Exercice 1

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = -5e^{-2x}$, où y est une fonction inconnue de la variable réelle x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et y' la fonction dérivée de y.

1. Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E_0) : $y' + 2y = 0$
2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -5xe^{-2x}$. Démontrer que la fonction g est une solution de (E)
3. En déduire les solutions de l'équation différentielle (E).
4. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) vérifiant la condition initale $f(0) = 1$.

Exercice 1

- Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E_0) : $y' + 2y = 0$.

- Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E_0) : $y' + 2y = 0$.
  $\rightarrow$ Les solutions de l'équation (E_0) sont de la forme :

$$f_0(x) = Ke^{-\text{ une primitive de 2}} = Ke^{-2x} \text{ avec } K \in \mathbb{R}$$

- Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -5xe^{-2x}$. Démontrer que la fonction g est une solution de (E).

- Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E_0) : $y' + 2y = 0$.
  $\rightarrow$ Les solutions de l'équation (E_0) sont de la forme :

$$f_0(x) = Ke^{-\text{ une primitive de 2}} = Ke^{-2x} \text{ avec } K \in \mathbb{R}$$

- Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -5xe^{-2x}$. Démontrer que la fonction g est une solution de (E).
  $\rightarrow$ Pour montrer que g est une solution particulière de (E), il suffit de vérifier que :

$$g(x)' + 2g(x) = 5e^{-2x}$$

On a :

$$\begin{aligned} g(x)' + 2g(x) &= (-5xe^{-2x})' + 2 \times (-5xe^{-2x}) \\ &= (-5x)' \times (e^{-2x}) + (-5x) \times (e^{-2x})' + 2 \times (-5xe^{-2x}) \\ &= -5e^{-2x} - 5x \times (-2)e^{-2x} - 10xe^{-2x} \\ &= -5e^{-2x} \end{aligned}$$

donc g est bien une solution particulière de (E)

- En déduire les solutions de l'équation différentielle (E).
  $\rightarrow$ Les solutions de l'équation (E) sont de la forme $f(x) = Ke^{-2x} - 5xe^{-2x}$ avec $K \in \mathbb{R}$

Exercice 1

- Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) vérifiant la condition initale $f(0) = 1$.

- Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) vérifiant la condition initale $f(0) = 1$.
  $\rightarrow$ Pour trouver f solution de (E) telle que $f(0) = 1$, il suffit de résoudre :

$$\begin{aligned} f(0) = 1 &\Leftrightarrow Ke^{-2\times 0} - 5 \times 0 \times e^{-2\times 0} = 1 \\ &\Leftrightarrow K = 1 \end{aligned}$$

  Finalement la solution cherchée est $f(x) = e^{-2x} - 5xe^{-2x}$.

Exercice 2

On considère l'équation différentielle : (E) : $y' - y = e^x - 2x$ où la fonction inconnue y, de la variable réelle x, est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et y' désigne sa fonction dérivée.

1. Déterminer les solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(E_0)\ :\ y' - y = 0$.
2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = xe^x + 2x + 2$. Démontrer que la fonction g est une solution particulière de l'équation différentielle (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
4. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale $f(0) = 3$.

- Déterminer les solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(E_0)\ :\ y' - y = 0$.

- Déterminer les solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(E_0)\ :\ y' - y = 0$.
  $\rightarrow$ Les solutions de l'équation (E_0) sont de la forme :

$$f_0(x) = Ke^{-\text{ une primitive de } -1} = Ke^{x} \text{ avec } K \in \mathbb{R}$$

- Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = xe^{x} + 2x + 2$. Démontrer que la fonction g est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

- Déterminer les solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E_0) : $y' - y = 0$.
  $\rightarrow$ Les solutions de l'équation (E_0) sont de la forme :

$$f_0(x) = Ke^{-\text{ une primitive de } -1} = Ke^x \text{ avec } K \in \mathbb{R}$$

- Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = xe^x + 2x + 2$. Démontrer que la fonction g est une solution particulière de l'équation différentielle (E). $\rightarrow$ Pour montrer que g est une solution particulière de (E), il suffit de vérifier que :

$$g(x)' - g(x) = e^x - 2x$$

  On a :

$$\begin{aligned} g(x)' - g(x) &= (xe^x + 2x + 2)' - (xe^x + 2x + 2) \\ &= x'e^x + x(e^x)' + 2 - xe^x - 2x - 2 \\ &= e^x + xe^x + 2 - xe^x - 2x - 2 \\ &= e^x - 2x \end{aligned}$$

  donc g est bien une solution particulière de (E)

- En déduire les solutions de l'équation différentielle (E).
  $\rightarrow$ Les solutions de l'équation (E) sont de la forme $f(x) = Ke^x + xe^x + 2x + 2$ avec $K \in \mathbb{R}$

- Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale $f(0) = 3$.
  $\rightarrow$Pour trouver f solution de (E) telle que $f(0) = 3$, il suffit de résoudre :

$$\begin{aligned} f(0) = 1 &\Leftrightarrow Ke^{\times 0} + 0 \times e^{0} + 2 \times 0 + 2 = 3 \\ &\Leftrightarrow K + 2 = 3 \\ &\Leftrightarrow K = 1 \end{aligned}$$

  Finalement la solution cherchée est $f(x) = e^{x} + xe^{x} + 2x + 2$.