Évaluation du 03/01/2023

Exercice 1 *On considère trois points de l'espace :*

$$A(1;1;1) \quad B(1;2;3) \quad C(3;2;1)$$

1. *Justifier rapidement que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ forme un plan.*
   On calcule les coordonnées des deux vecteurs :

$$\overrightarrow{AB}(1-1;2-1;3-1) = (0;1;2)$$
$$\overrightarrow{AC}(3-1;2-1;1-1) = (2;1;0)$$

   Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires car leur coordonnées ne sont pas proportionnelles.
   Ces deux vecteurs forment donc un plan.

2. *Déterminer un vecteur normal du plan (ABC).*
   Appelons $\vec{n}(x;y;z)$ un vecteur normal de ce plan.
   Il suffit qu'il soit normal à deux vecteurs non colinéaires de ce plan ; on va choisir les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$:

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB}.\vec{n} = 0 \\ \overrightarrow{AC}.\vec{n} = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0x + 1y + 2z = 0 \\ 2x + y + 0z = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = -\frac{1}{2}y \\ x = -\frac{1}{2}y \end{cases}$$

   Finalement, le vecteur $\vec{n}$ a ses coordonnées de la forme $\left(-\frac{1}{2}y; y; -\frac{1}{2}y\right)$.
   On choisit comme vecteur $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $(1;-2;1)$.

3. *En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).*
   Un point $M(x;y;z)$ appartient au plan (ABC) si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux :

$$\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)\times 1 + (y-1)\times(-2) + (z-1)\times 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow x - 1 - 2y + 2 + z - 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow x - 2y + z = 0$$

4. *Est ce que le point $D(1;3;2)$ appartient au plan (ABC) ?*
   Il faut vérifier si les coordonnées de D vérifient l'équation cartésienne du plan (ABC) :

$$x_D - 2y_D + z_D = 1 - 2\times 3 + 2 = -3 \neq 0$$

   Par conséquent, le point D n'appartient pas au plan (ABC).

5. *Donner une équation paramétrique de la droite (AD).*
Une représentation paramétrique de la droite (AD) est de la forme :

$$\begin{cases} x = x_A + tu_x \\ y = y_A + tu_y \\ z = z_A + tu_z \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

avec $\vec{u}(u_x, u_y, u_z)$ un vecteur directeur de (AD).
Comme vecteur directeur de (AD), on peut choisir le vecteur $\overrightarrow{AD}$ dont les coordonnées sont $(0;2;1)$.
On en déduit qu'une représentation paramétrique de la droite (AD) est :

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + 2t \\ z = 1 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Exercice 2 *Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par*

$$f(x) = x\ln(x) + 1$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. *Déterminer la limite de la fonction f en 0 ainsi que sa limite en $+\infty$. Aucune justification demandée.*
Par croissance comparée, on peut écrire que :

$$\lim_{x \to +\infty} x\ln(x) + 1 = +\infty$$

Par produit de limites, on en déduit que :

$$\lim_{x \to 0} x\ln(x) = 1$$

donc par somme de limites $\lim_{x \to 0} x\ln(x) + 1 = 0$

2. *On admet que f est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ et on notera f' sa fonction dérivée. Calculer $f'(x)$.*

$$f'(x) = (x\ln(x) + 1)' = (x\ln(x))' + 0 = x'\ln(x) + x \times (\ln(x))' = 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} = \ln(x) + 1$$

3. *En déduire le tableau de variation de la fonction f sur $]0\ ;\ +\infty[$. On y fera figurer la valeur exacte de l'extremum de f sur $]0\ ;\ +\infty[$ et les limites.*
On doit d'abord le signe de la dérivée $f'(x)$ sur $]0\ ;\ +\infty[$:

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \ln(x) + 1 \geq \ln(x) \geq -1 \Leftrightarrow x \geq e^{-1}$$

On en déduit le tableau de variations suivant :

x	0		e^{-1}		$+\infty$
$f(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	0	$\searrow$	$1-\frac{1}{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

La valeur 1 dans le tableau se trouve en remplaçant x par e^{-1} dans $f(x)$:

$$f(e^{-1}) = e^{-1}\ln(e^{-1}) + 1 = e^{-1} \times (-1) + 1 = 1 - \frac{1}{e}$$

4. *Justifier qu'il n'existe aucune solution α à l'équation $f(x) = 0$.*
La fonction f est continue sur $]0;+\infty[$.
Sur l'intervalle $]0;e^{-1}]$, la fonction est décroissante de 1 à $1-\frac{1}{e} > 0$: elle ne peut donc par passer par 0. Si elle passait par 0, le théorème des valeurs intermédiaires nous dirait qu'elle passerait par toutes les valeurs de $]0;1-\frac{1}{e}[$, ce qui n'est pas le cas d'après le tableau de variations.
Sur l'intervalle $[e^{-1};+\infty[$, la fonction est croissante de $1-\frac{1}{e} > 0$ à $+\infty$: elle ne peut donc par passer par 0. Si elle passait par 0, le théorème des valeurs intermédiaires nous dirait qu'elle passerait par toutes les valeurs de $]0;1-\frac{1}{e}[$, ce qui n'est pas le cas d'après le tableau de variations.