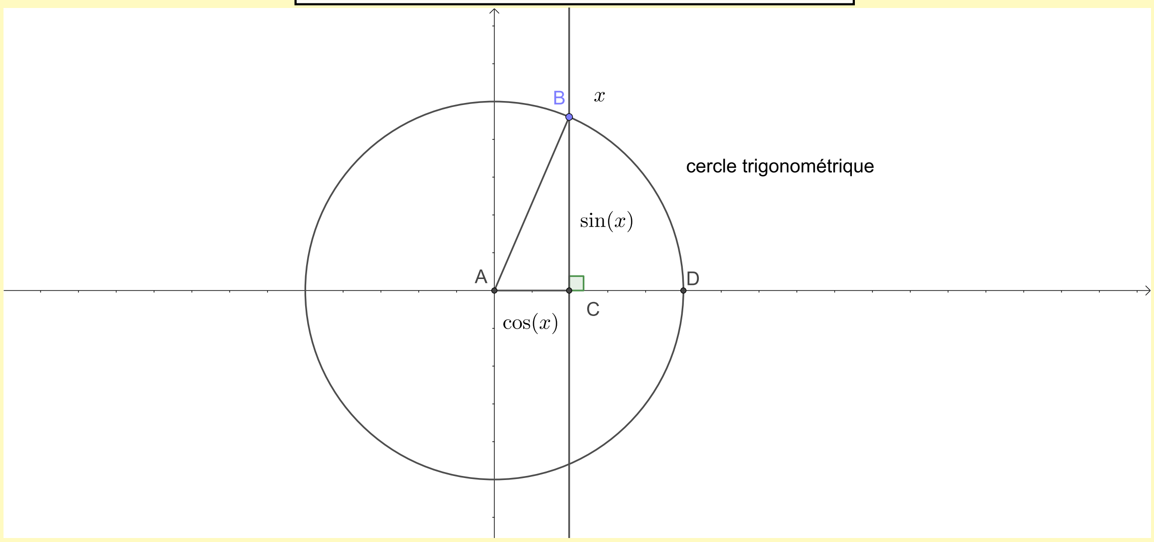
☙ Trigonométrie : cours

1 Cosinus, sinus et cercle trigonométrique

Propriétés et valeurs particulières



Soit B le point du cercle trigonométrique associé à l'angle orienté $\widehat{DAB}$:

- ✏ Le cosinus de x est l'abscisse de B et se note $\cos(x)$.
- ✏ Le sinus de x est l'ordonnée de B et se note $\sin(x)$.

On rappelle les propriétés et les valeurs particulières suivantes :

1. $\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1$.
2. $-1 \leq \cos(x) \leq 1$.
3. $-1 \leq \sin(x) \leq 1$.
4.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Exemple 1 ***1.*** *Comparer* $\sin(x+\pi)$, $\sin(x+2\pi)$, $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$, $\cos(x+\pi)$, $\cos(x+2\pi)$ *et* $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ *à* $\cos(x)$ *et* $\sin(x)$.

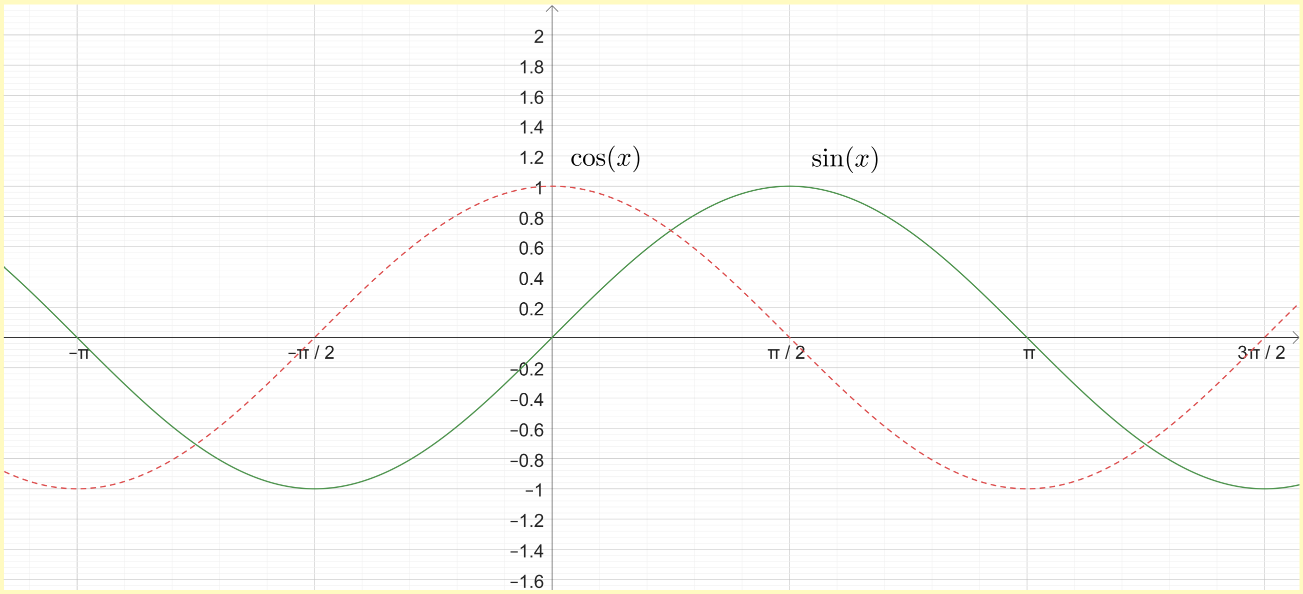
2. *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *l'équation* $\cos(x)^2 = \frac{3}{4}$.

3. *Résoudre dans* $[-\pi;\pi]$, *l'inéquation* $\sin(x) \leq \frac{1}{2}$.

2 Propriétés fonctionnelles

Propriétés et valeurs particulières

La fonction cosinus est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui, à tout réel x, associe $\cos(x)$.
La fonction sinus est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui, à tout réel x, associe $\sin(x)$.



Propriétés de symétrie

$$\cos(2k\pi + x) = \cos(x)$$
$$\sin(2k\pi + x) = \sin(x)$$
$$\cos(\pi - x) = -\cos(x)$$
$$\sin(\pi - x) = \sin(x)$$
$$\cos(\pi + x) = -\cos(x)$$
$$\sin(\pi + x) = -\sin(x)$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$$

où k est un entier relatif.

Définitions

Une fonction définie sur un intervalle I, symétrique par rapport à l'origine, dont la courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées est une fonction paire. Elle vérifie la relation suivante :

$$\forall x \in I, \quad f(-x) = f(x)$$

Une fonction définie sur un intervalle I, symétrique par rapport à l'origine, dont la courbe est symétrique par rapport au point $O(0;0)$ est une fonction impaire. Elle vérifie la relation suivante :

$$\forall x \in I, \quad f(-x) = -f(x)$$

Propriétés

La fonction cosinus est paire et on a $\cos(-x) = \cos(x)$.
La fonction sinus est impaire et on a $\sin(-x) = -\sin(x)$.

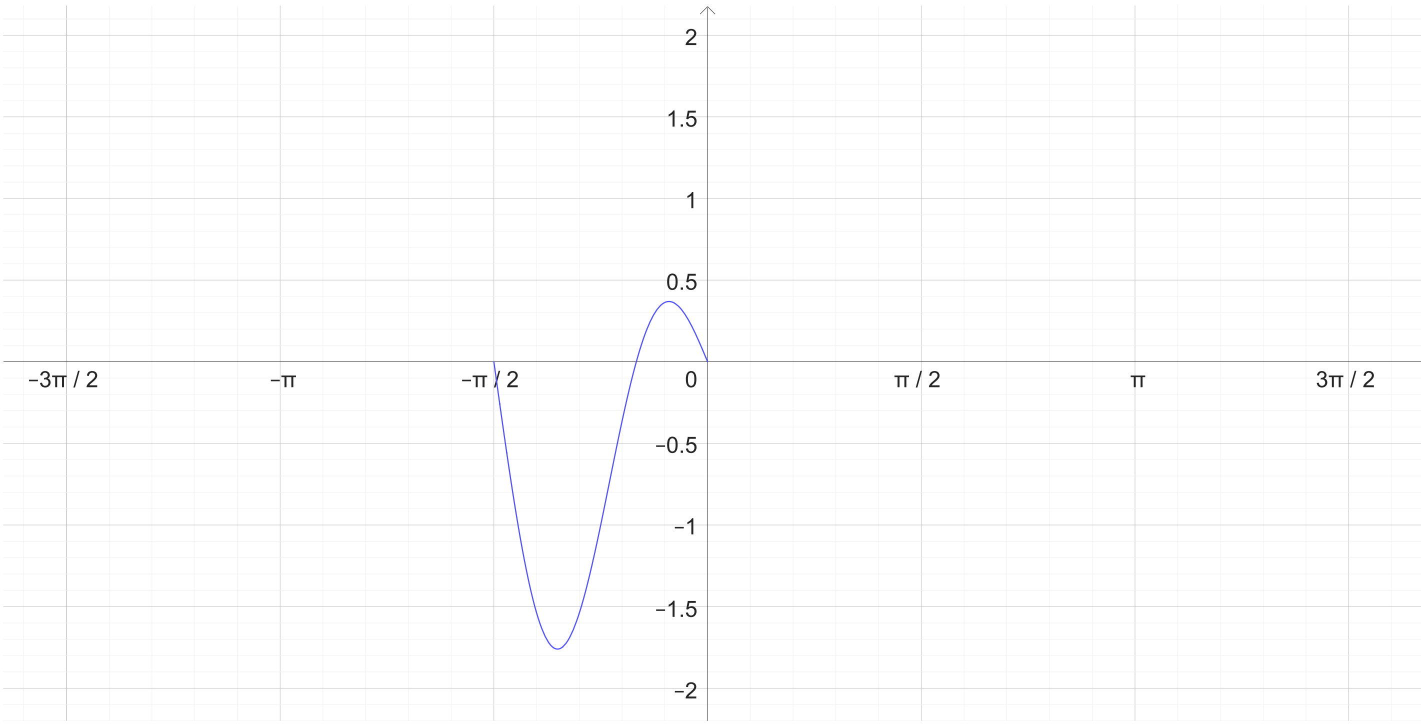
Exemple 2

1. *Démontrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$f(x) = \sin(2x) - \sin(4x)$$

est impaire.

2. *Démontrer que f est périodique de période π.*
3. *Compléter le graphique de la fonction f sur $[-\frac{3\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$:*



3 Études de fonctions

Propriétés

Les fonctions cosinus et sinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$(\cos(x))' = -\sin(x)$$
$$(\sin(x))' = \cos(x)$$

Exemple 3 *Établir le tableau de variations de* $\cos(x)$ *et celui de* $\sin(x)$ *sur* $[0;\pi]$.

Exemple 4 *On considère la fonction* f *définie sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$$f(x) = \cos(4x) - \frac{1}{2}$$

1. *Quelle est la parité de* f *?*
2. *Montrer que* f *est périodique de période* $\frac{\pi}{2}$.
3. *Étudier les variations de* f *sur* $[0;\frac{\pi}{4}]$.
4. *En déduire l'allure de la courbe représentant* f *sur* $[0;\frac{\pi}{4}]$ *puis sur* $[-\pi;\pi]$.