∽ Variables aléatoires et loi des grands nombres : interrogation

Exercice 1 *Un jeu consiste à lancer un dé cubique bien équilibré numéroté de 1 à 6. Si le résultat est :*

- ✏ $1, 2$ *ou* 3*, alors on perd* 2 *points ;*
- ✏ 4 *ou* 5*, alors on ne perd ni ne gagne rien ;*
- ✏ 6*, alors on gagne* 3 *points.*

On note G la variable aléatoire qui, à chaque lancer, associe le gain, positif ou négatif, du joueur.

1. *Compléter le tableau qui représente la loi de probabilité de la variable G :*

$G =$	-2	0	3
$P(G =)$			

2. *Calculer E(G).*
3. *Que peut-on remarquer ?*
4. *Quel est l'écart moyen entre les gains obtenus et le gain moyen ?*

Exercice 2 *Un joueur lance n fois une pièce de monnaie parfaitement équilibrée.*
On note F la variable aléatoire qui, à chaque série de n lancers, associe le nombre de côtés « FACE » obtenus.
On admet que F *suit la loi binomiale de paramètres* n *et* $p = 0,5$.

1. *Interpréter l'événement :* $F \geq 2$.
2. *On suppose que* $n = 4$.
   - **a.** *Calculer* $P(F = 0)$ *puis* $P(F = 1)$.
   - **b.** *En déduire la probabilité d'obtenir au moins deux fois le côté « FACE » lors de 4 lancers successifs.*
3. *On suppose désormais que n est un entier naturel non nul quelconque.*
   - **a.** *Calculer en fonction de n :* $P(F = 0)$ *et* $P(F = 1)$.
   - **b.** *Démontrer que :*$P(F \leq 1) = (1 + n)0,5^n$
4. *Le joueur souhaite déterminer le nombre minimal n de lancers pour qu'il obtienne au moins deux fois le côté « FACE » avec une probabilité supérieure ou égale à* $0,999$.
   - **a.** *Montrer que cette condition est équivalente à :* $P(F \leq 1) \leq 0,001$.
   - **b.** *Pour déterminer le nombre minimal de lancers, le joueur a réalisé l'algorithme ci-dessous à compléter :*

$N \leftarrow 0$

While $(1 + N)0,5^N$.....

$\quad N \leftarrow$ ....

Fin du while

Afficher ...

5. *Calculer l'espérance de F ainsi que son écart-type.*
6. *Combien de fois faut il lancer la pièce pour espérer avoir 10 piles ?*

Exercice 3 *Léna prend le bus chaque matin pour se rendre au lycée. Son bus roule à 40 km/h en moyenne sur un trajet de 4 km. Sur son parcours, il y a 8 arrêts de bus. A chaque fois, la probabilité pour que le bus s'arrête est de $0,75$ ce qui lui fait perdre 1 minute. On pose X la variable aléatoire qui, à chaque trajet, associe le nombre de fois que le bus s'arrêtera sur le trajet de Léna. On admet que X suit une loi binomiale.*

1. *Préciser les paramètres n et p de la loi de X.*
2. *Calculer la durée du trajet si le bus n'effectue aucun arrêt.*
3. *Calculer l'espérance de la variable aléatoire X.*
4. *Calculer le temps de parcours moyen pour que Léna se rende au lycée.*
5. *Léna n'a que 11 minutes pour effectuer son trajet lorsqu'elle monte dans le bus.*
   Calculer la probabilité pour qu'elle soit à l'heure.