Fonction logarithme 6

On considère la fonction suivante définie sur $]-\frac{3}{20};+\infty[$:

$$f(x) = \ln(20x+3) - 3x + 2$$

1. Calculer la limite de f en $-\frac{3}{20}$
2. Calculer la limite de f en $+\infty$
3. Calculer la dérivée de f.
4. Déterminer le signe de $f'(x)$.
5. En déduire le tableau de variation de $f(x)$.
6. En déduire le nombre de solutions de $f(x) = 0$ et un encadrement d'amplitude 10^{-2} de cette solution.

Correction :

1. On sait que :

$$\lim_{x\to -\frac{3}{20}^+} \ln(20x+3) = -\infty$$
$$\lim_{x\to -\frac{3}{20}^+} -3x+2 = \frac{3}{20}\times 3+2$$
$$\text{donc } \lim_{x\to -\frac{3}{20}^+} \ln(20x+3)+3x+2 = -\infty$$

2.

$$\lim_{x\to +\infty} \ln(20x+3) = +\infty$$
$$\lim_{x\to +\infty} -3x+2 = -\infty$$
$$\text{donc } \lim_{x\to +\infty} \ln(20x+3)-3x+2 = -\infty \quad \text{par dominance de } x$$

3.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{20}{20x+3} - 3 \\ &= \frac{20-3-(20x+3)}{20x+3} \\ &= \frac{20-60x-9)}{20x+3} \\ &= \frac{11-60x}{20x+3} \\ &= \frac{11-60x}{20x+3} \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\Leftrightarrow \frac{11-60x}{20x+3} > 0 \\ &\Leftrightarrow 11-60x > 0 \text{ car } 20x+3 > 0 \\ &\Leftrightarrow x < \frac{11}{60} \end{aligned}$$

5. On a :

x	$-\frac{3}{20}$		$\frac{11}{60}$		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$g(x)$	‖ $-\infty$	↗	3.3471199848859	↘	$-\infty$

6. Comme la fonction$g$ est continue, croissante de $-\infty$ à $3.3471199848859 > 0$, alors, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit qu'il existe une unique solution $\alpha_1 \in]-\frac{3}{20};\frac{11}{60}[$ tel que $g(\alpha_1)=0$.
Comme la fonction$g$ est continue, croissante de $3.3471199848859 > 0$ à $-\infty$

, alors, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit qu'il existe une unique solution $\alpha_2 \in]-\frac{3}{20};+\infty[$ tel que $g(\alpha_2)=0$.

$$\begin{aligned}
&f(-0.15)<0\\
&f(-0.14)>0\\
\text{donc } &-0.15<\alpha_1<-0.14\\
&f(1.9)>0\\
&f(1.91)<0\\
\text{donc } &1.9<\alpha_2<1.91
\end{aligned}$$