☙ Révision : équations différentielles, correction

Exercice 1 *On considère les équations différentielles suivantes :*

$$\begin{aligned}(E) &: y'(t) - 5y(t) = -7e^{-2t}\\ (E_0) &: y'(t) - 5y(t) = 0\end{aligned}$$

1. *Déterminer les solutions de* (E_0).
   Les solutions de (E_0) *sont de la forme :*

   $$y_0(t) = Ke^{5t}$$

   avec $K \in \mathbb{R}$.
2. *Montrer que* $h(t) = e^{-2t}$ *est solution particulière de* (E).
   On fait les calculs suivants :

   $$\begin{aligned}h'(t) &= (e^{-2t})' = -2e^{-2t}\\ h'(t) - 5h(t) &= -2e^{-2t} - 5e^{-2t} = -7e^{-2t}\end{aligned}$$

   La dernière ligne nous montre donc que h est une solution particulière de (E)
3. *En déduire les solutions de* (E).
   Les solutions (E) *sont de la forme :*

   $$y(t) = y_0(t) + h(t) = Ke^{5t} + e^{-2t}$$

   avec $K \in \mathbb{R}$.
4. *Déterminer la solution* $f(t)$ *telle que* $f(0) = 5$.
   Il s'agit de trouver la bonne valeur de K *pour laquelle* $y_0(t)$ *vaut* 0 *en* 5. *On résout :*

   $$Ke^{5\times 0} + e^{-2\times 0} = K \times 1 + e^0 = 5 \Leftrightarrow K + 1 = 5 \Leftrightarrow K = 4$$

   Par conséquent, $f(t) = 4e^{5t} + e^{-2t}$
5. *Dériver cette solution* $f(t)$.
   $f'(t) = 4 \times 5e^{5t} - 2e^{-2t} = 20e^{5t} - 2e^{-2t}$

Exercice 2 *On considère les équations différentielles suivantes :*

$$\begin{aligned}(E) &: y''(t) - 5y'(t) + 4y(t) = 8\\ (E_0) &: y''(t) - 5y'(t) + 4y(t) = 0\end{aligned}$$

1. *Déterminer les solutions de* (E_0).
   On commence à résoudre l'équation caractéristique :

   $$(E_c) : r^2 - 5r + 4 = 0$$

   On calcule discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 4 = 9 > 0$ *: il y a donc deux solutions réelles distinctes :*

   $$r_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5+3}{2} = 4 \qquad r_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5-3}{2} = 1$$

   Les solutions de $(E_0$ *sont de la forme* $y_0(t) = Ae^{1t} + Be^{4t}$ *avec* A, B *des constantes réelles*
2. *Déterminer une solution particulière de* (E) *sous la forme d'une constante.*
   Une solution constante de (E_0) *est* $\frac{8}{4} = 2$
3. *En déduire les solutions de* (E).
   Les solutions de (E) *sont de la forme* $y(t) = Ae^{1t} + Be^{4t} + 2$

4. *Déterminer la solution $f(t)$ telle que $f(0)=0$ et $f'(0)=0$.*
   Première condition *:*

$$f(0)=0 \Leftrightarrow Ae^{1\times 0}+Be^{4\times 0}+2=0 \Leftrightarrow A+B+2=0 \Leftrightarrow A+B=-2$$

Deuxième condition *:*

$$f'(t)=Ae^{1t}+4Be^{4t}$$
$$f'(0)=0 \Leftrightarrow Ae^{1\times 0}+4Be^{4\times 0}=0 \Leftrightarrow A+4B=0$$

On doit résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} A+B=-2 \\ A+4B=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A+B=-2 \\ -3B=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-\frac{8}{3} \\ B=\frac{2}{3} \end{cases}$$

Exercice 3 *On considère les équations différentielles suivantes :*

$$(E)\ :\ y''(t)+10y'(t)+25y(t)=25t+10$$
$$(E_0)\ :\ y''(t)+10y'(t)+25y(t)=0$$

1. *Déterminer les solutions de (E_0).*
   On commence par résoudre l'équation caractéristique :

$$(E_c)\ :\ r^2+10r+25=0$$

On calcule discriminant $\Delta=b^2-4ac=10^2-4\times 25=0$: il y a donc une solution réelle double :

$$r_0=-\frac{b}{2a}=-\frac{10}{2}=-5$$

Les solutions de (E_0) sont de la forme $y_0(t)=(At+B)e^{-5t}$ avec A,B des constantes réelles

2. *Montrer que $h(t)=t$ une solution particulière de (E).*
   On fait les calculs suivants :

$$h'(t)=(t)'=1$$
$$h''(t)=1'=0$$
$$h''(t)+10h'(t)+25h(t)=0+10+25t$$

La dernière ligne nous montre donc que h est une solution particulière de (E)

3. *En déduire les solutions de (E).*
   Les solutions de (E) sont de la forme $y(t)=(At+B)e^{-5t}+t$ avec A,B des constantes réelles
4. *Déterminer la solution $f(t)$ telle que $f(0)=0$ et $f'(0)=0$.*
   Première condition *:*

$$f(0)=0 \Leftrightarrow (A\times 0+B)e^{-5\times 0}+0=0 \Leftrightarrow B=0$$

Deuxième condition *:*

$$f'(t)=\left((At+B)e^{-5t}+t\right)'=(At+B)'\times e^{-5t}+(At+B)\times(e^{-5t})'+1=Ae^{-5t}-5(At+B)e^{-5t}+1$$
$$f'(t)=Ae^{-5t}-5Ate^{-5t}+1$$
$$f'(0)=0 \Leftrightarrow Ae^{-5\times 0}-5A\times 0\times e^{-5\times 0}+1=0 \Leftrightarrow A+1=0 \Leftrightarrow A=-1$$

Donc $f(t)=-te^{-5t}+t$

Exercice 4 *On considère les équations différentielles suivantes :*

$$\begin{aligned}(E) &\ :\ 2y''(t) - 2y'(t) + y(t) = 4\sin(2t) - 7\cos(2t)\\ (E_0) &\ :\ 2y''(t) - 2y'(t) + y(t) = 0\end{aligned}$$

1. *Déterminer les solutions de* (E_0).
On commence par résoudre l'équation caractéristique :

$$(E_c)\ :\ 2r^2 - 2r + 1 = 0$$

On calcule discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 2 = -4$ *: il y a donc deux solutions complexes conjuguées :*

$$z = \frac{-b + \sqrt{|\Delta|}i}{2a} = \frac{2+2i}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i = \alpha + \beta i$$
$$\bar{z} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

Les solutions de $(E_0$ *sont de la forme* $y_0(t) = e^{\frac{1}{2}t}\left(A\cos\left(\frac{1}{2}t\right) + B\sin\left(\frac{1}{2}t\right)\right)$ *avec* A, B *des constantes réelles*

2. *Montrer que* $h(t) = \cos(2t)$ *est une solution particulière de* (E).
On fait les calculs suivants :

$$h'(t) = \cos(2t)' = -2\sin(2t)$$
$$h''(t) = (-2\sin(2t))' = -2 \times 2\cos(2t) = -4\cos(2t)$$
$$2h''(t) - 2h'(t) + h(t) = 2 \times (-4\cos(2t)) - 2 \times (-2\sin(2t)) + \cos(2t) = -8\cos(2t) + 4\sin(2t) + \cos(2t)$$
$$\text{donc } 2h''(t) - 2h'(t) + h(t) = 4\sin(2t) - 7\cos(2t)$$

La dernière ligne nous montre donc que h est une solution particulière de (E)

3. *En déduire les solutions de* (E).
Les solutions de (E) *sont de la forme* $y(t) = e^{\frac{1}{2}t}\left(A\cos\left(\frac{1}{2}t\right) + B\sin\left(\frac{1}{2}t\right)\right) + \cos(2t)$ *avec* $A, B \in \mathbb{R}$

4. *Déterminer la solution* $f(t)$ *telle que* $f(0) = 0$ *et* $f'(0) = 0$.
Première condition *:*

$$f(0) = 0 \Leftrightarrow e^{\frac{1}{2}\times 0}\left(A\cos\left(\frac{1}{2}\times 0\right) + B\sin\left(\frac{1}{2}\times 0\right)\right) + \cos(2\times 0) = 0 \Leftrightarrow 1 \times (1 \times A + 0 \times B) + 1 = 0 \Leftrightarrow A = -1$$

Deuxième condition *:*

$$f'(t) = \left(e^{\frac{1}{2}t}\left(-\cos\left(\frac{1}{2}t\right) + B\sin\left(\frac{1}{2}t\right)\right) + \cos(2t)\right)'$$
$$f'(t) = \left(e^{\frac{1}{2}t}\right)' \times \left(-\cos\left(\frac{1}{2}t\right) + B\sin\left(\frac{1}{2}t\right)\right) + \left(e^{-\frac{1}{2}t}\right) \times \left(-\cos\left(\frac{1}{2}t\right) + B\sin\left(\frac{1}{2}t\right)\right)' - 2\sin(2t)$$
$$f'(t) = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}t}\left(-\cos\left(\frac{1}{2}t\right) + B\sin\left(\frac{1}{2}t\right)\right) + e^{\frac{1}{2}t}\left(\frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{2}t\right) + \frac{1}{2} \times B\cos\left(\frac{1}{2}t\right)\right) - 2\sin(2t)$$
$$f'(0) = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}\times 0}\left(-\cos\left(\frac{1}{2}\times 0\right) + B\sin\left(\frac{1}{2}\times 0\right)\right) + e^{\frac{1}{2}\times 0}\left(\frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{2}\times 0\right) + \frac{1}{2} \times B\cos\left(\frac{1}{2}\times 0\right)\right) - 2\sin(2\times 0) = 0$$
$$f'(0) = \frac{1}{2}(-1+0) + 1\left(\frac{1}{2}\times 0 + \frac{1}{2} \times B \times 0\right) - 0 = 0$$
$$\text{donc } -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}B = 0 \text{ c'est à dire } B = 1$$

Finalement $f(t) = e^{\frac{1}{2}t}\left(-\cos\left(\frac{1}{2}t\right) + \sin\left(\frac{1}{2}t\right)\right) + \cos(2t)$