Évaluation 1 : correction

Exercice 1 *Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n*

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n}$$

1. a. *Calculer les termes u_1, u_2 et u_3. On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.*

On a :

$$u_1 = \frac{u_0}{1+u_0} = \frac{1}{2}$$
$$u_2 = \frac{u_1}{1+u_1} = \frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}$$
$$u_3 = \frac{u_2}{1+u_2} = \frac{\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{1}{4}$$

b. *Recopier le script python ci-dessous et compléter les lignes 3 et 6 pour que liste(k) prenne en paramètre un entier naturel k et renvoie la liste des premières valeurs de la suite (u_n) de u_0 à u_k.*

```
1. def liste(k) :
2.     L = []
3.     u = 1
4.     for i in range(0, k+1) :
5.         L.append(u)
6.         u = u/(1+u)
7.     return(L)
```

2. *Montrer que, pour tout entier naturel n, u_n est strictement positif.*

On va raisonner par récurrence.

Initialisation :

On sait que $u_0 = 1 > 0$: l'initialisation est établie.

Hérédité :

On suppose que la propriété est vraie pour un rang $n \geq 0$:

$$u_n > 0 \text{ hypothèse de récurrence}$$

On va regarder si la propriété est vraie au rang suivant.

On a :

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n}$$

Or, d'après l'hypothèse de récurrence, $u_n > 0$ et donc $u_n + 1 > 0$ et comme le quotient de deux nombres positifs est positif, alors on en déduit que u_{n+1} est positif.

L'hérédité est donc établie.

On vient donc de montrer, par récurrence, que $\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n > 0$.

3. *Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).*

Pour déterminer les variations de la suite (u_n), on va étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{1+u_n} - u_n = \frac{u_n}{1+u_n} - \frac{u_n(1+u_n)}{1+u_n} = \frac{u_n - u_n - u_n^2}{1+u_n} = \frac{-u_n^2}{1+u_n}$$

Comme on sait que $u_n > 0$ pour tout entier naturel n, alors $1 + u_n > 0$ et comme $-u_n^2 < 0$ pour tout entier naturel n, on en déduit que $u_{n+1} - u_n < 0\ \ \forall n \in \mathbb{N}$: la suite est alors décroissante.

4. *En déduire que la suite (u_n) converge.*

La suite est décroissante et minorée par 0 donc, d'après le théorème de convergence monotone, la suite (u_n) converge vers un nombre réel l.

5. *Déterminer la valeur de sa limite.*
En utilisant l'unicité de la limite et en faisant tendre n vers $+\infty$ *dans l'égalité* $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n}$*, on en déduit que :*

$$l = \frac{l}{1+l} \Leftrightarrow l(1+l) = l \Leftrightarrow l^2 + l = l \Leftrightarrow l^2 = 0 \Leftrightarrow l = 0$$

6. a. *Conjecturer une expression de* u_n *en fonction de* n.
D'après les valeurs obtenues pour les premiers termes de la suite, on peut conjecturer que :

$$u_n = \frac{1}{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

b. *Démontrer par récurrence la conjecture précédente.*
Initialisation :
On a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{0+1} &= 1 \\ u_0 &= 1 \\ \text{donc } u_0 &= \frac{1}{0+1} \end{aligned}$$

L'initialisation est établie.
Hérédité :
On suppose que la propriété est vraie pour un rang $n \geq 0$*, c'est à dire :*

$$u_n = \frac{1}{n+1} \quad \text{hypothèse de récurrence}$$

Montrons que la propriété est vraie au rang $n+1$ *:*

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{u_n}{1+u_n} \\ &= \frac{\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}} \text{ en utilisant l'hypothèse de récurrence} \\ &= \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{n+1}{n+1}+\frac{1}{n+1}} \\ &= \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{n+2}{n+1}} \\ &= \frac{1}{n+2} \end{aligned}$$

L'hérédité est établie.
On vient donc de montrer, par récurrence, que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{n+1}$.

Exercice 2 *On considère la suite* (u_n) *définie par* $u_0 = 10000$ *et pour tout entier naturel n :*

$$u_{n+1} = 0,95u_n + 200.$$

1. *Calculer* u_1 *et vérifier que* $u_2 = 9415$.
On a :

$$\begin{aligned} u_1 &= 0.95u_0 + 200 = 0.95 \times 10000 + 200 = 9500 + 200 = 9700 \\ u_2 &= 0.95u_1 + 200 = 0.95 \times +200 = 9215 + 200 = 9415 \end{aligned}$$

2. ***a.*** *Démontrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n :*

$$u_n > 4000.$$

Initialisation :
On a $u_0 = 10000 > 4000$ *: l'initialisation est donc établie.*
Hérédité :
On suppose que la propriété est vraie pour un certain rang $n \geq 0$*, c'est à dire :*

$$u_n > 4000 \quad \textit{hypothèse de récurrence}$$

On va regarder si cette propriété reste vraie au rang $n+1$ *:*

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 0.95u_n + 200 \\ &> 0.95 \times 4000 + 200 \quad \textit{hypothèse de récurrence} \\ &> 3800 + 200 \\ &> 4000 \end{aligned}$$

L'hérédité est donc établie.
On vient donc de montrer, par récurrence, que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n > 4000$.

b. *On admet que la suite* (u_n) *est décroissante. Justifier qu'elle converge.*
La suite est décroissante et minorée par 4000 *; d'après le théorème de convergence monotone, on peut en déduire que la suite converge vers un nombre réel.*

3. *Pour tout entier naturel n, on considère la suite* (v_n) *définie par :* $v_n = u_n - 4000$.

a. *Calculer* v_0.
On a $v_0 = u_0 - 4000 = 10000 - 4000 = 6000$.

b. *Démontrer que la suite* (v_n) *est géométrique de raison égale à* $0,95$.
Soit n un entier naturel :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 4000 \\ &= 0,95u_n + 200 - 4000 \\ &= 0.95u_n - 3800 \\ &= 0.95u_n - 0.95 \times 4000 \\ &= 0.95(u_n - 4000) \\ &= 0.95v_n \end{aligned}$$

La suite (v_n) *est donc géométrique de raison* 0.95 *et de premier terme* 6000.

c. *En déduire que pour tout entier naturel n :*

$$u_n = 4000 + 6000 \times 0,95^n.$$

Comme la suite (v_n) *est géométrique de raison* 0.95 *et de premier terme* 6000*, alors pour tout entier naturel n :*

$$v_n = 6000 \times 0.95^n$$

Or $v_n = u_n - 4000 \Leftrightarrow u_n = v_n + 4000$*, donc pour tout entier naturel n :*

$$u_n = 4000 + 6000 \times 0.95^n$$

d. *Quelle est la limite de la suite* (u_n) *? Justifier la réponse.*
Comme $0.95 < 1$*, la suite géométrique* (0.95^n) *de raison* 0.95 *tend vers* 0.
Par somme de limites, on en déduit que la limite de la suite u_n *est* 4000.

4. *En 2020, une espèce animale comptait 10000 individus. L'évolution observée les années précédentes conduit à estimer qu'à partir de l'année 2021, cette population baissera de 5 % chaque début d'année.*

Pour ralentir cette baisse, il a été décidé de réintroduire 200 *individus à la fin de chaque année, à partir de 2021.*

Une responsable d'une association soutenant cette stratégie affirme que : « l'espèce ne devrait pas s'éteindre, mais malheureusement, nous n'empêcherons pas une disparition de plus de la moitié de la population ».

Que pensez-vous de cette affirmation ? Justifier la réponse.

D'après les données de l'énoncé, on peut modéliser la population animale à l'année $2021+n$ *par suite* u_n.

En utilisant la limite de cette suite, on en déduit qu'à partir d'un nombre d'années suffisamment important, la population animale sera autour de 4000 *individus : cette espèce ne va donc pas s'éteindre mais perdre* 6000 *membres, ce qui est plus de la moitié de la population initiale.*