Fonction logarithme 3

1. On considère la fonction suivante définie sur $]0;+\infty[$:

$$g(x) = 3x - 5 + 5\ln(x)$$

   a. Calculer la limite de g en 0^+
   b. Calculer la limite de g en $+\infty$
   c. Calculer la dérivée de g.
   d. Déterminer le signe de $g'(x)$.
   e. En déduire le tableau de variation de $g(x)$.
   f. Déterminer le nombre de solutions de $g(x) = 0$.

2. On considère la fonction suivante définie sur $]0;+\infty[$:

$$f(x) = \frac{3x-5}{x}\ln(x)$$

   a. Calculer la limite de f en 0^+
   b. Calculer la limite de f en $+\infty$
   c. Calculer la dérivée de f.
   d. Déterminer le signe de $f'(x)$.
   e. En déduire le tableau de variation de $f(x)$.
   f. En déduire le nombre de solutions de $f(x) = 0$.

Correction :

1. **a.** On sait que :

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to 0^+} 3x-5 = -5 \\ &\lim_{x\to 0^+} 5\ln(x) = -\infty \quad \text{par propriété du cours} \\ \text{donc } &\lim_{x\to 0^+} 3x-5+5\ln(x) = -\infty \end{aligned}$$

b.

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to +\infty} 3x-5 = +\infty \\ &\lim_{x\to +\infty} 5x\ln(x) = +\infty \quad \text{par propriété du cours} \\ \text{donc } &\lim_{x\to +\infty} 3x-5+5\ln(x) = +\infty \end{aligned}$$

c.

$$g'(x) = 3 + 5 \times \frac{1}{x}$$

d.

$$g'(x) \geq 0 \quad \forall x > 0$$

e. On a :

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$
$g(x)$	‖	$-\infty \nearrow -\infty$

f. La fonction g est croissante de $-\infty$ à $+\infty$, donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe une unique valeur $\alpha > 0$ telle que $g(\alpha) = 0$.

$$\begin{aligned} &g(1.26) < 0 \\ &g(1.27) > 0 \\ &\text{donc } 1.26 < \alpha < 1.27 \end{aligned}$$

2. **a.** On sait que :

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0^+} \frac{3x-5}{x} = -\infty \\
&\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty \quad \text{par propriété du cours} \\
\text{donc } &\lim_{x\to 0^+} \frac{3x-5}{x}\ln(x) = +\infty
\end{aligned}$$

b. On sait que :

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to +\infty} \frac{3x-5}{x} = 3 \\
&\lim_{x\to +\infty} \ln(x) = +\infty \quad \text{par propriété du cours} \\
\text{donc } &\lim_{x\to +\infty} \frac{3x-5}{x}\ln(x) = +\infty
\end{aligned}$$

c. On sait que :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\frac{3x-5}{x}\ln(x)\right)' \\
&= \left(\frac{3x-5}{x}\right)'\ln(x) + \left(\frac{3x-5}{x}\right)\ln(x)' \\
&= \left(\frac{(3x-5)'\times x-(3x-5)\times x'}{x^2}\right)\ln(x) + \left(\frac{3x-5}{x}\right)\times\frac{1}{x} \\
&= \left(\frac{3x-(3x-5)}{x^2}\right)\ln(x) + \left(\frac{3x-5}{x^2}\right) \\
&= \frac{(3x-3x+5)\ln(x)+3x-5}{x^2} \\
&= \frac{3x-5+5\ln(x)}{x^2} \\
&= \frac{g(x)}{x^2}
\end{aligned}$$

d. On a :

x	0		α		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

e.

$$f(\alpha) = \frac{3\alpha - 5}{\alpha}\ln(\alpha)$$
$$\text{or } g(\alpha) = 3\alpha - 5 + 5\ln(\alpha)$$
$$\text{donc } f(\alpha) = \frac{-5\ln^2(\alpha)}{\alpha} < 0$$

Comme f est contine, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, on déduit que f s'annule en deux valeurs x_1 et $x_2 : 0 < x_1 < \alpha$ et $x_2 > \alpha$