∽ Devoir maison 2 : 27/09/2022

Exercice 1 *Un protocole médical consiste à injecter initialement au patient, par piqûre intraveineuse, une dose de* 3 *mg de médicament puis à réinjecter toutes les heures une dose de* $1,7$ *mg.*
On suppose que le médicament se diffuse instantanément dans le sang et qu'il est ensuite progressivement éliminé.
On estime que lorsqu'une heure s'est écoulée après une injection, la quantité de médicament dans le sang a diminué de 25 % par rapport à la quantité présente immédiatement après cette injection.
On modélise cette situation à l'aide de la suite (u_n) *où, pour tout entier naturel* n, u_n *désigne la quantité de médicament, exprimée en mg, présente dans le sang du patient immédiatement après l'injection de la* n*-ième heure. On a donc* $u_0 = 3$.

1. *Calculer, selon cette modélisation, la quantité* u_1, *de médicament (en mg) présente dans le sang du patient immédiatement après l'injection de la première heure.*

2. *Justifier que, pour tout entier naturel* n, *on a :* $u_{n+1} = 0,75u_n + 1,7$.

3. ***a.*** *Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel* n, *on a :* $u_n \leqslant u_{n+1} < 6.8$.

b. *En déduire que la suite* (u_n) *est convergente. On note* ℓ *sa limite.*

c. *Déterminer la valeur de* ℓ. *Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.*

4. *On considère la suite* (v_n) *définie, pour tout entier naturel* n, *par* $v_n = 6.8 - u_n$.

a. *Montrer que la suite* (v_n) *est une suite géométrique de raison* $0,75$ *dont on précisera le premier terme.*

b. *Déterminer l'expression de* v_n *en fonction de* n, *puis de* u_n *en fonction de* n.

c. *Avec ce protocole, on arrête les injections lorsque la quantité de médicament présente dans le sang du patient est supérieure ou égale à* $5,5$ *mg.*
Déterminer, en détaillant les calculs, le nombre d'injections réalisées en appliquant ce protocole.

Exercice 2 *On considère la suite* (u_n) *définie par :* $u_0 = 1$ *et, pour tout entier naturel* n,

$$u_{n+1} = \frac{3u_n}{u_n + 3}.$$

1.

Compléter le tableau suivant.
À l'aide de ces valeurs, conjecturer l'expression de $\frac{3}{u_n}$ *en fonction de* n.
Le but de cet exercice est de démontrer cette conjecture (question ***5.****), et d'en déduire la limite de la suite* (u_n) *(question* ***6.****).*

n	u_n	$\frac{4}{u_n}$
0	1,00	3
1		4
2		5
3		6
4		7
5		8
6		9
7		10
8		11
9		12
10		13
11		14
12		15

2. *Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a :* $u_n > 0$.

3. *Démontrer que la suite* (u_n) *est décroissante.*

4. *Que peut-on conclure des questions **2.** et **3.** concernant la suite* (u_n) *?*

5. *On considère la suite* (v_n) *définie pour tout entier naturel n par :* $v_n = \dfrac{3}{u_n}$.

Démontrer que (v_n) *est une suite arithmétique.*
Préciser sa raison et son premier terme.
En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de v_n en fonction de n.

6. *Déterminer, pour tout entier naturel n, l'expression de u_n en fonction de n.*
En déduire la limite de la suite (u_n).