Dérivation : exercices

Exercice 1 *Déterminer les dérivées des fonctions suivantes :*

$$f_1(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x - 4$$
$$f_2(x) = 4x^2 - 3x + 1$$
$$f_3(x) = (2x+3)(3x-7)$$
$$f_4(x) = \frac{2x+4}{3x-1} \textit{ pour } x \neq \frac{1}{3}$$
$$f_5(x) = \frac{x+5}{x^2+1}$$
$$f_6(x) = x^3(1+\sqrt{x})$$
$$f_7(x) = 4x^2\sqrt{x}$$
$$f_8(x) = \left(x^2 - \frac{1}{x}\right)\left(x+\sqrt{x}\right)$$
$$f_9(x) = \sqrt{x}\left(1 - \frac{1}{x}\right)$$

Exercice 2 *On pose :*

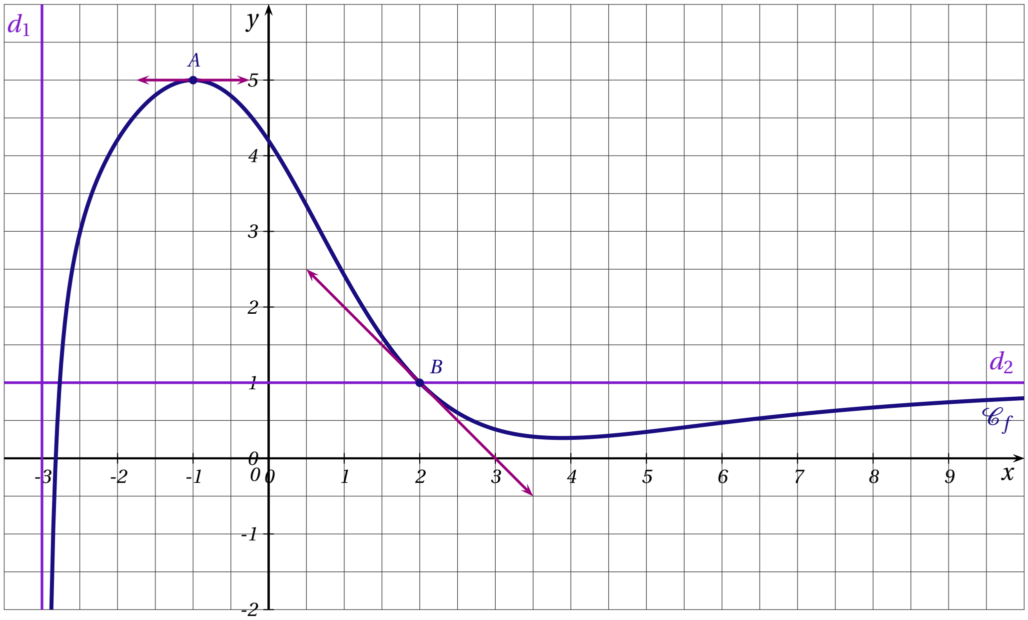
$$f(x) = \sqrt{x}$$
$$g(x) = \frac{1}{x}$$
$$h(x) = x^2$$

Déterminer les domaines de définition des fonctions suivantes puis leur dérivée :

$$f_1(x) = f(2x-3)$$
$$f_2(x) = f(x+4)$$
$$g_1(x) = g(x-3)$$
$$g_2(x) = g(-3x+4)$$
$$h_1(x) = h(2x)$$
$$h_2(x) = h\left(\frac{1}{2}x+4\right)$$

Exercice 3 *Sur le graphique ci-dessous, on a tracé la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle* $]-3;+\infty[$. *On sait que :*

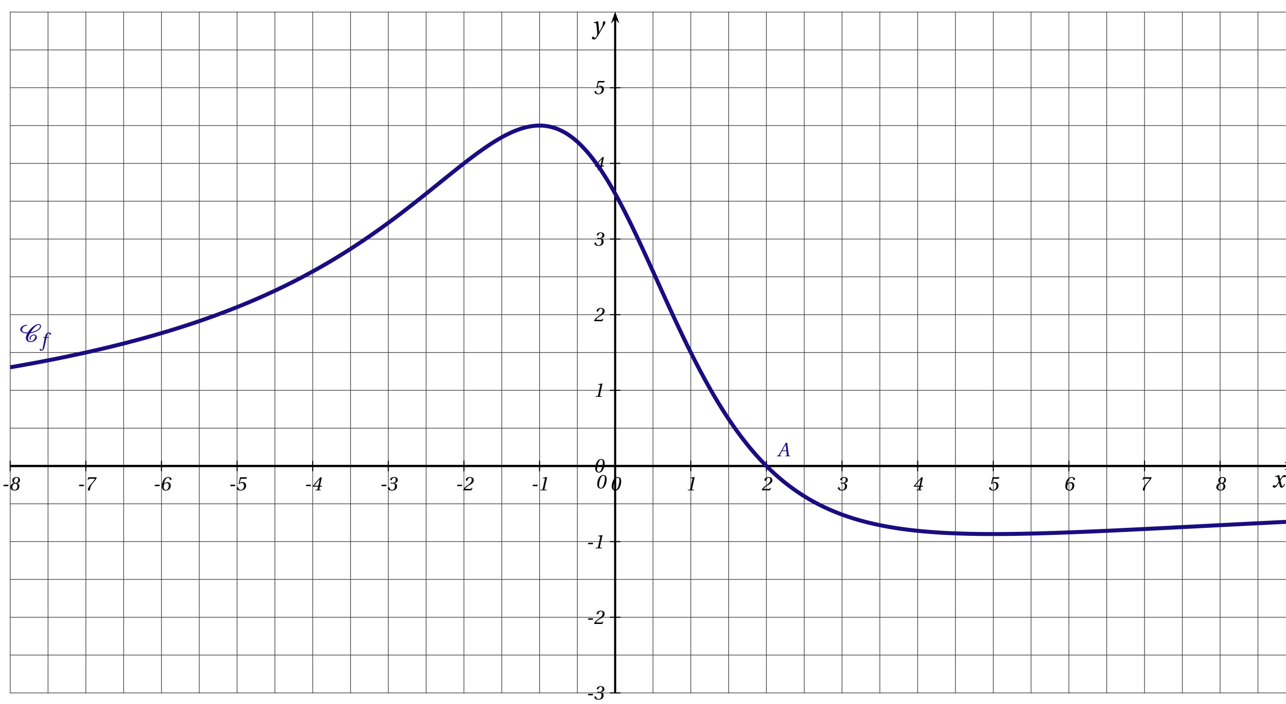
- *la courbe $\mathscr{C}_f$ admet pour asymptotes les droites d_1 et d_2 ;*
- *la tangente au point $A(-1;5)$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ est parallèle à l'axe des abscisses ;*
- *la tangente au point $B(2;1)$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées* $(3;0)$.



On note f' la dérivée de la fonction f. À partir du graphique et des renseignements fournis :

1. *Déterminer $f'(-1)$ et $f'(2)$.*
2. *Pour chacune des affirmations ci-dessous, dire si elle est vraie ou si elle est fausse en justifiant votre choix.*
   a. $f'(0) \times f'(6) \leqslant 0$.
   b. $f'(-2{,}999) \times f'(-2{,}5) \leqslant 0$.

Exercice 4 *Sur le graphique ci-dessous, on a tracé la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.*
On note f' la dérivée de la fonction f.



PARTIE A

1. *La droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = 2 - x$ est tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse 2*
   a. *Tracer la droite $\mathscr{D}$ sur le graphique précédent.*
   b. *Déterminer les valeurs de $f(2)$ et de $f'(2)$.*

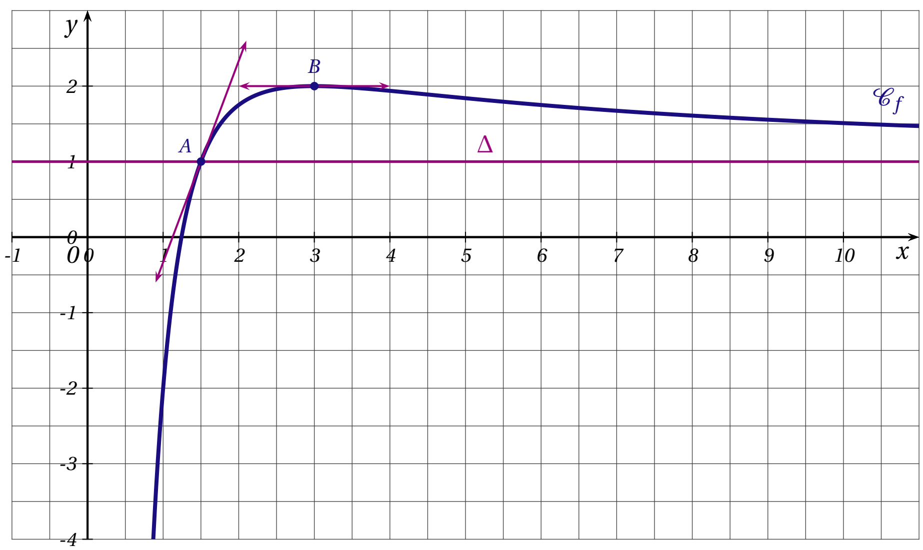
PARTIE B

La fonction f est définie pour tout réel x par $f(x) = \dfrac{18-9x}{x^2+5}$.

1. *Montrer que pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{9\left(x^2-4x-5\right)}{\left(x^2+5\right)^2}$.*
2. a. *Étudier le signe de $f'(x)$.*
   b. *Donner le tableau de variations de la fonction f.*
3. *Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point B d'abscisse (-2).*

Exercice 5 **PARTIE A**

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f définie et dérivable sur $]0;+\infty[$.



On précise que :
— *La droite Δ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$.*
— *La tangente à la courbe au point B est parallèle à l'axe des abscisses.*

On note f' la dérivée de la fonction f. À partir du graphique et des renseignements fournis :

1. *Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.*
2. *Déterminer $f'(3)$.*

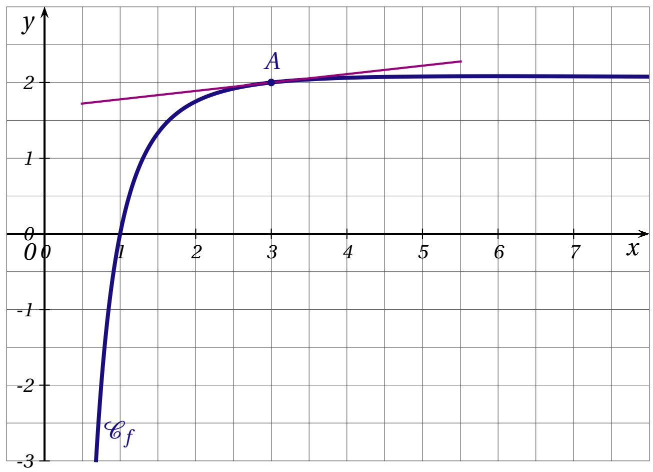
PARTIE B

La fonction f est définie pour tout réel x strictement positif, par $f(x) = \dfrac{x^2+6x-9}{x^2}$.

1. *Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{18-6x}{x^3}$.*
2. *Étudier le signe de $f'(x)$.*

3. *Donner le tableau complet des variations de la fonction f.*
4. *Déterminer une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse 1,5.*

Exercice 6 *Soit f la fonction définie pour tout réel x appartenant à l'intervalle* $]0;+\infty[$ *par* $f(x)=\dfrac{2x^2+x-3}{x^2}$.
On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère.



1. *On note f' la dérivée de la fonction f. Calculer $f'(x)$.*
2. *Donner le tableau complet des variations de la fonction f.*
3. *Déterminer une équation de la tangente à la courbe C_f au point A d'abscisse 3.*

Exercice 7 *Soit $f(x)=2x^2+3x+4$ définie sur $\mathbb{R}$:*

1. *Étudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x.*
2. *En déduire les variations de f.*
3. *Dresser le tableau des variations de f.*
4. *Montrer que f admet un extremum.*

Exercice 8 *On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$f(x)=x^3-4x^2+4x$$

1. *Calculer la dérivée de f. Étudier son signe puis dresser le tableau des variations de f en précisant les éventuels extrema.*
2. *Tracer la courbe représentative de f sur* $[-1;3]$.
3. *Déterminer par le calcul les coordonnées des points d'intersection avec l'axe des abscisses.*

Exercice 9 *On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par* $f(x)=x^3-3x-3$. *On note $\mathscr{C}$ sa représentation graphique.*

1. *Dresser le tableau des variations de f.*
2. *Déterminer une équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse* 0.
3. *Tracer T, les tangentes parallèles à l'axe des abscisses puis $\mathscr{C}$.*

Exercice 10 *On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par :*

$$g(x)=\frac{1}{x}+x$$

1. *Déterminer $g'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^*$.*
2. *Étudier le signe de la dérivée g'.*
3. *Dresser le tableau des variations de g.*
4. *Déterminer si g admet des extrema locaux.*
5. *Tracer la représentation graphique de la fonction g.*

Exercice 11 *On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

1. *Calculer la dérivée f' de la fonction f et étudier son signe.*
2. *Dresser le tableau des variations de f en précisant la valeur M de son maximum et la valeur m de son minimum.*
3. *Tracer la représentation graphique de f sur l'intervalle $[-4;4]$.*

Exercice 12 *On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :*

$$f(x) = -2x^2+1$$
$$g(x) = x^3-3x+1$$

1. *Calculer les dérivées f' et g'. Étudier leur signe.*
2. *Dresser les tableaux des variations des fonctions f et g.*
3. *Tacer les représentations graphiques $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ des fonctions f et g sur l'intervalle $[-3;3]$.*
4. **a.** *Factoriser $P(x) = x^2+2x-3$.*

   b. *Résoudre par le calcul l'inéquation :*

$$f(x) \leq g(x)$$

Exercice 13 *On considère un rectangle dont le périmètre P est égal à $4cm$.*

1. *Déterminer ses dimensions (longueur L et largeur l) sachant que son aire est égale à $\frac{3}{4}cm^2$*
2. **a.** *Exprimer S en fonction de l.*

   b. *On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$f(x) = x(2-x)$$

   Calculer la dérivée f' et étudier son signe. Dresser le tableau des variations de f.

   c. *En déduire les dimensions du rectangle dont le périmètre P est égal à $4cm$ et l'aire S est maximale.*

Exercice 14 *Un fermier décide de réaliser un poulailler (de forme rectangulaire) le long du mur de sa maison. Ce poulailler devra avoir une aire de $392m^2$. Où doit-on placer les piquets A et B pour que la longueurde la clôture soit maximale ? On appelle $x > 0$ la largeur et $y > 0$ la longueur de ce poulailler.*

1. *Sachant que l'aire du poulailler est de $392m^2$, exprimer y en fonction de x.*
2. *Démontrer que la longueur $l(x)$ du grillage est :*

$$l(x) = \frac{2x^2+392}{x}$$

3. *Calculer la dérivée de l puis en déduire le tableau des variations de l.*

4. *En déduire les dimensions x et y pour lesquelles la clôture a une longueur minimale. Préciser cette longueur.*

Exercice 15 1. *On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par :*

$$f(x)x^3 - 60x^2 + 450x$$

a. *Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0;20]$. Dresser le tableau des variations de f.*

b. *Déterminer une équation de la tangente Δ à la représentation graphique de f au point d'abscisse 0.*

c. *Déterminer, par calcul, les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses.*

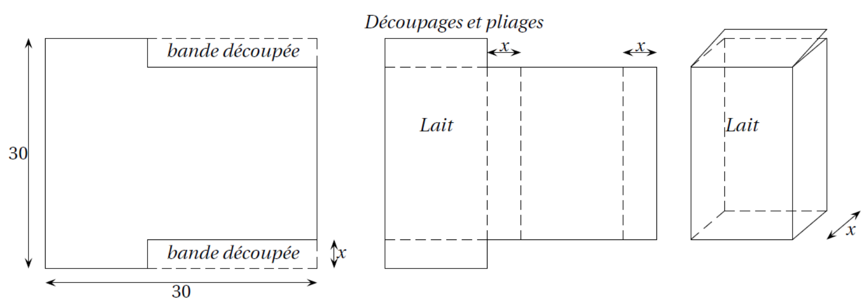
d. *Tracer Δ et la représentation graphique de f pour $x \in [0;20]$.*

2. *Un fabricant envisage la production de briques de lait en carton obtenues en découpant deux bandes de même largeur dans une feuille carrée (voir figure ci-dessous). Le ôté de la feuille carrée mesure 30cm et on désigne par x la mesure (en centimètres) de la largeur des bandes découpées. On suppose que $0 < x < 15$.*

a. *Démontrer que le volume (en cm^3) de la boîte est :*

$$V(x) = 2x^3 - 60x^2 + 450x$$

b. *Pour quelle valeur de x le volume $V(x)$ est-il maximal ? Préciser la valeur de ce volume maximal en litres*



Exercice 16 *Soit $\mathscr{C}$ la représentation graphique de la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash 2$ où $a, b \in \mathbb{R}$ par :*

$$f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x - 2}$$

1. *Déterminer $f'(x)$.*
2. *Déterminer a et b tels que la droite d'équation $y = 8$ soit tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 3.*
3. *Déterminer l'abscisse de l'autre point de $\mathscr{C}$ où la tangente est horizontale.*