Primitives et équations différentielles : exercices

Exercice 1 *Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer une primitive :*

$$a(x) = 1x^5 + 9x^4 - 9x^3 + 8x^2 + 9x + 2$$
$$b(x) = 4x^3 + \frac{6}{x}$$
$$c(x) = \frac{9}{(x+3)^5}$$
$$d(x) = \frac{4}{(x+1)^{14}}$$

Exercice 2 *Déterminer une primitive des fonctions suivantes :*

$$a(x) = (14x+7)e^{7x^2+7x+9}$$
$$b(x) = (12x+2)e^{6x^2+2x+6}$$
$$c(x) = \frac{40x+12}{10x^2+6x+5}$$
$$d(x) = \frac{6x+2}{3x^2+2x+3}$$
$$e(x) = \frac{7x}{\sqrt{7x^2+9}}$$
$$f(x) = \frac{20x}{\sqrt{10x^2+7}}$$

Exercice 3 *Montrer que la fonction $F(x)$ est une primitive de $f(x)$ dans chacun des cas :*

$$F(x) = (7x+5)e^{4x} \quad f(x) = (28x+12)e^{4x}$$
$$F(x) = (10x+8)e^{8x^2} \quad f(x) = (12x^2+5x+10)e^{8x^2}$$
$$F(x) = \frac{\ln(x)}{x} \quad f(x) = \frac{1-\ln(x)}{x^2}$$
$$F(x) = \sqrt{x}e^{\sqrt{x}} \quad f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+1\right)e^{\sqrt{x}}$$

Exercice 4 *Résoudre les équation différentielles suivantes :*

$$\begin{cases} y' - 7y = 4 \\ f(0) = 5 \end{cases}$$
$$\begin{cases} y' + 5y = 1 \\ f(0) = 9 \end{cases}$$
$$\begin{cases} 14y' - 1y = 9 \\ f(0) = 9 \end{cases}$$
$$\begin{cases} 14y' + 3y = 3 \\ f(0) = 8 \end{cases}$$

Exercice 5 **Partie I**

On considère l'équation différentielle :

$$(E) : y' + y = e^{-x}$$

1. *Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = xe^{-x}$.*
   Vérifier que la fonction u est une solution de l'équation différentielle (E).
2. *On considère l'équation différentielle $\left(E'\right) : y' + y = 0$.*
   Résoudre l'équation différentielle $\left(E'\right)$ sur $\mathbb{R}$.
3. *En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E) sur $\mathbb{R}$.*
4. *Déterminer l'unique solution g de l'équation différentielle (E) telle que $g(0) = 2$.*

Partie II

Dans cette partie, k est un nombre réel fixé que l'on cherche à déterminer.
On considère la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$ par :

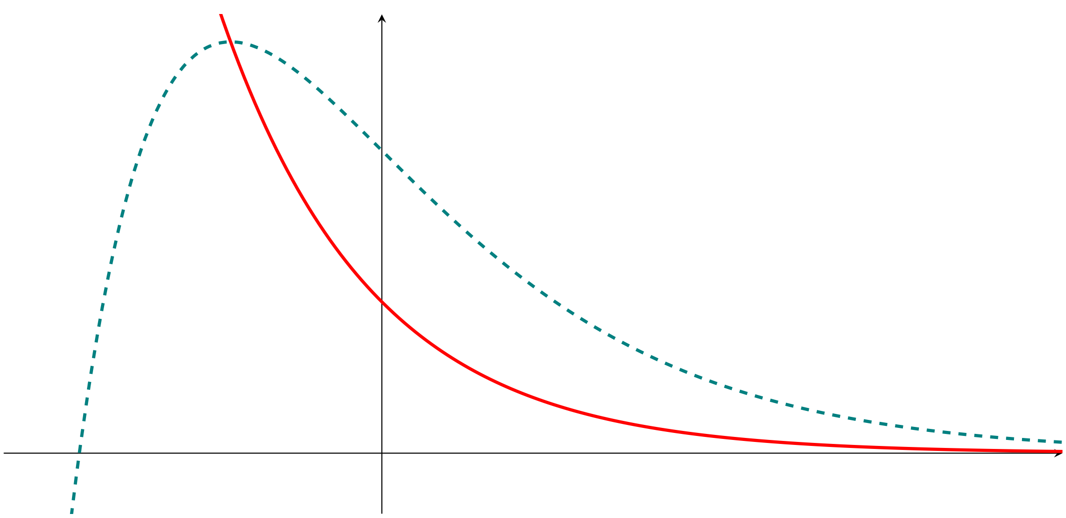
$$f_k(x) = (x + k)e^{-x}.$$

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h(x) = e^{-x}.$$

On note C_k la courbe représentative de la fonction f_k dans un repère orthogonal et C la courbe représentative de la fonction h.
On a représenté sur le graphique en annexe les courbes C_k et C sans indiquer les unités sur les axes ni le nom des courbes.

1. *Sur le graphique en annexe à rendre avec la copie, l'une des courbes est en traits pointillés, l'autre est en trait plein. Laquelle est la courbe C ?*
2. *En expliquant la démarche utilisée, déterminer la valeur du nombre réel k et placer sur l'annexe à rendre avec la copie l'unité sur chacun des axes du graphique.*



Exercice 6 *Pour tout réel t positif ou nul, on note $\theta(t)$ la température d'un café à l'instant t, avec $\theta(t)$ exprimé en degré Celsius et t en minute. On a ainsi $\theta(0) = 80$.*

Dans ce modèle, on suppose que θ est une fonction dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ et que, pour tout réel t de cet intervalle, la loi de Newton se modélise par l'égalité :

$$\theta'(t) = -0,2(\theta(t) - M).$$

1. *Dans cette question, on choisit $M = 0$. On cherche alors une fonction θ dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ vérifiant $\theta(0) = 80$ et, pour tout réel t de cet intervalle : $\theta'(t) = -0,2\theta(t)$.*
   - **a.** *Si θ est une telle fonction, on pose pour tout t de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, $f(t) = \dfrac{\theta(t)}{e^{-0,2t}}$.*
     Montrer que la fonction f est dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ et que, pour tout réel t de cet intervalle, $f'(t) = 0$.
   - **b.** *En conservant l'hypothèse du **a.**, calculer $f(0)$.*
     En déduire, pour tout t de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, une expression de $f(t)$, puis de $\theta(t)$.
   - **c.** *Vérifier que la fonction θ trouvée en **b.** est solution du problème.*
2. *Dans cette question, on choisit $M = 10$. On admet qu'il existe une unique fonction g dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$, modélisant la température du café à tout instant positif t, et que, pour tout t de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$:*

   $$g(t) = 10 + 70e^{-0,2t}, \text{ où } t \text{ est exprimé en minute et } g(t) \text{ en degré Celsius.}$$

   Une personne aime boire son café à $40°$ C.
   Montrer qu'il existe un unique réel t_0 dans $[0\ ;\ +\infty[$ tel que $g(t_0) = 40$.
   Donner la valeur de t_0 arrondie à la seconde.

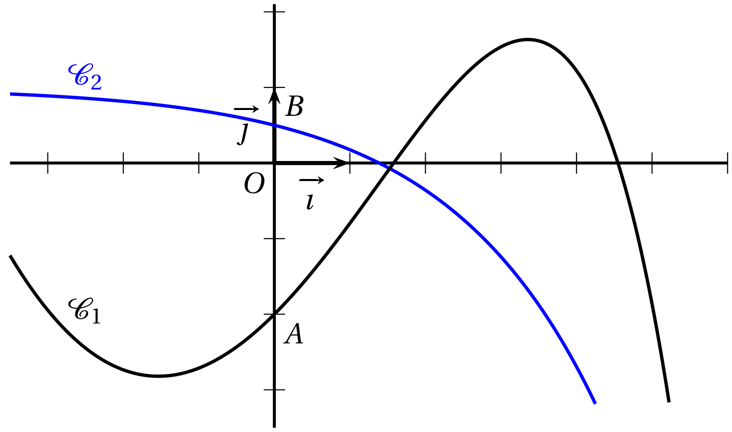
Exercice 7 *Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ dont le tableau de variations est donné ci-dessous où a et b désignent deux réels.*

x	$-\infty$		a		$+\infty$
$f(x)$			b		
		↗		↘	
	$-\infty$				$-\infty$

1. *Déterminer le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x.*
2. *Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, on a tracé deux courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.*

   Elles coupent l'axe des ordonnées aux points A et B d'ordonnées -2 et $\dfrac{1}{2}$ respectivement.

   L'une de ces courbes est la courbe représentative de la fonction dérivée f' de f et l'autre la courbe représentative d'une primitive F de la fonction f sur $\mathbb{R}$.



a. *Indiquer laquelle de ces deux courbes est la courbe représentative de la fonction f'. Justifier la réponse.*

b. *À l'aide des courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$, prouver que $1 < a < 2$ et $b > 0$.*

3. *Dans cette question, on admet que la fonction f est telle que, pour tout réel x,*

$$f(x) - 2f'(x) = x.$$

a. *Déterminer une fonction affine g telle que pour tout réel x,*
$g(x) - 2g'(x) = x$.

b. *Démontrer que la fonction $f - g$ est une solution de l'équation différentielle $y' = \dfrac{1}{2}y$.*

c. *Résoudre cette équation différentielle et en déduire l'existence d'un réel k tel que pour tout réel x, $f(x) = ke^{\frac{1}{2}x} + x + 2$.*

d. *En utilisant les coordonnées des points A et B, déterminer les fonctions f et F ainsi que les réels a et b.*

Exercice 8 *On fait absorber à un animal un médicament dosé à 1 mg de principe actif. Ce médicament libère peu à peu le principe actif qui passe dans le sang. On appelle $g(t)$ la quantité de principe actif, exprimée en mg, présente dans le sang à l'instant t exprimé en heures ($t \geqslant 0$).*
On constate expérimentalement que la fonction g est solution de l'équation différentielle

$$(E) : \qquad y' + \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t}.$$

1. *On considère l'équation différentielle*

$$\left(E'\right) : \qquad y' + \frac{1}{2}y = 0$$

a. *Déterminer le réel a pour que la fonction u définie par l'équation $u(t) = ate^{-\frac{1}{2}t}$ soit solution de l'équation (E).*

b. *Montrer qu'une fonction v est solution de l'équation (E) si, et seulement si, la fonction $h = v - u$ est solution de l'équation $\left(E'\right)$.*

c. *Résoudre l'équation $\left(E'\right)$.*

d. *En déduire les solutions de l'équation* (E).

2. *On suppose qu'à l'instant* $t = 0$, *la quantité de principe actif présente dans le sang est nulle.*
Montrer que la solution de l'équation différentielle (E) *qui vérifie cette condition initiale est la fonction* f *étudiée dans la* ***partie A****.*

3. *On donne l'algorithme suivant :*

Entrée	*Affecter la valeur* 3 *à la variable* n.
Traitement	*Tant que* $f(n) > 0,1$
	incrémenter la variable n de 1.
	Fin Tant que
Sortie	*Afficher la valeur de* n.

où f *est la fonction étudiée dans la* ***partie A****.*

a. *À l'aide de la question 2. a. de la* ***partie A****, expliquer pourquoi il est certain que cet algorithme donne une valeur en sortie.*

b. *Quelle est la valeur* n_0 *de la variable n obtenue à la sortie de l'algorithme ?*

c. *L'absorption du médicament par l'animal a lieu un matin à* 8 *h. À quelle question cet algorithme permet-il de répondre ?*