Continuité des fonctions de la variable réelle : exercices

Exercice 1 *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$\begin{cases} 3+x & si\ x \leq -1 \\ x^2+x & si\ x > -1 \end{cases}$$

1. *Représenter graphiquement la fonction f.*
2. *f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?*

Exercice 2 *On donne ci-dessous les tarifs* 2020 *pour l'affranchissement d'un envoi au tarif "lettre verte' :*

Masse jusqu'à..	*Tarif*
$20g$	0.97 *euros*
$100g$	1.94 *euros*
$250g$	3.88 *euros*
$500g$	5.82 *euros*

On note $C(x)$ le coût, en euros, d'une lettre 'verte" en foncxtion de sa masse x en grammes.

1. *Représenter graphiquement la fonction C sur l'intervalle* $[0;500]$.
2. *La fonction C est-elle continue ?*

Exercice 3 *On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle* $[-10;8]$ *dont le tableau de variation est le suivant :*

x	10		-4		5		8
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	*-1*	$\nearrow$	*10*	$\searrow$	*-5*	$\nearrow$	*15*

Déterminer le nombre de solutions sur $[-10;8]$ *de chacune des équations suivantes :*

$$f(x) = 0$$
$$f(x) = 11$$
$$f(x) = -7$$

Exercice 4

1. *A l'aidde d'une calculatrice, conjecturer le nombre de solutions de l'équation :*

$$x^3 - 6x + 2 = 0$$

2. *Montrer que l'intervalle* $[-1;2]$ *contient une des solutions précédentes.*

Exercice 5 *On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$f(x) = x^5 + x^3$$

1. *Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.*
2. *Étudier les variations de f.*
3. *Démontrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.*

4. *Donner un encadrement d'amplitude* 0.001 *de cette solution.*

Exercice 6 *Étudier les variations de chacune des fnctions suivantes :*

$$f(x) = x - 5\sqrt{x} \;\; sur \;\;]0;+\infty[$$
$$g(x) = \frac{3x^2 - x - 1}{x+1} \;\; sur \;\; \mathbb{R}\{-1\}$$
$$h(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} \;\; sur \;\;]1;+\infty[$$
$$i(x) = \frac{1}{(x^3 - x + 2)^2} \;\; sur \;\;]-1;+\infty[$$

Exercice 7 *Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$\begin{cases} -x+3 & si\ x < -3 \\ 3-x & si\ x \geq -3 \end{cases}$$

1. *La fonction f est-elle continue en -3 ?*
2. *La fonction f est-elle dérivable en -3 ? On reviendra à la d'éfinition de la dérivabilité pour la justification.*
3. *Interpréter graphiquement les résultats précédents.*

Exercice 8 *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$f(x) = -x^4 + 2x^3 + 3x + 1$$

1. *Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.*
2. *Étudier les variations de f'.*
3. *Justifier que l'équation $f'(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$, que l'on notera α. Donner un encadrement de α entre deux entiers consécutifs.*
4. *En déduire le tableau de signes de f'.*
5. *Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.*

Exercice 9

1. *Montrer que l'équation $2x^3 - 3x^2 - 1 = 0$ admet une unique solution, notée α, et que cette solution est comprise entre* 1.6 *et* 1.7.
2. *On considère la fonction f, définie sur $]C-\infty;-1[\cap]-1;+\infty[$ par :*

$$f(x) = \frac{1-x}{1+x^3}$$

Étudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

3. *Étudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.*
4. *Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse* 0 *et étudier la position de la courbe par rapport à cette tangente.*
5. *Représenter graphiquement la fonction f et la tangente.*