

## ♣ Récurrences 5

On considère la suite :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 7u_n - 60n - 80 \\ u_0 = 24 \end{cases}$$

1. Calculer  $u_1$ .
2. On pose :  $\forall n \in \mathbb{N} : v_n = u_n - 10n - 15$ .  
Montrer que la suite  $(v_n)$  est géométrique . Donner la raison et le premier terme.
3. En déduire que l'expression de  $v_n$  en fonction de  $n$ .
4. En déduire que l'expression de  $u_n$  en fonction de  $n$ .
5. En déduire le sens de variation de la suite  $(u_n)$ .

1. On a :

$$u_1 = 7u_0 - 60 \times 0 - 80 = 88$$

2. On a :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 10(n+1) - 15$$

$$v_{n+1} = 7u_n - 60n - 80 - 10(n+1) - 15$$

$$v_{n+1} = 7u_n - (60+10)n - 15 - 80 - 10$$

$$v_{n+1} = 7u_n - 70n - 105$$

$$v_{n+1} = 7 \left( u_n - \frac{70}{7}n - \frac{105}{7} \right)$$

$$v_{n+1} = 7(u_n - 10n - 15)$$

$$v_{n+1} = 7v_n$$

3. Comme la suite  $(v_n)$  est géométrique de raison 7, on peut en déduire que :

$$v_n = 7^n v_0$$

$$v_n = 7^n(u_0 - 15)$$

$$v_n = 9 \times 7^n$$

4. On a :

$$v_n = u_n - 10n - 15$$

$$\Leftrightarrow u_n = v_n + 10n + 15$$

$$\Leftrightarrow u_n = 9 \times 7^n + 10n + 15$$

5. On doit déterminer le signe de  $u_{n+1} - u_n$  :

$$u_{n+1} - u_n = 9 \times 7^{n+1} + 10(n+1) + 15 - (9 \times 7^n + 10n + 15)$$

$$= 9 \times 7^n(7-1) + 10n + 10 + 15 - 10n - 15$$

$$= 54 \times 7^n + 10 > 0$$

Comme  $u_{n+1} - u_n > 0$ , on en déduit que la suite  $(u_n)$  est croissante.