Fonctions de transfert

Rappel 1 ***1.*** *Le module d'un nombre complexe z a pour expression :*

$$|z| = \sqrt{a^2+b^2} \text{ si } z = a+bj$$
$$|z| = |z_1| \times |z_2| \text{ si } z = z_1 \times z_2$$
$$|z| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \text{ si } z = \frac{z_1}{z_2}$$

2. *La fonction* $\ln(x)$ *vérifie :*

$$\ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y)$$
$$\ln(x^y) = y\ln(x)$$
$$(\ln(u(x)))' = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

Rappel 2 *Un argument* θ *d'un nombre complexe z a pour expression :*

1. *si* $z = a+bj$,

$$\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \text{ si } a > 0$$
$$\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) - \pi \text{ si } a < 0$$
$$\theta = \frac{\pi}{2} \text{ si } a = 0, b > 0$$
$$\theta = -\frac{\pi}{2} \text{ si } a = 0, b < 0$$
$$\theta = 0 \text{ si } z = 0$$

2. *si* $z = z_1 \times z_2$, *avec* θ_1 *argument de* z_1 *et* θ_2 *argument de* z_2.

$$\theta = \theta_1 + \theta_2$$

3. *si* $z = \frac{z_1}{z_2}$

$$\theta = \theta_1 - \theta_2$$

Rappel 3 *La fonction* $\arctan(x)$ *a pour limite* 0 *en* 0 *et* $\frac{\pi}{2}$ *en* $+\infty$.
La dérivée de la fonction $\arctan(u(x))$ *est :*

$$\arctan(u(x))' = \frac{u'(x)}{1+u(x)^2}$$

Exercice 1 *On note j le nombre complexe de module* 1 *et d'argument* $\frac{\pi}{2}$.
Cela signifie que $j^2 = -1$***, on utilise une notation de physique : ce*** j ***correspond au*** i ***en mathématiques***
On considère la fonction H définie, pour tout nombre complexe p distinct de 0 *et de* -1, *par :*

$$H(p) = \frac{1}{p(p+1)}.$$

Dans toute la suite de l'exercice on prend $p = j\omega$, *où* ω *désigne un réel strictement positif.*

1. *On note* $r(\omega)$ *le module du nombre complexe* $H(j\omega)$ *et on considère la fonction G définie, pour tout réel* ω *par :*

$$G(\omega) = \frac{20}{\ln 10} \ln r(\omega).$$

a. *Montrer que* $G(\omega) = -\dfrac{20}{\ln 10}\ln\left(\omega\sqrt{1+\omega^2}\right)$.

b. *Déterminer les limites de la fonction G en* 0 *et en* $+\infty$. *Montrer que la fonction G est strictement décroissante sur* $]0\,;\,+\infty[$.

2. a. *Montrer qu'un argument* $\varphi(\omega)$ *de* $H(j\omega)$ *est :*

$$\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \arctan\omega$$

b. *Étudier les variations de la fonction* φ *sur* $]0\,;\,+\infty[$ *(on précisera les limites en* 0 *et en* $+\infty$*).*

Exercice 2 *On désigne par j le nombre complexe de module 1 dont un argument est* $\dfrac{\pi}{2}$.
On considère un filtre dont la fonction de transfert T est définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ *par*

$$T(\omega) = \frac{-j\omega k}{1 - j\dfrac{\omega}{2}}.$$

Le nombre k est un nombre réel strictement positif compris entre 0 et 1.
En associant trois filtres identiques au précédent, on obtient un système dont la fonction de transfert H est définie sur $]0\,;\,+\infty[$ *par :*

$$H(\omega) = (T(\omega))^3.$$

1. *On note* $r(\omega)$ *le module de* $H(\omega)$.
On a donc : $r(\omega) = |H(\omega)|$.

a. *Montrer que le module de* $T(\omega)$ *est* $\dfrac{k\omega}{\sqrt{1+\dfrac{\omega^2}{4}}}$.

b. *En déduire* $r(\omega)$.

2. a. *Justifier qu'un argument de* $(-j\omega)^3$ *est* $\dfrac{\pi}{2}$.
Justifier qu'un argument de $1 - j\dfrac{\omega}{2}$ *est* $-\arctan\left(\dfrac{\omega}{2}\right)$.
En déduire qu'un argument de $H(\omega)$, *notée* $\varphi(\omega)$, *est défini sur* $]0\,;\,+\infty[$ *par :*

$$\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} + 3\arctan\left(\frac{\omega}{2}\right).$$

b. *On note* φ' *la dérivée de la fonction* φ. *Calculer* $\varphi'(\omega)$.
Déterminer le signe de φ' *sur l'intervalle* $]0\,;\,+\infty[$.

c. *Déterminer les limites de la fonction* φ *en* 0 *et* $+\infty$.

3. *Dans le tableau ci-après on donne les variations de la fonction r sur l'intervalle* $]0\,;\,+\infty[$.
Recopier et compléter ce tableau en utilisant les résultats obtenus dans la question 2.

ω	0		$+\infty$
$r'(\omega)$	$\Vert$	$+$	
$r(\omega)$	$\Vert$	$0 \nearrow$	$8k^3$
$\varphi(\omega)$	$\Vert$		
$\varphi'(\omega)$	$\Vert$		