# ☙ Probabilités conditionnelles

## 1 Tableau d'effectifs

Dans cette partie, nous allons revoir et voir les notions de probabilités à bien connaître. Pour introduire ces concepts, nous allons faire un exemple dans le cas le moins compliqué : quand on connaît la taille de la population étudiée.

**Exemple 1** *Un* food truck*, ouvert le midi et le soir, propose deux types de formules :*

— *la formule* Burger *;*
— *la formule* Wok.

*Le gérant a remarqué que 70 % de ses ventes ont lieu le midi. Le quart des ventes du midi correspondent à la formule* Burger*, alors que 40 % des ventes du soir correspondent à la formule* Wok.
*Le gérant se constitue un fichier en notant, pour chaque vente, la formule choisie et le moment de cette vente (midi ou soir) : sur la journée, il a fait* 1000 *ventes.*
*On prélève une fiche de façon équiprobable. On définit les quatre évènements suivants :*

*M : « la fiche correspond à une vente du midi » ;*

*S : « la fiche correspond à une vente du soir » ;*

*W : « la fiche correspond à une formule* Wok *» ;*

*B : « la fiche correspond à une formule* Burger *».*

1. *Compléter le tableau de répartition des fiches suivant :*

| | *Vente du midi* | *Vente du soir* | *Total* |
|---|---|---|---|
| *Formule Wok* | | | |
| *Formule Burger* | | | |
| *Total* | | | |

2. *Quelle est la signification de l'événement $M \cap W$ ?*
3. *Calculer la probabilité de l'évènement $M \cap W$. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.*
4. *Calculer la probabilité que la fiche choisie corresponde à une formule* Burger.
5. *Quelle est la signification de l'événement $M \cup W$ ?*
6. *Calculer la probabilité de l'évènement $M \cup W$. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.*
7. *On a prélevé une fiche correspondant à la formule* Burger. *Quelle est la probabilité, arrondie au millième, que la vente ait eu lieu le soir ?*
8. *Comparer ce résultat à $\frac{P(B\cap S)}{P(B)}$.*

**Remarque :** On pourra toujours se ramener au cas où on connaît la taille de la population de départ et faire un tableau.
On pourra faire comme si la population comptait 10000 individus et déterminer toutes les probabilités grâce à un tableau. Mais ça sera plus long.

 **TSTMG**

## 2 Arbre de probabilités

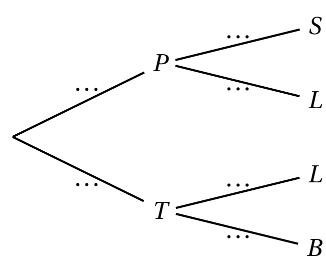
**Exemple 2** *L'office de tourisme d'une ville souhaite fidéliser ses touristes. Pour cela, il organise une loterie dont les lots sont de plusieurs types : porte-clefs aux couleurs de la ville, tee-shirt de l'office du tourisme, stylo, panier de produits locaux, bon de réduction de 150 € sur un prochain séjour en ville.*
*Cette loterie se pratique sur une borne tactile et se déroule en deux étapes.*
*À chaque étape il s'agit de choisir une case parmi les dix qui s'affichent sur l'écran de la borne.*
***Première étape :***
*Le touriste a sept chances sur dix de gagner un porte-clefs aux couleurs de la ville et trois chances sur dix de gagner un tee-shirt de l'office du tourisme.*
***Seconde étape :***

— *Si le touriste a gagné un porte-clefs, il a huit chances sur dix de gagner un stylo aux couleurs de la ville et deux chances sur dix de gagner un panier de produits locaux ;*
— *si le touriste a gagné un tee-shirt de l'office du tourisme, il a neuf chances sur dix de gagner un panier de produits locaux et une chance sur dix de gagner un bon de réduction de 150 € sur un prochain séjour en ville.*

*On définit les événements suivants :*

*$P$ : « le premier lot est un porte-clefs » et $T$ : « le premier lot est un tee-shirt » ;*
*$S$ : « le second lot est un stylo » ;*
*$L$ : « le second lot est un panier de produit locaux » ;*
*$B$ : « le second lot est un bon de réduction de 150 euros sur un prochain séjour en ville ».*

1. *Compléter l'arbre pondéré suivant :*




2. *Calculer la probabilité que le touriste gagne un bon de réduction de 150 euros sur un prochain séjour en ville.*
3. *Calculer la probabilité que le touriste gagne un panier de produits locaux.*
4. *Sachant qu'un touriste a gagné un panier de produits locaux à la seconde étape de la loterie, calculer la probabilité qu'il ait gagné un tee-shirt lors de la première étape.*
5. *Comparer la probabilité précédente avec la la probabilité de ganger un tee-shirt. Que peut-on en conclure quant à la dépendance entre les événements $T$ et $L$ ?*

**Exemple 3** *Lors d'une épidémie chez des bovins, on s'est aperçu que si la maladie est diagnostiquée suffisamment tôt chez un animal, on peut le guérir ; sinon la maladie est mortelle.*
*Un test est mis au point et essayé sur un échantillon d'animaux dont 1 % est porteur de la maladie.*
*On obtient les résultats suivants :*

- *si un animal est porteur de la maladie, le test est positif dans 85 % des cas ;*
- *si un animal est sain, le test est négatif dans 95 % des cas.*

*On choisit de prendre ces fréquences observées comme probabilités pour la population entière et d'utiliser le test pour un dépistage préventif de la maladie.*
*On note :*

*M l'évènement : « l'animal est porteur de la maladie » ;*

*T l'évènement : « le test est positif ».*

1. *Construire un arbre pondéré modélisant la situation proposée.*
2. *Un animal est choisi au hasard.*
   - **a.** *Quelle est la probabilité qu'il soit porteur de la maladie et que son test soit positif ?*
   - **b.** *Montrer que la probabilité pour que son test soit positif est* 0,058.
3. *Un animal est choisi au hasard parmi ceux dont le test est positif. Quelle est la probabilité pour qu'il soit porteur de la maladie ?*
4. *Que penser de ce test ?*

# 3 Résumé

**Formule de Laplace :** Soit un événement $E$ sur un ensemble fini $\mathscr{E}$ :

$$P(E) = \frac{\text{nombre d'éléments de E}}{\text{nombre d'élément de } \mathscr{E}}$$

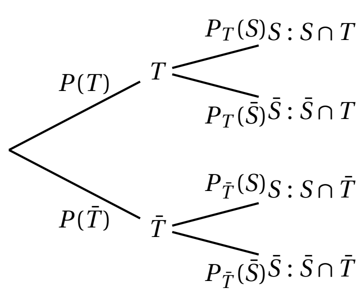
**Probabilités conditionnelles :**

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Leftrightarrow P_A(B) \times P(A) = P(A \cap B)$$

Cette notation désigne la probabilités de $B$ sachant $A$.
En général, elle est différente de la probabilité de l'intersection de $A$ et $B$ qui représente la proportion d'élements de $A \cap B$ par rapport au éléments de l'ensemble fini dans lequel sont prélévés $A$ et $B$.
Tandis que $P_A(B)$ représente la proportion d'éléments de $A \cup B$ par rapport à l'ensemble $A$.
La probabilité conditionnelle est une vraie probabilité :

$$0 \leq P_A(B) \leq 1$$
$$P_A(\bar{B}) = 1 - P_A(B)$$

**Arbre de probabilités et formule des probabilités totales :**




Pour obtenir la probabilité au bout d'une branche, on multiplie les valeurs sur cette branche.
A chaque embranchement, la somme des deux probabilités est égale à 1.
Pour obtenir la probabilité d'un événement dans un arbre à quatre branche, il faut ajouter les probabilités des branches où il intervient. C'est ce qu'on appelle la formule des probabilités totales, par exemple :

$$P(S) = P(S \cap T) + P(S \cap \bar{T}) = P(T) \times P_T(S) + P(\bar{T}) \times P_{\bar{T}}(S)$$

On peut généraliser cette formule à des arbres avec davantage de branches : il suffira d'ajouter la probabilité des intersections avec les différents événements possibles.
**Indépendance :**
Grossièrement, deux événements $A$ et $B$ sont indépendants quand la probabilité que l'un se produise n'a pas d'influence sur la probabilité que l'autre se produise.
On peut traduire cette phrase par les deux formules équivalentes suivantes :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$
$$P(A) = P_B(A) \Leftrightarrow P_A(B) = P(B)$$

## 4 Exercices

**Exercice 1** *Pour ses révisions, un élève utilise des annales de mathématiques. Dans ces annales, 10 % des exercices sont des QCM,* 22% *des exercices ont des questions sur les probabilités et* 4% *sont des QCM qui ont des questions sur les probabilités. On définit les événements suivants :*

- ✏ *: "l'exercice choisi est un QCM";*
- ✏ *: "l'exercice choisi a des questions sur les probabilités".*

1. *Calculer* $P(Q)$, $P(R)$ *puis* $P(Q \cap R)$.
2. *Calculer* $P_Q(R)$ *et* $P_R(Q)$ *et donner leur signification.*
3. *Les événements Q et R sont ils indépendants ?*

**Exercice 2** *Un site de vente par correspondance propose* 2400 *jeux vidéos dont* 1296 *sont des jeux pour console, le reste étant des jeux pour ordinateur.*
*Un tiers des jeux pour console sont des jeux daction et* 25% *des jeux pour ordinateur sont des jeux daction. On choisit au hasard un jeu proposé par le site. On définit les événements :*

- ✏ *: "le jeu est pour console"*
- ✏ *: "le jeu est pour ordinateur"*
- ✏ *: "le jeu est un jeu d'action"*

1. *En utilisant les informations de lénoncé, déterminer la valeur de* $P(C)$, $P(O)$, $P_O(A)$ *, et* $P_C(A)$ .
2. *Représenter cette situation à l'aide dun arbre pondéré et placer sur cet arbre chacune des probabilités déterminées à la question 1.*
3. *Calculer* $P_0(\bar{A})$ *et* $P_C(\bar{A})$ *puis compléter l'arbre pondéré.*
4. *En s'aidant d'un dessin, calculer* $P(C \cap A)$.

**Exercice 3** *Une boîte de biscuits contient* 80 *biscuits d'aspect identique. On sait que, dans cette boîte :*

- ✏ 40 *biscuits sont à la vanille,* 24 *biscuits sont à lorange et les biscuits restants sont à la noix de coco ;*
- ✏ 60% *des biscuits à la vanille contiennent des pépites de chocolat ;*
- ✏ 25% *des biscuits à lorange contiennent des pépites de chocolat ;*
- ✏ *aucun biscuit à la noix de coco ne contient de pépites de chocolat.*

*La boîte étant pleine, on choisit au hasard un biscuit dans la boîte. On admet que chaque biscuit a la même probabilité dêtre choisi. On définit les évènements suivants :*

- ✏ *V : "le biscuit choisi est un biscuit à la vanille";*
- ✏ *O : "le biscuit choisi est un biscuit à lorange";*
- ✏ *N : "le biscuit choisi est un biscuit à la noix de coco";*

✏ *$C$ : "le biscuit choisi contient des pépites de chocolat".*

*Pour tout évènement , on note la probabilité que l'évènement soit réalisé.*
*Dans les questions suivantes, les probabilités seront données sous forme décimale.*

1. *Justifier que la probabilité que l'on choisisse un biscuit à la noix de coco est égale à* $0,2$.
2. *Constuire un arbre pondéré représentant la situation.*
3. *Définir par une phrase l'évènement $V \cap C$ et calculer sa probabilité.*
4. *Montrer que $P(C) = 0.375$.*
5. *On a choisi un biscuit contenant des pépites de chocolat. Quelle est la probabilité que ce soit un biscuit à la vanille ?*
6. *Est ce que les événements $C$ et $V$ sont indépendants ?*