Exercices produit scalaire et nombres complexes : corrigé

Exercice 1
Simplifier l'expression suivante : $\cos(\frac{\pi}{2}-x)+\cos(\frac{\pi}{2}+x)$.
$\rightarrow$ On a :

$$\begin{aligned}
&\cos(\frac{\pi}{2}-x)+\cos(\frac{\pi}{2}+x)\\
=&\cos(\frac{\pi}{2})\cos(x)+\sin(\frac{\pi}{2})\sin(x)+\cos(\frac{\pi}{2})\cos(x)-\sin(\frac{\pi}{2})\sin(x)\\
=&0\times\cos(x)+1\times\sin(x)+0\times\cos(x)-1\times\sin(x)\\
=&0
\end{aligned}$$

Exercice 2
Donner la valeur exacte de $\sin(\frac{\pi}{8})$.
$\rightarrow$ On utilise les formules suivantes :

$$\begin{aligned}
\cos(2x) &= \cos(x)^2-\sin(x)^2\\
1 &= \cos(x)^2+\sin(x)^2\\
\text{avec } x &= \frac{\pi}{8}
\end{aligned}$$

Par conséquent, on en déduit que $\sin(\frac{\pi}{8})^2=\frac{1-\cos(\frac{\pi}{4})}{2}$.
De plus, d'après la position de $\frac{\pi}{8}$ sur le cercle trigonométrique, $\sin(\frac{\pi}{8})>0$.
Ainsi on obtient : $\sin(\frac{\pi}{8})=\sqrt{\frac{1-\cos(\frac{\pi}{4})}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$

Exercice 3
Dans un repère orthonormé, on considère les trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ de coordonnées

$$\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\quad \vec{v}\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix},\quad \vec{w}\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}.$$

A. $\lVert\vec{u}\rVert=\sqrt{3}$.	B. $\cos(\vec{v},\ \vec{w})=\dfrac{-2}{\sqrt{20}}$.
C. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.	D. $\lVert\vec{v}\rVert>\lVert\vec{w}\rVert>\lVert\vec{u}\rVert$.

Quelles sont les affirmations exactes ?

$\rightarrow$ On a d'abord faire tous les calculs nécessaires et ensuite on regardera quels résultats sont corrects.
On a :

$$|\vec{u}\| = \sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5},\quad |\vec{v}\|=\sqrt{3^2+0^2}=3,\quad |\vec{w}\|=\sqrt{2^2+(-4)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5} \tag{1}$$
$$\vec{v}.\vec{w}=|\vec{v}\|\times|\vec{w}\|\times\cos(\vec{v},\ \vec{w})=3\times\sqrt{20}\times\cos(\vec{v},\ \vec{w})=3\times2+0\times(-4)=6 \tag{2}$$
$$\vec{u}.\vec{v}=2\times3+1\times0=6 \tag{3}$$

La ligne 1 permet de dire que A est fausse ainsi que D.
La ligne 2 permet de dire que $\cos(\vec{v},\ \vec{w})=\frac{2}{\sqrt{20}}$ donc B est faux.
La ligne 3 permet de dire que C est fausse car $\vec{u}.\vec{v}\neq 0$.

Exercice 4
Donner l'écriture exponentielle du complexe $z = -2 + 2i$.
$\rightarrow$ On commence par calculer le module de ce nombre complexe : $|z| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.
On factorise ensuite z par ce module :

$$\begin{aligned}
z &= 2\sqrt{2}(\frac{-2}{2\sqrt{2}} + \frac{2}{2\sqrt{2}}i) \\
&= 2\sqrt{2}(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i) \\
&= 2\sqrt{2}(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i) \\
&= 2\sqrt{2}(\cos(\frac{3\pi}{4} + i\sin(\frac{3\pi}{4})) \\
&= 2\sqrt{2}e^{-\frac{3\pi}{4}i}
\end{aligned}$$

Exercice 5
Soit $z_1 = 3e^{i\frac{\pi}{2}}$ et $z_2 = 3e^{-i\frac{\pi}{4}}$. Calculer $z_1 \times z_2$ et $\frac{z_1}{z_2}$.
$\rightarrow$ On a :

$$\begin{aligned}
&z_1 \times z_2 = 3e^{i\frac{\pi}{2}} \times 3e^{-i\frac{\pi}{4}} = 9e^{i(\frac{\pi}{2} - i\frac{\pi}{4})} = 9e^{\frac{\pi}{4}i} \\
&\frac{z_1}{z_2} = \frac{3e^{i\frac{\pi}{2}}}{3e^{-i\frac{\pi}{4}}} = e^{(i\frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{4}))} = e^{i\frac{3\pi}{4}}
\end{aligned}$$