Équations différentielles : activités

En 1950, un pays comptait 30.5 millions d'habitants.
Depuis cette date, sa population a un taux annuel moyen de natalité de 20 pour 1000, c'est-à-dire qu'il y a en moyenne 20 naissances enregistrées au cours d'une année pour 1000 habitants. De façon analogue, depuis 1950, le taux annuel moyen de mortalité est de 15 pour 1000.
De plus, chaque année en moyenne, 100000 nouveaux arrivants dans ce pays.

On se propose d'étudier l'évolution démographique de ce pays

1. **Modèle à temps discret**
   On note $P(n)$ la population de ce pays, en million d'habitants, l'année $1950+n$ avec $n \in \mathbb{N}$
   a. Donner la valeur de $P(0)$.
   b. Pour 1000 habitants, quelle évolution a-t-on d'une année sur l'autre ?
   c. En déduire une relation de récurrence reliant $P(n+1)$ et $P(n)$.
   d. Déterminer le terme général de $P(n)$ et en déduire la population de ce pays en 2050, si les conditions restent inchangées.
2. **Modèle à temps continu**
   On considère la fonction P définie sur $[0;+\infty[$, qui à l'instant $1950+t$, en années, associe la population de ce pays à cet instant.
   a. Pourquoi la fonction est définie sur $[0;+\infty[$?
   b. Donner la valeur de $P(0)$ et une relation entre $P(t+1)$ et $P(t)$..
   c. Peut-on raisonner comme dans la première partie pour calculer $P(t)$?
   d. On suppose que la fonction est dérivable sur son ensemble de définition.
   Rappeler la définition de la dérivée de P au point t ? Quelle nouvelle équation peut-on en déduire ?
   e. Vérifier que toute fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $P(t) = ke^{0.005t} - 20$ avec k un nombre réel est solution de la nouvelle équation obtenue, que l'on appelle équation différentielle.
   f. Utiliser la condition initiale, c'est-à-dire la valeur de $P(0)$, pour déterminer k.
   g. En suivant ce modèle déterminer la valeur de la population de ce pays en 1950 et comparer au résultat obtenu avec le premier modèle.