☙ Séries de Fourier

1 Coefficients de Fourier et développement en série de Fourier

Définition 1 *Quand on fait la somme fini de nombres réels, on obtient toujours un nombre réel.*
Ce n'est pas toujours le cas quand on ajoute une infinité de nombres réels.
Dans le cas où on fait la somme d'une infinité de nombres réels, on parlera de série associée à une suite de nombres réels.
On a trois possibilités :

- ✏ *soit le résultat de la sommation est un nombre réel : on parlera alors de série convergente.*
- ✏ *soit le résultat de la sommation est* $\pm\infty$*.*
- ✏ *soit le résultat de la sommation n'existe pas et dans ce cas, l'appelation somme n'a pas de sens : c'est ce qui arrive par exemple quand on obtient deux résultats différents en sommant les termes de deux façons différentes.*

Dans les deux derniers cas, on parle de séries divergentes.
La troisième situation nous montre que les "sommes" infinies et les sommes finies se comportent très différemment.

Définition 2 *On appelle somme trigonométrique de période* T *les fonctions de la forme :*

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos(\omega k t) + b_k \sin(\omega k t)$$

Quand on fera tendre n *vers* $+\infty$*, c'est à dire quand il y aura une infinité de termes à sommer, on parlera de série trigonométrique* S*.*
Le terme ω *est appelé la pulsation et s'exprime en fonction de la période* T *:*

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Définition 3 *Soit* f *une fonction périodique de période* T*. On appelle série de Fourier de* f *la série trigonométrique* $S(f)(x)$ *dont les coefficients sont les suivants :*

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)\,dt \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$
$$a_n = \frac{2}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)\cos(n\omega t)\,dt \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$
$$b_n = \frac{2}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)\sin(n\omega t)\,dt \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Ces nombres sont appelés coefficients de Fourier de la fonction f*.*

Théorème 1 *Dans le cas où f est paire et périodique de période T, on a :*

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)dt \\ \forall n > 0,\ a_n &= \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)cos(n\omega t)dt \\ \forall n > 0,\ b_n &= 0 \end{aligned}$$

Théorème 2 *Dans le cas où f est impaire et périodique de période T, on a :*

$$\begin{aligned} \forall n > 0,\ b_n &= \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\sin(n\omega t)dt \\ \forall n \geq 0,\ a_n &= 0 \end{aligned}$$

Théorème 3 *On dit qu'une fonction périodique f satisfait aux conditions de Dirichlet ou $\mathscr{C}^1$ par morceaux si :*

1. *Sauf en un nombre fini de points particuliers sur une période, f est continue, dérivable et sa dérivée est continue.*

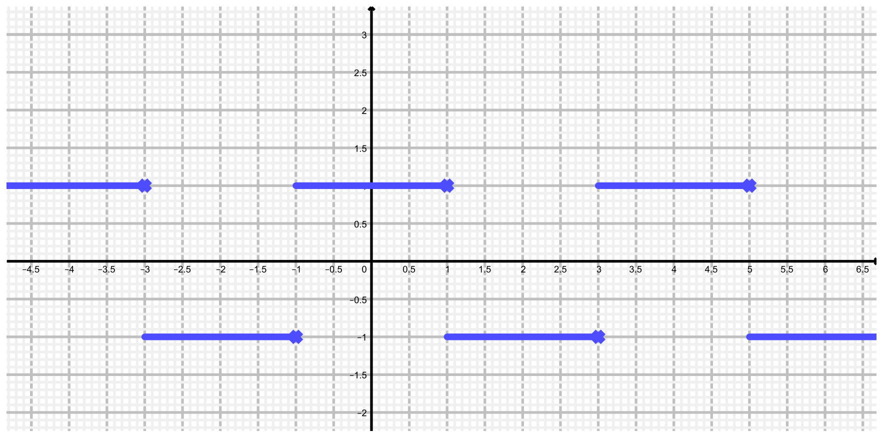
2. *En ces points particuliers, f et f' admettent des limites à gauche et à droite.*

Si f est une fonction périodique satisfaisant les conditions de Dirichlet, alors :

1. *si f est continue en t alors la série de Fourier associée à f converge vers $f(t)$.*

2. *si f est n'est pas continue en t alors la série de Fourier associée à f converge vers $\frac{1}{2}\Big(f(t^+)+f(t^-)\Big)$.*

Exemple 1 *On considère la fonction f périodique dont on donne une partie de la représentation graphique ci-dessous :*

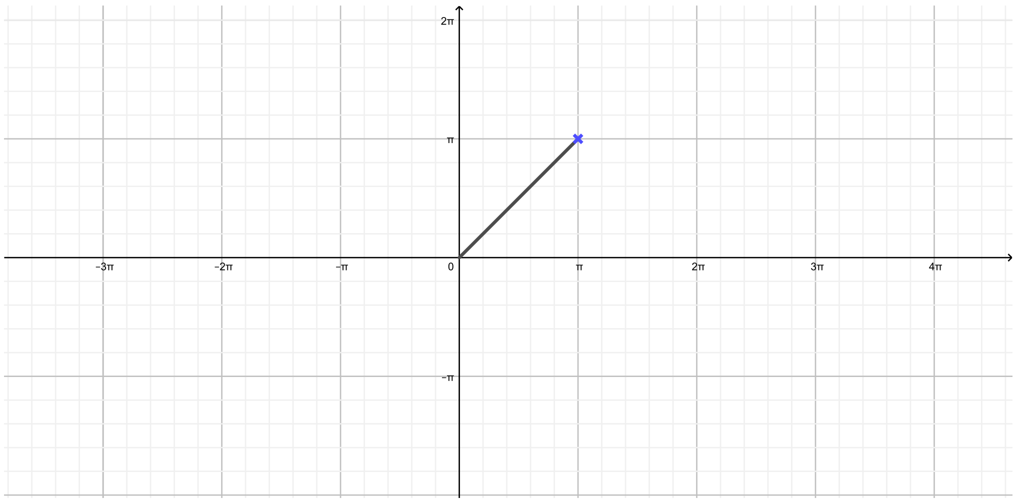


1. *Quelle est la période T de cette fonction ?*
2. *Quelle est sa pulsation ω ?*
3. *Quelle est sa parité ?*
4. *Donner l'expression des a_n et des b_n.*
5. *En appliquant le théorème de Dirichlet en $t = 0$, en déduire la valeur de la série :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

2 Intégration par partie

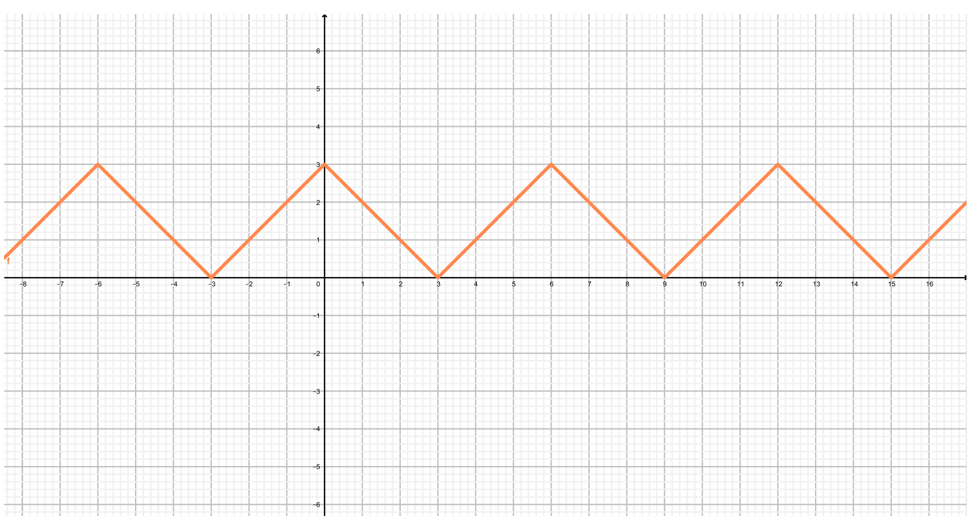
Exemple 2 *On considère la fonction f 2π périodique et impaire dont on donne une partie de la représentation graphique ci-dessous :*



1. *Compléter le graphique.*
2. *Quelle est la période T de cette fonction ?*
3. *Quelle est sa pulsation ω ?*
4. *Donner l'expression des a_n et des b_n.*
5. *En appliquant le théorème de Dirichlet en $t = \frac{\pi}{2}$, retrouver la valeur de la série :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

Exemple 3 *On considère la fonction f périodique dont on donne une partie de la représentation graphique ci-dessous :*



1. *Quelle est la période T de cette fonction ?*

2. *Quelle est sa pulsation* ω *?*

3. *Quelle est sa parité ?*

4. *Donner l'expression des* a_n *et des* b_n.

5. *En appliquant le théorème de Dirichlet en* $t = 0$*, retrouver la valeur de la série :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

6. *En déduire la valeur de la série :*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

Théorème 4 (Intégration par partie)

$$\int_a^b u(t)v'(t)dt = [u(t)\times v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)dt$$

Exemple 4 *L'application de l'intégration par partie nous permet de trouver des primitives aux fonctions suivantes :*

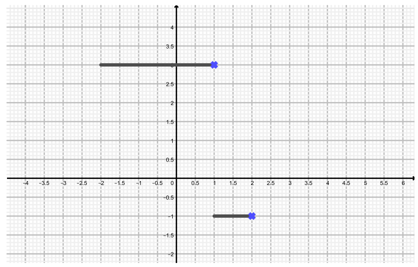
$$t\cos(n\omega t) \longrightarrow \frac{t}{n\omega}\sin(n\omega t) - \frac{1}{n^2\omega^2}\cos(n\omega t)$$
$$t\sin(n\omega t) \longrightarrow -\frac{t}{n\omega}\cos(n\omega t) + \frac{1}{n^2\omega^2}\sin(n\omega t)$$

Nous les trouvons également grâce à la connaissance des primitives suivantes :

$$\cos(n\omega t) \longrightarrow \frac{t}{n\omega}\sin(n\omega t)$$
$$\sin(n\omega t) \longrightarrow -\frac{t}{n\omega}\cos(n\omega t)$$

3 Théorème de Parseval et valeur efficace

Exemple 5 *On considère la fonction f périodique dont on donne une partie de la représentation graphique ci-dessous :*



1. *Quelle est la période T de cette fonction ?*
2. *Quelle est sa pulsation ω ?*
3. *Quelle est sa parité ?*
4. *Donner l'expression des a_n et des b_n.*
5. *En appliquant le théorème de Parseval, retrouver la valeur de la série :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

Définition 4 *Le spectre de la fonction f est la suite des coefficients* $(A_n)_n = \left(\sqrt{a_n^2 + b_n^2}\right)$.

Théorème 5 (Formule de Parseval) *Soit f une fonction T périodique et continue par morceaux. On a alors :*

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(t)^2 dt = a_0^2 + \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2 + b_n^2\right)$$

Cette valeur est le carré d'une grandeur que l'on appelle valeur efficace.