

Equations différentielles : exercices

Exercice 1 Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' + 5y = 3$ avec condition initiale $f(0) = 1$.
2. $y' - 5y = 1$ avec condition initiale $f(0) = 0$.
3. $y'' + 4y = 0$.
4. $y'' + 5y = 0$.

Exercice 2 Lorsque la pénicilline est injectée directement dans le sang, on considère que sa vitesse d'élimination est, à chaque instant, proportionnelle à la quantité de pénicilline présente dans le sang à cet instant. Ainsi, la quantité de pénicilline $Q(t)$, exprimée en milligrammes, présente dans le sang à l'instant t ($t \geq 0$, exprimé en heures), est solution de l'équation différentielle $Q'(t) = -aQ(t)$, où a est un réel.

À l'instant $t = 0$, on injecte une dose de 5mg de pénicilline.

1. Montrer que, pour tout réel $t \geq 0$: $Q(t) = 5e^{-at}$.
2. Sachant qu'au bout de deux heures, la quantité de pénicilline présente dans le sang a diminué de moitié, montrer que $a = \frac{\ln(2)}{2}$. Donner une valeur arrondie de a au centième.
3. On admet que la fonction Q décrit de façon satisfaisante la quantité de pénicilline présente dans le sang entre 0 et 6 heures.
Déterminer à partir de quel instant, exprimé en heures et minutes et arrondi à la minute, la quantité de pénicilline présente dans le sang sera inférieure à 1mg.

Exercice 3 Soit l'équation différentielle (E) $y'' + 4y = 4x^2$.

À cette équation, on associe l'équation (E_0) : $y'' + 4y = 0$.

1. Résoudre l'équation (E_0) .
2. Trouver une solution de (E) sous la forme $g(x) = ax^2 + bx + c$.
3. Montrer que f est solution de (E) si et seulement si la fonction $f - g$ est solution de (E_0) .
4. En déduire toutes les solutions de (E) .

Exercice 4 Soit l'équation différentielle (E) : $y'' + 9y = e^x$.

À cette équation, on associe l'équation (E_0) : $y'' + 9y = 0$.

1. Résoudre l'équation (E_0) .
2. Trouver une solution de g de (E) sous la forme $g(x) = ae^x$.
3. Montrer qu'une fonction f est solution de (E) si et seulement si la fonction $f - g$ est solution de (E_0) .
4. En déduire toutes les solutions de (E) .