Fonctions de référence : fonction exponentielles

1 Définitions

Définition 1 *La fonction exponentielle, notée* $exp(x)$ *est la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$$\begin{aligned} &\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \\ &\exp(1) = e \end{aligned}$$

Définition 2 *La fonction exponentielle, notée* $exp(x)$ *est la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$$\begin{aligned} &\exp(x)' = \exp(x) \forall x \in \mathbb{R} \\ &\exp(1) = e \end{aligned}$$

2 Propriétés

Propriétés 1 *Pour* $x, y \in \mathbb{R}$ *et* n *un entier naturel :*

$$\begin{aligned} &\exp(x-y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)} \\ &\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} \\ &\exp(nx) = (\exp(x))^n \end{aligned}$$

Propriétés 2 (Dérivées de fonctions exponentielles) *Pour* $x \in \mathbb{R}$ *et* $u(x)$ *une fonction dérivable :*

$$\left[\exp(u(x))\right]' = u'(x) \times \exp(u(x))$$

3 Lien avec les puissances et la racine carré

Propriétés 3 *Pour* $x > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$ *et* $a > 0$, *on a :*

$$\begin{aligned} &exp(x) = e^x \quad \textit{vrai pour } x \in \mathbb{R} \\ &x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)} \\ &a^x = e^{x \ln(a)} \end{aligned}$$

Remarque 1 *La fonction racine carré définie pour* $x \geq 0$ *vérifie :*

$$\sqrt{x} \times \sqrt{x} = x$$

Or, la fonction $x^{\frac{1}{2}}$ *vérifie la même égalité :*

$$x^{\frac{1}{2}} \times x^{\frac{1}{2}} = x$$

4 Échelle logarithmique

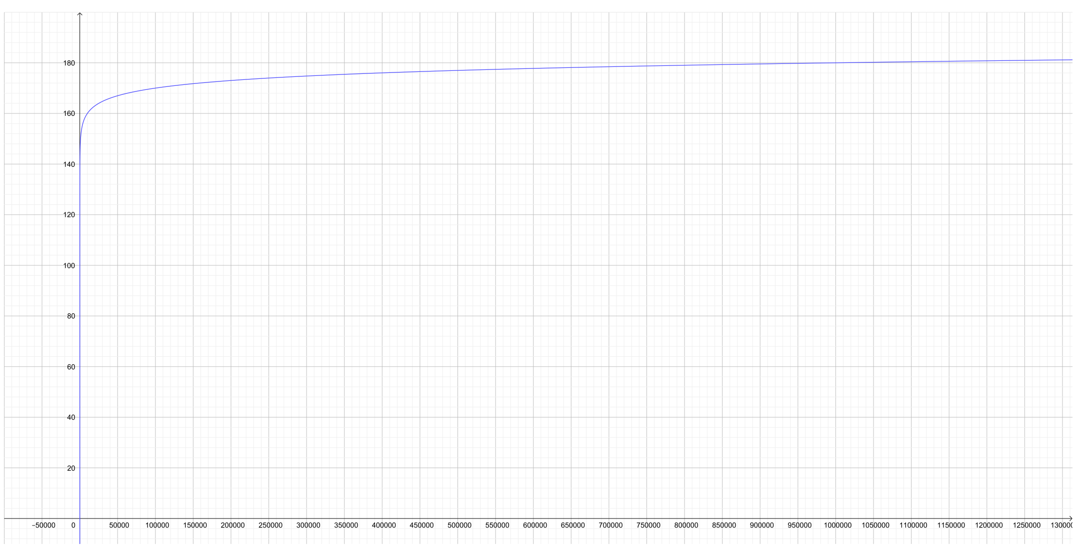
Quand des grandes longueurs sont étudiées, il est parfois nécessaire de changer d'échelle afin de pouvoir les représenter graphiquement.
Contrairement à l'échelle artihmétique classique, deux valeurs à la même distance sur le graphique auront le même rapport : cela permet de représenter un éventail de valeurs plus large tout en gardant de la visibilité sur le graphique. Les propriétés des fonctions logarithmes vont nous permettre de bien placer les différentes graduations.

Exemple 1 *Quand l'oreille humaine est soumise à une intensité acoustique, exprimée en watts par mètre carré (W/m^2), le niveau sonore du bruit responsable de cette intensité acoustique est exprimé en décibels (dB).*

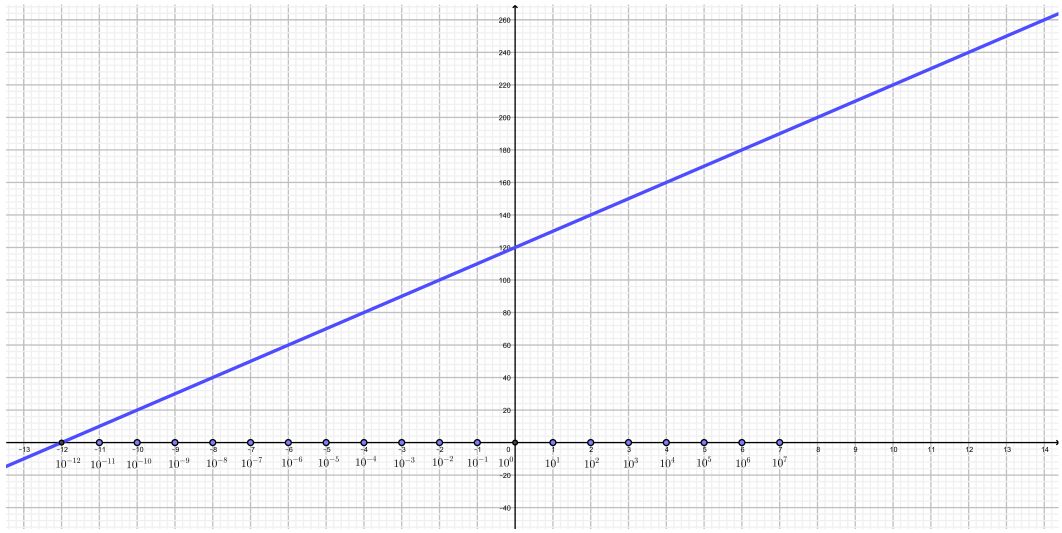
Échelle de bruit

Sources sonores	*Intensité acoustique (W/m^2)*	*Niveau sonore arrondi Éventuellement Á l'unité*	*Sensation auditive*
Décollage de la Fusée Ariane	10^6	180	*Exige une protection spéciale*
Turboréacteur	10^2	140	*Exige une protection spéciale*
Course de Formule 1	10	130	*Exige une protection spéciale*
Avion au décollage	1	120	*Seuil de douleur*
Concert et discothèque	10^{-1}	110	*Très difficilement supportable*
Baladeur à puissance maximum	10^{-2}	100	*Très difficilement supportable*
Moto	10^{-5}	70	*Pénible à entendre*
Voiture au ralenti	10^{-7}	50	*Bruit courant*
Seuil d'audibilité	10^{-12}	$0,08$	*Silence anormal*

La fonction $f(x) = \frac{10}{\ln(10)} \times \ln(x) + 120$ *donne le lien entre l'intensité acoustique x et le niveau sonore* y.
Si on veut représenter graphiquement le niveau sonore en fonction de l'intensité accoustique, on obtient un dessin du type :



On remarque que seule la valeur correspondant à 180 *dbs ressort de la représentation graphique.*
On va maintenant changer l'échelle graphique de l'axe des abscisses : passer d'une graduation entière de cette échelle à la suivante correspond à la multiplication par 10 *de l'intensité sonore.*



Ici on a simplement poser $x = e^X$ et tracer la fonction de X :

$$f(X) = \frac{10}{\ln(10)}X + 120$$

Ce qui explique pourquoi on a une droite comme représentation graphique.
On peut aussi avoir d'autre contraintes, que nous n'avons pas pris en considération juste au dessus, comme de devoir tracer la courbe sur une longueur donnée L sans se servir d'un logiciel de géométrie.
Cela rend plus difficile le placement des graduations, notamment pour celle qui ne sont pas des mutliples de 10 *des graduations.*
Par exemple, dans notre cas, si on voulait tracer la courbe de 10^{-12} *à* 10^6 *: l'écart relatif de cette courbe, qui est le quotient de la valeur maximale par la valeur minimale, sera* 10^{18}*. De plus, comme nous voudrions graduer de multiples de* 10 *en multiple de* 10*, nous aurions* $6-(-12)+1 = 19$ *unités avec* 10^{-12} *jouant le rôle du* 0 *: on ira jusqu'à la graduation 18.*
Entre deux graduations entières $[x_I; 10x_I$*, qui vaut* $\frac{L}{18}$ *sur le dessin, on voudrait savoir où placer* $2x_I$*,...,*$9x_I$*.*
Ces sous graduations seront placées respectivement à :

$$\frac{\log(2)L}{18}, ..., \frac{\log(9)L}{18}$$

Les distances entre deux sous-graduations successives ne seront donc pas de même longeur :