Transformées de Laplace
Aide pour l'évaluation

On considère l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} y'(t)+4y(t)=(t-1)\mathscr{U}(t-1) \\ y(0)=1 \end{cases}$$

On appelle $Y(p)$ la transformée de Laplace de $y(t)$. On rappelle les formules suivantes :

$$(t-1)\mathscr{U}(t-1) \xrightarrow{Laplace} \frac{e^{-p}}{p^2}$$
$$y'(t) \xrightarrow{Laplace} pY(p)-y(0)=pY(p)-1$$

On transforme par Laplace l'équation différentielle de départ :

$$y'(t)+4y(t)=(t-1)\mathscr{U}(t-1)$$
$$\text{devient } pY(p)-1+4Y(p)=\frac{e^{-p}}{p^2}$$

L'objectif est alors d'isoler $Y(p)$, on va passer le -1 à droite et mettre $Y(p)$ en facteur :

$$pY(p)-1+4Y(p)=\frac{e^{-p}}{p^2}$$
$$\text{devient } pY(p)+4Y(p)=\frac{e^{-p}}{p^2}+1 \text{ en passant à droite } -1$$
$$\text{mise en facteur } (p+4)Y(p)=\frac{e^{-p}}{p^2}+1$$
$$Y(p)=\frac{e^{-p}}{(p+4)p^2}+\frac{1}{p+4}$$

On a distribué la division par $(p+4)$: on a divisé chaque membre de droite par $(p+4)$.
L'expression du membre de droite ne permet pas de trouver les originaux facilement.
L'énoncé nous proposerait de montrer l'égalité suivante :

$$\frac{e^{-p}}{(p+4)p^2}+\frac{1}{p+4}=\frac{1}{16}\times\frac{e^{-p}}{p+4}-\frac{1}{16}\frac{e^{-p}}{p}+\frac{1}{4}\times\frac{e^{-p}}{p^2}+\frac{1}{p+4}$$

On ne touche pas au dernier terme de chaque côté de l'égalité. On part de la partie de droite :

$$\frac{1}{16}\times\frac{e^{-p}}{p+4}-\frac{1}{16}\frac{e^{-p}}{p}+\frac{1}{4}\times\frac{e^{-p}}{p^2}$$
$$=\frac{1}{16}\times\frac{e^{-p}}{p+4}\times\frac{p^2}{p^2}-\frac{1}{16}\frac{e^{-p}}{p}\times\frac{p(p+4)}{p(p+4)}+\frac{1}{4}\times\frac{e^{-p}}{p^2}\times\frac{4(p+4)}{4(p+4)}$$

On aura ainsi au dénominateur le denominateur commun : $16p^2(p+4)$:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{16}\times\frac{e^{-p}}{p+4}-\frac{1}{16}\frac{e^{-p}}{p}+\frac{1}{4}\times\frac{e^{-p}}{p^2}\\
=&\frac{e^{-p}\left(p^2-p(p+4)+4(p+4)\right)}{16p^2(p+4)}\\
=&\frac{e^{-p}\left(p^2-p^2-4p+4p+16)\right)}{16p^2(p+4)}\\
=&\frac{e^{-p}\,(16)}{16p^2(p+4)}\\
=&\frac{e^{-p}\,(1)}{p^2(p+4)}\\
=&\frac{e^{-p}}{(p+4)p^2}
\end{aligned}$$

Il reste maintenant à déterminer l'original de chacun des fonctions des membres de droite :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{16}\times\frac{e^{-p}}{p+4} &\xrightarrow{Laplaceinverse} \frac{1}{16}e^{-4(t-1)}\mathscr{U}(t-1)\\
-\frac{1}{16}\frac{e^{-p}}{p} &\xrightarrow{Laplaceinverse} -\frac{1}{16}\mathscr{U}(t-1)\\
\frac{1}{4}\times\frac{e^{-p}}{p^2} &\xrightarrow{Laplaceinverse} \frac{1}{4}(t-1)\mathscr{U}(t-1)\\
\frac{1}{p+4} &\xrightarrow{Laplaceinverse} e^{-4t}\mathscr{U}(t)
\end{aligned}$$

La solution de l'équation différentielle est la somme des originaux que nous venons de déterminer :

$$y(t)=\frac{1}{16}e^{-4(t-1)}\mathscr{U}(t-1)-\frac{1}{16}\mathscr{U}(t-1)+\frac{1}{4}(t-1)\mathscr{U}(t-1)+e^{-4t}\mathscr{U}(t)$$