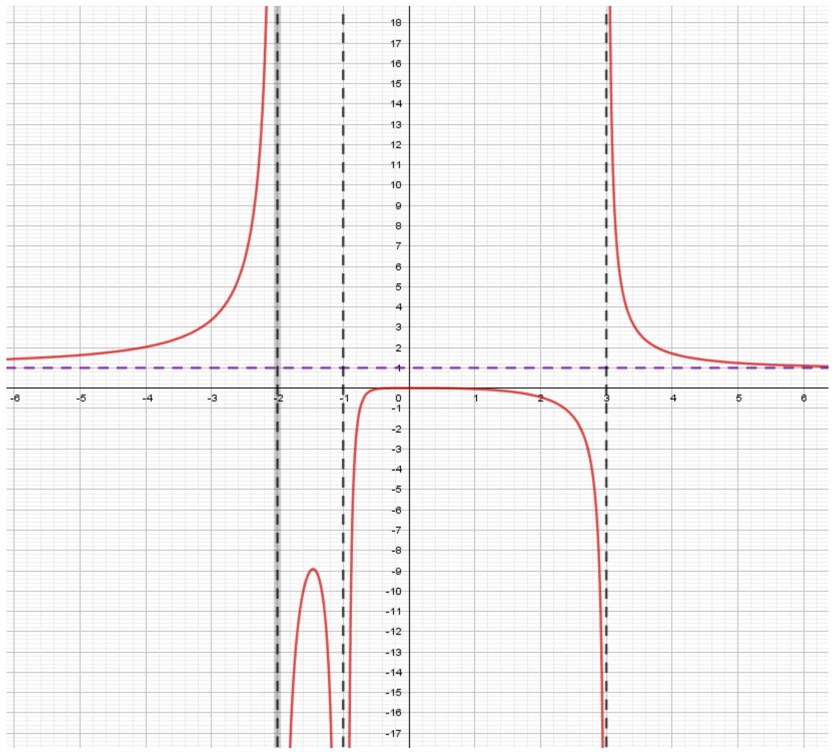
Limites de fonctions : exercices

Exercice 1 *On a représenté ci-dessous une fonction f définie sur* $]-\infty;-2[\cup]-2;-1[\cup]-1;+\infty[$.



1. *Conjecturer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.*
2. *Préciser les asymptotes éventuelles à la courbe représentative de la fonction f.*
3. *Dresser le tableau de variation de la fonction f.*

Exercice 2 *Le tableau de variation ci-dessous décrit les variations d'une fonction f.*

x	$-\infty$		-5		-3		0		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0	↘	-2 ‖ 3	↗	$+\infty$

1. *Utiliser les notations qui conviennent pour décrire les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.*
2. *Donner les équations des asymptotes éventuelle de la courbe de la fonction f.*
3. *Construire une courbe suceptible de représenter la fonction f.*

Exercice 3 *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$f(x) = x^3 - x + 1$$

1. *A l'aide d'une calculatrice, tracer la courbe représentative de la fonction f.*
2. *Conjecturer graphiquement la limite de la fonction f en $+\infty$.*
3. *Quel est le rôle de l'algorithme suivant ?*

$A \leftarrow$
Tant que $A^3 - A + 1 < 10000$
$\quad A \leftarrow A + 1$

Exercice 4 *Déterminer les limites en $+\infty$ et $-\infty$ des fonctions suivantes :*

$$x \to x^2 + x - 1 \qquad x \to x^3 - 3x^2 + 2$$
$$x \to -2x^2 + 4x + 1 \qquad x \to 2x^3 - 7x^2 + x - 2$$
$$x \to \frac{x^2+1}{1-x} \qquad x \to \frac{x+3}{-2x^2+1}$$
$$x \to \frac{-3x+1}{-5x^2+x-2} \qquad x \to \frac{4x^3-3x-1}{-x^2+x+1}$$

Exercice 5 *Déterminer les limites en $+\infty$ des fonctions suivantes :*

$$x \to xe^x\sqrt{x}$$
$$x \to x - \sqrt{x}$$
$$x \to \frac{2x+1}{\sqrt{x}}$$
$$x \to \frac{\sqrt{x}}{x+1}$$

Exercice 6 *Déterminer les limites suivantes :*

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{1}{x-3}$$
$$\lim_{x\to 3^-} \frac{1}{x-3}$$
$$\lim_{x\to 1^+} \frac{2}{1-x}$$
$$\lim_{x\to 1^-} \frac{2}{1-x}$$
$$\lim_{x\to 2^+} \frac{-3x}{2x-4}$$
$$\lim_{x\to 2^-} \frac{-3x}{2x-4}$$
$$\lim_{x\to 3^+} \frac{x^2-10}{6-2x}$$
$$\lim_{x\to 3^-} \frac{x^2-10}{6-2x}$$

Exercice 7 *Soit f la fonction définie sur* $]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$ *par :*

$$f(x) = \frac{-2}{x-1}$$

1. *Étudier le sens de variation de la fonction f.*
2. *Étudier les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$ et en déduire une asymptote éventuelle à la courbe représentative de la fonction f.*
3. *Étudier les limites de $f(x)$ en 1.*
   En déduire une asymptote éventuelle à la courbe représentative de la fonction f.

4. *Dresser le tableau de variation de la fonction f et vérifier graphiquement les résultats trouvés.*

Exercice 8 *Dans chaque cas, déterminer les expressions possibles de deux fonctons f et g qui vérifient d'une part :*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$

et d'autre part :

1. $\lim_{x\to+\infty} \big(f(x) - g(x)\big) = 0$
2. $\lim_{x\to+\infty} \big(f(x) - g(x)\big) = +\infty$
3. $\lim_{x\to+\infty} \big(f(x) - g(x)\big) = -\infty$

Exercice 9 *Dans chaque cas, déterminer les expressions possibles de deux fonctons f et g qui vérifient d'une part :*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$
$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$

et d'autre part :

1. $\lim_{x\to+\infty} \big(f(x) \times g(x)\big) = 0$
2. $\lim_{x\to+\infty} \big(f(x) \times g(x)\big) = +\infty$
3. $\lim_{x\to+\infty} \big(f(x) \times g(x)\big) = 5$

Exercice 10 *On considère le programme suivant :*

```
x=0
for i in range(1,150):
    F=(3+2*x)/(x**2+1)
    x=x+100
```

Choisir la bonne réponse. Après l'exécution de ce programme, la variable F contient un nombre :

1. *très grand*
2. *proche de zéro*
3. *proche de* 1
4. *proche de* 7

Exercice 11 *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$f(x) = x + \sqrt{x^2+1}$$

1. *Étudier la limite de la fonction f en $+\infty$.*
2. *Montrer que :*

$$f(x) = \frac{-1}{x - \sqrt{x^2+1}}$$

3. *En déduire la limite de la fonction f en $-\infty$.*

Exercice 12 *Dans chacun des cas, dire si les inégalités proposées permettent de conclure sur la limite éventuelle de la fonction f en $+\infty$:*

1. *Pour tout réel x,* $\quad f(x) \geq \frac{x^2}{6}$.
2. *Pour tout $x > 0$,* $\quad 1 - \frac{1}{x} \leq f(x) \leq 1 + \frac{1}{x}$.

3. *Pour tout* $x > 1$, $\frac{x}{x+1} \leq f(x) \leq \frac{x}{x-1}$.

4. *Pour tout* $x > 1$, $\frac{1}{x} \leq f(x) \leq \frac{x+2}{x+1}$.

Exercice 13 *Soit* f *la fonction définie sur* $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ *par :*

$$f(x) = \frac{x^2+3x+1}{x}$$

1. *Étudier les limites de* $f(x)$ *quand* x *tend vers* 0. *Que peut-on endéduire pour sa courbe représentative.*
Que peut-on en déduire pour sa courbe représentative.

2. *Étudier les limites de* f *en* $+\infty$ *et en* $-\infty$.

3. *Tracer la courbe représentative de la fonction* f *et la droite d'équation* $y = x+3$. *Que constate-t-on ?*

4. *Soit* g *la fonction définie sur* $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ *par :*

$$g(x) = f(x) - (x+3)$$

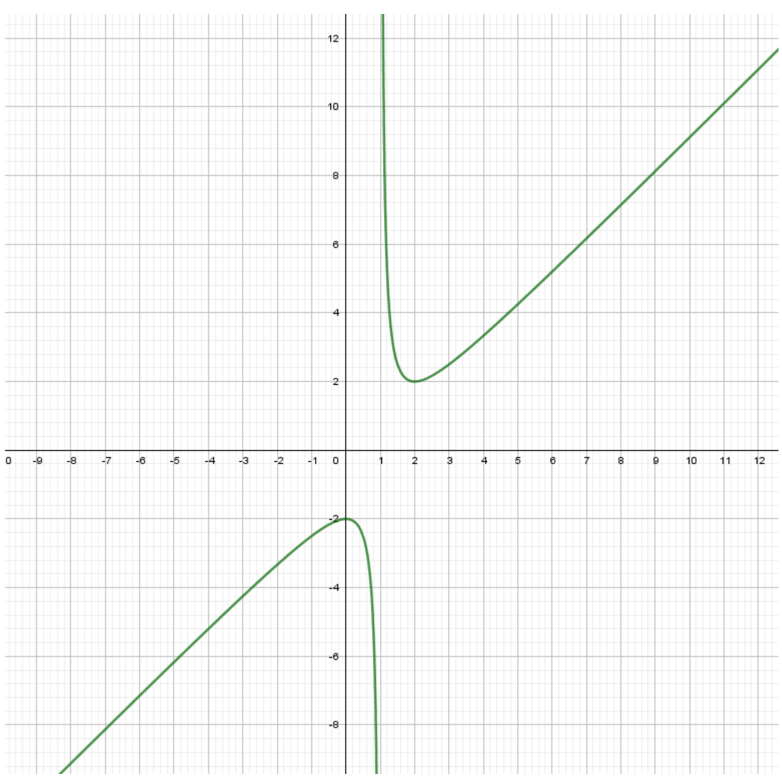
Montrer que $g(x)$ *tend vers* 0 *quand* x *tend vers* $+\infty$ *et quand* x *tend vers* $-\infty$.

Exercice 14 *On considère la fonction* f *définie sur* $]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$ *par :*

$$f(x) = \frac{x^2-2x+2}{x-1}$$

1. *Déterminer les limites de la fonction* f *aux bornes de son ensemble de définition. Que peut-on en déduire graphiquement ?*

2. *On a tracé ci-dessus la courbe représentative de la fonction* f *dans un repère orthonormé.*



a. *Démontrer que, pour tout réel* $x \neq 1$ *:*

$$f(x) = x - 1 + \frac{1}{x-1}$$

b. *Déterminer la limite de $f(x)-(x-1)$ en $+\infty$ et en $-\infty$.*

3. *Sur le graphique, tracer la droite d d'équation $y=x-1$. Que constate-t-on?*

4. *Étudier la position relative de la courbe représentative de la fonction f et de la droite d.*

Exercice 15 *Un groupe de biologistes étudie la population de grenouilles autour d'un étang.*
Au premier janvier 2020*, ils ont comptabilisé* 250 *individus.*
Le modèle de Verhulst (mathématicien belge du XIX^e siècle) conduit à modéliser le nombre de grenouilles par la fonction P définie par :

$$P(t)=\frac{a}{0.4+3.6e^{-0.5t}}$$

où a est un réel et t désigne le temps écoulé, en année, depuis le 1^{er} janvier 2020.

1. *Déterminer la valeur du réel a grâce aux données de l'énoncé.*

2. *Déterminer la limite de P en $+\infty$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.*

3. *Dresser le tableau de variation de P.*

4. *Compléter le programme suivant pour déterminer en quelle année la population de grenouilles dépassera pour la première fois* 2000 *individus.*

```python
from math import exp
def P(t):
    return ...

def seuil(P):
    t=0
    while ...:
        t=t+1
    return t
```

Exercice 16 *On définit, pour tout réel x positif, la fonction f par :*

$$f(x)=\frac{2x+3}{\cos(x)-2}$$

1. *Montrer que pour tout réel x positif, on a :*

$$\frac{2x+3}{-1}\leq f(x)\leq\frac{2x+3}{-3}$$

2. *En déduire la limite de f en $+\infty$*