Transformées de Laplace pour résoudre des équations différentielles

Premier ordre

On considère l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} y'(t) + 3y(t) = (t-2)\mathscr{U}(t-2) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

On appelle $Y(p)$ la transformée de Laplace de $y(t)$. On en déduit les transformées suivantes :

$$\begin{aligned} (t-2)\mathscr{U}(t-2) &\longrightarrow \frac{e^{-2p}}{p^2} \\ y'(t) &\longrightarrow pY(p) - 1 \end{aligned}$$

Donc on en déduit l'équation suivante :

$$\begin{aligned} & pY(p) - 1 + 3Y(p) = \frac{e^{-2p}}{p^2} \\ \Leftrightarrow & (p+3)Y(p) = 1 + \frac{e^{-2p}}{p^2} \\ \Leftrightarrow & Y(p) = \frac{1}{p+3} + \frac{e^{-2p}}{p^2(p+3)} \\ \Leftrightarrow & Y(p) = \frac{1}{p+3} + e^{-2p}\left(-\frac{1}{9} \times \frac{1}{p} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{p^2} + \frac{1}{9} \times \frac{1}{p+3}\right) \end{aligned}$$

On en déduit l'expression de la solution $y(t)$ en déterminant l'original de chacune des fonctions :

$$y(t) = e^{-3t}\mathscr{U}(t) - \frac{1}{9}\mathscr{U}(t-2) + \frac{1}{3}(t-2)\mathscr{U}(t-2) + \frac{1}{9}e^{-3(t-2)}\mathscr{U}(t-2)$$

On va vérifier que la décomposition de $\frac{e^{-2p}}{p^2(p+3)}$:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{9} \times \frac{1}{p} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{p^2} + \frac{1}{9} \times \frac{1}{p+3} \\ = & \frac{-p(p+3) + 3(p+3) + p^2}{9p^2(p+3)} \\ = & \frac{-p(p+3) + 3(p+3) + p^2}{9p^2(p+3)} \\ = & \frac{-p^2 - 3p + 3p + 9 + p^2}{9p^2(p+3)} \\ = & \frac{9}{9p^2(p+3)} \\ = & \frac{1}{p^2(p+3)} \end{aligned}$$

Second ordre
On considère l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} y''(t) + y'(t) + y(t) = -\sin(t)\mathscr{U}(t) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

On appelle $Y(p)$ la transformée de Laplace de $y(t)$. On en déduit les transformées suivantes :

$$\begin{aligned} -\sin(t)\mathscr{U}(t) &\longrightarrow -\frac{1}{p^2+1} \\ y''(t) &\longrightarrow p^2Y(p) - py(0) - y'(0) = p^2Y(p) - 1 \\ y'(t) &\longrightarrow pY(p) - y(0) = pY(p) \end{aligned}$$

Donc on en déduit l'équation suivante :

$$\begin{aligned} & p^2Y(p) - 1 + pY(p) + Y(p) = -\frac{1}{p^2+1} \\ \Leftrightarrow & (p^2+p+1)Y(p) = 1 - \frac{1}{p^2+1} \\ \Leftrightarrow & Y(p) = \frac{1}{p^2+p+1} + \frac{1}{p^2+1} - \frac{p+1}{(p^2+1)(p^2+p+1)} \\ \Leftrightarrow & Y(p) = \frac{p}{p^2+1} - \frac{p}{p^2+p+1} \\ \Leftrightarrow & Y(p) = \frac{p}{p^2+1} - \frac{p+\frac{1}{2}}{(p+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} + \frac{\frac{1}{2}}{(p+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} \end{aligned}$$

On en déduit l'expression de la solution $y(t)$ en déterminant l'original de chacune des fonctions :

$$y(t) = \cos(t)\mathscr{U}(t) - e^{-\frac{1}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\mathscr{U}(t) + \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{2}t}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\mathscr{U}(t)$$