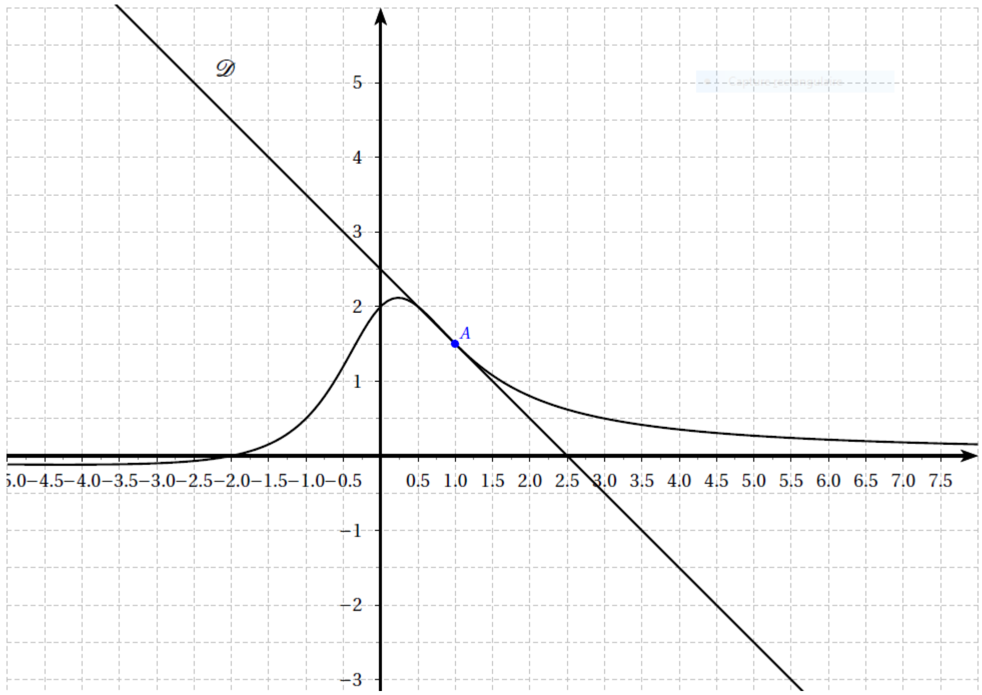
# Compléments sur la dérivation : correction de l'activité




Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x+2}{x^2+1}$ :

**1.** Déterminer les variations de la fonction $f$ graphiquement.
Graphiquement, la courbe semble croissante de $-\infty$ jusque $\approx 0.3$ puis décroissante jusque $+\infty$.

**2.** Donner l'équation de la droite $\mathscr{D}$.
La droite passe par le point $(0;2.5)$ : son ordonnée à l'origine est donc 2.
Elle passe également par le point $A(1;1.5)$, son coefficient directeur est donc :

$$a = \frac{1.5-2}{1-0} = -1$$

Finalement, l'équation réduite de cette droite est :

$$y = -x + 2.5$$

**3.** Déterminer la dérivée de $x+2$ et la dérivée de $x^2+1$.

$$(x+2)' = 1$$
$$(x^2+1)' = 2x$$

**4.** Déterminer la dérivée de $f$.
On va appliquer la formule de dérivation d'un quotient :

$$f'(x) = \left(\frac{x+2}{x^2+1}\right)' = \frac{(x+2)' \times (x^2+1) - (x+2) \times (x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2+1-(x+2)\times 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2-4x+1}{(x^2+1)^2}$$

**5.** Déterminer le signe de $f'$.
Pour déterminer le signe de $f'$, on doit déterminer le signe de $-x^2-4x+1$ et pour cela on va calculer le discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times (-1) \times 1 = 20 > 0$$

On a deux solutions réelles distinctes à l'équation $-x^2-4x+1=0$ :

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4+\sqrt{20}}{-2} = -2-\sqrt{5} \approx -4.24 x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4-\sqrt{20}}{-2} = -2+\sqrt{5} \approx 0.23$$

**6.** En déduire les variations de $f$.

| $x$ | $-\infty$ | | $x_1$ | | $x_2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $f(x_1) = \frac{-\sqrt{5}+2}{2}$ | $\nearrow$ | $f(x_1) = \frac{\sqrt{5}+2}{2}$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

**7.** Comparer cette droite : $y = f'(1)(x-1) + f(1)$ à la droite $\mathscr{D}$.
On va calculer les deux images qui interviennent :

$$f'(1) = -1$$
$$f(1) = \frac{3}{2}$$

Finalement :

$$y = f'(1)(x-1) + f(1) = -1(x-1) + \frac{3}{2} = -x + 2.5$$

Les deux droites sont donc identiques.

**8.** Rappeler la formule donnant l'expression de la tangente au point $x = a$ à la courbe $\mathscr{C}$ représentant la fonction $f$.
L'expression de la tangente au point $x = a$ à la courbe $\mathscr{C}$ représentant la fonction $f$ est :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

**9.** Déterminer la dérivée de la fonction $(x+2)(x^2+1)$.
On peut utiliser la formule de dérivation d'un produit :

$$\left((x+2)(x^2+1)\right)' = (x+2)'(x^2+1) + (x+2)(x^2+1)' = x^2+1+(x+2)\times 2x = 3x^2+4x+1$$