left(\frac{e^X}{X}\right)^n = \frac{1}{n^n} \times (+\infty)^n = +\infty \text{ par produit de } n \text{ limites}$$


⇒ On va utiliser les résultats précédents.

 Commençons par xe^x :

$$xe^x = \frac{x}{e^{-x}} = -\frac{X}{e^X} \text{ avec } X = -x$$

Donc on en déduit que :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = \lim_{X \rightarrow +\infty} -\frac{X}{e^X} = \lim_{X \rightarrow +\infty} -\frac{1}{\frac{e^X}{X}} = 0 \text{ par inverse de limite}$$

 Soit n un entier naturel supérieur ou égale à 1.

$$x^n e^x = x^n \left(e^{\frac{x}{n}}\right)^n = n^n \times \left(\frac{x}{n}\right)^n \left(e^{\frac{x}{n}}\right)^n = n^n \times \left(\frac{x}{n} e^{\frac{x}{n}}\right)^n$$

Par produit de n limites, en posant $X = \frac{x}{n}$, on en déduit que :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} n^n \times \left(\frac{x}{n} e^{\frac{x}{n}}\right)^n = \lim_{X \rightarrow -\infty} n^n \times (Xe^X)^n = 0$$

Exemple 9 Calculer la limite suivante :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + x}{e^x - x^2}$$

On va tout de suite factoriser par e^x pour conclure rapidement et illustrer la propriété précédente :

$$\frac{e^x + x}{e^x - x^2} = \frac{e^x \left(1 + \frac{x}{e^x}\right)}{e^x \left(1 - \frac{x^2}{e^x}\right)} = \frac{1 + \frac{x}{e^x}}{1 - \frac{x^2}{e^x}}$$

Par quotient de limites et en utilisant la propriété précédente :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + x}{e^x - x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{x}{e^x}}{1 - \frac{x^2}{e^x}} = \frac{1 + 0}{1 - 0} = 1$$