

∞ Fonction logarithme 3

1. On considère la fonction suivante définie sur $]0; +\infty[$:

$$g(x) = 3x - 9 + 9\ln(x)$$

- a. Calculer la limite de g en 0^+
- b. Calculer la limite de g en $+\infty$
- c. Calculer la dérivée de g .
- d. Déterminer le signe de $g'(x)$.
- e. En déduire le tableau de variation de $g(x)$.
- f. Déterminer le nombre de solutions de $g(x) = 0$.

2. On considère la fonction suivante définie sur $]0; +\infty[$:

$$f(x) = \frac{3x-9}{x} \ln(x)$$

- a. Calculer la limite de f en 0^+
- b. Calculer la limite de f en $+\infty$
- c. Calculer la dérivée de f .
- d. Déterminer le signe de $f'(x)$.
- e. En déduire le tableau de variation de $f(x)$.
- f. En déduire le nombre de solutions de $f(x) = 0$.

Correction :

1. a. On sait que :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} 3x - 9 = -9$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} 9\ln(x) = -\infty \text{ par propriété du cours}$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow 0^+} 3x - 9 + 9\ln(x) = -\infty$$

b.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x - 9 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 9x\ln(x) = +\infty \text{ par propriété du cours}$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x - 9 + 9\ln(x) = +\infty$$

c.

$$g'(x) = 3 + 9 \times \frac{1}{x}$$

d.

$$g'(x) \geq 0 \quad \forall x > 0$$

e. On a :

x	0	$+\infty$
$g'(x)$		+
$g(x)$	$-\infty$	$-\infty$

f. La fonction g est croissante de $-\infty$ à $+\infty$, donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe une unique valeur $\alpha > 0$ telle que $g(\alpha) = 0$.

$$g(1.59) < 0$$

$$g(1.6) > 0$$

$$\text{donc } 1.59 < \alpha < 1.6$$

2. a. On sait que :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x-9}{x} &= -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) &= -\infty \text{ par propriété du cours} \\ \text{donc } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x-9}{x} \ln(x) &= +\infty\end{aligned}$$

b. On sait que :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x-9}{x} &= 3 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) &= +\infty \text{ par propriété du cours} \\ \text{donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x-9}{x} \ln(x) &= +\infty\end{aligned}$$

c. On sait que :

$$\begin{aligned}f'(x) &= \left(\frac{3x-9}{x} \ln(x) \right)' \\ &= \left(\frac{3x-9}{x} \right)' \ln(x) + \left(\frac{3x-9}{x} \right) \ln(x)' \\ &= \left(\frac{(3x-9)' \times x - (3x-9) \times x'}{x^2} \right) \ln(x) + \left(\frac{3x-9}{x} \right) \times \frac{1}{x} \\ &= \left(\frac{3x - (3x-9)}{x^2} \right) \ln(x) + \left(\frac{3x-9}{x^2} \right) \\ &= \frac{(3x - 3x + 9) \ln(x) + 3x - 9}{x^2} \\ &= \frac{3x - 9 + 9 \ln(x)}{x^2} \\ &= \frac{g(x)}{x^2}\end{aligned}$$

d. On a :

x	0	α	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

e.

$$f(\alpha) = \frac{3\alpha - 9}{\alpha} \ln(\alpha)$$
$$\text{or } g(\alpha) = 3\alpha - 9 + 9\ln(\alpha)$$
$$\text{donc } f'(\alpha) = \frac{-9\ln^2(\alpha)}{\alpha} < 0$$

Comme f est continue, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, on déduit que f s'annule en deux valeurs x_1 et x_2 : $0 < x_1 < \alpha$ et $x_2 > \alpha$