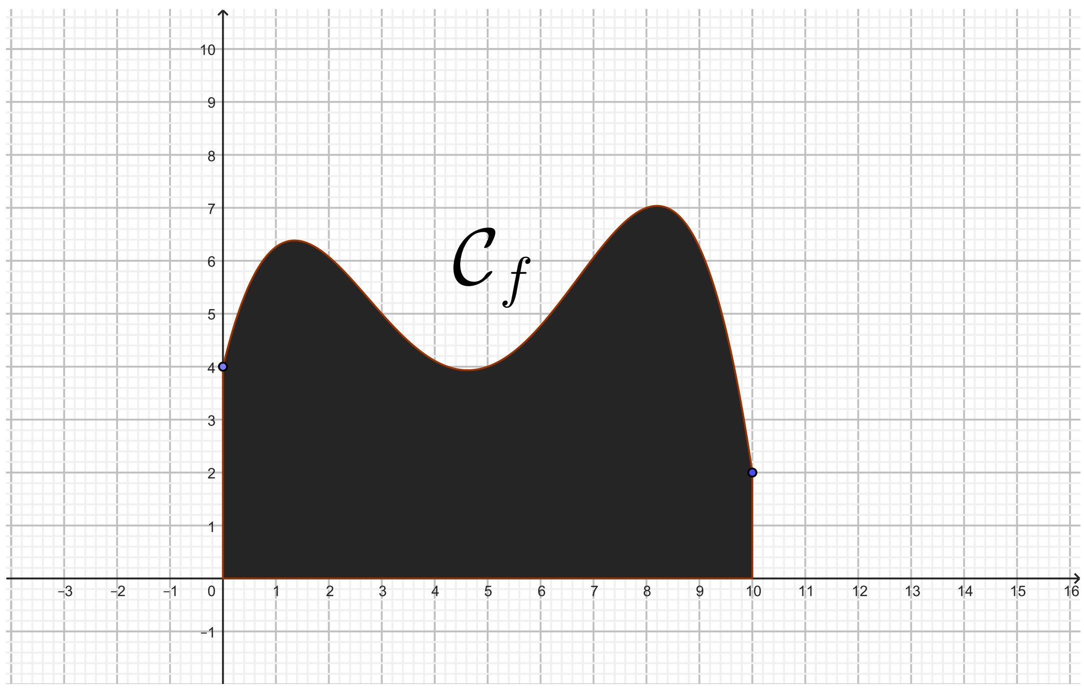
✎ Calculs d'intégrales : activités

Pour une fonction f positive sur l'intervalle $[a;b]$, on appelle intégrale de f sur $[a;b]$ l'aire du domaine composé des points $M(x;y)$ suivants :

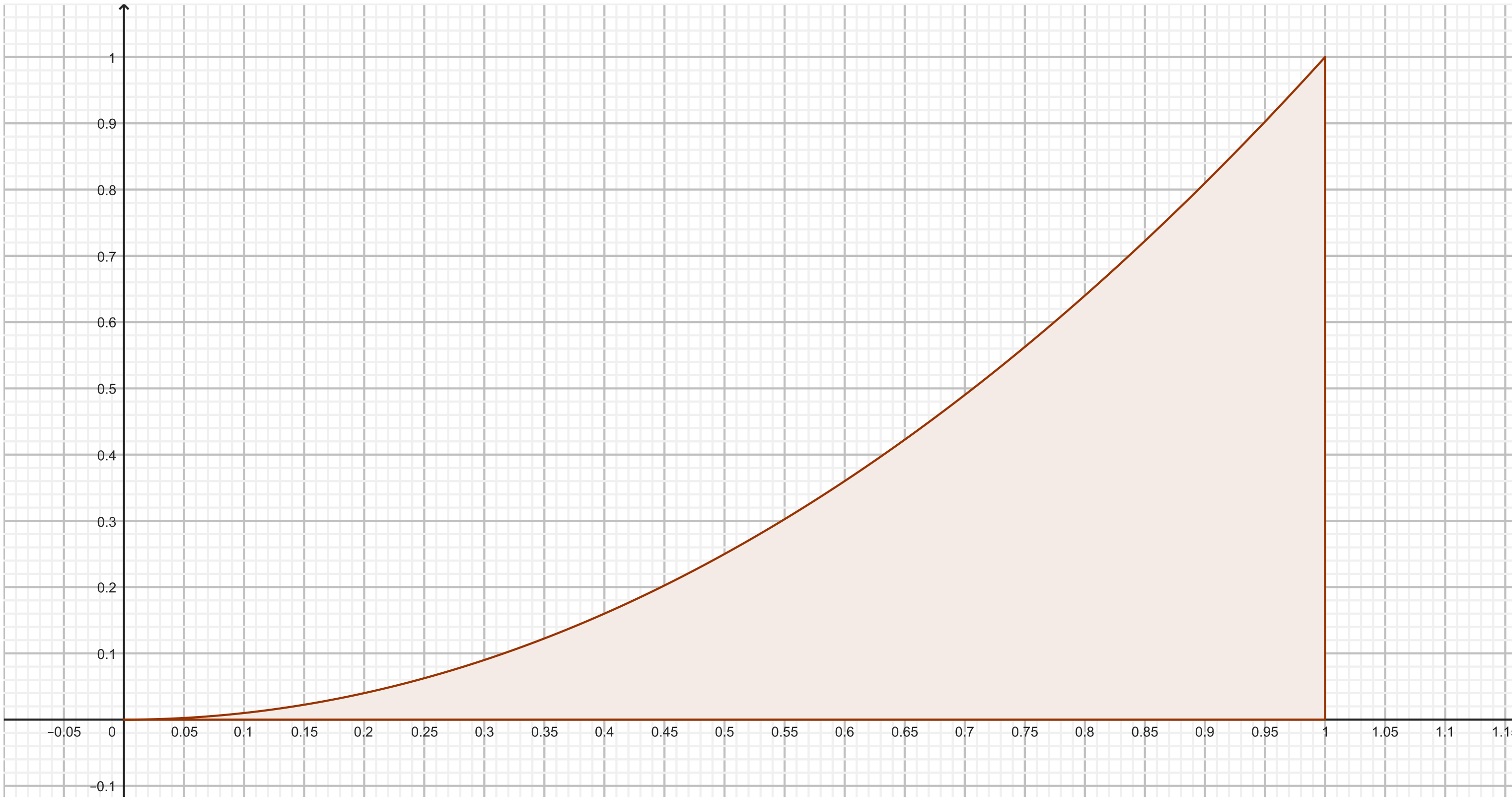
- ✏ $a \leq x \leq b$
- ✏ $0 \leq y \leq f(x)$

On notera cette intégrale $\int_a^b f(x)dx$.

Exemple 1 *Exprimer l'aire noircie au moyen d'une intégrale :*

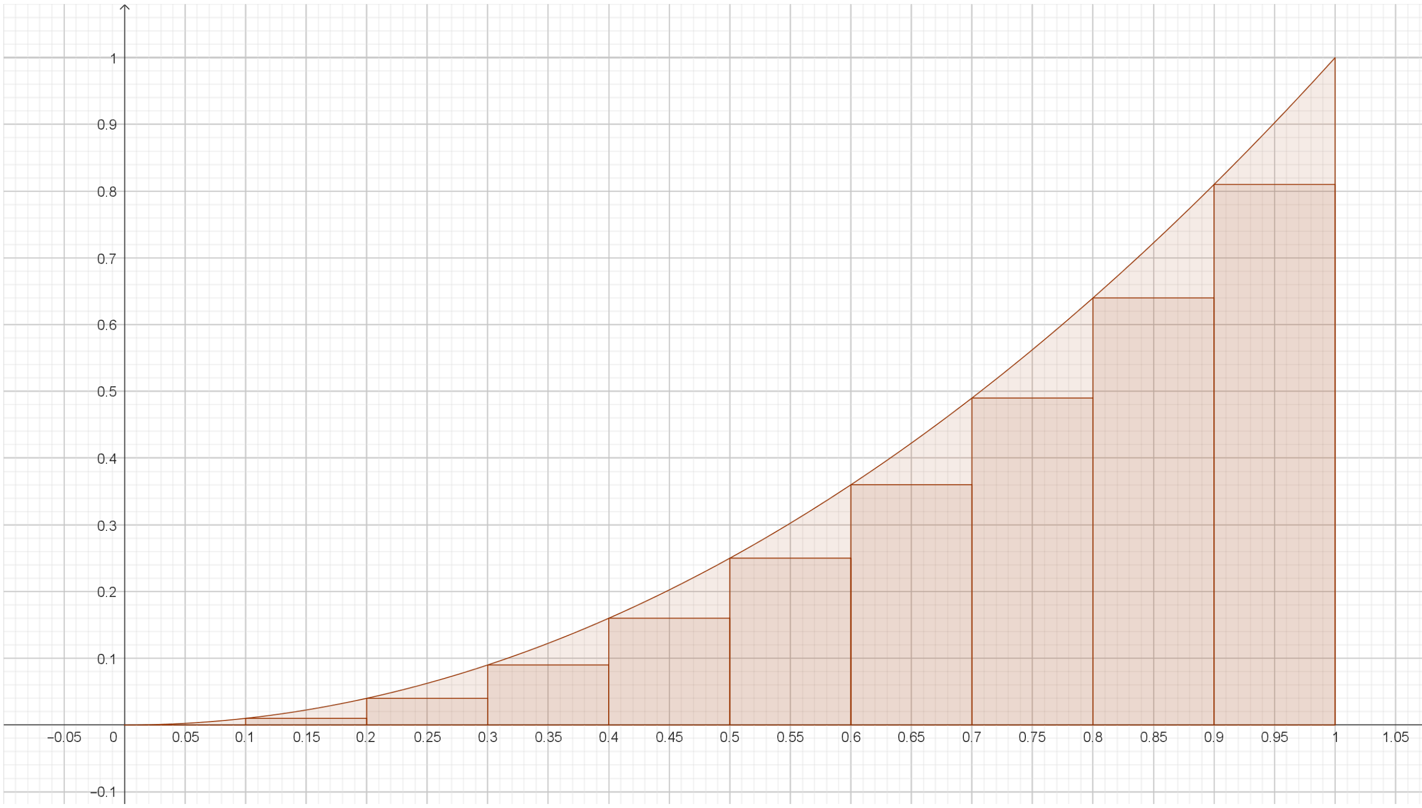


On va essayer de déterminer la valeur de $\int_a^b x^2 dx$:

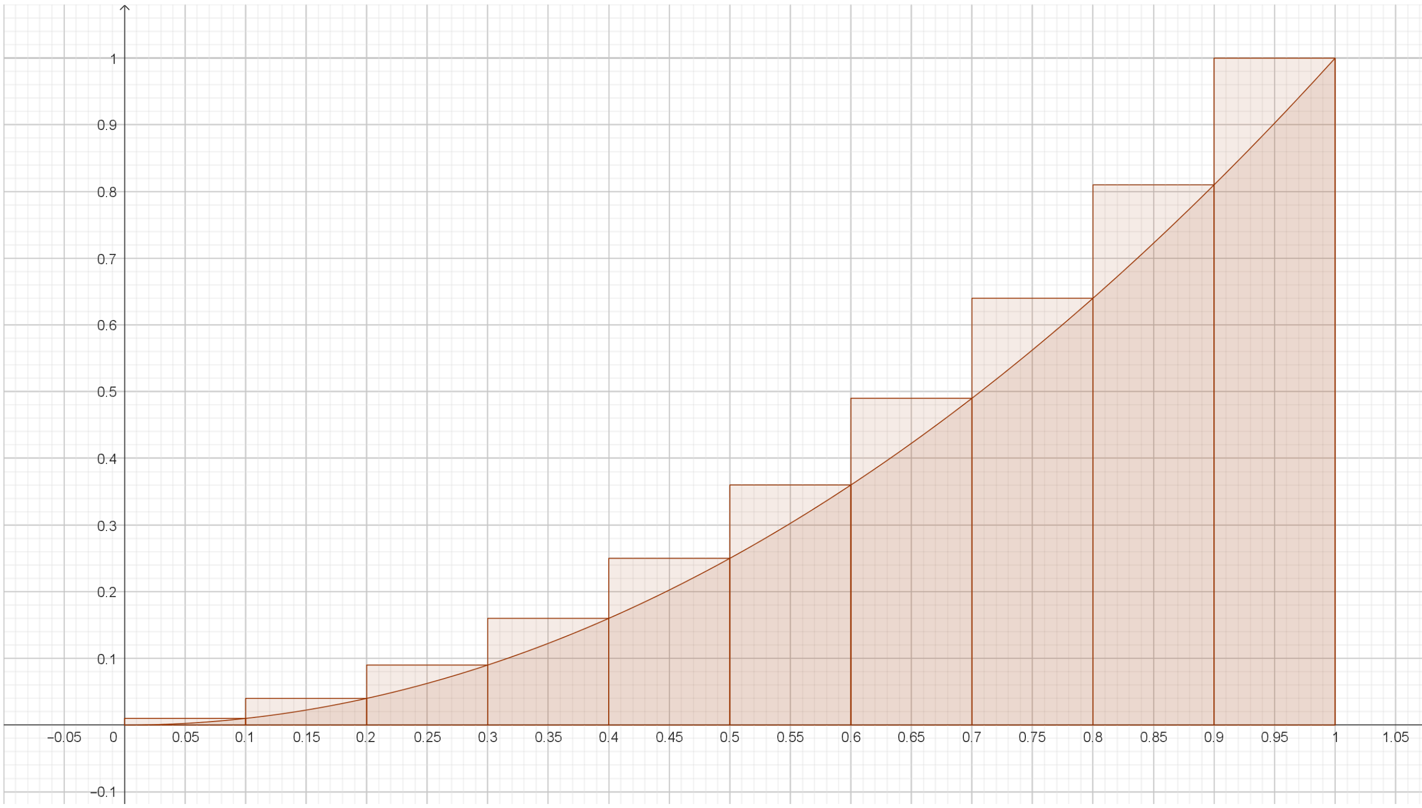


Dans un premier temps, on va encadrer ce domaine entre deux domaines dont on connaît l'aire.

1. Exprimer l'aire du domaine formé par les rectangles, on l'appelle I_{10}.
   Comparer I_{10} et $\int_a^b x^2 dx$.


1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
−0.1
−0.05
0
0.05
0.1
0.15
0.2
0.25
0.3
0.35
0.4
0.45
0.5
0.55
0.6
0.65
0.7
0.75
0.8
0.85
0.9
0.95
1
1.05

2. Exprimer l'aire du domaine formé par les rectangles, on l'appelle S_{10}.
Comparer I_{10} et $\int_a^b x^2 dx$.



3. Que va-t-il se passer si on recommence l'encadrement précédent en utilisant un plus grand nombre de rectangles ?

4. On réprend le découpage en rectangles effectué plus haut mais en passant de 10 à n rectangles.
On appelle I_n l'aire de la somme des rectangles " sous la courbe " et S_n celle de ceux " au dessus de la courbe ".
Comparer I_n, S_n et $\int_a^b x^2 dx$.

5. Donner l'expression de I_n et S_n en fonction d'une somme et de n.

6. Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que :

$$\sum_0^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

7. En déduire une simplification de I_n et S_n.

8. En déduire $\int_a^b x^2 dx$

9. Comparer cette valeur avec $F(1) - F(0)$ où F est une primitive de $f(x) = x^2$.