Récurrences 2

On considère la suite :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 0.7u_n + 1.5 \\ u_0 = 10 \end{cases}$$

1. Montrer par récurrence que :

$$5 \leq u_{n+1} \leq u_n$$

2. En déduire que la suite converge et en déduire sa limite.

1. **Initialisation :**

   On a :

$$\begin{aligned} u_1 &= 0.7u_0 + 1.5 = 8.5 \\ \text{donc } 5 \leq u_1 &\leq 10 = u_0 \end{aligned}$$

   L'initialisation est établie.

   Hérédité :
   On suppose que la propriété est vraie pour un certain rang $n \geq 0$:

$$5 \leq u_{n+1} \leq u_n \quad \text{c'est l'hypothèse de récurrence}$$

   On part de cette hypothèse :

$$\begin{aligned} & 5 \leq u_{n+1} \leq u_n \\ \Rightarrow & 0.7 \times 5 \leq 0.7 \times u_{n+1} \leq 0.7 \times u_n \\ \Rightarrow & 3.5 \leq 0.7 \times u_{n+1} \leq 0.7 \times u_n \\ \Rightarrow & 3.5 + 1.5 \leq 0.7 \times u_{n+1} + 1.5 \leq 0.7 \times u_n + 1.5 \\ \Rightarrow & 5.0 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \end{aligned}$$

   L'hérédité est établie.

2. On vient de montrer que la suite est décroissante et minorée, par conséquent, d'après le théorème de convergence monotone, la suite converge vers l un nombre réel qui vérifie :

$$\begin{aligned} & l = 0.7 \times l + 1.5 \\ \Leftrightarrow & l - 0.7 \times l = 1.5 \\ \Leftrightarrow & l \times 0.3 = 1.5 \\ \Leftrightarrow & l = \frac{1.5}{0.3} = 5 \end{aligned}$$