Suites : exercice

Exercice 1 *Soit (u_n) la suite numérique définie sur $\mathbb{N}$ par :*

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 \end{cases}$$

1. *Montrer par récurrence que $0 \leq u_n \leq n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.*
2. *En déduire que u_n est croissante.*
3. *Quelle est sa limite ?*
4. *Compléter la fonction Python ci-dessous pour qu'elle retourne le premier terme de la suite strictement supérieur à 4.*

```python
def démarrer_1(n):
    u=0
    n=0
    while ...:
        u=(2/3)*u+(1/3)*n+1
        n=n+1
    return ...
```

5. *Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ u_n = n$.*

Exercice 2 *Déterminer les limites des suites suivantes :*

$$a_n = n^2 + 5 \quad b_n = -2n^2$$
$$c_n = n^2 + 3n \quad d_n = -n^3 + 5$$
$$e_n = 5n^2 + 2\sqrt{n} + 1 \quad f_n = -n^2 - 2n + 150$$
$$g_n = -n^3 \times \left(3n^2 + 4\right) \quad h_n = \left(-7 + \frac{2}{\sqrt{n}}\right)(n+1)$$
$$i_n = \frac{n^2}{-3 + \frac{1}{\sqrt{n}}} \quad j_n = \frac{\frac{5}{n} + 9}{-3 + \frac{2}{n^2}}$$

Exercice 3 *Soit (u_n) la suite définie pour tout eniter naturel n par :*

$$u_n = -n^2 + 6\cos(n)$$

1. *Donner un encadrement de $\cos(n)$.*
2. *En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n \leq -n^2 + 6$.*
3. *En déduire la limite de la suite (u_n).*

Exercice 4 *Déterminer la limite, si elle existe, de chaque suite (u_n) :*

$$u_n = -25\left(\frac{5}{6}\right)^n$$
$$u_n = -7\left(\sqrt{n}\right)^n$$
$$u_n = -2\left(\frac{10}{7}\right)^n$$
$$u_n = (-\pi)^n$$
$$u_n = 3^{n+1}$$

Exercice 5 *Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :*

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6} \end{cases}$$

1. *Montrer par récurrence que pour tout eniter naturel n, $0 \leq u_n \leq 3$.*
2. *Montrer que la suite (u_n) est croissante.*
3. *Est ce que la suite est convergente ?*

Exercice 6 *Déterminer les limites des suites suivantes :*

$$\begin{aligned}
&a_n = n^2 - 2n \quad b_n = -3n^2 + 6n + 7\\
&c_n = n^3 - 3n^2 + 2n - 5 \quad d_n = \frac{3n+5}{n^2-4} \quad \textit{pour } n > 2\\
&e_n = \frac{-2n^2+3n+1}{3n^2+5n} \quad f_n = \frac{n^2+n+5}{n}\\
&g_n = -n^2 + \cos(n) \quad h_n = \frac{n - \sin(n)}{n^2+1}\\
&i_n = \frac{-n+(-1)^n}{2n-(-1)^n} \quad j_n = \frac{n^2+(-1)^2\sqrt{n}}{n}
\end{aligned}$$

Exercice 7 *On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n :*

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{3u_n+1}{2u_n+4} \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

1. *Montrer que pour tout entier naturel n, u_n est supérieur ou égal à 0.*
2. *On introduit la suite auxiliaire (t_n) définie pour tout entier naturel n par :*

   $$t_n = \frac{2u_n - 1}{u_n + 1}$$

   Montrer que la suite (t_n) est géométrique de raison $\frac{2}{5}$.
3. *Expliciter t_n pour tout entier naturel n.*
4. *En déduire l'expression explicite de u_n en fonction de n pour tout entier naturel n.*
5. *En déduire la convergence de la suite (u_n) et donner sa limite.*

Exercice 8 *On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ par*

$$g(x) = 2x - x^2.$$

1. *Montrer que la fonction g est strictement croissante sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ et préciser les valeurs de $g(0)$ et de $g(1)$.*

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases} , \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

2. *Calculer u_1 et u_2.*
3. *Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $0 < u_n < u_{n+1} < 1$.*
4. *En déduire que la suite (u_n) est convergente.*
5. *Déterminer la limite ℓ de la suite (u_n).*