Continuité des fonctions d'une variable réelle : correction de l'activité

On se propose de modéliser par une fonction l'offre promotionnelle faite par un magasin de vêtement :

- si un article coûte 50 euros ou moins, il est soldé de son prix initial.
- si un article coûte strictement plus de 50 euros, il est soldé à 55%.

1. **a.** A combien sera soldé un article à 35% ?
   L'article sera soldé à 35%.

   b. Déterminer le prix d'un article qui coûtait 31 euros avant réduction.
   Le prix après réduction s'obtient par l'opération suivante :

   $$0.69 \times 31 = 21.39 \text{ euros}$$

   Le 0.69 vient de $1 - 0.31$.

   c. Déterminer le prix d'un article qui coûtait 22 euros avant réduction.
   Le prix après réduction s'obtient par l'opération suivante :

   $$0.78 \times 22 = 17.16 \text{ euros}$$

   d. Retrouver le prix de départ d'un article coûtant 24 euros après réduction.
   Le prix x avant réduction s'obtient par l'opération suivante :

   $$(1 - 0.01x) \times x = 24 \Leftrightarrow -0.01x^2 + x - 24 = 0$$

   On doit maintenant calculer le discriminant Δ :

   $$\Delta = 1^2 - 4 \times 0.01 \times 24 = 0.04 > 0$$

   L'équation du second degré $-0.01x^2 + x - 24 = 0$ adment donc deux solutions réelles distinctes :

   $$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 + 0.2}{-0.02} = -40$$
   $$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 - 0.2}{-0.02} = 60$$

   Comme la valeur que l'on cherche doit être positive alors le prix de départ était de 60 euros.

   e. A votre avis, pour quoi la méthode de réduction change à partir d'un certain montant ?
   Arrivé à de trop grands prix, la réduction serait trop importante pour le magasin : un article coûtant strictement plus de 100, avec une telle réduction, contraindrait l'établissement à donner de l'argent au client.

2. **a.** Une réduction de $x\%$ revient à multiplier par quelle valeur ?
Une réduction de $x\%$ revient à multiplier par $1-\frac{1}{100}x = 1-0.01x$.

b. Une réduction de 55% revient à multiplier par quelle valeur ?
Un réduction de 55% revient à multiplier par 0.45.

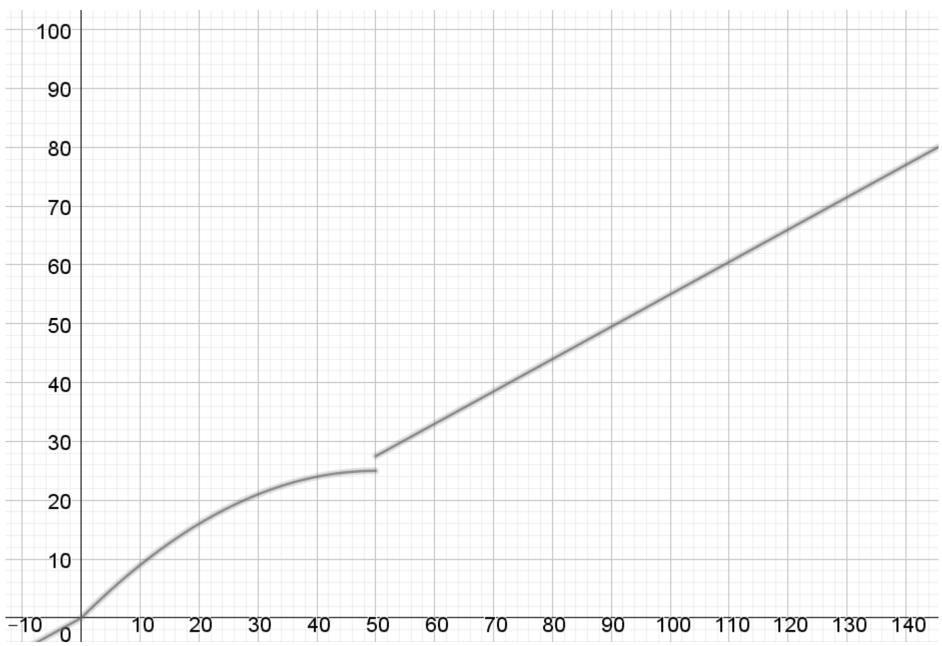
c. Quelle est l'opération qui doit être faite pour réduire de $x\%$ un prix de $x\%$.
Pour réduire x de $x\%$, on multiplie x par $1-0.01x$:

$$x(1-0.01x) = x - \frac{x^2}{100}$$

d. On appelle f la fonction qui modélise l'offre promotionnelle. Compléter la définition par morceaux de la fonction f :

$$f(x) = \begin{cases} x - \frac{x^2}{100} \text{ si } 0 \leq x \leq 50 \\ 0.5x \text{ si } x > 50 \end{cases}$$

e. La représentation grahique de la fonction f est la suivante :



Que pouvons nous remarquer en $x = 50$?
On remarque qu'en $x = 50$, il y a un "saut" au niveau de la courbe, c'est ce qu'on appelle une discontinuité.
On dira que la courbe est continue pour tout $x \geq 0$ sauf en $x = 50$: partout, sauf en $x = 50$, à la fois la limite à gauche et la limite à droite de $f(x)$ sont égaux à $f(x)$.

3. D'après le graphique, combien y a-t-il de solutions à l'équation $f(x) = 18$?
D'après le graphique, on constate que la droite $y = 18$ et la courbe ont un seul point d'intersection ; par conséquent, l'équation $f(x) = 18$ a une unique solution α.

4. A l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement de la ou les solutions à cette équation.
En utilisant plusieurs fois un tableau de valeurs, d'abord avec un pas de 1

puis finalement un pas de 0.01, on trouve que

$$\begin{aligned}
f(23) &= 17.71\\
f(24) &= 18.24\\
f(23.5) &= 17.98\\
f(23.6) &= 18.0304\\
f(23.54) &= 17.99\\
f(23.55) &= 18.00
\end{aligned}$$

Finalement, $23.55 < \alpha < 23.55$.

5. Retrouver le résultat par le calcul.
D'après la courbe, on constaste que $x < 50$, donc on va utiliser la formule donnée pour $x < 50$ et résoudre l'équation :

$$x - \frac{x^2}{100} = 18 \Leftrightarrow -x^2 + 100x - 1800 = 0$$

On doit calculer le discriminant Δ :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 100^2 - 4 \times 1800 = 2800 > 0$$

Il y a donc deux solutions réelles distinctes à l'équation $-x^2+100x-1800 = 0$:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-100+\sqrt{2800}}{-2} \approx 23.542\\
x_2 &= \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-100-\sqrt{2800}}{-2} \approx 76.457
\end{aligned}$$

La solution x_2 n'est pas possible dans le sens où on sait que $x < 50$, donc la solution à l'équation $f(x) = 18$ est ≈ 23.542.