Nombres dérivées : cours

1 Taux d'accroissement

Définition : Taux d'accroissement

On appelle **taux d'accroissement** d'une fonction f entre deux nombres distincts a et b le nombre :

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Définition : Taux d'accroissement 2

On appelle **taux d'accroissement** d'une fonction f entre a et $a+h$, avec $h \neq 0$, le nombre :

$$\tau_a(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

2 Nombre dérivé

Définition : dérivabilité et nombre dérivée

Si, quand h **tend** vers 0, la quantitée $\tau_a(h)$ tend vers un nombre fini, on dit que la fonction f est **dérivable** en a et on appelle le nombre vers lequel tend cette quantité **nombre dérivé** de f en a. On le note $f'(a)$.

Remarques

- ✏ Le taux s'accroissement $\tau_a(h)$ peut se noter $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$.
  Δx correspond à la différence entre x et une valeur y très proche de x.
  $\Delta f(x)$ correspond à la différence entre $f(x)$ et $f(y)$.
  Ce taux d'accroissement peut être positif ou négatif, c'est une valeur algébrique : il faut prendre les différences dans les quotients dans le même ordre.
- ✏ On peut aussi noter la valeur $f'(x)$ de la façon suivante $\frac{df(x)}{dx}$
- ✏ Comme on l'a vu pendant les activités, les deux expressions précédentes correspondent à des quantitées physiques concrètes comme par exemple, respectivement, la vitesse moyenne et la vitesse instantanée
- ✏ Quand on parle de tendre vers 0, il ne s'agit pas de remplacer directement h par 0, sinon on obtient la division de 0 par 0 ce qui ne donne pas de résultats prévisibles.
  On doit d'abord simplifier le numérateur, diviser par h et ensuite regarder si $\tau_a(h)$ s'approche d'une valeur réelle quand h s'approche de 0

Exemple 1 ***1.*** *Dérivabilité de* $f(x) = x^3 - 7$ *en* 4.

Pour $h \neq 0$, on simplifie :

$$\begin{aligned}&\frac{f(4+h)-f(4)}{h}\\ =&\frac{(4+h)^3-7-\left(4^3-7\right)}{h}\\ =&\frac{4^3+3\times4^2\times h+3\times4\times h^2+h^3-4^3}{h}\\ =&\frac{3\times4^2\times h+3\times4\times h^2+h^3}{h}\\ =&48+12h+h^2\end{aligned}$$

Plus on fait s'approcher h de 0, plus l'expression précédente s'approche de 48 : f est dérivable en 4 et $f'(4)=48$.

2. *Non dérivabilité de $f(x)=\sqrt{x}$, définie pour $x \geq 0$, en 0.*
Pour $h \neq 0$, on simplifie :

$$\tau_0(h)=\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\frac{\sqrt{h}-0}{h}=\frac{1}{\sqrt{h}}$$

Si cette expression doit tendre vers un nombre réel quand h tend vers 0, elle doit le faire peu importe comment h tend vers 0.
On remplace h par 10^{-2n} : plus n est grand, plus 10^{-n} se rapproche de 0 ; on a choisi une façon particilière pour h de s'approcher de 0. On obtient :

$$\tau_0(10^{-2n})=\frac{1}{\sqrt{10^{-2n}}}=10^n,$$

car $10^n\times10^n=10^{2n}$.
Quand n devient grand, $\tau_0(10^{-2n})$ devient de plus en plus grand : si on prend n suffisamment grand, 10^n devient plus grand que n'importe quel nombre fixé au départ (si le nombre a m chiffres avant la virgule, on prend $n=m+1$ et c'est bon).
Par conséquent, $\tau_0(10^{-2n})$ ne tend pas vers un nombre réel quand n devient très grand, il tend vers l'infini : $\tau_0(h)$ ne tend donc pas vers une nombre réel quand h tend vers 0.
La fonction $f(x)=\sqrt{x}$ n'est donc pas dérivable en 0.

Remarques

Pour simplifier les notations, on notera :

$$\lim_{x\to a} f(x)=b$$

pour exprimer le fait que la fonction $f(x)$ tend vers b quand x tend vers a

Définition : dérivabilité et notation de limite

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
Si pour $a \in I$:

$$\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=l$$

avec l un réel, alors f est **dérivable** en a et $f'(a)=l$:l est le **nombre dérivé** de f en a.

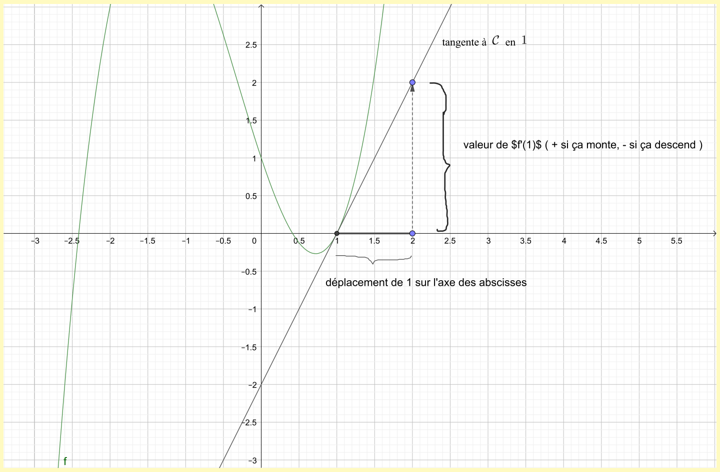
3 Interprétation graphique

Définition : tangente à une courbe

On appelle **tangente à une courbe** $\mathscr{C}$ en un point M appartenant à $\mathscr{C}$, une droite passant par M et qui, si elle existe, est au voisinage de M la droite la plus proche de $\mathscr{C}$.
Si cette tangente a pour équation $y = mx + p$, alors $mx + p$ est la meilleure approximation de $f(x)$ par un polynôme de degré 1.

Nombre dérivée et tangente

Soit f une fonction dérivable en a et $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f.
Le nombre dérivée $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse a.



Equation de la tangente

Soit f une fonction définie et dérivable en a et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.
Alors $\mathscr{C}$ admet en son point d'abscisse a une tangente T_a d'équation :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Preuve

On veut montrer que la droite $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ est celle qui approche le mieux la courbe $\mathscr{C}$.
Supposons qu'il existe une droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = mx+p$ qui approche mieux la courbe $\mathscr{C}$; cette droite vérifie deux conditions :

elle passe par A : $f(a) = ma + p$

près de a, elle est plus proche de $\mathscr{C} queT_a : \left|f(x) - (mx+p)\right| \leq \left|f(x) - \left(f'(a)(x-a) + f(a)\right)\right|$

On reprend l'inégalité précédente :

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \left|f(x)-(mx+p)\right| \leq \left|f(x)-\left(f'(a)(x-a)+f(a)\right)\right| \\
&\Leftrightarrow \left|f(x)-f(a)-(mx+p+f(a))\right| \leq \left|f(x)-f(a)-\left(f'(a)(x-a)\right)\right| \\
&\Leftrightarrow \left|f(x)-f(a)-m(x-a)-(-ma+p+f(a))\right| \leq \left|f(x)-f(a)-\left(f'(a)(x-a)\right)\right| \\
&\Leftrightarrow |x-a| \times \left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-\frac{m(x-a)}{x-a}\right| \leq |x-a| \times \left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-\frac{f'(a)(x-a)}{xa}\right| \text{ car } f(a)=m
\\
&\Leftrightarrow |x-a| \times \left(\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-m\right|-\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-f'(a)\right|\right) \leq 0 \\
&\Leftrightarrow \times \left(\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-m\right|-\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-f'(a)\right|\right) \leq 0 \\
&\Leftrightarrow \times \left|f'(a)-m\right|-\left|f'(a)-f'(a)\right| \leq 0
\end{aligned}$$

en faisant tendre x vers a

$$\Leftrightarrow \times \left|f'(a)-m\right| \leq 0$$

finalement, cela signifie que $|f'(a)-m|=0$ car $|f'(a)-m| \geq 0$.
Donc $f'(a)=m$ puis $f(a)=f'(a)a+p \Leftrightarrow p=f(a)-af'(a)$.
L'équation de $\mathscr{D}$ est donc :

$$y=mx+p=f'(a)x+f(a)-af'(a)=f'(a)(x-a)+f(a)$$

La tangente à $\mathscr{C}$ en a est donc bien $y=f'(a)(x-a)+f(a)$.