Récurrences 5

On considère la suite :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 20u_n - 190n - 351 \\ u_0 = 28 \end{cases}$$

1. Calculer u_1.
2. On pose : $\forall n \in \mathbb{N} :\ v_n = u_n - 10n - 19$.
   Montrer que la suite (v_n) est géométrique . Donner la raison et le premier terme.
3. En déduire que l'expression de v_n en fonction de n.
4. En déduire que l'expression de u_n en fonction de n.
5. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

1. On a :

$$u_1 = 20u_0 - 190 \times 0 - 351 = 209$$

2. On a :

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= u_{n+1} - 10(n+1) - 19\\
v_{n+1} &= 20u_n - 190n - 351 - 10(n+1) - 19\\
v_{n+1} &= 20u_n - (190+10)n - 19 - 351 - 10\\
v_{n+1} &= 20u_n - 200n - 380\\
v_{n+1} &= 20\left(u_n - \frac{200}{20}n - \frac{380}{20}\right)\\
v_{n+1} &= 20\left(u_n - 10n - 19\right)\\
v_{n+1} &= 20v_n
\end{aligned}$$

3. Comme la suite (v_n) est géométrique de raison 20, on peut en déduire que :

$$\begin{aligned}
v_n &= 20^n v_0\\
v_n &= 20^n(u_0 - 19)\\
v_n &= 9 \times 20^n
\end{aligned}$$

4. On a :

$$\begin{aligned}
v_n &= u_n - 10n - 19\\
\Leftrightarrow u_n &= v_n + 10n + 19\\
\Leftrightarrow u_n &= 9 \times 20^n + 10n + 19
\end{aligned}$$

5. On doit déterminer le signe de $u_{n+1} - u_n$:

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= 9 \times 20^{n+1} + 10(n+1) + 19 - (9 \times 20^n + 10n + 19)\\
&= 9 \times 20^n(20-1) + 10n + 10 + 19 - 10n - 19\\
&= 171 \times 20^n + 10 > 0
\end{aligned}$$

Comme $u_{n+1} - u_n > 0$, on en déduit que la suite (u_n) est croissante.