Suites : cours complet

1 Rappels

Définition

Une suite numérique u est une fonction de $\mathbb{N}$ ou d'une partie de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.
Elle associe à un entier n, un nombre réel $u(n)$ que l'on notera u_n par usage.

- n est appelé **rang** ou **indice** de u_n.
- u_n est le **terme** d'indice n.
- (u_n) désigne la suite tandis que u_n désigne le terme de rang n.

Exemple 1

1. *La suite des décimales de π : u_1 correspond au chiffre des dizaines, u_2 le chiffre des centaines...*
   Elle est définie pour $n \geq 1$.
   On sait à quoi correspond chaque terme de la suite mais, à partir d'un certain rang, leur calcul devient difficile.

$$\begin{aligned} u_1 &= 1 \\ u_2 &= 4 \\ u_3 &= 1 \\ u_4 &= 5 \\ u_5 &= 9 \end{aligned}$$

   A l'heure actuelle, on "sait" calculer précisement π à $31,4$ billions (10^{12}) de chiffres après la virgule (2019 : Emma Haruka Iwao).

2. *La suite de terme général $u_n = n^2$, la suite des carrés des nombres entiers, est définie pour $n \geq 0$.*
3. *La suite de terme général $u_n = \sqrt{n-5}$ est définie pour $n \geq 5$.*

Dans les définitions suivantes, on supposera que les suites sont définies sur $\mathbb{N}$: les définitions resteront toujours valables sur des ensembles infinis inlus dans $\mathbb{N}$.

Mode de génération d'une suite

1. **Définition par une formule explicite**
   Soit f une fonction définie sur un ensemble contenant $\mathbb{N}$.
   Quand la suite est définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = f(n)$, on dit qu'elle est définie par une formule explicite.
   On peut calculer directement chacun des termes de la suite, sans avoir besoin des précédents.

2. **Définition par une formule de récurrence**
   Soit f une fonction définie sur un intervalle I telle que pour $\forall x \in I, f(x) \in I$.
   On peut définir une suite (u_n) par récurrence en fixant une valeur pour u_0 puis une formule reliant u_{n+1} et u_n :

$$(u_n) : \begin{cases} u_0 = a \in I \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

   On peut étendre cette définition pour f une fonction de plusieurs variables, en fixant les premiers termes de la suite et en donnant une formule reliant u_{n+1} et plusieurs de ses termes précédents.
   Pour calculer le terme de rang n de ce type de suite, il faut avoir calculer au moins celui du rang $n-1$.
3. il se peut qu'une suite ne soit définie ni par une formule explicite, ni par récurrence.

Exemple 2

1. *La suite (u_n) des inverses des entiers naturels est une suite donnée par une formule explicite suivante :*

$$\forall n \geq 1, \quad u_n = \frac{1}{n}$$

2. *La suite de Fibonacci est donnée par une relation de récurrence :*

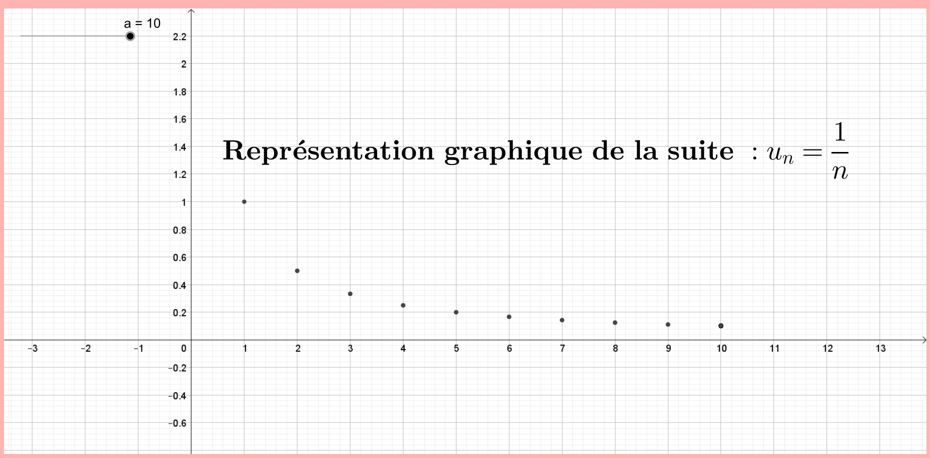
$$\begin{cases} u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \\ u_0 = 1 \\ u_1 = 1 \end{cases}$$

Même si cette suite est définie par une relation de récurrence, il est possible, même si ça ne sera pas vu cette année, d'en donner une formule explicite.

3. *La suite des nombres premiers ne peut pas être définie par une formule explicite ni par une relation de récurrence : malgré l'infinité de nombres premiers, il n'est pas encore possible d'en trouver facilement un ou plusieurs dépassant une taille donnée (plus on cherche un nombre premier grand, plus il est difficile à trouver).*
La suite donnant la population sur terre à chaque minute, depuis l'an 2000 *: aucune formule explicite, ni de relation de récurrence et impossible de calculer les termes au delà d'un certain indice.*

Remarque sur la représentation graphique

Dans un repère $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$, la représentation graphique d'une suite (u_n) est l'ensemble des points M_n de coordonnées $(n;u_n)$: ce n'est pas une courbe mais un ensemble discret de points que l'on appelle nuage de points.



Variation d'une suite

Soit (u_n) une suite. On dit que :

1. la suite (u_n) est croissante si, pour tout entier n : $u_{n+1} \geq u_n$.
2. la suite (u_n) est décroissante si, pour tout entier n : $u_{n+1} \leq u_n$.
3. la suite (u_n) est constante si, pour tout entier n : $u_{n+1} = u_n$.

On dira que la suite (u_n) est monotone si son sens de variation ne change pas.
Étudier la monotonie d'une suite, c'est étudier ses variations.

Remarques

1. Il se peut que les propriétés précédentes ne soient pas vraies dès les première valeurs de n mais seulement à partir d'un certain rang p.
   On dira alors que :
   a. la suite (u_n) est croissante si à partir d'un rang p, pour tout entier n : $\forall n \geq p, \quad u_{n+1} \geq u_n$.
   b. la suite (u_n) est décroissante si à partir d'un rang p, pour tout entier n : $\forall n \geq p, \quad u_{n+1} \leq u_n$.
   c. la suite (u_n) est constante si à partir d'un rang p, pour tout entier n : $\forall n \geq p, \quad u_{n+1} = u_n$.
2. Une suite n'est pas forcement croissante, décroissante ou constante que ce soit pour tous les n ou à partir d'un certain rang.

Variation d'une suite donnée par une formule explicite

Soit (u_n) une suite définie pour tout $n \geq p$, par :

$$u_n = f(n)$$

où f est une fonction définie au moins sur l'intervalle $[p; +\infty[$.

- ✏ si est f est croissante sur l'intervalle $[p; +\infty[$, alors la suite (u_n) est croissante à partir du rang p.
- ✏ si est f est décroissante sur l'intervalle $[p; +\infty[$, alors la suite (u_n) est décroissante à partir du rang p.

Suite convergente

Soit (u_n) une suite numérique.
Lorsque, quand n augmente indéfiniment, les termes de (u_n) se rapprochent d'un nombre réel L, on dit que la suite converge vers L.
On dit que la **limite** de u_n, lorsque n tend vers $+\infty$ est égal à L.
On écrit :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = L$$

Suite divergente

Une suite est divergente quand elle n'est pas convergente.

Remarques

1. Une suite n'a pas forcement de limite :

$$u_n = (-1)^n$$

Cette suite a des valeurs qui alternent entre 1 et -1 : elle ne peut pas avoir de limite.

2. Une suite qui dépasse n'importe quelle valeur réelle à partir d'un certain rang sera divergente mais on dira que sa limite en $+\infty$ est $+\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$

3. Une suite qui est plus petite que n'importe quelle valeur réelle à partir d'un certain rang sera divergente mais on dira que sa limite en $+\infty$ est $-\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$$

1.1 Suites arithmétiques

Définition par récurrence

On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique si il existe une nombre réel r tel que :

$$u_{n+1} = u_n + r \text{ pour tout n } \in \mathbb{N}$$

Le nombre r est alors appelé raison de la suite.
Son premier terme est u_0.

Remarques

✏ il se peut que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne soit définie qu'à partir d'un certain indice n_0, dans ce cas si :

$$u_{n+1} = u_n + r \text{ pour tout n } \geq n_0$$

alors la suite est arithmétique de raison r et le premier terme est u_{n_0}.

✏ pour montrer qu'une suite est arithmétique, il faudra montrer que la différence $u_{n+1} - u_n$ est constante : cette constante sera sa raison.
Si cette différence n'est pas constante, cela montrera que la suite n'est pas arithmétique.

Formule explicite

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0.
On peut donner une expression de u_n et en fonction de n, de u_0, de tout entier naturel p et de r :

$$u_n = u_p + (n-p)r$$
$$u_n = u_0 + nr$$

Somme des termes consécutifs

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0.
Soit p et n deux entiers tels que $0 \leq p \leq n$:

$$\sum_{i=0}^{n} u_i = u_0 + u_1 + .. + u_n = \frac{(u_0 + u_n)(n+1)}{2}$$
$$\sum_{i=p}^{n} u_i = u_p + u_1 + .. + u_n = \frac{(u_p + u_n)(n-p+1)}{2}$$

1.2 Suites géométriques

Définition par récurrence

On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique si il existe une nombre réel q tel que :

$$u_{n+1} = q u_n \text{ pour tout n } \in \mathbb{N}$$

Le nombre q est alors appelé raison de la suite.
Son premier terme est u_0.

Remarques

- ✏ Si le premier terme est nul, tous les termes de la suite sont nuls.
  Si q est nul, tous les u_n sont nuls sauf éventuellement le premier terme.
- ✏ il se peut que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne soit définie qu'à partir d'un certain indice n_0, dans ce cas si :

$$u_{n+1} = q u_n \text{ pour tout n } \geq n_0$$

  alors la suite est géométrique de raison q et le premier terme est u_{n_0}.
- ✏ pour montrer qu'une suite est géométrique, il faudra montrer que le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est constant : cette constante sera sa raison. On aura au préalable vérifier que tous les termes de la suite étaient différents de 0.
  Si ce quotient n'est pas constant, cela montrera que la suite n'est pas géométrique.

Formule explicite

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0.
On peut donner une expression de u_n et en fonction de n, de u_0, de tout entier naturel p et de r :

$$u_n = u_p \times q^{n-p}$$
$$u_n = u_0 \times q^n$$

Somme des termes consécutifs

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0.
Soit p et n deux entiers tels que $0 \leq p \leq n$:

1. Si $q \neq 1$:

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^{n} u_i = u_0 + u_1 + .. + u_n = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \\ \sum_{i=p}^{n} u_i = u_p + u_1 + .. + u_n = u_p \times \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q} \end{cases}$$

2. Si $q = 1$:

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^{n} u_i = u_0 + u_1 + .. + u_n = (n+1)u_0 \\ \sum_{i=p}^{n} u_i = u_p + u_1 + .. + u_n = (n-p+1)u_0 \end{cases}$$

2 Raisonnement par récurrence

On doit le principe du raisonnement par récurrence au mathématicien Giuseppe Peano (1858 – 1932) mais le nom de ce raisonnement vient probablement du mathématicien francais Henri Poincaré (1854 – 1912).

2.1 Principe

On considère un escalier infini qu'on serait en train de descendre. Si on rate une marche avec suffisamment de force, on est assuré de rater la suivante ainsi que toutes celles d'après, peu importe leur place dans la liste des marches qui se situent après celle que l'on a ratée.
C'est le même principe pour une démonstration par récurrence : nous allons formaliser le principe de la première marche ratée ainsi que le fait de rater une marche implique que la suivant le sera également.

Définition

Une propriété est **héréditaire** à partir du rang n_0 si lorsque pour un entier $k \geq n_0$, la propriété est vraie, alors elle est vraie pour l'entier $k+1$.

Dans l'exemple, si on rate la marche k, on va rater la marche $k+1$ et on ainsi de suite.

Principe du raisonnement par récurrence

Si la propriété est :

- ✏ vraie au rang n_0 (initialisation)
- ✏ héréditaire à partir du rang n_0 (hérédité)

alors la propriété est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

Dans notre exemple, l'initialisation est la première marche ratée.
Le principe de la démonstration par récurrence est à maîtriser impérativement, c'est une méthode de raisonnement classique et fréquente.

2.2 Exemples

Exemple 3 *On considère la suite définie par :*

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + 2n + 3 \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

On va montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (n+1)^2$$

Initialisation :

$$(0+1)^1 = 1 = u_0$$

La propriété est vraie pour $n = 0$.
Hérédité : *On va supposer que la propriété est vraie pour un rang $n \geq$:*

$$u_n = (n+1)^2 \quad \textit{c'est l'hypothèse de récurrence}$$

On va maintenant montrer qu'elle est également vraie au rang $n+1$, en se servant des données de l'énoncé et de l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + 2n + 3 \quad \textit{d'après l'énoncé} \\ &= (n+1)^2 + 2n + 3 \quad \textit{c'est l'hypothèse de récurrence} \\ &= n^2 + 2n + 1 + 2n + 3 \\ &= n^2 + 4n + 4 \\ &= (n+2)^2 \\ &= (n+1+1)^2 \end{aligned}$$

On vient de montrer l'hérédité.
Par conséquent, on peut en conclure que la propriété est vraie pour $n \geq 0$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (n+1)^2$$

Exemple 4 *On considère la suite définie par :*

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2 \\ u_0 = 2 \end{cases}$$

On va montrer par récurrence qu'elle est croissante.
Initialisation :
On doit calculer u_1 :

$$u_1 = \frac{1}{3}u_0 + 2 = \frac{1}{3} \times 2 + 2 > 2 = u_0$$

On vient de montrer l'initialisation. ***Hérédité :***
On suppose que la propriété est vraie pour un rang $n \geq 0$:

$$u_{n+1} \geq u_n \quad \textit{c'est l'hypothèse de récurrence}$$

On va montrer la propriété au rang $n+1$ en utilisant l'énoncé et l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= \frac{1}{3}u_{n+1} + 2 \quad \textit{c'est l'énoncé} \\ &\geq \frac{1}{3}u_n + 2 \quad \textit{c'est l'hypothèse de récurrence} \\ &= u_{n+1} \end{aligned}$$

On vient de montrer l'hérédité.
Par conséquent, on peut en déduire que la suite (u_n) est croissante pour $n \geq 0$.

2.3 Inégalité de Bernouilli

Inégalité de Bernouilli

Soit un nombre réel a positif.
Pour tout entier naturel n, on a :

$$(1+a)^n \geq 1+na$$

Preuve au programme

Initialisation :
On a :

$$(1+a)^0 = 1 \geq 1+0\times a$$

L'initialisation est démontrée.
Hérédité :
Supposons que la propriété est vraie pour un rang $n \geq 0$:

$$(1+a)^n \geq 1+na \quad \text{c'est l'hypothèse de récurrence}$$

On va montrer que l'inégalité est vraie au rang $n+1$ en utilisant l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned}(1+a)^{n+1} &= (1+a)\times(1+a)^n \\ &\geq (1+a)(1+na) \quad \text{c'est l'hypothèse de récurrence} \\ &\geq 1+a+na+na^2 \\ &\geq 1+(n+1)a \quad \text{car a est positif}\end{aligned}$$

On vient de démontrer l'hérédité.
Par conséquent, on vient de montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ (1+a)^n \geq 1+na$$

3 Limite d'une suite

Définitions : limite infinie

1. On dit que la suite (u_n) admet pour limite $+\infty$ si tout intervalle $]a;+\infty[$, a réel, contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang et on note :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$

2. On dit que la suite (u_n) admet pour limite $-\infty$ si tout intervalle $]-\infty;b[$, b réel, contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang et on note :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$$

Algorithme de seuil :

On cherche à déterminer un rang à partir duquel une suite croissante de limite infinie est supérieure à un nombre réel A.
On doit écrire un algorithme de seuil :

Définir la fonction de seuil dont l'argument sera A.
Attribuer à n la valeur 0.
Attribuer à u la valeur u_0 donnée dans l'énoncé.
Tant que $u < A$:
  n prend la valeur $n+1$
  u prend la valeur correspondant à u_{n+1}
Fin du tant que
Afficher n

L'algorithme a été donné en pseudo language, il doit être adapté au logiciel qui sera utilisé par la suite.

Suites majorées, suites minorées

1. La suite (u_n) est **majorée** s'il existe un réel M tel que pour tout entier $n \in \mathbb{N},\ u_n \leq M$.
2. La suite (u_n) est **minorée** s'il existe un réel m tel que pour tout entier $n \in \mathbb{N},\ u_n \geq m$.
3. La suite (u_n) est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.

Théorème de convergence monotone

- ✏ Si une suite croissante est majorée alors elle est convergente.
- ✏ Si une suite décroissante est minorée alors elle est convergente.

Suite monotone non majorée ou non minorée

1. Si une suite croissante est non majorée alors elle tend vers $+\infty$.
2. Si une suite décroissante est non minorée alors elle tend vers $-\infty$.

Preuve du premier point, au progamme

Soit a un nombre réel.
Comme la suite (u_n) est non bornée, il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ pour lequel $u_{n_0} \geq a$.
Or, comme la suite est croissante, on a $u_n \geq u_{n_0} \quad \forall n \geq n_0$ et par conséquent :

$$\forall n \geq n_0,\ \ u_n \geq a$$

Ce qui signifie que tout intervalle de la forme $]a;+\infty[$ contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang.
La suite (u_n) tend donc vers $+\infty$.

Définitions : limite finie

On dit que la suite (u_n) admet pour limite L si tout intervalle ouvert contenant L contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang et on note :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = L$$

Une telle suite est **convergente**.
Une suite qui n'est pas convergente est **divergente**.

Limites usuelles

$$\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$$
$$\lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$$
$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$$
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$$
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$$
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

4 Opérations sur les limites

Opérations sur les limites

$\lim_{n\to+\infty} u_n$	0	$L\neq 0$	$L\neq 0$	$L\neq 0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{n\to+\infty} v_n$	0	$L'\neq 0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{n\to+\infty} u_n+v_n$	0	$L+L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI
$\lim_{n\to+\infty} u_n\times v_n$	0	$L\times L'$	signe de L ∞	-signe de L ∞	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n}$	FI	$\frac{L}{L'}$	0	0	FI	FI	FI

Le terme "FI" signifie forme indéterminée. On ne peut pas prévoir le résultat de la limite sans plus d'informations, tout peut arriver.
Nous allons voir sur des exemples comment lever ces indéterminations.

Exemple 5 *Déterminer les limites suivantes :*

$$\lim_{n\to+\infty} n^2-5n+1$$
$$\lim_{n\to+\infty} n-3\sqrt{n}$$
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{5n^2+4}{4n^2+3n}$$
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3n^2+n}{n+3}$$
$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n+2}-\sqrt{n}$$

1. *On sait que :*

$$\lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$$
$$\lim_{n\to+\infty} 5n = +\infty$$
$$\text{donc } \lim_{n\to+\infty} n^2-5n+1 \text{ est une forme FI du type } \infty-\infty$$

On ne peut pas conclure directement.
Pour lever l'indétermination, on doit factoriser par le monôme qui a le plus grand exposant et ici c'est n^2 *:*

$$n^2-5n+1 = n^2\left(\frac{n^2}{n^2}-5\times\frac{n}{n^2}+\frac{1}{n^2}\right) = n^2\left(1-5\times\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)$$

Or :

$$\lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$$
$$\lim_{n\to+\infty} 1-5\times\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2} = 1$$
$$\text{donc par produit de limites, } \lim_{n\to+\infty} n^2-5n+1 = +\infty\times 1 = +\infty$$

2. *On sait que :*

$$\lim_{n\to+\infty} 5n^2+4 = +\infty$$
$$\lim_{n\to+\infty} 4n^2+3n = +\infty \text{ par somme de limites sans FI}$$
$$\text{donc par quotient de limites } \lim_{n\to+\infty} \frac{5n^2+4}{4n^2+3n} \text{ est une FI du type } \frac{+\infty}{+\infty}$$

On ne peut pas conclure directement.
Pour lever l'indétermination, on doit factoriser le numérateur par le monôme qui a le plus grand exposant, ici c'est n^2*, et le dénominateur par le monôme qui a le plus grand exponsant, c'est également* n^2 *:*

$$\frac{5n^2+4}{4n^2+3n} = \frac{n^2\left(5+\frac{4}{n^2}\right)}{n^2\left(4+\frac{3}{n}\right)} = \frac{5+\frac{4}{n^2}}{4+\frac{3}{n}}$$

Or :

$$\lim_{n\to+\infty} 5+\frac{4}{n^2} = 5$$
$$\lim_{n\to+\infty} 4+3\times\frac{1}{n} = 4$$
$$\text{donc par quotient de limites, } \lim_{n\to+\infty} \frac{5n^2+4}{4n^2+3n} = \frac{5}{4}$$

3. *On sait que :*

$$\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$$
$$\lim_{n\to+\infty} 3\sqrt{n} = +\infty$$
$$\text{donc } \lim_{n\to+\infty} n-3\sqrt{n} \text{ est une forme FI du type } \infty-\infty$$

On ne peut pas conclure directement.
Pour lever l'indétermination, on doit factoriser par le monôme qui a le plus grand exposant et ici c'est n :

$$n-3\sqrt{n} = n\left(\frac{n}{\sqrt{n}} - 3\times\frac{\sqrt{n}}{n}\right) = n\left(1-3\times\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

Or :

$$\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$$
$$\lim_{n\to+\infty} 1-3\times\frac{1}{\sqrt{n}} = 1$$
$$\text{donc par produit de limites, } \lim_{n\to+\infty} n-3\sqrt{n} = +\infty\times 1 = +\infty$$

4. *On sait que :*

$$\lim_{n\to+\infty} 3n^2+n = +\infty$$
$$\lim_{n\to+\infty} n+3 = +\infty \text{ par somme de limites sans FI}$$
$$\text{donc par quotient de limites } \lim_{n\to+\infty} \frac{3n^2+n}{n+3} \text{ est une FI du type } \frac{+\infty}{+\infty}$$

On ne peut pas conclure directement.
Pour lever l'indétermination, on doit factoriser le numérateur par le monôme qui a le plus grand exposant, ici c'est n^2, et le dénominateur par le monôme qui a le plus grand exposant, c'est n :

$$\frac{3n^2+n}{n+3} = \frac{n^2\left(3+\frac{1}{n}\right)}{n\left(1+\frac{3}{n}\right)} = n\times\frac{3+\frac{1}{n}}{1+\frac{3}{n}}$$

Or :

$$\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$$
$$\lim_{n\to+\infty} 3+\frac{1}{n} = 3$$
$$\lim_{n\to+\infty} 1+3\times\frac{1}{n} = 1$$
$$\text{donc par quotient et produit de limites, } \lim_{n\to+\infty} \frac{3n^2+n}{n+3} = \infty\times\frac{5}{4} = +\infty$$

5. *On sait que :*

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty \qquad \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n+2} = +\infty$$
$$\text{donc } \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n+2}-\sqrt{n} \text{ est une FI du type } +\infty-\infty$$

Pour lever cette indétermination, on va multiplier, au numérateur et au dénominateur, par quantitée conjuguée à $\sqrt{n+2}-\sqrt{n}$:

$$\sqrt{n+2}-\sqrt{n} = \left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right)\times\frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} = \frac{\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n+2}^2-\sqrt{n}^2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} = \frac{n+2-n}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}$$

Or :

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n+2}+\sqrt{n} = +\infty \text{ par somme de limites sans FI}$$

$$\text{donc } \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} = \frac{2}{+\infty} = 0$$

Par conséquent :

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n+2}-\sqrt{n} = 0$$

5 Limites et comparaison

Théorèmes de comparaison

1. Soit (u_n) et v_n deux suites définies sur $\mathbb{N}$.
   Si :

$$\begin{aligned} \text{à partir d'un certain rang } u_n &\leq v_n \\ \text{et } \lim_{n\to+\infty} u_n &= +\infty \\ \text{alors } \lim_{n\to+\infty} v_n &= +\infty \end{aligned}$$

2. Soit (u_n) et v_n deux suites définies sur $\mathbb{N}$.
   Si :

$$\begin{aligned} \text{à partir d'un certain rang } u_n &\geq v_n \\ \text{et } \lim_{n\to+\infty} u_n &= -\infty \\ \text{alors } \lim_{n\to+\infty} v_n &= -\infty \end{aligned}$$

Preuve du premier point

Soit a un nombre réel.
Le fait que la suite (u_n) tende vers $+\infty$ implique que l'intervalle $]a;+\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang n_1 : donc pour tout $n \geq n_1$, $u_n \geq a$.
Il existe un indice n_2 à partir duquel $u_n \leq v_n$.
Posons $N = max(n_1, n_2)$, pour tout $n \geq N$, on a :

$$\begin{aligned} &n \geq n_1 \text{ et } n \geq n_2 \\ &u_n \geq a \\ &v_n \geq u_n \geq a \end{aligned}$$

La dernière ligne implique pour tout $n \geq N$, les termes v_n de la suite (v_n) sont dans l'intervalle $]a;+\infty[$: cela signifie que la limite de la suite (v_n) est $+\infty$.

Théorème d'encadrement

Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites définies sur $\mathbb{N}$.
Si, à partir d'un certain rang :

$$\begin{aligned} & u_n \leq v_n \leq w_n \\ \text{et } & \lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} w_n = L \\ \text{alors } & \lim_{n\to+\infty} v_n = L \end{aligned}$$

Limite d'une suite géométriques

Soit $(u_n) = (q^n)$ une suite géométrique de raison q et de premier terme 1.

q	$q \leq -1$	$-1 < q < 1$	$q = 1$	$q > +\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} q^n$	pas de limite	0	1	$+\infty$

Preuve du cas $q > 1$

D'après le théorème de Bernouilli :

$$(1+a)^n \geq 1 + na \quad \forall a > 0, \forall n \geq 0$$

Comme $q > 1$, on peut poser $q = 1 + a$ et alors :

$$q^n \geq 1 + n(q-1) \quad \forall a > 0, \forall n \geq 0$$

Or :

$$\lim_{n\to+\infty} 1 + n(q-1) = +\infty \text{ car } q - 1 > 0$$

Donc, d'après le théorème de comparaison des limites : $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.

Exemple 6 *Déterminer les limites suivantes :*

$$\lim_{n\to+\infty} n^2 + (-1)^n$$

$$\lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{\sin(n)}{n}$$

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2 \end{cases}$$

1. *La suite $((-1)^n)$ vaut -1 ou 1 donc les termes de la suite $\left(n^2 + (-1)^n\right)$ sont minorées par la suite $\left(n^2 - 1\right)$ dont la limite est $+\infty$.*
   Par conséquent, par les théorèmes de comparaison des limites, on en déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty} n^2 + (-1)^n = +\infty$$

2. *On sait que :*

$$\begin{aligned} & -1 \leq \sin(n) \leq 1 \\ \textit{donc } & -\frac{1}{n} \leq \frac{\sin(n)}{n} \leq \frac{1}{n} \\ \textit{ainsi } & 1 - \frac{1}{n} \leq 1 + \frac{\sin(n)}{n} \leq 1 + \frac{1}{n} \\ \textit{or } & \lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1 \end{aligned}$$

Donc par le théorème d'encadrement, on en déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty} 1+\frac{\sin(n)}{n}=1$$

3. *On va commencer par montrer, par récurrence, que la suite (u_n) est comprise entre 0 et 3 pour tous les $n\in\mathbb{N}$.*
Initialisation :
On a $u_0=2\in[0;3]$: on a bien vérifié la propriété au premier rang.
Hérédité :
On suppose que la propriété est vraie pour un rang n plus grand que 0 ; c'est à dire :

$$0\leq u_n\leq 3$$

On va montrer que cet encadrement est encore vrai pour le rang $n+1$:

$$\begin{aligned}
&0\leq u_n\leq 3\\
&0\leq \frac{1}{3}u_n\leq\frac{3}{3}\\
&1\leq \frac{1}{3}u_n+2\leq 1+2\\
&0\leq \frac{1}{3}u_n+2=u_{n+1}\leq 3
\end{aligned}$$

L 'hérédité est donc démontrée.
On en déduit que $0\leq u_n\leq 3,\ \ \forall n\in\mathbb{N}$.
On va maintenant montrer que la suite (u_n) est croissante.
On sait que :

$$\begin{aligned}
\forall n\mathbb{N},\ \ u_{n+1}-u_n&=-\frac{2}{3}u_n+2\\
\textit{or } u_n&\leq 3\\
\textit{donc } -\frac{2}{3}u_n&\geq-\frac{2}{3}\times 3=-2\\
\textit{ainsi } -\frac{2}{3}u_n+2&\geq -2+2=0\\
\textit{finalement } u_{n+1}-u_n&\geq 0\ \ \forall n\in\mathbb{N}
\end{aligned}$$

Ce qui signifie que la suite (u_n) est croissante.
Comme elle est également majorée, on en déduit, par le théorème de convergence monotone, qu'elle converge vers $l\in\mathbb{R}$.
On reprend l'égalité établissant la définition par récurrence de la suite (u_n) et on fait tendre n vers $+\infty$ aussi bien à gauche qu'à droite ; on en déduit le résultat suivant :

$$l=\frac{1}{3}l+2\Leftrightarrow l-\frac{1}{3}l=2\Leftrightarrow\frac{2}{3}l=2\Leftrightarrow l=\frac{2}{\frac{2}{3}}=2\times\frac{3}{2}=3$$

La suite (u_n) converge donc vers 3.