∽ Probabilité et variables aléatoires : exercices

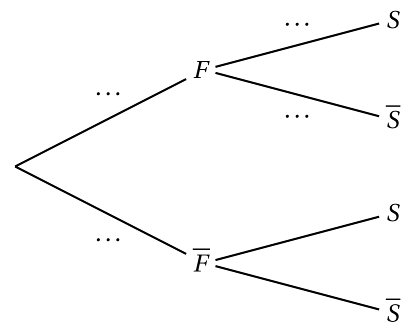
Exercice 1 *Le directeur d'une grande entreprise a proposé à l'ensemble de ses salariés un stage de formation à l'utilisation d'un nouveau logiciel.*
Ce stage a été suivi par 25 % des salariés.

1. a. *Dans cette entreprise, 52 % des salariés sont des femmes, parmi lesquelles 40 % ont suivi le stage.*
On interroge au hasard un salarié de l'entreprise et on considère les évènements :

- *F : « le salarié interrogé est une femme »,*
- *S : « le salarié interrogé a suivi le stage ».*

$\overline{F}$ et $\overline{S}$ désignent respectivement les évènements contraires des évènements F et S.

a. *Donner la probabilité de l'évènement S.*
b. *Recopier et compléter les pointillés de l'arbre pondéré ci-contre sur les quatre branches indiquées.*
c. *Démontrer que la probabilité que la personne interrogée soit une femme ayant suivi le stage est égale à $0,208$.*
d. *On sait que la personne interrogée a suivi le stage. Quelle est la probabilité que ce soit une femme ?*
e. *Le directeur affirme que, parmi les hommes salariés de l'entreprise, moins de 10 % ont suivi le stage.*
Justifier l'affirmation du directeur.



2. a. *On note X la variable aléatoire qui à un échantillon de 20 salariés de cette entreprise choisis au hasard associe le nombre de salariés de cet échantillon ayant suivi le stage. On suppose que l'effectif des salariés de l'entreprise est suffisamment important pour assimiler ce choix à un tirage avec remise.*

i. *Déterminer, en justifiant, la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X.*

ii. *Déterminer, à 10^{-3} près, la probabilité que 5 salariés dans un échantillon de 20 aient suivi le stage.*

iii. *Le programme ci-dessous, écrit en langage Python, utilise la fonction **binomiale**(i, n, p) créée pour l'occasion qui renvoie la valeur de la probabilité $P(X = i)$ dans le cas où la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres n et p.*

```
def proba(k) :
  P=0
  for i in range(0,k+1) :
    P=P+binomiale(i,20,0.25)
  return P
```

Déterminer, à 10^{-3} près, la valeur renvoyée par ce programme lorsque l'on saisit proba(5) dans la console Python.
Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

iv. *Déterminer, à 10^{-3} près, la probabilité qu'au moins 6 salariés dans un échantillon de 20 aient suivi le stage.*

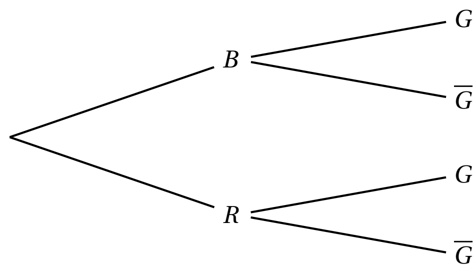
b. *Cette question est indépendante des questions 1 et 2.*
Pour inciter les salariés à suivre le stage, l'entreprise avait décidé d'augmenter les salaires des salariés ayant suivi le stage de 5 %, contre 2 % d'augmentation pour les salariés n'ayant pas suivi le stage.
Quel est le pourcentage moyen d'augmentation des salaires de cette entreprise dans ces conditions ?

Exercice 2 *Lors d'une kermesse, un organisateur de jeux dispose, d'une part, d'une roue comportant quatre cases blanches et huit cases rouges et, d'autre part, d'un sac contenant cinq jetons portant les numéros 1, 2, 3, 4 et 5.*
Le jeu consiste à faire tourner la roue, chaque case ayant la même probabilité d'être obtenue, puis à extraire un ou deux jetons du sac selon la règle suivante :

- *si la case obtenue par la roue est blanche, alors le joueur extrait un jeton du sac;*
- *si la case obtenue par la roue est rouge, alors le joueur extrait successivement et sans remise deux jetons du sac.*

Le joueur gagne si le ou les jetons tirés portent tous un numéro impair.

1. *Un joueur fait une partie et on note B l'évènement « la case obtenue est blanche », R l'évènement « la case obtenue est rouge » et G l'évènement « le joueur gagne la partie ».*
   a. *Donner la valeur de la probabilité conditionnelle $P_B(G)$.*
   b. *On admettra que la probabilité de tirer successivement et sans remise deux jetons impairs est égale à $0,3$.*
   Recopier et compléter l'arbre de probabilité suivant :



2. **a.** *Montrer que $P(G) = 0,4$.*
   b. *Un joueur gagne la partie.*
   Quelle est la probabilité qu'il ait obtenu une case blanche en lançant la roue ?
3. *Les évènements B et G sont-ils indépendants ? Justifier.*
4. *Un même joueur fait dix parties. Les jetons tirés sont remis dans le sac après chaque partie.*
   On note X la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées.
   a. *Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale et préciser ses paramètres.*
   b. *Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-3} près, que le joueur gagne exactement trois parties sur les dix parties jouées.*
   c. *Calculer $P(X \geqslant 4)$ arrondie à 10^{-3} près.*
   Donner une interprétation du résultat obtenu.
5. *Un joueur fait n parties et on note p_n la probabilité de l'évènement « le joueur gagne au moins une partie ».*
   a. *Montrer que $p_n = 1 - 0,6^n$.*
   b. *Déterminer la plus petite valeur de l'entier n pour laquelle la probabilité de gagner au moins une partie est supérieure ou égale à $0,99$.*

Exercice 3 *Les douanes s'intéressent aux importations de casques audio portant le logo d'une certaine marque. Les saisies des douanes permettent d'estimer que :*

- *20 % des casques audio portant le logo de cette marque sont des contrefaçons;*
- *2 % des casques non contrefaits présentent un défaut de conception;*
- *10 % des casques contrefaits présentent un défaut de conception.*

L'agence des fraudes commande au hasard sur un site internet un casque affichant le logo de la marque. On considère les évènements suivants :

- *C : « le casque est contrefait » ;*
- *D : « le casque présente un défaut de conception » ;*
- *$\overline{C}$ et $\overline{D}$ désignent respectivement les évènements contraires de C et D.*

Dans l'ensemble de l'exercice, les probabilités seront arrondies à 10^{-3} si nécessaire.

Partie 1

1. *Calculer $P(C \cap D)$. On pourra s'appuyer sur un arbre pondéré.*
2. *Démontrer que $P(D) = 0,036$.*
3. *Le casque a un défaut. Quelle est la probabilité qu'il soit contrefait ?*

Partie 2

On commande n casques portant le logo de cette marque. On assimile cette expérience à un tirage aléatoire avec remise. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de casques présentant un défaut de conception dans ce lot.

1. *Dans cette question, $n = 35$.*
   - ***a.*** *Justifier que X suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n,\ p)$ où $n = 35$ et $p = 0,036$.*
   - ***b.*** *Calculer la probabilité qu'il y ait parmi les casques commandés, exactement un casque présentant un défaut de conception.*
   - ***c.*** *Calculer $P(X \leqslant 1)$.*
2. *Dans cette question, n n'est pas fixé.*
   Quel doit être le nombre minimal de casques à commander pour que la probabilité qu'au moins un casque présente un défaut soit supérieur à $0,99$?

Exercice 4 *Selon les autorités sanitaires d'un pays, 7 % des habitants sont affectés par une certaine maladie.*
Dans ce pays, un test est mis au point pour détecter cette maladie. Ce test a les caractéristiques suivantes :

- *Pour les individus malades, le test donne un résultat négatif dans $20\,\%$ des cas ;*
- *Pour les individus sains, le test donne un résultat positif dans $1\,\%$ des cas.*

Une personne est choisie au hasard dans la population et testée.
On considère les évènements suivants :

- *M « la personne est malade » ;*
- *T « le test est positif ».*

1. *Calculer la probabilité de l'évènement $M \cap T$. On pourra s'appuyer sur un arbre pondéré.*
2. *Démontrer que la probabilité que le test de la personne choisie au hasard soit positif, est de $0,0653$.*
3. *Dans un contexte de dépistage de la maladie, est-il plus pertinent de connaître $P_M(T)$ ou $P_T(M)$?*
4. *On considère dans cette question que la personne choisie au hasard a eu un test positif.*
   Quelle est la probabilité qu'elle soit malade ? On arrondira le résultat à 10^{-2} près.
5. *On choisit des personnes au hasard dans la population. La taille de la population de ce pays permet d'assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise.*
   On note X la variable aléatoire qui donne le nombre d'individus ayant un test positif parmi les 10 personnes.
   - ***a.*** *Préciser la nature et les paramètres de la loi de probabilité suivie par X.*
   - ***b.*** *Déterminer la probabilité pour qu'exactement deux personnes aient un test positif. On arrondira le résultat à 10^{-2} près.*

6. *Déterminer le nombre minimum de personnes à tester dans ce pays pour que la probabilité qu'au moins l'une d'entre elle ait un test positif, soit supérieur à* 99 %.

Exercice 5 *Une urne contient des jetons blancs et noirs tous indiscernables au toucher.*
Une partie consiste à prélever au hasard successivement et avec remise deux jetons de cette urne.
On établit la règle de jeu suivante :

- *un joueur perd 9 euros si les deux jetons tirés sont de couleur blanche ;*
- *un joueur perd 1 euro si les deux jetons tirés sont de couleur noire ;*
- *un joueur gagne 5 euros si les deux jetons tirés sont de couleurs différentes.*

1. *On considère que l'urne contient 2 jetons noirs et 3 jetons blancs.*
   a. *Modéliser la situation à l'aide d'un arbre pondéré.*
   b. *Calculer la probabilité de perdre* 9 *euros sur une partie.*
2. *On considère maintenant que l'urne contient 3 jetons blancs et au moins deux jetons noirs mais on ne connait pas le nombre exact de jetons noirs. On appellera N le nombre de jetons noirs.*
   a. *Soit X la variable aléatoire donnant le gain du jeu pour une partie.*
   Déterminer la loi de probabilité de cette variable aléatoire.
   b. *Résoudre l'inéquation pour x réel :*

$$-x^2+30x-81>0$$

   c. *En utilisant le résultat de la question précédente, déterminer le nombre de jetons noirs que l'urne doit contenir afin que ce jeu soit favorable au joueur.*
   d. *Combien de jetons noirs le joueur doit-il demander afin d'obtenir un gain moyen maximal ?*
3. *On observe* 10 *joueurs qui tentent leur chance en effectuant une partie de ce jeu, indépendamment les uns des autres. On suppose que 7 jetons noirs ont été placés dans l'urne (avec 3 jetons blancs).*
   Quelle est la probabilité d'avoir au moins 1 *joueur gagnant* 5 *euros ?*

Exercice 6 *Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.*

Au cours de la fabrication d'une paire de lunettes, la paire de verres doit subir deux traitements notés T1 et T2.

Partie A

On prélève au hasard une paire de verres dans la production.
On désigne par A l'évènement : « la paire de verres présente un défaut pour le traitement T1 ».
On désigne par B l'évènement : « la paire de verres présente un défaut pour le traitement T2 ».
On note respectivement $\overline{A}$ et $\overline{B}$ les évènements contraires de A et B.
Une étude a montré que :

- *la probabilité qu'une paire de verres présente un défaut pour le traitement T1 notée $P(A)$ est égale à 0,1.*
- *la probabilité qu'une paire de verres présente un défaut pour le traitement T2 notée $P(B)$ est égale à 0,2.*
- *la probabilité qu'une paire de verres ne présente aucun des deux défauts est* 0,75.

1. *Recopier et compléter le tableau suivant avec les probabilités correspondantes.*

	A	$\overline{A}$	*Total*
B			
$\overline{B}$			
Total			*1*

2. ***a.*** *Déterminer, en justifiant la réponse, la probabilité qu'une paire de verres, prélevée au hasard dans la production, présente un défaut pour au moins un des deux traitements T1 ou T2.*

b. *Donner la probabilité qu'une paire de verres, prélevée au hasard dans la production, présente deux défauts, un pour chaque traitement T1 et T2.*

c. *Les évènements A et B sont-ils indépendants ? Justifier la réponse.*

3. *Calculer la probabilité qu'une paire de verres, prélevée au hasard dans la production, présente un défaut pour un seul des deux traitements.*

4. *Calculer la probabilité qu'une paire de verres, prélevée au hasard dans la production, présente un défaut pour le traitement T2, sachant que cette paire de verres présente un défaut pour le traitement T1.*

Partie B

On prélève, au hasard, un échantillon de 50 paires de verres dans la production. On suppose que la production est suffisamment importante pour assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise.
On note X la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de ce type, associe le nombre de paires de verres qui présentent le défaut pour le traitement T1.

1. *Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale et préciser les paramètres de cette loi.*

2. *Donner l'expression permettant de calculer la probabilité d'avoir, dans un tel échantillon, exactement 10 paires de verres qui présentent ce défaut.*
Effectuer ce calcul et arrondir le résultat à 10^{-3}.

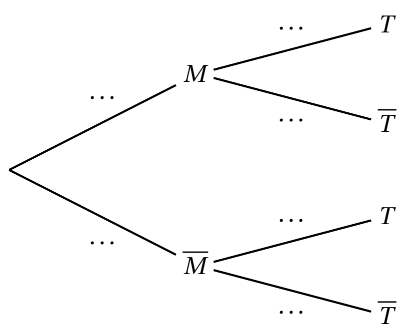
3. *En moyenne, combien de paires de verres ayant ce défaut peut-on trouver dans un échantillon de 50 paires ?*

Exercice 7 *Des vétérinaires capturent un coyote d'Oklahoma au hasard et lui font subir un test pour l'ehrlichiose.*
On considère les évènements suivants :

- *M : « le coyote est malade » ;*
- *T : « le test du coyote est positif ».*

On note $\overline{M}$ et $\overline{T}$ respectivement les évènements contraires de M et T.

1. *Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous qui modélise la situation.*



2. *Déterminer la probabilité que le coyote soit malade et que son test soit positif.*

3. *Démontrer que la probabilité de* T *est égale à* $0,694$.

4. *On appelle « valeur prédictive positive du test » la probabilité que le coyote soit effectivement malade sachant que son test est positif.*

Calculer la valeur prédictive positive du test. On arrondira le résultat au millième.

5. ***a.*** *Par analogie avec la question précédente, proposer une définition de la « valeur prédictive négative du test » et calculer cette valeur en arrondissant au millième.*

b. *Comparer les valeurs prédictives positive et négative du test, et interpréter.*

Partie B

On rappelle que la probabilité qu'un coyote capturé au hasard présente un test positif est de $0,694$.

1. *Lorsqu'on capture au hasard cinq coyotes, on assimile ce choix à un tirage avec remise.*

On note X *la variable aléatoire qui à un échantillon de cinq coyotes capturés au hasard associe le nombre de coyotes dans cet échantillon ayant un test positif.*

a. *Quelle est la loi de probabilité suivie par* X *? Justifier et préciser ses paramètres.*

b. *Calculer la probabilité que dans un échantillon de cinq coyotes capturés au hasard, un seul ait un test positif. On arrondira le résultat au centième.*

c. *Un vétérinaire affirme qu'il y a plus d'une chance sur deux qu'au moins quatre coyotes sur cinq aient un test positif : cette affirmation est-elle vraie ? Justifier la réponse.*

2. *Pour tester des médicaments, les vétérinaires ont besoin de disposer d'un coyote présentant un test positif. Combien doivent-ils capturer de coyotes pour que la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux présente un test positif soit supérieure à* $0,99$ *?*