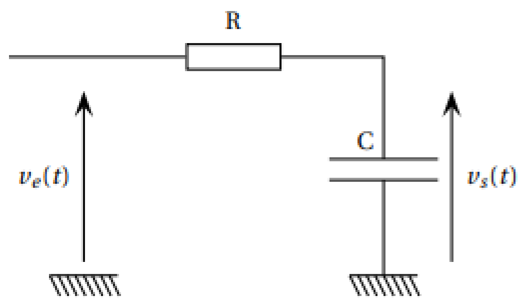
☙ Devoir maison de préparation au CCF : correction

Exercice 1 (Nombres complexes, fonctions logarithmes et études de fonctions)
Le filtre F_2 est représenté sur le schéma ci-dessous :



La fonction de tranfert H_2 du filtre F_2 vérifie :

$$H_2(p) = \frac{1}{1 + RCp}$$

Le gain de ce filtre s'exprime ainsi :

$$G_2(\omega) = 20 \log |H(i\omega)|$$

On suppose que :

$$R = 10^6 \Omega$$
$$C = 8\mu F$$

Un des objectifs est de déterminer ω_1 la pulsation de coupure du filtre à $-3db$, c'est à dire la pulsation ω pour laquelle le filtre a un gain de -3.

1. *Donner la forme agébrique de $H(i\omega)$ en fonction de ω.*

On a :

$$\begin{aligned}
H(i\omega) &= \frac{1}{1+RC\omega i} \\
&= \frac{1}{1+10^6\times 8\times 10^{-8}\omega i} \\
&= \frac{1}{1+8\omega i} \\
&= \frac{1-8\omega i}{(1+8\omega i)(1-8\omega i)} \\
&= \frac{1-8\omega i}{1^2+8^2\omega^2} \\
&= \frac{1-8\omega i}{1+64\omega^2} \\
&= \frac{1}{1+64\omega^2} - \frac{8\omega}{1+64\omega^2} i
\end{aligned}$$

2. *Calculer le module de $H(i\omega)$, c'est à dire $|H(i\omega)|$, sans utiliser la question précédente.*
On a :

$$|H(i\omega)| = \left|\frac{1}{1+8\omega i}\right| = \frac{|1|}{|1+8\omega i|} = \frac{1}{\sqrt{1^2+8^2\times\omega^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+64\omega^2}}$$

3. *Donner une nouvelle expression de $G_2(\omega)$ en fonction de ω.*
On sait que :

$$\begin{aligned}
G_2(\omega) &= 20\log|H(i\omega)| \\
&= 20\log\left(\frac{1}{\sqrt{1+64\omega^2}}\right) \\
&= 20\left(\log(1)-\log\left(\sqrt{1+64\omega^2}\right)\right) \\
&= 20\left(-\frac{1}{2}\log\left(1+64\omega^2\right)\right) \\
&= -10\log\left(1+64\omega^2\right)
\end{aligned}$$

4. *Calculer la dérivée de $G_2(\omega)$ où ω joue le rôle de x.*
On applique la formule de dérivation d'une fonction logarithme :

$$G_2(\omega)' = -10\frac{\left(1+64\omega^2\right)'}{\left(1+64\omega^2\right)} = -10\frac{128\omega}{\left(1+64\omega^2\right)} = \frac{-1280\omega}{\left(1+64\omega^2\right)}$$

5. *Déterminer les limites en* 0 *et en* $+\infty$ *de* $G_2(\omega)$.

$$\lim_{\omega\to 0} G_2(\omega) = \lim_{\omega\to 0} -10\log\left(1+64\omega^2\right) = -10\log\left(1+64\times 0^2\right) = -10\log(1) = 0$$
$$\lim_{\omega\to +\infty} G_2(\omega) = \lim_{\omega\to +\infty} -10\log\left(1+64\omega^2\right) = -10\times(+\infty) = -\infty$$

6. *En déduire le tableau de variation de* G_2 *sur* $[0;+\infty[$.

ω	0	$+\infty$
$G_2'(\omega)$	$-$	
$G_2(\omega)$	0 ↘	$-\infty$

7. *Déterminer* ω_1.
D'après l'énoncé, ω_1 *vérifie :*

$$\begin{aligned}
& G_2(\omega_1) = -3\\
\Leftrightarrow & -10\log\left(1+64\omega^2\right) = -3\\
\Leftrightarrow & \log\left(1+64\omega^2\right) = \frac{-3}{-10}\\
\Leftrightarrow & \log\left(1+64\omega^2\right) = \frac{3}{10}\log(10)\\
\Leftrightarrow & \log\left(1+64\omega^2\right) = \log(10^{\frac{3}{10}})\\
\Leftrightarrow & 1+64\omega^2 = 10^{\frac{3}{10}}\\
\Leftrightarrow & \omega^2 = \frac{10^{\frac{3}{10}}}{64}\\
\Rightarrow & \omega = \sqrt{\frac{10^{\frac{3}{10}}}{64}} \approx 0.1766
\end{aligned}$$

Exercice 2 (Étude de fonctions) *La population d'une ville entre le 1er janvier 2015 et le 1er janvier 2030 est modélisée par la fonction définie sur [0 ; 15] par :*

$$f(x) = \frac{40x}{x^2+25} + 15.$$

Dans ce modèle, $f(x)$ est le nombre d'habitants de la ville en milliers et x le nombre d'années écoulées depuis les 1er janvier 2015.
Par exemple, $f(2)$ est une estimation du nombre d'habitants de la ville (en milliers) le 1er janvier 2017.

1. *Calculer le nombre d'habitants le 1er janvier 2015.*
   Le nombre d'habitants le 1er janvier 2015 est $f(0) = \frac{40\times 0}{0^2+25} + 15 = 15$ *milliers*
2. *Calculer le nombre d'habitants le 1er janvier 2016.*
   Le nombre d'habitants le 1er janvier 2016 est $f(1) = \frac{40\times 1}{1^2+25} + 15 = 16.54$ *milliers*
3. *Déterminer le pourcentage d'évolution entre le 1er janvier 2015 et le 1er janvier 2016.*
   Entre le 1er janvier 2015 et le 1er janvier 2016, le pourcentage d'augmentation est :

$$\frac{16.54-15}{15} \times \approx 10.27$$

4. *On admet que la fonction f est dérivable et on désigne par f' sa fonction dérivée*
   a. *Montrer, en détaillant les calculs que, pour tout nombre réel x de [0 ; 15],*

$$f'(x) = \frac{-40(x-5)(x+5)}{\left(x^2+25\right)^2}.$$

On a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{40x}{x^2+25}+15\right)' \\ &= \frac{(40x)' \times (x^2+25) - 40x \times (x^2+25)'}{(x^2+25)^2} \\ &= \frac{40 \times (x^2+25) - 40x \times 2x}{(x^2+25)^2} \\ &= \frac{40x^2+1000-80x^2}{(x^2+25)^2} \\ &= \frac{-40x^2+1000}{(x^2+25)^2} \end{aligned}$$

Il reste à montrer que les numérateurs sont égaux :

$-40(x-5)(x+5) = -40(x^2-5x+5x-25) = -40(x^2-25) = -40x^2+1000$

b. *Étudier le signe de $x-5$ sur l'intervalle [0 ; 15].*
La fonction $x-5$ est positive pour $x \leq 5$ et négative pour $x \leq 5$ car :

$$x-5 \leq \Leftrightarrow x \leq 5$$

c. *En déduire le signe de $f'(x)$ sur [0; 15], sachant que $x+5$ est positif sur $[0;5]$ puis le tableau de variation complet de f sur [0 ; 15].*
Finalement le signe de $f'(x)$ sur [0; 15] est l'opposé du signe de $x-5$ et on en déduit que :

x	0		5		15
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	15	$\nearrow$	$f(5)$	$\searrow$	$f(15)$

5. *En utilisant le modèle et les résultats obtenus précédemment, à quelle date la population de la ville sera-t-elle maximale et quel sera le* *nombre d'habitants ?*

Le maximum est atteint en $x = 5$: la population sera maximale en 2020 et elle vaudra $\dfrac{40 \times 5}{5^2 + 25} + 15 = 19$ milliers d'habitants.