Devoir maison sur les intégrales

Exercice 1 *Soit la fonction définie sur l'intervalle* $[-1\ ;\ 1]$ *par* $f(x) = (1-x^2)e^{-x}$.

1. *Pour tout réel x de l'intervalle* $[-1\ ;\ 1]$, *on pose* $F(x) = (1+2x+x^2)e^{-x}$. *Montrer que la fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle* $[-1\ ;\ 1]$.
   On doit dériver la fonction F pour montrer que le résultat est f :

$$\begin{aligned}F'(x) &= \left((1+2x+x^2)e^{-x}\right)' \\ &= (1+2x+x^2)' \times e^{-x} + (1+2x+x^2) \times (e^{-x})' \\ &= (2+2x) \times e^{-x} + (1+2x+x^2) \times (-e^{-x}) \\ &= (2+2x-(1+2x+x^2))e^{-x} \text{ on a mis en facteur par } e^{-x} \\ &= (2+2x-1-2x-x^2)e^{-x} \\ &= (1-x^2)e^{-x}\end{aligned}$$

   Donc F est une primitive de f.

2. *Calculer l'aire exacte, en unité d'aire, de la surface comprise entre l'axe des abscisses, la courbe (C), les droites d'équations* $x=-1$ *et* $x=1$.
   Comme la fonction f est positive sur $[-1;1]$, *l'aire cherchée est l'intégrale entre* -1 *et* 1 *de f :*

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = [F(x)]_{-1}^{1} = F(1)-F(-1) = (1+2\times 1+1^2)e^{-1} - (1+2\times(-1)+(-1)^2)e^{-(-1)} = 4e^{-1} - 0e^{1} = 4e^{-1}$$

   Comme on veut la valeur exacte, on s'arrête là.

Exercice 2 *Déterminer les intégrales suivantes :*

$$A = \int_0^3 3x-1\,dx = \left[3\frac{x^2}{2} - x\right]_0^3 = 3\times\frac{3^2}{2} - 3 - \left(3\times\frac{0^2}{2} - 0\right) = \frac{21}{2}$$

$$B = \int_0^{\pi} \sin(3x)\,dx = \left[-\frac{1}{3}\cos(3x)\right]_0^{\pi} = -\frac{1}{3}\cos(3\pi) + \frac{1}{3}\cos(0) = -\left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$C = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 5\cos(4x)\,dx = \left[\frac{5}{4}\sin(4x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{5}{4}\sin\left(4\times\frac{\pi}{2}\right) - \frac{5}{4}\sin(4\times 0) = \frac{5}{4}\sin(2\pi) - 0 = 0$$

$$D = \int_1^e \frac{3}{x}\,dx = [3\ln(x)] = 3\ln(e) - 3\ln(1) = 3$$

$$E = \int_{-3}^{3} e^{\frac{x}{3}}\,dx = \left[3e^{\frac{x}{3}}\right] = 3e^{\frac{3}{3}} - 3e^{\frac{-3}{3}} = 3e^{1} - 3e^{-1}$$

Exercice 3 *Déterminer les primitives et les dérivées des fonctions suivantes :*

Primitive	*Fonction*	*Dérivée*
$\frac{1}{2n}\sin(2nx)$	$\cos(2nx)$	$-2n\sin(2nx)$
$-\frac{1}{3n}\cos(3nx)$	$\sin(3nx)$	$3n\cos(3nx)$
$\frac{2}{3n}\sin\left(\frac{3nx}{2}\right)$	$\cos\left(\frac{3nx}{2}\right)$	$-\frac{3n}{2}\sin\left(\frac{3nx}{2}\right)$
$-\frac{2}{5n}\cos\left(\frac{5nx}{2}\right)$	$\sin\left(\frac{5nx}{2}\right)$	$\frac{5n}{2}\sin\left(\frac{5nx}{2}\right)$

Exercice 4 : Déterminer les intégrales suivantes en fonction de n :

$$\int_0^{\pi} \cos(2nx)dx$$
$$=\left[\frac{1}{2n}\sin(2nx)\right]_0^{\pi}$$
$$=\frac{1}{2n}\left(\sin(2n\pi)-\sin(2n)\right)$$
$$=\frac{1}{2n}(0-0)$$
$$=0$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(3nx)$$
$$=\left[-\frac{1}{3n}\cos(3nx)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=-\frac{1}{3n}\left(\cos(3n\frac{\pi}{2})-\cos(3n\times 0)\right)$$
$$=-\frac{1}{3n}\left(\cos(3n\frac{\pi}{2})-1\right)$$
$$=-\frac{1}{3n}\cos\left(3n\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{3n}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(\frac{3nx}{2}\right)$$
$$=\left[\frac{2}{3n}\sin\left(\frac{3nx}{2}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\frac{2}{3n}\left(\sin\left(\frac{3n\frac{\pi}{2}}{2}\right)-\sin\left(\frac{3n\times 0}{2}\right)\right)$$
$$=\frac{2}{3n}\left(\sin\left(\frac{3n\pi}{4}\right)-0\right)$$
$$=\frac{2}{3n}\sin\left(\frac{3n\pi}{4}\right)$$

$$\int_0^{2\pi} \sin\left(\frac{5nx}{2}\right)$$
$$=\left[-\frac{2}{5n}\cos\left(\frac{5nx}{2}\right)\right]_0^{2\pi}$$
$$=-\frac{2}{5n}\left(\cos\left(\frac{5n\times 2\pi}{2}\right)-\cos\left(\frac{5n\times 0}{2}\right)\right)$$
$$=-\frac{2}{5n}\left(\cos(5n\pi)-\cos(0)\right)$$
$$=-\frac{2}{5n}\left(\cos(5n\pi)-1\right)$$
$$=-\frac{2}{5n}\cos(5n\pi)+\frac{2}{5n}$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2+1}$$
$$=[\arctan(x)]_{-1}^{1}$$
$$=\arctan(1)-\arctan(-1)$$
$$=\frac{\pi}{4}-\frac{-\pi}{4}$$
$$=\frac{\pi}{2}$$