☙ Activité 2 : calculs de limites

Exemple 1 *On va détailler le calcul de certaines limites.*

$$\lim_{x\to 4^+} \frac{1-2x}{4-x}$$
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{1-2x}{4-x}$$
$$\lim_{x\to -\infty} x^3+x^2+3x+2$$

1. *L'écriture $x \to 4^+$ signifie que l'on s'approche de 4 mais en restant plus grand que 4. Cela va nous permettre de donner un signe au 0 du dénominateur.*
   On sait que $\lim\limits_{x\to 4} 1-2x = -7$ mais aussi que $\lim\limits_{x\to 4} 4-x = 0$ et diviser un nombre réel non nul par 0 va donner un limite infinie sauf que dans ce cas, on a un indétermination sur le signe : il est donc nécessaire de préciser si on étudie la limite à gauche ou la limite à droite pour donner un signe à cet infini.
   On sait que x s'approche de 4 tout en étant plus grand que 4 :

   $$x > 4 \Leftrightarrow 0 > 4-x \Leftrightarrow 4-x < 0$$

   Par conséquent :

   $$\lim_{x\to 4^+} 4-x = 0^-$$
   $$\textit{donc } \lim_{x\to 4^+} \frac{1-2x}{4-x} = \frac{-7}{0^-} = +\infty \textit{ par la règle des signes}$$

   Il y a ainsi une asymptote verticale d'équation $x = 4$ à la courbe représentant la fonction.

2. *On a :*

   $$\lim_{x\to +\infty} 1-2x = -\infty$$
   $$\lim_{x\to +\infty} 4-x = -\infty$$

   On a donc une limite du type $\frac{-\infty}{-\infty}$, ce qui est une forme indéterminée.
   Pour lever l'indétermination, on va factoriser le numérateur par sa puissance de x de plus haut degré ainsi que le dénominateur :

   $$1-2x = x\left(\frac{1}{x} - \frac{2x}{x}\right) = x\left(\frac{1}{x} - 2\right)$$
   $$4-x = x\left(\frac{4}{x} - \frac{x}{x}\right) = x\left(\frac{4}{x} - 1\right)$$
   $$\frac{1-2x}{4-x} = \frac{x\left(\frac{1}{x}-2\right)}{x\left(\frac{4}{x}-1\right)} = \frac{\frac{1}{x}-2}{\frac{4}{x}-1}$$
   $$\textit{or } \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} - 2 = 0-2 = -2 \textit{ par somme de limites}$$
   $$\textit{et } \lim_{x\to +\infty} \frac{4}{x} - 1 = 0-1 = -1 \textit{ par somme de limites}$$
   $$\textit{donc } \lim_{x\to +\infty} \frac{1-2x}{4-x} = \frac{-2}{-1} = 2 \textit{ par quotient de limites}$$

   Il y a ainsi une asymptote d'équation $y = 2$ à la courbe représentant la fonction en ∞

3. *On va détailler limite de chacun des termes de la somme :*

$$\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} 3x+2 = -\infty$$

donc $\lim_{x\to-\infty} x^3+x^2+3x+2$ *est de la forme* $-\infty+\infty$*, ce qui est une forme indéterminée.*
Pour lever cette indétermination, on va factoriser par la plus grande puissance de x dans la somme :

$$x^3+x^2+3x+2 = x^3\left(1+\frac{x^2}{x^3}+\frac{3x}{x^3}+\frac{2}{x^3}\right) = x^3\left(1+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)$$
$$\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} 1+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3} = 1 \text{ par somme de limites}$$
$$\text{donc } \lim_{x\to-\infty} x^3+x^2+3x+2 = -\infty \text{ par produit de limites}$$

Dans ce cas, on ne peut pas conclure à la présence d'asymptote.

Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to5^-} \frac{1-3x}{10-2x}$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1-3x}{10-2x}$$
$$\lim_{x\to-\infty} x^3-5x^2-3x+2$$

Exemple 2 *On va utiliser d'autre méthodes pour déterminer les limites suivantes :*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x-e^{2x}}{x^2+1}$$
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sin(x)}{x^2+1}$$
$$\lim_{x\to+\infty} \cos\left(e^{-x}\right)$$

1. *On commence par déterminer la limite du numérateur et celle du dénominateur :*

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} -e^{2x} = -\infty$$

On a déjà une forme indéterminée du type $+\infty-\infty$ *au numérateur. Pour résoudre le souci, on va factoriser par l'exponentielle avec la plus grande puissance et on va factoriser le dénominateur par la plus grande puissance de x afin de faire apparaître une forme dont on connaît la limite :*

$$e^x-e^{2x} = e^{2x}\left(\frac{e^x}{e^{2x}}-\frac{e^{2x}}{e^{2x}}\right) = e^{2x}\left(e^{-x}-1\right)$$
$$x^2+1 = x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$$

Finalement, on peut écrire :

$$\frac{e^x - e^{2x}}{x^2+1} = \frac{e^{2x}}{x^2} \times \frac{e^{-x}-1}{1+\frac{1}{x^2}}$$

$$\textit{or } \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{e^x}{x}\right)^2 = +\infty \textit{ par propriété du cours}$$

$$\textit{et } \lim_{x\to+\infty} e^{-x} - 1 = -1$$

$$\textit{puis } \lim_{x\to+\infty} 1 + \frac{1}{x^2} = 1$$

$$\textit{donc } \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - e^{2x}}{x^2+1} = -\infty \textit{ par produits et quotients de limites}$$

2. *Le problème pour cette limite est que la fonction* $\sin(x)$ *n'a pas de limite en* $-\infty$ *mais on sait qu'on peut l'encadrer entre* -1 *et* 1*, par conséquent :*

$$\frac{-1}{x^2+1} \leq \frac{\sin(x)}{x^2+1} \leq \frac{1}{x^2+1}$$

$$\textit{or } \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

D'après le théorème d'encadrement des limites, on en déduit que la limite de $\frac{\sin(x)}{x^2+1}$ *en* $-\infty$ *est* 0 *: la courbe représentant cette fonction admet donc une asymptote d'équation* $y = 0$ *en* $-\infty$*.*

3. *On commence par déterminer la limite de la fonction la plus à l'intérieur :*

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$$

Ensuite on détermine la limite de la fonction la plus à l'exterieure en la limite précédente :

$$\lim_{t\to 0} \cos(t) = 1$$

Donc, par composition des limites, on en déduit que :

$$\lim_{x\to+\infty} \cos\left(e^{-x}\right) = 1$$

La courbe représentant cette fonction admet donc une asymptote d'équation $y = 1$ *en* $+\infty$*.*

Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x^3+1}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos(x)}{x^4+1}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \sin\left(e^x\right)$$