Fonction logarithme 4

On considère la fonction suivante définie sur $]0;+\infty[$:

$$g(x) = 1x + 3 - 5\ln(x)$$

1. Calculer la limite de g en 0^+
2. Calculer la limite de g en $+\infty$
3. Calculer la dérivée de g.
4. Déterminer le signe de $g'(x)$.
5. En déduire le tableau de variation de $g(x)$.
6. En déduire le nombre de solutions de $g(x) = 0$.

Correction :

1. On sait que :

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to 0^+} 1x+3 = +3 \\ &\lim_{x\to 0^+} 5\ln(x) = -\infty \quad \text{par propriété du cours} \\ \text{donc } &\lim_{x\to 0^+} 1x+3-5\ln(x) = +\infty \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to +\infty} 1x+3 = +\infty \\ &\lim_{x\to +\infty} 5x\ln(x) = +\infty \quad \text{par propriété du cours} \\ \text{donc } &\lim_{x\to +\infty} 1x+3-5\ln(x) = +\infty \quad \text{par prépondérance de } x \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} g'(x) &= 1-5\times\frac{1}{x} \\ &= \frac{1x-5}{x} \end{aligned}$$

4.

$$g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{c}{a}$$

5. On a :

x	0		$\frac{c}{a}$		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	‖ $+\infty$	↘	$8+5\ln\left(\frac{5}{1}\right)$	↗	$+\infty$

6. On a :

$$g\left(\frac{5}{1}\right) \approx 16.047189562171$$

Par conséquent, comme g est continue, on en déduit que la fonction ne s'annule pas.