Fonctions polynômes du second degré : activité

Exemple 1 (Forme canonique) *Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par, respectivement :*

$$f(x) = 2x^2 - x - 1$$
$$g(x) = 2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{9}{8}$$

1. *Montrer que, pour tout réel x, $f(x) = g(x)$.*
2. *En déduire l'extremum éventuel de f. Existe-t-il des fonctions sans extrema ?*
3. *En déduire les éventuelles solutions de l'équation $f(x) = 0$.*
4. *En factorisant $g(x)$ et en faisant un tableau de signes, en déduire le signe de f selon les valeurs de x.*

Exemple 2 (Construction de la forme canonique) *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \longmapsto f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont des réels avec $a \neq 0$.*
On cherche à déterminer la forme canonique de f ; autrement dit, on cherche à écrire f sous la forme :

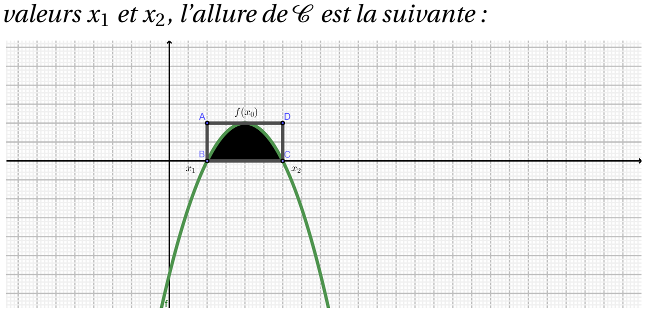
$$f(x) = k(x-\alpha)^2 + \beta$$

On veut également donner une relation entre les coefficients a, b et c et les coefficients k, α et β.

1. *Pourquoi a-t-on supposé que $a \neq 0$?*
2. *Développer $k(x-\alpha)^2 + \beta$.*
3. *En déduire a, b et c en fontion de k, α et β en procédant par identification.*
4. *Exprimer maintenant k, α et β en fontion de a, b et c.*
5. *Sous quelles conditions, l'équation $f(x) = 0$ a des solutions ?*
6. *Sous ces conditions, exprimer les solutions de cette équation en fonction de k, α et β.*
7. *On s'intéresse à la fonction f définie par $f(x) = -3x^2 + 6x - 4$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.*
   a. *Déterminer la forme canonique de f.*
   b. *En déduire l'extremum de f.*
   c. *Résoudre $f(x) = 0$.*
   d. *En déduire le signe de f en fonction des valeurs de x.*
   e. *Même questions avec la fonction $f(x) = 3x^2 + 6x + 3$*

Exemple 3 (Racines et estimation d'une aire) *Soit f la fonction définie définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 4x - 3$.*
On note $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé.

1. *Déterminer les deux solutions x_1 et x_2 de l'équation $f(x) = 0$.*
2. *Quelle est la valeur de f en son extremum x_0 ?*
3. *Entre les valeurs x_1 et x_2, l'allure de $\mathscr{C}$ est la suivante :*



On veut déterminer une valeur approchée de l'aire $\mathscr{A}_{\mathscr{D}}$ de la surface hachurée par la méthode Monte-Carlo.
On choisit un point M au hasard appartenant au rectangle $ABCD$ contenant le domaine $\mathscr{D}$.
La probabilité p qu'un point M choisi comme précédemment appartienne au domaine $\mathscr{D}$ est égale au quotient de l'aire $\mathscr{A}_{\mathscr{D}}$ par l'aire du rectangle $ABCD$.

a. *Exprimer $\mathscr{A}_{\mathscr{D}}$ en fonction de p.*

b. *Pour évaluer p, on va simuler une expérience aléatoire qui consiste à choisir n points $M(x, y)$ au hasard dans le rectangle ABCD; la loi des grands nombres nous permet d'affirmer que, lorsque n est suffisamment grand, la fréquence des points dans le domaine $\mathscr{D}$ parmi les n points approche la valeur p.*

i. *Donner un encadrement de x et de y*

ii. *Compléter l'algorithme suivant qui modélise cette expérience en renvoyant la valeur de la fréquence.*

```
def aire(n):
    c=0
    for i in range(1,n+1):
        x=..+..*random()
        y=..
        if y<=...:
            c=c+..
    return c/..
```

iii. *Tester ce programme sur la calculatrice et donner une valeur approchée de p. Ne pas oublier la première ligne : **"from random import*"**.*