Probabilités et variables aléatoires : activités

⚽ Exemple 1

Coefficients binomiaux

Ludwig pratique le football dans un club de ligue 1. Il y a **20 équipes** dans le championnat et avant la trève hivernale, chaque équipe doit rencontrer chacune des autres une seule fois.

1. *Quel sera le nombre total de matchs avant la trève ?*
   Comparer ce résultat au nombre :

$$\binom{\mathbf{20}}{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{20}!}{(\mathbf{20}-\mathbf{2})!\mathbf{2}!}$$

   avec $\mathbf{n}! = \mathbf{1} \times \mathbf{2} \times \ldots \times \mathbf{n}$ *que l'on appelle* ***factorielle n***.
   On pourra compter le nombre de matchs que chaque équipe doit faire.

   Méthode 1 :
   Il y a 10 journées de championnat avant la trève et 19 matchs auront lieu chacune de ces journées.
   Ily a aura donc $19 \times 10 = 190$ matchs avant la trève.
   Méthode 2 :
   La première équipe va contribuer à hauteur de 19 matchs car elle va jouer contre tout le monde sauf elle.
   La deuxième équipe va contribuer à hauteur de 18 matchs car elle va jouer contre tout le monde sauf elle et la première équipe.
   En poursuivant le raisonnement, la troisème équipe va contribuer à hauteur de 17 matchs et ainsi de suite.

La dernière équipe va donc apporter 1 match dans le décompte.
Le nombre de matchs avant la trève sera donc de :

$$19+18+17+..+2+1=\frac{(19+1)\times 19}{2}=190$$

on trouve ce résultat en appliquant la formule de la somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique des raison 1.

2. *On décide choisir **trois équipes** au hasard pour faire un mini championnat. Ludwig souhaite calculer le nombre de poules de trois équipes qu'il est possible de construire à partir de* **20** *équipes initiales.*

a. *De combien d'options dispose-t-on pour choisir la première équipe de la poule ?*
On a 20 options pour la première équipe.

b. *De combien d'options dispose-t-on pour choisir la deuxième équipe de la poule ?*
On a 19 options pour la deuxième équipe car on ne peut plus prendre

celle choisie précédemment.

c. *De combien d'options dispose-t-on pour choisir la troisième équipe de la poule ?*
On a 18 options pour la troisième équipe car on ne peut plus prendre

les deux précédentes déjà choisies .

d. *En déduire le nombre de possibilités de choisir trois équipes en les sélectionnant l'une après l'autre.*
Le nombre de possibilités de choisir trois équipes en les sélectionnant

l'une après l'autre est $20\times 19\times 18$.

On peut le voir de la façon suivante, toutes les équipes sont numérotées de 1 à 20.
Si on choisit l'équipe 1 en premier, on a 19 possibilités pour la deuxième équipe.
Idem pour l'équipe 2 choisie en premier et c'est la même chose pour toutes suivantes.
On a donc 19×20 issues pour le choix de deux équipes.
Pour trois équipes, on recommence en partant raisonnant ainsi : on a 19×20 couples à choisir pour les deux premières équipes et pour chacun de ces couples, 18 options pour la troisième équipe.

e. *Est ce que deux triplets de trois mêmes équipes choisies dans des ordres différents constituent des poules différentes ?*
L'ordre n'a pas d'importance dans une poule, puisque ce seront les mêmes

confrontations de jouées.

f. *On appelle A, B et C les trois équipes choisies.*
Il n'a pas été précisé l'ordre dans lequel ont été choisies les équipes.
Lister toutes les possibilités. Exprimer leur nombre en fonction d'une factorielle.
Pour les trois même équipes A, B et C, on a les ordres suivants :

$$A-B-C \quad A-C-B \quad B-A-C \quad B-C-A \quad C-A-B \quad C-B-A$$

Il y a $6 = 3!$ possibilités.

g. *En déduire le nombre de poules de trois équipes qu'il est possible de construire à partir de* **20** *équipes initiales.*
Pour obtenir le nombre de poules, on va diviser le nombre de triplets

d'équipes que l'on peut choisir (en prenant donc compte de l'ordre), par le nombre de triplets de même trois équipes que l'on peut lister ; on obtient : $\frac{20\times 19\times 18}{3!}$.

h. *Comparer ce nombre au coefficient binomial suivant :*

$$\binom{\mathbf{20}}{\mathbf{3}} = \frac{\mathbf{20}!}{(\mathbf{20}-\mathbf{3})!\mathbf{3}!}$$

$$\binom{20}{3} = \frac{20!}{(20-3)!3!} = \frac{20\times 19\times 18\times \cancel{17}\times \cancel{16}\times ..\times \cancel{2}\times \cancel{1}}{\cancel{17}\times \cancel{16}..\times \cancel{2}\times \cancel{1}\times 6!} = \frac{20\times 19\times 18}{3!}$$

Les résultats sont indentiques.

3. *Conjecturer une formule donnant le nombre d'ensembles à* **p** *éléments parmi un plus grand ensemble à* **n** *éléments.*

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{(n-p)!p!}$$

⚽ Exemple 2

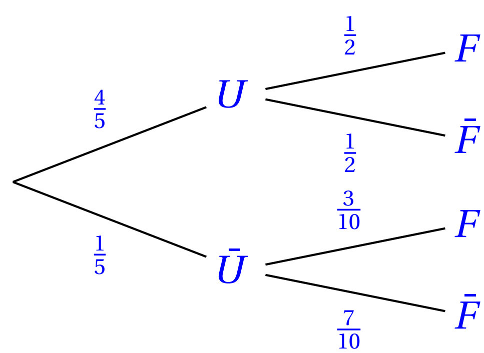
Probabilités et arbres

Ludwig a été selectionné pour la coupe du monde de football.
Il veut estimer les chances de succès de la France, si jamais elle sort de sa poule, en fonction de ses résultats aux coupes du monde précédentes.
Une étude statistique lui permet de savoir que si elle sort de sa poule :

- ✏ la France a une probabilité de $\frac{4}{5}$ d'en être première et à partir de là, une probabilité de $\frac{1}{2}$ d'aller en finale.

- ✏ dans le cas où elle finit deuxième de sa poule, elle a une probabilité de $\frac{3}{10}$ d'aller en finale.

1. *Représenter la situation par un arbre de probabilité en explicitant les événements.*



avec les notations suivantes :

- ✏ U : événement " sortir premier de la poule ".
- ✏ F : événement " aller en final ".
- ✏ $\bar{U}$: événement " ne pas sortir premier de la poule ".
- ✏ $\bar{F}$: événement " ne pas aller en final ".

2. *Préciser la probabilité des événements et les probabilités conditionnelles que nous donne l'énoncé.*
L'énoncé nous donne directement les probabilités suivantes :

$$P(U) = \frac{4}{5}$$
$$P_U(F) = \frac{1}{2}$$
$$P_{\bar{U}}(F) = \frac{3}{10}$$

3. *Calculer la probabilité que Ludwig aille en finale de la coupe du monde en donnant les détails.*
On cherche la probabilité $P(F)$; nous l'obtenons en proçédant ainsi :

$$\begin{aligned} P(F) &= P(F \cap U) + P(F \cap \bar{U}) \\ &= P(U) \times P_U(F) + P(\bar{U}) \times P_{\bar{U}}(F) \\ &= P(U) \times P_U(F) + (1 - P(U)) \times P_{\bar{U}}(F) \\ &= \frac{4}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \times \frac{3}{10} \\ &= \frac{20}{50} + \frac{3}{50} \\ &= \frac{23}{50} \end{aligned}$$

Exemple 3

Loi binomiale

Une grande école organise un test de sélection pour recruter ses futurs étudiants. Dans ce test, il y a **40** questions, qui sont toutes indépendantes les unes des autres.
Chacune des questions propose **quatre solutions possibles dont une seule est correcte**.
Pour réussir ce test, un étudiant doit répondre correctement à au moins **36** questions.
Ludwig, qui a participé à la coupe du monde et qui a donc eu du mal à se préparer pour l'examen, se demande quelle est la probabilité d'obtenir une note donnée, s'il répondait au hasard à chaque question.
On appelle X la variable aléatoire donnant le nombre de réponses correctes obtenues en répondant au hasard.

1. *Pour une question donnée du test, quelle est la probabilité qu'il y réponde correctement au hasard ?*
   Il y a une seule solution correcte parmi les quatre proposées : la probabilité de la trouver en répondant au hasard est $\frac{1}{4}$.

2. *Combien y-a-t-il de façon d'obtenir* **20** *réponses correctes ?* **36** *réponses correctes ?*
   Il y a autant de façon d'obtenir 20 réponses correctes que le nombre de façon de choisir 20 éléments parmi 40 : ce nombre est $\binom{40}{20}$.
   Il y a autant de façon d'obtenir 36 réponses correctes que le nombre de façon de choisir 36 éléments parmi 40 : ce nombre est $\binom{40}{36}$.

3. *Si l'étudiant a* **20** *réponses correctes, combien de questions sont incorrectes ?*
   Si l'étudiant a **36** *réponses correctes, combien de questions sont incorrectes ?*
   Si l'étudiant a 20 réponses correctes, $40-20=20$ sont incorrectes.
   Si l'étudiant a 37 réponses correctes, $40-36=4$ sont incorrectes.

4. *En déduire les expressions de* $\mathbf{P(X=20)}$ *et* $\mathbf{P(X=36)}$.
Chaque réponse correcte a une probabilité de $\frac{1}{4}$ tandis que chaque réponse incorrecte a une probabilité de $\frac{3}{4}$: la probabilité de chaque combinaison de 20 réponses correctes et 20 réponses incorrectes est donc $\left(\frac{1}{4}\right)^{20}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{20}$.
Comme on a $\binom{40}{20}$ combinaisons précédemment évoquées, on en déduit que :

$$P(X=20)=\binom{40}{20}\times\left(\frac{1}{4}\right)^{20}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{40-20}$$

Chaque réponse correcte a une probabilité de $\frac{1}{4}$ tandis que chaque réponse incorrecte a une probabilité de $\frac{3}{4}$: la probabilité de chaque combinaison de 36 réponses correctes et 4 réponses incorrectes est donc $\left(\frac{1}{4}\right)^{36}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{4}$.
Comme on a $\binom{40}{36}$ combinaisons précédemment évoquées, on en déduit que :

$$P(X=36)=\binom{40}{36}\times\left(\frac{1}{4}\right)^{36}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{40-36}$$

5. *Exprimer* $\mathbf{P(X\leq 35)}$ *comme une somme de probabilités.*
On a :

$$P(X\leq 35)=P(X=0)+P(X=1)+..+P(X=34)+P(X=35)$$

6. *Exprimer* $\mathbf{P(X\geq 36)}$ *en fonction de* $\mathbf{P(X\leq 35)}$.
On a :

$$P(X\geq 36)=P(X=36)+P(X=37)+P(X=38)+P(X=39)+P(X=40)$$

7. *Exprimer* $\mathbf{P(X > n)}$ *en fonction de* $\mathbf{P(X \leq n)}$.

$$P(X > n) = P(X \geq n+1) = 1 - P(X \leq n)$$

8. *Est-ce que l'étudiant qui répond au hasard a choisi une stratégie qui a de bonnes chances de réussir ?*
Pour répondre à cette question, il faut calculer la probabilité précédente :

$$\begin{aligned}
P(X \geq 36) &= P(X=36) + P(X=37) + P(X=38) + P(X=39) + P(X=40) \\
&= \binom{40}{36} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{36} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{40-36} + \binom{40}{37} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{37} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{40-37} \\
&+ \binom{40}{38} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{38} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{40-38} + \binom{40}{39} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{39} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{40-39} \\
&+ \binom{40}{40} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{40} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{40-40} \\
&\approx 0
\end{aligned}$$

Il est fort peu probable que l'étudiant réussisse en suivant cette stratégie.
Le calcul précédent peut être également fait en utilisant la calculatrice et en se servant du fait que, vu comment la variable X suit une loi binomiale. En effet, X compte le nombre de succès (ici le fait d'avoir une bonne réponse) d'une répétition de 40 épreuves de Bernouilli (car chaque question a deux issues possibles : soit on y répond correctement soit incorrectement) qui sont indépendantes entre elles et qui offrent la même probabilité, $\frac{1}{4}$, d'avoir un succès.
C'est ce qu'on appelle une loi binomiale $\mathscr{B}\left(40; \frac{1}{4}\right)$.

9. *En répondant au hasard, quelle note peut-il espérer avoir ?*
On doit calculer ce qu'on appelle l'espérance de X, noté $E(X)$, qui correspond à une moyenne pondérée :

les effectifs sont les nombres k de bonnes réponses possibles et le coefficient associé à k est la probabilité $P(X=k)$.
Finalement :

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{k=0}^{40} k \times P(X=k) \\
&= \sum_{k=0}^{40} k \times \binom{40}{k} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{k} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{40-k} \\
&= \sum_{k=1}^{40} k \times \frac{40!}{k!(40-k)!} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{k} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{40-k} \\
&= \sum_{k=1}^{40} \times \frac{40!}{(k-1)!(40-k)!} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{k} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{40-k} \\
&= \sum_{q=0}^{39} \times \frac{40!}{q!(39-k)!} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{q+1} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{39-q} \quad \text{en posant q=k-1} \\
&= 40 \times \frac{1}{4} \sum_{q=0}^{39} \times \frac{39!}{q!(39-k)!} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{q} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{39-q} \\
&= 40 \times \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\right)^{39} \quad \text{d'après la formule du binôme de Newton} \\
&= 40 \times \frac{1}{4} \times 1 \\
&= 10
\end{aligned}$$

On a utilisé la formule du binôme de Newton que nous verrons plus tard dans l'année. On constate que le résultat est le produit des paramètres de cette loi.
En répondant au hasard, en moyenne, un étudiant aura 10 réponses correctes.

10. *Que font les deux fonctions préséntées dans l'encadré suivant ?*

```
def f(n):
    if n==0:
        return 1
    else:
        F=1
        for k in range(2,n+1):
            F=F*k
        return F

def seuil(a,p,n):
    P=(1-p)**n
    k=0
    while P<a:
        k=k+1
        P=P+f(n)/(f(n-k)*f(k))*p**k*(1-p)**(n-k)
    return k
```

La première fonction renvoie la valeur de $n!$.
La seconde fonction nous renvoie la plus petite valeur de k tel que : $P(X \leq k) \geq a$

11. *On veut déterminer l'entier n tel que :*

$$P(X > n) \leq 0.25$$

Comment peut-on utiliser l'algorithme précédent ?
On sait que :

$$P(X > n) \leq 0.25 \Leftrightarrow 1 - P(X \leq n) \leq 0.25 \Leftrightarrow P(X \leq n) \geq 0.75$$

On utilise la deuxième fonction en tapant la commande suivante $seuil(0.75, 0.25, 40)$