Fonction exponentielle : exercices corrigés

Exercice

Déterminer la dérivée de chacune des fonctions suivantes ainsi que leur limite en $+\infty$ *:*

1. e^{3x}
2. $(3.2)^x$
3. xe^{-2x}
4. $\frac{x}{e^{3x}}$
5. $e^{-2x}\sin(x)$

Exercice 1 :correction

- e^{3x}.

Exercice 1 :correction

- e^{3x}.
  $\rightarrow (e^{3x})' = 3 \times e^{3x}$.

Exercice 1 :correction

- e^{3x}.
  $\rightarrow (e^{3x})' = 3 \times e^{3x}$.
- $3.(2)^x$.

- e^{3x}.
  $\rightarrow (e^{3x})' = 3 \times e^{3x}$.
- $3.(2)^x$.
  $\rightarrow (3.2^x)' = 3.(e^{\ln(2)\times x})' = 3 \times \ln(2)e^{\ln(2)\times x} = 3\ln(2) \times 2^x$

Exercice 1 :correction

- e^{3x}.
  $\rightarrow (e^{3x})' = 3 \times e^{3x}$.
- $3.(2)^x$.
  $\rightarrow (3.2^x)' = 3.(e^{\ln(2)\times x})' = 3 \times \ln(2) e^{\ln(2)\times x} = 3\ln(2) \times 2^x$
- xe^{-2x}.

Exercice 1 :correction

- e^{3x}.
  $\rightarrow (e^{3x})' = 3 \times e^{3x}$.
- $3.(2)^x$.
  $\rightarrow (3.2^x)' = 3.(e^{\ln(2)\times x})' = 3 \times \ln(2)e^{\ln(2)\times x} = 3\ln(2) \times 2^x$
- xe^{-2x}.
  $\rightarrow (xe^{-2x})' = (x)' \times e^{-2x} + x \times (e^{-2x}) = e^{-2x} + x \times (-2)e^{-2x} = (1-2x)e^{-2x}$

- e^{3x}.
  $\rightarrow (e^{3x})' = 3 \times e^{3x}$.
- $3.(2)^x$.
  $\rightarrow (3.2^x)' = 3.(e^{\ln(2) \times x})' = 3 \times \ln(2) e^{\ln(2) \times x} = 3\ln(2) \times 2^x$
- xe^{-2x}.
  $\rightarrow (xe^{-2x})' = (x)' \times e^{-2x} + x \times (e^{-2x}) = e^{-2x} + x \times (-2)e^{-2x} = (1-2x)e^{-2x}$
- $\frac{x}{e^{3x}}$.

- e^{3x}.
  $\rightarrow (e^{3x})' = 3 \times e^{3x}$.
- $3.(2)^x$.
  $\rightarrow (3.2^x)' = 3.(e^{\ln(2)\times x})' = 3 \times \ln(2) e^{\ln(2)\times x} = 3\ln(2) \times 2^x$
- xe^{-2x}.
  $\rightarrow (xe^{-2x})' = (x)' \times e^{-2x} + x \times (e^{-2x}) = e^{-2x} + x \times (-2)e^{-2x} = (1-2x)e^{-2x}$
- $\frac{x}{e^{3x}}$.
  $\rightarrow$ On a :

$$(\frac{x}{e^{3x}})' = \frac{x' \times e^{3x} - x \times (e^{3x})'}{(e^{3x})^2} = \frac{e^{3x} - x \times 3e^{3x}}{e^{6x}} = \frac{e^{3x}(1-3x)}{e^{6x}} = \frac{1-3x}{e^{3x}}$$

- e^{3x}.
  $\rightarrow (e^{3x})' = 3 \times e^{3x}$.
- $3.(2)^x$.
  $\rightarrow (3.2^x)' = 3.(e^{\ln(2)\times x})' = 3 \times \ln(2) e^{\ln(2)\times x} = 3\ln(2) \times 2^x$
- xe^{-2x}.
  $\rightarrow (xe^{-2x})' = (x)' \times e^{-2x} + x \times (e^{-2x}) = e^{-2x} + x \times (-2)e^{-2x} = (1-2x)e^{-2x}$
- $\frac{x}{e^{3x}}$.
  $\rightarrow$ On a :
  $$\left(\frac{x}{e^{3x}}\right)' = \frac{x' \times e^{3x} - x \times (e^{3x})'}{(e^{3x})^2} = \frac{e^{3x} - x \times 3e^{3x}}{e^{6x}} = \frac{e^{3x}(1-3x)}{e^{6x}} = \frac{1-3x}{e^{3x}}$$
- $e^{-2x}\sin(x)$.

- e^{3x}.
  $\rightarrow (e^{3x})' = 3 \times e^{3x}$.
- $3.(2)^x$.
  $\rightarrow (3.2^x)' = 3.(e^{\ln(2)\times x})' = 3 \times \ln(2)e^{\ln(2)\times x} = 3\ln(2) \times 2^x$
- xe^{-2x}.
  $\rightarrow (xe^{-2x})' = (x)' \times e^{-2x} + x \times (e^{-2x}) = e^{-2x} + x \times (-2)e^{-2x} = (1-2x)e^{-2x}$
- $\frac{x}{e^{3x}}$.
  $\rightarrow$ On a :

$$(\frac{x}{e^{3x}})' = \frac{x' \times e^{3x} - x \times (e^{3x})'}{(e^{3x})^2} = \frac{e^{3x} - x \times 3e^{3x}}{e^{6x}} = \frac{e^{3x}(1-3x)}{e^{6x}} = \frac{1-3x}{e^{3x}}$$

- $e^{-2x}\sin(x)$.
  $\rightarrow (e^{-2x}\sin(x))' = (e^{-2x})' \times \sin(x) + e^{-2x} \times (\sin(x))' =$
  $-2e^{-2x} \times \sin(x) + e^{-2x} \times \cos(x) = e^{-2x}(-2\sin(x) + \cos(x))$

Exercice

Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes :

1. $3e^{2x} + x^2$.
2. $\frac{1}{e^{3x}}$.
3. $2 - xe^{-x^2}$.
4. $2\frac{e^x}{e^x+1}$.

Est ce que la fonction $F(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$ *est la primitive de* $f(x) = \frac{e^x}{(e^x+1)^2}$ *qui vaut* $\frac{1}{2}$ *en* 0 *?*

Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes :

- $3e^{2x} + x^2$.

Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes :

- $3e^{2x} + x^2$. $\rightarrow$ Une primitive de cette fonction est $3 \times \frac{e^{2x}}{2} + \frac{x^3}{3}$.

Exercice 2 :correction

Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes :

- $3e^{2x} + x^2$. $\rightarrow$ Une primitive de cette fonction est $3 \times \frac{e^{2x}}{2} + \frac{x^3}{3}$.
- $\frac{1}{e^{3x}}$.

Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes :

- $3e^{2x} + x^2$. $\rightarrow$ Une primitive de cette fonction est $3 \times \frac{e^{2x}}{2} + \frac{x^3}{3}$.
- $\frac{1}{e^{3x}}$. $\rightarrow$ On a $\frac{1}{e^{3x}} = e^{-3x}$ et une primitive de e^{-3x} est $\frac{e^{-3x}}{-3}$

Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes :

- $3e^{2x}+x^2$. $\rightarrow$ Une primitive de cette fonction est $3\times\frac{e^{2x}}{2}+\frac{x^3}{3}$.
- $\frac{1}{e^{3x}}$. $\rightarrow$ On a $\frac{1}{e^{3x}}=e^{-3x}$ et une primitive de e^{-3x} est $\frac{e^{-3x}}{-3}$
- $2-xe^{-x^2}$.

Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes :

- $3e^{2x} + x^2$. $\rightarrow$ Une primitive de cette fonction est $3 \times \frac{e^{2x}}{2} + \frac{x^3}{3}$.
- $\frac{1}{e^{3x}}$. $\rightarrow$ On a $\frac{1}{e^{3x}} = e^{-3x}$ et une primitive de e^{-3x} est $\frac{e^{-3x}}{-3}$
- $2 - xe^{-x^2}$. $\rightarrow$ Une primitive de cette fonction est $2x + \frac{e^{-x^2}}{2}$

Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes :

- $3e^{2x} + x^2$. $\rightarrow$ Une primitive de cette fonction est $3 \times \frac{e^{2x}}{2} + \frac{x^3}{3}$.
- $\frac{1}{e^{3x}}$. $\rightarrow$ On a $\frac{1}{e^{3x}} = e^{-3x}$ et une primitive de e^{-3x} est $\frac{e^{-3x}}{-3}$
- $2 - xe^{-x^2}$. $\rightarrow$ Une primitive de cette fonction est $2x + \frac{e^{-x^2}}{2}$
- $2\frac{e^x}{e^x+1}$.

Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes :

- $3e^{2x} + x^2$. $\rightarrow$ Une primitive de cette fonction est $3 \times \frac{e^{2x}}{2} + \frac{x^3}{3}$.
- $\frac{1}{e^{3x}}$. $\rightarrow$ On a $\frac{1}{e^{3x}} = e^{-3x}$ et une primitive de e^{-3x} est $\frac{e^{-3x}}{-3}$
- $2 - xe^{-x^2}$. $\rightarrow$ Une primitive de cette fonction est $2x + \frac{e^{-x^2}}{2}$
- $2\frac{e^x}{e^x+1}$. $\rightarrow$ Le dénominateur de cette fonction est une "puissance 1" donc on va chercher une primitive sous la forme d'un logarithme.
  Le dénominateur est $e^x + 1$, calculons la dérivée de la fonction $\ln(e^x + 1)$:
  $(\ln(e^x + 1))' = (e^x + 1)' \times \ln'(e^x + 1) = e^x \times \frac{1}{e^x+1}$.
  Donc une primitive de $2\frac{e^x}{e^x+1}$ est $2\ln(e^x + 1)$.

Exercice 2 :correction

Est ce que la fonction $F(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$ est la primitive de $f(x) = \frac{e^x}{(e^x+1)^2}$ qui vaut $\frac{1}{2}$ en 0 ?

Est ce que la fonction $F(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$ est la primitive de $f(x) = \frac{e^x}{(e^x+1)^2}$ qui vaut $\frac{1}{2}$ en 0 ?

$\rightarrow$ On va commencer par vérifier que $F'(x) = f(x)$:

$$F'(x) = \frac{(e^x)' \times (e^x+1) - e^x \times (e^x+1)}{(e^x+1)^2} = \frac{e^x(e^x+1) - e^x \times e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{e^{2x} + e^x - e^{2x}}{(e^x+1)^2}$$

$$= \frac{e^x}{(e^x+1)^2} = f(x)$$

Donc F est une primitive de f, il reste à voir si elle vaut $\frac{1}{2}$ en 0 :

$F(0) = \frac{e^0}{e^0+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$.

Donc F est la primitive de f qui vaut $\frac{1}{2}$ en 0.

Exercice

Résoudre les équation et les inéquations suivantes :

1. $\ln(3x-4)=-1$ *et* $2\ln(x^2)+5=0$
2. $e^{2x-7}=e^{0.5x}$ *et* $2e^{x-3}-5=0$
3. $2^x<17$ *et* $e^{4x-1}>e^{2x-3}$
4. $4\ln(x)+3>0$ *et* $\ln(2x)<-1$
5. $2X^2-5X-3=0$ *puis* $2e^{2x}-5e^x-3=0$
6. $X^2-5X+4=0$ *puis* $(\ln(x))^2-5\ln(x)+4=0$ *sur* $]0;+\infty[$.

- $\ln(3x-4)=-1$ et $2\ln(x^2)+5=0$.

- $\ln(3x-4) = -1$ et $2\ln(x^2)+5=0$.
  $\rightarrow$ On a :

$$
\begin{aligned}
\ln(3x-4) = -1 &\quad \text{et} \quad 2\ln(x^2)+5=0 \\
3x-4 = e^{-1} &\quad \text{et} \quad 2\ln(x) = -\frac{5}{2} \\
3x = e^{-1}+4 &\quad \text{et} \quad \ln(x) = -\frac{5}{4} \\
x = \frac{e^{-1}+4}{3} &\quad \text{et} \quad x = e^{-\frac{5}{4}}
\end{aligned}
$$

- $\ln(3x-4) = -1$ et $2\ln(x^2) + 5 = 0$.
  $\rightarrow$ On a :

$$\begin{aligned}
\ln(3x-4) = -1 \quad &\text{et} \quad 2\ln(x^2) + 5 = 0 \\
3x - 4 = e^{-1} \quad &\text{et} \quad 2\ln(x) = -\frac{5}{2} \\
3x = e^{-1} + 4 \quad &\text{et} \quad \ln(x) = -\frac{5}{4} \\
x = \frac{e^{-1}+4}{3} \quad &\text{et} \quad x = e^{-\frac{5}{4}}
\end{aligned}$$

- $e^{2x-7} = e^{0.5x}$ et $2e^{x-3} - 5 = 0$.

- $\ln(3x-4) = -1$ et $2\ln(x^2) + 5 = 0$.
  $\rightarrow$ On a :

$$\begin{aligned}
\ln(3x-4) = -1 &\quad \text{et} \quad 2\ln(x^2) + 5 = 0 \\
3x - 4 = e^{-1} &\quad \text{et} \quad 2\ln(x) = -\frac{5}{2} \\
3x = e^{-1} + 4 &\quad \text{et} \quad \ln(x) = -\frac{5}{4} \\
x = \frac{e^{-1}+4}{3} &\quad \text{et} \quad x = e^{-\frac{5}{4}}
\end{aligned}$$

- $e^{2x-7} = e^{0.5x}$ et $2e^{x-3} - 5 = 0$.
  $\rightarrow$ On a :

$$\begin{aligned}
e^{2x-7} = e^{0.5x} &\quad \text{et} \quad 2e^{x-3} - 5 = 0 \\
\ln(e^{2x-7}) = \ln(e^{0.5x}) &\quad \text{et} \quad e^{x-3} = \frac{5}{2} \\
2x - 7 = 0.5x &\quad \text{et} \quad x - 3 = \ln(\frac{5}{2}) \\
x = \frac{7}{1.5} &\quad \text{et} \quad x = \ln(\frac{5}{2}) + 3
\end{aligned}$$

Exercice 3 : correction

- $2^x < 17$ et $e^{4x-1} > e^{2x-3}$.

- $2^x < 17$ et $e^{4x-1} > e^{2x-3}$.
  $\rightarrow$ On a :

$$2^x < 17 \quad \text{et} \quad e^{4x-1} > e^{2x-3}$$
$$\ln(2^x) < \ln(17) \quad \text{et} \quad \ln(e^{4x-1}) > \ln(e^{2x-3})$$
$$x \times \ln(2) < \ln(17) \quad \text{et} \quad 4x - 1 > 2x - 3$$
$$x < \frac{\ln(17)}{\ln(2)} \quad \text{car} \quad \ln(2) > 0 \quad \text{et} \quad x > -2$$

- $2^x < 17$ et $e^{4x-1} > e^{2x-3}$.
  $\rightarrow$ On a :

$$\begin{aligned}
&2^x < 17 \quad \text{et} \quad e^{4x-1} > e^{2x-3} \\
&\ln(2^x) < \ln(17) \quad \text{et} \quad \ln(e^{4x-1}) > \ln(e^{2x-3}) \\
&x \times \ln(2) < \ln(17) \quad \text{et} \quad 4x - 1 > 2x - 3 \\
&x < \frac{\ln(17)}{\ln(2)} \quad \text{car} \ \ln(2) > 0 \quad \text{et} \quad x > -2
\end{aligned}$$

- $4\ln(x) + 3 > 0$ et $\ln(2x) < -1$.

- $2^x < 17$ et $e^{4x-1} > e^{2x-3}$.
  $\rightarrow$ On a :

$$\begin{aligned}
&2^x < 17 \quad \text{et} \quad e^{4x-1} > e^{2x-3}\\
&\ln(2^x) < \ln(17) \quad \text{et} \quad \ln(e^{4x-1}) > \ln(e^{2x-3})\\
&x \times \ln(2) < \ln(17) \quad \text{et} \quad 4x-1 > 2x-3\\
&x < \frac{\ln(17)}{\ln(2)} \ \text{ car } \ln(2) > 0 \quad \text{et} \quad x > -2
\end{aligned}$$

- $4\ln(x) + 3 > 0$ et $\ln(2x) < -1$.
  $\rightarrow$ On a :

$$\begin{aligned}
&4\ln(x) + 3 > 0 \quad \text{et} \quad \ln(2x) < -1\\
&\ln(x) > -\frac{3}{4} \quad \text{et } 2x < e^{-1}\\
&x > e^{-\frac{3}{4}} \quad \text{et } x < \frac{e^{-1}}{2}
\end{aligned}$$

- $2X^2 - 5X - 3 = 0$ puis $2e^{2x} - 5e^x - 3 = 0$.

- $2X^2 - 5X - 3 = 0$ puis $2e^{2x} - 5e^x - 3 = 0$.
  $\rightarrow$ Pour résoudre la première équation on commence par calculer le discriminant $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 2 \times (-3) = 25 + 24 = 49 > 0$.
  L'équation a donc deux solutions réelles distinctes :

$$X_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5 + \sqrt{49}}{4} = \frac{5+7}{4} = 3$$
$$X_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5 - \sqrt{49}}{4} = \frac{5-7}{4} = -0.5$$

- $2X^2 - 5X - 3 = 0$ puis $2e^{2x} - 5e^x - 3 = 0$.
  $\rightarrow$ Pour résoudre la première équation on commence par calculer le discriminant $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 2 \times (-3) = 25 + 24 = 49 > 0$.
  L'équation a donc deux solutions réelles distinctes :

$$X_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5 + \sqrt{49}}{4} = \frac{5 + 7}{4} = 3$$

$$X_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5 - \sqrt{49}}{4} = \frac{5 - 7}{4} = -0.5$$

Passons maintenant à l'équation $2e^{2x} - 5e^x - 3 = 0 \Leftrightarrow 2(e^x)^2 - 5(e^x) - 3 = 0$.
C'est la même équation que précédemment sauf que l'inconnue est e^x, on sait alors que e^x peut prendre deux solutions à priori : 3 et -0.5. Mais comme $e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ alors e^x ne peut pas être égal à -0.5, il vaut donc 3, donc $x = \ln(3)$: c'est l'unique solution de l'équation $2e^{2x} - 5e^x - 3 = 0$.

- $X^2 - 5X + 4 = 0$ puis $(\ln(x))^2 - 5\ln(x) + 4 = 0$ sur $]0;+\infty[$.

- $X^2 - 5X + 4 = 0$ puis $(\ln(x))^2 - 5\ln(x) + 4 = 0$ sur $]0; +\infty[$.
  $\rightarrow$ Pour résoudre la première équation on commence par calculer le discriminant $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 25 - 16 = 9 > 0$.
  L'équation a donc deux solution réelles distinctes :

$$X_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5+\sqrt{16}}{2} = 4.5$$
$$X_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5-\sqrt{16}}{2} = 0.5$$

- $X^2 - 5X + 4 = 0$ puis $(\ln(x))^2 - 5\ln(x) + 4 = 0$ sur $]0; +\infty[$.
  $\rightarrow$ Pour résoudre la première équation on commence par calculer le discriminant $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 25 - 16 = 9 > 0$.
  L'équation a donc deux solution réelles distinctes :

$$X_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5 + \sqrt{16}}{2} = 4.5$$
$$X_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5 - \sqrt{16}}{2} = 0.5$$

  Passons maintenant à l'équation $(\ln(x))^2 - 5\ln(x) + 4 = 0$ sur $]0; +\infty[$.
  C'est la même équation que précédemment sauf que l'inconnue est $\ln(x)$, on sait alors que $\ln(x)$ peut prendre deux solutions à priori : 4.5 et 0.5.
  En simplifiant, on trouve que $(\ln(x))^2 - 5\ln(x) + 4 = 0$ admet deux solutions $x = e^{4.5}$ et $x = e^{0.5}$.

Exercice

On éteint le chauffage dans une pièce d'habitation à 22 h. La température y est alors de 20 °C. Le but de ce problème est d'étudier l'évolution de la température de cette pièce, puis de calculer l'énergie dissipée à l'extérieur, au cours de la nuit, de 22 h à 7 h le lendemain matin. On suppose, pour la suite du problème, que la température extérieure est constante et égale à 11 °C. On désigne par t le temps écoulé depuis 22 h, exprimé en heures, et par $f(t)$ la température de la pièce exprimée en °C. La température de la pièce est donc modélisée par une fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 9]

1. *Prévoir le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle [0 ; 9].*
   On admet désormais que la fonction f est définie sur l'intervalle [0 ; 9] par $f(t) = 9e^{-0,12t} + 11$.
2. *Donner une justification mathématique du sens de variation trouvé à la question précédente.*
3. *Calculer $f(9)$. En donner la valeur arrondie au dixième puis interpréter ce résultat.*
4. *Déterminer, à l'aide de la calculatrice, l'heure à partir de laquelle la température est inférieure à 15 °C. (pensez à un tableau de valeurs)*
5. *Retrouver le résultat précédent en résolvant une inéquation.*

Exercice 4 : correction

- Prévoir le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,9]$.

- Prévoir le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle [0 ; 9].
  $\longrightarrow$ Comme on arrête le chauffage et que la température extérieure est plus basse que la température de la chambre, on peut prévoir que la température de la chambre va baisser, c'est-à-dire f décroissante.

Exercice 4 : correction

- Prévoir le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle [0 ; 9].
  $\rightarrow$ Comme on arrête le chauffage et que la température extérieure est plus basse que la température de la chambre, on peut prévoir que la température de la chambre va baisser, c'est-à-dire f décroissante.
- Donner une justification mathématique du sens de variation trouvé à la question précédente.

Exercice 4 : correction

- Prévoir le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle [0 ; 9].
  $\rightarrow$ Comme on arrête le chauffage et que la température extérieure est plus basse que la température de la chambre, on peut prévoir que la température de la chambre va baisser, c'est-à-dire f décroissante.
- Donner une justification mathématique du sens de variation trouvé à la question précédente.
  $\rightarrow$ Pour cela, il suffit de calculer la dérivée de f. On a :

  $$f'(t) = (9e^{-0.12t} + 11)' = 9(e^{-0.12t})' = 9 \times (-0.12)e^{-0.12t} = -1.08e^{-0.12}$$

  Or $e^{-0.12t} > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ donc $f'(t) < 0$ pour tout t$\in [0; 9]$: c'est à dire f décroissante.

Exercice 4 : correction

- Prévoir le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle [0 ; 9].
  $\rightarrow$ Comme on arrête le chauffage et que la température extérieure est plus basse que la température de la chambre, on peut prévoir que la température de la chambre va baisser, c'est-à-dire f décroissante.
- Donner une justification mathématique du sens de variation trouvé à la question précédente.
  $\rightarrow$ Pour cela, il suffit de calculer la dérivée de f. On a :

  $$f'(t) = (9e^{-0.12t} + 11)' = 9(e^{-0.12t})' = 9 \times (-0.12)e^{-0.12t} = -1.08e^{-0.12}$$

  Or $e^{-0.12t} > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ donc $f'(t) < 0$ pour tout t$\in [0; 9]$: c'est à dire f décroissante.
- Calculer $f(9)$. En donner la valeur arrondie au dixième puis interpréter ce résultat.

- Prévoir le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle [0 ; 9].
  $\rightarrow$ Comme on arrête le chauffage et que la température extérieure est plus basse que la température de la chambre, on peut prévoir que la température de la chambre va baisser, c'est-à-dire f décroissante.
- Donner une justification mathématique du sens de variation trouvé à la question précédente.
  $\rightarrow$ Pour cela, il suffit de calculer la dérivée de f. On a :

  $$f'(t) = (9e^{-0.12t} + 11)' = 9(e^{-0.12t})' = 9 \times (-0.12)e^{-0.12t} = -1.08e^{-0.12}$$

  Or $e^{-0.12t} > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ donc $f'(t) < 0$ pour tout t$\in [0; 9]$: c'est à dire f décroissante.
- Calculer $f(9)$. En donner la valeur arrondie au dixième puis interpréter ce résultat.
  $\rightarrow$ On a $f(9) = 9e^{-0,12\times 9} + 11 \approx 14,1$.
  Cela signifie que neuf heures après l'arrêt du chauffage, c'est à dire à 7h du matin, il fait $14,1$ degrés dans la chambre.

- Prévoir le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle [0 ; 9].
$\rightarrow$ Comme on arrête le chauffage et que la température extérieure est plus basse que la température de la chambre, on peut prévoir que la température de la chambre va baisser, c'est-à-dire f décroissante.
- Donner une justification mathématique du sens de variation trouvé à la question précédente.
$\rightarrow$ Pour cela, il suffit de calculer la dérivée de f. On a :

$$f'(t) = (9e^{-0.12t} + 11)' = 9(e^{-0.12t})' = 9 \times (-0.12)e^{-0.12t} = -1.08e^{-0.12}$$

Or $e^{-0.12t} > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ donc $f'(t) < 0$ pour tout t$\in [0; 9]$: c'est à dire f décroissante.
- Calculer $f(9)$. En donner la valeur arrondie au dixième puis interpréter ce résultat.
$\rightarrow$ On a $f(9) = 9e^{-0,12\times 9} + 11 \approx 14,1$.
Cela signifie que neuf heures après l'arrêt du chauffage, c'est à dire à 7h du matin, il fait $14,1$ degrés dans la chambre.
- Déterminer, à l'aide de la calculatrice, l'heure à partir de laquelle la température est inférieure à 15 °C. (pensez à un tableau de valeurs)

- Prévoir le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle [0 ; 9].
  $\rightarrow$ Comme on arrête le chauffage et que la température extérieure est plus basse que la température de la chambre, on peut prévoir que la température de la chambre va baisser, c'est-à-dire f décroissante.
- Donner une justification mathématique du sens de variation trouvé à la question précédente.
  $\rightarrow$ Pour cela, il suffit de calculer la dérivée de f. On a :
  $$f'(t) = (9e^{-0.12t} + 11)' = 9(e^{-0.12t})' = 9 \times (-0.12)e^{-0.12t} = -1.08e^{-0.12}$$
  Or $e^{-0.12t} > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ donc $f'(t) < 0$ pour tout t$\in [0; 9]$: c'est à dire f décroissante.
- Calculer $f(9)$. En donner la valeur arrondie au dixième puis interpréter ce résultat.
  $\rightarrow$ On a $f(9) = 9e^{-0,12\times 9} + 11 \approx 14,1$.
  Cela signifie que neuf heures après l'arrêt du chauffage, c'est à dire à 7h du matin, il fait $14,1$ degrés dans la chambre.
- Déterminer, à l'aide de la calculatrice, l'heure à partir de laquelle la température est inférieure à 15 °C. (pensez à un tableau de valeurs)
  $\rightarrow$ En faisant un tableur de valeurs, on trouve que l'heure à partir de laquelle la température est inférieure à 15 °C est 5h.(c'est à dire 7h après 22h)

Exercice 4 : correction

- Prévoir le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle [0 ; 9].
  $\rightarrow$ Comme on arrête le chauffage et que la température extérieure est plus basse que la température de la chambre, on peut prévoir que la température de la chambre va baisser, c'est-à-dire f décroissante.
- Donner une justification mathématique du sens de variation trouvé à la question précédente.
  $\rightarrow$ Pour cela, il suffit de calculer la dérivée de f. On a :
  $$f'(t) = (9e^{-0.12t} + 11)' = 9(e^{-0.12t})' = 9 \times (-0.12)e^{-0.12t} = -1.08e^{-0.12}$$
  Or $e^{-0.12t} > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ donc $f'(t) < 0$ pour tout t$\in [0; 9]$: c'est à dire f décroissante.
- Calculer $f(9)$. En donner la valeur arrondie au dixième puis interpréter ce résultat.
  $\rightarrow$ On a $f(9) = 9e^{-0,12\times 9} + 11 \approx 14,1$.
  Cela signifie que neuf heures après l'arrêt du chauffage, c'est à dire à 7h du matin, il fait $14,1$ degrés dans la chambre.
- Déterminer, à l'aide de la calculatrice, l'heure à partir de laquelle la température est inférieure à 15 °C. (pensez à un tableau de valeurs)
  $\rightarrow$ En faisant un tableur de valeurs, on trouve que l'heure à partir de laquelle la température est inférieure à 15 °C est 5h.(c'est à dire 7h après 22h)
- Retrouver le résultat précédent en résolvant une inéquation.

- Prévoir le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle [0 ; 9].
  $\rightarrow$ Comme on arrête le chauffage et que la température extérieure est plus basse que la température de la chambre, on peut prévoir que la température de la chambre va baisser, c'est-à-dire f décroissante.
- Donner une justification mathématique du sens de variation trouvé à la question précédente.
  $\rightarrow$ Pour cela, il suffit de calculer la dérivée de f. On a :
  $$f'(t) = (9e^{-0.12t} + 11)' = 9(e^{-0.12t})' = 9 \times (-0.12)e^{-0.12t} = -1.08e^{-0.12}$$
  Or $e^{-0.12t} > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ donc $f'(t) < 0$ pour tout t$\in [0; 9]$: c'est à dire f décroissante.
- Calculer $f(9)$. En donner la valeur arrondie au dixième puis interpréter ce résultat.
  $\rightarrow$ On a $f(9) = 9e^{-0,12 \times 9} + 11 \approx 14,1$.
  Cela signifie que neuf heures après l'arrêt du chauffage, c'est à dire à 7h du matin, il fait $14,1$ degrés dans la chambre.
- Déterminer, à l'aide de la calculatrice, l'heure à partir de laquelle la température est inférieure à 15 °C. (pensez à un tableau de valeurs)
  $\rightarrow$ En faisant un tableur de valeurs, on trouve que l'heure à partir de laquelle la température est inférieure à 15 °C est 5h.(c'est à dire 7h après 22h)
- Retrouver le résultat précédent en résolvant une inéquation.
  $\rightarrow$ Pour cela on doit résoudre l'inéquation :
  $f(t) < 15 \Leftrightarrow 9\text{e}^{-0,12t} + 11 < 15 \Leftrightarrow e^{-0.12t} < \frac{4}{9} \Leftrightarrow -0.12t < \ln(\frac{4}{9}) \Leftrightarrow t > \frac{\ln(\frac{4}{9})}{-0.12} \approx 6.7$.
  On retrouve bien le fait que c'est 7h après l'extinction du chauffage que la température baisse en dessous de 15 degrés.

Exercice

Cet exercice est tiré du livre et de la partie sur les fonctions exponentielles.
Un paramètre important lors du montage d'un système poulies-courroie est l'angle d'enroulement qui correspond à l'angle où la courroie et la poulie motrice sont en contact. Une manière de modifer cet angle est d'utiliser un galet tendeur.

1. *Comparer les deux angles* α_1 *et* α_2.
   L'expression du couple moteur dépend de plusieurs autres paramètres, mais si ceux-ci sont connus, il est possible de trouver une relation fonctionnelle entre le couple moteur et l'angle d'enroulement.
   La fonction obtenue une fois les paramètres fixés est $C(\alpha) = 10 \times \frac{e^{0.1\alpha} - 1}{e^{0.1\alpha} + 1}$.
2. *Montrer que* $C'(\alpha) = \frac{2e^{0.1\alpha}}{(e^{0.1\alpha}+1)^2}$.
3. *Quel est le signe de* $C'(\alpha)$ *?*
4. *Pour quel angle,* α_1 *ou* α_2*, le couple moteur est-il le plus important ?*
5. *Réprésenter* C *pour* α *appartenant à l'intervalle* $[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$.

Exercice 5 : correction

- Comparer les deux angles α_1 et α_2.

- Comparer les deux angles α_1 et α_2.
  $\rightarrow$ On constate que $\alpha_2 > \alpha_1$.

- Comparer les deux angles α_1 et α_2.
  $\rightarrow$ On constate que $\alpha_2 > \alpha_1$. La fonction obtenue une fois les paramètres fixés est $C(\alpha) = 10 \times \frac{e^{0.1\alpha} - 1}{e^{0.1\alpha} + 1}$.

- Comparer les deux angles α_1 et α_2.
  $\rightarrow$ On constate que $\alpha_2 > \alpha_1$. La fonction obtenue une fois les paramètres fixés est $C(\alpha) = 10 \times \frac{e^{0.1\alpha}-1}{e^{0.1\alpha}+1}$.
- Montrer que $C'(\alpha) = \frac{2e^{0.1\alpha}}{(e^{0.1\alpha}+1)^2}$.

- Comparer les deux angles α_1 et α_2.
  $\rightarrow$ On constate que $\alpha_2 > \alpha_1$. La fonction obtenue une fois les paramètres fixés est $C(\alpha) = 10 \times \frac{e^{0.1\alpha}-1}{e^{0.1\alpha}+1}$.
- Montrer que $C'(\alpha) = \frac{2e^{0.1\alpha}}{(e^{0.1\alpha}+1)^2}$.
  $\rightarrow$ On doit dériver la fonction $C(\alpha) = 10 \times \frac{e^{0.1\alpha}-1}{e^{0.1\alpha}+1}$, on a :

$$
\begin{aligned}
C'(x) &= (10 \times \frac{e^{0.1\alpha}-1}{e^{0.1\alpha}+1})' \\
&= 10 \times \frac{(e^{0.1\alpha}-1)' \times (e^{0.1\alpha}+1) - (e^{0.1\alpha}-1) \times (e^{0.1\alpha}+1)'}{(e^{0.1\alpha}+1)^2} \\
&= 10 \times \frac{0.1e^{0.1\alpha} \times (e^{0.1\alpha}+1) - (e^{0.1\alpha}-1) \times 0.1e^{0.1\alpha}}{(e^{0.1\alpha}+1)^2} \\
&= 10 \times \frac{0.1e^{0.1\alpha} \times 2}{(e^{0.1\alpha}+1)^2} \\
&= \frac{2e^{0.1\alpha}}{(e^{0.1\alpha}+1)^2}
\end{aligned}
$$

- Quel est le signe de $C'(\alpha)$?

- Quel est le signe de $C'(\alpha)$? $\rightarrow$ Le numérateur de C' est $2\alpha e^{0.1\alpha}$, or $e^{0.1\alpha}$ est positif car une exponentielle est toujours positive.
  Le dénominateur de C' est le carré d'un nombre réel donc il est positif.
  Par conséquent, C' est positif.

- Quel est le signe de $C'(\alpha)$? $\rightarrow$ Le numérateur de C' est $2\alpha e^{0.1\alpha}$, or $e^{0.1\alpha}$ est positif car une exponentielle est toujours positive.
  Le dénominateur de C' est le carré d'un nombre réel donc il est positif.
  Par conséquent, C' est positif.
- Pour quel angle, α_1 ou α_2, le couple moteur est-il le plus important ?

- Quel est le signe de $C'(\alpha)$? $\rightarrow$ Le numérateur de C' est $2\alpha e^{0.1\alpha}$, or $e^{0.1\alpha}$ est positif car une exponentielle est toujours positive.
  Le dénominateur de C' est le carré d'un nombre réel donc il est positif.
  Par conséquent, C' est positif.
- Pour quel angle, α_1 ou α_2, le couple moteur est-il le plus important ?
  $\rightarrow$ Comme C' est positif alors C est croissante, donc le couple moteur est plus important pour α_2 qui est plus grnad que α_1.

- Réprésenter C pour α appartenant à l'intervalle $[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$.

- Réprésenter C pour α appartenant à l'intervalle $[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$.
  $\rightarrow$ Pour représenter la fonction C il faut utiliser la fonction GRAPH de la calculatrice et ensuite on en donne une allure sur sa feuille.