Mathématiques-Génie électrique : impédance complexe

1 Représentation graphique d'une grandeur sinusoïdale

1.1 Relations trigonométriques

Valeurs des fonctions trignométriques

θ en radians	θ en degré	$\cos(\theta)$	$\sin(\theta)$
0	0	1	0
$\frac{\pi}{6}$	30	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	45	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	60	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	90	0	1
$\frac{2\pi}{3}$	120	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{3\pi}{4}$	135	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{5\pi}{6}$	150	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
π	180	-1	0
$\frac{7\pi}{6}$	210	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\frac{5\pi}{4}$	225	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{4\pi}{3}$	240	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{3\pi}{2}$	270	0	-1
$\frac{5\pi}{3}$	300	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{7\pi}{4}$	315	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{11\pi}{6}$	330	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$

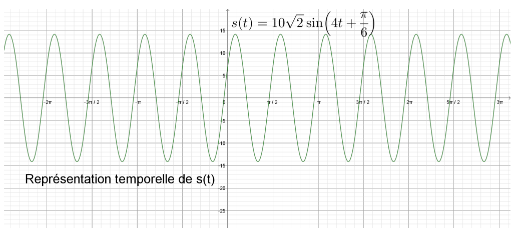
1.2 Représentation vectorielle par un vecteur de Fresnel

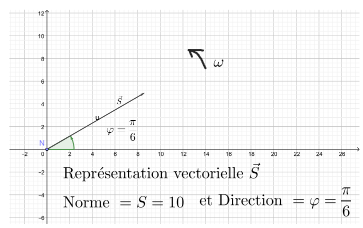
Valeurs des fonctions trignométriques

Toute grandeur alternative sinusoïdale de type $s(t) = S\sqrt{2}\sin(\omega t+\varphi)$ peut être représentée par un vecteur de Fresnel tournant à la vitesse ω dans le sens trigonométrique.

- La pulsation ω est égale à $\frac{2\pi}{T} = 2\pi f$.
- La valeur efficace est S.
- La valeur maximale est $S\sqrt{2}$.
- Le déphasage est φ.

Exemple 1 *Considérons la grandeur sinusoïdale alternative* $s(t) = 10\sqrt{2}\sin\left(4t + \frac{\pi}{6}\right)$ *:*

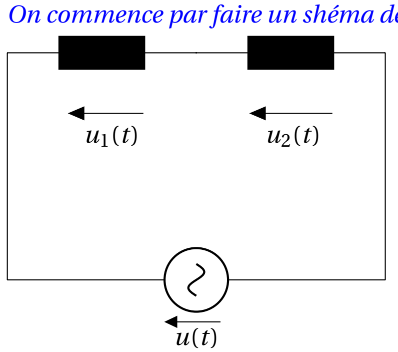




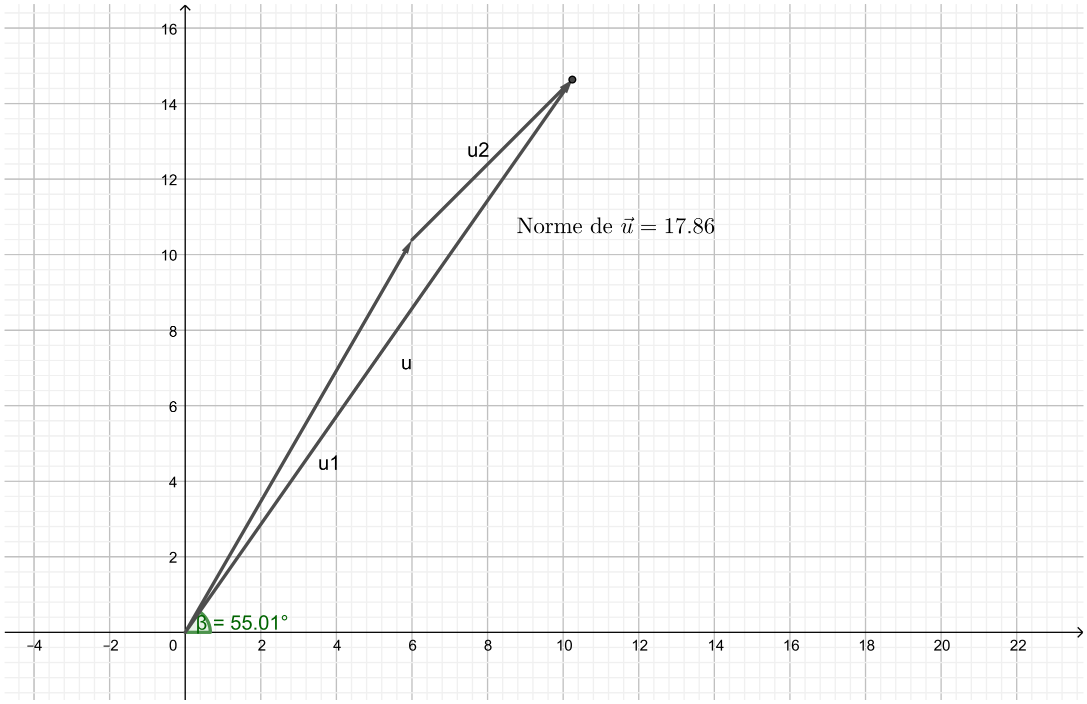
Dans cet exemple, la valeur efficace est 10*, la valeur maximale est* $10\sqrt{2}$ *et le déphasage est* $\frac{\pi}{6}$.

Exemple 2 *Deux dipôles* D_1 *et* D_2 *sont en série et ont pour tension respective* $u_1 = 12\sqrt{2}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right)$ *et* $u_2 = 6\sqrt{2}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)$.
On veut déterminer la tension $u(t) = u_1(t) + u_2(t)$.

1. *On commence par faire un shéma de la situation*



2. *Le diagramme de Fresnel suivant nous permet de déterminer* $u(t)$ *:*

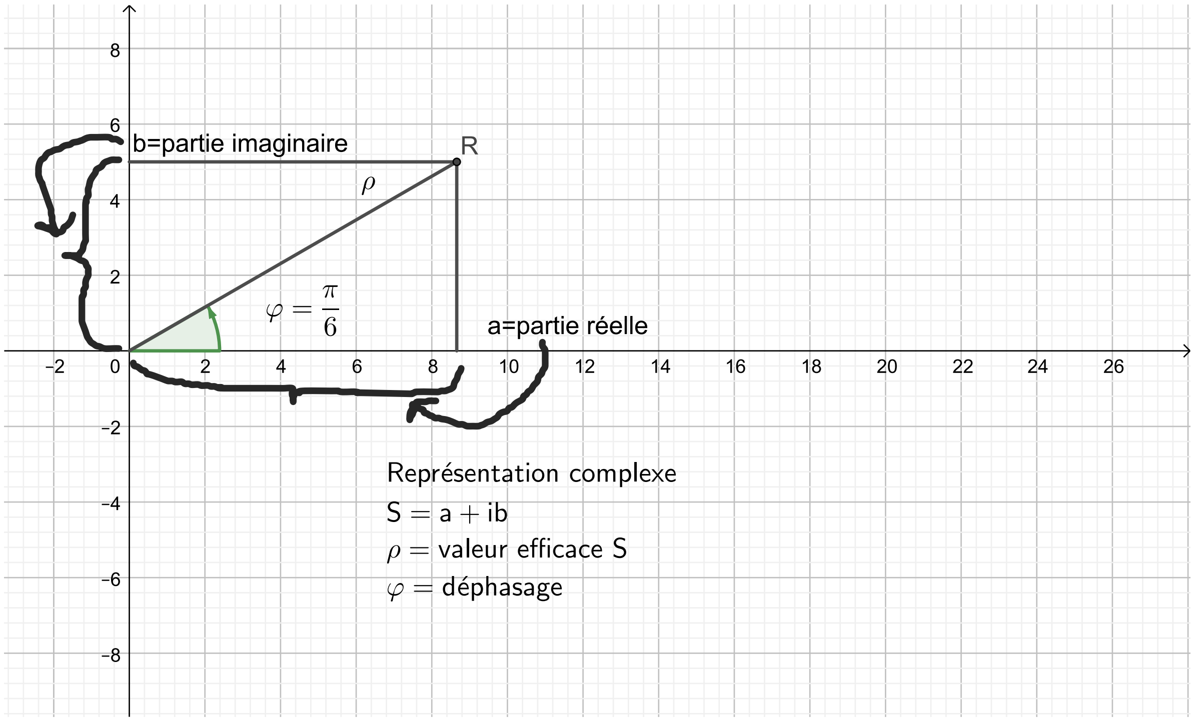


Le vecteur $\vec{u}$ a pour norme 17.86 *et argument* $55°$.
Ce vecteur est le vecteur associé à la tension $u(t)$*, on peut donc écrire :*

$$u(t) = 17.86\sqrt{2}\sin\left(\omega t + \frac{55\pi}{180}\right)$$

1.3 Représentation complexe

Exemple 3 *On reprend la grandeur alternative sinusoïdale* $s(t) = 10\sqrt{2}\sin\left(4t + \frac{\pi}{6}\right)$ *pour illustrer :*



Pour déterminer les valeurs de a et de b, on fait les calculs suivants :

$$a = 10\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$$
$$b = 10\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

Cela montre que ces valeurs peuvent être négatives.

Exemple 4 *Deux dipôles* D_1 *et* D_2 *sont en série et ont pour tension respective* $u_1 = 12\sqrt{2}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right)$ *et* $u_2 = 6\sqrt{2}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)$.
On veut déterminer la tension $u(t) = u_1(t) + u_2(t)$ *en utilisant les nombres complexes :*

1. *Donner l'expression sous la forme algébrique et trigonométrique des grandeurs complexes associées à* $u_1(t)$ *et* $u_2(t)$.
   Faire correspondre ces écritures aux notations du dessin précédent.

$$\underline{U_1} = 12\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = 6 + 6\sqrt{3}i$$
$$\underline{U_2} = 6\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = 3\sqrt{2} + 3\sqrt{2}i$$

2. *En déduire la forme algébrique de la grandeur complexe associée à* $u(t)$ *puis la forme trigonométrique.*

$$
\begin{aligned}
\underline{U} &= \underline{U_1} + \underline{U_2} \\
&= 6 + 6\sqrt{3}i + 3\sqrt{2} + 3\sqrt{2}i \\
&= (6 + 3\sqrt{2}) + (6\sqrt{3} + 3\sqrt{2})i \\
&= |\underline{U}| = \sqrt{(6+3\sqrt{2})^2 + (6\sqrt{3}+3\sqrt{2})^2} \approx 17.8631 \\
\cos(\theta) &\approx \frac{6+3\sqrt{2}}{17.8631} \\
\sin(\theta) &\approx \frac{6\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{17.8631}
\end{aligned}
\qquad \theta \approx \arccos\left(\frac{6+3\sqrt{2}}{17.8631}\right) \approx 55^\circ
$$

2 Impédance complexe

2.1 Définition de certains dipôles

Condensateur

Le condensateur est un composant en électronique qui à la particularité de pouvoir stocker de l'énergie lorsqu'il est soumis à une tension.
Le condensateur se charge d'une quantité d'électricité lorsqu'il est soumis à une tension. L'énergie emmagasinée sera restituée lors de la décharge du condensateur.
La capacité est la grandeur caractéristique d'un condensateur : elle correspond au pouvoir qu'a ce dernier de pouvoir emmagasiner de l'énergie.
Cette capacité s'exprimer en farads (F).

Bobine

Une bobine est constituée d'un enroulement de spires conductrices autour d'un isolant.
Une bobine est caractérisée par le phénomène d'auto-induction : le passage d'un courant i qui varie dans les spires de la bobine crée un champs magnétique qui fait apparaître une tension aux bornes de la bobine.
L'inductance L d'une bobine, exprimée en Henry (H), est coefficient qui traduit la grandeur de la tension qui peut être obtenue aux bornes de cette bobine, peut importe la valeur de l'intensité qui parcourt les spires.

2.2 Definition et expression de l'impédance pour certains dipôles

Impédance complexe

L'impédance Z permet de généraliser la loi d'ohm aux circuits en courant alternatif.
Elle caractérise l'opposition d'un circuit électrique au passage d'un courant alternatif sinusoïdal : ce terme vient du verbe anglais "to impede" qui peut signifier "faire obstacle à". En notation complexe, on écrira :

$$\underline{U} = \underline{Z} \times \underline{I} \qquad \underline{Z} = |Z|\left(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)\right)$$

L'angle $\varphi = (\vec{I}, \vec{U})$ représentera le déphasage de $\vec{I}$ par rapport à $\vec{U}$ en représentation vectorielle.
L'impédance s'exprimera en ohm.

Expressions des impédances

1. **Résistance**
   L'impédance complexe d'une résistance a pour module R et argument 0

   $$\underline{Z_R} = R$$

   C'est donc un nombre réel.
2. **Bobine**
   L'impédance complexe d'une bobine a pour module $L\omega$ et argument $\frac{\pi}{2}$

   $$\underline{Z_L} = L\omega i$$

   C'est donc un imaginaire pur.
3. **Condensateur**
   L'impédance complexe d'un condensateur a pour module $\frac{1}{C\omega}$ et argument $-90°$

   $$\underline{Z_C} = -\frac{1}{C\omega} i$$

   C'est donc un imaginaire pur.

2.3 Lois électriques en alternatif sinusoïdal

Presque toutes les lois établies en régime continue sont valables en alternatif sinusoïdal à condition d'utiliser les nombres complexes

Liste non-exhaustive :

- ✏ Impédance équivalente de deux dipôles $\underline{Z_1}$ et $\underline{Z_2}$ en série : $\underline{Z_{eq}} = \underline{Z_1} + \underline{Z_2}$.
- ✏ Impédance équivalente de deux dipôles $\underline{Z_1}$ et $\underline{Z_2}$ en parallèle : $\frac{1}{\underline{Z_{eq}}} = \frac{1}{\underline{Z_1}} + \frac{1}{\underline{Z_2}}$.
- ✏ Loi des mailles : $\underline{U} = \underline{U_1} + \underline{U_2}$
- ✏ Loi des noeuds : $\underline{I} = \underline{I_1} + \underline{I_2}$

3 Exercices

Exercice 1 *On place en série une résistance* $R = 100\Omega$ *et un condensateur* $C = 50\mu F$ *alimentés par une tension* $e(t) = 10\sqrt{2}\sin(2\pi.50t)$.

1. *Représenter le montage en fléchant les différentes tension et l'intensité* $i(t)$.
2. *Etablir les expressions numériques des impédances* $\underline{Z_R}$ *et* $\underline{Z_C}$.
3. *En déduire l'impédance équivalente* $\underline{Z_{eq}}$.
4. *Calculer* $I(t)$.
5. *Quel est le déphasage ?*

Exercice 2 *On place en parallèle une résistance* $R = 600\Omega$ *avec une bobine d'inductance* $L = 1H$. *L'ensemble est alimenté par une tension* $u(t) = 42.4\sin(2\pi.100t)$.

1. *Représenter le montage en fléchant les différentes tension et l'intensité* $i(t)$.
2. *Etablir les expressions numériques des impédances* $\underline{Z_R}$ *et* $\underline{Z_C}$.
3. *En déduire l'impédance équivalente* $\underline{Z_{eq}}$.
4. *Calculer* $I(t)$.
5. *Quel est le déphasage ?*

Exercice 3 *Un circuit composé d'une résistance R , d'une inductance L et d'un condensateur C sont branchés en série et alimentés par une tension alternative sinusoïdale u(t) de fréquence f = 100 Hz.*
La tension aux bornes de chaque élément R, L et C (l'intensité i est prise comme référence des phases est respectivement :

$$\underline{U_R} = 10$$
$$\underline{U_L} = 31.4i$$
$$\underline{U_C} = -10.6i$$

1. *Calculer la tension* $\underline{U}$ *délivrée par le générateur.*
2. *On a les valeurs suivantes : la résistance* $R = 100\Omega$, *l'inductance* $L = 0.5H$ *et du condensateur* $C = 15\mu F$.
   Calculer l'impédance $\underline{Z}$ *du montage dans ces circonstances.*
3. *En déduire la valeur de* $I(t)$ *puis le déphasage.*
4. *Donner l'expression de l'impédance dans un cadre plus général où les grandeurs ne sont pas connues.*
5. *Exprimer puis calculer la valeur de* f *pour laquelle la tension* $\underline{U}$ *et l'intensité* I *sont en phase.*

Exercice 4 *Les trois dipôles sont maintenant branchés en parallèle sont alimentés par la même tension u(t) trouvée à l'exercice précédent.*

1. *Calculer les intensités* $\underline{I_R}$, $\underline{I_L}$ *et* $\underline{I_C}$
2. *En déduire la valeur de* $\underline{I}$, *intensité débitée par le générateur, et préciser le déphasage.*
3. *Déterminer la valeur de l'impédance* $\underline{Z}$ *du montage.*
4. *Donner l'expression de l'impédance* $\underline{Z}$ *dans un cadre plus général où les grandeurs ne sont pas connues.*
5. *Pour quelle valeur de la fréquence* f *a-t-on la résonance ?*