Fonction logarithme 7

On considère la fonction suivante définie sur $]0;+\infty[$:

$$f(x) = (14 - 3\ln(x))\ln(x)$$

1. Calculer la limite de f en 0^+
2. Calculer la limite de f en $+\infty$
3. Calculer la dérivée de f.
4. Déterminer le signe de $f'(x)$.
5. En déduire le tableau de variation de $f(x)$.
6. En déduire le nombre de solutions de $f(x) = 0$ et un encadrement d'amplitude 10^{-2} de cette solution.

Correction :

1. On sait que :

$$\lim_{x\to 0^+} (14-3\ln(x)) = +\infty$$
$$\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$$
$$\text{donc } \lim_{x\to 0^+} (14x-3\ln(x))\ln(x) = -\infty$$

2.

$$\lim_{x\to +\infty} (14-3\ln(x)) = -\infty$$
$$\lim_{x\to +\infty} \ln(x) = +\infty$$
$$\text{donc } \lim_{x\to +\infty} (14x-3\ln(x))\ln(x) = -\infty$$

3.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= ((14-3\ln(x))\ln(x))' \\
&= (14-3\ln(x))'\ln(x) + (14-3\ln(x))\ln(x)' \\
&= -3\times\frac{1}{x}\ln(x) + (14-3\ln(x))\frac{1}{x} \\
&= \frac{14-6\ln(x)}{x}
\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
f'(x) > 0 &\Leftrightarrow 14-6\ln(x) > 0 \\
&\Leftrightarrow \ln(x) < \frac{14}{6} \\
&\Leftrightarrow x < e^{\frac{14}{6}}
\end{aligned}$$

5. On a :

x	0		$e^{\frac{14}{6}}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	27.222222222222	$\searrow$	$-\infty$

6. Comme la fonction$g$ est continue, croissante de $-\infty$ à $27.222222222222 > 0$, alors, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit qu'il existe une unique solution $\alpha_1 \in]0; e^{\frac{14}{6}}[$ tel que $g(\alpha_1) = 0$.
Comme la fonction$g$ est continue, croissante de $27.222222222222 > 0$ à $-\infty$, alors, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit qu'il

existe une unique solution $\alpha_2 \in]e^{\frac{14}{6}};+\infty[$ tel que $g(\alpha_2) = 0$.

$$\begin{aligned} &f(0.99) < 0 \\ &f(1.0) > 0 \\ \text{donc } &0.99 < \alpha_1 < 1.0 \\ &f(106.34000000002) > 0 \\ &f(106.35000000002) < 0 \\ \text{donc } &106.34000000002 < \alpha_2 < 106.35000000002 \end{aligned}$$

En regardant plus attentivement, on se rend compte que $\alpha_1 = 1$ et $\alpha_2 = e^{\frac{14}{3}}$.