Fonction logarithme 2

On considère la fonction suivante définie sur $]0;+\infty[$:

$$f(x) = 4x^2 + 10x + 1 - 13x^2 \ln(x)$$

1. Calculer la limite de f en 0^+
2. Calculer la limite de f en $+\infty$
3. Calculer la dérivée de f.
4. Calculer la dérivée seconde de f.
5. Déterminer le signe de $f''(x)$.
6. En déduire le tableau de variation de $f'(x)$.
7. Déterminer le nombre de solutions de $f'(x) = 0$ et en donner un encadrement d'amplitude 10^{-2}.
8. En déduire le tableau de variation de $f(x)$.
9. Déterminer le nombre de solutions de $f(x) = 0$.

Correction :

1. On sait que :

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to 0^+} 4x^2+10x+1 = 1 \\ &\lim_{x\to 0^+} 13x^2\ln(x) = 0 \quad \text{par propriété du cours} \\ \text{donc } &\lim_{x\to 0^+} 4x^2+10x+1-13x^2\ln(x) = 1 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to +\infty} 4x^2+10x+1 = +\infty \\ &\lim_{x\to +\infty} -13x^2\ln(x) = -\infty \quad \text{par propriété du cours} \\ \text{donc } &\lim_{x\to +\infty} 4x^2+10x+1-13x^2\ln(x) = -\infty \quad \text{par prédominance de } x^2\ln(x) \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 8x+10-13\left(x^2\ln(x)\right)' \\ &= 8x+10-13\left((x^2)'\ln(x)+x^2\times\ln(x)'\right) \\ &= 8x+10-13\left(2x\ln(x)+x^2\times\frac{1}{x}\right) \\ &= 8x+10-13\left(2x\ln(x)+x\right) \\ &= -5x+10-26\ln(x) \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} f''(x) &= -5-26\left(x\ln(x)\right)' \\ &= -5-26\left(x'\ln(x)+x\times\ln(x)'\right) \\ &= -5-26\left(\ln(x)+x\times\frac{1}{x}\right) \\ &= -5-26\left(\ln(x)+1\right) \\ &= -31-26\ln(x) \end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned} f'(x) &\geq 0 \\ -31-26\ln(x) &\geq 0 \\ -26\ln(x) &\geq 31 \\ \ln(x) &\leq \frac{31}{-26} \\ x &\leq e^{\frac{31}{-26}} \end{aligned}$$

6. On a :

x	0		$e^{\frac{31}{-26}}$		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$	10	$\nearrow$	$10+26e^{\frac{31}{-26}}$	$\searrow$	$-\infty$

7. D'après le tableau de variation, comme $10 > 0$, la fonction f' ne peut pas s'annuler sur l'intervalle $]0; e^{\frac{31}{-26}}]$.
Pour $x > e^{\frac{31}{-26}}$, la fonction est décroissante de $10+26e^{\frac{31}{-26}} > 0$ vers $-\infty$, donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe une unique valeur $\alpha > e^{\frac{31}{-26}}$ telle que $f'(\alpha) = 0$.
En utilisant la calculatrice, on trouve :

$$f'(0.3) > 0$$
$$f'(0.31) < 0$$
$$0.3 < \alpha < 0.31$$

8. On a :

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$-\infty$

9. D'après le tableau de variation, comme $1 > 0$, la fonction f ne peut pas s'annuler sur l'intervalle $]0; \alpha]$.
Pour $x > \alpha$, la fonction est décroissante de $f(\alpha) > 0$ vers $-\infty$, donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe une unique valeur $\beta > \alpha$ telle que $f(\beta) = 0$.

$$f(2.03) < 0$$
$$f(2.02) > 0$$
$$\text{donc } 2.02 < \beta < 2.03$$