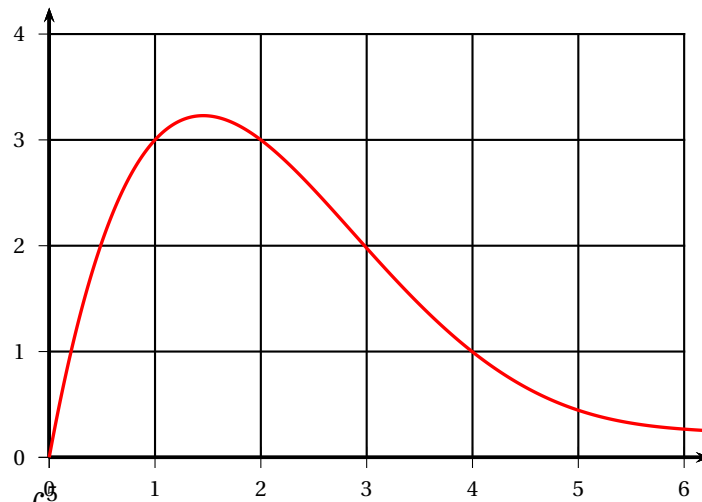


☞ Calculs d'intégrales : exercices



Exercice 1

Un encadrement de l'intégrale $I = \int_1^6 f(x) dx$ est :

- A. $0 \leq I \leq 4$
- C. $5 \leq I \leq 10$

- B. $1 \leq I \leq 5$
- D. $10 \leq I \leq 15$

Exercice 2 Calculer les intégrales suivantes :

$$A = \int_1^2 (5x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 3x + 5) dx$$

$$B = \int_1^2 \frac{1}{x^3} dx$$

$$C = \int_0^2 \frac{3x+1}{3x^2+2x+1} dx$$

$$D = \int_0^3 \frac{1}{\sqrt{2x+3}} dx$$

$$E = \int_0^1 e^{-5x+1} dx$$

Exercice 3 En utilisant une intégration par partie, calculer les intégrales suivantes :

$$A = \int_0^{\pi} x \cos(x) dx$$

$$B = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x e^{-2x} dx$$

$$C = \int_1^e \ln(t) dt$$

$$D = \int_1^e \ln(t)^2 dt$$

$$E = \int_1^e \frac{\ln(x)}{x} dx$$

Exercice 4 On considère la fonction F définie sur $[1; +\infty[$ par :

$$F(x) = \int_1^x \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt$$

1. Montrer que F est dérivable sur $[1; +\infty[$ et préciser l'expression de $F'(x)$ pour $x \in [1; +\infty[$.
2. En déduire le sens de variation de F .
3. Vérifier que, pour $t \geq 1$, on a :

$$\frac{\ln(t)}{(1+t)^2} \leq f(t) \leq \frac{\ln(t)}{t^2}$$

4. Pour $x \geq 1$, on pose :

$$I(x) = \int_1^x \frac{\ln(t)}{t^2} dt$$

Calculer $I(x)$.

5. Pour $x \geq 1$, on pose :

$$J(x) = \int_1^x \frac{\ln(t)}{(1+t)^2} dt$$

En utilisant l'égalité :

$$\forall t \geq 1, \frac{1}{t(t+1)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}$$

calculer $J(x)$.

6. Déduire de ce qui précède que, pour $x \geq 1$, on a :

$$\ln(2) + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) - \frac{\ln(x)}{x+1} \leq F(x) \leq 1 - \frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x}$$

7. On admet que $F(x)$ converge en $+\infty$ vers l .
Sans calculer l , vérifier que :

$$\ln(2) \leq l \leq 1$$

8. On définit sur $[1; +\infty[$ la fonction G par :

$$G(x) = F\left(\frac{1}{x}\right) - F(x)$$

Calculer $G'(x)$ pour $x \geq 1$.

9. Vérifier que, pour tout $x \geq 1$, $G(x) = 0$.
10. En déduire une relation que vérifie la fonction F .

Exercice 5 On considère la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n non nul, par :

$$I_n = \int_1^e (\ln(t))^n dt$$

1. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a $I_n \geq 0$.
2. Montrer que la suite (I_n) est décroissante.
3. Que peut-on en déduire pour la suite (I_n) ?
4. Calculer I_1 .
5. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul :

$$I_{n+1} = e - (n+1)I_n$$

En déduire les valeurs de I_2 et de I_3 .

6. Conjecturer, à l'aide d'une calculatrice, la limite l de la suite (I_n) en l'infini.
7. En raisonnant par l'absurde, montrer que $l = 0$.

Exercice 6 L'exercice est constitué de deux parties indépendantes.

Partie I

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on désigne par f_n la fonction définie sur $[0 ; 1]$ par :

$$f_n(x) = x^n e^x$$

On note C_n la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) du plan.

On désigne par (I_n) la suite définie pour tout entier n supérieur ou égal à 1 par :

$$I_n = \int_0^1 x^n e^x \, dx.$$

1. **a.** On désigne par F_1 la fonction définie sur $[0; 1]$ par :

$$F_1(x) = (x - 1)e^x.$$

Vérifier que F_1 est une primitive de la fonction f_1 .

- b.** Calculer I_1 .

2. À l'aide d'une intégration par parties, établir la relation pour tout n supérieur ou égal à 1 ,

$$I_{n+1} = e - (n + 1)I_n.$$

3. Calculer I_2 .

4. On considère la fonction `mystere` écrite dans le langage Python :

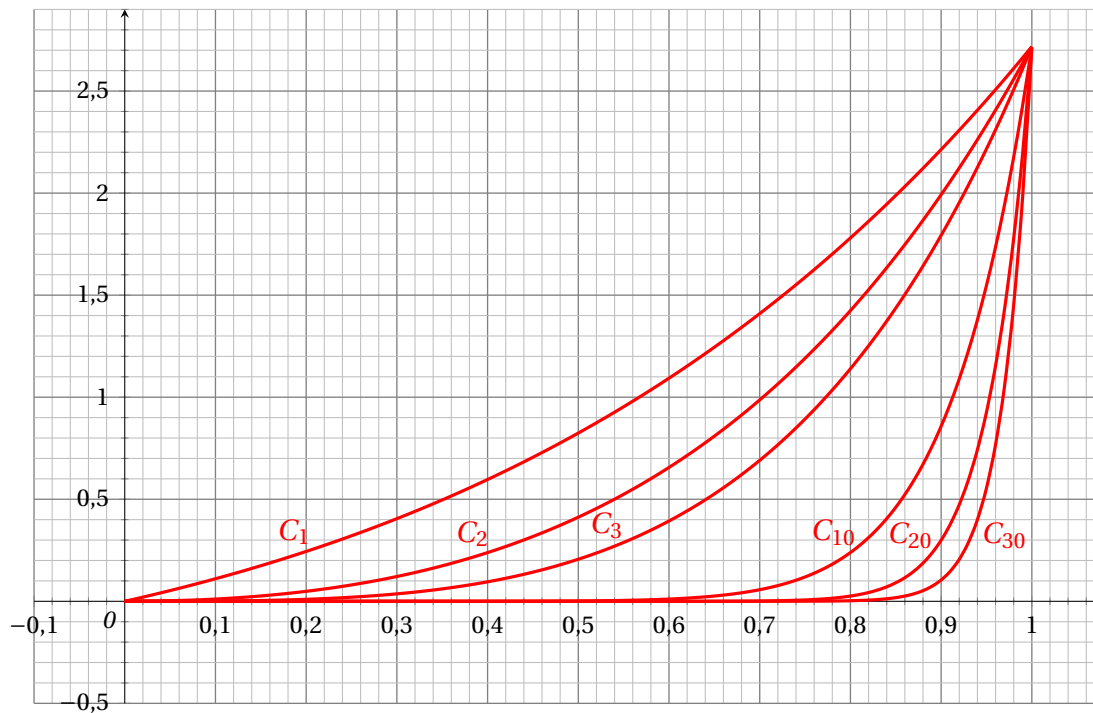
```
from math import e # la constante d'Euler e

def mystere(n):
    a = 1
    L = [a]
    for i in range(1, n):
        a = e - (i + 1) * a
        L.append(a)
    return L
```

À l'aide des questions précédentes, expliquer ce que renvoie l'appel `mystere(5)`.

Partie II

1. Sur le graphique ci-dessous, on a représenté les courbes $C_1, C_2, C_3, C_{10}, C_{20}$ et C_{30} .



a. Donner une interprétation graphique de I_n .

b. Quelle conjecture peut-on émettre sur la limite de la suite (I_n) ?

2. Montrer que pour tout n supérieur ou égal à 1,

$$0 \leq I_n \leq e \int_0^1 x^n dx.$$

3. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

Exercice 7 On considère la suite (I_n) définie par $I_0 = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x} dx$ et pour tout entier naturel n non nul

$$I_n = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x} dx.$$

1. Montrer que $I_0 = \ln(2)$.

2. a. Calculer $I_0 - I_1$.

b. En déduire I_1 .

3. **a.** Montrer que, pour tout entier naturel n , $I_n - I_{n+1} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{n+1}$.
- b.** Proposer un algorithme permettant de déterminer, pour un entier naturel n donné, la valeur de I_n .
4. Soit n un entier naturel non nul.
- On admet que si x appartient à l'intervalle $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ alors $0 \leq \frac{x^n}{1-x} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$.
- a.** Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $0 \leq I_n \leq \frac{1}{2^n}$.
- b.** En déduire la limite de la suite (I_n) lorsque n tend vers $+\infty$.
5. Pour tout entier naturel n non nul, on pose

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3} + \dots + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n}.$$

- a.** Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $S_n = I_0 - I_n$.
- b.** Déterminer la limite de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 8 Partie A

Soit la fonction f définie et dérivable sur $[1; +\infty[$ telle que, pour tout nombre réel x supérieur ou égal à 1,

$$f(x) = \frac{1}{x} \ln(x).$$

On note \mathcal{C} la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

- Démontrer que la courbe \mathcal{C} admet une asymptote horizontale.
- Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f sur $[1; +\infty[$.
- Étudier les variations de la fonction f sur $[1; +\infty[$.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par

$$u_n = \int_1^2 \frac{1}{x^{n+1}} \ln(x) dx \text{ pour tout entier naturel } n.$$

- Démontrer que $u_0 = \frac{1}{2} [\ln(2)]^2$.
Interpréter graphiquement ce résultat.
- Prouver que, pour tout entier naturel n et pour tout nombre réel x de l'intervalle $[1; 2]$, on a

$$0 \leq \frac{1}{x^{n+1}} \ln(x) \leq \frac{1}{x^{n+1}} \ln(2).$$

3. En déduire que, pour **tout entier naturel**¹ n , on a

$$0 \leq u_n \leq \frac{\ln(2)}{n} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right).$$

4. Déterminer la limite de la suite (u_n) .

Exercice 9 On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \int_0^n e^{-x^2} dx.$$

On ne cherchera pas à calculer u_n en fonction de n .

1. a. Montrer que la suite (u_n) est croissante.

b. Démontrer que pour tout réel $x \geq 0$, on a : $-x^2 \leq -2x + 1$, puis :
 $e^{-x^2} \leq e^{-2x+1}$.

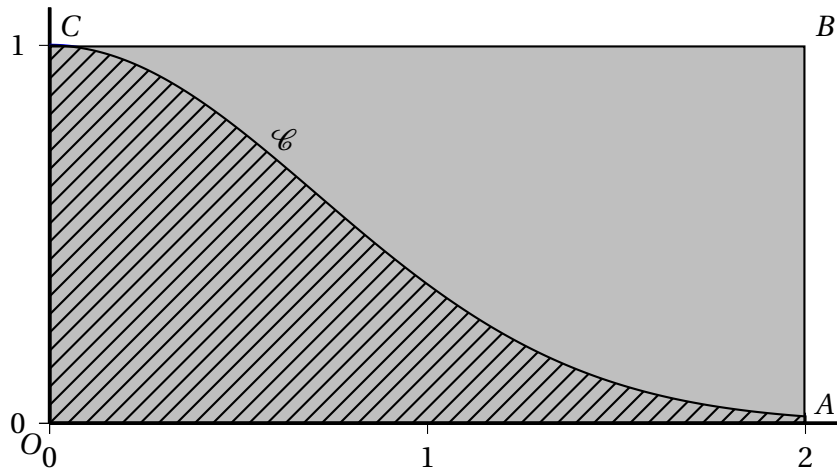
En déduire que pour tout entier naturel n , on a : $u_n < \frac{e}{2}$.

c. Démontrer que la suite (u_n) est convergente. On ne cherchera pas à calculer sa limite.

2. Dans cette question, on se propose d'obtenir une valeur approchée de u_2 .

Dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ci-dessous, on a tracé la courbe \mathcal{C}_f représentative de la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 2]$ par $f(x) = e^{-x^2}$, et le rectangle OABC où $A(2; 0)$, $B(2; 1)$ et $C(0; 1)$.

On a hachuré le domaine \mathcal{D} compris entre la courbe \mathcal{C}_f , l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 2$.



On considère l'expérience aléatoire consistant à choisir un point M au hasard à l'intérieur du rectangle OABC.

On admet que la probabilité p que ce point appartienne au domaine est : $p = \frac{\text{aire de } \mathcal{D}}{\text{aire de OABC}}$.

1. tout entier naturel non nul semble plus correct

a. Justifier que $u_2 = 2p$.

b. On considère l'algorithme suivant :

L1	Variables : N, C nombres entiers; X, Y, F nombres réels
L2	Entrée : Saisir N
L3	Initialisation : C prend la valeur 0
L4	Traitement :
L5	Pour k variant de 1 à N
L6	X prend la valeur d'un nombre aléatoire entre 0 et 2
L7	Y prend la valeur d'un nombre aléatoire entre 0 et 1
L8	Si $Y \leq e^{-x^2}$ alors
L9	C prend la valeur $C + 1$
L10	Fin si
L11	Fin pour
L12	Afficher C
L13	F prend la valeur C / N
L14	Afficher F

i. Que permet de tester la condition de la ligne L8 concernant la position du point $M(X ; Y)$?

ii. Interpréter la valeur F affichée par cet algorithme.

iii. Que peut-on conjecturer sur la valeur de F lorsque N devient très grand ?

c. En faisant fonctionner cet algorithme pour $N = 10^6$, on obtient $C = 441138$.

On admet dans ce cas que la valeur F affichée par l'algorithme est une valeur approchée de la probabilité p à 10^{-3} près.

En déduire une valeur approchée de u_2 à 10^{-2} près.