☙ Révisions pour le CCF : correction

1. Déterminer l'écriture binaire de 134.
   On écrit les divisions successives par 2 :

$$\begin{aligned}
&134 = 2 \times 67 + 0\\
&67 = 2 \times 33 + 1\\
&33 = 2 \times 16 + 1\\
&16 = 2 \times 8 + 0\\
&8 = 2 \times 4 + 0\\
&4 = 2 \times 2 + 0\\
&2 = 2 \times 1 + 0\\
&1 = 2 \times 0 + 1
\end{aligned}$$

   On obtient donc l'égalité suivante : $134 = \overline{10000110}^{2}$

2. Déterminer l'écriture hexadécimal de 965.
   On écrit les divisons successives par 16 en utilisant la calculatrice :

$$\begin{aligned}
&965 = 16 \times 60 + 5\\
&60 = 16 \times 3 + 12\\
&3 = 16 \times 0 + 3
\end{aligned}$$

   On obtient donc l'égalité suivante : $965 = \overline{3C5}^{16}$.

3. Quelle est le pourcentage d'augmentation entre 25000 et 26500 ?
   On fait le calcul suivant :

$$\frac{26500 - 25000}{25000} \times 100 = 6\%$$

4. Quelle est le pourcentage de diminution entre 25000 et 24000 ?
   On fait le calcul suivant :

$$\frac{25000 - 24000}{25000} \times 100 = 4\%$$

5. Résoudre l'équation suivante :

$$\frac{x-4}{2} = \frac{2x+3}{4}$$

   On est ramené à la résolution de cette équation :

$$\begin{aligned}
&2(2x+3) = 4(x-4)\\
\Leftrightarrow &4x + 6 = 4x - 16\\
\Leftrightarrow &4x - 4x = -16 - 6\\
\Leftrightarrow &0 = -22
\end{aligned}$$

   Ce résultat est absurde : cela signifie que l'équation n'a pas de solution.

6. Donner l'écriture algébrique de $\frac{2+i}{2-5i}$.
On va multiplier le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur :

$$\frac{2+i}{2-5i} = \frac{(2+i)(2+5i)}{(2-5i)(2+5i)} = \frac{4+10i+2i+5i^2}{2^2+5^2} = \frac{4+12i-5}{29} = -\frac{1}{29} + \frac{12}{29}i$$

7. Donner l'écriture algébrique de $\frac{4-5i}{3+2i}$.

$$\frac{4-5i}{3+2i} = \frac{(4-5i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)} = \frac{12-15i-8i+10i^2}{3^2+2^2} = \frac{12-23i-10}{13} = \frac{2}{13} - \frac{23}{13}i$$

8. Donner l'écriture trigonométrique de $4-3i$.
On commence par calculer le module :

$$|z| = \sqrt{4^2+3^2} = 5$$

Ensuite on exprime le cosinus et le sinus de l'argument θ :

$$\cos(\theta) = \frac{4}{5}$$
$$\sin(\theta) = -\frac{3}{5} < 0$$

Comme le sinus est négatif, alors $\theta = \arccos\left(\frac{4}{5}\right) \approx 37°$.
Donc :

$$z = 5\left(\cos(37) + i\sin(37)\right)$$

9. Donner l'écriture algébrique de $(4-3i)(2+4i)$.

$$(4-3i)(2+4i) = 4\times 2 + 4\times 4i - 3i\times 2 - 3i\times 4i = 8+16i-6i-12i^2 = 8+10i+12 = 20+10i$$

10. Donner l'écriture géométrique de :

$$\frac{12\left(\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)}{4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)\right)}$$

$$\frac{12\left(\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)}{4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)\right)} = \frac{12}{4}\left(\cos\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{8}\right)\right) = 3\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

11. Calculer la dérivée de $5x^3-3x^2+2x+6$.

$$(5x^3-3x^2+2x+6)' = 5\times 3x^2 - 3\times 2x + 2\times 1 + 0 = 15x^2-6x+2$$

12. Calculer la dérivée de $\frac{\ln(x)}{x}$.

$$\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)' = \frac{\ln(x)'\times x - \ln(x)\times x'}{x^2} = \frac{\frac{1}{x}'\times x - \ln(x)\times 1}{x^2} = \frac{1-\ln(x)}{x^2}$$

13. Calculer la dérivée de $x\ln(x)$.

$$(x\ln(x))' = x' \times \ln(x) + x \times \left(\frac{1}{x}\right)' = 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} = \ln(x) + 1$$

14. Calculer la dérivée de $x^2\ln(x)$.

$$\left(x^2\ln(x)\right)' = (x^2)' \times \ln(x) + x^2 \times (\ln(x))' = 2x\ln(x) + x^2 \times \frac{1}{x} = 2x\ln(x) + x$$

15. Calculer la dérivée de $\ln(3x^2 - 5x - 8)$.

$$\ln(3x^2 - 5x - 8) = \frac{(3x^2 - 5x - 8)'}{3x^2 - 5x - 8} = \frac{3 \times 2x - 5 \times 1}{3x^2 - 5x - 8} = \frac{6x - 5}{3x^2 - 5x - 8}$$

16. Calculer la dérivée de $\frac{2x+1}{5x-2}$.

$$\left(\frac{2x+1}{5x-2}\right)' = \frac{(2x+1)' \times (5x-2) - (2x+1) \times (5x-2)'}{(5x-2)^2} = \frac{2(5x-2) - 5(2x+1)}{(5x-2)^2} = \frac{10x - 4 - 10x - 5}{(5x-2)^2} = \frac{-9}{(5x-2)^2}$$

17. Calculer la dérivée de $\frac{2x+1}{5x^2-2}$.

$$\begin{aligned}\left(\frac{2x+1}{5x^2-2}\right)' = \frac{(2x+1)' \times (5x^2-2) - (5x^2-2)' \times (2x+1)}{(5x^2-2)^2} &= \frac{2 \times (5x^2-2) - 10x \times (2x+1)}{(5x^2-2)^2} \\ &= \frac{10x^2 - 4 - 20x^2 - 10x}{(5x^2-2)^2} = \frac{-10x^2 - 10x - 4}{(5x^2-2)}\end{aligned}$$

18. Calculer la dérivée de $\frac{x^2+2x+1}{x^2+5x-2}$.

$$\begin{aligned}\left(\frac{x^2+2x+1}{x^2+5x-2}\right)' &= \frac{(x^2+2x+1)' \times (x^2+5x-2) - (x^2+2x+1) \times (x^2+5x-2)'}{(x^2+5x-2)^2} \\ &= \frac{(2x+2) \times (x^2+5x-2) - (x^2+2x+1) \times (2x+5)}{(x^2+5x-2)^2} \\ &= \frac{2x^3 + 10x^2 - 4x + 2x^2 + 10x - 4 - (2x^3 + 4x^2 + 2x + 5x^2 + 10x + 5)}{(x^2+5x-2)^2} \\ &= \frac{2x^3 + 12x^2 + 6x - 4 - (2x^3 + 9x^2 + 12x + 5)}{(x^2+5x-2)^2} \\ &= \frac{3x^2 - 6x - 9}{(x^2+5x-2)^2}\end{aligned}$$

19. Résoudre les équations et les inéquations suivantes :

$\ln(2x+3) = 5 \Leftrightarrow x = \dfrac{e^5 - 3}{2}$

$\ln(-4x-2) = 3 \Leftrightarrow x = \dfrac{e^3 + 2}{-4}$

$\ln(x^2 + 3x + 3) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 3x + 3 = 1 \Leftrightarrow x^2 + 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ou $x = -2$

$\log(x) \leq 10 \Leftrightarrow 0 < x \leq 10^{10}$

$\log(x) \geq 6 \Leftrightarrow x \geq 10^6$

20. Déterminer la limite en $+\infty$ en $\ln(x)$.
$+\infty$

21. Déterminer la limite en 0^+ en $\ln(x)$.
$-\infty$

22. Déterminer la limite en $+\infty$ de $x\ln(x)$.
$+\infty$

23. Déterminer la limite en 0^+ en $x\ln(x)$.
0

24. Déterminer la limite en 0^+ en $\frac{\ln(x)}{x}$.
$-\infty$

25. Déterminer la limite en $+\infty$ en $\frac{\ln(x)}{x}$.
0

26. Déterminer la limite en $+\infty$ de :

$$\frac{2x^2+3x+7}{3x^2-6x+8}$$

$\frac{2}{3}$

27. Déterminer la limite en $+\infty$ de :

$$\frac{3x+7}{3x^2-6x+8}$$

0

28. Déterminer la limite en $+\infty$ de :

$$\frac{2x^2+3x+7}{6x+8}$$

$+\infty$

29. Montrer que :

$$\frac{2x^2+3x+7}{x+8} = 2x-13+\frac{111}{x+8}$$

$$2x-13+\frac{111}{x+8} = \frac{(2x-13)(x+8)}{x+8}+\frac{111}{x+8} = \frac{2x^2+16x-13x-104}{x+8}+\frac{111}{x+8} = \frac{2x^2+3x+7}{x+8}$$

30. En déduire une interprétation graphique pour la courbe représentant f en $+\infty$ et $-\infty$.
Comme la limite de $\frac{111}{x+8}$ en $+\infty$ et en $-\infty$, alors on peut en déduire que la la droite $y = 2x-13$ est asymptote à la courbe représentant f en $+\infty$ et $-\infty$.