

☞ Fonction logarithme 1

On considère la fonction suivante définie sur $]0; +\infty[$:

$$f(x) = 3x + 7 - 2x \ln(x)$$

1. Calculer la limite de f en 0^+
2. Calculer la limite de f en $+\infty$
3. Calculer la dérivée de f .
4. Déterminer le signe de $f'(x)$.
5. En déduire le tableau de variation de $f(x)$.
6. Déterminer le nombre de solutions de $f(x) = 0$ et en donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} .

Correction :

1. On sait que :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} 3x + 7 &= 7 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} 2x \ln(x) &= 0 \text{ par propriété du cours} \\ \text{donc } \lim_{x \rightarrow 0^+} 3x + 7 - 2x \ln(x) &= 7\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x + 7 &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} -2x \ln(x) &= -\infty \text{ par propriété du cours} \\ \text{donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x + 7 - 2x \ln(x) &= -\infty \text{ par prédominance de } x \ln(x)\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}f'(x) &= 3 - 2(x \ln(x))' \\ &= 3 - 2(x' \ln(x) + x \times \ln(x))' \\ &= 3 - 2\left(\ln(x) + x \times \frac{1}{x}\right)' \\ &= 3 - 2(\ln(x) + 1)' \\ &= 1 - 2\ln(x)\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}f'(x) &\geq 0 \\ 1 - 2\ln(x) &\geq 0 \\ -2\ln(x) &\geq -1 \\ \ln(x) &\leq \frac{-1}{-2} \\ x &\leq e^{\frac{-1}{-2}}\end{aligned}$$

5. On a :

x	0	$e^{\frac{-1}{-2}}$	$+\infty$
$f'(x)$		+	0 -
$f(x)$	7	$7 + 2e^{\frac{-1}{-2}}$	$-\infty$

6. D'après le tableau de variation, comme $7 > 0$, la fonction f ne peut pas s'annuler sur l'intervalle $]0; e^{\frac{-1}{-2}}]$.

Pour $x > e^{\frac{-1}{-2}}$, la fonction est décroissante de $7 + 2e^{\frac{-1}{-2}} > 0$ vers $-\infty$, donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe une unique valeur

$\alpha > e^{\frac{-1}{-2}}$ telle que $f(\alpha) = 0$.

En utilisant la calculatrice, on trouve :

$$f(1.64) > 0$$

$$f(1.65) < 0$$

$$1.64 \leq \alpha \leq 1.65$$