Équations différentielles : cours

1 Equations différentielles du premier ordre : exemple sans condition initiale

Exemple 1 *On considère le bac de stockage cylindrique représenté ci-dessous.*
À l'instant t, en seconde (s), on note $h(t)$ la hauteur d'eau, en mètre (m), dans le bac, $Q_e(t)$ le débit d'entrée, en $m^3 s^{-1}$, et $Q_v(t)$ le débit de vidange, en $m^3 s^{-1}$.

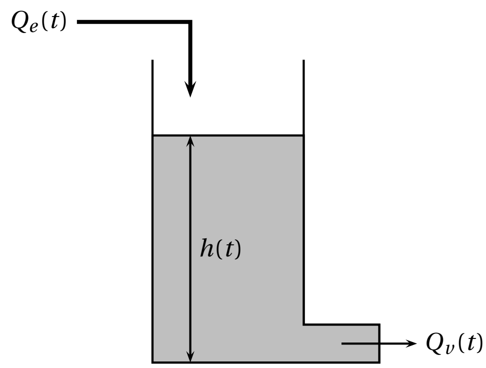
À l'instant $y = 0$, le bac est vide, donc :

$$h(0) = 0.$$

La conservation de la matière et des approximations permettent d'écrire, pour tout $t \geqslant 0$:

$$Q_e(t) = 8h'(t) + 2h(t)$$

où S est l'aire de la base du bac, exprimée en m^2, et h' la fonction dérivée de h.



On a donc : $8h'(t) + 2h(t) = Q_e(t)$.

On veut que la hauteur d'eau $h(t)$ atteigne 10 *cm, soit* 0,1 *m.*
Pour cela, on agit sur le débit d'entrée $Q_e(t)$.

On va supposer que pour $t \geqslant 0$: $Q_e(t) = 0,2$.
La fonction h est donc solution sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ de l'équation différentielle :

$$8y' + 2y = 0,2 \qquad (E)$$

1. **a.** *Donner les solutions sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ de l'équation différentielle :* $8y' + 2y = 0 \quad (E_0)$.
   b. *Déterminer une solution particulière constante $y_0 : t \mapsto c$, avec c constante réelle. de l'équation différentielle (E).*
   c. *Donner les solutions sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ de l'équation différentielle (E).*
2. *L'une des quatre expressions ci-dessous est celle de $h(t)$, pour tout réel $t \geqslant 0$. Laquelle ? Justifier la réponse.*

A $h(t) = -0,1e^{-0,25t} + 0,2$	***C*** $h(t) = -0,1e^{-4t} + 0,1$
B $h(t) = -0,1e^{-0,25t} + 0,1$	***D*** $h(t) = -0,2e^{-0,25t} + 0,1$

3. **a.** *Quelle est la limite de $h(t)$ quand t tend vers $+\infty$? Justifier brièvement.*
   b. *Estimer au bout de combien de temps $h(t)$ atteint 95 % de 0,1 m. Indiquer la démarche suivie.*

2 Résumé et méthode

2.1 Équations homogènes

$$(E_0)\ :\ y'(t) + ay(t) = 0$$

Les solutions sont de la forme $f_0(t) = Ke^{-at}$ avec K un nombre réel dont la valeur dépend des conditions initiales.
Si jamais l'équation est de la forme :

$$(E_0)\ :\ cy'(t) + dy(t) = 0 \quad \text{avec } c \neq 0$$

on se ramène au cas précédent en divisant par c :

$$(E_0)\ :\ y'(t) + \frac{d}{c}y(t) = 0$$

2.2 Équations avec second membre

$$(E)\ :\ y'(t) + ay(t) = s(t)$$

1. <u>Premier cas :</u> $s(t)$ est une constante α et une solution particulière est $g(t) = \frac{\alpha}{a}$.
   Soit on donne la réponse directement, soit il peut arriver qu'on nous demande de trouver cette solution par le biais d'une démonstration.
   Dans ce cas, on procède de la sorte :
   - ✏ On appelle $g(t) = C$ la solution constante.
   - ✏ $g'(t) = 0$.
   - ✏ $g'(t) + ag(t) = \alpha \Leftrightarrow 0 + a \times C = \alpha \Leftrightarrow C = \frac{\alpha}{a}$
2. <u>Deuxième cas :</u> $s(t)$ n'est pas une constante et on vérifie que $g(t)$ donné dans l'énoncé est une solution particulière.
   On calcule $g'(t)$ puis $g'(t) + ag(t)$ et on doit trouver $s(t)$.

Les solutions de (E) sont de la forme :

$$f(t) = f_0(t) + h(t)$$

où $f_0(t)$ est la solution de (E_0).
Si jamais l'équation est de la forme :

$$(E_0)\ :\ cy'(t) + dy(t) = s(t) \quad \text{avec } c \neq 0$$

on se ramène au cas précedent en divisant par c :

$$(E_0)\ :\ y'(t) + \frac{d}{c}y(t) = \frac{s(t)}{c}$$

3 Équation complète avec condition initiale

On donne une information supplémentaire sur la fonction f solution de l'équation différentielle (E) : $f(0) = b$.
On demande alors de déterminer <u>la</u> solution de (E) : cela revient à déterminer la

valeur de K.
Pour le faire, on doit résoudre cette équation du premier ordre, d'inconnue K :

$$f(0) = b \Leftrightarrow Ke^{-a\times 0} + h(0) = b \Leftrightarrow K = b - h(0)$$

La suite de la résolution dépend de la valeur de $h(0)$.

Exemple 2 *On considère l'équation différentielle* $(E)\ :\ y' - 4y = 2e^{3t}$ *où l'inconnue* y *est une fonction de la variable réelle* t *et* y' *sa dérivée.*

1. *Résoudre l'équation différentielle* $(E_0)\ :\ y' - 4y = 0$.
   $\longrightarrow$ *Il n'y a pas à transformer l'équation puisqu'il y a* 1 *devant* y'.
   Devant y*, il y a* -4 *donc les solutions de* (E_0) *sont de la forme* Ke^{+4t} *avec* $K \in \mathbb{R}$.
2. *Déterminer une solution particulière* h *de* (E) *sous la forme* $h(t) = ae^{3t}$ *où* a *est une constante réelle à déterminer.*
   $\longrightarrow$ *La fonction* h *est une solution de* (E)*, donc on l'égalité suivante :*

$$\begin{aligned} & h'(t) - 4h(t) = 2e^{3t} \\ \Leftrightarrow & (ae^{3t})' - 4ae^{3t} = 2e^{3t} \\ \Leftrightarrow & a(e^{3t})' - 4ae^{3t} = 2e^{3t} \\ \Leftrightarrow & a \times 3e^{3t} - 4ae^{3t} = 2e^{3t} \\ \Leftrightarrow & -ae^{3t} = 2e^{3t} \\ \Leftrightarrow & a = \frac{2e^{3t}}{-e^{3t}} = -2 \end{aligned}$$

   Finalement, $h(t) = -2e^{3t}$.
3. *En déduire les solutions de* (E).
   $\longrightarrow$ *Les solutions de* (E) *sont donc de la forme :* $f(t) = Ke^{+4t} - 2e^{3t}$.
4. *Déterminer la solution* f *de* (E) *vérifiant la condition initiale* $f(0) = 0$.
   $\longrightarrow$ *On remplace* t *par* 0 *dans l'expression de* f *précédemment exprimée :* $f(0) = K - 2$.
   Cette expression doit être égale à 0 *donc* $K = 2$ *et par conséquent* $f(t) = 2e^{4t} - 2e^{3t}$.