Fonctions polynômes du second degré
Devoir maison pour le 29/09/2021

Exercice 1 *Résoudre les équations suivantes dans* $\mathbb{R}$ *:*

$$x^2 - x - 2 = 0$$
$$3x^2 - 2x - 1 = 0$$

Donner le signe des deux trinômes $x^2 - x - 2$ *et* $3x^2 - 2x - 1$ *en fonction de* x.

On commence par calculer le discriminant de $x^2 - x - 2 = 0$ *:*

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times (-2) = 1 + 8 = 9$$

Comme le discriminant est strictement positif, alors il y a deux racines distinctes :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{4a} = \frac{+1 + 3}{2} = 4$$
$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{4a} = \frac{+1 - 3}{2} = -1$$

Le tableau de signes de ce trinôme est alors :

x	$-\infty$		-1		4		$+\infty$
$x^2 - x - 2$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On calcule ensuite le discriminant de $3x^2 - 2x - 1 = 0$ *:*

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times \times 3 \times (-2) = 4 + 12 = 16$$

Comme le discriminant est strictement positif, alors il y a deux racines distinctes :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{4a} = \frac{+2 + 4}{2} = 3$$
$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{4a} = \frac{+2 - 4}{2} = -1$$

Le tableau de signes de ce trinôme est alors :

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$3x^2 - 2x - 1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Exercice 2 *Une entreprise produit chaque jour une quantité* x *d'objets comprises entre* 0 *et* 50.
Une etude a montré que le coût total de la production des x *objets est donné, en euro, par :*

$$C(x) = 3x^2 - 100x + 900$$

Un objet est vendu au prix de 20 *euros.*

1. *Exprimer la recette $R(x)$, en euro, en fonction de la quantité x d'objets fabriqués et vendus par jour.*
La recette vaut $20x$ pour x objet vendus
2. *Montrer que le bénéfice correspondant à la fabrication et à la vente de x objet est :*

$$B(x) = -3x^2 + 120x - 900$$

La recette est la différence entre le bénéfice, qui vaut $20x$ pour x objet vendus, et le coût total :

$$R(x) = 20x - (3x^2 - 100x + 900) = -3x^2 + 120x - 900$$

3. *Justifier les formes de $B(x)$ données ci-dessous :*

$$\begin{aligned} B(x) &= -3x^2 + 120x - 900 \\ &= -3(x-20)^2 + 300 \\ &= -3(x-30)(x-10) \end{aligned}$$

La première forme est celle donnée précédemment.
La seconde vient de la forme canonique $k(x-\alpha)^2 + \beta$ avec :

$$\begin{aligned} &k = -3 \\ &\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-120}{-6} = 20 \\ &\beta = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{10800 - 120^2}{-12} = \frac{-3600}{-12} = 300 \end{aligned}$$

La dernière forme vient de la factorisation par les racines :

$$\begin{aligned} &a = -3 \\ &\Delta = 3600 \\ &\begin{cases} x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-120-60}{-6} = 30 \\ x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-120+60}{-6} = 10 \end{cases} \end{aligned}$$

4. *Déterminer "les points morts" de la production, c'est-à-dire les quantités à produire et à vendre pour que le bénéfice soit nul.*
Le bénéfice est nul quand $B(x)$ s'annule, autrement dit quand $x = 10$ ou quand $x = 30$; pour 10 ou 30 objets vendus, le bénéfice est nul.
5. *Déterminer les quantités à produire et à vendre pour réaliser de 225 euros.*
Pour déterminer les quantités à produire pour réaliser 225 euros de bénéfice, il suffit de résoudre l'équation :

$$\begin{aligned} &B(x) = 225 \\ \Leftrightarrow &-3x^2 + 120x - 900 = 225 \\ \Leftrightarrow &-3x^2 + 120x - 1125 = 0 \end{aligned}$$

On calcule le discriminant Δ :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 120^2 - 4 \times (-3) \times (-1125) = 900$$

Comme le discriminant est strictement positif, il y a deux racines distinctes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-120-30}{-6} = 25$$
$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-120+30}{-6} = 15$$

Pour réaliser un bénéfice de 225 euros, il faut produire soit 15 objets soit 25 objets.

6. *Montrer que pour tout $x \in [0;50]$, $B(x) \leq B(20)$. Interpréter cette inégalité dans le contexte de l'exercice.*
Comme a est négatif, le trinôme $B(x)$ admet un maximum en $x = -\frac{b}{2a} = \frac{-120}{-6} = 20$.
Cela signifie que pour toutes les valeurs de $x \in [0;50]$, $B(x)$ est inférieure à $B(20)$: pour tout $x \in [0;50]$, $B(x) \leq B(20)$.

Exercice 3 *J'ai acheté plusieurs pièces de tissu pour 180 écus. Si j'avais acheté pour la même somme trois pièces de tissu de plus, j'aurai eu chaque pièce de tissu pour trois écus de moins. Combien ai-je acheté de pièce de tissus ?*
Appelons p le prix d'une pièce de tissu et n le nombre de pièces achetées.
On a les équations suivantes :

$$\begin{cases} p \times n = 180 \\ (p-3)\times(n+3) = 180 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} p \times n = 180 \\ pn - 3n + 3p - 9 = 180 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} p \times n = 180 \\ -3n + 3p = 9 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} p \times n = 180 \\ -n + p = 3 \end{cases}$$

On ne peut pas appliquer le théroème du cours sur la somme et le produit des racines directement mais on peut injecter la deuxième équation dans la première :

$$\begin{cases} (3+n) \times n = 180 \\ -n + p = 3 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} (3+n) \times n = 180 \\ -n + p = 3 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} n^2 + 3n - 180 = 0 \\ -n + p = 3 \end{cases}$$

On résout la première équation en calculant le discriminant :

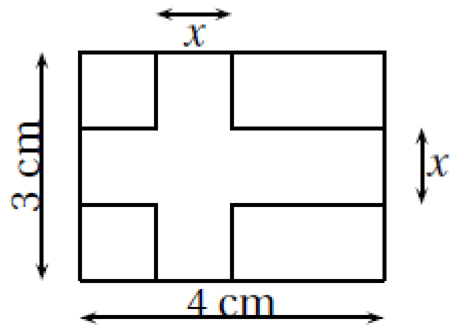
$$\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 1 \times (-180) = 329$$

Comme le discriminant est strictement positif, il y a deux racines distinctes au trinôme $n^2 + 3n - 180$:

$$n_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3+27}{2} = 12$$
$$n_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3-27}{2} = -15$$

Or n représente un nombre d'objets, il ne peut pas être négatif, il vaut donc 12 : il y a donc eu 12 objets achetés. Ensuite, comme $p = n+3$, chacun de ces objets a coûté 15 écus.

Exercice 4 *Quelle largeur doit-on donner à la croix pour que son aire soit égale à l'aire restante du drapeau.*



On va calculer l'aire de la croix $A(x)$ en fonction de x, ainsi que l'aire restante $R(x)$ en fonction de x.
L'aire de la croix est l'aire d'un rectangle de largeur x et de longueur 4 à laquelle on ajoute l'aire d'un rectangle de largeur 3 et de longueur x auxquels on va retirer l'aire du carré central de côté x :

$$A(x) = 4x + 3x - x^2 = -x^2 + 7x$$
$$R(x) = 3 \times 4 - (-x^2 + 7x) = 12 + x^2 - 7x$$

On cherche les valeurs de x pour lesquelles :

$$\begin{aligned} & A(x) = R(x) \\ \Leftrightarrow & -x^2 + 7x = 12 + x^2 - 7x \\ \Leftrightarrow & -2x^2 + 14x - 12 = 0 \\ \Leftrightarrow & -x^2 + 7x - 6 = 0 \end{aligned}$$

On calcule le discriminant Δ :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 7^2 - 4 \times (-1) \times (-6) = 49 - 24 = 25 > 0$$

Comme le discriminant est positif, il y a deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-7+5}{-2} = 1$$
$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-7-5}{-2} = 6$$

La première solution est celle que nous recherchons ; la seconde est à exclure car la longueur x doit être plus petite que 4 et 3.