☙ Fonction logarithme 7

On considère la fonction suivante définie sur $]0;+\infty[$:

$$f(x) = (11 - 3\ln(x))\ln(x)$$

1. Calculer la limite de f en 0^+
2. Calculer la limite de f en $+\infty$
3. Calculer la dérivée de f.
4. Déterminer le signe de $f'(x)$.
5. En déduire le tableau de variation de $f(x)$.
6. En déduire le nombre de solutions de $f(x) = 0$ et un encadrement d'amplitude 10^{-2} de cette solution.

Correction :

1. On sait que :

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x \to 0^+} (11 - 3\ln(x)) = +\infty \\
&\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty \\
\text{donc } &\lim_{x \to 0^+} (11x - 3\ln(x))\ln(x) = -\infty
\end{aligned}
$$

2.

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x \to +\infty} (11 - 3\ln(x)) = -\infty \\
&\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty \\
\text{donc } &\lim_{x \to +\infty} (11x - 3\ln(x))\ln(x) = -\infty
\end{aligned}
$$

3.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= ((11 - 3\ln(x))\ln(x))' \\
&= (11 - 3\ln(x))'\ln(x) + (11 - 3\ln(x))\ln(x)' \\
&= -3 \times \frac{1}{x}\ln(x) + (11 - 3\ln(x))\frac{1}{x} \\
&= \frac{11 - 6\ln(x)}{x}
\end{aligned}
$$

4.

$$
\begin{aligned}
f'(x) > 0 &\Leftrightarrow 11 - 6\ln(x) > 0 \\
&\Leftrightarrow \ln(x) < \frac{11}{6} \\
&\Leftrightarrow x < e^{\frac{11}{6}}
\end{aligned}
$$

5. On a :

x	0			$e^{\frac{11}{6}}$			$+\infty$
$f'(x)$	‖		$+$	0	$-$		
$f(x)$	‖	$-\infty$	$\nearrow$	16.805555555556	$\searrow$		$-\infty$

6. Comme la fonction$g$ est continue, croissante de $-\infty$ à $16.805555555556 > 0$, alors, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit qu'il existe une unique solution $\alpha_1 \in]0; e^{\frac{11}{6}}[$ tel que $g(\alpha_1) = 0$.
Comme la fonction$g$ est continue, croissante de $16.805555555556 > 0$ à $-\infty$, alors, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit qu'il

existe une unique solution $\alpha_2 \in]e^{\frac{11}{6}}; +\infty[$ tel que $g(\alpha_2) = 0$.

$$\begin{aligned}
&f(0.99) < 0 \\
&f(1.0) > 0 \\
\text{donc } &0.99 < \alpha_1 < 1.0 \\
&f(39.120000000001) > 0 \\
&f(39.130000000001) < 0 \\
\text{donc } &39.120000000001 < \alpha_2 < 39.130000000001
\end{aligned}$$

En regardant plus attentivement, on se rend compte que $\alpha_1 = 1$ et $\alpha_2 = e^{\frac{11}{3}}$.