Primitives et équations différentielles : cours

1 Équation différentielles et primitives

1.1 Équations différentielles

Définition

Une équation différentielle est une équation reliant une fonction et ses dérivées.

Exemple 1 1. *L'équation $f'(x) = 6$ peut se noter $y' = 6$ en posant $y = f(x)$: c'est bien une équation différentielle.*
Une solution de cette équation est $y = 6x$ car $(6x)' = 6$.

2. *L'équation $f'(x) = 4x$ est une équation différentielle et une solution en est $y = 2x^2$ mais également $y = 2x^2 + 1$:*

$$\left(2x^2\right)' = 2\left(x^2\right)' = 2 \times 2x = 4x$$
$$\left(2x^2+1\right)' = 2\left(x^2\right)' + (1)' = 2 \times 2x + 0 = 4x$$

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On dit que la fonction g est une solution de l'équation différentielle sur I si et seulement si, g est dérivable sur I et, pour tout réel x de I, on a :

$$g'(x) = f(x)$$

Exemple 2 *Prouver que la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = 5x^4 - 3\ln(x)$ est solution de l'équation différentielle :*

$$y' = 20x^3 - \frac{3}{x}$$

Il suffit de vérifier que la dérivée de g est bien $20x^3 - \frac{3}{x}$. On a :

$$g'(x) = \left(5x^4 - 3\ln(x)\right)' = 5\left(x^4\right)' - 3\left(\ln(x)\right)' = 5 \times 4x^3 - 3 \times \frac{1}{x} = 20x^3 - \frac{3}{x}$$

1.2 Primitives

Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.
On appelle primitive de f sur I, une fonction F dérivable sur I telle que $F' = f$.

Propriété

Il y a équivalence entre **f est la dérivée de F** et **F est une primitive de f**.
On emploie l'article **la** car la dérivée d'une fonction est unique tandis qu'on emploie l'article **une** car les primitives sont uniques à une constante près; si F est une primitive de f alors pour tout nombre réel k, $F + k$ est une primitive de f.

Primitives des fonctions usuelles

Fonction	Une primitive
$f(x) = a\ ,\ \ a \in \mathbb{R}$	$F(x) = ax$
$f(x) = x^n\ ,\ n \in \mathbb{N}^*$	$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$F(x) = -\frac{1}{x}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln(x)$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x}$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x$

Propriété

Soient f et g deux fonctions continues sur intervalle I.
Si F est une primitive de f et G est une primitive de g sur I alors :

- ✏ $F + G$ est une primitive de $f + g$.
- ✏ kF est une primitive de kf avec k réel.

Opérations et fonctions composées

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.

Fonction	Une primitive
$2u'u$	u^2
$u'e^u$	e^u
$\frac{u'}{u}$	$\ln(u)$

Pour la dernière ligne, il est nécessaire que $u(x) > 0$ sur I.

Exemple 3 (Recherche de primitives) *Déterminer une primitive F de f sur I :*

$$f_1(x) = x^3 - 2x \quad I = \mathbb{R}$$
$$f_2(x) = 3x^2 - \frac{3}{x^2} \quad I =]0;+\infty[$$
$$f_3(x) = (2x-5)(x^2-5x+4) \quad I = \mathbb{R}$$
$$f_4(x) = xe^{x^2} \quad I = \mathbb{R}$$
$$f_5(x) = \frac{x^2}{x^3+1} \quad I =]0;+\infty[$$

$$F_1(x) = \frac{x^4}{4} - x^2$$
$$F_2(x) = x^3 + \frac{3}{x}$$
$$F_3(x) = \frac{1}{2}(x^2-5x+4)^2$$
$$F_4(x) = \frac{1}{2}e^{x^2}$$
$$F_5(x) = \frac{1}{3}\ln(x^3+1)$$

Propriété

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.
Si F est une primitive de f sur I alors pour tout réel C, la fonction $F(x)+C$ est une primitive de f sur I.

Propriété

Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives sur cet intervalle.

Remarque 1 *Le fait qu'une primitive existe pour chaque fonction continue sur I ne signifie pas pour autant que son expression est explicite et facile à trouver.*
C'est le cas pour la fonction $f(x)=e^{-x^2}$ qui admet des primitives dont on ne connait pas d'expression simple.

2 Résolution de certaines équations différentielles

2.1 Équations différentielles du type $y'=ay$

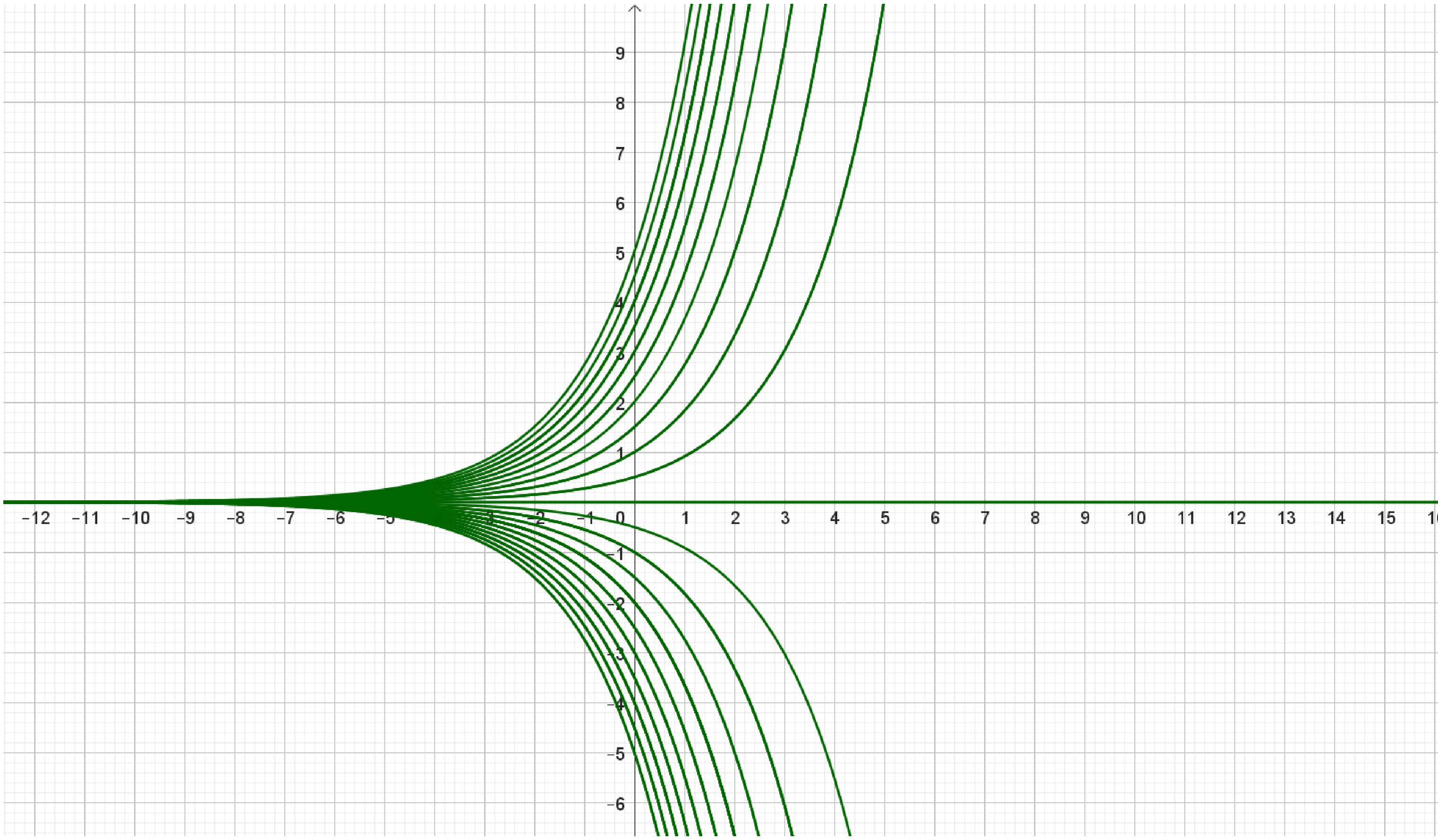
Propriété

Les solutions de l'équation différentielle $y'=ay$, avec $a\in\mathbb{R}$, sont les fonctions de la forme $x\to Ce^{ax}$, où la constante C est nombre réel quelconque ; ce nombre pourra être déterminé par des conditions initiales.

Exemple 4 (Résolution d'une équation différentielle du type $y'=ay$) *Soit l'équation différentielle :*

$$5y'+3y=0$$

On cherche les solutions f de cette équation qui vérifient $f(1)=3$.
L'équation $5y'+3y=0$ est équivalente à la suivante $y'=-\frac{3}{5}y$.
D'après la propriété précédente, on en déduit que les solutions de l'équation différentielle proposée sont de la forme $f_k(x)=ke^{-\frac{3}{5}x}$.
Graphiquement, cela correspond aux différentes courbes suivantes :



On cherche les courbes qui passent par 3 *en* 1*, ce qui revient à résoudre l'équation :*

$$\begin{aligned}
& f_k(1) = 3 \\
\Leftrightarrow & k e^{-\frac{3}{5}\times 1} = 3 \\
\Leftrightarrow & k = 3e^{\frac{3}{5}} \\
\Leftrightarrow & f_k(x) = 3e^{\frac{3}{5}} e^{-\frac{3}{5}x} \\
\Leftrightarrow & f_k(x) = 3e^{\frac{3}{5}(1-x)}
\end{aligned}$$

On constate qu'il n'y a qu'une solution solution : la présence d'une condition initiale implique l'unicité de la solution.

Propriété

Si f et g sont deux solutions de l'équation différentielle homogène $y' = ay$, avec $a \in \mathbb{R}$, alors $f + g$ et kf, avec $k \in \mathbb{R}$, sont également des solutions de l'équation différentielle homogène.

2.2 Équations différentielles du type $y' = ay + b$

Propriétés

1. Quand $a \neq 0$, une solution constante de $y' = ay + b$ est la fonction $x \to -\frac{b}{a}$.
2. Quand $a \neq 0$, les solutions de $y' = ay + b$ sont de la forme $x \to ke^{ax} - \frac{b}{a}$ avec $k \in \mathbb{R}$.
   Ces solutions sont la somme des solutions de l'équation $y' = ay$ et de la fonction constante $x \to -\frac{b}{a}$.

Remarque 2 (Résoudre une équation différentielle du type $y' = ay + b$ **)** *Déterminer l'unique solution de l'équation :*

$$\begin{cases} 3y' - 2y = -7 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

On écrit l'équation de façon à ce qu'elle ressemble à celle de la propriété précédente :

$$3y' - 2y = -7 \Leftrightarrow y' = \frac{2}{3}y - \frac{7}{3}$$

Cette équation a pour solutions les fonctions de la forme $f_k(x) = ke^{\frac{2}{3}x} - \frac{-\frac{7}{3}}{\frac{2}{3}} = ke^{\frac{2}{3}x} + \frac{7}{2}$ *avec* $k \in \mathbb{R}$.
Il reste à exploiter la condition initiale :

$$\begin{aligned} f_k(0) = 1 &\Leftrightarrow ke^{\frac{2}{3}\times 0} + \frac{7}{2} = 1 \\ &\Leftrightarrow ke^0 = 1 - \frac{7}{2} \\ &\Leftrightarrow k \times 1 = -\frac{5}{2} \\ &\Leftrightarrow k = -\frac{5}{2} \end{aligned}$$

Finalement la fonction cherchée est $f(x) = -\frac{5}{2}e^{\frac{2}{3}x} + \frac{7}{2}$.