ൟ Récurrences 3

On considère la suite :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 0.5u_n + 5.0 \\ u_0 = 8 \end{cases}$$

1. Montrer par récurrence que :

$$u_n \leq u_{n+1} \leq 10$$

2. En déduire que la suite converge et en déduire sa limite.

1. **Initialisation :**

   On a :

$$u_1 = 0.5u_0 + 5.0 = 9.0$$
$$\text{donc } u_0 = 8 \leq u_1 \leq 10$$

   L'initialisation est établie.

   Hérédité :
   On suppose que la propriété est vraie pour un certain rang $n \geq 0$:

$$u_n \leq u_{n+1} \leq 10 \quad \text{c'est l'hypothèse de récurrence}$$

   On part de cette hypothèse :

$$\begin{aligned}
&u_n \leq u_{n+1} \leq 10 \\
\Rightarrow &0.5 \times u_n \leq 0.5 \times u_{n+1} \leq 0.5 \times 10 \\
\Rightarrow &0.5 \times u_n \leq 0.5 \times u_{n+1} \leq 5.0 \\
\Rightarrow &0.5 \times u_n + 5.0 \leq 0.5 \times u_{n+1} + 5.0 \leq 5.0 + 5.0 \\
\Rightarrow &u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 10
\end{aligned}$$

   L'hérédité est établie.

2. On vient de montrer que la suite est croissante et majorée, par conséquent, d'après le théorème de convergence monotone, la suite converge vers l un nombre réel qui vérifie :

$$\begin{aligned}
&l = 0.5 \times l + 5.0 \\
\Leftrightarrow &l - 0.5 \times l = 5.0 \\
\Leftrightarrow &l \times 0.5 = 5.0 \\
\Leftrightarrow &l = \frac{5.0}{0.5} = 10
\end{aligned}$$