∽ Fonction logarithme 5

On considère la fonction suivante définie sur $]0;+\infty[$:

$$g(x) = 1x + 6 + 7\ln(x)$$

1. Calculer la limite de g en 0^+
2. Calculer la limite de g en $+\infty$
3. Calculer la dérivée de g.
4. Déterminer le signe de $g'(x)$.
5. En déduire le tableau de variation de $g(x)$.
6. En déduire le nombre de solutions de $g(x) = 0$ et un encadrement d'amplitude 10^{-2} de cette solution.

Correction :

1. On sait que :

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to 0^+} 1x+6 = +6 \\ &\lim_{x\to 0^+} 7\ln(x) = -\infty \quad \text{par propriété du cours} \\ \text{donc } &\lim_{x\to 0^+} 1x+6+7\ln(x) = -\infty \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to +\infty} 1x+6 = +\infty \\ &\lim_{x\to +\infty} 7x\ln(x) = +\infty \quad \text{par propriété du cours} \\ \text{donc } &\lim_{x\to +\infty} 1x+6+7\ln(x) = +\infty \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} g'(x) &= 1+7\times\frac{1}{x} \\ &= \frac{1x+7}{x} \end{aligned}$$

4.

$$g'(x) > 0 \ \ \forall x > 0$$

5. On a :

x	0 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$\|$ $+$
$g(x)$	$\|$ $-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

6. Comme la fonction$g$ est continue, croissante de $-\infty$ à $+\infty$, alors, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit qu'il existe une unique solution $\alpha > 0$ tel que $g(\alpha) = 0$.

$$\begin{aligned} &g(0.4) < 0 \\ &g(0.41) > 0 \\ \text{donc } &0.4 < \alpha < 0.41 \end{aligned}$$