Géométrie repérée : cours

1 Vecteurs, généralités

Définition : translation

Soit P et P' deux point distincts du plan.
On appelle **translation** une transformation qui envoie P sur P' en faisant glisser P vers P' suivant une droite.
Cette transformation se caractérise par trois critères :

- la direction : c'est la droite suivant laquelle on se déplace, la droite (PP').
- le sens : on part de P pour directement aller vers P'
- la longueur du déplacement : la longueur du segment $[PP']$.

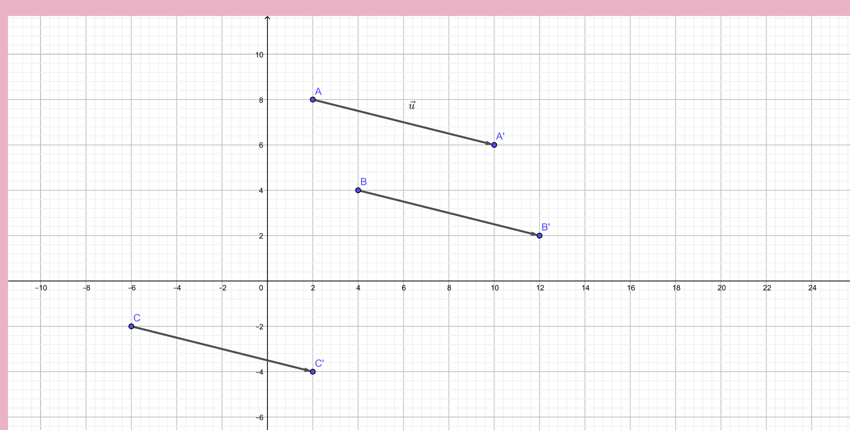
Définition : vecteur

Soit t la translation qui envoie A sur A', B sur B' et C sur C'.
Les couples $(A;A')$, $(B;B')$ et $(C;C')$ définissent un vecteur $\vec{u}$ caractérisé par :

- une direction : celle de la droite (AA') qui est également celle de (BB') et (CC')
- un sens : on part de A pour directement aller vers A', ce qui est la même chose que d'aller de B vers B' ou C vers C'
- une norme : la longueur $AA' = BB' = CC'$

Ce vecteur $\vec{u}$ a trois **représentants**, des vecteurs qui ont les mêmes caractéristiques que $\vec{u}$: $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$ et $\overrightarrow{CC'}$.
On peut écrire :

$$\vec{u} = \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'}$$



Définition : égalité de deux vecteurs

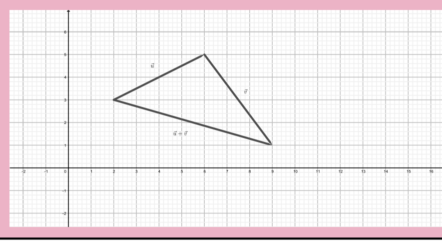
Deux vecteurs sont égaux si et seulement si ils ont même direction, même norme, même longueur.

Propriété : égalité de deux vecteurs

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow$ ABDC est un parallélogramme

Somme de deux vecteurs

La somme de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur associé à l'enchainement des translations de vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}$



Relation de Chasles

Pour tous points A, B et C, on a :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

Règle du parallélogramme

Pour tous points A, B, C et D, on a :

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} \Leftrightarrow$ ABDC parallélogramme

Vecteur nul

On appelle **vecteur nul** , noté $\vec{0}$, tout vecteur dont son origine et son extrémité sont confondues. La translation associée laisse tous les point invariants.
On appelle **vecteurs opposés** tous les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $\vec{u} + \vec{v} = \vec{0}$.
On peut écrire $\vec{u} = -\vec{v}$ et $\vec{v} = -\vec{u}$

Vecteurs opposés

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont des vecteurs opposés

Multiplication d'un vecteur par un scalaire

Soit k un réel non nul et $\vec{u}$ un vecteur non nul. alors le vecteur $k\vec{u}$ est un vecteur caractérisé par :

- ✏ sa direction qui est la même que celle de $\vec{u}$.
- ✏ son sens qui est le sens que celui de $\vec{u}$ si $k > 0$, opposé sinon.
- ✏ sa norme qui vaut $k||\vec{u}||$

Conditions de colinéarité

Soient A, B, C et D quatre points du plan.

$$A, B, C \text{ alignés } \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ colinéaires}$$

$$(AB)//(CD) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{CD} \text{ colinéaires}$$

2 Vecteurs, expression analytique

Système de coordonnées

Quand le plan est muni d'une base $(\vec{i}, \vec{j})$, on va pouvoir exprimer tous les vecteurs du plan en fonction des vecteurs de la base.
Autrement dit, pour tout vecteur $\vec{u}$ du plan, il existe un unique couple (x, y) de réels appelé coordonnées de $\vec{u}$ tel que :

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

L'origine du repère n'a pas d'importance dans l'expression d'un vecteur par rapport aux vecteurs de la base.

Système de coordonnées et opérations

Le plan est muni d'une base $(\vec{i}, \vec{j})$.
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs et k un nombre réel :

$$\vec{u}(x; y) = \vec{v}(x', y') \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$$

$\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $(x + x'; y + y')$

$k\vec{u}$ a pour coordonnées $(kx; ky)$

Norme dans un repère orthonormé

Le plan est muni d'un repère **orthonormé** : les vecteurs de la base sont orthogonaux et de norme 1.
Alors la norme du vecteur $\vec{u}(x; y)$ est $||\vec{u}|| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Coordonnées d'un point

Le plan etant muni d'un repère $(O, \vec{i}; \vec{j})$, on appelle cordonnées du point M, les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$.
Si le vecteur $\overrightarrow{OM}$ s'écrit $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$, x sera l'abscisse de M et y sera l'ordonnée de M.
Les coordonnées du point M dépend de l'origine O.

Coordonnées du milieu d'un segment

Dans un plan muni d'un repère, soit $A(x_A; yA)$, $B(x_B; y_B)$ et $I(x_I; y_I)$ le milieu de $[AB]$.
On a :

$$x_I = \frac{x_A + x_B}{2} \qquad y_I = \frac{y_A + y_B}{2}$$

Coordonnées d'un vecteur

Dans un plan muni d'un repère, soit $A(x_A; yA)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points du plan.
Alors les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $(x_B - x_A; y_B - y_A)$

Longueur d'un vecteur dans un repère orthonormée

Dans un plan muni d'un repère orthonormée, soit $A(x_A; yA)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points du plan.
Alors la distance AB est donnée par $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

Colinéarité de deux vecteurs

Soit $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$ deux vecteurs du plan :

$$\vec{u}(x; y) \text{ et } \vec{v}(x'; y') \text{ deux vecteurs du plan } \Leftrightarrow xy' - x'y = 0$$

Théorème

Dans un plan muni d'un repère :

- ✏ toute droite du plan admet une équation de la forme $ax + by = c = 0$ avec $(a; b) \neq (0; 0)$: on l'appelle équation cartésienne.
- ✏ l'ensemble des points M du plan dont les coordonnées vérifient $ax + by = c = 0$ avec $(a; b) \neq (0; 0)$ est une droite.

Vecteur directeur d'un droite

Soit $\mathscr{D}$ une droite et A, B deux points de cette droite. On appelle vecteur directeur de $\mathscr{D}$ tout vecteur $\vec{u}$ colinéaire à $\overrightarrow{AB}$.
La direction d'un vecteur directeur d'une droite est parallèle à cette droite.

Vecteur directeur d'une droite à partir de son équation cartésienne

Dans un plan muni d'un repère, toute droite admettant une équation de la forme $ax + by + c = 0$ admet $\vec{u}(-b; a)$ comme vecteur directeur.

Vecteur directeur d'une droite à partir de son équation réduite

Dans un plan muni d'un repère, toute droite admettant une équation de la forme $y = mx + p$ admet $\vec{u}(1; m)$ comme vecteur directeur.

Condition de parallélisme

Deux droites sont parallèlessi et seulement si leurs vecteurs directeurs respectifs sont colinéaires.