Suites : activité d'introduction

Une société produit des bactéries pour l'industrie. En laboratoire, il a été mesuré que, dans un milieu nutritif approprié, la masse de ces bactéries, mesurée en grammes, augmente de 20 % en un jour.
La société met en place le dispositif industriel suivant.
Dans une cuve de milieu nutritif, on introduit initialement 1 kg de bactéries. Ensuite, chaque jour, à heure fixe, on remplace le milieu nutritif contenu dans la cuve. Durant cette opération, 100 g de bactéries sont perdus.
L'entreprise se fixe pour objectif de produire 30 kg de bactéries.

1. a. En utilisant les informations de l'énoncé, donner une expression de la suite u_{n+1} en fonction de u_n pour $n \geq 0$.
On peut modéliser la suite u_{n+1} par la relation de récurrence suivante :

$$u_{n+1} = 1.2u_n - 100$$

b. L'entreprise souhaite savoir au bout de combien de jours la masse de bactéries dépassera 30 kg. À l'aide de la calculatrice, donner la réponse à ce problème.
Les différentes captures d'écran en fin de PDF, expliquent comment faire pour obtenir le tableau de valeurs.
On constate que :

$$u_8 = 2650$$
$$u_9 = 3080$$

La valeur cherchée est donc $n = 9$: il faut neuf jours pour que la masse de bactéries dépasse 30kgs.

c. On peut également utiliser l'algorithme suivant pour répondre au problème posé dans la question précédente.
Recopier et compléter cet algorithme.

Variables	u et n sont des nombres

Traitement	u prend la valeur 1000
	n prend la valeur 0
	Tant que $u < 30$ faire
	    u prend la valeur $1.2u - 100$
	    n prend la valeur $n+1$
	Fin Tant que

Sortie	Afficher n

2. On définit la suite (v_n) par : pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 500$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.
Pour montrer qu'une suite est géométrique, on peut :
✏ soit montrer que le quotient $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ prend toujours la même valeur, qui sera la raison.
✏ soit montrer que $v_{n+1} = qv_n$ avec q qui sera la raison à déterminer.
Ici, vu comment sont définies les suites (u_n) et (v_n), on va utiliser la deuxième méthode :

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= u_{n+1} - 500 \\
&= 1.2u_n - 100 - 500 \\
&= 1.2u_n - 600 \\
&= 1.2\left(u_n - \frac{600}{1.2}\right) \\
&= 1.2\,(u_n - 500) \\
&= 1.2v_n
\end{aligned}$$

Cette égalité justifie que la suite est géométrique et que sa raison est $q = 1.2$; son premier terme est $v_0 = u_0 - 500 = 1000 - 500 = 500$.

b. Exprimer v_n, puis u_n, en fonction de n.

On sait exprimer le terme général d'une suite géométrique en fonction de n, de sa raion et de son premier terme :

$$v_n = v_0 q^n = 500 \times 1.2^n \quad \forall n \geq 0$$

Or $u_n = v_n + 500$ donc $u_n = 500 \times 1.2^n + 500 \quad \forall n \geq 0$.

c. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

Pour montrer qu'une suite est croissante, on peut soit montrer que $u_{n+1} - u_n \geq 0$ ou soit montrer que $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ quand u_n est toujours du même signe. Dans notre exemple, étudier $u_{n+1} - u_n$ est plus pertinent :

$$u_{n+1} - u_n = v_{n+1} - v_n = 500 \times 1.2^{n+1} - 500 \times 1.2^n = 500 \times 1.2^{n+1} \times (1.2 - 1) > 0 \forall n \geq 0$$

Donc la suite est bien croissante.

d. Montrer que $u_n \geq 1000, \quad \forall n \geq 0$.

On sait que :

$$u_n = 500 \times 1.2^n + 500 \quad \forall n \geq 0$$

Or $1.2^n \geq 1 \quad \forall n \geq 0$ car $1.2 > 1$ donc $500 \times 1.2^n > 500 \quad \forall n \geq 0$ et par conséquent, $500 \times 1.2^n + 500 > 1000 \quad \forall n \geq 0$.

e. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Comme la raison $1.2 > 1$ alors le terme 1.2^n tend vers $+\infty$, ainsi $500 \times 1.2^n + 500$ tend également vers $+\infty$ car le terme devant 1.2^n est strictement positif.

3. On va démontrer trois résultats obtenus précédemment d'une autre manière, directement, en utilisant le raisonnement par récurrence

a. Montrer que $u_n = 500 + 500 \times 1.2^n, \quad \forall n \geq 0$.

Une démonstration par récurrence se fait en trois temps :

✏ **L'initialisation** : on montre la propriété pour le premier indice ; en général $n = 0$ ou $n = 1$.

✏ **L'hérédité** : une fois l'initialisation faite, on fait une hypothèse de récurrence.
On suppose que la propriété est vraie pour un indice n plus grand que celui de l'initialisation
On se sert de cette propriété et des données de l'exercice pour montrer la propriété au rang $n + 1$.

✏ On conclut et on énonce la propriété et on précise pour quelle indice elle est vraie.

Initialisation : on montre la propriété pour $n = 0$. On sait que $u_0 = 1000$ et $500 + 500 \times 1.2^0 = 500 + 500 \times 1 = 500 + 500 = 1000$: la propriété est donc vraie pour le rang $n = 0$.

Hérédité : On suppose que la propriété est vraie pour un rang n plus grand que 0 ; donc $u_n = 500 + 500 \times 1.2^n$.

Regardons si la propriété est vraie au rang $n + 1$:

$$u_{n+1} = 1.2 u_n - 100 = 1.2 \left(500 + 500 \times 1.2^n\right) - 100$$

On vient de montrer l'hérédité de la propriété.

Couplé avec l'initialisation, nous venons de montrer que cette propriété etait vraie pour $n \geq 0$:

$$u_n = 500 + 500 \times 1.2^n, \quad \forall n \geq 0$$

b. Montrer que $u_n \geq 1000, \quad \forall n \geq 0$.

Initialisation : on montre la propriété pour $n = 0$. On sait que $u_0 = 1000$: la propriété est vraie au rang $n = 0$.

Hérédité : on suppose que la propriété est vraie pour un rang n plus grand que 0 ; donc $u_n \geq 1000$.

Regardons si c'est le cas pour $n + 1$, en se servant uniquement des propriétés données dans l'énoncé et de l'hypothèse de recurrence :

$$u_{n+1} = 1.2 u_n - 100 \geq 1.2 \times 1000 - 100 \geq 1200 - 100 \geq 1000$$

On vient de montrer l'hérédité de la propriété.
Couplé avec l'initialisation, nous venons de montrer que cette propriété etait vraie pour $n \geq 0$:

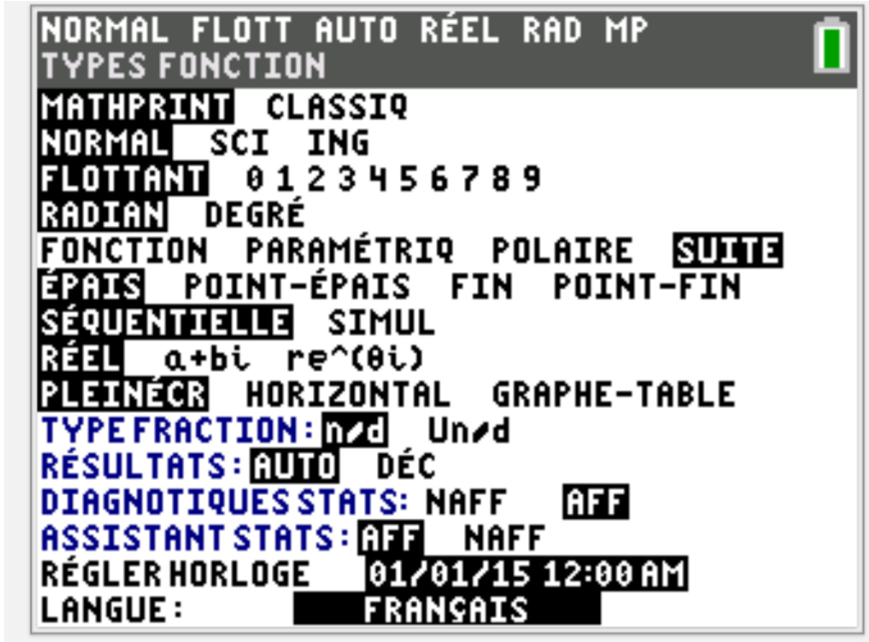
$$u_n \geq 1000, \quad \forall n \geq 0$$

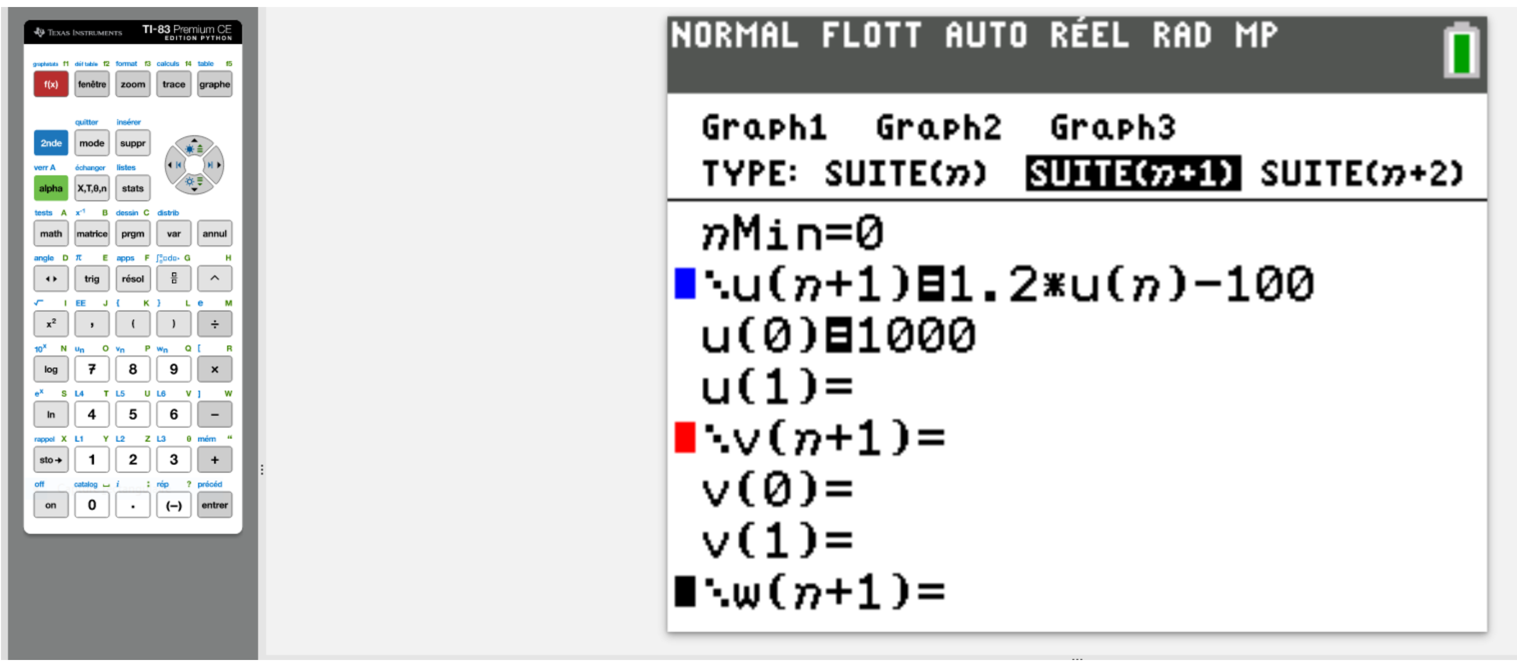
c. Montrer que (u_n) est croissante.
Initialisation : on montre la propriété pour $n = 0$. On sait que $u_0 = 1000$ et $u_1 = 1.2 \times u_0 - 100 = 1100$ donc $u_1 \geq u_0$.
Hérédité : on suppose que la propriété est vraie pour un rang n plus grand que 0 ; donc $u_{n+1} \geq u_n$.
Regardons si c'est le cas pour $n+1$, en se servant uniquement des propriétés données dans l'énoncé et de l'hypothèse de recurrence :

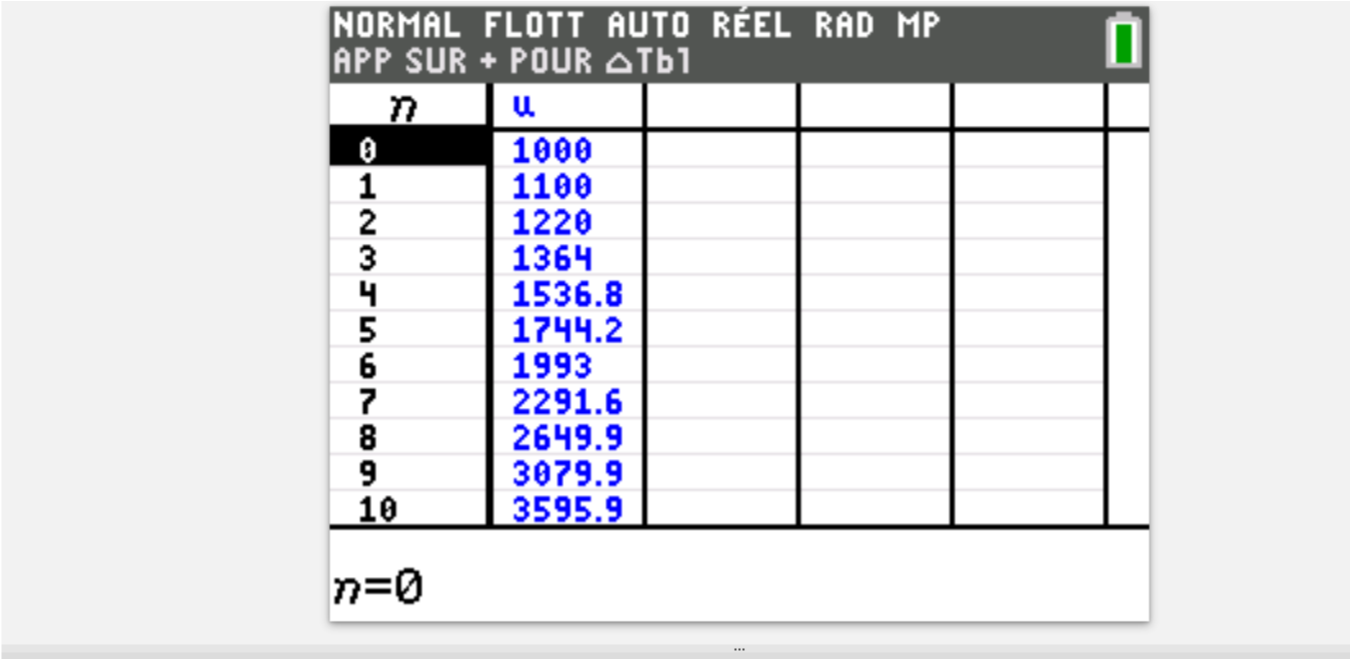
$$u_{n+2} = 1.2u_{n+1} - 100 \geq 1.2 \times u_n - 100 = u_{n+1}$$

On vient de montrer l'hérédité de la propriété.
Couplé avec l'initialisation, nous venons de montrer que cette propriété etait vraie pour $n \geq 0$:

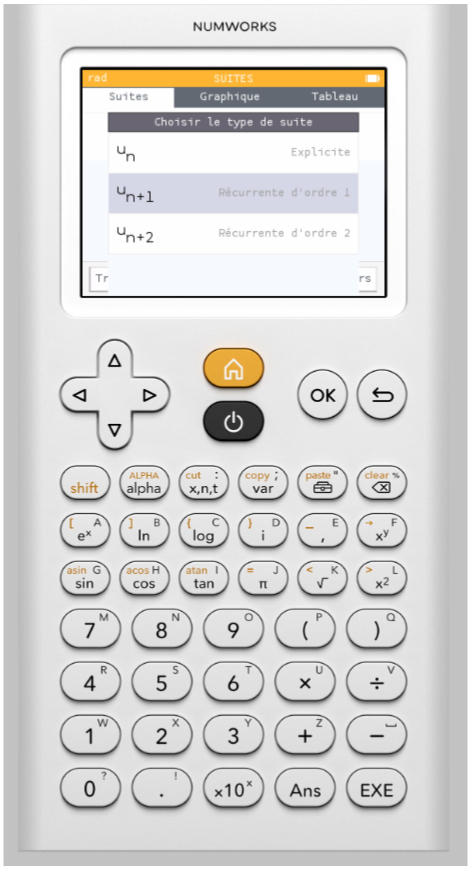
$$u_{n+1} \geq u_n, \quad \forall n \geq 0$$


NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP
TYPES FONCTION
MATHPRINT CLASSIQ
NORMAL SCI ING
FLOTTANT 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
RADIAN DEGRÉ
FONCTION PARAMÉTRIQ POLAIRE SUITE
ÉPAIS POINT-ÉPAIS FIN POINT-FIN
SÉQUENTIELLE SIMUL
RÉEL a+bi re^(θi)
PLEINÉCR HORIZONTAL GRAPHE-TABLE
TYPE FRACTION: n/d Un/d
RÉSULTATS: AUTO DÉC
DIAGNOTIQUES STATS: NAFF AFF
ASSISTANT STATS: AFF NAFF
RÉGLER HORLOGE 01/01/15 12:00 AM
LANGUE: FRANÇAIS


NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP
Graph1 Graph2 Graph3
TYPE: SUITE(n) SUITE(n+1) SUITE(n+2)
nMin=0
u(n+1)=1.2*u(n)−100
u(0)=1000
u(1)=
v(n+1)=
v(0)=
v(1)=
w(n+1)=

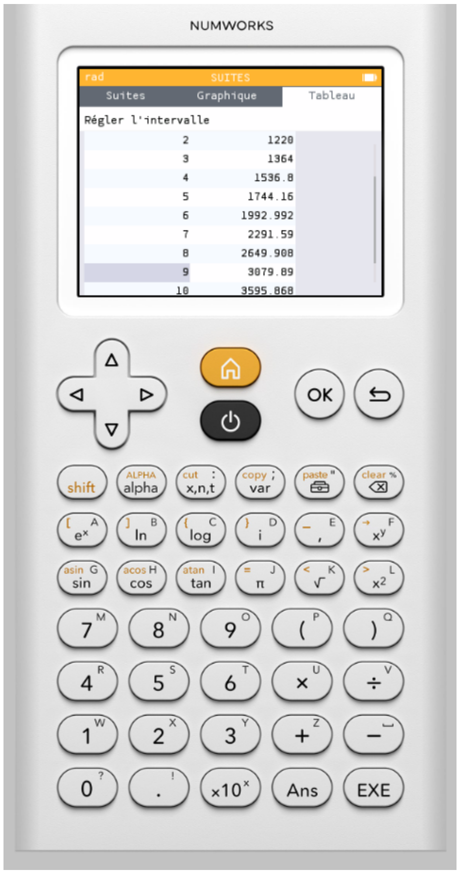

NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP
APP SUR + POUR △Tbl
n
u
0
1000
1
1100
2
1220
3
1364
4
1536.8
5
1744.2
6
1993
7
2291.6
8
2649.9
9
3079.9
10
3595.9
n=0


NUMWORKS
rad
APPLICATIONS
Statistiques
Probabilités
Solveur
Suites
Régressions
Paramètres
OK
EXE
Ans


NUMWORKS
rad
SUITES
Suites
Graphique
Tableau
Choisir le type de suite
un
Explicite
un+1
Récurrente d'ordre 1
un+2
Récurrente d'ordre 2
OK
shift
alpha
x,n,t
var
ln
log
sin
cos
tan
Ans
EXE


NUMWORKS
rad
SUITES
Suites
Graphique
Tableau
un+1 = un
u0 =
Ajouter une suite
1.2un-100


NUMWORKS
rad
SUITES
Suites
Graphique
Tableau
$u_{n+1} = 1.2u_n - 100$
$u_0 = 1000$
Ajouter une suite
Tracer le graphique
Afficher les valeurs


NUMWORKS
rad
SUITES
Suites
Graphique
Tableau
Régler l'intervalle
2 1220
3 1364
4 1536.8
5 1744.16
6 1992.992
7 2291.59
8 2649.908
9 3079.89
10 3595.868