

♣ Récurrences 4

On considère la suite :

$$\begin{cases} u_{n+1} = -\frac{1}{32}u_n^2 + \frac{40}{32}u_n \\ u_0 = 5 \end{cases}$$

1. Donner l'expression de f telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$
2. Résoudre l'équation : $f(x) = x$
3. Montrer que f est croissante sur $[0; 20]$.
4. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq u_n \leq 8$.
5. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \leq u_{n+1}$.
6. En déduire que la suite est convergente et donner sa limite.

1. On remplace tous les u_n par des x et on obtient :

$$f(x) = -\frac{1}{32}x^2 + \frac{40}{32}x$$

2. Résoudre l'équation : $f(x) = x$

$$\begin{aligned}f(x) &= x \\ \Leftrightarrow -\frac{1}{32}x^2 + \frac{40}{32}x &= x \\ \Leftrightarrow -\frac{1}{32}x^2 + \frac{40}{32}x - x &= 0 \\ \Leftrightarrow x\left(-\frac{1}{32}x + \frac{8}{32}\right) &= 0 \\ \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } -\frac{1}{32}x &= -\frac{8}{32} \\ \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x &= \frac{-\frac{8}{32}}{-\frac{1}{32}} \\ \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x &= 8\end{aligned}$$

3. Pour montrer que f est croissante, on doit calculer sa dérivée et ensuite déterminer son signe :

$$f'(x) = -\frac{2}{32}x + \frac{40}{32}$$

4. On doit maintenant résoudre l'inéquation suivante :

$$\begin{aligned}f'(x) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow -\frac{2}{32}x + \frac{40}{32} &\geq 0 \\ \Leftrightarrow -\frac{2}{32}x &\geq -\frac{40}{32} \\ \Leftrightarrow x &\leq \frac{-\frac{40}{32}}{-\frac{2}{32}} \\ \Leftrightarrow x &\leq 20\end{aligned}$$

Par conséquent sur l'intervalle $[0; 20]$, la fonction f est croissante.

5. Initialisation :

On a :

$$0 \leq u_0 = 5 \leq 8$$

L'initialisation est établie.

Hérédité :

On suppose que la propriété est vraie pour un certain rang $n \geq 0$:

$$0 \leq u_n \leq 8 \text{ c'est l'hypothèse de récurrence}$$

On part de l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned}0 &\leq u_n \leq 8 \\ \Rightarrow 0 &\leq f(u_n) \leq f(8) \text{ car } f \text{ est croissante} \\ \Rightarrow 0 &\leq u_{n+1} \leq 8 \text{ d'après les questions précédentes}\end{aligned}$$

L'hérédité est établie.

Donc $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq u_n \leq 8$

6. Initialisation :

On a :

$$u_1 = f(u_0) = f(5) = 5.46875 > 5 = u_0$$

L'initialisation est établie.

7. Hérédité :

On suppose que la propriété est vraie pour un certain rang $n \geq 0$:

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \text{ c'est l'hypothèse de récurrence}$$

On part de l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} 0 &\leq u_n \leq u_{n+1} \\ \Rightarrow 0 &\leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \text{ car } f \text{ est croissante} \\ \Rightarrow 0 &\leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \end{aligned}$$

L'hérédité est établie.

Donc $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \leq u_{n+1}$

8. En déduire que la suite est convergente et donner sa limite.

Comme la suite est croissante et majorée, d'après le théorème de convergence monotone, la suite converge vers un nombre réel l qui vérifie :

$$\begin{aligned} f(l) &= l \\ \Leftrightarrow l &= 0 \text{ ou } l = 8 \end{aligned}$$

Comme la suite est croissante et que $u_0 > 0$, alors l ne peut pas être nul donc $l = 8$