∽ Combinatoire et dénombrement : exercices

Exercice 1 *L'éclairage d'un local est assuré par un ensemble A d'ampoules électriques commandées par un ensemble I d'interrupteurs.*
Comparer les cardinaux des ensembles A et I dans les cas suivants :

1. *Chaque interrupteur commande une seule ampoule et il n'y a pas de va-et-vient (système permettant d'éteindre et allumer une lampe à partir de deux interrupteurs placés d'un bout) l'autre d'une pièce ou d'un couloir.*
2. *Chaque interrupteur commande une seule ampoule et il y a un va-et-vient.*
3. *Certains interrupteurs commandent plusieurs ampoules et il n'y a pas de va-et-vient.*

Exercice 2 *Soient A et B deux ensembles tels que :*

$$Card(A) = 12$$
$$Card(B) = 15$$
$$Card(A \cap B) = 7$$

Déterminer $A \cup B$.

Exercice 3 *On considère les ensembles :*

$$A = \{u; w\}$$
$$B = \{0; 1\}$$

Déterminer $A \times B$ et $B \times A$.

Exercice 4 *Pour aller à son travail, Léo rencontre sur son trajet sept feux tricolores. Chaque feu peut avoir la couleur rouge (R), orange (O) ou vert (V).*
On note $F = \{R; O; V\}$ l'ensemble des différentes couleurs d'un feu.

1. *Écrire un 7-uplet d'éléments de F.*
2. *Un trajet étant une succession de couleurs des deux, combien de trajets différents Léo peut-il faire pour se rendre à son travail ?*

Exercice 5 *Un eassociation doit élire les trois membres de son bureau (président, secrétaire et trésorier) parmi sept candidats. Une même personne ne peut pas cumuler les postes.*
Combien de bureaux différents peuvent être élus ?

Exercice 6 *Écrire toutes les permutations des éléments de l'ensemble $\{a; b; c; d\}$.*

Exercice 7 *Écrire à l'aide de factorielles les nombres suivants :*

$$n(n-1)(n-2)...(n-k+1)$$
$$(n+1)(n+2)....2n$$

Exercice 8 *On considère l'ensemble :*

$$E\{x_1; x_2; x_3; x_4; x_5\}$$

1. *Écrire les parties de E à deux éléments.*
2. *Écrire les couples de E.*

Exercice 9 *Au poker, on appelle "main" tout ensemble de cinq cartes.*
On considère un jeu de 52 cartes.

1. *Combien y a-t-il de mains possibles ?*

2. *Combien y a-t-il de mains contenant l'as de pique ?*

Exercice 10 *Une urne contient* 15 *boules indiscernables au toucher.*
Il y en a 3 *blanches numérotées de* 1 *à* 3*, cinq rouges numérotées de* 1 *à* 5 *et sept vertes numérotées de* 1 *à* 7.
On tire simultanément trois boules de l'urne.

1. *Combien y a-t-il de tirages possibles ?*
2. *On note B l'ensemble des boules blanches, R celui des boules rouges et V celui des boules vertes.*
   - ✏ *Donner le nombre de tirages simultanés de trois boules dans B, dans R puis enfin dans V*
   - ✏ *En déduire le nombre de tirages unicolores dans l'urne.*
   - ✏ *En déduire le nombre de tirages dans l'urne ayant au moins deux couleurs.*

Exercice 11 *Le proviseur doit constituer un groupe de cinq élèves pour aller présenter leur lycée dans les collèges voisins.*

1. *Six élèves sont candidats. Combien de manières de constituer le groupe y a-t-il ?*
2. *Dix élèves sont candidats dont quatre sont en seconde et six en terminale. Le groupe de représentants doit être composé de deux élèves de seconde et trois élèves de terminale.*
   - **a.** *Parmi les candidats, combien peut-on former de couples d'élèves de seconde ? de triplets d'élèves de terminale ?*
   - **b.** *Conclure en utilisant le principe multiplicatif.*

Exercice 12 *Calculer sans calculatrice :*

$$\left(\binom{10}{9}-\binom{10}{0}\right)\times\left(\binom{10}{1}+\binom{10}{10}\right)$$

Exercice 13 *Démontrer l'égalité suivante pour tout entier naturel n non nul :*

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\ldots=\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\ldots$$

Exercice 14 *Un lycée propose dix spécialités de première générale.*

1. *Combien y a-t-il de combinaisons possibles de trois spécialités pour un élève de première générale ?*
2. *Tristant a choisi la spécialité mathématiques mais hésite pour les deux autres entre SVT, NSI, physique-chimie, anglais et SES.*
   Combien a-t-il de combinaisons possibles ?

Exercice 15

1. *On a écrit la fonction Python suivante pour simuler une expérience aléatoire.*

```
import random
def tirage():
    L=range(1,7)
    return random.sample(L,3)
```

L'instruction $random.sample(L,k)$ renvoie un $k-uplet$ d'éléments différents de la liste L.

   - **a.** *Combien de résultats différents la fonction tirage peut-elle renvoyer ?*
   - **b.** *Parmi tous les tirages précédents, combien contiennent les chiffres* 1, 3 *et* 5 *?*

2. a. *Recopier et compléter le script de la fonction $frequence$ suivante, d'argument n, pour qu'elle renvoie la fréquence d'apparition des listes contenant les chiffres* 1, 3 *et* 5.

```
def frequence(n):
    k=0
    for i in range(...):
        z=tirage()
        z.sort()
        if ...:
            ...
    return ...
```

   b. *Programmer cette fonction et donner les valeurs affichées pour* $n = 100$ *et* $n = 10000$

Exercice 16 *Chaque véhicule circulant en France est indentifié par une plaque d'immatriculaton.*
Depuis 2009, *elle est constituée de trois parties : deux lettres, trois chiffres et deux lettres, séparées par des tirets.*
Les lettres I, O et U sont exclues à cause de leur ressemblance avec le 1, *le* 0 *et le* V.
Les couples de lettres SS *et* WW *sont interdits à gauche et le couple* SS *est interdit à droite.*

1. *Caculer le nombre total de plaques d'immatriculations différentes que l'on peut attribuer.*
2. *Combien d'immatriculations contiennent chacune des lettres* M, A, T *et* H *exactement une fois ?*
3. *Un palindrome est un texte qui se lit de la même façon de gauche à droite et de droite à gauche.*
   Combien d'immatriculations sont des palindromes ?

Exercice 17 *On considère l'ensemble :*

$$E = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$$

Avec deux chiffres distincts x *et* y *de* E, *on crée un unique domino simple, noté indifféremment* $\boxed{x \mid y}$ *ou* $\boxed{y \mid x}$.
Avec un chiffre z *de* E, *on forme un unique domino double, noté* $\boxed{z \mid z}$.

1. *Montrer que l'on peut ainsi créer* 36 *dominos.*
2. *On tire au hasard un domino*
   a. *Quelle est la probabilité d'obtenir un domino constitué de chiffres pairs ?*
   b. *Quelle est la probabilité d'obtenir un domino dont la somme des chiffres est paire ?*
3. *On tire au hasard et simultanément deux dominos.*
   Un élève affirme que la probabilité d'obtenir un domino double et un domino simple dont l'un des chiffres est celui du domino double est $\frac{4}{45}$.
   Que penser de cette affirmation ?

Exercice 18 *Soient* a *et* b *deux nombres réels. Démontrer par récurrence que, pour tout entier* $n \geq 1$ *:*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$