↜ Calculs d'intégrales : cours

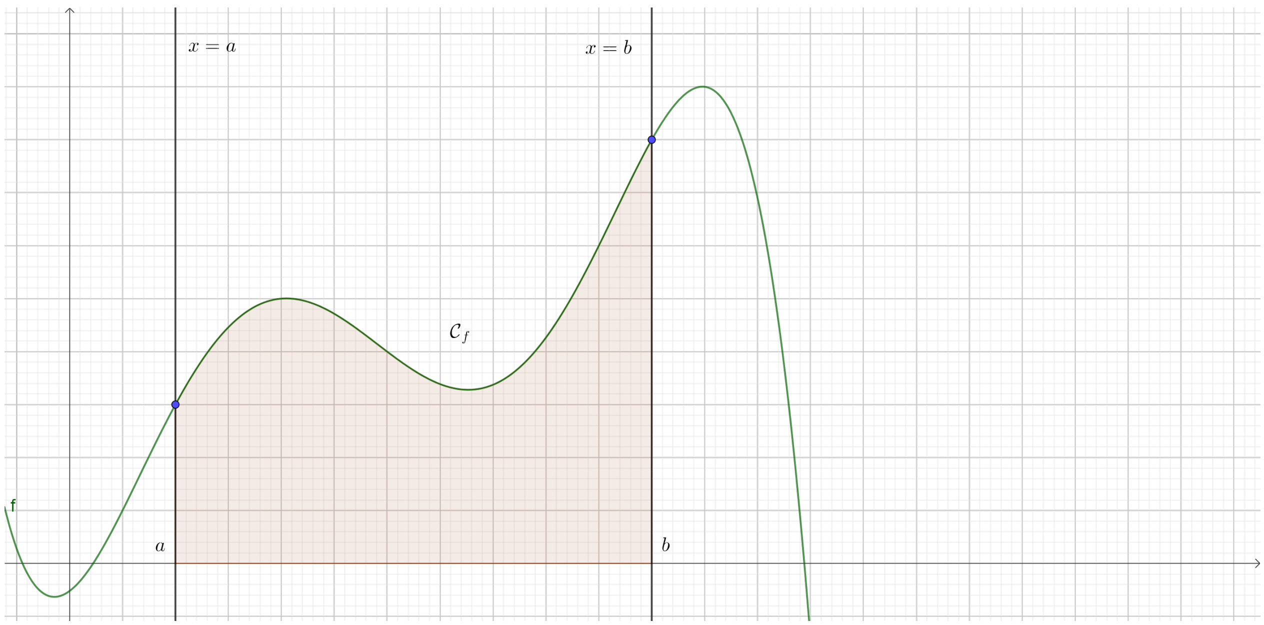
1 Intégrale et aire

1.1 Introduction

Définition

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$.
L'intégrale de f sur $[a;b]$ est l'aire de la surface composée des points $M(x;y)$ tels que :

- ✏ $a \leq x \leq b$.
- ✏ $0 \leq y \leq f(x)$.

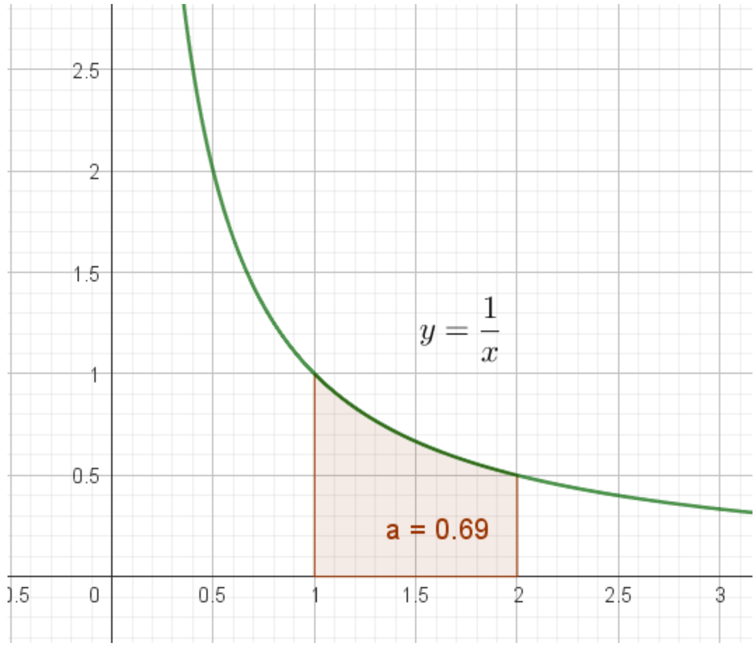


L'intégrale de la fonction f sur $[a;b]$ se note :

$$\int_a^b f(x)dx$$

et se lit **intégrale de** a **à** b **de f(x)dx**.
Les valeurs a et b sont appelées bornes d'intégration.
La variable x est **muette** : on peut la remplacer par t, y ou encore s sans que cela change le sens ou la valeur de l'intégrale. On reconnaîtra la variable d'intégration en regardant celle après le **d**.

Exemple 1 *L'aire de la surface délimitée par la courbe représentant la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$, l'axe des abscisses et les deux droites d'équation $x = -2$ et $x = 1$ se note $\int_1 2$ et vaut environ* 0.69 *unité d'aire.*



1.2 Encadrement

On va prendre l'exemple d'une fonction continue, positive et monotone sur un intervalle $[a;b]$.
On va découper l'intervalle d'intégration $[a;b]$ en n intervalles égaux : leur longueur sera de $\frac{b-a}{n}$.
L'intervalle $[a;b]$ peut s'écrire :

$$[a;b] = \cup_{i=0}^{n-1}\left[a + i \times \frac{b-a}{n}; a + (i+1) \times \frac{b-a}{n}\right]$$

Sur chacun des intervalles $\left[a + i \times \frac{b-a}{n}; a + (i+1) \times \frac{b-a}{n}\right]$, la fonction f peut être encadrée par :

- la valeur $f\left(a + i \times \frac{b-a}{n}\right)$
- la valeur $f\left(a + (i+1) \times \frac{b-a}{n}\right)$

L'ordre d'encadrement va dépendre la monotonie de f.
Finalement sur chacun de ces intervalles, l'aire de la fonction f sera encadrée par les aires des rectangles suivantes :

- la valeur $\frac{b-a}{n} f\left(a + i \times \frac{b-a}{n}\right)$
- la valeur $\frac{b-a}{n} f\left(a + (i+1) \times \frac{b-a}{n}\right)$

On peut traduire ces inégalités dans une fonction Python, après avoir défini la fonction f :

```
from math import log
def f(x):
    y=log(x)
    return y


def encadrement(a,b,n):
    l=(b-a)/n
    x=a
    m=0
    p=0
    for i in range(0,n):
        m=m+l*f(x)
        x=x+l
        p=p+l*f(x)
    return [m,p]
```

Dans cet exemple, on a étudié la fonction $ln(x)$ et on trouve les encadrements suivants :

```
In [27]: encadrement(1,2,10)
Out[27]: [0.35122057771775705, 0.42053529577375165]

In [28]: encadrement(1,2,100)
Out[28]: [0.38282445857472924, 0.3897559303803287]

In [29]: encadrement(1,2,1000)
Out[29]: [0.3859477458629128, 0.3866408930434727]
```

1.3 Passage aux fonctions de signe quelconque

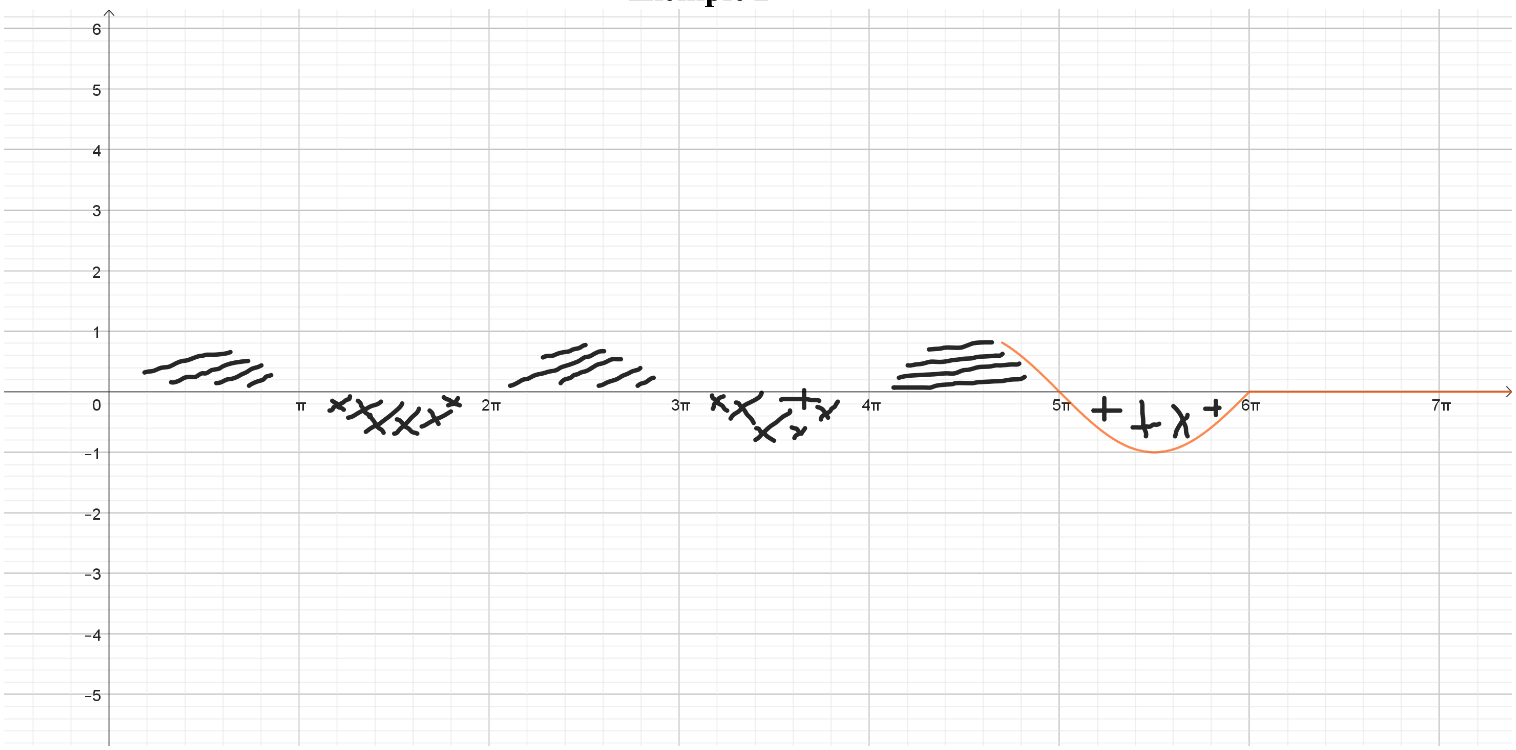
Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$.
On appelle intégrale de f sur $[a;b]$, le nombre $I=\int_a^b f(x)dx$ défini par :

$$I=\int_a^b f(x)dx = Aire(P) - Aire(N)$$

où $Aire(P)$ est la somme des aires des surfaces sous la courbe et au dessus de l'axe des abscisess quand f est positive et $Aire(N)$ est la somme des aires des surfaces au dessus de la courbe et sous l'axe des abscisses quand f est négative.

Exemple 2



L'intégrale $\int 0^{6\pi} \sin(x)dx$ *est la somme des aires hachurées moins la somme des aires cruciformes; on peut conjecturer que cette intégrale vaut* 0.

1.4 Propriétés

Propriétés élémentaires

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et a, b et c des réels de I :

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx \quad \text{Relation de Chasles}$$

2 Intégrale et primitive

2.1 Fonction définie par une intégrale

Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$.
La fonction F définie sur $[a;b]$ par $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ est la primitive de f qui s'annule en a.

Preuve

On va démontrer cette propriété dans le cas où f est croissante.
Soit $x\in[a;b]$ et $\epsilon\in\mathbb{R}$ tel que $x+\epsilon\in[a;b]$:

$$\begin{aligned}\frac{F(x+\epsilon)-F(x)}{\epsilon}&=\frac{\int_a^{x+\epsilon} f(t)dt-\int_a^x f(t)}{\epsilon}\\&=\frac{\int_x^{x+\epsilon} f(t)dt}{\epsilon}\qquad\text{relation de Chasles}\end{aligned}$$

Premier cas : $\epsilon>0$.
Dans ce cas, $x+\epsilon\geq x$, de plus, comme f est croissante, alors $f(t)-f(x)\geq 0\forall t\in[x;x+\epsilon]$.
L'intégrale de $f(t)-f(x)$ sur $[x;x+\epsilon]$ correspond donc à une aire et est positive, par conséquent :

$$\begin{aligned}\int_x^{x+\epsilon}\big(f(t)-f(x)\big)dt\geq 0\Leftrightarrow\int_x^{x+\epsilon} f(t)dt&\geq\int_x^{x+\epsilon} f(x)dt\\\Leftrightarrow\int_x^{x+\epsilon} f(t)dt&\geq\epsilon f(x)dt\end{aligned}$$

De même, $f(x+\epsilon)-f(t)$ est positive pour toute valeur de $t\in[x;x+\epsilon]$ et par conséquent :

$$\int_x^{x+\epsilon} f(t)dt\leq\epsilon f(x+\epsilon)$$

Finalement :

$$f(x)\leq\frac{F(x+\epsilon)-F(x)}{\epsilon}\leq f(x+\epsilon)$$

Quand ϵ tend vers 0, on obtient, d'après le théorème d'encadrement des limites, :

$$F'(x)=f(x)$$

Cela signifie que F est dérivable sur $[a;b]$ et de dérivée f ; de plus $F(a)=\int_a^a f(t)dt=0$.

Deuxième cas : $\epsilon > 0$.
Dans ce cas, $x+\epsilon \leq x$, de plus, comme f est croissante, alors $f(x) - f(t) \geq 0 \forall t \in [x+\epsilon; x]$.
L'intégrale de $f(x) - f(t)$ sur $[x+\epsilon; x]$ correspond donc à une aire et est positive, par conséquent :

$$\begin{aligned}\int_{x+\epsilon}^{x} \big(f(x) - f(t)\big)\, dt \geq 0 &\Leftrightarrow \int_{x+\epsilon}^{x} f(x) dt \geq \int_{x+\epsilon}^{x} f(t) dt \\ &\Leftrightarrow \int_{x+\epsilon}^{x} f(t) dt \leq -\epsilon f(x)\end{aligned}$$

De même, $f(t) - f(x+\epsilon)$ est positive pour toute valeur de $t \in [x+\epsilon; x]$ et par conséquent :

$$\int_{x+\epsilon}^{x} f(t) dt \geq -\epsilon f(x+\epsilon)$$

Finalement :

$$\begin{aligned} & -\epsilon f(x+\epsilon) \leq \int_{x+\epsilon}^{x} f(t) dt \leq -\epsilon f(x) \\ \text{donc} \quad & \epsilon f(x+\epsilon) \geq \int_{x}^{x+\epsilon} f(t) dt \geq \epsilon f(x) \\ \text{ainsi} \quad & f(x+\epsilon) \leq \frac{F(x+\epsilon) - F(x)}{\epsilon} \leq f(x)\end{aligned}$$

Quand ϵ tend vers 0, on obtient, d'après le théorème d'encadrement des limites, :

$$F'(x) = f(x)$$

Cela signifie que F est dérivable sur $[a; b]$ et de dérivée f ; de plus $F(a) = \int_a^a f(t) dt = 0$.

Théorème

Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives.

Exemple 3 *Étudier les variations de la fonction $F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$ pour $x \geq 0$.*
On sait que la fonction $F(x)$ est dérivable et a pour dérivée $f(x) = e^{-x^2}$ qui est strictement positive pour $x \geq 0$.
La fonction F est donc croissante pour $x \geq 0$.

2.2 Calcul d'intégrales

Propriété

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$.
Si F est une primitive de f, alors :

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

Preuve

La fonction $\tilde{F}(x) = \int_a^x f(t)dt$ est la primitive de f s'annulant en a.
On a $\tilde{F}(b) = \int_a^b f(t)dt$.
Soit F une primitive de f. On sait qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $F(x) = \tilde{F}(x) + k$.
Par conséquent :

$$\begin{aligned} F(b) &= \tilde{F}(b) + k \\ F(a) &= \tilde{F}(a) + k = 0 + k = k \\ \text{donc } F(b) &= \tilde{F}(b) + F(a) \\ \text{ainsi } \int_a^b f(t)dt &= \tilde{F}(b) = F(b) - F(a) \end{aligned}$$

Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux réels de I et F une primitive de f sur $[a;b]$.
On appelle intégrale de f sur $[a;b]$, le nombre $I = \int_a^b f(x)dx$ la différence $F(b) - F(a)$.

Exemple 4

$$A = \int_1^e \frac{1}{x}dx = [\ln(x)]_1^e = \ln(e) - \ln(1) = 1$$

$$B = \int_1^2 \frac{1}{x^2}dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^2 = -\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{1}\right) = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

$$C = \int_0^2 \left(3x^2 + 4x - 5\right)dx = \left[x^3 + 2x^2 - 5x\right]_0^2 = 2^3 + 2 \times 2^2 - 5 \times 2 - \left(0^3 + 2 \times 0^2 - 5 \times 0\right) = 8 + 8 - 10 = 6$$

$$D = \int_0^1 te^{-t^2}dt = \left[-\frac{1}{2}e^{-t^2}\right]_0^1 = -\frac{1}{2}e^{-1^2} - \left(-\frac{1}{2}e^{-0^2}\right) = -\frac{1}{2}e^{-1} + \frac{1}{2}$$

2.3 Propriétés

Propriétés

Soit f une fonction continue sur un intervalle I ; a et b deux réels de I :

- ✏ $\forall k \in \mathbb{R}$, $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$.
- ✏ $\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.

Propriétés

Soit f une fonction continue sur un intervalle I ; a et b deux réels de I tels que $a \leq b$:

- ✏ Si, pour tout $x \in [a;b]$, $f(x) \geq 0$, alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.
- ✏ Si, pour tout $x \in [a;b]$, $f(x) \geq g(x)$, alors $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$.

Exemple 5 (Intégrales de Wallis) *Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la suite (W_n) par :*

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin(t)^n dt$$

Montrer que la suite est décroissante et convergente.

3 Aire délimitée par deux courbes

Propriété

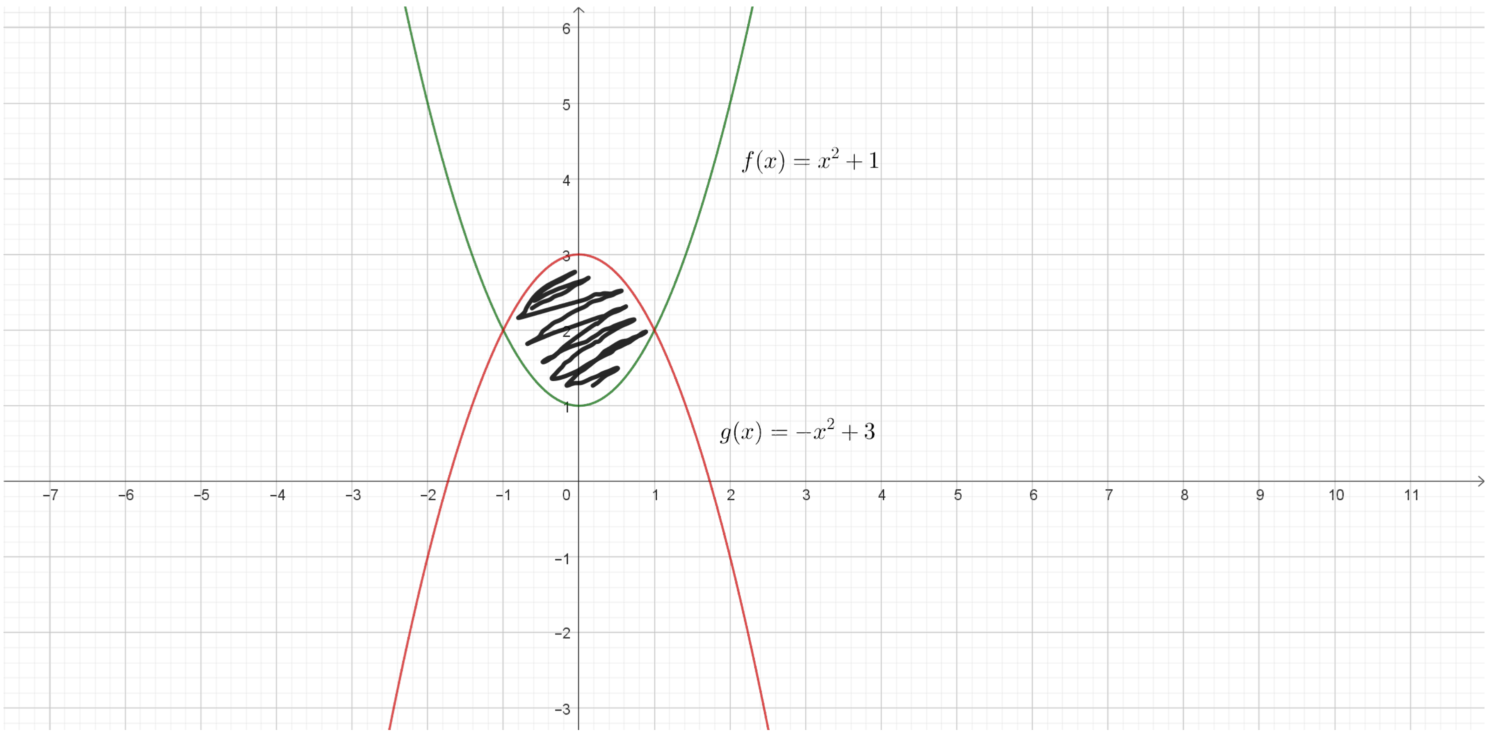
Soit f et g deux fonctions définies sur I un intervalle telles que :

- ✏ $a \leq b$ avec $a, b \in I$
- ✏ $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in [a;b]$
- ✏ les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ représentant respectivement f et g se coupent en a et b.

L'aire comprise entre les deux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ pour x compris entre a et b est l'intégrale suivante :

$$\int_a^b \big(g(x) - f(x)\big)\, dx$$

Exemple 6 *On va déterminer la valeur de l'aire hachurée :*



L'aire recherchée se calcule de la manière suivante :

$$
\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1} \left(g(x) - f(x)\right) dx \\
&= \int_{-1}^{1} \left(-x^2 + 3 - (x^2+1)\right) dx \\
&= \int_{-1}^{1} \left(-x^2 + 3 - (x^2+1)\right) dx \\
&= \int_{-1}^{1} \left(-2x^2 + 2\right) dx \\
&= \left[-\frac{2}{3}x^3 + 2x\right]_{-1}^{1} \\
&= -\frac{2}{3} \times 1^3 + 2 \times 1 - \left(-\frac{2}{3} \times (-1)^3 + 2 \times (-1)\right) \\
&= -\frac{2}{3} + 2 - \frac{2}{3} + 2 \\
&= \frac{8}{3} \textit{ unités d'aire}
\end{aligned}
$$

4 Valeur moyenne d'une fonction

Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ avec $a \neq b$.
On appelle valeur moyenne de f sur $[a;b]$ le nombre réel :

$$m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

Exemple 7 *On modélise à l'aide d'une fonction le nopbre de malades lors d'une épidémie.*
Au bout de x jours après le signalement des premiers cas, le nombre de malades est égale à $f(x) = 16x^2 - x^3$.
Déterminer le nombre moyen de malades chaque jour sur une période de 16 jours.
Le nombre moyen m de malades par jour sur une période de 16 jours est :

$$\begin{aligned}
m &= \frac{1}{16-0}\int_0^{16} f(x)dx \\
&= \frac{1}{16-0}\int_0^{16} \left(16x^2 - x^3\right)dx \\
&= \frac{1}{16}\left[\frac{16}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^{16} \\
&= \frac{1}{16}\left(\frac{16}{3}\times 16^3 - \frac{1}{4}\times 16^4 - \left(\frac{16}{3}\times 0^3 - \frac{1}{4}\times 0^4\right)\right) \\
&= \frac{1}{16}\left(\frac{16^4}{3} - \frac{16^4}{4}\right) \\
&= \frac{16^3}{12} \\
&= \frac{1024}{3} \approx 341
\end{aligned}$$

En moyenne, sur une période de 16 jours, le nombre moyen journalier de malade est de 341.

5 Intégration par parties

Théorème

Soit u et v deux fonctions dérivables sur $[a;b]$. Alors, on a :

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$$

Preuve

On part de la formule de dérivation d'un produit :

$$\begin{aligned}
&(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)\\
\text{donc } &\int_a^b (u(x)v(x))'\,dx = \int_a^b u'(x)v(x)\,dx + \int_a^b u(x)v'(x)\,dx\\
&\Rightarrow u(b)v(b) - u(a)v(a) = \int_a^b u'(x)v(x)\,dx + \int_a^b u(x)v'(x)\,dx\\
&\Rightarrow [u(x)v(x)]_a^b = \int_a^b u'(x)v(x)\,dx + \int_a^b u(x)v'(x)\,dx\\
&\Rightarrow \int_a^b u'(x)v(x)\,dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,dx
\end{aligned}$$

Exemple 8 *Calculer les intégrales suivantes :*

$$\begin{aligned}
A &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(x)\,dx\\
B &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin(x)\,dx\\
C &= \int_1^{e^2} \ln(x)\,dx
\end{aligned}$$

6 Intégration et suites

Exemple 9 (Intégrales de Wallis) *Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la suite (W_n) par :*

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin(t)^n\,dt$$

Donner une relation de récurrence entre W_{n+2} et W_n.
En déduire l'expression des W_{2n} et des W_{2n+1} pour tout entier naturel n.