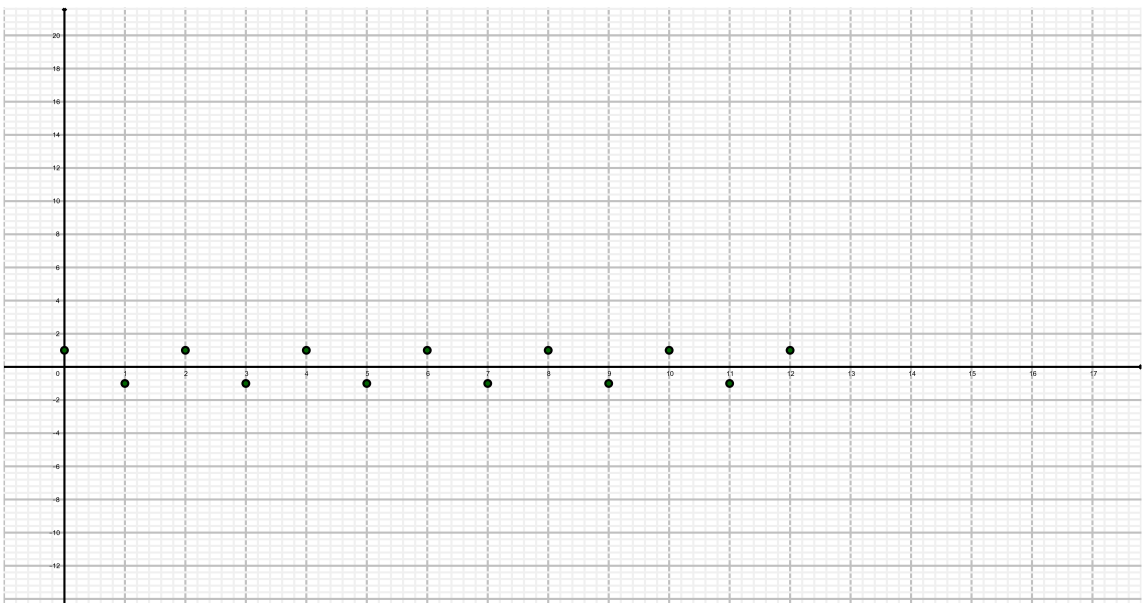
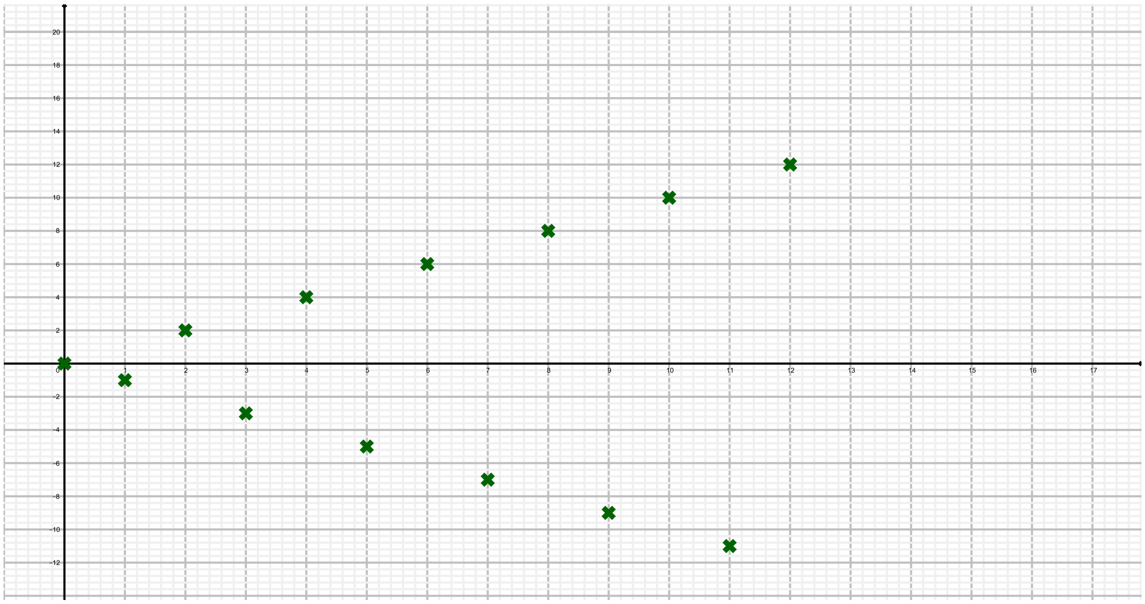
☙ Suites : correction de l'activité sur les limites

Exemple 1 *Pour chacune des courbes qui suivent, choisir une ou plusieurs des propriétés ci-dessous :*

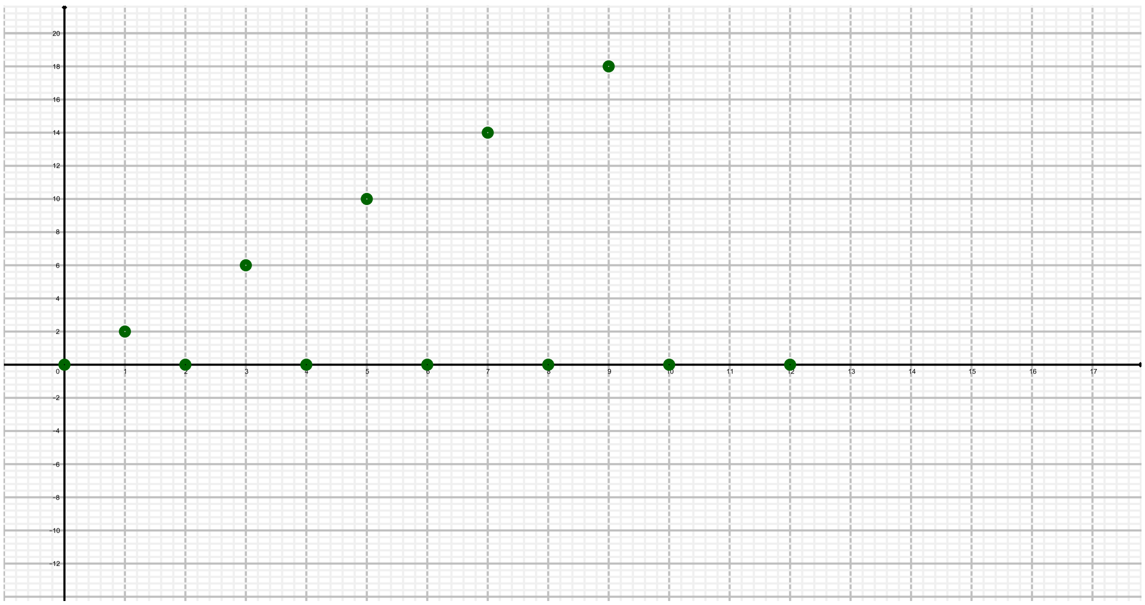
- ✏ (u_n) *a pour une limite finie* l *(que l'on précisera).*
- ✏ (u_n) *a pour limite* $+\infty$.
- ✏ (u_n) *a pour limite* $-\infty$.
- ✏ (u_n) *est croissante.*
- ✏ (u_n) *est décroissante.*
- ✏ (u_n) *est minorée.*
- ✏ (u_n) *est majorée.*
- ✏ (u_n) *est bornée.*



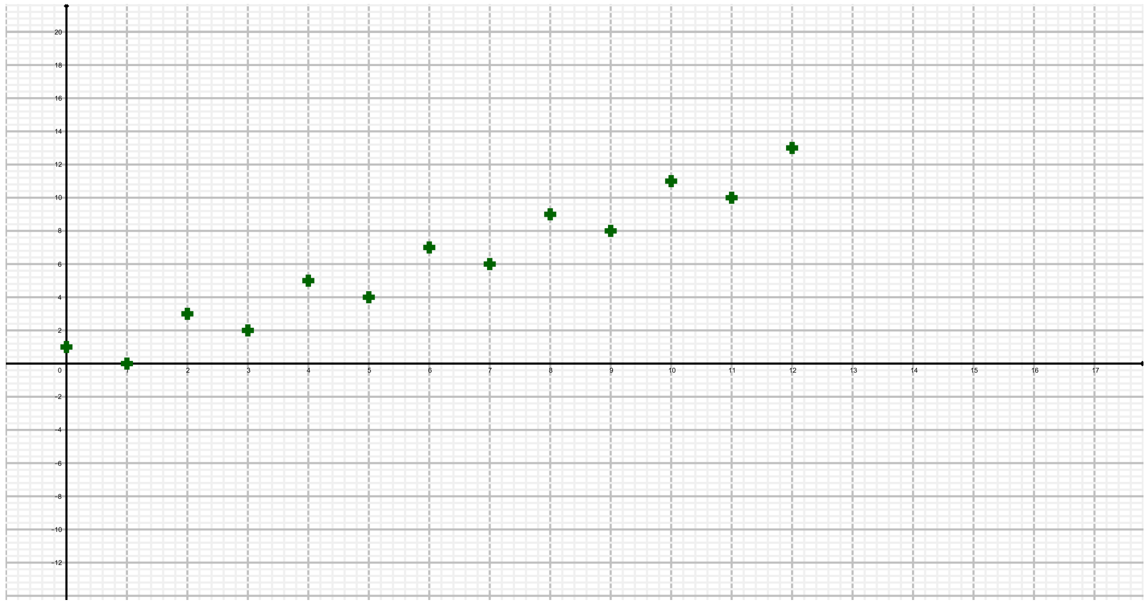
(u_n) *est minorée.*
(u_n) *est majorée.*
(u_n) *est bornée.*



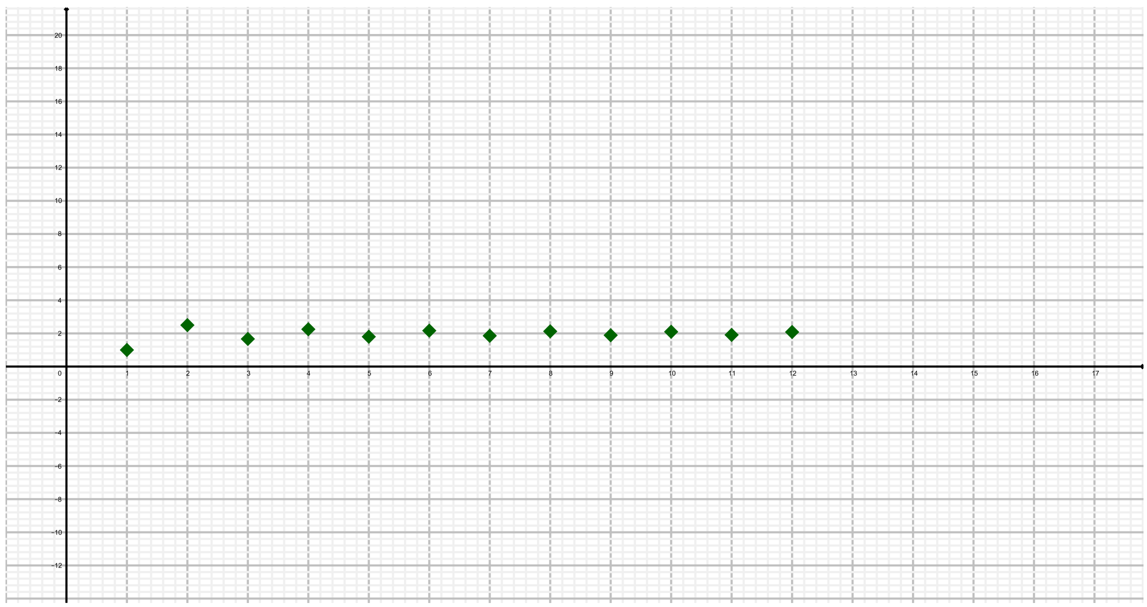
Aucune ne convient



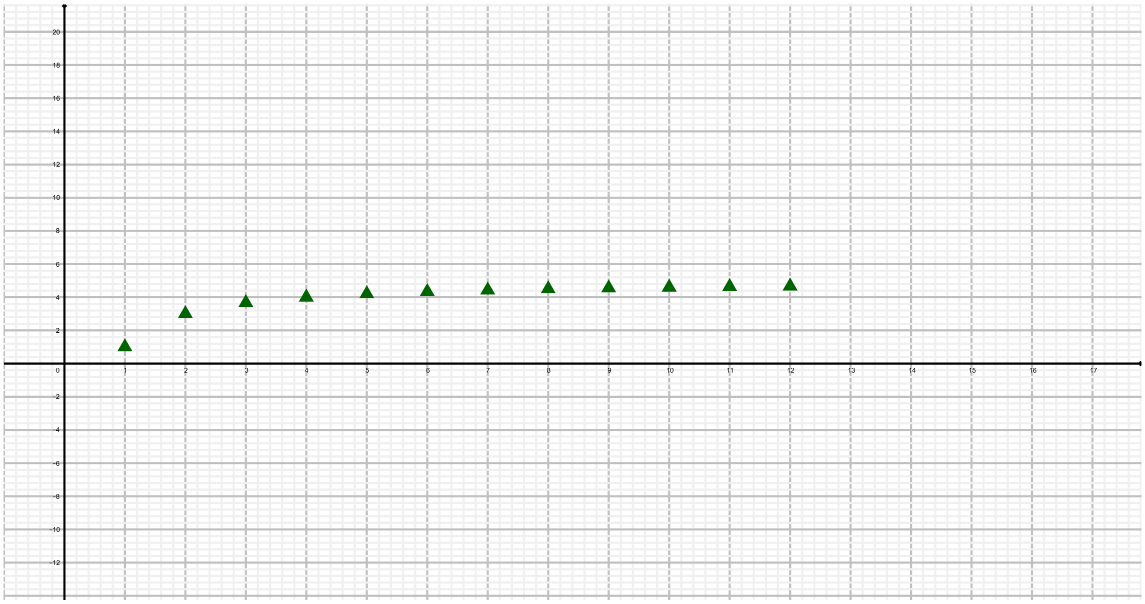
(u_n) est minorée.



(u_n) a pour limite $+\infty$.
(u_n) est minorée.



(u_n) a pour une limite 2.
(u_n) est minorée.
(u_n) est majorée.
(u_n) est bornée.



(u_n) a pour une limite finie 5.
(u_n) est croissante.
(u_n) est minorée.
(u_n) est majorée.
(u_n) est bornée.

Exemple 2 *Préciser si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses :*

- ✏ *Si une suite est croissante, alors elle n'est pas majorée.FAUX; exemple 6*
- ✏ *Si une suite n'est pas majorée, alors elle est croissante.FAUX; exemple 2*
- ✏ *Si une suite n'est pas croissante, alors elle est décroissante.FAUX; exemple 2*
- ✏ *Si une suite n'est pas majorée, alors elle est minorée.FAUX; exemple 2*
- ✏ *Si une suite n'a pas pour limite* $+\infty$ *ou* $-\infty$*, alors elle a une limite finie.FAUX : exemple 1*
- ✏ *Si une suite n'a pas de limite finie* l*, alors elle a pour limite* $+\infty$ *ou* $-\infty$*.FAUX : exemple 1*
- ✏ *Si une suite a une limite finie* l*, alors elle est bornée.VRAI*
- ✏ *Si une suite est bornée, alors elle a une limite finie* l*.FAUX : exemple 1*
- ✏ *Si une suite est croissante, alors elle a pour limite* $+\infty$*.FAUX : exemple 6*
- ✏ *Si une suite a pour limite* $+\infty$*, alors elle est croissante.FAUX : exemple 4*
- ✏ *Si une suite a pour limite* $+\infty$*, alors elle n'est pas majorée.VRAI*
- ✏ *Si une suite n'est pas majorée, alors elle a pour limite* $+\infty$*.FAUX : exemple 3*

Exemple 3 *On considère la suite* (u_n) *définie par :*

$$u_n = \frac{2n^2+4}{n^2+3}$$

1. *Écrire un algorithme qui calcule et affiche les* 20 *premiers termes de la suite* (u_n).

```
def termes(n):
    l=[]
    for i in range(0,n):
        u=(2*i**2+4)/(i**2+3)
        l=l+[u]
    return l
```

Ensuite il suffit de remplacer n par 20.

2. *En faisant fonctionner l'algorithme, conjecturer quant à la limite* l *de cette suite.*

```
In [19]: termes(20)
Out[19]:
[1.3333333333333333,
 1.5,
 1.7142857142857142,
 1.8333333333333333,
 1.894736842105263,
 1.9285714285714286,
 1.9487179487179487,
 1.9615384615384615,
 1.9701492537313432,
 1.9761904761904763,
 1.9805825242718447,
 1.9838709677419355,
 1.9863945578231292,
 1.9883720930232558,
 1.9899497487437185,
 1.9912280701754386,
 1.9922779922779923,
 1.9931506849315068,
 1.9938837920489296,
 1.9945054945054945]
```

On peut en conjecturer que la limite de cette suite sera 20.

3. *Démontrer ce résultat.*
On sait que :

$$\lim_{n\to+\infty} 2n^2+4 = +\infty$$
$$\lim_{n\to+\infty} n^2+3 = +\infty$$
$$\text{donc } \lim_{n\to+\infty} u_n \text{ est une FI du type } \frac{+\infty}{\infty}$$

On doit alors factoriser le numérateur et le dénominateur par leur monôme de plus degré respectif; ça sera n^2 à la fois pour le numérateur et le dénominateur :

$$\frac{2n^2+4}{n^2+3} = \frac{n^2\left(2+4\times\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(1+3\times\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{2+4\times\frac{1}{n^2}}{1+3\times\frac{1}{n^2}}$$
$$\text{or } \lim_{n\to+\infty} 2+4\times\frac{1}{n^2} = 2$$
$$\text{et } \lim_{n\to+\infty} 1+3\times\frac{1}{n^2} = 1$$
$$\text{donc } \lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{2}{1} = 2 \quad \text{par quotient de limites}$$

4. *Démontrer que cette suite est croissante.*
On sait que $u_n = f(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc il suffit de montrer que la dérivée de la fonction f est positive :

$$f(x) = \frac{2x^2+4}{x^2+3}$$
$$f'(x) = \left(\frac{2x^2+4}{x^2+3}\right)'$$
$$f'(x) = \frac{(2x^2+4)'\times(x^2+3)-(2x^2+4)\times(x^2+3)'}{(x^2+3)^2}$$
$$f'(x) = \frac{4x\times(x^2+3)-(2x^2+4)\times 2x}{(x^2+3)^2}$$
$$f'(x) = \frac{4x^3+12x-4x^2-8x)\times 2x}{(x^2+3)^2}$$
$$f'(x) = \frac{4x}{(x^2+3)^2}$$

Or cette fonction est positive pour $x \geq 0$ donc f est croissante pour $x \geq 0$; la suite (u_n) est donc croissante.

5. *Écrire un algorithme qui calcule et affiche la plus petite valeur de N telle que $l-h < u_N$, où $h > 0$ est choisi par l'utilisateur.*

```
def indice(l):
    u=4/3
    n=0
    while u<2-l:
        n=n+1
        u=(2*n**2+4)/(n**2+3)
    return n
```

6. *Tester pour $h = 0.01$ puis pour $h = 0.0001$.*

```
In [22]: indice(0.1)
Out[22]: 5

In [23]: indice(0.01)
Out[23]: 15

In [24]: indice(0.0001)
Out[24]: 142
```

Exemple 4 (Paradoxe d'Achille et de la tortue) *Le paradoxe d'Achille et de la tortue, formulé par Zénon d'Élée* $(-490\,;-425)$*, dit qu'un jour, le héros grec Achille a disputé une course à pieds avec une tortue.*
Comme il était beaucoup plus rapide que la tortue, il lui avait accordé une avance de 100 *unités de longueur (on prendra le mètre par la suite mais le mètre n'existait pas à l'époque).*
Dans les faits, Achille va rattraper la tortue alors qu'à priori il ne le devrait pas si on considère le raisonnement suivant :

- ✏ *quand Achille va rattraper l'endroit où était la tortue à son départ, celle-ci aura se sera déplacée plus loin.*
- ✏ *quand Achille va arriver à ce nouvel endroit, la tortue aura encore bougé.*
- ✏ *et on peut continuer ce raisonnement un nombre de fois infini*

Le paradoxe vient du fait qu'une infinité d'étapes va se passer en un temps fini, ce qui est possible mais contre-intuitif.
C'est ce que nous allons montrer.
On va supposer qu'Achille court à $10 m.s^{-1}$ *et la tortue à* $0.1 m.s^{-1}$*, juste pour simplifier les notations.*
On appelle t_n *le temps qu'Achille met à chaque étape pour rattraper l'endroit où la tortue était à l'étape précédente. On conviendra du fait qu'on débutera à* $n = 1$ *et que* t_1 *sera la durée mise par Achille pour effectuer les* 100 *premiers mètres.*
On appelle $S_n = \sum_{k=1}^{n} t_n$ *: si on fait tendre* n *vers plus l'infini, on va obtenir le temps qu'Achille va mettre pour rattaper la tortue.*

1. *Calculer* t_2 *et* t_3.
   On commence par calculer t_1 *:*

$$t_1 = \frac{100}{10} = 10s$$

   On calcule maintenant la distance parcourue par la tortue pendant la durée t_1 *:*

$$10 \times 0.1 = 1m$$

   La durée t_2 *est celle nécessaire à Achille pour parcourir* $1m$ *:*

$$t_2 = \frac{1}{10}s$$

   On calcule maintenant la distance parcourue par la tortue pendant la durée t_2 *:*

$$\frac{1}{10} \times 0.1 = \frac{1}{100}m$$

   La durée t_3 *est celle nécessaire à Achille pour parcourir* $\frac{1}{100}m$ *:*

$$t_2 = \frac{\frac{1}{100}}{10} = \frac{1}{1000}s$$

2. *Déterminer t_n.*
D'après les calculs précédents, on peut en déduire que :

$$t_n = 10 \times \left(\frac{1}{100}\right)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

3. *En déduire S_n.*
On a :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} t_k = \sum_{k=1}^{n} 10 \times \left(\frac{1}{100}\right)^k = 10 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{100}\right)^n}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{1000}{99}\left(1 - \left(\frac{1}{100}\right)^n\right)$$

4. *Conclure.*
La suite $\left(\left(\frac{1}{100}\right)^n\right)$ a pour limite 0 : en effet, sa raison de valeur absolue strictement plus petite que 1. On peut le comprendre en remarquant que multiplier par un nombre plus petit que 1 revient à faire une dimінition de ce nombre d'un certain pourcentage : si on répère cette diminution une infinité de fois, il ne restera plus rien du nombre de départ, donc un résultat nul.
Par produit et somme de limites, on en déduit que :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1000}{99}\left(1 - \left(\frac{1}{100}\right)^n\right) = \frac{1000}{99}$$

Finalement, en une infinité d'étapes, Achille aura rattraper la tortue, tout en parcourant une distance finie : $\frac{1000}{99}$ unités de longeur.