∽ Fonction logarithme : cours

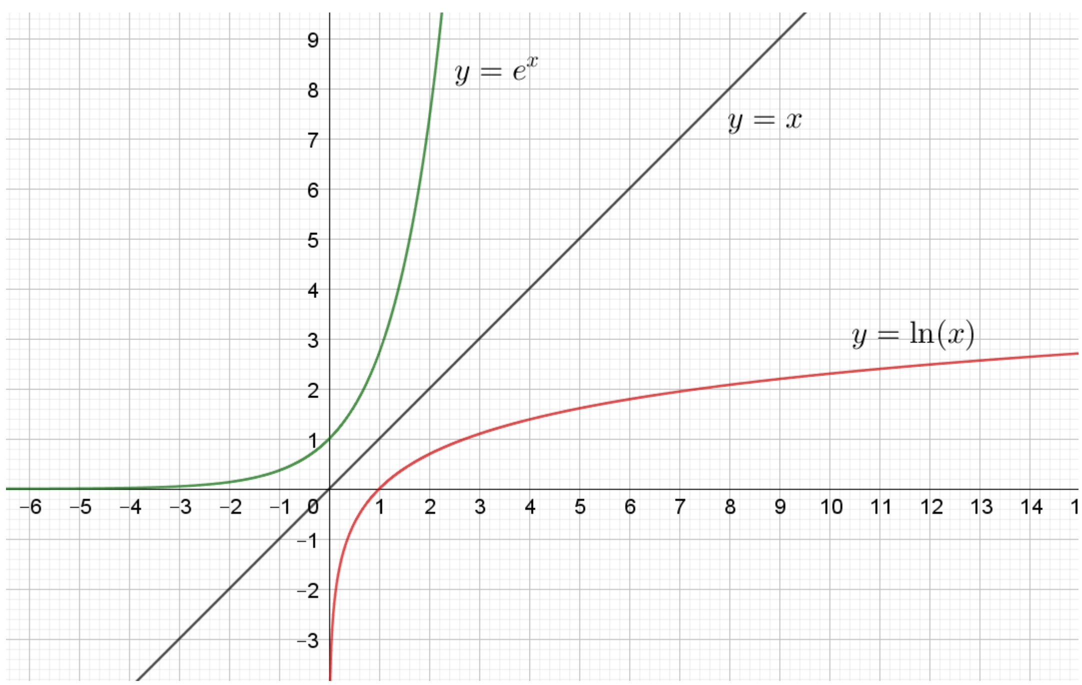
1 Définition et propriétés immédiates

Définition

On appelle logarithme népérien d'un réel strictement positif x, l'unique solution y de l'équation $e^y = x$. On la note $y = \ln(x)$.
La fonction logarithme népérien, notée ln, est la fonction :

$$\begin{aligned} \ln\ : \ ]0;+\infty[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \ln(x) \end{aligned}$$

Remarque 1 ✏ *Les fonctions* $\exp(x) = e^x$ *et* $\ln(x)$ *sont des fonctions réciproques l'un de l'autre : cela signifie, entre autres, que les courbes représentatives de ces deux fonctions sont symétriques par rapport à la droite d'équation* $y = x$.



✏ *Dans le domaine scientifique, on utilise la fonction logarithme décimale, notée* log, *et définie par :*

$$\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$$

Cette fonction vérifie :

$$10^y = x \Leftrightarrow y = \log(x) \text{ pour } x > 0$$

Conséquences

✏

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ln(\exp(x)) = x$$
$$\forall x > 0,\ \exp(\ln(x)) = x$$

✏

$$\ln(1) = 0$$
$$\ln(e) = 1$$
$$\ln\left(\frac{1}{e}\right) = -1$$

2 Propriétés de la fonction logarithme népérien

2.1 Relation fonctionnelle

Théorème

Pour tous réels x et y strictement positifs, on a :

$$\ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y)$$

Remarque 2 *Cette formule permet de transformer un produit en somme.*

2.2 Conséquences

Corollaires

Pour tous les réels x et y strictement positifs, on a :

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x) \quad (1)$$
$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y) \quad (2)$$
$$\ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}\ln(x) \quad (3)$$
$$\ln(x^n) = n\ln(x) \quad \text{avec n un entier relatif} \quad (4)$$

Exemple 1 *Simplifier les expresions suivantes :*

$$A = \ln(3-\sqrt{5}) + \ln(3+\sqrt{5})$$
$$B = 3\ln(2) + \ln(5) - 2\ln(3)$$
$$C = \ln(e^2) - \ln\left(\frac{2}{e}\right)$$

$$A = \ln((3-\sqrt{5})\times(3+\sqrt{5})) = \ln(3^2-\sqrt{5}^2) = \ln(9-5) = \ln(4)$$
$$B = \ln\left(\left(2^3\right)\right) + \ln(5) - \ln\left(3^2\right) = \ln\left(\frac{2^3\times 5}{3^2}\right) = \ln\left(\frac{40}{9}\right)$$
$$C = 2\ln(e) - \ln(2) - (-\ln(e)) = 2 - \ln(2) + 1 = 3 - \ln(2)$$

2.3 Équations et inéquations

Propriétés

Pour tous réels x et y strictement positifs, on a :

- ✏ $\ln(x) = \ln(y) \Leftrightarrow x = y$.
- ✏ $\ln(x) < \ln(y) \Leftrightarrow x < y$.

Exemple 2 ***1.*** *Résoudre dans I les équations suivantes et inéquations suivantes :*

$$\ln(x) = 2 \quad I =]0;+\infty[$$
$$e^{x+1} = 5 \quad I = \mathbb{R}$$
$$3\ln(x) - 4 = 8 \quad I =]0;+\infty[$$
$$\ln(6x-1) \leq 2 \quad I = \left]\frac{1}{6};+\infty\right[$$
$$e^x + 5 > 4e^x \quad I = \mathbb{R}$$

$$\ln(x) = 2 \Leftrightarrow \ln(x) = \ln(e^2) \Leftrightarrow x = e^2 \in]0;+\infty[$$
$$e^{x+1} = 5 \Leftrightarrow e^{x+1} = e^{\ln(5)} \Leftrightarrow x+1 = \ln(5) \Leftrightarrow x = \ln(5) - 1 \in \mathbb{R}$$
$$3\ln(x) - 4 = 8 \Leftrightarrow 3\ln(x) = 12 \Leftrightarrow \ln(x) = 4 = \ln(e^4) \Leftrightarrow x = e^4 \in \mathbb{R}$$
$$\ln(6x-1) \leq 2 \Leftrightarrow 6x-1 > 0 \textit{ et } \ln(6x-1) \leq \ln(e^2) \Leftrightarrow x > \frac{1}{6} \textit{ et } 6x-1 \leq e^2 \Leftrightarrow \frac{1}{6} < x \leq \frac{e^2+1}{6}$$
$$e^x + 5 > 4e^x \Leftrightarrow 5 > 3e^x \Leftrightarrow e^x < \frac{5}{3} = e^{\ln\left(\frac{5}{3}\right)} \Leftrightarrow x < \ln\left(\frac{5}{3}\right)$$

2. *Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation et l'inéquation suivante :*

$$\ln(x-3)+\ln(9-x)=0$$
$$\ln(3-x)-\ln(x+1)\leq 0$$

$$\ln(x-3)+\ln(9-x)=0 \Leftrightarrow \ln\left((x-3)(9-x)\right)=0=\ln(1) \Leftrightarrow (x-3)(9-x)=1 \Leftrightarrow -x^2+12x-27=1$$
$$\Leftrightarrow -x^2+12x-28=0$$

On calcule maintenant le discriminant Δ :

$$\Delta = b^2-4ac = 12^2-4\times(-1)\times(-28)=32$$

Comme le discriminant est strictement positif, il y a deux solutions réelles distinctes :

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-12+\sqrt{32}}{-2}=\frac{-12+4\sqrt{2}}{-2}=6-2\sqrt{2}$$
$$x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-12+\sqrt{32}}{-2}=\frac{-12-4\sqrt{2}}{-2}=6+2\sqrt{2}$$

On avait deux conditions pour l'égalité existe, elles viennent de l'ensemble de définition de la fonction logarithme :

$$x-3>0 \text{ et } 9-x>0 \Leftrightarrow x>3 \text{ et } x<9$$

Il reste à vérifier si $6-2\sqrt{2}$ et $6+2\sqrt{2}$ sont dans l'intervalle $]3;9[$. Comme on retire un nombre positif, $6-2\sqrt{2}<6<9$ et il nous reste à comparer $6-2\sqrt{2}$ à 3 :

$$6-2\sqrt{2}-3=3-\sqrt{8}=\sqrt{9}-\sqrt{8}>0 \Leftrightarrow 6-2\sqrt{2}>3$$

Comme on ajoute un nombre positif, $6+2\sqrt{2}>6>3$ et il nous reste à comparer $6+2\sqrt{2}$ à 9 :

$$9-(6+2\sqrt{2})=3-2\sqrt{2}=\sqrt{9}-\sqrt{8}>0$$

On a bien montré l'appartenance des deux solutions à l'ensemble $]3;9[$.

3 Étude de la fonction logarithme népérien

3.1 Continuité et dérivabilité

Propriétés

- La fonction logarithme népérien est continue sur $]0;+\infty[$.
- La fonction logarithme népérien est dérivable sur $]0;+\infty[$
et $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$.

Preuve

On applique la formule de dérivation d'une composée de fonction à :

$$e^{\ln(x)} \text{ en posant } u(x) = \ln(x) \text{ et } e^{u(x)}$$
$$\left(e^{\ln(x)}\right)' = u(x)' \times e^{u(x)} = u'(x)e^{\ln(x)}$$

Or, cette fonction $e^{\ln(x)}$ est égale à x et la dérivée de x est 1, par conséquent :

$$u'(x)e^{\ln(x)} = 1 \Leftrightarrow u'(x)x = 1 \Leftrightarrow u'(x) = \frac{1}{x}$$

La dérivée de la fonction $x \mapsto \ln(x)$ est donc la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$.

Exemple 3 *Dériver la fonction suivante sur l'intervalle* $]0;+\infty[$ *par :*

$$f(x) = \frac{(\ln(x))^2}{x}$$

On utilise dans un premier temps la formule de dérivation d'un quotient :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{\left((\ln(x))^2\right)' \times x - (\ln(x))^2 \times x'}{x^2} \\
&= \frac{\left((\ln(x))^2\right)' \times x - (\ln(x))^2 \times x'}{x^2} \\
&= \frac{2 \times (\ln(x))' \times \ln(x) \times x - (\ln(x))^2 \times 1}{x^2} \quad \textit{formule de dérivation d'une composée pour } (\ln(x))^2 \\
&= \frac{2 \times \frac{1}{x} \times \ln(x) \times x - (\ln(x))^2}{x^2} \\
&= \frac{2\ln(x) - (\ln(x))^2}{x^2} \\
&= \frac{\ln(x)(2 - \ln(x))}{x^2}
\end{aligned}$$

Le fait de factoriser par $\ln(x)$ *va nous permettre de pouvoir donner le signe de cette derivée en faisant un tableau de signe.*

3.2 Variations

Propriétés

La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

3.3 Convexité

Propriétés

La fonction logarithme népérien est concave sur $]0;+\infty[$.

3.4 Limites aux bornes

Propriétés

On a les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$$
$$\lim_{x\to0^+} \ln(x) = -\infty$$

x	0	$+\infty$
$f'(x) = \frac{1}{x}$	||	$+$
$f(x) = \ln(x)$	||	$-\infty \nearrow +\infty$

3.5 Croissance comparée des fonctions logarithme et puissances

Croissances comparées

On a les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \text{ et pour n } \geq 1,\ \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$$
$$\lim_{x\to0} x\ln(x) = 0 \text{ et pour n } \geq 1,\ \lim_{x\to0} x^n\ln(x) = 0$$

Preuve du cas $n = 1$

On va poser $X = \ln(x)$, on peut donc écrire :

$X = \ln(x) \Leftrightarrow x = e^X$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) \Leftrightarrow \lim\limits_{X\to+\infty}$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{X}{e^X} = 0$ d'après les croissances comparées de la fonction $x \mapsto e^x$

$\lim\limits_{x\to0^+} \ln(x) \Leftrightarrow \lim\limits_{X\to-\infty}$ car $\lim\limits_{x\to0^+} \ln(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to0^+} x\ln(x) = \lim\limits_{X\to-\infty} Xe^X = 0$ d'après les croissances comparées de la fonction $x \mapsto e^x$

Exemple 4 *Déterminer les limites suivantes :*

$$\lim_{x\to+\infty} x - \ln(x)$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x-1}$$

✏ *On sait que :*

$$\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$$

la limite $\lim\limits_{x\to+\infty} x - \ln(x)$ *est une forme indéterminée du type* $+\infty - \infty$.
On va donc factoriser par x :

$x - \ln(x) = x\left(1 - \dfrac{\ln(x)}{x}\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \dfrac{\ln(x)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1 - \dfrac{\ln(x)}{x}\right) = +\infty \times 1 = +\infty$ *par produit de limites*

La limite cherchée est donc $+\infty$.

✏ *On sait que :*

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(x)$$
$$\lim_{x\to+\infty} x - 1$$

la limite $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x-1}$ *est une forme indéterminée du type* $\frac{+\infty}{+\infty}$.
On va factoriser par x *:*

$$\frac{\ln(x)}{x-1} = \frac{\ln(x)}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)} = \frac{\ln(x)}{x} \times \frac{1}{1+\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{x}} = 1$ *par quotient de limites* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} \times \frac{1}{1-\frac{1}{x}} = 0 \times 1 = 0$

La limite cherchée est donc 0.

4 Études de fonctions

4.1 Cas de fonctions contenant la fonction $\ln(x)$

Exemple 5 ***1.*** *Déterminer les variations de la fonction* f *définie sur* $]0;+\infty[$ *par* $f(x) = 3 - x + 2\ln(x)$.

La fonction est dérivable par somme de fonctions dérivables, on peut donc calculer sa dérivée pour ensuite obtenir son signe, qui nous donnera accès aux variations de f *:*

$$\begin{aligned} f'(x) &= -1 + 2 \times \frac{1}{x} \\ &= \frac{-x+2}{x} \end{aligned}$$

On en déduit le tableau de signes de $f'(x)$ *puis le tableau de variations de* f *:*

x	0		2		$+\infty$
$-x+2$	‖	$-$	0	$+$	
x	‖		$+$		
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$1+2\ln(2)$	↘	$-\infty$

Pour la valeur de f *en* 2 *:*

$$f(2) = 3 - 2 + 2\ln(2) = 1 + 2\ln(2)$$

De plus :

$$\lim_{x\to 0^+} 3-x+2\ln(x) = 3-0-\infty = -\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} 3-x+2\ln(x) = \lim_{x\to +\infty} 3-x\left(1+2\times\frac{\ln(x)}{x}\right) \quad = 3-\infty\times(1+0)$$

$= -\infty$ *par produit de limites*

2. *Etudier la convexité de la fonction f.*
On doit calculer le signe de la fonction f'' ; cette fonction existe car la fonction f' est dérivable par quotient de fonctions dérivables pour $x>0$:

$$f''(x) = \left(f'(x)\right)' = \left(-1+2\times\frac{1}{x}\right)' = -\frac{2}{x^2} < 0 \textit{ pour tout } x>0$$

La fonction f est donc concave.

Exemple 6 *Étudier la position relative de la courbe de la fonction logarithme et de la droite d'équation $y=x$.*
On étudie la fonction $f(x)=\ln(x)-x$. Cette fonction est dérivable pour $x>0$ par différence de fonctions dérivables pour $x>0$:

$$f'(x) = \frac{1}{x}-1$$

On va étudier le signe de cette fonction :

$$x>0 \textit{ et } \frac{1}{x}-1>0 \Leftrightarrow x>0 \textit{ et } \frac{1}{x}>1 \Leftrightarrow x>0 \textit{ et } x<1$$

On en déduit le tableau de variation suivant :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	
$f(x)$	|| $-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$

On va justifier les valeurs du tableau :

$$\lim_{x\to 0^+} \ln(x)-x = -\infty+0 = -\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} \ln(x)-x = \lim_{x\to +\infty} x\left(\frac{\ln(x)}{x}-1\right) = +\infty\times(0-1) = -\infty$$

$$f(1) = \ln(1)-1 = -1$$

Par conséquent, on vient, entre autres, de montrer que :

$$\forall x>0,\quad f(x)\le -1 \Rightarrow \forall x>0,\quad \ln(x)-x<-1 \Rightarrow \forall x>0,\quad \ln(x)<x$$

Pour $x>0$, la fonction $x\mapsto \ln(x)$ est sous la droite d'équation $y=x$.

4.2 Cas de fonctions contenant la fonction composée $\ln(u(x))$

Fonctions du type $\ln(u(x))$

La dérivée de la fonction $x \mapsto \ln(u(x))$, définie pour $u(x) > 0$, est :

$$\frac{u'(x)}{u(x)}$$

Exemple 7 *Dériver la fonction g définie sur* $]0;2[$ *par* $g(x) = \ln(2x - x^2)$.
On va déjà vérifier que la fonction $u(x) = 2x - x^2$ *est strictement positive sur* $]0;2[$.
La fonction dérivée de u est $u'(x) = 2 - 2x$ *; elle s'annule en* $x = 1$ *:*

$$2 - 2x > 0 \Leftrightarrow x < 1$$

La fonction u est donc décroissante sur $[0;1]$ *puis décroissante sur* $[1;2]$ *:*

$$u(0) = 0$$
$$u(1) = 1$$
$$u(2) = 0$$

Finalement, on peut en conclure que pour $x \in]0;2[,\quad 0 < u(x) < 1$ *: g est donc bien définie sur* $]0;2[$. *La fonction g peut s'écrire comme la composée de deux fonctions :*

$$g(x) = \ln(u(x))$$
$$u(x) = 2x - x^2 \quad u'(x) = 2 - 2x$$
$$g'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{2-2x}{2x - x^2}$$

Exemple 8 *On considère la fonction f définie sur* $]-2;1[$ *par :*

$$f(x) = \ln\left(\frac{x+2}{1-x}\right)$$

1. *Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition et en déduire les équations des asymptotes à la courbe.*
On va faire le tableau de signe de la fonction $u(x) = \frac{x+2}{1-x}$ *pour montrer que f est bien définie sur* $]-2;1[$ *:*

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$x+2$		$-$	0		$+$		
$1-x$			$+$		0	$-$	
$u(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

La fonction u est bien strictement positive sur $]-2;1[$ *donc* f *est bien définie sur* $]-2;1[$.

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 1^-} u(x) = \frac{3}{0^+} = +\infty \\
\textit{donc } &\lim_{x\to 1^-} \ln(u(x)) = \lim_{x\to +\infty} \ln(x) = +\infty \\
&\lim_{x\to 2^+} u(x) = 0 \\
\textit{donc } &\lim_{x\to 2^+} \ln(u(x)) = \lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty
\end{aligned}$$

La courbe possède donc deux asymptotes verticales d'équation $x=-2$ *et* $x=1$ *car on obtient une limite infinie en* $x=1$ *et* $x=-2$.

2. *Déterminer le sens de variations de la fonction* f.
La fonction u est dérivable sur $]-2;1[$ *par quotient de fonctions dérivables.*
Comme la fonction u est strictement positive sur $]-2;1[$ *et que la fonction* $y \mapsto \ln(y)$ *est dérivable pour* $y>0$, *alors la fonction* f *est dérivable sur* $]-2;1[$ *par composée de fonctions dérivables :*

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

$$u'(x) = \left(\frac{x+2}{1-x}\right)' = \frac{(x+2)'\times(1-x)-(x+2)\times(1-x)'}{(1-x)^2} = \frac{(1-x)-(x+2)\times(-1)}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{3}{(1-x)^2} > 0$$

La fonction est donc strictement croissante sur $]-2;1[$.

3. *Tracer la courbe représentative de* f.