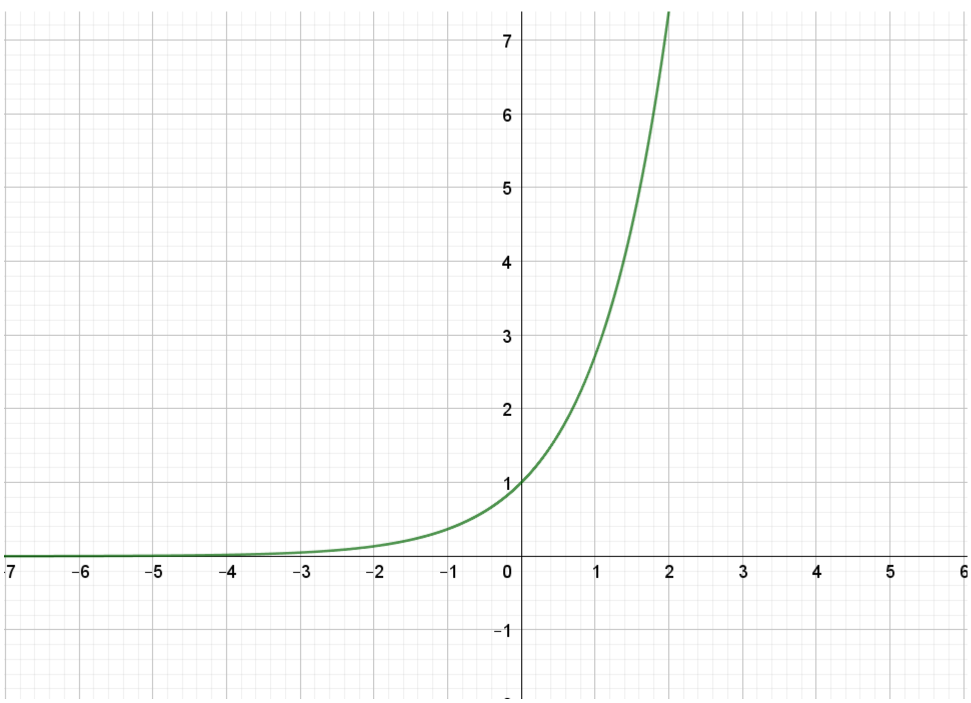
Fonction logarithme népérien : activités

Exemple 1 (Lien avec la fonction exponentielle)

1. *Rappeler les relations fonctionnelles de la fonction exponentielle.*
2. *Rappeler le tableau de variations de la fonction exponentielle.*
3. *Démontrer que l'équation* $e^x = 2$ *a une unique solution dans* $\mathbb{R}$.
   On note $\ln(2)$ *cette solution.*
4. *D'une manière plus générale, pour quelles valeurs de b l'équation* $e^x = b$ *a-t-elle une unique solution ?*
   On note $\ln(b)$ *cette solution.*
5. *Déterminer* $\ln(1)$, $\ln(e)$, $\ln(e^2)$ *et* $\ln\left(\frac{1}{e}\right)$.
6. *Déterminer une relation entre* $\ln(x \times y)$ *d'un côté et* $\ln(x)$ *et* $\ln(y)$ *d'un autre côté ; préciser les valeurs de x et de* y.
7. *Donner une nouvelle expression de* $\ln\left(x^n\right)$ *; préciser les valeurs de x et de* n.
8. *Donner une nouvelle expression de* $\ln\left(\frac{1}{x}\right)$ *; préciser les valeurs de* x.
9. *Que vaut* $e^{\ln(x)}$ *? En déduire la dérivée de* $\ln(x)$ *et préciser pour quelles valeurs de x on peut la calculer.*

Exemple 2 (Courbe représentative de $x \to \ln(x)$ **)** *La courbe ci-dessous est la représentation graphique de la fonction* $x \to e^x$.



1. *A l'aide de cette courbe, déterminer* $\ln(3)$.
2. *Placer le point* $(3;\ln(3))$.
3. *De même, placer les points* $(1;\ln(1))$, $(2;\ln(2))$, $(4;\ln(4))$, $(5;\ln(5))$, $(0.5;\ln(0.5))$, $(0.125;\ln(0.125))$.
4. *Relier ces points par une courbe, que remarque-t-on ?*

A la fin du XVIème siècle, les mesures astronomiques nécessaires à la navigation ou à l'astronomie nécessitent des calculs compliqués et particulièrement longs à effectuer à la main. En 1614, l'écossais John Neper publie un court traité dans lequel il explique un « procédé sur et rapide » permettant de remédier à « l'ennui de ces longues opérations » : l'utilisation des logarithmes . Un demi-siècle plus tard, l'invention par Newton et Leibniz du calcul différentiel permettra de découvrir que, en plus de son utilité pratique pour les calculs, la fonction logarithme de Neper a des propriétés théoriques remarquables : dérivée simple , lien avec $\exp(x)$

Exemple 3 (Algorithmes de Briggs) *On peut construire plusieurs fonctions à partir du logarithme népérien, qui sont appelées logarithmes de base $b > 0$ et définies ainsi :*

$$x \to \frac{\ln(x)}{\ln(b)}$$

D'ailleurs, historiquement, ce n'est pas la fonction logarithme népérien qui a été conceptualisée initialement.
Une de ces fonctions logarithmes fréquemment utilisée est la fonction logarithme de base 10, appelée logarithme décimal et noté $\log$.
Le mathématicien anglais Henry Briggs ($1556-1630$) a mis en place de nombreuses méthodes de calculs pour déterminer des valeurs de la fonction $\log$.

1. *Dans un premier temps, son objectif a été de donner un encadrement du nombre de chiffres du nombre 2^n.*
   On appelle k_n le nombre de chiffres de 2^n.
   Donner un encadrement de 2^n par des puissances de 10 et k_n.
2. *En déduire un encadrement de $\log(2)$ ainsi que sa précision.*
3. *Pour obtenir une approximation de $\log(2)$, il faut calculer 2^n ce qui requiert n calculs : beaucoup trop quand n devient grand, sachant que Briggs avait fait les calculs avec $n = 10^{14}$.*
   Pour aller plus vite et surtout faire moins de calculs (et potentiellement moins d'erreurs), il a utilisé ce qu'on appelle de nos jours un algorithme d'exponentiation rapide, dont les premières étapes sont ci-dessous :

   Calcul de $2^{10} : 2^2 = 4; 2^4 = (2^2)^2; 2^8 = (2^4)^2 \Rightarrow 2^{10} = 2^8 \times 2^2$

   Calcul de $2^{100} : 2^{20} = (2^{10})^2; 2^{40} = (2^{20})^2; 2^{80} = (2^{40})^2 \Rightarrow 2^{100} = 2^{80} \times 2^{20}$

   Calcul de $2^{1000} : 2^{200} = (2^{100})^2; 2^{400} = (2^{200})^2; 2^{800} = (2^{400})^2 \Rightarrow 2^{1000} = 2^{800} \times 2^{200}$

   En se servant de cet exemple, compléter l'algorithme suivant :

```
def briggs(n):
    n1=0
    i=2
    a=2
    while n1<n:
        n1=n1+1
        a=a**i
        b=a**...
        c=...**2
        d=c*...
        l=len(str(d))
        a=...
    print('2^(10^',n1,') admet',l,'chiffres')
```

4. *Déterminer la valeur renvoyée par cet algorithme quand $n = 6$.*
5. *Est ce qu'une division par une puissance de 10 requiert beucoup de calculs ?*
6. *En déduire une approximation de $\log(2)$ avec une précision de 10^{-5}.*
7. *Euler ($1707-1783$) reprend les travaux de Briggs et donne un algorithme pour calculer $\log(5)$:*

Soit la baſe logarithmique $a = 10$, qui eſt celle des tables ordinaires, & propoſons-nous de trouver le logarithme approché de 5. Comme ce nombre eſt renfermé entre les limites 1 & 10, dont les logarithmes ſont 0 & 1, on procédera de la maniere ſuivante à l'extraction des racines, & on continuera les opérations juſqu'à ce qu'on ſoit arrivé à des limites, qui ne different plus du nombre propoſé 5.

$A =$ 1,000000;	$lA =$ 0, 0000000		ſoit
$B =$ 10,000000;	$lB =$ 1, 0000000;	$C = \sqrt{AB}$
$C =$ 3,162277;	$lC =$ 0, 5000000;	$D = \sqrt{BC}$
$D =$ 5,623413;	$lD =$ 0, 7500000;	$E = \sqrt{CD}$
$E =$ 4,216964;	$lE =$ 0, 6250000;	$F = \sqrt{DE}$
$F =$ 4,869674;	$lF =$ 0, 6875000;	$G = \sqrt{DF}$
$G =$ 5,232991;	$lG =$ 0, 7187500;	$H = \sqrt{FG}$
$H =$ 5,048065;	$lH =$ 0, 7031250;	$I = \sqrt{FH}$
$I =$ 4,958069;	$lI =$ 0, 6 53125;	$K = \sqrt{HI}$
$K =$ 5,001865;	$lK =$ 0, 6992187;	$L = \sqrt{IK}$
$L =$ 4,980416;	$lL =$ 0, 6972656;	$M = \sqrt{KL}$
$M =$ 4,991627;	$lM =$ 0, 6982421;	$N = \sqrt{KM}$
$N =$ 4,997242;	$lN =$ 0, 6987304;	$O = \sqrt{KN}$
$O =$ 5,000052;	$lO =$ 0, 6989745;	$P = \sqrt{NO}$
$P =$ 4,998647;	$lP =$ 0, 6988525;	$Q = \sqrt{OP}$
$Q =$ 4,999350;	$lQ =$ 0, 6989135;	$R = \sqrt{OQ}$
$R =$ 4,999701;	$lR =$ 0, 6989440;	$S = \sqrt{OR}$
$S =$ 4,999876;	$lS =$ 0, 6989592;	$T = \sqrt{OS}$
$T =$ 4,999963;	$lT =$ 0, 6989668;	$V = \sqrt{OT}$
$V =$ 5,000008;	$lV =$ 0, 6989707;	$W = \sqrt{TV}$
$W =$ 4,999984;	$lW =$ 0, 6989687;	$X = \sqrt{WV}$
$X =$ 4,999997;	$lX =$ 0, 6989697;	$Y = \sqrt{VX}$
$Y =$ 5,000003;	$lY =$ 0, 6989702;	$Z = \sqrt{XY}$
$Z =$ 5,000000;	$lZ =$ 0, 6989700;	

Ainſi, en prenant des moyennes proportionnelles, on eſt parvenu à trouver $Z = 5,000000$, à quoi répond le logarithme cherché 0,698970, en ſuppoſant la baſe logarithmique $= 10$. Par conſéquent $10^{\frac{69897}{100000}} = 5$ à-peu-près. C'eſt de cette maniere que BRIGGS & ULACQ ont calculé la table ordinaire des logarithmes, quoiqu'on ait imaginé depuis des méthodes plus expéditives pour les trouver.

On peut traduire cet algorithme, en python, pour calculer le logarithme de x entier en base b entier, avec une précision de 10^{-p} *:*

```
from math import *

def BriggsLog(x,B,p):
    A=1
    logA=...
    logB=...
    while abs(A-B)>10**(-p):
        if sqrt(...*...)<=x:
            A=sqrt(...*...)
            logA=(...+...)/2
        if sqrt(...*...)>x:
            B=sqrt(...*...)
            logB=(...+...)/2
    return round(logA,p)
```

Compléter cet algorithme.

8. *Calculer* $\log(2)$ *par cet algorithme, lequel est le plus rapide entre celui-ci et le précédent ?*