☙ Suites 1 : cours

Définition

Une suite numérique u est une fonction de $\mathbb{N}$ ou d'une partie de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.
Elle associe à un entier n, un nombre réel $u(n)$ que l'on notera u_n par usage.

- ✏ n est appelé **rang** ou **indice** de u_n.
- ✏ u_n est le **terme** d'indice n.
- ✏ (u_n) désigne la suite tandis que u_n désigne le terme de rang n.

Exemple 1

1. *La suite des décimales de π : u_1 correspond au chiffres des dizaines, u_2 le chiffres des centaines...*
   Elle est définie pour $n \geq 1$.
   On sait à quoi correspond chaque terme de la suite mais, à partir d'un certain rang, leur calcul devient difficile.

$$u_1 = 1$$
$$u_2 = 4$$
$$u_3 = 1$$
$$u_4 = 5$$
$$u_5 = 9$$

   A l'heure actuelle, on "sait" calculer précisement π à $31,4$ billions (10^{12}) de chiffres après la virgule (2019 : Emma Haruka Iwao).

2. *La suite de terme général $u_n = n^2$, la suite des carrés des nombres entiers, est définie pour $n \geq 0$.*
3. *La suite de terme général $u_n = \sqrt{n-5}$ est définie pour $n \geq 5$.*

Dans les définitions suivantes, on supposera que les suites sont définies sur $\mathbb{N}$: les définitions resteront toujours valables sur des ensembles infinis inlus dans $\mathbb{N}$.

Mode de génération d'une suite

1. **Définition par une formule explicite**
   Soit f une fonction définie sur un ensemble contenant $\mathbb{N}$.
   Quand la suite est définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = f(n)$, on dit qu'elle est définie par une formule explicite.
   On peut calculer directement chacun des termes de la suite, sans avoir besoin des précédents.

2. **Définition par une formule de récurrence**
   Soit f une fonction définie sur un intervalle I telle que pour $\forall x \in I$, $f(x) \in I$.
   On peut définir une suite (u_n) par récurrence en fixant une valeur pour u_0 puis une formule reliant u_{n+1} et u_n :

$$(u_n) : \begin{cases} u_0 = a \in I \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

   On peut étendre cette définition pour f une fonction de plusieurs variables, en fixant les premiers termes de la suite et en donnant une formule reliant u_{n+1} et plusieurs de ses termes précédents.

Pour calculer le terme de rang n de ce type de suite, il faut avoir calculer au moins celui du rang $n-1$.

3. il se peut qu'une suite ne soit définie ni par une formule explicite, ni par récurrence : ces cas ne seront presque pas abordés cette année.

Exemple 2

1. *La suite (u_n) des inverses des entiers naturels est une suite donnée par une formule explicite suivante :*

$$\forall n \geq 1, \ \ u_n = \frac{1}{n}$$

2. *La suite de Fibonacci est donnée par une relation de récurrence :*

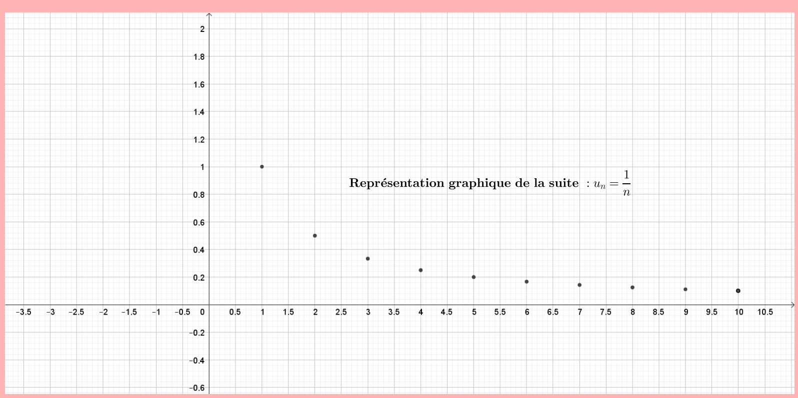
$$\begin{cases} u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \\ u_0 = 1 \\ u_1 = 1 \end{cases}$$

Même si cette suite est définie par une relation de récurrence, il est possible, même si ça ne sera pas vu cette année, d'en donner une formule explicite

3. *La suite des nombres premiers ne peut pas être définie par une formule explicite ni par une relation de récurrence : malgré l'infinité de nombres premiers, il n'est pas encore possible d'en trouver facilement un ou plusieurs dépassant une taille donnée (plus on cherche un nombre premier grand, plus il est difficile à trouver).*
La suite donnant la population sur terre à chaque minute, depuis l'an 2000 *: aucune formule explicite, ni de relation de récurrence et impossible de calculer les termes au delà d'un certain indice.*

Remarque sur la représentation graphique

Dans un repère $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$, la représentation graphique d'une suite (u_n) est l'ensemble des points M_n de coordonnées $(n; u_n)$: ce n'est pas une courbe mais un ensemble discret de points que l'on appelle nuage de points.



Variation d'une suite

Soit (u_n) une suite. On dit que :

1. la suite (u_n) est croissante si, pour tout entier n : $u_{n+1} \geq u_n$.
2. la suite (u_n) est décroissante si, pour tout entier n : $u_{n+1} \leq u_n$.
3. la suite (u_n) est constante si, pour tout entier n : $u_{n+1} = u_n$.

On dira que la suite (u_n) est monotone si son sens de variation ne change pas.
Étudier la monotonie d'une suite, c'est étudier ses variations.

Remarques

1. **1.** Il se peut que les propriétés précédentes ne soient pas vraies dès les première valeurs de n mais seulement à partir d'un certain rang p.
   On dira alors que :
   - **a.** la suite (u_n) est croissante si à partir d'un rang p, pour tout entier $n : \forall n \geq p, \quad u_{n+1} \geq u_n$.
   - **b.** la suite (u_n) est décroissante si à partir d'un rang p, pour tout entier $n : \forall n \geq p, \quad u_{n+1} \leq u_n$.
   - **c.** la suite (u_n) est constante si à partir d'un rang p, pour tout entier $n : \forall n \geq p, \quad u_{n+1} = u_n$.
2. **2.** Une suite n'est pas forcement croissante, décroissante ou constante que ce soit pour tous les n ou à partir d'un certain rang.

Variation d'une suite donnée par une formule explicite

Soit (u_n) une suite définie pour tout $n \geq p$, par :

$$u_n = f(n)$$

où f est une fonction définie au moins sur l'intervalle $[p;+\infty[$.

- ✏ si est f est croissante sur l'intervalle $[p;+\infty[$, alors la suite (u_n) est croissante à partir du rang p.
- ✏ si est f est décroissante sur l'intervalle $[p;+\infty[$, alors la suite (u_n) est décroissante à partir du rang p.

Suite convergente

Soit (u_n) une suite numérique.
Lorsque, quand n augmente indéfiniment, les termes de (u_n) se rapprochent d'un nombre réel L, on dit que la suite converge vers L.
On dit que la **limite** de u_n, lorsque n tend vers $+\infty$ est égal à L.
On écrit :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = L$$

Suite divergente

Une suite est divergente quand elle n'est pas convergente.

Remarques

1. **1.** Une suite n'a pas forcement de limite :

   $$u_n = (-1)^n$$

   Cette suite a des valeurs qui alternent entre 1 et -1 : elle ne peut pas avoir de limite.

2. Une suite qui dépasse n'importe quelle valeur réelle à partir d'un certain rang sera divergente mais on dira que sa limite en $+\infty$ est $+\infty$:

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$$

3. Une suite qui est plus petite que n'importe quelle valeur réelle à partir d'un certain rang sera divergente mais on dira que sa limite en $+\infty$ est $-\infty$:

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty$$