∽ Épreuve de spécialité : mathématiques, correction

EXERCICE 1

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse exacte rapporte un point.
Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point. Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1. On considère les suites (u_n) et (v_n) telles que, pour tout entier naturel n,

$$u_n = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n \qquad \text{et} \qquad v_n = 1 + \left(\frac{1}{4}\right)^n.$$

On considère de plus une suite (w_n) qui, pour tout entier naturel n, vérifie $u_n \leqslant w_n \leqslant v_n$.
On peut affirmer que :

a. Les suites (u_n) et (v_n) sont géométriques.
b. La suite (w_n) converge vers 1.
c. La suite (u_n) est minorée par 1.
d. La suite (w_n) est croissante.

2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = xe^{x^2}$.
La fonction dérivée de f est la fonction f' définie sur $\mathbb{R}$ par :

a. $f'(x) = 2xe^{x^2}$
b. $f'(x) = (1+2x)e^{x^2}$
c. $f'(x) = \left(1+2x^2\right)e^{x^2}$
d. $f'(x) = \left(2+x^2\right)e^{x^2}$.

3. Que vaut $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-1}{2x^2-2x+1}$?

a. -1 **b.** 0 **c.** $\frac{1}{2}$ **d.** $+\infty$.

4. On considère une fonction h continue sur l'intervalle $[-1~;~1]$ telle que

$$h(-1) = 0 \qquad h(0) = 2 \qquad h(1) = 0.$$

On peut affirmer que :

a. La fonction h est croissante sur lintervalle $[-1\ ;\ 0]$.

b. La fonction h est positive sur lintervalle $[-1\ ;\ 1]$.

c. Il existe au moins un nombre réel a dans l'intervalle $[0; 1]$ tel que $h(a) = 1$.

d. L'équation $h(x) = 1$ admet exactement deux solutions dans l'intervalle $[-1\ ;\ 1]$.

5. On suppose que g est une fonction dérivable sur l'intervalle $[-4\ ;\ 4]$. On donne ci-contre la représentation graphique de sa fonction dérivée g'.

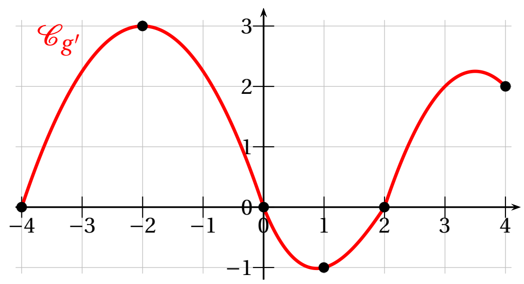
On peut affirmer que :

a. g admet un maximum en -2.

b. g est croissante sur l'intervalle $[1; 2]$.

c. g est convexe sur l'intervalle $[1; 2]$.

d. g admet un minimum en 0.



Exercice 2 *En 2020, une influenceuse sur les réseaux sociaux compte* 1000 *abonnés à son profil. On modélise le nombre d'abonnés ainsi : chaque année, elle perd 10 % de ses abonnés auxquels s'ajoutent* 250 *nouveaux abonnés. Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre d'abonnés à son profil en l'année* $(2020 + n)$, *suivant cette modélisation. Ainsi* $u_0 = 1000$.

1. Calculer u_1.

Diminuer de 10% revient à multiplier par 0.9, on a donc :

$$u_1 = 0.9 \times u_0 + 250 = 0.9 \times 1000 + 250 = 900 + 250 = 1150$$

2. Justifier que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,9u_n + 250$.

Comme dit précédemment, diminuer de 10% revient à multiplier par 0.9 ; comme on diminue la valeur u_n de l'année $2020 + n$, u_{n+1} va se composer de $0.9u_n$ et l'ajout des 250 habitant annuel nous permet de dire que : $\forall n \in \mathbb{N},\quad u_{n+1} = 0,9u_n + 250$.

3. La fonction Python nommée « suite » est définie ci-dessous. Dans le contexte de l'exercice, interpréter la valeur renvoyée par **suite(10)**.

```
def suite( n) :
    u = 1000
    for i in range(n) :
        u = 0,9*u + 250
    return u
```

Cette fonction renvoie la valeur de u_{10}, le nombre d'abonnées de l'influenceuse en 2030.

4. **a.** Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant 2500$.

Initialisation :

On a $u_0 = 1000 \leq 2500$: l'initialisation est établie.

Hérédité :

On va supposer que la propriété est vraie pour un certain rang $n \geq 0$:

$$u_n \leq 2500 \text{ c'est l'hypothèse de récurrence}$$

On va regarder si la propriété reste vraie au rang $n+1$.

On part de l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} & u_n \leq 2500 \\ \Rightarrow & 0.9u_n \leq 0.9 \times 2500 = 2250 \\ \Rightarrow & 0.9u_n + 250 \leq 2250 + 250 \\ \Rightarrow & 0.9u_n + 250 \leq 2500 \end{aligned}$$

L'hérédité est établie.

Par conséquent, $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq 2500$.

b. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

On va montrer que la quantité $u_{n+1} - u_n$ est positive pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} & \forall n \in \mathbb{N} \;\; u_{n+1} - u_n = 0.9u_n + 250 - u_n = -0.1u_n + 250 \\ & \text{or } u_n \leq 2500 \\ & \text{donc } \forall n \in \mathbb{N} \;\; u_{n+1} - u_n = -0.1u_n + 250 \geq -0.1 \times 2500 + 250 \geq 225 \geq 0 \end{aligned}$$

La suite (u_n) est donc croissante.

c. Déduire des questions précédentes que la suite (u_n) est convergente.
Comme la suite (u_n) est croissante et majorée par 2500, alors, d'après le théorème de convergence monotone, la suite (u_n) converge vers un nombre réel l.

5. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - 2500$ pour tout entier naturel n.

a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,9 et de terme initial $v_0 = -1500$.
Pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 2500 \\ &= 0.9u_n + 250 - 2500 \\ &= 0.9u_n - 2250 \\ &= 0.9\left(u_n - \frac{2250}{0.9}\right) \\ &= 0.9\left(u_n - 2500\right) \\ &= 0.9v_n \end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison 0.9 et de premier terme $v_0 = u_0 - 2500 = 1000 - 2500 = -1500$.

b. Pour tout entier naturel n, exprimer v_n en fonction de n et montrer que :

$$u_n = -1500 \times 0,9^n + 2500.$$

Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} & v_n = v_0 \times q^n = -1500 \times 0.9^n \\ \Rightarrow & u_n - 2500 = -1500 \times 0.9^n \\ \Rightarrow & u_n = -1500 \times 0.9^n + 2500 \end{aligned}$$

c. Déterminer la limite de la suite (u_n) et interpréter dans le contexte de l'exercice.
Comme la raison de la suite géométrique 0.9^n vérifie $|0.9| < 1$, alors la suite 0.9^n converge vers 0.
Par conséquent, par somme de limites, la suite (u_n) converge vers 2500.
Cela signifie que le nombre d'abonnés de l'influenceuse augmente pour s'approcher de plus en plus de 2500 : après un nombre d'années suffisamment important, on pourra considérer que son nombre d'abonnés sera de 2500.

6. Écrire un programme qui permet de déterminer en quelle année le nombre d'abonnés dépassera 2200.
Déterminer cette année.

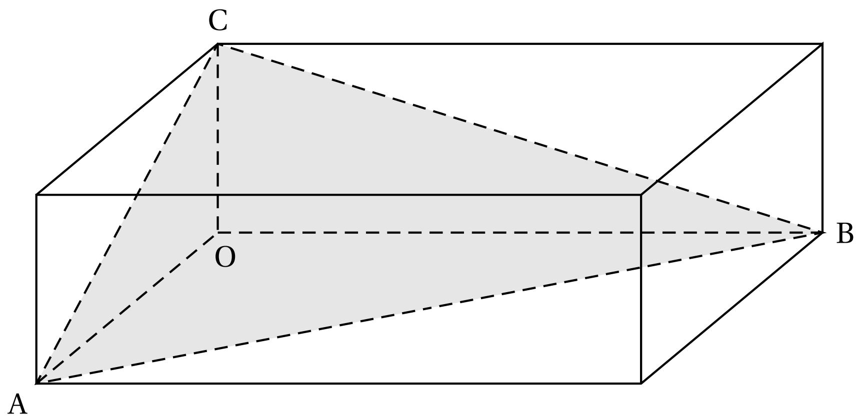
```
def seuil() :
   u = 1000
   n = 0
   while u<2200 :
      u = 0,9*u + 250
      n=n+1     return n
```

On trouve $n = 16$ en faisant fonctionner l'algorithme ou en entrant la suite dans la calculatrice.

EXERCICE 3

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère les points :

- ✏ A de coordonnées (2 ; 0 ; 0)
- ✏ B de coordonnées (0 ; 3 ; 0)
- ✏ C de coordonnées (0 ; 0 ; 1).



L'objectif de cet exercice est de calculer l'aire du triangle ABC.

1. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}3\\2\\6\end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC).
   On va montrer qu'il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC).
   On a :

$$\overrightarrow{AB}\,(-2;3;0)$$
$$\overrightarrow{AC}\,(-2;0;1)$$

   Ces deux vecteurs sont non colinéaires :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{n} = -2\times3+3\times2+0\times6=0$$
$$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{n} = -2\times3+0\times2+1\times6=0$$

   Par conséquent, le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) : il est donc orthogonal à tous les vecteurs de ce plan. Ca en est donc un vecteur normal.
2. On appelle H le projeté orthogonal de O sur le plan (ABC).
   Que dire des vecteurs $\overrightarrow{OH}$ et $\vec{n}$?
   Comme H est le projeté orthogonal de O sur (ABC), alors $\overrightarrow{OH}$ est un vecteur normal à (ABC) : les deux vecteurs $\vec{n}$ et $\overrightarrow{OH}$ sont donc colinéaires.
3. Un point M appartient au plan (ABC) si :

$$\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$$

   Montrer que le point I de coordonnées $\left(\frac{18}{49}\,;\,\frac{12}{49}\,;\,\frac{36}{49}\right)$ appartient au plan (ABC).
   Il suffit de calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AM}$:

$$\overrightarrow{AI}\left(\frac{18}{49}-2;\frac{12}{49}-0;\frac{36}{49}-0\right)=\left(-\frac{80}{49};\frac{12}{49};\frac{36}{49}\right)$$

   Ensuite on calcule le produit scalaire :

$$\overrightarrow{AI}.\vec{n}=-\frac{80}{49}\times3+\frac{12}{49}\times2+\frac{36}{49}\times6=\frac{-240+24+216}{49}=0$$

   Le point I est donc un point du plan (ABC).
4. Montrer que le point I est sur la droite (OH).
   Il suffit de montrer que les vecteurs $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OH}$ sont colinéaires :

$$\overrightarrow{OI}=\left(\frac{18}{49}\,;\,\frac{12}{49}\,;\,\frac{36}{49}\right)=\frac{6}{49}\,(3;2;6)=\frac{6}{49}\,\vec{n}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{OI}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires, $\overrightarrow{OH}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires donc, par transitivité, $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OH}$ sont colinéaires.
Les droites (OI) et (OH) sont donc parrallèles et avec un point commun ; elles sont donc confondues : $I \in (OH)$.

5. En déduire à quel autre point est égal I.
Le point I est sur la droite (OH) qui est perpendiculaire au plan (ABC) mais également sur le plan (ABC) ; par définition, c'est le projeté orthogonal de O sur (ABC), autrement dit H.

6. Calculer la distance OH.
On a identifié le point H au point I et dans ce cas :

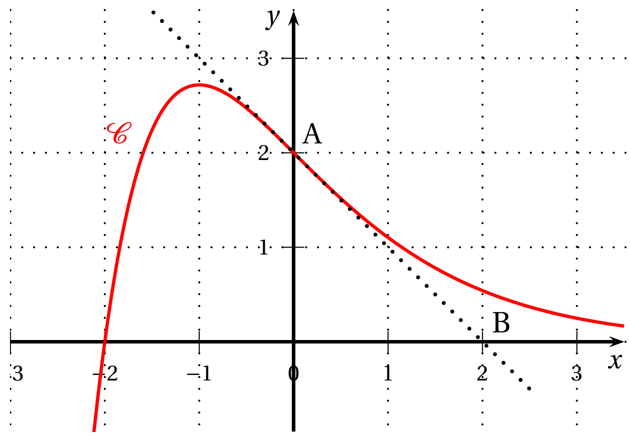
$$OH = OI = ||\overrightarrow{OI}|| = \sqrt{\left(\frac{18}{49}\right)^2 + \left(\frac{12}{49}\right)^2 + \left(\frac{36}{49}\right)^2} = \frac{\sqrt{18^2 + 12^2 + 36^2}}{49} = \frac{\sqrt{324 + 144 + 1296}}{49} = \frac{42}{49}$$

7. On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par : $V = \frac{1}{3}\mathscr{B}h$, où $\mathscr{B}$ est l'aire d'une base et h est la hauteur de la pyramide correspondant à cette base.
En calculant de deux façons différentes le volume de la pyramide OABC, déterminer l'aire du triangle ABC.
On peut exprimer le volume de la pyramide de deux façons différentes :

$$\begin{aligned}
& V = \frac{1}{3} \text{ aire de AOB } \times OC = \frac{1}{3} \text{ aire de ABC } \times OH \\
\Leftrightarrow\ & V = \frac{1}{3} \times \frac{OA \times OB}{2} \times OC = \frac{1}{3} \text{ aire de ABC } \times \frac{42}{49} \\
\Leftrightarrow\ & V = \frac{1}{3} \times \frac{2 \times 3}{2} \times 1 = \frac{1}{3} \text{ aire de ABC } \times \frac{42}{49} \\
\Leftrightarrow\ & \text{aire de ABC } = \frac{49}{14} = \frac{7}{2}
\end{aligned}$$

EXERCICE 4

On a représenté ci-dessous, dans un repère orthonormé, une portion de la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$:



On considère les points A(0 ; 2) et B(2 ; 0).

Partie 1

Sachant que la courbe $\mathscr{C}$ passe par A et que la droite (AB) est la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A, donner par lecture graphique :

1. La valeur de $f(0)$ et celle de $f'(0)$.
   La droite en pointillée est la tangente en $x = 0$ à la courbe représentant f et son équation est :

$$y = f'(0)(x-0) + f(0) = f'(0)x + f(0)$$

   Le coefficient directeur de cette droite est donc $f'(0)$ et son ordonnée à l'origine est $f(0)$:

$$f(0) = 2$$
$$f'(0) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0-2}{2-0} = -1$$

2. Un intervalle sur lequel la fonction f semble convexe.
   La fonction semble convexe sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

Partie 2

On admet que pour tout nombre réel x, $f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{-x}$.

1. On rappelle que f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.

a. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = (-x-1)\mathrm{e}^{-x}$.

On va dériver la fonction f comme la dérivée d'un produit :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left((x+2)e^{-x}\right)' \\ &= (x+2)' \times e^{-x} + (x+2)(e^{-x})' \\ &= 1 \times e^{-x} + (x+2) \times (-e^{-x}) \\ &= e^{-x}(1-(x+2)) \\ &= e^{-x}(-1-x) \end{aligned}$$

b. Étudier le signe de $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et dresser le tableau des variations de f sur $\mathbb{R}$.

On ne précisera ni la limite de f en $-\infty$ ni la limite de f en $+\infty$.

On calculera la valeur exacte de l'extremum de f sur $\mathbb{R}$.

On doit résoudre l'inéquation :

$$-1-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -1$$

On déduit le tableau suivant :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$-1-x$		$+$	0	$-$	
e^{-x}			$+$		
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
	$-\infty$	$\nearrow$	f(-1)	$\searrow$	0

On a $f(-1) = (-1+2)e^{-(-1)} = e^1 = e$

2. On rappelle que f'' désigne la fonction dérivée seconde de la fonction f.

a. Calculer pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x)$.
On sait que $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(f'(x)\right)' \\ &= \left((-x-1)e^{-x}\right)' \\ &= (-x-1)' \times e^{-x} + (-x-1) \times (e^{-x})' \\ &= -1 \times e^{-x} + (-x-1) \times (-e^{-x}) \\ &= e^{-x}(-1-(-x-1)) \\ &= e^{-x}x \end{aligned}$$

b. Peut-on affirmer que f est convexe sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$?
Une fonction deux fois dérivable est convexe si sa dérivée seconde est positive.
Pour $x \geq 0$, la fonction $x \longrightarrow xe^{-x}$ est positive : la fonction f y est donc convexe.