Limites et dérivations
Applications aux polynômes et aux fractions rationnelles

Exemple 1 *Des gendarmes, mal équipés, tentent de faire des contrôles de vitesse.*
Ils se repartissent en groupes, situés à $1km$ *l'un de l'autre.*
Leur but étant de déterminer la vitesse des automobilistes, en calculant combien de temps il mettent à parcourir le kilomètre séparant les deux groupes.

1. *Un automobiliste met* 2 *minutes à parcourir cette distance. A quelle vitesse roule-t-il ?*
2. *Comment appelle-t-on le type de vitesse obtenue ?*
3. *Sachant que la vitesse maximale instantannée autorisée sur le parcours est de* $50km/h$*, est-il en excès de vitesse ?*
4. *Un automobiliste voit le premier groupe de gendarmes alors que son compteur indique* $80km/h$*, il se met debout sur les freins et ralentit tellement qu'il met également deux minutes à faire le kilomètre séparant les deux groupes de gendarmes.*
   A quelle vitesse les gendarmes vont-ils le contrôler ? Sera-t-il sanctionné ?
5. *En vous basant sur l'exemple précédent, proposer une solution pour que contrôle soit plus efficace.*
6. *On appelle, pour* $t \in \mathbb{R}$*,* $d(t)$ *la distance parcourue à l'instant* t*.*
   On s'intéresse à la quantité suivante, appelée taux d'accroissement, pour $t \geq 0$ *:*

   $$\frac{d(t+\epsilon)-d(t)}{\epsilon}$$

   On cherche à déterminer sa valeur quand ϵ *se rapproche de* 0.
   Si on remplace ϵ *par* 0*, quelle opération obtient-on ? A votre avis, quelle sera le résultat de cette opération ?*
7. *On suppose maintenant que :*

   $$d(t) = 60t + 500$$

   Calculer le taux d'accroissement en t *puis déterminer la valeur de ce taux quand* ϵ *tend vers* 0 *: on appelle cette quantité limite en* 0 *si*

jamais cette valeur existe.
Le chauffeur est-il dans ce cas en excès de vitesse à un moment donné ?

8. *On suppose maintenant que :*

$$d(t) = 72t^2 + 10t + 500 \textit{ avec t en heures}$$

Calculer le taux d'accroissement en t *puis déterminer la valeur de ce taux quand* ϵ *tend vers* 0.
Si on fait la mesure de la vitesse au bout de 10 *minutes, le chauffeur est-il en excès de vitesse ?*
Si on fait la mesure de la vitesse au bout de 20 *minutes, le chauffeur est-il en excès de vitesse ?*

9. *Que dire des conjectures de la question* 6 *?*

Exemple 2 *Dans l'exemple précédent, on a vu que le résultat de l'opération :*

$$\lim_{x\to a} = \frac{0}{0}$$

ne pouvait pas être prévue sans plus de précisions.
Nous allons déterminer quelles autres opérations ne peuvent pas être déterminées dans plus de précisions et comment conclure suivant les informations à notre disposition.
Nous allons nous baser sur le tableau de valeurs suivant :

$C1$	$C2$	$C3$	$C4$	$C5$	$C6$	$C7$	$C8$	$C9$
x	$x+1$	x^2	$\frac{1}{x+1}$	$x+1-(x)$	$x-x^2$	$\frac{x^2}{x+1}$	$\frac{x}{x+1}$	$\frac{x^2}{x^3}$
10^{10}	$\approx 10^{10}$	10^{20}	$\approx 10^{-10}$	1	$-\approx 10^{20}$	$\approx 10^{10}$	≈ 1	10^{-10}
10^{20}	$\approx 10^{20}$	10^{40}	$\approx 10^{-20}$	1	$-\approx 10^{40}$	$\approx 10^{20}$	≈ 1	10^{-20}
10^{30}	$\approx 10^{30}$	10^{60}	$\approx 10^{-30}$	1	$-\approx 10^{60}$	$\approx 10^{30}$	≈ 1	10^{-30}
10^{40}	$\approx 10^{40}$	10^{80}	$\approx 10^{-40}$	1	$-\approx 10^{80}$	$\approx 10^{40}$	≈ 1	10^{-40}
10^{50}	$\approx 10^{50}$	10^{100}	$\approx 10^{-50}$	1	$-\approx 10^{100}$	$\approx 10^{50}$	≈ 1	10^{-50}
10^{60}	$\approx 10^{60}$	10^{120}	$\approx 10^{-60}$	1	$-\approx 10^{120}$	$\approx 10^{60}$	≈ 1	10^{-60}

1. *Quelles colonnes dans le tableur nous donne des indications sur le résultat de la limite $\frac{\infty}{\infty}$?*
2. *Conjecturer du résultat de cette limite en fonction du numérateur et du dénominateur.*
3. *Quelles colonnes dans le tableur nous donne des indications sur le résultat de la limite $\infty - \infty$?*
4. *Conjecturer du résultat de cette limite en fonction des termes intervenants dans la différence.*

5. *Conjecturer les résultats des limites suivantes :*

$$\infty + \infty$$
$$\infty^2$$
$$(-\infty)^2$$
$$\frac{1}{\infty}$$
$$\frac{1}{0}$$

6. *Déterminer la limite des fonctions suivantes en* $+\infty$ *:*

$$x \times \frac{1}{x}$$
$$x \times \frac{1}{x^2}$$
$$x^2 \times \frac{1}{x}$$

Que peut-on en conclure sur la limite $0 \times \infty$ *?*

7. *Faire le bilan des opérations prévisibles sur les limites et de celles qu'on ne peut pas prédire sans plus d'informations sur les fonctions.*

Exemple 3 *Soit f une fonction définie sur I et qui en chaque point a de I admet une limite finie $f(a)$.*
On suppose que pour tout a de I, le taux d'accroissement :

$$\frac{f(a+\epsilon)-f(a)}{\epsilon}$$

admet une limite finie, notée $f'(a)$ quand ϵ tend vers 0.

1. *A quoi est équivalent le taux d'accroissement précedent quand ϵ tend vers 0 ?*
2. *En déduire une équation de la tangente en a à la courbe représentant f quand x tend vers a.*
3. *On suppose maintenant que f est croissante sur $[u;v]$, $u<v$, que dire du signe de $f'(x)$ pour $x\in[u;v]$?*
4. *On suppose maintenant que f est décroissante sur $[u;v]$, $u<v$, que dire du signe de $f'(x)$ pour $x\in[u;v]$?*
5. *Inversement, on suppose maintenant que $f'(x)$ est positive pour $x\in[u;v]$, que dire des variations de f sur $[u;v]$?*
6. *Inversement, on suppose maintenant que $f'(x)$ est négative pour $x\in[u;v]$, que dire des variations de f sur $[u;v]$?*

Exemple 4 *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\{-5\}$:*

$$f(x) = \frac{2x^2 + 13x + 5}{x + 5}$$

1. *Déterminer la limite de cette fonction en $+\infty$ et en $-\infty$.*
2. *Déterminer les limites de cette fonction en -5.*
3. *Donner l'allure de la courbe représentant f près de -5.*
4. *Montrer que :*

$$f(x) = 2x + 3 - \frac{10}{x + 5}$$

5. *Calculer $(2x+3)'$.*
6. *Calculer $\left(\frac{10}{x+3}\right)$ avec la formule de dérivée en un point.*
7. *En déduire $f'(x)$.*
8. *Comparer avec $\frac{u'(x)}{v'(x)}$.*
9. *Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction $f(x) - (2x+3)$.*
10. *Donner une interprétation graphique de ce résultat en donnant une allure de la courbe en $+\infty$.*