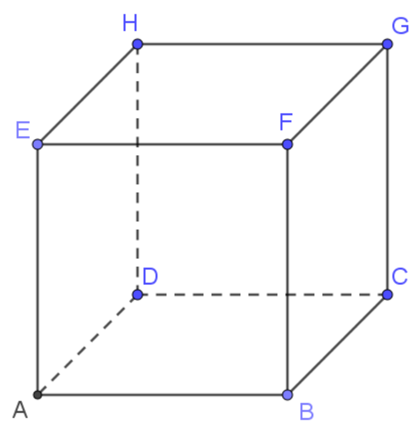
☙ Vecteurs, droites et plans de l'espace 1 : exercices

Exercice 1 *On considère le cube $ABCDEFGH$*



1. *Remplacer les pointillés par le sommet du cube qui convient :*

$$\overrightarrow{B..} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BG}$$
$$\overrightarrow{C..} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DG}$$
$$\overrightarrow{B..} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{GD}$$
$$\overrightarrow{A..} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{BD}$$

2. *Placer le point K tel que $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.*
3. *Placer le point L tel que $\overrightarrow{EL} = \overrightarrow{EH} + \frac{1}{3}\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EA}$.*
4. *Exprimer les vecteurs suivants comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$:*

$$\overrightarrow{AF}$$
$$\overrightarrow{AH}$$
$$\overrightarrow{AG}$$
$$\overrightarrow{EB}$$
$$\overrightarrow{CF}$$
$$\overrightarrow{BH}$$

Exercice 2 *Dans chacun des cas suivants, exprimer le vecteur $\overrightarrow{AB}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AC}$:*

- ✏ $4\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{0}$
- ✏ $2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$

Exercice 3 *Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.*

1. *Les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ tels que $3\overrightarrow{u} + 4\overrightarrow{v} - 2\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$ ne sont pas coplanaires.*
2. *A, B et C sont trois points non alignés. Le point M de l'espace tel que $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB} + 5\overrightarrow{AC}$ appartient au plan (ABC).*

Exercice 4 *A, B et C sont trois points non alignés et D est le point tel que* $-3\overrightarrow{AD}+5\overrightarrow{BD}+2\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{0}$.

1. *Justifier que* $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BD}$ *et* $\overrightarrow{CD}$ *sont coplanaires.*
2. *Justifier que* $\overrightarrow{BD}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$.
3. *Justifier que* $\overrightarrow{CD}=-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$.
4. *En déduire que* $\overrightarrow{AD}=\frac{5}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

Exercice 5 *Dans le tétrèdre $ABCD$, on place les points I et J tels que :*

$$\overrightarrow{AI}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$$
$$\overrightarrow{AJ}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$$

1. *Montrer que* $\overrightarrow{JI}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$
2. *Que peut-on en déduire pour la droite (IJ) et le plan (BCD) ?*

Exercice 6 *Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, puis justifier.*
Soit le cube $ABCDEFGH$.
On se place dans le repère $\left(A;\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BC}\right)$. *Dans ce repère :*

- ✏ *Les coordonnées de A sont* $(0;0;0)$.
- ✏ *Les coordonnées de C sont* $(1;0;1)$.
- ✏ *Les coordonnées de F sont* $(1;1;0)$.
- ✏ *Les coordonnées de G sont* $(1;1;1)$.

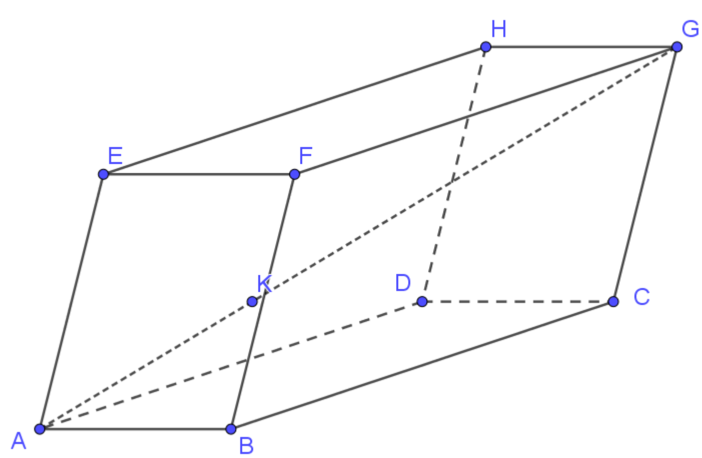
Exercice 7 *Soit* $\overrightarrow{u}(3;1;2)$, $\overrightarrow{w}(3;-2;4)$ *et* $\overrightarrow{w}(-3;8;-8)$.

1. *Calculer les coordonées du vecteur* $2\overrightarrow{u}-3\overrightarrow{v}$.
2. *Justifier que les vecteurs* $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ *et* $\overrightarrow{w}$ *sont coplanaires.*

Exercice 8 *Le point G est tel que* $6\overrightarrow{CG}=4\overrightarrow{CD}+2\overrightarrow{CB}$. *Le point H est tel que* $3\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HD}=\overrightarrow{0}$

1. *Exprimer* $\overrightarrow{CG}$ *en fonction de* $\overrightarrow{CD}$ *et* $\overrightarrow{CB}$.
2. *Exprimer* $\overrightarrow{AH}$ *en fonction de* $\overrightarrow{AD}$.

Exercice 9



$ABCDEFGH$ est un parrallélépipède et K le point de l'espace tel que $\overrightarrow{BK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BE}$.

1. *Démontrer que* $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}=3\overrightarrow{AK}$
2. *Exprimer* $\overrightarrow{AG}$ *en fonction de* $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ *et* $\overrightarrow{AE}$.
3. *En déduire que* A, K *et* G *sont alignés.*

Exercice 10 *$ABCD$ est un tétraèdre.*
Soit les points E, F et G tels que :

$$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$$
$$\overrightarrow{AF}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$$
$$\overrightarrow{AG}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$$

1. *Exprimer* $\overrightarrow{EF}$ *en fonction de* $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ *et* $\overrightarrow{AD}$.
2. *Exprimer* $\overrightarrow{EG}$ *en fonction de* $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ *et* $\overrightarrow{AD}$.
3. *En déduire que* E, F *et* G *sont alignés.*

Exercice 11 *Le point E est tel que* $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$.
Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AC}$ *sont coplanaires.*

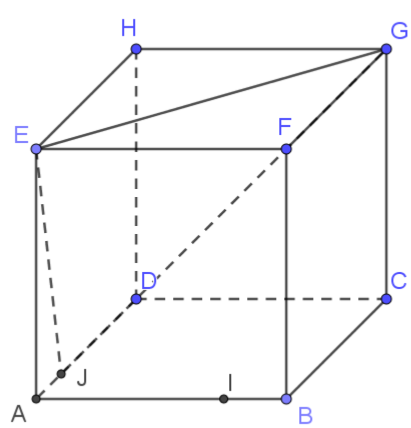
Exercice 12 *$SABCD$ est une pyramide dont la base $ABCD$ est parrallélogramme.*
Les points I et J sont tels que :

$$\overrightarrow{BI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BS}$$
$$\overrightarrow{SJ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{SC}$$

1. *Justifier que les droites (IJ) et (BC) sont parrallèles.*
2. *Démontrer que les droites (AJ) et (DI) sont sécantes.*

Exercice 13 *$ABCDEFGH$ est un cube, I et J sont tels que :*

$$\overrightarrow{AI}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$$
$$\overrightarrow{AJ}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$$



1. *Exprimer les vecteurs* $\overrightarrow{EG}$, $\overrightarrow{EJ}$ *et* $\overrightarrow{IF}$ *en fonction des vecteurs* $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ *et* $\overrightarrow{AE}$.

2. *En déduire que* $\overrightarrow{IF} = \frac{1}{4}\overrightarrow{EG} - \overrightarrow{EJ}$.

3. *Que peut-on dire de la droite* (IF) *et du plan* (EGJ) *?*

4. *Est ce que les points A, J, D, F et G sont alignés ?*

Exercice 14 *$ABCD$ est un tétraèdre.*
On définit les points E, F et G par les égalités :

$$\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{0}$$
$$\overrightarrow{AF} - \overrightarrow{BF} - \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{0}$$
$$\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{DG} = \overrightarrow{0}$$

1. *Que peut-on dire du point E ?*

2. *A quels plans appartiennent les points F et G ? Justifier.*

3. *Exprimer* $\overrightarrow{AE}$ *en fonction de* $\overrightarrow{AD}$.

4. *Exprimer* $\overrightarrow{AF}$ *dans la base* $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$.

5. *En déduire l'expression du vecteur* $\overrightarrow{EF}$ *dans la base* $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)$.

6. *Exprimer* $\overrightarrow{AG}$ *dans la base* $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)$.

7. *En déduire que les points E, F et G sont alignés.*

Exercice 15 *Soit les vecteurs* $\overrightarrow{u}(0;1;2)$, $\overrightarrow{v}(1;1;30)$ *et* $\overrightarrow{w}(-1;3;1)$.

1. *Démontrer que* $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ *est une base de l'espace.*

2. *Déterminer les coordonnées du vecteur* $\overrightarrow{t}(5;-4;5)$ *dans cette base.*

Exercice 16 *Soit* $A(1;2;3)$, $B(4;-5;6)$, $C(0;0;3)$ *et* $D(7;8;-9)$.

1. *Calculer les coordonnées des vecteurs* $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ *et* $\overrightarrow{AD}$

2. *Démontrer que ces vecteurs ne sont pas coplanaires. Que peut-on en déduire pour les points A, B, C et D ?*

3. *Calculer les coordonnées de* I, *milieu de* $[AB]$, *et de* J, *milieu de* $[CD]$.

4. *Les points E et F sont tels que* $IACE$ *et* $IBDF$ *sont des parallélogrammes. Déterminer les coordonnées de E et F.*

5. *Justifier que* J *est le milieu du segment* $[EF]$.