Récurrences 3

On considère la suite :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 0.7u_n + 1.8 \\ u_0 = -4 \end{cases}$$

1. Montrer par récurrence que :

$$u_n \leq u_{n+1} \leq 6$$

2. En déduire que la suite converge et en déduire sa limite.

1. **Initialisation :**

   On a :

$$\begin{aligned} u_1 &= 0.7u_0 + 1.8 = -1.0 \\ \text{donc } u_0 = -4 &\leq u_1 \leq 6 \end{aligned}$$

   L'initialisation est établie.

   Hérédité :
   On suppose que la propriété est vraie pour un certain rang $n \geq 0$:

$$u_n \leq u_{n+1} \leq 6 \quad \text{c'est l'hypothèse de récurrence}$$

   On part de cette hypothèse :

$$\begin{aligned} &u_n \leq u_{n+1} \leq 6 \\ \Rightarrow &0.7 \times u_n \leq 0.7 \times u_{n+1} \leq 0.7 \times 6 \\ \Rightarrow &0.7 \times u_n \leq 0.7 \times u_{n+1} \leq 4.2 \\ \Rightarrow &0.7 \times u_n + 1.8 \leq 0.7 \times u_{n+1} + 1.8 \leq 4.2 + 1.8 \\ \Rightarrow &u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 6 \end{aligned}$$

   L'hérédité est établie.

2. On vient de montrer que la suite est croissante et majorée, par conséquent, d'après le théorème de convergence monotone, la suite converge vers l un nombre réel qui vérifie :

$$\begin{aligned} &l = 0.7 \times l + 1.8 \\ \Leftrightarrow &l - 0.7 \times l = 1.8 \\ \Leftrightarrow &l \times 0.3 = 1.8 \\ \Leftrightarrow &l = \frac{1.8}{0.3} = 6 \end{aligned}$$