☙ Probabilités conditionnelles

1 Tableau d'effectifs

Dans cette partie, nous allons revoir et voir les notions de probabilités à bien connaître. Pour introduire ces concepts, nous allons faire un exemple dans le cas le moins compliqué : quand on connaît la taille de la population étudiée.

Exemple 1 *Un* food truck*, ouvert le midi et le soir, propose deux types de formules :*
- *la formule* Burger *;*
- *la formule* Wok.

Le gérant a remarqué que 70 % de ses ventes ont lieu le midi. Le quart des ventes du midi correspondent à la formule Burger*, alors que 40 % des ventes du soir correspondent à la formule* Wok.
Le gérant se constitue un fichier en notant, pour chaque vente, la formule choisie et le moment de cette vente (midi ou soir) : sur la journée, il a fait 1000 *ventes.*
On prélève une fiche de façon équiprobable. On définit les quatre évènements suivants :

M : « la fiche correspond à une vente du midi » ;

S : « la fiche correspond à une vente du soir » ;

W : « la fiche correspond à une formule Wok » ;

B : « la fiche correspond à une formule Burger ».

1. *Compléter le tableau de répartition des fiches suivant :*

	Vente du midi	*Vente du soir*	*Total*
Formule Wok	$700-175=525$	$\frac{40\times300}{100}=120$	$525+120=645$
Formule Burger	$\frac{1}{4}\times700=175$	$355-175=180$	$1000-645=355$
Total	$\frac{70\times1000}{100}=700$	$1000-700=300$	1000

2. *Quelle est la signification de l'événement $M\cap W$?*
L'événement $M\cap W$ signifie intersection de M et W, ou encore M et W en même temps : la fiche tirée correspond à une vente du midi qui est un wok.
3. *Calculer la probabilité de l'évènement $M\cap W$. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.*
Pour déterminer la probabilité de cet événement, on détermine le nombre de ventes du midi qui correspondent à un wok, 525 *que l'on divisera par le nombre total de vente sur la journée,* 1000 *:*

$$P(M\cap W)=\frac{525}{1000}=12\%=0.525$$

4. *Calculer la probabilité que la fiche choisie corresponde à une formule* Burger.
On regarde cette fois le nombre de repas servi pour la formule Burger, 355 *et on fait l'opération suivante :*

$$P(B)=\frac{355}{1000}=35.5\%=0.35$$

5. *Quelle est la signification de l'événement $M\cup W$?*
Ce symbole est la réunion de M et W, ou soit M, soit W soit les deux en même temps : la fiche tirée correspond donc à un repas du midi, ou une repas qui est un wok, ou bien les deux .

6. *Calculer la probabilité de l'évènement $M \cup W$. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.*
On a deux manières de le calculer.
La première est de faire comme précédemment : on calcule le nombre de fiches correspond à $M \cup W$. Mais il faut faire attention, on va ajouter le nombre de fiches de type M et le nombre de fiches de type W auxquelles on retranche les fiches de type $M \cap W$ sinon on les compte deux fois. On obtient :
$$P(M \cup W) = \frac{645 + 700 - 525}{1000} = \frac{820}{1000} = 82\% = 0.82$$
La second méthode est d'utiliser la formule suivante :
$$P(M \cup W) = P(M) + P(W) - P(M \cap W) = \frac{645}{1000} + \frac{700}{1000} - \frac{525}{1000} = 82\% = 0.82$$

7. *On a prélevé une fiche correspondant à la formule* Burger. *Quelle est la probabilité, arrondie au millième, que la vente ait eu lieu le soir ?*
Ici on doit calculer une probabilité avec une condition, ***la fiche est forcément une de celles des formules Burger*** *.*
Donc on compte toutes les fiches que l'on peut tirer parmi les fiches de type Burger, qui sont au nombre de 355*. Parmi celles-ci,* 180 *correspondent à des fiches du soir. La probabilité cherchée, notée $P_B(S)$ est donc :*
$$P_B(S) = \frac{180}{355}$$

8. *Comparer ce résultat à $\frac{P(B \cap S)}{P(B)}$.*
On a :
$$\frac{P(B \cap S)}{P(B)} = \frac{\frac{180}{1000}}{\frac{355}{1000}} = \frac{180}{1000} \times \frac{1000}{355} = \frac{180}{355}$$
Conclusion :
$$P_B(S) = \frac{P(B \cap S)}{P(B)}$$

Remarque : On pourra toujours se ramener au cas où on connaît la taille de la population de départ et faire un tableau.
On pourra faire comme si la population comptait 10000 individus et déterminer toutes les probabilités grâce à un tableau. Mais ça sera plus long.

2 Arbre de probabilités

Exemple 2 *L'office de tourisme d'une ville souhaite fidéliser ses touristes. Pour cela, il organise une loterie dont les lots sont de plusieurs types : porte-clefs aux couleurs de la ville, tee-shirt de l'office du tourisme, stylo, panier de produits locaux, bon de réduction de 150 € sur un prochain séjour en ville.*
Cette loterie se pratique sur une borne tactile et se déroule en deux étapes.
À chaque étape il s'agit de choisir une case parmi les dix qui s'affichent sur l'écran de la borne.
Première étape :
Le touriste a sept chances sur dix de gagner un porte-clefs aux couleurs de la ville et trois chances sur dix de gagner un tee-shirt de l'office du tourisme.
Seconde étape :

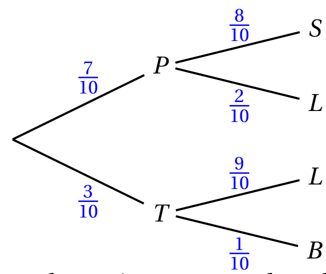
— *Si le touriste a gagné un porte-clefs, il a huit chances sur dix de gagner un stylo aux couleurs de la ville et deux chances sur dix de gagner un panier de produits locaux ;*

— *si le touriste a gagné un tee-shirt de l'office du tourisme, il a neuf chances sur dix de gagner un panier de produits locaux et une chance sur dix de gagner un bon de réduction de 150 € sur un prochain séjour en ville.*

On définit les événements suivants :

P : « le premier lot est un porte-clefs » et T : « le premier lot est un tee-shirt » ;
S : « le second lot est un stylo » ;
L : « le second lot est un panier de produit locaux » ;
B : « le second lot est un bon de réduction de 150 euros sur un prochain séjour en ville ».

1. *Compléter l'arbre pondéré suivant :*



2. *Calculer la probabilité que le touriste gagne un bon de réduction de 150 euros sur un prochain séjour en ville.*
On repère dans l'arbre le nombre de branches qui aboutissent à B, le bon de réduction : il y en a une. On multiplie ensuite les probabilités sur cette branche. Finalement :

$$P(B) = \frac{3}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{3}{100} = 0.03 = 3\%$$

3. *Calculer la probabilité que le touriste gagne un panier de produits locaux.*
On repère dans l'arbre le nombre de branches qui aboutissent à L, les paniers locaux : il y en a deux. On multiplie ensuite les probabilités sur chacune de ces branches et on ajoute les résultats. Finalement :

$$P(L) = \frac{7}{10} \times \frac{2}{10} + \frac{3}{10} \times \frac{9}{10} = \frac{14}{100} + \frac{27}{100} = \frac{41}{100} = 0.41 = 41\%$$

4. *Sachant qu'un touriste a gagné un panier de produits locaux à la seconde étape de la loterie, calculer la probabilité qu'il ait gagné un tee-shirt lors de la première étape.*
Il s'agit ici de calculer une probabilité conditionnelle, la condition étant ici l'événement L, on cherche :

$$P_L(T) = \frac{P(T \cap L)}{P(L)} = \frac{\frac{3}{10} \times \frac{9}{10}}{\frac{41}{100}} = \frac{\frac{27}{100}}{\frac{41}{100}} = \frac{27}{41}$$

Pour $P(T \cap L)$, on multiplie les probabilités sur la branche qui correspond à $T \cap L$.

Exemple 3 *Lors d'une épidémie chez des bovins, on s'est aperçu que si la maladie est diagnostiquée suffisamment tôt chez un animal, on peut le guérir ; sinon la maladie est mortelle.*
Un test est mis au point et essayé sur un échantillon d'animaux dont 1 % est porteur de la maladie.
On obtient les résultats suivants :

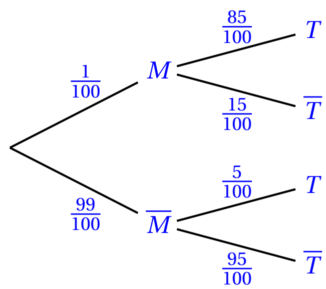
- *si un animal est porteur de la maladie, le test est positif dans 85 % des cas;*
- *si un animal est sain, le test est négatif dans 95 % des cas.*

On choisit de prendre ces fréquences observées comme probabilités pour la population entière et d'utiliser le test pour un dépistage préventif de la maladie.
On note :

M l'évènement : « l'animal est porteur de la maladie »;

T l'évènement : « le test est positif ».

1. *Construire un arbre pondéré modélisant la situation proposée.*



$\overline{M}$ est l'événement contraire de M, c'est à une vache saine tandis que $\overline{T}$ est l'événement contraire de T, c'est à dire le test est négatif.

2. *Un animal est choisi au hasard.*

a. *Quelle est la probabilité qu'il soit porteur de la maladie et que son test soit positif?*
On cherche la probabilité de la branche $M \cap T$:

$$P(M \cap T) = \frac{1}{100} \times \frac{85}{100} = 0.0085$$

b. *Montrer que la probabilité pour que son test soit positif est* $0,058$.
On cherche la somme des probabilités des branches où T apparaît :

$$P(T) = \frac{1}{100} \times \frac{85}{100} + \frac{99}{100} \times \frac{5}{100} = 0.058$$

3. *Un animal est choisi au hasard parmi ceux dont le test est positif. Quelle est la probabilité pour qu'il soit porteur de la maladie?*
On cherche une probabilité conditionnelle, avec comme condition T :

$$P_T(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} = \frac{0.0085}{0.058} \approx 0.15$$

4. *Que penser de ce test?*
Ce test n'est pas très fiable : seulement 15% *de ceux testés positifs sont vraiment malades*

3 Résumé

Formule de Laplace : Soit un événement E sur un ensemble fini $\mathscr{E}$:

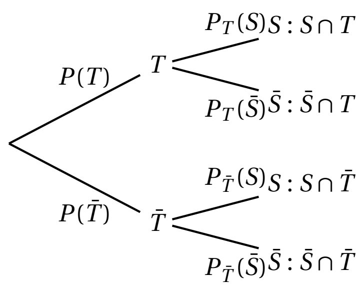
$$P(E) = \frac{\text{nombre d'éléments de E}}{\text{nombre d'élément de } \mathscr{E}}$$

Probabilités conditionnelles :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Cette notation désigne la probabilités de B sachant A.
En général, elle est différente de la probabilité de l'intersection de A et B qui représente la proportion d'élements de $A \cap B$ par rapport au éléments de l'ensemble fini dans lequel sont prélévés A et B.
Tandis que $P_A(B)$ représente la proportion d'éléments de $A \cup B$ par rapport à l'ensemble A.

Arbre de probabilités :



Pour obtenir la probabilité au bout d'une branche, on multiplie les valeurs sur cette branche.
A chaque embranchement, la somme des deux probabilités est égale à 1.