Fonction logarithme 7

On considère la fonction suivante définie sur $]0;+\infty[$:

$$f(x) = (16 - 8\ln(x))\ln(x)$$

1. Calculer la limite de f en 0^+
2. Calculer la limite de f en $+\infty$
3. Calculer la dérivée de f.
4. Déterminer le signe de $f'(x)$.
5. En déduire le tableau de variation de $f(x)$.
6. En déduire le nombre de solutions de $f(x) = 0$ et un encadrement d'amplitude 10^{-2} de cette solution.

Correction :

1. On sait que :

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to 0^+}(16-8\ln(x)) = +\infty \\ &\lim_{x\to 0^+}\ln(x) = -\infty \\ \text{donc } &\lim_{x\to 0^+}(16x-8\ln(x))\ln(x) = -\infty \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to +\infty}(16-8\ln(x)) = -\infty \\ &\lim_{x\to +\infty}\ln(x) = +\infty \\ \text{donc } &\lim_{x\to +\infty}(16x-8\ln(x))\ln(x) = -\infty \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} f'(x) &= ((16-8\ln(x))\ln(x))' \\ &= (16-8\ln(x))'\ln(x) + (16-8\ln(x))\ln(x)' \\ &= -8\times\frac{1}{x}\ln(x) + (16-8\ln(x))\frac{1}{x} \\ &= \frac{16-16\ln(x)}{x} \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\Leftrightarrow 16-16\ln(x) > 0 \\ &\Leftrightarrow \ln(x) < \frac{16}{16} \\ &\Leftrightarrow x < e^{\frac{16}{16}} \end{aligned}$$

5. On a :

x	0		$e^{\frac{16}{16}}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	15.0	$\searrow$	$-\infty$

6. Comme la fonction$g$ est continue, croissante de $-\infty$ à $15.0 > 0$, alors, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit qu'il existe une unique solution $\alpha_1 \in]0; e^{\frac{16}{16}}[$ tel que $g(\alpha_1) = 0$.
Comme la fonction$g$ est continue, croissante de $15.0 > 0$ à $-\infty$, alors, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit qu'il existe une unique

solution $\alpha_2 \in]e^{\frac{16}{16}}; +\infty[$ tel que $g(\alpha_2) = 0$.

$$\begin{aligned}
&f(0.99) < 0\\
&f(1.0) > 0\\
\text{donc } &0.99 < \alpha_1 < 1.0\\
&f(7.3799999999999) > 0\\
&f(7.3899999999999) < 0\\
\text{donc } &7.3799999999999 < \alpha_2 < 7.3899999999999
\end{aligned}$$

En regardant plus attentivement, on se rend compte que $\alpha_1 = 1$ et $\alpha_2 = e^{\frac{16}{8}}$.