Exemple 3 et 4

Exemple 1 *Soit f une fonction définie sur I et qui en chaque point a de I admet une limite finie $f(a)$.*
On suppose que pour tout a de I, le taux d'accroissement :

$$\frac{f(a+\epsilon)-f(a)}{\epsilon}$$

admet une limite finie, notée $f'(a)$ quand ϵ tend vers 0.

1. *A quoi est équivalent le taux d'accroissement précédent quand ϵ tend vers 0 ?*
   Quand ϵ tend vers 0, le taux d'accroissement tend vers $f'(a)$, donc on peut écrire, quand ϵ proche de 0 :

$$\frac{f(a+\epsilon)-f(a)}{\epsilon} \approx f'(a)$$
$$\Rightarrow f(a+\epsilon) \approx \epsilon f'(a) + f(a)$$

2. *En déduire une équation de la tangente en a à la courbe représentant f quand x tend vers a.*
   La tangente à la courbe en a est la meilleure approximation polynomiale de degré 1 près de a. Or la fonction $T(x) = xf'(a) + f(a)$ est polynomiale de degré 1.
   Par conséquent, la tangente en a à la courbe représentant f a pour équation :

$$y = xf'(a) + f(a)$$

   L'ordonnée à l'origine est $f(a)$ et le coefficient directeur est $f'(a)$.

3. *On suppose maintenant que f est croissante sur $[u; v]$, $u < v$, que dire du signe de $f'(x)$ pour $x \in [u; v]$?*
   Pour $\epsilon > 0$, comme f est croissante alors, pour x et $x+\epsilon$ dans $[u, v]$:

$$x+\epsilon > x$$
$$\Rightarrow f(x+\epsilon) > f(x)$$
$$\Rightarrow f(x+\epsilon) - f(x) > 0$$
$$\Rightarrow \frac{f(x+\epsilon)-f(x)}{\epsilon} > 0$$

Donc si on fait tendre ϵ vers 0, le résultat sera supérieur ou égal à 0, donc :

$$f'(a) \geq 0$$

Pour $\epsilon < 0$, comme f est croissante alors, pour x et $x+\epsilon$ dans $[u, v]$:

$$\begin{aligned} & x+\epsilon < x \\ & \Rightarrow f(x+\epsilon) < f(x) \\ & \Rightarrow f(x+\epsilon) - f(x) < 0 \\ & \Rightarrow \frac{f(x+\epsilon)-f(x)}{\epsilon} > 0 \text{ car deux termes négatifs} \end{aligned}$$

Donc si on fait tendre ϵ vers 0, le résultat sera supérieur ou égal à 0, donc :

$$f'(a) \geq 0$$

Finalement si f est croissante sur $[u, v]$ alors $f'(a) \geq 0 \ \ \forall a \in [u, v]$

4. *On suppose maintenant que f est décroissante sur $[u; v]$, $u < v$, que dire du signe de $f'(x)$ pour $x \in [u; v]$?*
Pour $\epsilon > 0$, comme f est décroissante alors, pour x et $x+\epsilon$ dans $[u, v]$:

$$\begin{aligned} & x+\epsilon > x \\ & \Rightarrow f(x+\epsilon) < f(x) \\ & \Rightarrow f(x+\epsilon) - f(x) < 0 \\ & \Rightarrow \frac{f(x+\epsilon)-f(x)}{\epsilon} < 0 \end{aligned}$$

Donc si on fait tendre ϵ vers 0, le résultat sera inférieur ou égal à 0, donc :

$$f'(a) \leq 0$$

Pour $\epsilon < 0$, comme f est décroissante alors, pour x et $x+\epsilon$ dans

$[u, v]$:

$$\begin{aligned} & x+\epsilon < x \\ & \Rightarrow f(x+\epsilon) > f(x) \\ & \Rightarrow f(x+\epsilon)-f(x) > 0 \\ & \Rightarrow \frac{f(x+\epsilon)-f(x)}{\epsilon} < 0 \end{aligned}$$

Donc si on fait tendre ϵ vers 0, le résultat sera inférieur ou égal à 0, donc :

$$f'(a) \leq 0$$

Finalement si f est décroissante sur $[u, v]$ alors $f'(a) \leq 0 \ \forall a \in [u, v]$

5. *Inversement, on suppose maintenant que $f'(x)$ est positive pour $x \in [u; v]$, que dire des variations de f sur $[u; v]$?*
Pour ϵ proche de 0, on a :

$$\frac{f(a+\epsilon)-f(a)}{\epsilon} \approx f'(a)$$

Donc, comme $f'(a) \geq 0$:

$$\begin{aligned} & \text{pour } \epsilon < 0 \ \ f(a+\epsilon)-f(a) \leq 0 \\ & \text{pour } \epsilon > 0 \ \ f(a+\epsilon)-f(a) \geq 0 \end{aligned}$$

Par conséquent,la fonction est croissante près de a.
Donc on peut en déduire que si $f'(x) \geq 0 \forall x \in [u, v]$ alors f croissante sur $[u, v]$.

6. *Inversement, on suppose maintenant que $f'(x)$ est négative pour $x \in [u; v]$, que dire des variations de f sur $[u; v]$? Pour ϵ proche de 0, on a :*

$$\frac{f(a+\epsilon)-f(a)}{\epsilon} \approx f'(a)$$

Donc, comme $f'(a) \geq 0$ *:*

$$\begin{aligned} &pour\, \epsilon < 0 \;\; f(a+\epsilon) - f(a) \geq 0 \\ &pour\, \epsilon > 0 \;\; f(a+\epsilon) - f(a) \leq 0 \end{aligned}$$

Par conséquent,la fonction est décroissante près de a.
Donc on peut en déduire que si $f'(x) \leq 0 \forall x \in [u, v]$ *alors* f *décroissante sur* $[u, v]$.

Exemple 2 *Soit f la fonction définie sur* $\mathbb{R}\{-5\}$ *:*

$$f(x) = \frac{2x^2 + 13x + 5}{x + 5}$$

1. *Déterminer la limite de cette fonction en $+\infty$ et en $-\infty$.*
   On utilise les méthodes vues aux exemples précédents :
   - ✏ *en $+\infty$, on a une forme indéterminée du type $\frac{+\infty}{+\infty}$. Comme le degré du numérateur est strictement plus grand que celui du dénominateur alors cette forme indéterminée devient $+\infty$.*
   - ✏ *en $-\infty$, on a une forme indéterminée du type $\frac{+\infty}{-\infty}$. Comme le degré du numérateur est strictement plus grand que celui du dénominateur alors cette forme indéterminée devient $-\infty$: le moins vient du quotient des signes.*
2. *Déterminer les limites de cette fonction en -5.*
   On va calculer les limites du numérateur et du dénominateur :

$$\lim_{x\to-5} 2x^2 + 13x + 5 = 2 \times (-5)^2 + 13 \times (-5) + 5 = -10$$
$$\lim_{x\to-5} x + 5 = 0$$

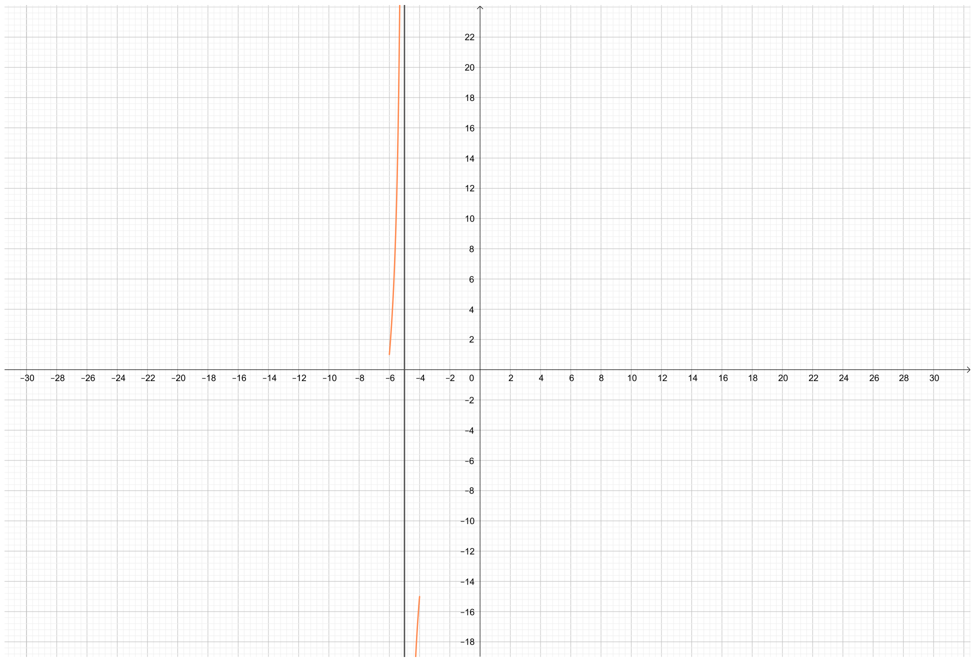
   On obtient donc une limite du type $\frac{-10}{0}$ en -5.
   Or, on manque de précisions sur le signe de ce 0 pour conclure quant au signe qu'aura la limite infinie :

$$\lim_{x\to-5^+} x + 5 = 0^+ \text{ on a regardé la limite quand } x > -5$$
$$\lim_{x\to-5^-} x + 5 = 0^- \text{ on a regardé la limite quand } x < -5$$

   Finalement :

$$\lim_{x\to-5^+} f(x) = \frac{-10}{0^+} = -\infty$$
$$\lim_{x\to-5^-} f(x) = \frac{-10}{0^-} = +\infty$$

3. *Donner l'allure de la courbe représentant f près de -5.*
   On dit que la droite verticale d'équation $x = -5$ est aymptote à la courbe : cette dernière et la droite se confonde quand x se rapproche de -5.



4. *Montrer que :*

$$f(x) = 2x + 3 - \frac{10}{x+5}$$

On doit partir de l'expression de droite pour arriver à celle connue de $f(x)$.

$$\begin{aligned}
&2x+3-\frac{10}{x+5}\\
=&\frac{(2x+3)(x+5)}{x+5}-\frac{10}{x+5}\\
=&\frac{2x^2+10x+3x+15}{x+5}-\frac{10}{x+5}\\
=&\frac{2x^2+13x+15-10}{x+5}\\
=&\frac{2x^2+13x+5}{x+5}\\
=&f(x)
\end{aligned}$$

5. *Calculer* $(2x+3)'$.

$$(2x+3)' = 2x' + 3' = 2 \times 1 = 2$$

6. *Calculer* $\left(\frac{10}{x+5}\right)$ *avec la formule de dérivée en un point.*
Soit $\epsilon \neq 0$*, on va étudier la limite quand* ϵ *tend vers* 0 *du taux d'accroissement suivant :*

$$\begin{aligned}
&\frac{\frac{10}{x+5+\epsilon}-\frac{10}{x+5}}{\epsilon}\\
=&\frac{\frac{10(x+5)}{(x+5+\epsilon)(x+5)}-\frac{10(x+5+\epsilon)}{(x+5)(x+5+\epsilon)}}{\epsilon}\\
=&\frac{\frac{10x+50-(10x+50+10\epsilon)}{(x+5+\epsilon)(x+5)}}{\epsilon}\\
=&\frac{\frac{-10\epsilon}{(x+5+\epsilon)(x+5)}}{\epsilon}\\
=&\frac{-10}{(x+5+\epsilon)(x+5)}
\end{aligned}$$

Ce taux d'accroissement tend vers le quotient suivant quand ϵ *tend vers* 0 *:*

$$\frac{-10}{(x+5)(x+5)}=\frac{-10}{(x+5)^2}$$

7. *En déduire* $f'(x)$*.*
Pour trouver $f'(x)$*, on ajoute les deux limites que nous venons de trouver :*

$$\begin{aligned}
f'(x)&=2-\frac{10}{(x+5)^2}\\
&=\frac{2(x+5)^2}{(x+5)^2}+\frac{10}{(x+5)^2}\\
&=\frac{2(x^2+10x+25)+10}{(x+5)^2}\\
&=\frac{2x^2+20x+60}{(x+5)^2}
\end{aligned}$$

8. *Comparer avec* $\frac{u'(x)}{v'(x)}$*.*
On a :

$$\frac{u'(x)}{v'(x)}=\frac{(2x^2+13x+5)'}{(x+5)'}=\frac{2\times 2x+13}{1}=4x+13$$

On remplace x *par* 0 *pour voit si ces deux fonctions coïncident :*

✏ *pour* $f'(x)$ *on trouve* $\frac{60}{25} = \frac{12}{5}$.

✏ *pour* $\frac{u'(x)}{v'(x)}$, *on trouve* 13

Les deux fonctions sont donc différentes.
On va maintenant regarder le quotient :

$$\begin{aligned}
&\frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} \\
&= \frac{(4x+13)\times(x+5) - (2x^2+13x+5)\times 1}{(x+5)^2} \\
&= \frac{4x^2+20x+13x+65-2x^2-13x-5}{(x+5)^2} \\
&= \frac{2x^2+20x+65-5}{(x+5)^2} \\
&= \frac{2x^2+20x+60}{(x+5)^2}
\end{aligned}$$

On trouve $f'(x)$. *On peut conjecturer la formule suivante :*

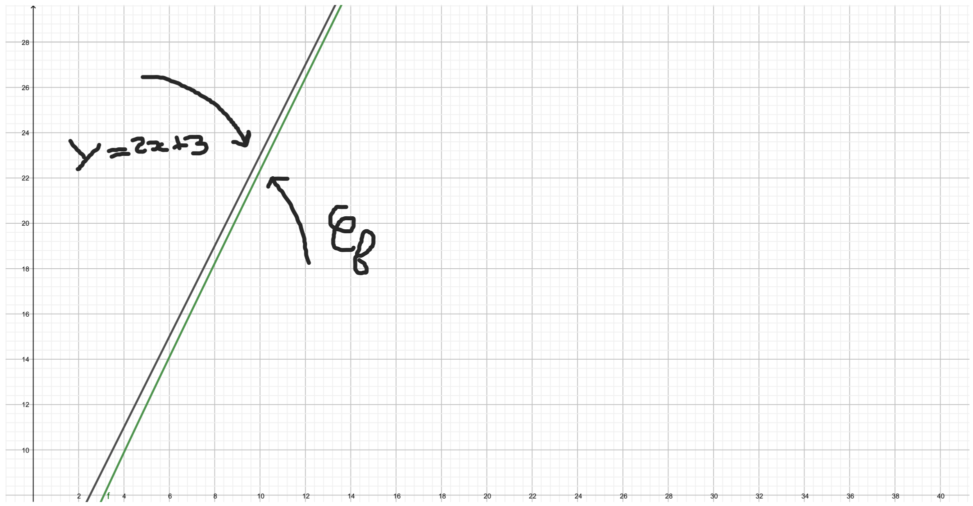
$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2}$$

9. *Déterminer la limite en* $+\infty$ *de la fonction* $f(x) - (2x+3)$.
On a :

$$f(x) - (2x+3) = -\frac{10}{x+5}$$

Or cette dernière fonction a pour limite 0 *en* $+\infty$ *donc* f *tend vers* 0 *en* $+\infty$.

10. *Donner une interprétation graphique de ce résultat en donnant une allure de la courbe en* $+\infty$.
La droite oblique $y = 2x+3$ *est asymptote à la courbe en* $+\infty$ *:*


y = 2x + 3
$\mathcal{C}_f$