Géométrie repérée : correction de l'interrogation

On considère les points suivants : $A(3;1)$, $B(3;5)$, $C(7;5)$ et $D(7;1)$.

1. Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$.
   Les coordonnées de ces vecteurs sont :
   $$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A) = (3-3; 5-1) = (0;4)$$
   $$\overrightarrow{DC} = (x_C - x_D; y_C - y_D) = (7-7; 5-1) = (0;4)$$

2. Que peut-on en déduire quant à la nature du quadrilatère $(ABCD)$?
   Comme $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, le quadrilatère $(ABCD)$ est un parallélogramme; on ne peut pas déduire de cette égalité que c'est un carré.

3. Déterminer le centre de $(ABCD)$, le milieu de ses diagonales.
   Comme $(ABCD)$ est un parallélogramme alors ses diagonales se coupent en leur milieu. Appelons le I : c'est le milieu de $[AC]$ et de $[BD]$. On peut alors écrire :
   $$x_I = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{3+7}{2} = 5$$
   $$y_I = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{1+5}{2} = 3$$
   Les coordonnées de I sont donc $(5;3)$.

4. Déterminer une équation cartésienne de la droite (AC).
   On doit commencer par déterminer un vecteur directeur de la droite (AC) : le vecteur $\overrightarrow{AC}$ en est un et ses coordonnées sont $(4;4) = (-b;a)$.
   Une équation cartésienne de (AC) est de la forme :
   $$ax + by + c = 0 \Leftrightarrow 4x - 4y + c = 0$$
   où c est une constante à déterminer.
   Cette constante peut être trouvée en utilisant le fait que A appartient à cette droite; ses coordonnées vérifient donc l'équation de cette droite :
   $$4x_A - 4y_A + c = 0 \Leftrightarrow 4 \times 3 - 4 \times 1 + c = 0 \Leftrightarrow c = -8$$
   Une équation cartésienne de (AC) est donc :
   $$4x - 4y - 8 = 0$$

5. Déterminer son coefficient directeur et son ordonnée à l'origine.
   Pour déterminer le coefficient directeur à partir de l'équation cartésienne, il faut isoler le y à partir de l'équation cartésienne :
   $$4x - 4y - 8 = 0 \Leftrightarrow 4y = 4x - 8 \Leftrightarrow y = \frac{4}{4}x - \frac{8}{4} \Leftrightarrow y = x - 2$$
   Le coefficient directeur est donc 1 et l'ordonnée à l'origine est -2