☙ Probabilités : première partie

Calculs de probabilités

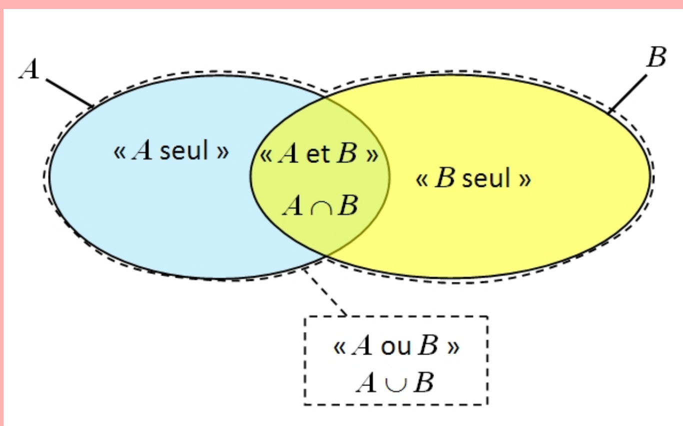
Pour calculer la probabilité d'un événement E dont on connait le cardinal (c'est-à-dire) le nombre de fois n où il apparaît dans la population totale de taille N, on fait l'opération suivante :

$$P(E) = \frac{n}{N} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

Quand le nombre de cas favorables est égal à 1, on dit que l'événenement est une éventualité.
Si la taille d'un événement est donné en pourcentage p, alors la probabilité de cet événement est $\frac{p}{100}$.
L'événement contraire de E est noté $\bar{E}$ et sa probabilité est $P\left(\bar{E}\right) = 1 - P(E)$.

Union et intersection

L'événement $A \cap B$ est l'untersection des événements A et B : ce sont toutes les éventualités qui sont à la fois dans A et B. L'événement $A \cup B$ est l'union ou la réunion des événements A et B : ce sont toutes les éventualités qui sont dans A, dans B ou encore dans les deux à la fois. Les événements $A \cup B$ et $A \cap B$ peuvent se traduire graphiquement de la façon suivante :



On peut relier la probabilité de ces deux événements par la formule suivante :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Indépendance et probabilités conditionnelles

Soit A et B deux événements.
Quand la probabilité que l'un se produise n'influe pas la probabilité que l'autre se produise, on dit que les événements sont indépendants.
On pourra l'affirmer directement quand l'énoncé le dira clairement ou quand la situation décrite le sous-entendra.
Dans le cas contraire, on pourra être amené à le prouver ou justement montrer que ce n'est pas le cas.
On dira que A et B sont indépendant si :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Une autre façon de le caractériser est d'utiliser les probabilités conditionnelles.
La probabilité $P_A(B)$ est appelée probabilité de B sachant A, c'est la probabilité que B se produise quand on ne s'intéresse non plus à toutes les éventualités mais seulement à seules incluses dans A. Autrement dit :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Les événements A et B seront indépendants si :

$$P_A(B) = P(B) \text{ ou } P_B(A) = P(A)$$

Loi binomiale

On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètre n et p si :

- ✏ X compte le nombre de succès d'une répétition de n épreuves de Bernouilli car deux issues.
- ✏ Ces issues sont indépendantes : soit l'énoncé le dit explicitement, soit cette indépendance est due au tirage avec remise.
- ✏ Les épreuves de Bernouilli ont toutes le même paramètre p.

L'espérance de X est alors $n \times p$: c'est le nombre moyen sur n lancers de l'apparition du caractère étudié.

Calculs

Les calculs se feront systématiquement à la calculatrice : Les calculs se feront systématiquement à la calculatrice :

1. $P(X = k)$.
   Sur la TI, on fera $\boxed{2nd}$ $\boxed{Var}$ puis le menu des distributions, on prendra BinomFpd ou la sinon la première concernant la loi binomiale dans le menu.
   Le nombre d'essai ou trials sera n, la probabilité p et la valeur de X sera k.
   Sur la casio, on ira dans le menu STAT puis dans DIST et enfin dans BINOM. Dans ce menu, on prendra la première fonction en partant de la gauche. On fera attention de bien se placer en var au lieu de stats.
2. $P(X \leq k)$.
   Sur la TI, on fera $\boxed{2nd}$ $\boxed{Var}$ puis le menu des distributions, on prendra BinomFrep ou la sinon la deuxième concernant la loi binomiale dans le menu.
   Le nombre d'essai ou trials sera n, la probabilité p et la valeur de X sera k.
   la casio, on ira dans le menu STAT puis dans DIST et enfin dans BINOM. Dans ce menu, on prendra la deuxième fonction en partant de la gauche. On fera attention de bien indiquer que l'on se placera en var au lieu de stats.
3. $P(X \geq k) = 1 - P(X \leq k-1)$ sauf pour $P(X \geq 0)$ qui vaut toujours 1.
4. $P(i \leq X \leq j) = P(X \leq j) - P(X \leq i-1)$.

Loi de Poisson :

On associe cette loi à des événements qui se produisent rarement. Elle est associée à un paramètre : λ.
Son espérance sera : λ.
On écrira $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$.

Calculs

Les calculs se feront systématiquement à la calculatrice :

1. $P(X = k)$.
   Sur la TI, on fera $\boxed{2nd}$ $\boxed{Var}$ puis le menu des distributions, on prendra PoissonFpd ou la sinon la première concernant la loi de Poisson dans le menu.
   La valeur de X sera k.
2. $P(X \leq k)$.
   Sur la TI, on fera $\boxed{2nd}$ $\boxed{Var}$ puis le menu des distributions, on prendra poissonFrep ou la sinon la deuxième concernant la loi de Poisson dans le menu.
   La valeur de X sera k.
3. $P(X \geq k) = 1 - P(X \leq k-1)$ sauf pour $P(X \geq 0)$ qui vaut toujours 1.
4. $P(i \leq X \leq j) = P(X \leq j) - P(X \leq i-1)$.

Approximation de la loi binomiale

Sous de bonnes conditions, (que nous ne vérifirons pas), on peut approcher une loi $X \sim \mathscr{B}(n, p)$ par une loi de Poisson de paramètre $\lambda = n \times p$.