Exercice

Déterminer la dérivée des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \ln(3x+2)$ *sur* $I =]-\frac{2}{3};+\infty[$.
2. $g(x) = \ln(x^2+1)$ *sur* $\mathbb{R}$.
3. $h(x) = x\ln(x^2+3)$ *sur* $\mathbb{R}$.
4. $i(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$ *sur* $]0;+\infty[$.
5. $j(x) = (2x+1)\ln(2x+1)$ *sur* $]-\frac{1}{2};+\infty[$.

Exercice 1

- $f(x) = \ln(3x+2)$ sur $I =]-\frac{2}{3};+\infty[$.

Exercice 1

- $f(x) = \ln(3x+2)$ sur $I =]-\frac{2}{3};+\infty[$.
  $\rightarrow$ On a $f'(x) = 3 \times \frac{1}{3x+2} = \frac{3}{3x+2}$.

Exercice 1

- $f(x) = \ln(3x+2)$ sur $I =]-\frac{2}{3}; +\infty[$.
  $\rightarrow$ On a $f'(x) = 3 \times \frac{1}{3x+2} = \frac{3}{3x+2}$.
- $g(x) = \ln(x^2+1)$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 1

- $f(x) = \ln(3x+2)$ sur $I =]-\frac{2}{3}; +\infty[$.
  $\rightarrow$ On a $f'(x) = 3 \times \frac{1}{3x+2} = \frac{3}{3x+2}$.
- $g(x) = \ln(x^2+1)$ sur $\mathbb{R}$.
  $\rightarrow$ On a $g'(x) = (x^2+1)' \times \frac{1}{x^2+1} = \frac{2x}{x^2+1}$.

Exercice 1

- $f(x) = \ln(3x+2)$ sur $I =]-\frac{2}{3}; +\infty[$.
  $\rightarrow$ On a $f'(x) = 3 \times \frac{1}{3x+2} = \frac{3}{3x+2}$.
- $g(x) = \ln(x^2+1)$ sur $\mathbb{R}$.
  $\rightarrow$ On a $g'(x) = (x^2+1)' \times \frac{1}{x^2+1} = \frac{2x}{x^2+1}$.
- $h(x) = x\ln(x^2+3)$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 1

- $f(x) = \ln(3x+2)$ sur $I =]-\frac{2}{3};+\infty[$.
  $\rightarrow$ On a $f'(x) = 3 \times \frac{1}{3x+2} = \frac{3}{3x+2}$.
- $g(x) = \ln(x^2+1)$ sur $\mathbb{R}$.
  $\rightarrow$ On a $g'(x) = (x^2+1)' \times \frac{1}{x^2+1} = \frac{2x}{x^2+1}$.
- $h(x) = x\ln(x^2+3)$ sur $\mathbb{R}$.
  $\rightarrow$ On a $h'(x) = (x)'\ln(x^2+3) + x \times (\ln(x^2+3))' = \ln(x^2+3) + x \times \frac{2x}{x^2+3}$.

Exercice 1

- $f(x) = \ln(3x+2)$ sur $I =]-\frac{2}{3}; +\infty[$.
  $\rightarrow$ On a $f'(x) = 3 \times \frac{1}{3x+2} = \frac{3}{3x+2}$.
- $g(x) = \ln(x^2+1)$ sur $\mathbb{R}$.
  $\rightarrow$ On a $g'(x) = (x^2+1)' \times \frac{1}{x^2+1} = \frac{2x}{x^2+1}$.
- $h(x) = x\ln(x^2+3)$ sur $\mathbb{R}$.
  $\rightarrow$ On a $h'(x) = (x)'\ln(x^2+3) + x \times (\ln(x^2+3))' = \ln(x^2+3) + x \times \frac{2x}{x^2+3}$.
- $i(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$ sur $]0; +\infty[$.

- $f(x) = \ln(3x+2)$ sur $I =]-\frac{2}{3}; +\infty[$.
  $\rightarrow$ On a $f'(x) = 3 \times \frac{1}{3x+2} = \frac{3}{3x+2}$.
- $g(x) = \ln(x^2+1)$ sur $\mathbb{R}$.
  $\rightarrow$ On a $g'(x) = (x^2+1)' \times \frac{1}{x^2+1} = \frac{2x}{x^2+1}$.
- $h(x) = x\ln(x^2+3)$ sur $\mathbb{R}$.
  $\rightarrow$ On a $h'(x) = (x)'\ln(x^2+3) + x \times (\ln(x^2+3))' = \ln(x^2+3) + x \times \frac{2x}{x^2+3}$.
- $i(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$ sur $]0; +\infty[$.
  $\rightarrow$ On a $i'(x) = \frac{\ln(1+x)' \times x - x' \times \ln(1+x)}{x^2} = \frac{\frac{1}{1+x} \times x - \ln(1+x)}{x^2} = \frac{\frac{x}{1+x} - \ln(1+x)}{x^2}$.

- $f(x) = \ln(3x+2)$ sur $I =]-\frac{2}{3}; +\infty[$.
  $\rightarrow$ On a $f'(x) = 3 \times \frac{1}{3x+2} = \frac{3}{3x+2}$.
- $g(x) = \ln(x^2+1)$ sur $\mathbb{R}$.
  $\rightarrow$ On a $g'(x) = (x^2+1)' \times \frac{1}{x^2+1} = \frac{2x}{x^2+1}$.
- $h(x) = x\ln(x^2+3)$ sur $\mathbb{R}$.
  $\rightarrow$ On a $h'(x) = (x)'\ln(x^2+3) + x \times (\ln(x^2+3))' = \ln(x^2+3) + x \times \frac{2x}{x^2+3}$.
- $i(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$ sur $]0; +\infty[$.
  $\rightarrow$ On a $i'(x) = \frac{\ln(1+x)' \times x - x' \times \ln(1+x)}{x^2} = \frac{\frac{1}{1+x} \times x - \ln(1+x)}{x^2} = \frac{\frac{x}{1+x} - \ln(1+x)}{x^2}$.
- $j(x) = (2x+1)\ln(2x+1)$ sur $]-\frac{1}{2}; +\infty[$.

- $f(x) = \ln(3x+2)$ sur $I =]-\frac{2}{3}; +\infty[$.
  $\rightarrow$ On a $f'(x) = 3 \times \frac{1}{3x+2} = \frac{3}{3x+2}$.
- $g(x) = \ln(x^2+1)$ sur $\mathbb{R}$.
  $\rightarrow$ On a $g'(x) = (x^2+1)' \times \frac{1}{x^2+1} = \frac{2x}{x^2+1}$.
- $h(x) = x\ln(x^2+3)$ sur $\mathbb{R}$.
  $\rightarrow$ On a $h'(x) = (x)'\ln(x^2+3) + x \times (\ln(x^2+3))' = \ln(x^2+3) + x \times \frac{2x}{x^2+3}$.
- $i(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$ sur $]0; +\infty[$.
  $\rightarrow$ On a $i'(x) = \frac{\ln(1+x)' \times x - x' \times \ln(1+x)}{x^2} = \frac{\frac{1}{1+x} \times x - \ln(1+x)}{x^2} = \frac{\frac{x}{1+x} - \ln(1+x)}{x^2}$.
- $j(x) = (2x+1)\ln(2x+1)$ sur $]-\frac{1}{2}; +\infty[$.
  $\rightarrow$ On a $j'(x) = (2x+1)'\ln(2x+1) + (2x+1) \times \ln(2x+1)' =$
  $2\ln(2x+1) + (2x+1) \times 2 \times \frac{1}{2x+1} = 2\ln(2x+1) + 2$.

Exercice

Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \frac{3}{2x-4}$ *sur* $I =]2; +\infty[$.
2. $g(x) = \frac{x}{x^2+1}$ *sur* $I = \mathbb{R}$.
3. $h(x) = 2 + \frac{1}{2x-1} + \frac{1}{(2x-1)^2}$ *sur* $I =]\frac{1}{2}; +\infty[$.
4. $i(x) = \frac{1}{x\ln(x)}$ *sur* $[1; +\infty[$.
5. $j(x) = \frac{2}{x^2-1}$ *sur* $]1; +\infty[$ *après avoir vérifié que* $j(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$ *pour* $x > 1$.

- $f(x) = \frac{3}{2x-4}$ sur $I =]2; +\infty[$.

- $f(x) = \frac{3}{2x-4}$ sur $I =]2; +\infty[$.
  $\rightarrow$ On a $F(x) = 3 \times \frac{1}{2} \times \ln(2x-4)$ car $2x - 4 > 0$ sur $I =]2; +\infty[$.

- $f(x) = \frac{3}{2x-4}$ sur $I =]2; +\infty[$.
  $\rightarrow$ On a $F(x) = 3 \times \frac{1}{2} \times \ln(2x-4)$ car $2x - 4 > 0$ sur $I =]2; +\infty[$.
- $g(x) = \frac{x}{x^2+1}$ sur $I = \mathbb{R}$.

- $f(x) = \frac{3}{2x-4}$ sur $I =]2; +\infty[$.
  $\rightarrow$ On a $F(x) = 3 \times \frac{1}{2} \times \ln(2x-4)$ car $2x - 4 > 0$ sur $I =]2; +\infty[$.
- $g(x) = \frac{x}{x^2+1}$ sur $I = \mathbb{R}$.
  $\rightarrow$ On a $x^2 + 1 > 0$ et $(x^2+1)' = 2x$ donc $G(x) = \frac{1}{2} \times \ln(x^2+1)$.

- $f(x) = \frac{3}{2x-4}$ sur $I =]2; +\infty[$.
  $\rightarrow$ On a $F(x) = 3 \times \frac{1}{2} \times \ln(2x-4)$ car $2x - 4 > 0$ sur $I =]2; +\infty[$.
- $g(x) = \frac{x}{x^2+1}$ sur $I = \mathbb{R}$.
  $\rightarrow$ On a $x^2 + 1 > 0$ et $(x^2+1)' = 2x$ donc $G(x) = \frac{1}{2} \times \ln(x^2+1)$.
- $h(x) = 2 + \frac{1}{2x-1} + \frac{1}{(2x-1)^2}$ sur $I =]\frac{1}{2}; +\infty[$.

- $f(x) = \frac{3}{2x-4}$ sur $I =]2; +\infty[$.
  $\rightarrow$ On a $F(x) = 3 \times \frac{1}{2} \times \ln(2x-4)$ car $2x - 4 > 0$ sur $I =]2; +\infty[$.
- $g(x) = \frac{x}{x^2+1}$ sur $I = \mathbb{R}$.
  $\rightarrow$ On a $x^2 + 1 > 0$ et $(x^2+1)' = 2x$ donc $G(x) = \frac{1}{2} \times \ln(x^2+1)$.
- $h(x) = 2 + \frac{1}{2x-1} + \frac{1}{(2x-1)^2}$ sur $I =]\frac{1}{2}; +\infty[$.
  $\rightarrow$ On a $H(x) = 2x + \frac{1}{2} \times \ln(2x-1) + \frac{1}{2} \times \frac{1}{1} \times \frac{-1}{2x-1}$.

- $f(x) = \frac{3}{2x-4}$ sur $I =]2; +\infty[$.
  $\rightarrow$ On a $F(x) = 3 \times \frac{1}{2} \times \ln(2x-4)$ car $2x-4 > 0$ sur $I =]2; +\infty[$.
- $g(x) = \frac{x}{x^2+1}$ sur $I = \mathbb{R}$.
  $\rightarrow$ On a $x^2+1 > 0$ et $(x^2+1)' = 2x$ donc $G(x) = \frac{1}{2} \times \ln(x^2+1)$.
- $h(x) = 2 + \frac{1}{2x-1} + \frac{1}{(2x-1)^2}$ sur $I =]\frac{1}{2}; +\infty[$.
  $\rightarrow$ On a $H(x) = 2x + \frac{1}{2} \times \ln(2x-1) + \frac{1}{2} \times \frac{1}{1} \times \frac{-1}{2x-1}$.
- $i(x) = \frac{1}{x\ln(x)}$ sur $[1; +\infty[$.

- $f(x) = \frac{3}{2x-4}$ sur $I =]2; +\infty[$.
  $\rightarrow$ On a $F(x) = 3 \times \frac{1}{2} \times \ln(2x-4)$ car $2x-4 > 0$ sur $I =]2; +\infty[$.
- $g(x) = \frac{x}{x^2+1}$ sur $I = \mathbb{R}$.
  $\rightarrow$ On a $x^2+1 > 0$ et $(x^2+1)' = 2x$ donc $G(x) = \frac{1}{2} \times \ln(x^2+1)$.
- $h(x) = 2 + \frac{1}{2x-1} + \frac{1}{(2x-1)^2}$ sur $I =]\frac{1}{2}; +\infty[$.
  $\rightarrow$ On a $H(x) = 2x + \frac{1}{2} \times \ln(2x-1) + \frac{1}{2} \times \frac{1}{1} \times \frac{-1}{2x-1}$.
- $i(x) = \frac{1}{x\ln(x)}$ sur $[1; +\infty[$.
  $\rightarrow$ On a $i(x) = \frac{1}{x} \times \frac{1}{\ln(x)}$ donc on a $I(x) = \ln(In(x))$ car on a bien $In(x) > 0$ sur $[1; +\infty[$.

- $f(x) = \frac{3}{2x-4}$ sur $I =]2; +\infty[$.
  $\rightarrow$ On a $F(x) = 3 \times \frac{1}{2} \times \ln(2x-4)$ car $2x - 4 > 0$ sur $I =]2; +\infty[$.
- $g(x) = \frac{x}{x^2+1}$ sur $I = \mathbb{R}$.
  $\rightarrow$ On a $x^2 + 1 > 0$ et $(x^2+1)' = 2x$ donc $G(x) = \frac{1}{2} \times \ln(x^2+1)$.
- $h(x) = 2 + \frac{1}{2x-1} + \frac{1}{(2x-1)^2}$ sur $I =]\frac{1}{2}; +\infty[$.
  $\rightarrow$ On a $H(x) = 2x + \frac{1}{2} \times \ln(2x-1) + \frac{1}{2} \times \frac{1}{1} \times \frac{-1}{2x-1}$.
- $i(x) = \frac{1}{x\ln(x)}$ sur $[1; +\infty[$.
  $\rightarrow$ On a $i(x) = \frac{1}{x} \times \frac{1}{\ln(x)}$ donc on a $I(x) = \ln(In(x))$ car on a bien $In(x) > 0$ sur $[1; +\infty[$.
- $j(x) = \frac{2}{x^2-1}$ sur $]1; +\infty[$ après avoir vérifié que $j(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$ pour $x > 1$.

- $f(x) = \frac{3}{2x-4}$ sur $I =]2; +\infty[$.
  $\rightarrow$ On a $F(x) = 3 \times \frac{1}{2} \times \ln(2x-4)$ car $2x-4 > 0$ sur $I =]2; +\infty[$.
- $g(x) = \frac{x}{x^2+1}$ sur $I = \mathbb{R}$.
  $\rightarrow$ On a $x^2+1 > 0$ et $(x^2+1)' = 2x$ donc $G(x) = \frac{1}{2} \times \ln(x^2+1)$.
- $h(x) = 2 + \frac{1}{2x-1} + \frac{1}{(2x-1)^2}$ sur $I =]\frac{1}{2}; +\infty[$.
  $\rightarrow$ On a $H(x) = 2x + \frac{1}{2} \times \ln(2x-1) + \frac{1}{2} \times \frac{1}{1} \times \frac{-1}{2x-1}$.
- $i(x) = \frac{1}{x\ln(x)}$ sur $[1; +\infty[$.
  $\rightarrow$ On a $i(x) = \frac{1}{x} \times \frac{1}{\ln(x)}$ donc on a $I(x) = \ln(ln(x))$ car on a bien $ln(x) > 0$ sur $[1; +\infty[$.
- $j(x) = \frac{2}{x^2-1}$ sur $]1; +\infty[$ après avoir vérifié que $j(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$ pour $x > 1$.
  $\rightarrow$ On a $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} = \frac{(x+1)}{(x-1)(x+1)} - \frac{(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x+1}{x^2-1} - \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{2}{x^2-1} = j(x)$.
  Comme $x-1 > 0$ et $x+1 > 0$ sur $[1; +\infty[$ alors $J(x) = \ln(x-1) - \ln(x+1)$.

Exercice

On donne $\ln(2) \approx 0.69$ *et* $\ln(5) \approx 1.61$. *Sans utiliser le logarithme de la calculatrice, en déduire des valeurs approchées des nombres suivants :*

- $\ln(10)$.
- $\ln(0.1)$.
- $\ln(0.2)$.
- $\ln(80)$.

Exercice 3

On donne $\ln(2) \approx 0.69$ et $\ln(5) \approx 1.61$. Sans utiliser le logarithme de la calculatrice, en déduire des valeurs approchées des nombres suivants :

- $\ln(10)$.

On donne $\ln(2) \approx 0.69$ et $\ln(5) \approx 1.61$. Sans utiliser le logarithme de la calculatrice, en déduire des valeurs approchées des nombres suivants :

- $\ln(10)$.
  $\rightarrow$ On a $\ln(10) = \ln(2 \times 5) = \ln(2) + \ln(5) \approx 0.69 + 1.61 \approx 2.3$.

On donne $\ln(2) \approx 0.69$ et $\ln(5) \approx 1.61$. Sans utiliser le logarithme de la calculatrice, en déduire des valeurs approchées des nombres suivants :

- $\ln(10)$.
  $\rightarrow$ On a $\ln(10) = \ln(2 \times 5) = \ln(2) + \ln(5) \approx 0.69 + 1.61 \approx 2.3$.
- $\ln(0.1)$.

On donne $\ln(2) \approx 0.69$ et $\ln(5) \approx 1.61$. Sans utiliser le logarithme de la calculatrice, en déduire des valeurs approchées des nombres suivants :

- $\ln(10)$.
  $\rightarrow$ On a $\ln(10) = \ln(2 \times 5) = \ln(2) + \ln(5) \approx 0.69 + 1.61 \approx 2.3$.
- $\ln(0.1)$.
  $\rightarrow$ On a $\ln(0.1) = \ln(\frac{1}{10}) = \ln(1) - \ln(10) \approx 0 - 2.3 \approx -2.3$.

On donne $\ln(2) \approx 0.69$ et $\ln(5) \approx 1.61$. Sans utiliser le logarithme de la calculatrice, en déduire des valeurs approchées des nombres suivants :

- $\ln(10)$.
  $\rightarrow$ On a $\ln(10) = \ln(2 \times 5) = \ln(2) + \ln(5) \approx 0.69 + 1.61 \approx 2.3$.
- $\ln(0.1)$.
  $\rightarrow$ On a $\ln(0.1) = \ln(\frac{1}{10}) = \ln(1) - \ln(10) \approx 0 - 2.3 \approx -2.3$.
- $\ln(0.2)$.

On donne $\ln(2) \approx 0.69$ et $\ln(5) \approx 1.61$. Sans utiliser le logarithme de la calculatrice, en déduire des valeurs approchées des nombres suivants :

- $\ln(10)$.
  $\rightarrow$ On a $\ln(10) = \ln(2 \times 5) = \ln(2) + \ln(5) \approx 0.69 + 1.61 \approx 2.3$.
- $\ln(0.1)$.
  $\rightarrow$ On a $\ln(0.1) = \ln(\frac{1}{10}) = \ln(1) - \ln(10) \approx 0 - 2.3 \approx -2.3$.
- $\ln(0.2)$.
  $\rightarrow$ On a $\ln(0.2) = \ln(\frac{2}{10}) = \ln(2) - \ln(10) \approx 0.69 - 2.3 \approx -1.61$.

On donne $\ln(2) \approx 0.69$ et $\ln(5) \approx 1.61$. Sans utiliser le logarithme de la calculatrice, en déduire des valeurs approchées des nombres suivants :

- $\ln(10)$.
  $\rightarrow$ On a $\ln(10) = \ln(2 \times 5) = \ln(2) + \ln(5) \approx 0.69 + 1.61 \approx 2.3$.
- $\ln(0.1)$.
  $\rightarrow$ On a $\ln(0.1) = \ln(\frac{1}{10}) = \ln(1) - \ln(10) \approx 0 - 2.3 \approx -2.3$.
- $\ln(0.2)$.
  $\rightarrow$ On a $\ln(0.2) = \ln(\frac{2}{10}) = \ln(2) - \ln(10) \approx 0.69 - 2.3 \approx -1.61$.
- $\ln(80)$.
  $\rightarrow$ On a $\ln(80) = \ln(5 \times 16) = \ln(5) + \ln(16) = \ln(5) + \ln(2^3) = \ln(5) + 3\ln(2) \approx 1.61 + 3 \times 0.69 \approx 3.68$.

Exercice

Résoudre dans $\mathbb{N}$ *les inéquations suivantes :*

$$2^n \leq 1000$$
$$0.5^n \geq 0.001$$

Exercice 4

Résoudre dans $\mathbb{N}$ les inéquations suivantes :

$$2^n \leq 1000$$
$$0.5^n \geq 0.001$$

Résoudre dans $\mathbb{N}$ les inéquations suivantes :

$$2^n \leq 1000$$
$$0.5^n \geq 0.001$$

$\rightarrow$ On a :

$$2^n \leq 1000 \Leftrightarrow n\ln(2) \leq \ln(1000) \Leftrightarrow n \leq \frac{\ln(1000)}{\ln(2)} \text{ car } \ln(2) > 0 \text{ car } 2 > 1.$$

Le plus grand entier qui vérifie cette inéquation est 9 : plus grand car on a une majoration de n.
On a :

$$0.5^n \leq 0.001 \Leftrightarrow n\ln(0.5) \leq \ln(0.001) \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0.001)}{\ln(0.5)} \text{ car } \ln(0.5) > 0 \text{ car } 0.5 < 1$$

Le plus petit entier qui vérifie cette inéquation est 10 : plus petit car on a une minoration de n

Exercice

Soit f la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x} - \ln x.$$

On appelle $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. *Sur le graphique ci-dessous, on donne $\mathcal{C}_f$ et les courbes C et Γ. L'une de ces deux courbes représente graphiquement la dérivée f' de f, et l'autre une des primitives F de f.*
   1. *Indiquer laquelle des deux courbes C et Γ représente graphiquement f'. Justifier.*
   2. *Par lecture graphique, donner $F(1)$.*
2. *Dans cette question, on pourra vérifier la cohérence des résultats obtenus avec les courbes représentatives données sur le dessin.*
   1. *Déterminer la limite de la fonction f quand x tend vers 0. Interpréter graphiquement cette limite.*
   2. *Déterminer la limite de la fonction f quand x tend vers $+\infty$.*
   3. *Calculer $f'(x)$ et montrer que l'on peut écrire : $f'(x) = \dfrac{-x-1}{x^2}$.*
   4. *Etudier le signe de $f'(x)$ puis donner le tableau de variations de f.*
3. *Soit H la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :*

$$H(x) = x - (x-1)\ln x.$$

   1. *Montrer que H est une primitive de f sur $]0\ ;\ +\infty[$.*
   2. *En déduire l'expression de la fonction F de la question 1.*
   3. *Déterminer la limite de $\frac{H(x)}{x^2}$ en $+\infty$.*

-
  - Indiquer laquelle des deux courbes C et Γ représente graphiquement f'. Justifier.

- - Indiquer laquelle des deux courbes C et Γ représente graphiquement f'. Justifier.
    $\rightarrow$ La courbe $\mathcal{C}_f$ est strictement décroissante donc cela signifie sa dérivée f' est négative.
    Par conséquent la courbe Γ en gros pointillés est celle qui représente f' car c'est la seule toujours en dessous de l'axe des abscisses.

Exercice 5

-
  - Indiquer laquelle des deux courbes C et Γ représente graphiquement f'. Justifier.
    $\rightarrow$ La courbe $\mathcal{C}_f$ est strictement décroissante donc cela signifie sa dérivée f' est négative.
    Par conséquent la courbe Γ en gros pointillés est celle qui représente f' car c'est la seule toujours en dessous de l'axe des abscisses.
  - Par lecture graphique, donner $F(1)$.

Exercice 5

-
  - Indiquer laquelle des deux courbes C et Γ représente graphiquement f'. Justifier.
    $\rightarrow$ La courbe $\mathcal{C}_f$ est strictement décroissante donc cela signifie sa dérivée f' est négative.
    Par conséquent la courbe Γ en gros pointillés est celle qui représente f' car c'est la seule toujours en dessous de l'axe des abscisses.
  - Par lecture graphique, donner $F(1)$.
    $\rightarrow$ Les deux autres courbes se coupent en $x = 1$ donc elles sont la même image en $x = 1$, on en déduit que $F(1) = 1$.

-
  - Indiquer laquelle des deux courbes C et Γ représente graphiquement f'. Justifier.
    $\rightarrow$ La courbe $\mathcal{C}_f$ est strictement décroissante donc cela signifie sa dérivée f' est négative.
    Par conséquent la courbe Γ en gros pointillés est celle qui représente f' car c'est la seule toujours en dessous de l'axe des abscisses.
  - Par lecture graphique, donner $F(1)$.
    $\rightarrow$ Les deux autres courbes se coupent en $x = 1$ donc elles sont la même image en $x = 1$, on en déduit que $F(1) = 1$.
- Dans cette question, on pourra vérifier la cohérence des résultats obtenus avec les courbes représentatives données sur le dessin.
  1. Déterminer la limite de la fonction f quand x tend vers 0. Interpréter graphiquement cette limite.

-
  - Indiquer laquelle des deux courbes C et Γ représente graphiquement f'. Justifier.
    $\rightarrow$ La courbe $\mathcal{C}_f$ est strictement décroissante donc cela signifie sa dérivée f' est négative.
    Par conséquent la courbe Γ en gros pointillés est celle qui représente f' car c'est la seule toujours en dessous de l'axe des abscisses.
  - Par lecture graphique, donner $F(1)$.
    $\rightarrow$ Les deux autres courbes se coupent en $x = 1$ donc elles sont la même image en $x = 1$, on en déduit que $F(1) = 1$.
- Dans cette question, on pourra vérifier la cohérence des résultats obtenus avec les courbes représentatives données sur le dessin.
  1. Déterminer la limite de la fonction f quand x tend vers 0. Interpréter graphiquement cette limite.
     $\rightarrow$ On a $\lim\limits_{x \to \mathbf{0}^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{\mathbf{0}^+} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to \mathbf{0}^+} \ln(x) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to^+} \frac{1}{x} - \ln(x) = +\infty$.
     On en déduit que $\mathcal{C}_f$ admet en asymptote verticale d'équation $x = 0$.

-
    - Indiquer laquelle des deux courbes C et Γ représente graphiquement f'. Justifier.
      $\to$ La courbe $\mathcal{C}_f$ est strictement décroissante donc cela signifie sa dérivée f' est négative.
      Par conséquent la courbe Γ en gros pointillés est celle qui représente f' car c'est la seule toujours en dessous de l'axe des abscisses.
    - Par lecture graphique, donner $F(1)$.
      $\to$ Les deux autres courbes se coupent en $x = 1$ donc elles sont la même image en $x = 1$, on en déduit que $F(1) = 1$.
- Dans cette question, on pourra vérifier la cohérence des résultats obtenus avec les courbes représentatives données sur le dessin.
    1. Déterminer la limite de la fonction f quand x tend vers 0. Interpréter graphiquement cette limite.
       $\to$ On a $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to^+} \frac{1}{x} - \ln(x) = +\infty$.
       On en déduit que $\mathcal{C}_f$ admet en asymptote verticale d'équation $x = 0$.
    2. Déterminer la limite de la fonction f quand x tend vers $+\infty$.

-
  - Indiquer laquelle des deux courbes C et Γ représente graphiquement f'. Justifier.
    $\rightarrow$ La courbe $\mathcal{C}_f$ est strictement décroissante donc cela signifie sa dérivée f' est négative.
    Par conséquent la courbe Γ en gros pointillés est celle qui représente f' car c'est la seule toujours en dessous de l'axe des abscisses.
  - Par lecture graphique, donner $F(1)$.
    $\rightarrow$ Les deux autres courbes se coupent en $x = 1$ donc elles sont la même image en $x = 1$, on en déduit que $F(1) = 1$.
- Dans cette question, on pourra vérifier la cohérence des résultats obtenus avec les courbes représentatives données sur le dessin.
  1. Déterminer la limite de la fonction f quand x tend vers 0. Interpréter graphiquement cette limite.
     $\rightarrow$ On a $\lim\limits_{x \to \mathbf{0}^+} \frac{\mathbf{1}}{x} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{0}^+} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to \mathbf{0}^+} \ln(x) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +} \frac{\mathbf{1}}{x} - \ln(x) = +\infty$.
     On en déduit que $\mathcal{C}_f$ admet en asymptote verticale d'équation $x = 0$.
  2. Déterminer la limite de la fonction f quand x tend vers $+\infty$.
     $\rightarrow$ On a $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\mathbf{1}}{x} = \frac{\mathbf{1}}{+\infty} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +} \frac{\mathbf{1}}{x} - \ln(x) = -\infty$.

Exercice 5

- - Indiquer laquelle des deux courbes C et Γ représente graphiquement f'. Justifier.
    $\rightarrow$ La courbe $\mathcal{C}_f$ est strictement décroissante donc cela signifie sa dérivée f' est négative.
    Par conséquent la courbe Γ en gros pointillés est celle qui représente f' car c'est la seule toujours en dessous de l'axe des abscisses.
  - Par lecture graphique, donner $F(1)$.
    $\rightarrow$ Les deux autres courbes se coupent en $x = 1$ donc elles sont la même image en $x = 1$, on en déduit que $F(1) = 1$.
- Dans cette question, on pourra vérifier la cohérence des résultats obtenus avec les courbes représentatives données sur le dessin.
  1. Déterminer la limite de la fonction f quand x tend vers 0. Interpréter graphiquement cette limite.
     $\rightarrow$ On a $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to +} \frac{1}{x} - \ln(x) = +\infty$.
     On en déduit que $\mathcal{C}_f$ admet en asymptote verticale d'équation $x = 0$.
  2. Déterminer la limite de la fonction f quand x tend vers $+\infty$.
     $\rightarrow$ On a $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{+\infty} = 0$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln(x) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to +} \frac{1}{x} - \ln(x) = -\infty$.
  3. Calculer $f'(x)$ et montrer que l'on peut écrire : $f'(x) = \dfrac{-x-1}{x^2}$.

Exercice 5

-
  - Indiquer laquelle des deux courbes C et Γ représente graphiquement f'. Justifier.
    $\rightarrow$ La courbe $\mathcal{C}_f$ est strictement décroissante donc cela signifie sa dérivée f' est négative.
    Par conséquent la courbe Γ en gros pointillés est celle qui représente f' car c'est la seule toujours en dessous de l'axe des abscisses.
  - Par lecture graphique, donner $F(1)$.
    $\rightarrow$ Les deux autres courbes se coupent en $x = 1$ donc elles sont la même image en $x = 1$, on en déduit que $F(1) = 1$.
- Dans cette question, on pourra vérifier la cohérence des résultats obtenus avec les courbes représentatives données sur le dessin.
  1. Déterminer la limite de la fonction f quand x tend vers 0. Interpréter graphiquement cette limite.
     $\rightarrow$ On a $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +} \frac{1}{x} - \ln(x) = +\infty$.
     On en déduit que $\mathcal{C}_f$ admet en asymptote verticale d'équation $x = 0$.
  2. Déterminer la limite de la fonction f quand x tend vers $+\infty$.
     $\rightarrow$ On a $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{+\infty} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +} \frac{1}{x} - \ln(x) = -\infty$.
  3. Calculer $f'(x)$ et montrer que l'on peut écrire : $f'(x) = \dfrac{-x-1}{x^2}$.
     $\rightarrow$ On a $f'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} = \frac{-1}{x^2} - \frac{x}{x^2} = \frac{-x-1}{x^2}$.

Exercice 5

- - Indiquer laquelle des deux courbes C et Γ représente graphiquement f'. Justifier.
    $\rightarrow$ La courbe $\mathcal{C}_f$ est strictement décroissante donc cela signifie sa dérivée f' est négative.
    Par conséquent la courbe Γ en gros pointillés est celle qui représente f' car c'est la seule toujours en dessous de l'axe des abscisses.
  - Par lecture graphique, donner $F(1)$.
    $\rightarrow$ Les deux autres courbes se coupent en $x = 1$ donc elles sont la même image en $x = 1$, on en déduit que $F(1) = 1$.
- Dans cette question, on pourra vérifier la cohérence des résultats obtenus avec les courbes représentatives données sur le dessin.
  1. Déterminer la limite de la fonction f quand x tend vers 0. Interpréter graphiquement cette limite.
     $\rightarrow$ On a $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to +} \frac{1}{x} - \ln(x) = +\infty$.
     On en déduit que $\mathcal{C}_f$ admet en asymptote verticale d'équation $x = 0$.
  2. Déterminer la limite de la fonction f quand x tend vers $+\infty$.
     $\rightarrow$ On a $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{+\infty} = 0$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln(x) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to +} \frac{1}{x} - \ln(x) = -\infty$.
  3. Calculer $f'(x)$ et montrer que l'on peut écrire : $f'(x) = \dfrac{-x-1}{x^2}$.
     $\rightarrow$ On a $f'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} = \frac{-1}{x^2} - \frac{x}{x^2} = \frac{-x-1}{x^2}$.
  4. Etudier le signe de $f'(x)$ puis donner le tableau de variations de f.

- - Indiquer laquelle des deux courbes C et Γ représente graphiquement f'. Justifier.
    $\rightarrow$ La courbe $\mathcal{C}_f$ est strictement décroissante donc cela signifie sa dérivée f' est négative.
    Par conséquent la courbe Γ en gros pointillés est celle qui représente f' car c'est la seule toujours en dessous de l'axe des abscisses.
  - Par lecture graphique, donner $F(1)$.
    $\rightarrow$ Les deux autres courbes se coupent en $x = 1$ donc elles sont la même image en $x = 1$, on en déduit que $F(1) = 1$.
- Dans cette question, on pourra vérifier la cohérence des résultats obtenus avec les courbes représentatives données sur le dessin.
  1. Déterminer la limite de la fonction f quand x tend vers 0. Interpréter graphiquement cette limite.
     $\rightarrow$ On a $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to +} \frac{1}{x} - \ln(x) = +\infty$.
     On en déduit que $\mathcal{C}_f$ admet en asymptote verticale d'équation $x = 0$.
  2. Déterminer la limite de la fonction f quand x tend vers $+\infty$.
     $\rightarrow$ On a $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{+\infty} = 0$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln(x) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to +} \frac{1}{x} - \ln(x) = -\infty$.
  3. Calculer $f'(x)$ et montrer que l'on peut écrire : $f'(x) = \dfrac{-x-1}{x^2}$.
     $\rightarrow$ On a $f'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} = \frac{-1}{x^2} - \frac{x}{x^2} = \frac{-x-1}{x^2}$.
  4. Etudier le signe de $f'(x)$ puis donner le tableau de variations de f.
     $\rightarrow$ On a :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	
variations de f	|| $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

Exercice 5

Soit H la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par : $H(x) = x - (x-1)\ln x$.

- Montrer que H est une primitive de f sur $]0\ ;\ +\infty[$.

Soit H la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par : $H(x) = x - (x-1)\ln x$.

- Montrer que H est une primitive de f sur $]0\ ;\ +\infty[$.
  $\rightarrow$ Pour montrer que H est une primitive de f, il suffit de montrer que $H' = f$.
  On a :

$$\begin{aligned} H'(x) &= x' - ((x-1)\ln(x))' = 1 - ((x-1)'\ln(x) + (x-1)\ln(x)') \\ &= 1 - (\ln(x) + \frac{x-1}{x}) = 1 - \ln(x) - 1 + \frac{1}{x} = f(x) \end{aligned}$$

Soit H la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par : $H(x) = x - (x-1)\ln x$.

- Montrer que H est une primitive de f sur $]0\ ;\ +\infty[$.
  $\rightarrow$ Pour montrer que H est une primitive de f, il suffit de montrer que $H' = f$.
  On a :

$$H'(x) = x' - ((x-1)\ln(x))' = 1 - ((x-1)'\ln(x) + (x-1)\ln(x)')$$
$$= 1 - (\ln(x) + \frac{x-1}{x}) = 1 - \ln(x) - 1 + \frac{1}{x} = f(x)$$

- En déduire l'expression de la fonction F de la question 1.

Soit H la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par : $H(x) = x - (x-1)\ln x$.

- Montrer que H est une primitive de f sur $]0\ ;\ +\infty[$.
  $\rightarrow$ Pour montrer que H est une primitive de f, il suffit de montrer que $H' = f$.
  On a :

$$\begin{aligned} H'(x) &= x' - ((x-1)\ln(x))' = 1 - ((x-1)'\ln(x) + (x-1)\ln(x)') \\ &= 1 - (\ln(x) + \frac{x-1}{x}) = 1 - \ln(x) - 1 + \frac{1}{x} = f(x) \end{aligned}$$

- En déduire l'expression de la fonction F de la question 1.
  $\rightarrow$ Comme F et H sont deux primitives de f, il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que
  $F(x) = H(x) + k$.
  Or on a $F(1) = 1$ d'après la question 1 et $H(1) = 1 - (1-1)\ln(1) = 1$ donc
  $F(1) = H(1) + k \Leftrightarrow 1 = 1 + k \Leftrightarrow k = 0$: on en déduit que $F = G$ sur $]0\ ;\ +\infty[$.

Soit H la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par : $H(x) = x - (x-1)\ln x$.

- Montrer que H est une primitive de f sur $]0\ ;\ +\infty[$.
  $\rightarrow$ Pour montrer que H est une primitive de f, il suffit de montrer que $H' = f$.
  On a :
  $$\begin{aligned} H'(x) &= x' - ((x-1)\ln(x))' = 1 - ((x-1)'\ln(x) + (x-1)\ln(x)') \\ &= 1 - (\ln(x) + \frac{x-1}{x}) = 1 - \ln(x) - 1 + \frac{1}{x} = f(x) \end{aligned}$$

- En déduire l'expression de la fonction F de la question 1.
  $\rightarrow$ Comme F et H sont deux primitives de f, il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $F(x) = H(x) + k$.
  Or on a $F(1) = 1$ d'après la question 1 et $H(1) = 1 - (1-1)\ln(1) = 1$ donc $F(1) = H(1) + k \Leftrightarrow 1 = 1 + k \Leftrightarrow k = 0$: on en déduit que $F = G$ sur $]0\ ;\ +\infty[$.
- Déterminer la limite de $\frac{H(x)}{x^2}$ en $+\infty$.

Soit H la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par : $H(x) = x - (x-1)\ln x$.

- Montrer que H est une primitive de f sur $]0\ ;\ +\infty[$.
  $\rightarrow$ Pour montrer que H est une primitive de f, il suffit de montrer que $H' = f$.
  On a :
  $$\begin{aligned} H'(x) &= x' - ((x-1)\ln(x))' = 1 - ((x-1)'\ln(x) + (x-1)\ln(x)') \\ &= 1 - (\ln(x) + \frac{x-1}{x}) = 1 - \ln(x) - 1 + \frac{1}{x} = f(x) \end{aligned}$$

- En déduire l'expression de la fonction F de la question 1.
  $\rightarrow$ Comme F et H sont deux primitives de f, il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $F(x) = H(x) + k$.
  Or on a $F(1) = 1$ d'après la question 1 et $H(1) = 1 - (1-1)\ln(1) = 1$ donc $F(1) = H(1) + k \Leftrightarrow 1 = 1 + k \Leftrightarrow k = 0$: on en déduit que $F = G$ sur $]0\ ;\ +\infty[$.

- Déterminer la limite de $\frac{H(x)}{x^2}$ en $+\infty$.
  $\rightarrow$ On a $\frac{H(x)}{x^2} = \frac{x-(x-1)\ln x}{x^2} = \frac{1}{x} - \frac{\ln(x)}{x} + \frac{\ln(x)}{x^2}$.
  Or on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0$.
  Finalement $\lim\limits_{x\to+\infty} H(x) = 0$.