Récurrences 6

On considère la suite :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{10u_n+12}{u_n+9} \\ u_0 = 9 \end{cases}$$

1. Calculer u_1.
2. On considère la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{10x+12}{x+9}$$

   Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = f(u_n)$

   a. Montrer que la fonction f est croissante sur $[0;+\infty[$.

   b. Résoudre l'équation $f(x) = x$ sur $[0;+\infty[$.

   c. En déduire que $f(x) > 4$ pour $x > 4$

   d. Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N} : u_n > 4$
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(4-u_n)(u_n+3)}{u_n+9}$$

4. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
5. En déduire que la suite (u_n) converge et donner sa limite.
6. On définit la suite (v_n) pour tout entier naturel par :

$$v_n = \frac{u_n-4}{u_n+3}$$

   Calculer v_0
7. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{6}{13}$.
8. Déterminer la limite de (v_n) puis celle de (u_n).

1. On a :

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{10 \times u_0 + 12}{u_0 + 9} \\ &= \frac{10 \times 9 + 12}{9 + 9} \\ &= \frac{102}{18} \end{aligned}$$

2. **a.** On va calculer la dérivée de la fonction f :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(10x+12)' \times (x+9) - (10x+12) \times (x+9)'}{(x+9)^2} \\ &= \frac{10 \times (x+9) - (10x+12) \times 1}{(x+9)^2} \\ &= \frac{10x + 90 - 10x - 12}{(x+9)^2} \\ &= \frac{78}{(x+9)^2} \end{aligned}$$

Comme la dérivée de la fonction est strictement positive, on en déduit que la fonction f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$

b. On a :

$$\begin{aligned} & f(x) = x \\ & \Leftrightarrow \frac{10x+12}{x+9} = x \\ & \Leftrightarrow 10x + 12 = x(x+9) \\ & \Leftrightarrow 10x + 12 = x^2 + 9x \\ & \Leftrightarrow x^2 - 1x - 12 = 0 \end{aligned}$$

On doit résoudre l'équation du second degré en commençant par calculer le discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 49 > 0$$

Il y a donc deux racines réelles disctinctes :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 + \sqrt{49}}{2} = 4 \\ x_2 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 - \sqrt{49}}{2} = -3 \end{aligned}$$

c. On sait que f est croissante pour $x > 0$, donc :

$$x > 4 \Rightarrow f(x) > f(4) = 4$$

Initialisation :
On a $u_0 = 9 > 4$
L'initialisation est établie.
Hérédité :

On suppose que la propriété est vraie pour un rang $n \geq 0$:

$$u_n > 4 : \text{ c'est l'hypothèse de récurrence}$$

On démarre de l'hypothèse de récurrence :

$$u_n > 4 \Rightarrow u_{n+1} = f(u_n) > f(4) = 4 \text{ par croissance de } f$$

L'hérédité est établie.
Donc, $\forall n \in \mathbb{N} : u_n > 4$

3. On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{10u_n - 12}{u_n + 9} - u_n \\ &= \frac{10u_n - 12}{u_n + 9} - \frac{(u_n + 9)u_n}{u_n + 9} \\ &= \frac{-u_n^2 + 1u_n - 12}{u_n + 9} \end{aligned}$$

Or :

$$\frac{(4 - u_n)(u_n + 3)}{u_n + 9} = \frac{4u_n - 4 \times 3 - u_n^2 - 3u_n}{u_n + 9} = \frac{-u_n^2 + 1u_n - 12}{u_n + 9}$$

4. Comme $u_n > 4$ alors $4 - u_n < 0$, $u_n + 3 > 0$ et $u_n + 9 > 0$, par conséquent, $u_{n+1} - u_n < 0$ et donc la suite (u_n) est décroissante.

5. Comme la suite (u_n) est décroissante et minorée par 4, alors d'après le théorème de convergence monotone, elle converge vers une limite l qui vérifie $f(l) = l$.
On a donc le choix entre 4 et -3 pour l et comme l est positif, on en déduit que $l = 4$.

6. On a :

$$v_0 = \frac{u_0 - 4}{u_0 + 3} = \frac{5}{6}$$

7. On a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{u_{n+1} - 4}{u_{n+1} + 3} \\ &= \frac{\frac{10u_n + 12}{u_n + 9} - 4}{\frac{10u_n + 12}{u_n + 9} + 3} \\ &= \frac{6u_n - 24}{13u_n + 39} \\ &= \frac{6}{13} \times \frac{u_n - 4}{u_n + 3} \\ &= \frac{6}{13} \times v_n \end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison $\frac{6}{13}$ et de premier terme de $v_0 = \frac{5}{6}$.

8. On peut exprimer en fonction de n et de v_0 :

$$v_n = \frac{5}{6}\left(\frac{6}{13}\right)^n$$

Comme la raison est comprise entre 0 et 1, la suite tend vers 0 et on a :

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{u_n - 4}{u_n + 3} \\ \Leftrightarrow v_n(u_n + 3) &= u_n - 4 \\ \Leftrightarrow v_n u_n - u_n &= -3v_n - 4 \\ \Leftrightarrow u_n &= \frac{-3v_n - 4}{v_n - 1} \end{aligned}$$

Par opération sur les limites, on en déduit que la limite de (u_n) est $\frac{-4}{-1} = 4$