∽ Rappels de probabilités

1 Probabilités et probabilités conditionnelles

Propriétés

Formule de Laplace : Soit un événement E sur un ensemble fini $\mathscr{E}$:

$$P(E) = \frac{\text{nombre d'éléments de E}}{\text{nombre d'élément de } \mathscr{E}}$$

Événements contraires : Soit un événement E et $\bar{E}$ son événements contraire :

$$P(\bar{E}) = 1 - P(E)$$

Probabilité conditionnelle : Soit A et B deux événements.

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \text{ probabilité de B sachant A}$$

$$P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Deux événements A et B sont indépendants si et seulement si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ ou encore $P_A(B) = P(A)$.

2 Loi binomiale

Propriétés

On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres n et p si :

- ✏ X compte le nombre de succès d'une répétition de n épreuves de Bernouilli car deux issues (réussite ou échec, correct pas correct,....)
- ✏ Ces issues sont indépendantes : soit l'énoncé le dit explicitement, soit cette indépendance est due au tirage avec remise.
- ✏ Les épreuves de Bernouilli ont toute le même paramètre p.

L'espérance de X est alors $n \times p$: c'est le nombre moyen sur n lancers de l'apparition du caractère étudié.
La phrase à écrire pour justifer est donc :
La variable X compte le nombre de succès d'une répétition de n (premier paramètre) épreuves de Bernouilli (car deux issues), indépendantes et de même paramètre p (deuxième paramètre).
Donc $X \sim \mathscr{B}(n, p)$

Calculs

Les calculs se feront systématiquement à la calculatrice :

1. $P(X = k)$.
   Sur la TI, on fera 5 : Probabilités, 5 : Distributions, puis dans le menu des distributions, on prendra D : Binomiale Ddp.
   Le nombre d'essai sera n, la probabilité de succès p et la valeur de X sera k.

2. $P(X \leq k)$.
   Sur la TI, on fera 5 : Probabilités, 5 : Distributions, puis dans le menu des distributions, on prendra E : Binomiale FdR.
   Le nombre d'essai ou trials sera n, la probabilité p, la borne inf sera 0 et la borne sup sera k.

3. $P(X \geq k)$.
   Sur la TI, on fera 5 : Probabilités, 5 : Distributions , puis dans le menu des distributions, on prendra E : Binomiale FdR.
   Le nombre d'essai ou trials sera n, la probabilité p, la borne inf sera k et la borne sup sera n.

4. $P(i \leq X \leq j)$.
   Sur la TI, on fera 5 : Probabilités, 5 : Distributions, puis dans le menu des distributions, on prendra E : Binomiale FdR.
   Le nombre d'essai ou trials sera n, la probabilité p, la borne inf sera i et la borne sup sera j.

3 Loi de Poisson :

Propriétés

On associe cette loi à des événements qui se produisent rarement. Elle est associée à un paramètre : λ.
Son espérance sera : λ.
On écrira $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$.

Calculs

Les calculs se feront systématiquement à la calculatrice :

1. $P(X = k)$.
Sur la TI, on fera 5 : Probabilités, 5 : Distributions, puis dans le menu des distributions, on prendra H : Poisson Ddp.
Le nombre d'essai sera n, la probabilité de succès p et la valeur de X sera k.

2. $P(X \leq k)$.
Sur la TI, on fera 5 : Probabilités, 5 : Distributions,puis dans le menu des distributions, on prendra I : Poisson FdR.
Le nombre d'essai ou trials sera n, la probabilité p,la borne inf sera 0 et la borne sup sera k.

3. $P(X \geq k)$.
Sur la TI, on fera 5 : Probabilités, 5 : Distributions, puis dans le menu des distributions, on prendra I : Poisson FdR.
Le nombre d'essai ou trials sera n, la probabilité p, la borne inf sera k et la borne sup sera 1000.

4. $P(i \leq X \leq j)$.
Sur la TI, on fera 5 : Probabilités, 5 : Distributions , puis dans le menu des distributions, on prendra I : Poisson FdR.
Le nombre d'essai ou trials sera n, la probabilité p, la borne inf sera i et la borne sup sera j.

Approximation de la loi binomiale

Sous de bonnes conditions, (que nous ne vérifirons pas), on peut approcher une loi $X \sim \mathscr{B}(n, p)$ par une loi de Poisson de paramètre $\lambda = n \times p$.

4 Loi normale

Propriétés

Pour une loi normale $N(\mu,\sigma)$, on a :

1. μ qui est la moyenne
2. σ qui est l'écart-type.
3. $P(X \leq \mu) = P(X \geq \mu) = 0.5$.
4. $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0.95$

Calculs

Pour $t, u \in \mathbb{R}$:

1. $P(X \leq t)$ se calcule avec normalFDR, borne inf $= -10^9$ et borne sup t.
2. $P(X \geq t)$ se calcule avec normalFDR, borne inf $= t$ et borne sup 10^9.
3. $P(u \leq X \leq t)$ se calcule avec normalFDR, lower=u et upper=t.
4. $P(\mu - h \leq Y \leq \mu + h) = t \Leftrightarrow 2P(Y \leq \mu + h) - 1 = t \Leftrightarrow P(Y \leq \mu + h) = \frac{1+t}{2}$, on trouve la valeur de $\mu + h$ en utilisant $InvNormale$ ou $FracNormale$ sur la TI ; la surface, c'est $\frac{1+t}{2}$.

Pour accéder à normalFDR, on fera les mêmes manipulations que dans le cas de la loi binomiale mais en choisissant les menus de la loi normale.

STOP

Calculs

Une loi binomiale $\mathscr{B}(n;p)$ peut être approchée par une loi normale de moyenne $n \times p$ et d'écart-type $\sqrt{n \times p \times (1-p)}$.
Il faut bien comprendre la signification du terme approcher dans ce contexte, il faudra prendre en compte la correction de continuité.
Pour $X \sim \mathscr{B}(n,p)$ et $Y \sim N(n \times p; \sqrt{n \times p \times (1-p)})$:

- ✏ $P(X = k)$ ne sera pas approximé par $P(Y = k)$, qui est nul, mais par $P(k - 0,5 \leq Y \leq k + 0,5)$
- ✏ $P(i \leq X \leq j)$ sera approximé par $P(i - 0,5 \leq Y \leq j + 0.5)$
- ✏ $P(X \geq i)$ sera approximé par $P(Y \geq i - 0,5)$.
- ✏ $P(X \leq i)$sera approximé par $P(Y \leq i + 0.5)$.

Dans les exercices, on demandera surtout de donner les paramètres de la loi normale par laquelle on pourra approcher la loi binomiale.