» Étude de fonctions : aide pour le ds

Exercice 1 Soit $f(x) = \frac{6x^2 + 5x + 30}{x + 2}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

1. Déterminer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{6x^2}{x} = \lim_{x \to +\infty} 6x = +\infty$$
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{6x^2}{x} = \lim_{x \to -\infty} 6x = -\infty$$

Les limites sont infinies car le degré du numérateur est strictement plus grand que celui du dénominateur.

2. Déterminer $\lim_{x \to -2^+} f(x)$ et $\lim_{x \to -2^-} f(x)$. Quelles interprétations graphiques peut on en déduire?

$$\lim_{x \to -2^+} f(x) = \frac{6 \times (-2)^2 + 5 \times (-2) + 30}{-2^+ + 2} = \frac{44}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = \frac{6 \times (-2)^2 + 5 \times (-2) + 30}{-2^- + 2} = \frac{44}{0^-} = -\infty$$

On en déduit l'existence d'une asymptote verticale d'équation x = -2.

3. Déterminer les variations de f.

On doit commencer par calculer la dérivée de f:

$$f'(x) = \left(\frac{6x^2 + 5x + 30}{x + 2}\right)'$$

$$= \frac{(6x^2 + 5x + 30)' \times (x + 2) - (6x^2 + 5x + 30) \times (x + 2)'}{(x - 2)^2}$$

$$= \frac{(12x + 5)(x + 2) - (6x^2 + 5x + 30) \times 1}{(x - 2)^2}$$

$$= \frac{12x^2 + 29x + 10 - 6x^2 - 5x - 30}{(x - 2)^2}$$

$$= \frac{6x^2 + 24x - 20}{(x - 2)^2}$$

On doit maintenant déterminer le signe du numérateur afin d'obtenir le signe de la dérivée, sachant que le dénominateur est positif.

On calcule alors son discriminant Δ :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 24^2 - 4 \times 6 \times (-20) = 1056 > 0$$

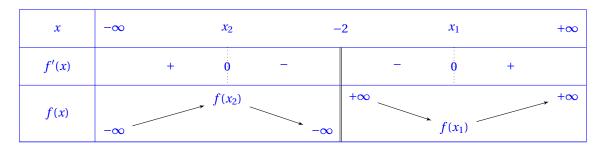
On a donc deux solutions distinctes à l'équation $6x^2 + 24x - 30 = 0$:

$$x_1 = \frac{-24 + \sqrt{1056}}{12} \equiv 0.71$$
$$x_2 = \frac{-24 - \sqrt{1056}}{12} \equiv -4.71$$

On a donc $x_2 < x_1$.

On peut en déduire le tableau de signe de f'(x) puis les variations de f:

Étude de fonctions GMP



4. Montrer que:

$$\frac{6x^2 + 5x + 30}{x + 2} = 6x - 7 + \frac{44}{x + 2}$$

En déduire une interprétation graphique.

On a

$$6x - 7 + \frac{44}{x + 2} = \frac{(6x - 7)(x + 2) + 44}{x + 2} = \frac{6x^2 + 12x - 7x - 14 + 44}{x + 2} = \frac{6x^2 + 5x + 30}{x + 2}$$

On en déduit que la droite y = 6x - 7 est asymptote oblique en $+\infty$ et en $-\infty$.

Exercice 2 Soit $f(x) = \frac{3x^2 + 7}{x^2 + 2}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$. Déterminer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3}{1} = 3$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{3x^2}{x^2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{3}{1} = 3$$

On en déduit l'existence d'une asymptote horizontale d'équation y = 3 en $+\infty$ et en $-\infty$.

Le degré du numérateur est le même que le degré du dénominateur, donc la limite est le quotient des coefficients devant les termes de plus grand degré.

Exercice 3 Soit $f(x) = \frac{3x+7}{x^2+2}$ définie sur \mathbb{R} . Déterminer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3}{x} = 0$$
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{3x}{x^2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{3}{x} = 0$$

On en déduit l'existence d'une asymptote horizontale d'équation y = 0 en $+\infty$ et en $-\infty$.

Le degré du numérateur est strictement plus petit que le degré du dénominateur, donc la limite est y = 0.