↜ Fonction logarithme 7

On considère la fonction suivante définie sur $]0;+\infty[$:

$$f(x) = (9 - 1\ln(x))\ln(x)$$

1. Calculer la limite de f en 0^+
2. Calculer la limite de f en $+\infty$
3. Calculer la dérivée de f.
4. Déterminer le signe de $f'(x)$.
5. En déduire le tableau de variation de $f(x)$.
6. En déduire le nombre de solutions de $f(x) = 0$ et un encadrement d'amplitude 10^{-2} de cette solution.

Correction :

1. On sait que :

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to 0^+} (9-1\ln(x)) = +\infty \\ &\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty \\ \text{donc } &\lim_{x\to 0^+} (9x-1\ln(x))\ln(x) = -\infty \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to +\infty} (9-1\ln(x)) = -\infty \\ &\lim_{x\to +\infty} \ln(x) = +\infty \\ \text{donc } &\lim_{x\to +\infty} (9x-1\ln(x))\ln(x) = -\infty \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} f'(x) &= ((9-1\ln(x))\ln(x))' \\ &= (9-1\ln(x))'\ln(x) + (9-1\ln(x))\ln(x)' \\ &= -1\times\frac{1}{x}\ln(x) + (9-1\ln(x))\frac{1}{x} \\ &= \frac{9-2\ln(x)}{x} \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\Leftrightarrow 9-2\ln(x) > 0 \\ &\Leftrightarrow \ln(x) < \frac{9}{2} \\ &\Leftrightarrow x < e^{\frac{9}{2}} \end{aligned}$$

5. On a :

x	0		$e^{\frac{9}{2}}$		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	
$f(x)$	|| $-\infty$	$\nearrow$	20.25	$\searrow$	$-\infty$

6. Comme la fonction$g$ est continue, croissante de $-\infty$ à $20.25>0$, alors, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit qu'il existe une unique solution $\alpha_1 \in]0; e^{\frac{9}{2}}[$ tel que $g(\alpha_1)=0$.
Comme la fonction$g$ est continue, croissante de $20.25>0$ à $-\infty$, alors, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit qu'il existe une unique

solution $\alpha_2 \in]e^{\frac{9}{2}};+\infty[$ tel que $g(\alpha_2)=0$.

$$\begin{aligned}
&f(0.99)<0\\
&f(1.0)>0\\
\text{donc } &0.99<\alpha_1<1.0\\
&f(8103.0800001305)>0\\
&f(8103.0900001305)<0\\
\text{donc } &8103.0800001305<\alpha_2<8103.0900001305
\end{aligned}$$

En regardant plus attentivement, on se rend compte que $\alpha_1 = 1$ et $\alpha_2 = e^{\frac{9}{1}}$.