Suites arithmétiques

1 Raison, premier terme et expression du terme général

Exemple 1 (Rappels) *On considère les trois nombres suivants :* -7, -3 *et* 1.

1. *On considère que ces trois nombres correspondent au triplet* (u_0, u_1, u_2) *d'une suite numérique.*
   Comment passe-t-on d'un terme au suivant ?
2. *On suppose que l'on suit le même procédé pour otenir les termes suivants. Comment appelle-t-on ce type de suite numérique ?*
3. *Donner la valeur de* u_4 *puis de* u_7.
4. *Que vaut* $u_{n+1} - u_n$ *?*
5. *Que nous apprend le signe de* $u_{n+1} - u_n$ *?*

Exemple 2 (Expression du terme général) *Florent a besoin d'économiser au moins 1300 € pour acheter un scooter. Pour cela, il décide d'effectuer un dépôt chaque mois. Avec un tableur, il effectue une simulation d'une formule d'économies possible.*
Le 1er mois, il fait un dépôt de 150 € ; il augmente ensuite chaque dépôt mensuel de 20 €. On appelle A_n *Ie montant du* n*-ième dépôt mensuel de Florent*

	A	B
1	Mois (n)	A_n
2	1	150
3	2	170
4	3	
5	4	
6	5	
7	6	

1. *Quelle formule destinée à être recopiée vers le bas Florent a-t-il écrit dans la cellules B3 pour compléter la colonnes B ?*
2. *Déterminer la nature de la suite* (A_n) *et préciser son terme initial et sa raison.*
3. *Exprimer* A_{n+1} *en fonction de* A_n.
4. *Exprimer* A_n *en fonction de* n.
5. *Calculer le montant du dépot pour le sixième mois.*

2 Sommes des termes d'une suite arithmétique

Exemple 3 *On reprend l'exemple précédent :*

	A	B	
1	Mois (n)	A_n	S_n
2	1	150	150
3	2	170	320
4	3		
5	4		
6	5		
7	6		

1. *Dans la quatrième colonne, on cherche à calculer la somme de l'argent épargné au fils des moins.*
   Remplir cette colonne.
2. *Florent aura-t-il économisé suffisamment d'argent au bout de six mois pour se payer son scooter ?*
3. *On considère l'algorithme suivant :*

```
def somme1(n):
    S=150
    for k in range(2,n+1):
        S=S+130+k*20
    return S
```

   Quelle est sa fonction ?
   Expliquer l'origine du nombre 130.
4. *Comparer les valeurs de la suite* $S(n)$ *à celle de la suite :*

$$C_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2}$$

   Conjecturer une nouvelle formule pour $S(n)$.

3 Résumé

Une suite $(u_n)_n$ est arithmétique si pour passer de n'importe quel terme u_n au suivant u_{n+1} on ajoute toujours le même nombre r.
Dans ce cas, on dit que la raison de cette suite est ce nombre r et le premier terme est u_0 :

- ✏ $u_{n+1} = u_n + r$
- ✏ $u_n = u_0 + nr = u_1 + (n-1)r = u_1 + (n-1)r = u_q + (n-q)r$
- ✏ Si $r > 0$, la suite est croissante, si $r < 0$, elle est décroissante et si $r = 0$, elle est constante.
- ✏ Pour calculer la somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique à la calculatrice
  - ✏ pour les TI :
    1. $\boxed{math}$
    2. 0 : somme $\sum$
    3. ensuite on met en bas le terme par lequel commence la somme puis en haut le terme par lequel on la finit. A l'intérieur, on met la formule de u_n en fonction de n.
  - ✏ pour les casio :
    1. sur une page de calcul, on accède au catalogue en tapant **SHIFT** puis **4**.
    2. ensuite, on accède aux fonctionnalités où se trouve la somme en appuyant la touche $\times$.
    3. enfin, on descend pour atteindre $\sum($ et on se refère à ce que j'ai dit pour les TI.
  - ✏ pour les numworks :
    1. on va dans le menu Suites.
    2. on précise l'expression de u_{n+1} en fonction de u_n en précisant le premier terme et la raison. On peut aussi être amené à indiquer qu'au lieu de u_0, nous connaissons u_1 en indiquant l'indice du premier terme.

3. on va ensuite sur graphique et on appuie sur OK puis somme des termes : il nous reste à indiquer le premier puis le dernier terme.

✏ la somme de n termes consécutifs :

$$u_k + ..u_n = \sum_{i=k}^{n} u_i = \frac{(n-k+1)(u_k+u_n)}{2}$$
$$= \frac{\text{premier terme plus dernier terme } \times \text{ nombre de termes}}{2}$$

4 Exercices

Exercice 1 *Soit (u_n) la suite arithmétique de raison r et de premier terme $u_0 = 5$.*

1. *On sait que $u_7 = 26$ en déduire la valeur de r.*
2. *Exprimer u_n en fonction de n.*
3. *Calculer u_{100}.*

Exercice 2 *Maxime attend d'avoir 18 ans pour donner son sang. Il prévoit de le donner cinq fois par an, le nombre maximal autorisé. On note u_n le nombre de dons qu'il aura effectué le jour de ses $18 + n$ ans.*

1. *Calculer u_0, u_1 et u_2.*
2. *Quelle est la nature de la suite u_n ?*
3. *Exprimer u_n en fonction de n.*
4. *Combien de dons Maxime aura effectué le jour de ses 30 ans ?*

Exercice 3 *On considère l'algorithme suivant :*

```
def somme2(n) :
    S=0
    for k in range(1,n+1) :
        S=S+k**2
    return S
```

1. *Quelle est la valeur de $somme2(2)$?*
2. *Quelle est la valeur de $somme2(3)$?*
3. *Quelle est la valeur de $somme2(4)$?*
4. *La suite $somme2(n)$ est-elle arithmétique ? Justifier.*
5. *Exprimer, en utilisant le symbole somme, $somme2(n)$.*
6. *Traduire en français la signification de cette somme.*

Exercice 4 *La population d'une ville, qui était de 15000 habitants en 2001, baisse depuis cette date de 600 habitants par an.*

1. *Combien y avait-il d'habitants en 2002 ? 2003 ?*
2. *On note p_0 la population en 2001 et p_n la population années plus tard, c'est-à-dire en $2001 + n$.*
   Montrer que la suite est arithmétique ; préciser sa raison et son terme initial.
3. *Exprmier p_n en fonction de n.*
4. *Déterminer à partir de quelle année la population de cette ville sera inférieure à 10000 habitants.*