∽ Transformation de Laplace

1 Fonctions causales et représentations graphiques

Exemple 1 *Représenter graphiquement les fonctions définies de la façon suivante :*

$$\begin{cases} 0 & si\ t < 0 \\ 1 & si\ t \geq 0 \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} 0 & si\ t < a \\ 1 & si\ t \geq a \end{cases} \tag{2}$$

On dit que ces fonctions sont définies par morceaux sur des intervalles.

Exemple 2 ***1.*** *Représenter les fonctions suivantes et donner leur définition par morceaux :*

$$f_1(t) = \mathscr{U}(t) - \mathscr{U}(t-1)$$
$$f_2(t) = 3\mathscr{U}(t) - 4\mathscr{U}(t-2)$$
$$f_3(t) = \mathscr{U}(t) - 2\mathscr{U}(t-1) + \mathscr{U}(t-2)$$
$$f_4(t) = \mathscr{U}(t-1) - 2\mathscr{U}(t-2) + \mathscr{U}(t-3)$$
$$f_5(t) = t\mathscr{U}(t)$$
$$f_6(t) = (t-1)\mathscr{U}(t-1)$$
$$f_7(t) = t\mathscr{U}(t-1)$$
$$f_8(t) = (t-1)\mathscr{U}(t)$$

2. *Que dire des fonctions $f_3(t)$ et $f_4(t)$ ainsi que des fonctions $f_5(t)$ et $f_6(t)$?*

Exemple 3 *Tracer la représentation graphique des fonctions suivantes et donner leur expression en fonction de $\mathscr{U}(t)$:*

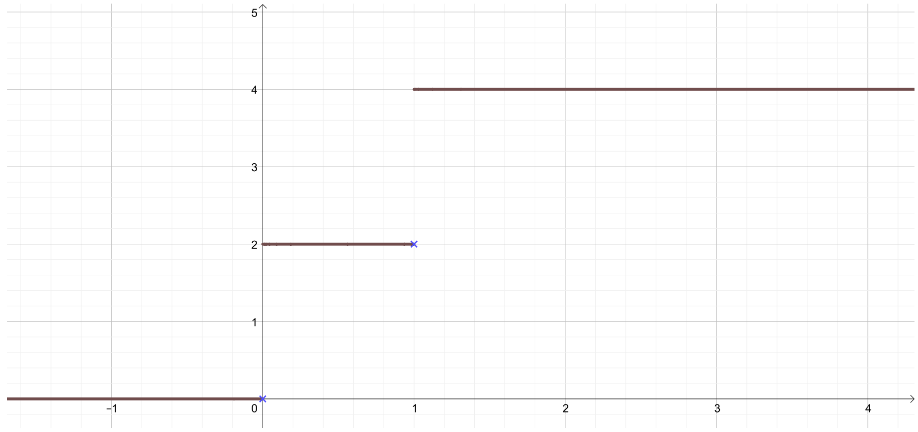
$$f(t) = \begin{cases} 0 & si\ t < 0 \\ 1 & si\ 0 \leq t < 1 \\ 2 & si\ t \geq 1 \end{cases}$$

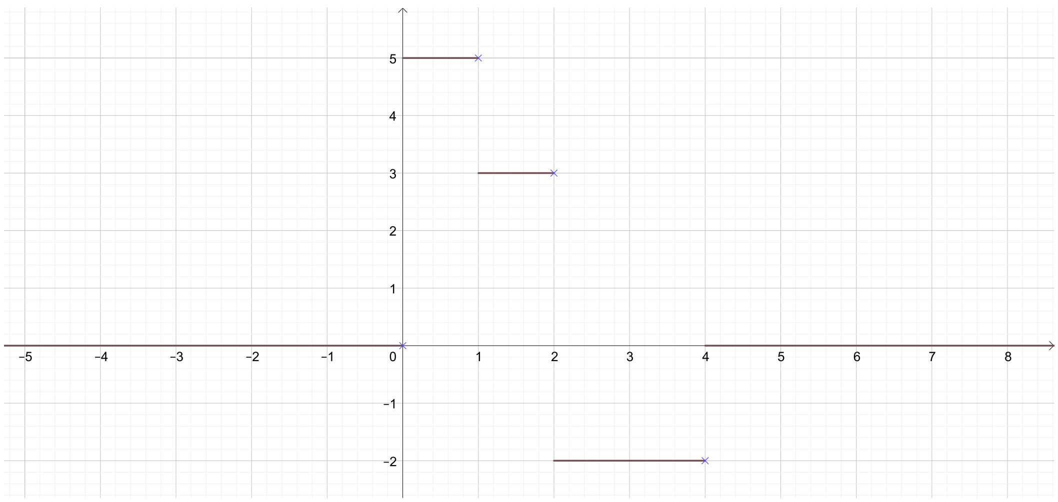
$$h(t) = \begin{cases} 0 & si\ t < 0 \\ 1 & si\ 0 \leq t < 1 \\ -1 & si\ 1 \leq t < 2 \\ 0 & si\ t \geq 2 \end{cases}$$

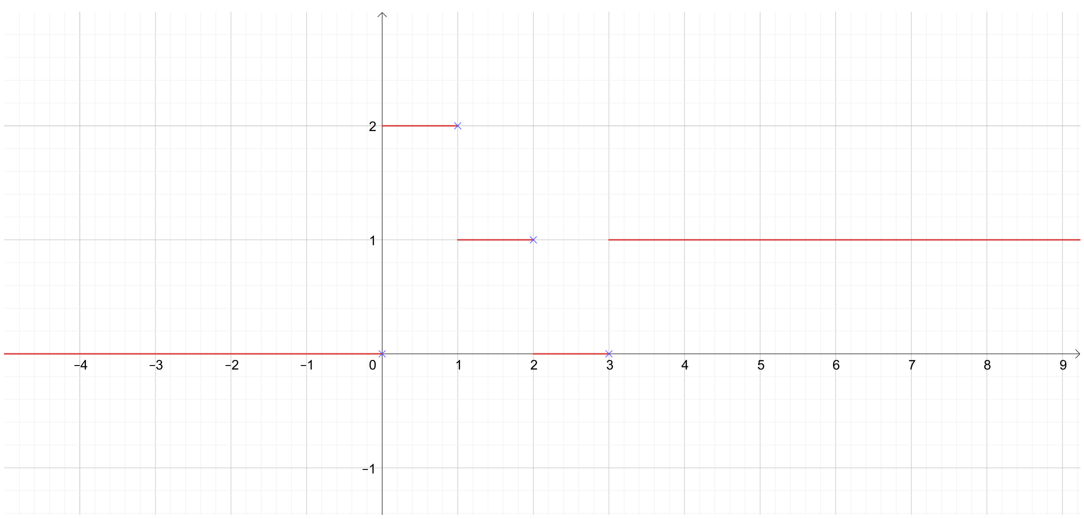
$$g(t) = \begin{cases} 0 & si\ t < 0 \\ 4 & si\ 0 \leq t < 2 \\ 0 & si\ t \geq 2 \end{cases}$$

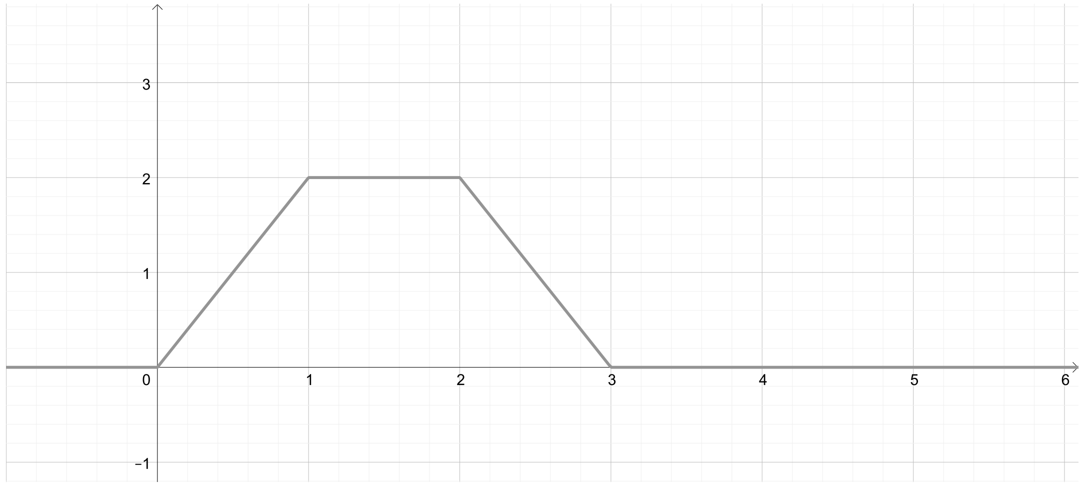
$$i(t) = \begin{cases} 0 & si\ t < 0 \\ t & si\ 0 \leq t < 2 \\ 1 & si\ 2 \leq t < 3 \\ 0 & si\ t \geq 3 \end{cases}$$

Exemple 4 *Exprimer en fonction de $\mathscr{U}$ les fonctions représentées plus bas, le rond ou la croix signifie une discontinuité dans la courbe, qui doit se traduire par une inégalité stricte.*
Donner également leur expression par morceaux :


5
4
3
2
1
−1
0
1
2
3
4


5
4
3
2
1
−5
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
−1
−2


2
1
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
−1



2 Transformées de Laplace

Exemple 5 *On considère les deux intégrales suivantes :*

$$\int_a^x \frac{1}{t} dt$$
$$\int_a^x \frac{1}{t^2} dt$$

pour $a > 0$ *et* $x \geq a$.

1. *Calculer ces deux intégrales en fonctions de* x.
2. *Que dire de la limite des deux expressions précédentes en fonction de* x *?*

Exemple 6 *On définit la transformée de Laplace d'une fonction* f *de la façon suivante :*

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt$$

avec $p > 0$.

1. *Pour que F existe, quelle doit être la nature de l'intégrale* $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt$ *?*
2. *Quelle est la transformée de Laplace de* $\mathscr{U}(t)$ *?*

Exemple 7 *En se servant du formulaire du résumé, déterminer la transformée des fonctions suivantes :*

$$-2\mathscr{U}(t)$$
$$5\mathscr{U}(t-3)$$
$$t^3\mathscr{U}(t)$$
$$\cos(4t)\mathscr{U}(t)$$
$$\sin(-2t)\mathscr{U}(t)$$
$$(t-4)^3\mathscr{U}(t-4)$$
$$5(t-3)\mathscr{U}(t-3)$$
$$\sin(3t)e^{-2t}\mathscr{U}(t)$$
$$\cos(3t)e^{-4t}\mathscr{U}(t)$$
$$(t-3)e^{-2t}\mathscr{U}(t-3)$$
$$(t-3)e^{-2t}\mathscr{U}(t)$$

3 Détermination de l'original d'une transformée

Exemple 8 (Rappels) *Mettre les sommes de fractions suivantes au même dénominateur :*

$$A = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}$$
$$B = \frac{1}{2(p+3)} - \frac{1}{2p}$$
$$C = \frac{1}{3} \times \frac{e^{-2p}}{p+4} - \frac{1}{3} \times \frac{e^{-2p}}{p+7}$$
$$D = \frac{1}{3(p^2+1)} - \frac{1}{3(p^2+4)}$$
$$E = \frac{1}{p^2+9} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p}$$

Exemple 9 *Déterminer les fonctions causales dont les transformées de Laplace sont les fonctions précédentes*

Exemple 10 (Rappels) *Trouver dans les deux cas suivants les réels qui vérifient :*

$$A = \frac{1}{p^2(p^2+1)} = \frac{a}{p^2} + \frac{b}{p} + \frac{c}{p^2+1}$$
$$B = \frac{1}{(p+1)(p+2)} = \frac{a}{p+1} + \frac{b}{p+2}$$

Exemple 11 *Déterminer l'original de chacune des fonctions précédentes.*

4 Résumé

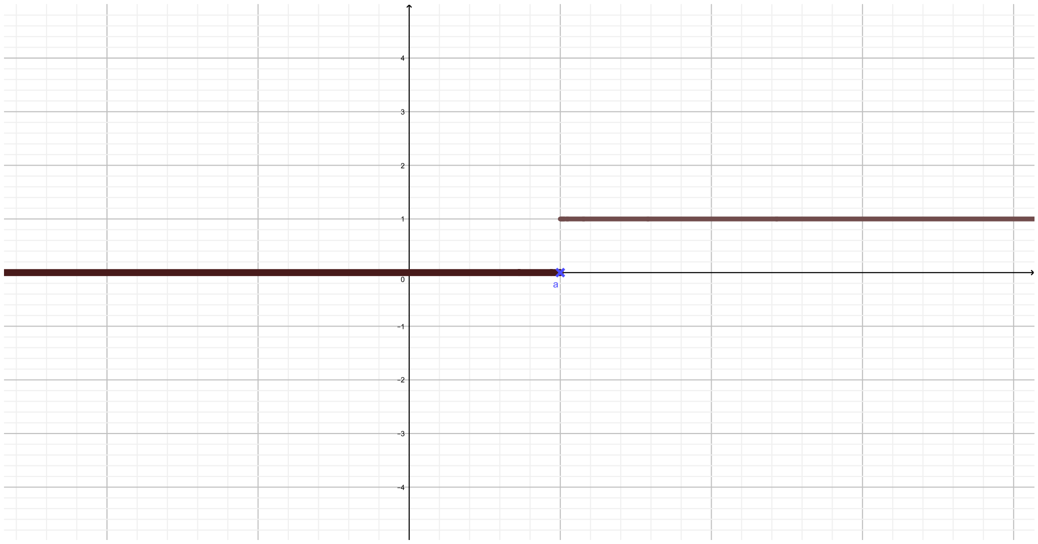
4.1 Fonctions causales

Définition 1 *Soit $a \geq 0$.*
La fonction $\mathscr{U}(t-a)$ est définie par morceaux de la façon suivante :

$$\mathscr{U}(t-a) = \begin{cases} 0 & si\ t < a \\ 1 & si\ t \geq a \end{cases}$$

- ✏ *Pour $a = 0$, cette fonction est appelée **fonction échelon unité***
- ✏ *Pour $a \neq 0$, cette fonction est un retard de a de la fonction échelon unité.*

La représentation graphique de ces fonctions est à connaître :



La croix ou le rond signifie une discontinuité dans la courbe, qui doit se traduire par une inégalité stricte.
La croix ou le rond sur le graphique signifie que la valeur de la fonction $\mathscr{U}(t-a)$ en $t=a$ n'est pas 0 mais 1.
La fonction est continue partout sauf en $t=a$: la limite à gauche en $t=a$ est 0 tandis que la limite à droite en $t=a$ est 1.

Définition 2 *Une fonction causale est une fonction qui vaut 0 pour $t<0$.*
On peut obtenir une fonction causale en multipliant une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par la fonction échelon unité.

4.2 Transformées de Laplace

Exemple 12 *Soit $I(x)=\int_a^x f(t)dt$ avec f une fonction continue sur $[a;+\infty[$ et $x \in [a;+\infty[$.*

1. *Si l'expression $I(x)$ a une limite finie en $+\infty$, alors on dit que $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge et on a :*

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt = \lim_{x\to+\infty} = \int_a^x f(t)dt$$

2. *Sinon on dit qu'elle diverge.*

Définition 3 *Soit f une fonction causale. On appelle transformée de Laplace de f, la fonction F définie pour $p>0$ par :*

$$L[f](p)=F(p)=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$$

Formulaire

Fonction	**Formule**	**Transformée de Laplace** $F(p)$
échelon unité	$U(t)$	$\frac{1}{p}$
rampe	$tU(t)$	$\frac{1}{p^2}$
puissance	$t^nU(t)$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
exponentielle	$e^{-at}U(t)$	$\frac{1}{p+a}$
cosinus	$\cos(\omega t)U(t)$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$
sinus	$\sin(\omega t)U(t)$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
théorème du retard	$f(t-\tau)U(t-\tau)$	$e^{-p\tau}F(p)$
changement d'échelle	$f(\alpha)U(t)$	$\frac{1}{\alpha}F\left(\frac{p}{\alpha}\right)$
multiplication par e^{-at}	$f(t)e^{-at}U(t)$	$F(p+a)$
exponentielle	$e^{-at}U(t)$	$\frac{1}{p+a}$
dérivée première	$f'(t)U(t)$	$pF(p)-f(0^+)$
dérivée seconde	$f''(t)U(t)$	$p^2F(p)-pf(0^+)-f'(0^+)$
intégrale	$\int_0^t f(x)U(x)dx$	$\frac{1}{p}F(p)$
linéarité	$(\alpha f(t)+g(t))U(t)$	$\alpha F(p)+G(p)$

Exemple 13

• $3\mathscr{U}(t) \longrightarrow 3 \times \dfrac{1}{p} = \dfrac{3}{p}$

• $2\mathscr{U}(t-2) \longrightarrow 2 \times e^{-2p} \times \dfrac{1}{p} = \dfrac{2e^{-2p}}{p}$

$\longrightarrow$ *la présence de l'exponentielle s'explique par le fait qu'il y un retard de* $2(t-2)$

• $t^2\mathscr{U}(t) \longrightarrow \dfrac{2!}{p^3} = \dfrac{2}{p^3}$

• $\cos(3t)\mathscr{U}(t) \longrightarrow \dfrac{p}{p^2+3^2} = \dfrac{p}{p^2+9}$

• $\sin(3t)\mathscr{U}(t) \longrightarrow \dfrac{3}{p^2+3^2} = \dfrac{3}{p^2+9}$

$\longrightarrow$ *la différence entre le cosinus et le sinus se fait au numérateur avec un p pour le cosinus*

$\longrightarrow$ *tandis que le sinus va avoir au numérateur le coefficient qu'il y avait devant t dans le sinus*

• $e^{-2t}\mathscr{U}(t) \longrightarrow \dfrac{1}{p+2}$

$\longrightarrow$ $p+2$ *vient du -2 dans l'exponentielle de départ*

• $(t-2)^2\mathscr{U}(t-2) \longrightarrow e^{-2p} \times \dfrac{2!}{p^3} = \dfrac{2e^{-2p}}{p^3}$

$\longrightarrow$ *la présence de l'exponentielle s'explique par le fait qu'il y a un retard de* $2(t-2)$

• $\cos(2t)e^{-3t}\mathscr{U}(t) \longrightarrow \dfrac{p+2}{(p+2)^2+3^2} = \dfrac{p+2}{(p+2)^2+9}$

$\longrightarrow$ *on reprend l'expression trouvée précédemment et on remplace p par p+2*

• $(t-1)e^{-3(t-1)}\mathscr{U}(t-1) \longrightarrow e^{-p} \times \dfrac{1}{(p+3)^2} = \dfrac{e^{-p}}{(p+3)^2}$

$\longrightarrow$ *il y a à la fois un retard et un décalage par une exponentielle*

$\longrightarrow$ *on regarde ce que donnerait la transformation sans le retard*

$\longrightarrow$ *ensuite on multiplie par* e^{-p} *pour le retard de* 1

• $(t-1)e^{-3t}\mathscr{U}(t-1) \longrightarrow e^{-P} \times \dfrac{1}{(P)^2} = \dfrac{e^{-(p+3)}}{(p+3)^2}$ *avec* $P = p+3$

$\longrightarrow$ *ici le retard ne porte pas sur toute la fonction, donc on va regarder ce donnerait le retard tout seul*

$\longrightarrow$ *puis remplacer p par p+3*

• $y'(t)+2y(t)$ *avec* $y(0^+)=1 \longrightarrow pY(p)-y(0^+)+2Y(p)=(p+2)Y(p)$

$\longrightarrow$ *le terme* $pY(p)-y(0^+)$ *vient de* $y'(t)$ *et* $2Y(p)$ *vient de* $2y(t)$

• $y''(t)+y'(t)-y(t)$ *avec* $y'(0^+)=0$ *et* $y(0^+)=1$

$\longrightarrow p^2Y(p)-py(0^+)-y'(0^+)+pY(p)-y(0^+)-Y(p) = p^2Y(p)-p+pY(p)-1-Y(p) = (p^2+p-1)Y(p)-p-1$

$\longrightarrow$ *le terme* $p^2Y(p)-py(0^+)-y'(0^+)$ *vient de* $y''(t)$, *le terme* $pY(p)-y(0^+)$ *vient de* $y'(t)$ *et* $2Y(p)$ *vient de* $2y(t)$

Théorème 1 (théorème de la valeur initiale et de la valeur finale)

$$\lim_{p\to+\infty} pF(p) = \lim_{t\to0^+} f(t)$$
$$\lim_{p\to0^+} pF(p) = \lim_{t\to+\infty} f(t)$$

4.3 Détermination de l'original d'une transformée

Définition 4 *L'original d'une fonction* $F(p)$ *est une fonction causale* $f(t)$ *dont la transformée de Laplace est* $F(p)$.

Exemple 14

- $\dfrac{-4}{p} \longrightarrow -4\mathscr{U}(t)$
- $\dfrac{3e^{-4p}}{p} \longrightarrow 3\mathscr{U}(t-4)$

$\longrightarrow$ *il y a un retard de 4 qui vient de* $e^{\boxed{-4}p}$
- $\dfrac{2}{p^4} \longrightarrow \dfrac{2}{3!}t^3\mathscr{U}(t)$

$\longrightarrow$ *on est obligé de diviser par 3! car la transformée de* $t^3\mathscr{U}(t)$ *est* $\dfrac{3!}{p^4}$
- $\dfrac{2}{p^2+9} \longrightarrow \dfrac{2}{3}\times\sin(3t)\mathscr{U}(t)$

$\longrightarrow$ *on est obligé de diviser par 3 car la transformée de* $\sin(3t)\mathscr{U}(t)$ *est* $\dfrac{3}{p^2+3^2}$
- $\dfrac{2}{p+3} \longrightarrow 2e^{-3t}\mathscr{U}(t)$

$\longrightarrow$ *la présence de p+3 implique la présence de* e^{-3t} *dans l'original*
- $\dfrac{e^{-3p}}{(p+2)^3} \longrightarrow \dfrac{1}{3!}\times(t-3)^3e^{-2(t-3)}\mathscr{U}(t-3)$

$\longrightarrow$ *la présence de* e^{-3p} *sans p+2 implique un retard partout*

$\longrightarrow$ *de plus, la présence de p+2 implique la présence d'une exponentielle*
- $\dfrac{e^{-3(p+2)}}{(p+2)^3} \longrightarrow \dfrac{1}{3!}\times(t-3)^3e^{-2t}\mathscr{U}(t-3)$

$\longrightarrow$ *la présence de* $e^{-3(p+2)}$ *implique un retard partout sauf dans l'exponentielle*

$\longrightarrow$ *qui vient de la présence de* $e^{-3(p+2)}$

Exemple 15 *On va déterminer l'original de la fonction suivante :*

$$H(p) = \frac{1-0.8e^{-0.9p}}{(2+8p)p}$$

Déterminer l'original de cette fonction nécessite plusieurs étapes :

$$H(p) = \frac{1-0.8e^{-0.9p}}{(2+8p)p} = \frac{1}{(2+8p)p} - \frac{0.8e^{-0.9p}}{(2+8p)p}$$

Commençons par le terme de gauche. Souvent, l'énoncé nous conduira à montrer que :

$$\frac{1}{(2+8p)p} = \frac{a}{2+8p} + \frac{b}{p}$$

où les termes a et b seront donnés ou, plus rarement, à déterminer. La méthode la plus difficile étant cette dernière :

$$\frac{a}{2+8p} + \frac{b}{p} = \frac{a\times p}{(2+8p)p} + \frac{b(2+8p)}{(2+8p)p} = \frac{(a+8b)p+2b}{(2+8p)p} = \frac{1}{(2+8p)p}$$

Il reste alors à identifier les coefficients :

$$a+8b=0 \text{ car il n'y a pas de p dans } \frac{1}{(2+8p)p}$$

$$2b=1 \text{ car le terme sans p au numérateur de } \frac{1}{(2+8p)p} \text{ est } 1$$

Par conséquent, on en déduit que $b = 0.5$ *et* $a = -4$ *et finalement :*

$$\frac{1}{(2+8p)p} = \frac{0.5}{2+8p} - \frac{4}{p} = \frac{1}{16} \times \frac{1}{p+\frac{1}{4}} - 4 \times \frac{1}{p}$$

L'original de cette fonction est :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{16} \times e^{-\frac{1}{4}t}\mathscr{U}(t) \ pour \ \frac{1}{16} \times \frac{1}{p+\frac{1}{4}} \\ &4\mathscr{U}(t) \ pour \ -4\mathscr{U}(t) \end{aligned}$$

Pour le terme de droite, on va se servir ce qu'on vient de faire, la présence de $0.8e^{-0.9p}$ *implique un retard partout, donc l'original de cette fonction est :*

$$0.8\left(\frac{1}{16}e^{-\frac{1}{4}(t-0.9)}\mathscr{U}(t-0.9) - 4\mathscr{U}(t-0.9)\right)$$

Finalement, l'original de $H(p)$ *est :*

$$h(t) = \frac{1}{16} \times e^{-\frac{1}{4}t}\mathscr{U}(t) - 4\mathscr{U}(t) - 0.8\left(\frac{1}{16}e^{-\frac{1}{4}(t-0.9)}\mathscr{U}(t-0.9) - 4\mathscr{U}(t-0.9)\right)$$