☙ Fonction logarithme 7

On considère la fonction suivante définie sur $]0;+\infty[$:

$$f(x) = (8 - 2\ln(x))\ln(x)$$

1. Calculer la limite de f en 0^+
2. Calculer la limite de f en $+\infty$
3. Calculer la dérivée de f.
4. Déterminer le signe de $f'(x)$.
5. En déduire le tableau de variation de $f(x)$.
6. En déduire le nombre de solutions de $f(x) = 0$ et un encadrement d'amplitude 10^{-2} de cette solution.

Correction :

1. On sait que :

$$\lim_{x\to 0^+} (8-2\ln(x)) = +\infty$$
$$\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$$
$$\text{donc } \lim_{x\to 0^+} (8x-2\ln(x))\ln(x) = -\infty$$

2.

$$\lim_{x\to +\infty} (8-2\ln(x)) = -\infty$$
$$\lim_{x\to +\infty} \ln(x) = +\infty$$
$$\text{donc } \lim_{x\to +\infty} (8x-2\ln(x))\ln(x) = -\infty$$

3.

$$\begin{aligned} f'(x) &= ((8-2\ln(x))\ln(x))' \\ &= (8-2\ln(x))'\ln(x) + (8-2\ln(x))\ln(x)' \\ &= -2\times\frac{1}{x}\ln(x) + (8-2\ln(x))\frac{1}{x} \\ &= \frac{8-4\ln(x)}{x} \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\Leftrightarrow 8-4\ln(x) > 0 \\ &\Leftrightarrow \ln(x) < \frac{8}{4} \\ &\Leftrightarrow x < e^{\frac{8}{4}} \end{aligned}$$

5. On a :

x	0		$e^{\frac{8}{4}}$		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	
$f(x)$	|| $-\infty$	↗	12.0	↘	$-\infty$

6. Comme la fonction g est continue, croissante de $-\infty$ à $12.0 > 0$, alors, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit qu'il existe une unique solution $\alpha_1 \in]0; e^{\frac{8}{4}}[$ tel que $g(\alpha_1) = 0$.
Comme la fonction g est continue, croissante de $12.0 > 0$ à $-\infty$, alors, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit qu'il existe une unique

solution $\alpha_2 \in]e^{\frac{8}{4}}; +\infty[$ tel que $g(\alpha_2) = 0$.

$$\begin{aligned}
&f(0.99) < 0\\
&f(1.0) > 0\\
\text{donc } &0.99 < \alpha_1 < 1.0\\
&f(54.589999999998) > 0\\
&f(54.599999999998) < 0\\
\text{donc } &54.589999999998 < \alpha_2 < 54.599999999998
\end{aligned}$$

En regardant plus attentivement, on se rend compte que $\alpha_1 = 1$ et $\alpha_2 = e^{\frac{8}{2}}$.