Récurrences 2

On considère la suite :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 0.8u_n + 1.2 \\ u_0 = 12 \end{cases}$$

1. Montrer par récurrence que :

$$6 \leq u_{n+1} \leq u_n$$

2. En déduire que la suite converge et en déduire sa limite.

1. **Initialisation :**

   On a :

$$u_1 = 0.8u_0 + 1.2 = 10.8$$
$$\text{donc } 6 \leq u_1 \leq 12 = u_0$$

   L'initialisation est établie.

   Hérédité :
   On suppose que la propriété est vraie pour un certain rang $n \geq 0$:

$$6 \leq u_{n+1} \leq u_n \quad \text{c'est l'hypothèse de récurrence}$$

   On part de cette hypothèse :

$$\begin{aligned}
&6 \leq u_{n+1} \leq u_n \\
\Rightarrow &0.8 \times 6 \leq 0.8 \times u_{n+1} \leq 0.8 \times u_n \\
\Rightarrow &4.8 \leq 0.8 \times u_{n+1} \leq 0.8 \times u_n \\
\Rightarrow &4.8 + 1.2 \leq 0.8 \times u_{n+1} + 1.2 \leq 0.8 \times u_n + 1.2 \\
\Rightarrow &6.0 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}
\end{aligned}$$

   L'hérédité est établie.

2. On vient de montrer que la suite est décroissante et minorée, par conséquent, d'après le théorème de convergence monotone, la suite converge vers l un nombre réel qui vérifie :

$$\begin{aligned}
&l = 0.8 \times l + 1.2 \\
\Leftrightarrow &l - 0.8 \times l = 1.2 \\
\Leftrightarrow &l \times 0.2 = 1.2 \\
\Leftrightarrow &l = \frac{1.2}{0.2} = 6
\end{aligned}$$