# Fonction logarithme népérien : correction de l'activité

**1.** Rappeler les relations fonctionnelles de la fonction exponentielle.
On sait que :

$$e^{x+y} = e^x \times e^y$$
$$e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$$
$$e^0 = 1$$
$$e^{nx} = \left(e^x\right)^n$$

**2.** Rappeler le tableau de variations de la fonction exponentielle.

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $(e^x)' = e^x$ | | $+$ | |
| $e^x$ | $0$ $\nearrow$ | $1$ $\nearrow$ | $+\infty$ |

**3.** Démontrer que l'équation $e^x = 2$ a une unique solution dans $\mathbb{R}$.
On note $\ln(2)$ cette solution.
On sait que la fonction $f(x) = e^x - 2$ est continue : $f(0) = 1 - 2 = -1$ et $f(1) = e^1 - 2 > 2^1 - 2 > 0$.
On peut donc appliquer le théorème des valeurs intermédiaires : il existe $\alpha \in ]0;1[$ tel que $f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow f(\alpha) = 2$.
Comme la fonction $f$ est strictement croissante, on en déduit l'unicité de $\alpha$.

**4.** D'une manière plus générale, pour quelles valeurs de $b$ l'équation $e^x = b$ a-t-elle une unique solution ?
On note $\ln(b)$ cette solution.
Comme la fonction exponentielle est strictement positive, l'équation précédente ne peut pas avoir de solutions pour $x \leq 0$.
Supposons $b > 0$, on pose $h$ la fonction :

$$h(x) = e^x - b$$

Comme la fonction $x \rightarrow e^x$ tend vers 0 en $-\infty$, il existe un $x_1 \in \mathbb{R}$ tel que $-x_1$ suffisamment grand qui vérifie :

$$e^{x_1} < b \Leftrightarrow h(x_1) < 0$$

Comme la fonction $x \rightarrow e^x$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$, il existe un $x_2 > x_1$ ( par croissance de $x \rightarrow e^x$ ) tel que $x_1$ suffisamment grand qui vérifie :

$$e^{x_2} > b \Leftrightarrow h(x_2) > 0$$

Comme la fonction $h$ est continue, on peut appliquer le théorème des valeurs intermédiaires : il existe $x_0 \in ]x_1 ; x_2[$.
Comme la fonction $h$ est strictement croissante, on en déduit l'unicité de $x_0$.
Finalement, on vient de montrer que l'équation $e^x = b$, $b > 0$, a une unique solution appelée $\ln(b)$ ; si $b \geq 0$, il n'y a aucune solution.

5. Déterminer $\ln(1)$, $\ln(e)$, $\ln(e^2)$ et $\ln\left(\frac{1}{e}\right)$.
Le nombre $\ln(1)$ est la valeur de $x$ pour laquelle $e^x = 1$, on sait que cette valeur est $x = 0 : \ln(1) = 0$.
Le nombre $\ln(e)$ est la valeur de $x$ pour laquelle $e^x = e = e^1$, on sait que cette valeur est $x = 1 : \ln(e) = 1$.
Le nombre $\ln(e^2)$ est la valeur de $x$ pour laquelle $e^x = e^2$, on sait que cette valeur est $x = 2 : \ln(e^2) = 2$.
Le nombre $\ln\left(\frac{1}{e}\right)$ est la valeur de $x$ pour laquelle $e^x = \frac{1}{e} = e^{-1}$, on sait que cette valeur est $x = 0 : \ln\left(\frac{1}{e}\right) = -1$.

6. Déterminer une relation entre $\ln(x \times y)$ d'un côté et $\ln(x)$ et $\ln(y)$ d'un autre côté ; préciser les valeurs de $x$ et de $y$.
On sait que pour $x > 0$ et $y > 0$ :

$$\begin{array}{ll} e^{\ln(x)} = x & \\ e^{\ln(y)} = y & \qquad e^{\ln(x)} \times e^{\ln(y)} = x \times y \Leftrightarrow e^{\ln(x)+\ln(y)} = xy = e^{\ln(xy)} \end{array}$$

Par conséquent, on en déduit que : $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$ pour $x, y > 0$.
En suivant un raisonnement équivalent, on peut montrer que pour $x, y > 0 : \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$.

7. Donner une nouvelle expression de $\ln(x^n)$ ; préciser les valeurs de $x$ et de $n$.
On va montrer, par récurrence sur $n\mathbb{N}$ que, pour $x > 0$ :

$$\ln\left(x^n\right) = n\ln(x)$$

**Initialisation :** On commence par le montrer pour $n = 0 : x^0 = 1$, $\ln(x^0) = \ln(1) = 0$ et $0 \times \ln(x) = 0$ ; l'initialisation est établie.
**Hérédité :** Supposons que la propriété est vraie pour un entier $n \geq 0$ : $\ln(x^n) = n\ln(x)$.
Démontrons cette propriété pour $n + 1$ :

$$\begin{aligned} \ln\left(x^{n+1}\right) = \ln\left(x^n \times x\right) &= \ln\left(x^n\right) + \ln(x) \\ &= n\ln(x) + \ln(x) \text{ en utilisant l'hypothèse de récurrence} \\ &= (n+1)\ln(x) \end{aligned}$$

La propriété est établie au rang $n + 1$ : on vient de montrer l'hérédité.
Finalement, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$ :

$$\ln\left(x^n\right) = n\ln(x)$$

**8.** Donner une nouvelle expression de $\ln\left(\frac{1}{x}\right)$ ; préciser les valeurs de $x$.
Pour $x > 0$, on a $\frac{1}{x} > 0$, donc on peut calculer son logarithme :

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) + \ln(x) = \ln\left(\frac{1}{x} \times x\right) = \ln(1) = 0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$$

**9.** Que vaut $e^{\ln(x)}$ ? En déduire la dérivée de $\ln(x)$ et préciser pour quelles valeurs de $x$ on peut la calculer.
Par définition de $\ln(x)$, on sait que $e^{\ln(x)} = x$, les fonctions impliquées sont toutes dérivables et en utilisant la formule de dérivation d'un produit :

$$e^{\ln(x)} = x \Leftrightarrow \left(e^{\ln(x)}\right)' = x' \Leftrightarrow (\ln(x))' \times e^{\ln(x)} = 1 \Leftrightarrow (\ln(x))' \times x = 1 \Leftrightarrow (\ln(x))' = \frac{1}{x}$$

La dérivée de la fonction $\ln(x)$ est $\frac{1}{x}$.

**10.** Quelle est la monotonie de la fonction $\ln(x)$ ?
Comme la dérivée de la fonction $\ln(x)$ est $\frac{1}{x}$ et que cette fonction est strictement positive sur $]0;+\infty[$, alors la fonction $\ln(x)$ est strictement croissante.

**11.** Que déduire de $x$ et $y$ quand $\ln(x) = \ln(y)$ ? Préciser les valeurs de $x$ et $y$.
Pour $x, y > 0$, le fait que $\ln(x) = \ln(y)$ et que $\ln(x)$ soit strictement croissante implique que $x = y$.

**12.** Que vaut $\ln\left(e^x\right)$ ? Préciser pour quelles valeurs de $x$ on peut faire ce calcul.
Comme $e^x$ est strictement positive pour toute valeur réelle de $x$, on peut effectuer ce calcul pour tout valeur réelle. De plus :

$$e^{\ln(e^x)} = e^x$$

Comme la fonction $e^x$ est strictement croissante, cela implique que : $x = \ln\left(e^x\right)$

**13.** Pour $a > 0$, déterminer l'expression de $y$ en fonction de $x$ quand :

$$e^y = a^x$$

On va appliquer la fonction logarithme de chaque côté de l'égalité :

$$\ln\left(e^y\right) = \ln\left(a^x\right)$$
$$\Leftrightarrow y = x\ln(a)$$

Par conséquent :

$$a^x = e^{x\ln(a)}$$

**14.** Quelle est la limite de $10^n$ quand $n$ est un entier qui tend vers $+\infty$ ?
La limite est $+\infty$.

**15.** Quelle est la limite de $10^{-n}$ quand $n$ est un entier qui tend vers $+\infty$ ?
La limite est 0.

**16.** En utilisant les propriétés des limites de l'exponentielles, en déduire les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^n}$$
$$\lim_{x\to 0^+} x^n \ln(x)$$

avec $n$ un nombre entier.
Pour la première limite, on va prendre $x = 10^k$ avec $k$ entier naturel qui tend vers $+\infty$ et on en conjecturera la limite attendue.

$$\frac{\ln(x)}{x^n} = \frac{\ln(10^k)}{(10^k)^n} = \frac{k}{(e^k)^{n\ln(10)}}$$

D'après les propriétés sur les limites des fonctions exponentielles, cette expression tend vers 0 en $+\infty$.
On peut en conjecturer que la limite de $\frac{\ln(x)}{x^n}$ est 0 en $+\infty$.
Pour la seconde limite, on va prendre $x = 10^{-k}$ avec $k$ entier naturel qui tend vers $+\infty$ et on en conjecturera la limite attendue.

$$x^n \ln(x) = \left(10^{-k}\right)^n \ln(10^{-k}) = \frac{k}{\left(e^{n\ln(10)}\right)^k}$$

D'après les propriétés sur les limites des fonctions exponentielles, cette expression tend vers 0 en 0.
On peut en conjecturer que la limite de $x^n \ln(x)$ est 0 en 0.