Récurrences 6

On considère la suite :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{15u_n+60}{u_n+11} \\ u_0 = 14 \end{cases}$$

1. Calculer u_1.
2. On considère la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{15x+60}{x+11}$$

   Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = f(u_n)$

   a. Montrer que la fonction f est croissante sur $[0;+\infty[$.

   b. Résoudre l'équation $f(x) = x$ sur $[0;+\infty[$.

   c. En déduire que $f(x) > 10$ pour $x > 10$

   d. Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$: $u_n > 10$
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(10-u_n)(u_n+6)}{u_n+11}$$

4. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
5. En déduire que la suite (u_n) converge et donner sa limite.
6. On définit la suite (v_n) pour tout entier naturel par :

$$v_n = \frac{u_n-10}{u_n+6}$$

   Calculer v_0
7. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{5}{21}$.
8. Déterminer la limite de (v_n) puis celle de (u_n).

1. On a :

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{15 \times u_0 + 60}{u_0 + 11} \\ &= \frac{15 \times 14 + 60}{14 + 11} \\ &= \frac{270}{25} \end{aligned}$$

2. a. On va calculer la dérivée de la fonction f :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(15x+60)' \times (x+11) - (15x+60) \times (x+11)'}{(x+11)^2} \\ &= \frac{15 \times (x+11) - (15x+60) \times 1}{(x+11)^2} \\ &= \frac{15x + 165 - 15x - 60}{(x+11)^2} \\ &= \frac{105}{(x+11)^2} \end{aligned}$$

Comme la dérivée de la fonction est strictement positive, on en déduit que la fonction f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$

b. On a :

$$\begin{aligned} & f(x) = x \\ & \Leftrightarrow \frac{15x+60}{x+11} = x \\ & \Leftrightarrow 15x + 60 = x(x+11) \\ & \Leftrightarrow 15x + 60 = x^2 + 11x \\ & \Leftrightarrow x^2 - 4x - 60 = 0 \end{aligned}$$

On doit résoudre l'équation du second degré en commençant par calculer le discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 256 > 0$$

Il y a donc deux racines réelles disctinctes :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 + \sqrt{256}}{2} = 10 \\ x_2 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 - \sqrt{256}}{2} = -6 \end{aligned}$$

c. On sait que f est croissante pour $x > 0$, donc :

$$x > 10 \Rightarrow f(x) > f(10) = 10$$

Initialisation :
On a $u_0 = 14 > 10$
L'initialisation est établie.
Hérédité :

On suppose que la propriété est vraie pour un rang $n \geq 0$:

$$u_n > 10 : \text{ c'est l'hypothèse de récurrence}$$

On démarre de l'hypothèse de récurrence :

$$u_n > 10 \Rightarrow u_{n+1} = f(u_n) > f(10) = 10 \text{ par croissance de } f$$

L'hérédité est établie.
Donc, $\forall n \in \mathbb{N} : u_n > 10$

3. On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{15u_n - 60}{u_n + 11} - u_n \\ &= \frac{15u_n - 60}{u_n + 11} - \frac{(u_n + 11)u_n}{u_n + 11} \\ &= \frac{-u_n^2 + 4u_n - 60}{u_n + 11} \end{aligned}$$

Or :

$$\frac{(10 - u_n)(u_n + 6)}{u_n + 11} = \frac{10u_n - 10 \times 6 - u_n^2 - 6u_n}{u_n + 11} = \frac{-u_n^2 + 4u_n - 60}{u_n + 11}$$

4. Comme $u_n > 10$ alors $10 - u_n < 0$, $u_n + 6 > 0$ et $u_n + 11 > 0$, par conséquent, $u_{n+1} - u_n < 0$ et donc la suite (u_n) est décroissante.

5. Comme la suite (u_n) est décroissante et minorée par 10, alors d'après le théorème de convergence monotone, elle converge vers une limite l qui vérifie $f(l) = l$.
On a donc le choix entre 10 et -6 pour l et comme l est positif, on en déduit que $l = 10$.

6. On a :

$$v_0 = \frac{u_0 - 10}{u_0 + 6} = \frac{4}{8}$$

7. On a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{u_{n+1} - 10}{u_{n+1} + 6} \\ &= \frac{\frac{15u_n+60}{u_n+11} - 10}{\frac{15u_n+60}{u_n+11} + 6} \\ &= \frac{5u_n - 50}{21u_n + 126} \\ &= \frac{5}{21} \times \frac{u_n - 10}{u_n + 6} \\ &= \frac{5}{21} \times v_n \end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison $\frac{5}{21}$ et de premier terme de $v_0 = \frac{4}{8}$.

8. On peut exprimer en fonction de n et de v_0 :

$$v_n = \frac{4}{8}\left(\frac{5}{21}\right)^n$$

Comme la raison est comprise entre 0 et 1, la suite tend vers 0 et on a :

$$\begin{aligned} & v_n = \frac{u_n - 10}{u_n + 6} \\ \Leftrightarrow & v_n(u_n + 6) = u_n - 10 \\ \Leftrightarrow & v_n u_n - u_n = -6v_n - 10 \\ \Leftrightarrow & u_n = \frac{-6v_n - 10}{v_n - 1} \end{aligned}$$

Par opération sur les limites, on en déduit que la limite de (u_n) est $\frac{-10}{-1} = 10$