Suites : correction de l'activité 1

Une société produit des bactéries pour l'industrie. En laboratoire, il a été mesuré que, dans un milieu nutritif approprié, la masse de ces bactéries, mesurée en grammes, augmente de 30 % en un jour.
La société met en place le dispositif industriel suivant.
Dans une cuve de milieu nutritif, on introduit initialement 1200 kg de bactéries. Ensuite, chaque jour, à heure fixe, on remplace le milieu nutritif contenu dans la cuve. Durant cette opération, 150 g de bactéries sont perdus.
L'entreprise se fixe pour objectif de produire 30 kg de bactéries.

1. **a.** En utilisant les informations de l'énoncé, donner une expression de la suite u_{n+1} en fonction de u_n pour $n \geq 0$.
   On peut modéliser la suite u_{n+1} par la relation de récurrence suivante :
   $$u_{n+1} = 1.3u_n - 150$$

   b. L'entreprise souhaite savoir au bout de combien de jours la masse de bactéries dépassera 30 kg. À l'aide de la calculatrice, donner la réponse à ce problème.
   Les différentes captures d'écran en fin de PDF, expliquent comment faire pour obtenir le tableau de valeurs.
   On constate que :
   $$u_3 \approx 2636$$
   $$u_4 \approx 3427$$
   La valeur cherchée est donc $n = 4$: il faut quatre jours pour que la masse de bactéries dépasse 30kgs.

   c. On peut également utiliser l'algorithme suivant pour répondre au problème posé dans la question précédente.
   Recopier et compléter cet algorithme.

Variables	u et n sont des nombres

Traitement	u prend la valeur 1200
	n prend la valeur 0
	Tant que $u < 30$ faire
	    u prend la valeur $1.3u - 150$
	    n prend la valeur $n+1$
	Fin Tant que

Sortie	Afficher n

2. On définit la suite (v_n) par : pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 500$.

   a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.
   Pour montrer qu'une suite est géométrique, on peut :
   ✏ soit montrer que le quotient $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ prend toujours la même valeur, qui sera la raison.
   ✏ soit montrer que $v_{n+1} = qv_n$ avec q qui sera la raison à déterminer.
   Ici, vu comment sont définies les suites (u_n) et (v_n), on va utiliser la deuxième méthode :
   $$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 500 \\ &= 1.3u_n - 150 - 500 \\ &= 1.3u_n - 650 \\ &= 1.3\left(u_n - \frac{650}{1.3}\right) \\ &= 1.3\,(u_n - 500) \\ &= 1.3v_n \end{aligned}$$

Cette égalité justifie que la suite est géométrique et que sa raison est $q = 1.3$; son premier terme est $v_0 = u_0 - 500 = 1200 - 500 = 700$.

b. Exprimer v_n, puis u_n, en fonction de n.
On sait exprimer le terme général d'une suite géométrique en fonction de n, de sa raion et de son premier terme :

$$v_n = v_0 q^n = 700 \times 1.3^n \quad \forall n \geq 0$$

Or $u_n = v_n + 500$ donc $u_n = 700 \times 1.2^n + 500 \quad \forall n \geq 0$.

c. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
Pour montrer qu'une suite est croissante, on peut soit montrer que $u_{n+1} - u_n \geq 0$ ou soit montrer que $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ quand u_n est toujours du même signe. Dans notre exemple, étudier $u_{n+1} - u_n$ est plus pertinent :

$$u_{n+1} - u_n = v_{n+1} - v_n = 700 \times 1.3^{n+1} - 700 \times 1.3^n = 700 \times 1.3^n \times (1.3 - 1) > 0 \forall n \geq 0$$

Donc la suite est bien croissante.

d. Montrer que $u_n \geq 1200, \quad \forall n \geq 0$.
On sait que :

$$u_n = 700 \times 1.3^n + 500 \quad \forall n \geq 0$$

Or $1.3^n \geq 1 \quad \forall n \geq 0$ car $1.3 > 1$ donc $700 \times 1.3^n > 700 \quad \forall n \geq 0$ et par conséquent, $700 \times 1.3^n + 500 > 1200 \quad \forall n \geq 0$.

e. Déterminer la limite de la suite (u_n).
Comme la raison $1.3 > 1$ alors le terme 1.3^n tend vers $+\infty$, ainsi $700 \times 1.3^n + 500$ tend également vers $+\infty$ car le terme devant 1.3^n est strictement positif.