

EXERCICE 1

Les parties A et B de cet exercice sont indépendantes.

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$ d'unités 5 cm.

On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

Soit z le nombre complexe de module 2 et d'argument $\frac{\pi}{3}$, \bar{z} est le nombre complexe conjugué de z .

PARTIE A

1. Donner les écritures algébriques de z , de \bar{z} et de $\frac{1}{2}\bar{z}$.
2. On considère le nombre complexe $p = \frac{2 + \bar{z}}{2 - \bar{z}}$.
 - a) Montrer que $p = -i\sqrt{3}$.
 - b) Les points M , N et P sont les points d'affixes respectives 1 , $\frac{1}{2}\bar{z}$ et p . Placer ces trois points dans le repère. Justifier l'alignement de ces trois points.

PARTIE B

Soit u le nombre complexe défini par $u = \frac{1}{2}z$.

1. Écrire u sous la forme exponentielle.
2.
 - a) Donner l'écriture exponentielle puis l'écriture algébrique de u^3 .
 - b) Vérifier les relations suivantes : $u^4 = -u$ et $u^5 = -u^2$.
 - c) Vérifier que $1 + u + u^2 + u^3 + u^4 + u^5 + u^6 = 1$.

EXERCICE 2

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée. Une bonne réponse rapporte un point. Une mauvaise réponse, plusieurs réponses ou l'absence de réponse à une question ne rapportent ni n'enlèvent de point.

Indiquer sur la copie le numéro de la question et la réponse correspondante.

On considère les deux nombres complexes $z = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $z' = 2e^{-i\frac{2\pi}{3}}$.

1. La forme algébrique de z est égale à :
 - a) $z = -1 + i\sqrt{3}$
 - b) $z = 1 + i\sqrt{3}$
 - c) $z = 2 + i\sqrt{3}$
 - d) $z = \sqrt{3} - i$
2. Le nombre complexe z' est le nombre complexe :
 - a) opposé de z
 - b) inverse de z
 - c) conjugué de z
 - d) opposé du conjugué de z
3. Le nombre complexe $z \times z'$:
 - a) est un nombre réel
 - b) est un nombre imaginaire pur
 - c) a pour module 2

d) est un nombre complexe dont un argument est $\frac{4\pi}{3}$

4. Un argument du nombre complexe z'' tel que $z \times z'' = i$ est :

a) $\frac{\pi}{3}$

b) $\frac{5\pi}{6}$

c) $\frac{\pi}{6}$

d) $-\frac{\pi}{6}$

EXERCICE 3

On considère les nombres complexes Z_1 et Z_2 :

$$Z_1 = \frac{3\sqrt{2}}{1+i} \quad \text{et} \quad Z_2 = \frac{4i}{1+i\sqrt{3}}.$$

1. Écrire les nombres Z_1 et Z_2 sous forme algébrique et trigonométrique.
2. Placer les points A_1 et A_2 d'affixes respectives Z_1 et Z_2 dans le repère donné en annexe.
3. Calculer sous forme algébrique le produit $Z_1 \times Z_2$ et donner sa forme trigonométrique.
4. En déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

