☙ Équations différentielles du second ordre : résumé

1 Premier ordre

1.1 Second membre constant

$$\begin{aligned} (E) \quad & ay' + by = c \\ (E_0) \quad & ay' + by = 0 \end{aligned}$$

avec $a, b \neq 0$.

1. On résout l'équation (E_0) : les solutions sont de la forme $Ke^{-\frac{b}{a}t}$ avec K une constante réelle.
2. On trouve une solution constante de (E) : c'est $\frac{c}{b}$.
3. On exprime les solutions de (E) : ce sont les fonctions de la forme $Ke^{-\frac{b}{a}t} + \frac{c}{b}$ avec K une constante réelle.
4. On détermine la valeur de K qui correspond à la condition initiale $f(0) = d$.
   On remplace t par 0 dans $Ke^{-\frac{b}{a}t} + \frac{c}{b}$:

$$\begin{aligned} & Ke^{-\frac{b}{a}\times 0} + \frac{c}{b} = d \\ \Leftrightarrow & K + \frac{c}{b} = d \\ \Leftrightarrow & K = d - \frac{c}{b} \end{aligned}$$

1.2 Second membre non constant

$$\begin{aligned} (E) \quad & ay' + by = c(t) \\ (E_0) \quad & ay' + by = 0 \end{aligned}$$

avec $a, b \neq 0$.

1. On résout l'équation (E_0) : les solutions sont de la forme $Ke^{-\frac{b}{a}t}$ avec K une constante réelle.

2. On nous demande de vérifier que la fonction $h(t)$ donnée par l'énoncé vérifie (E).
On calcule :

$$ah'(t) + bh(t)$$

et en simplifiant cette expression, on doit tomber sur $c(t)$.

3. On exprime les solutions de (E) : ce sont les fonctions de la forme $Ke^{-\frac{b}{a}t} + h(t)$ avec K une constante réelle.

4. On détermine la valeur de K qui correspond à la condition initiale $f(0) = d$.
On remplace t par 0 dans $Ke^{-\frac{b}{a}t} + h(t)$:

$$\begin{aligned} & Ke^{-\frac{b}{a}\times 0} + h(0) = d \\ \Leftrightarrow & K + h(0) = d \\ \Leftrightarrow & K = d - h(0) \end{aligned}$$

2 Second ordre

2.1 Second membre constant

$$\begin{aligned} (E) \quad & ay'' + by' + cy = d \\ (E_0) \quad & ay'' + by' + cy = 0 \end{aligned}$$

avec $a, b, c \neq 0$.

1. On résout l'équation (E_0).
Pour la résoudre, il faut d'abord résoudre l'équation caractéristique :

$$ar^2 + br + c = 0$$

✏ Si $\Delta > 0$, alors il y a deux solutions réelles distinctes à l'équation caractéristique : r_1 et r_2.
Les solutions de (E_0) sont de la forme $Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$ avec A, B des constantes réelles.

✏ Si $\Delta = 0$, alors il y a une solution double : r_0.
Les solutions de (E_0) sont de la forme $(At + B)e^{r_2 t}$ avec A, B des constantes réelles.

✏ Si $\Delta < 0$, alors il y a deux solutions complexes conjuguées à l'équation caractéristique : $\alpha + \beta i$ et $\alpha - \beta i$.
Les solutions de (E_0) sont de la forme $e^{\alpha t}\big(A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t)\big)$ avec A, B des constantes réelles.

2. On trouve une solution constante de (E) : c'est $\frac{d}{c}$.
3. On exprime les solutions de (E) : ce sont les fonctions de la forme "solution de l'équation (E_0)+$\frac{d}{c}$" avec A, B des constantes réelles.

2.2 Second membre non constant

$$\begin{array}{ll} (E) & ay'' + by' + cy = d(t) \\ (E_0) & ay'' + by' + cy = 0 \end{array}$$

avec $a, b, c \neq 0$.

1. On résout l'équation (E_0).
   Pour la résoudre, il faut d'abord résoudre l'équation caractéristique :

   $$ar^2 + br + c = 0$$

   - ✏ Si $\Delta > 0$, alors il y a deux solutions réelles distinctes à l'équation caractéristique : r_1 et r_2.
     Les solutions de (E_0) sont de la forme $Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$ avec A, B des constantes réelles.
   - ✏ Si $\Delta = 0$, alors il y a une solution double : r_0.
     Les solutions de (E_0) sont de la forme $(At + B)e^{r_2 t}$ avec A, B des constantes réelles.
   - ✏ Si $\Delta < 0$, alors il y a deux solutions complexes conjuguées à l'équation caractéristique : $\alpha + \beta i$ et $\alpha - \beta i$.
     Les solutions de (E_0) sont de la forme $e^{\alpha t}\left(A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t)\right)$ avec A, B des constantes réelles.
2. On nous demande de vérifier que la fonction $h(t)$ donnée par l'énoncé vérifie (E).
   On doit simplifier l'expression :

   $$ah''(t) + bh'(t) + ch(t)$$

   et, sauf erreurs de calculs, on doit tomber sur $d(t)$.
3. On exprime les solutions de (E) : ce sont les fonctions de la forme "solution de l'équation (E_0)+$h(t)$" avec A, B des constantes réelles.