Limites et dérivations
Correction de l'exemple 1

Exemple 1 *Des gendarmes, mal équipés, tentent de faire des contrôles de vitesse.*
Ils se repartissent en groupes, situés à $1km$ *l'un de l'autre.*
Leur but étant de déterminer la vitesse des automobilistes, en calculant combien de temps il mettent à parcourir le kilomètre séparant les deux groupes.

1. *Un automobiliste met* 2 *minutes à parcourir cette distance. A quelle vitesse roule-t-il ?*
   La formule à appliquer pour obtenir la vitesse cherchée, notée $\bar{v}$*, est :*
   $$\bar{v} = \frac{distance\ parcourue}{durée}$$
   On trouve donc ici :
   $$\bar{v} = \frac{1}{2} = 0.5km/min = 05 \times 60km/h = 30km/h$$
2. *Comment appelle-t-on le type de vitesse obtenue ?*
   Cette vitesse s'appelle vitesse moyenne.
3. *Sachant que la vitesse maximale instantannée autorisée sur le parcours est de* $50km/h$*, est-il en excès de vitesse ?*
   L'automobiliste n'est pas en excès de vitesse.
4. *Un automobiliste voit le premier groupe de gendarmes alors que son compteur indique* $80km/h$*, il se met debout sur les freins et ralentit tellement qu'il met également deux minutes à faire le kilomètre séparant les deux groupes de gendarmes.*
   A quelle vitesse les gendarmes vont-ils le contrôler ? Sera-t-il sanctionné ?
   On cherche à nouveau une vitesse moyenne, il suffit donc de savoir combien de temps l'automobiliste à mis à faire ce kilomètre; il le fait en 2 *minutes, donc la vitesse moyenne est :*
   $$\frac{1}{2} = 0.5km/min = 30km/h$$

5. *En vous basant sur l'exemple précédent, proposer une solution pour que contrôle soit plus efficace.*
Pour que le contrôle soit plus efficace, il faudrait rapprocher les deux groupes de gendarmes, plus ils seront proches, plus la vitesse moyenne obtenue sera proche de la vitesse instantanée.

6. *On appelle, pour $t \in \mathbb{R}$, $d(t)$ la distance parcourue à l'instant t.*
On s'intéresse à la quantité suivante, appelée taux d'accroissement, pour $t \geq 0$:

$$\frac{d(t+\epsilon)-d(t)}{\epsilon}$$

On cherche à déterminer sa valeur quand ϵ se rapproche de 0.
Si on remplace ϵ par 0, quelle opération obtient-on ? A votre avis, quelle sera le résultat de cette opération ?
On va préciser les expressions :

$$d(t+\epsilon)-d(t) = \text{ distance parcourue entre les instants } t \text{ et } t+\epsilon$$
$$\epsilon = \text{ durée écoulée entre } t \text{ et } t+\epsilon$$
$$\frac{d(t+\epsilon)-d(t)}{\epsilon} = \text{ vitesse moyenne entre les instants } t \text{ et } t+\epsilon$$

Si on remplace ϵ par 0, on va donc obtenir la vitesse instantanée en t mais également la valeur :

$$\frac{0}{0}$$

or cette valeur ne peut se simplifier sans autre informations : c'est ce qu'on appelle une forme indéterminée.

7. *On suppose maintenant que :*

$$d(t) = 60t + 500$$

Calculer le taux d'accroissement en t puis déterminer la valeur de ce taux quand ϵ tend vers 0 : on appelle cette quantité limite en 0 si jamais cette valeur existe.
Le chauffeur est-il dans ce cas en excès de vitesse à un moment donné ?

$d(t) = 60t + 500$

$d(t+\epsilon) = 60(t+\epsilon) + 500 = 60t + 60\epsilon + 500$

$d(t+\epsilon) - d(t) = 60t + 60\epsilon + 500 - (60t + 500) = 60t + 60\epsilon + 500 - 60t - 500 = 60\epsilon$

$\dfrac{d(t+\epsilon)-d(t)}{\epsilon} = \dfrac{60\epsilon}{\epsilon} = 60$

La vitesse moyenne de l'automobiliste est donc toujours la même, il roule à vitesse constante de 60km/h (on suppose que la vitesse est en km/h) : il est donc en excès de vitesse à chaque instant.

8. *On suppose maintenant que :*

$$d(t) = 72t^2 + 10t + 500 \text{ avec } t \text{ en heures}$$

Calculer le taux d'accroissement en t puis déterminer la valeur de ce taux quand ϵ tend vers 0.
Si on fait la mesure de la vitesse au bout de 10 *minutes, le chauffeur est-il en excès de vitesse ?*
Si on fait la mesure de la vitesse au bout de 20 *minutes, le chauffeur est-il en excès de vitesse ?*

$d(t) = 72t^2 + 10t + 500$

$d(t+\epsilon) = 72(t+\epsilon)^2 + 10(t+\epsilon) + 500 = 72t^2 + 144t\epsilon + 72\epsilon^2 + 10t + 10\epsilon + 500$

$d(t+\epsilon) - d(t) = 72t^2 + 144t\epsilon + 72\epsilon^2 + 10t + 10\epsilon + 500 - (72t^2 + 10t + 500) = 144t\epsilon$

$\dfrac{d(t+\epsilon)-d(t)}{\epsilon} = \dfrac{144t\epsilon}{\epsilon} = 144t$

La vitesse instantanée dépend ici du temps : l'automobiliste ne roule pas à vitesse constante.
Au bout de 10 *minutes, il roule à la vitesse de* $v\left(\frac{10}{60}\right) = 144 \times \frac{1}{6} = 24km/h$ *: il n'est pas en excès de vitesse.*
Au bout de 20 *minutes, il roule à la vitesse de* $v\left(\frac{20}{60}\right) = 144 \times \frac{1}{3} = 48km/h$ *: il n'est pas en excès de vitesse.*

9. *Que dire des conjectures de la question* 6 *?*
On a bien vérifié que la forme indéterminée $\frac{0}{0}$ dépend des cas de figure : on a trouvé une valeur finie à chaque fois, donc on a pu obtenir une vitesse instantanée à chaque fois.