Suites : exercice

Exercice 1 **1.** *Soit* (v_n) *la suite définie pour tout entier naturel* n *par :*

$$v_n = -n^2$$

Justifier sans calcul qu'il existe un entier naturel N *tel que* $v_n < -10000$ *pour tout* $n \geq N$.

2. *Soit* (w_n) *la suite définie pour tout entier naturel* n *par :*

$$v_n = -\frac{1}{n^7}$$

Justifier sans calcul qu'il existe un entier naturel N *tel que* $-0.001 < w_n < 0.001$ *pour tout* $n \geq N$.

Exercice 2 *Soit* (u_n) *la suite numérique définie sur* $\mathbb{N}$ *par :*

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 \end{cases}$$

1. *Montrer par récurrence que* $0 \leq u_n \leq n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

2. *En déduire que* u_n *est croissante.*

3. *Quelle est sa limite ?*

4. *Compléter la fonction Python ci-dessous pour qu'elle retourne le premier terme de la suite strictement supérieur à* 4.

```python
def démarrer_1(n):
    u=2
    n=0
    while ...:
        u=(2/3)*u+(1/3)*n+1
        n=n+1
    return ...
```

Exercice 3 *Déterminer les limites des suites suivantes :*

$$a_n = n^2 + 5 \quad b_n = -2n^2$$
$$c_n = n^2 + 3n \quad d_n = -n^3 + 5$$
$$e_n = 5n^2 + 2\sqrt{n} + 1 \quad f_n = -n^2 - 2n + 150$$
$$g_n = -n^3 \times \left(3n^2 + 4\right) \quad h_n = \left(-7 + \frac{2}{\sqrt{n}}\right)(n+1)$$
$$i_n = \frac{n^2}{-3 + \frac{1}{\sqrt{n}}} \quad j_n = \frac{\frac{5}{n} + 9}{-3 + \frac{2}{n^2}}$$

Exercice 4 *Soit* (u_n) *la suite définie pour tout eniter naturel* n *par :*

$$u_n = -n^2 + 6\cos(n)$$

1. *Donner un encadrement de* $\cos(n)$.

2. *En déduire que, pour tout entier naturel* n*,* $u_n \leq -n^2 + 6$.

3. *En déduire la limite de la suite* (u_n).

Exercice 5 *Déterminer la limite, si elle existe, de chaque suite (u_n) :*

$$u_n = -25\left(\frac{5}{6}\right)^n$$
$$u_n = -7\left(\sqrt{n}\right)^n$$
$$u_n = -2\left(\frac{10}{7}\right)^n$$
$$u_n = (-\pi)^n$$
$$u_n = 3^{n+1}$$

Exercice 6 *On considère la proposition :*
"Si $0 < q < 1$, alors la suite de terme général (q^n) a pour limite 0"

1. *Cette proposition est-elle vraie ?*
2. *Énoncer sa contraposée et sa réciproque.*
3. *Dire si elles sont vraies ou fausses, en justifiant.*

Exercice 7 *Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = n^2 - 6n + 4$.*

1. *A l'aide de la calculatrice, calculer les 10 premiers termes de la suite (u_n).*
2. *-1 peut-il être un minorant de (u_n) ?*
3. *20 peut-il être un majorant de (u_n) ?*
4. *Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n + 5 = (n-3)^2$.*
5. *En déduire un minorant de (u_n).*
6. *Quelle est la monotonie de la suite (u_n) ? Donner la limite de cette suite.*

Exercice 8 *Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :*

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6} \end{cases}$$

1. *Montrer par récurrence que pour tout eniter naturel n, $0 \leq u_n \leq 3$.*
2. *Montrer que la suite (u_n) est croissante.*
3. *Est ce que la suite est convergente ?*

Exercice 9 *Déterminer les limites des suites suivantes :*

$$a_n = n^2 - 2n \quad b_n = -3n^2 + 6n + 7$$
$$c_n = n^3 - 3n^2 + 2n - 5 \quad d_n = \frac{3n+5}{n^2-4} \quad \textit{pour } n > 2$$
$$e_n = \frac{-2n^2+3n+1}{3n^2+5n} \quad f_n = \frac{n^2+n+5}{n}$$
$$g_n = -n^2 + \cos(n) \quad h_n = \frac{n - \sin(n)}{n^2+1}$$
$$i_n = \frac{-n + (-1)^n}{2n - (-1)^n} \quad j_n = \frac{n2 + (-1)^2\sqrt{n}}{n}$$

Exercice 10 *On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n :*

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{3u_n+1}{2u_n+4} \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

1. *Montrer que pour tout entier naturel n, u_n est supérieur ou égal à* 0.
2. *On introduit la suite auxiliaire (t_n) définie pour tout entier naturel n par :*

$$t_n = \frac{2u_n - 1}{u_n + 1}$$

   Montrer que la suite (t_n) est géométrique de raison $\frac{2}{5}$.
3. *Expliciter t_n pour tout entier naturel n.*
4. *En déduire l'expression explicite de u_n en fonction de n pour tout entier naturel n.*
5. *En déduire la convergence de la suite (u_n) et donner sa limite.*

Exercice 11 *Soit (u_n) la suite définie par :*

$$\begin{cases} u_0 = 1.8 \\ u_{n+1} = \frac{2}{3-u_n} \end{cases}$$

1. *Déterminer la monotonie de la fonction $f(x) = \frac{2}{3-x}$ sur l'intervalle* $[0;3[$.
2. *Déterminer par récurrence que cette suite est bornée par* 1 *et* 2.
3. *Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est décroissante.*
4. *Conclure quant à la convergence de la suite (u_n).*
5. *Conjecturer avec une calculatrice la limite de la suite (u_n).*