Représentations paramétriques et équations cartésiennes : cours

1 Représentation paramétrique d'une droite

Propriété

L'espace est muni d'un repère $(O; \vec{i}\,; \vec{j}\,; \vec{k}\,)$ qui n'est d'ailleurs pas forcement orthonormée.
On considère une droite $(\mathscr{D})$ passant par le point A de coordonnées $(x_A; y_A; z_A)$ et dont la direction est donnée par le vecteur $\vec{u}\,(a; b; c)$.
Le point $M(x; y; z)$ appartient à la droite $(\mathscr{D})$ si et seulement s'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \end{cases}$$

Ce système de trois égalités est la représentation paramétrique de la droite $(\mathscr{D})$.

Exemple 1 (Intersection d'un plan et d'une droite) *Cette représentation permet de déterminer les coordonnées du point d'intersection d'une droite et d'un plan non parallèle au sens large.*
On se place dans un repère $(O; \vec{i}\,; \vec{j}\,; \vec{k}\,)$.
On considère les points $A(1; 2; 3)$ *et* $B(2; 3, 1)$ *et on cherche l'intersection de la droite* (AB) *avec le plan* $(O; \vec{i}\,; \vec{j}\,)$.
On va commencer par déterminer la représentation paramétrique de la droite (AB) *en partant du point* A *:*

$$\overrightarrow{AB}(1; 1; -2)$$

$$\text{d'où la représentation :} \begin{cases} x = 1 + 1t \\ y = 2 + 1t \\ z = 3 - 2t \end{cases} \quad \text{avec} t \in \mathbb{R}$$

Pour l'instant, on ne sait pas si la droite et le plan ont un point d'intersection, si la droite est inclus dans le plan ou la droite et le plan sont parallèles.
Si la droite possède un point $I(x_I; y_I; z_I)$ *qui est dans le plan* $(O; \vec{i}\,; \vec{j}\,)$ *alors* $z_I = 0$, *ce qui implique* $3 - 2t = 0 \Leftrightarrow t = +\frac{3}{2}$ *: on a donc un seul point d'intersection entre la droite et le plan.*
En remplaçant t *dans* x *et* y, *on trouve l'unique point d'intersection* I *:*

$$I\left(\frac{5}{2}; \frac{7}{2}; 0\right)$$

2 Équation cartésienne d'un plan

Théorème

L'espace est muni d'un repère orthonormée $(O; \vec{i}\,; \vec{j}\,; \vec{k})$.
Un plan $(\mathscr{P})$ dont un vecteur normal est $\vec{n}\,(a; b; c)$ différent du vecteur nul admet une équation cartésienne de la forme :

$$ax + by + cz + d = 0$$

avec d un nombre réel que l'ont peut déterminer en connaissant un point du plan.
Réciproquement, si les nombres a, b et c sont non tous nuls, l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que $ax + by + cz + d = 0$ avec d un nombre réel, est un plan de vecteur normal $\vec{n}\,(a; b; c)$.

Preuve

- ✏ Soit $\mathscr{P}$ un plan de vecteur normal $\vec{n}\,(a; b; c)$ et $A(x_A; y_A; z_A)$ un point du plan $\mathscr{P}$.
Si le point $M(x; y; z)$ appartient au plan $\mathscr{P}$, alors on a :

$$\begin{aligned} &\vec{n} \text{ orthogonal à } \overrightarrow{AM} \\ \Leftrightarrow\ &\vec{n}.\overrightarrow{AM} = 0 \\ \Leftrightarrow\ &a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0 \\ \Leftrightarrow\ &ax + by + cz - ax_A - by_A - cz_A = 0 \end{aligned}$$

La conclusion vient en posant $d = -ax_A - by_A - cz_A$.

- ✏ Regardons maintenant l'ensemble $\mathscr{E}$ des points $M(x; y; z)$ tels que :

$$\begin{gathered} ax + by + cz + d = 0 \\ \text{avec } a, b, c \text{ non tous nuls} \end{gathered}$$

On va supposer que a est non nul même si on aurait pu faire la même supposition avec b ou encore c, la conclusion serait la même.
Le point A de coordonnées $\left(-\frac{d}{a}; 0; 0\right)$, le point B de coordonnées $\left(-\frac{d+b}{a}; 1; 0\right)$ et le point C de coordonnées $\left(-\frac{d+c}{a}; 0; 1\right)$ sont trois points différents de $\mathscr{E}$ tandis que le point de coordonneés $\left(-\frac{d+1}{a}; 0; 0\right)$ ne l'est pas : $\mathscr{E}$ ne peut pas être tout l'espace.
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}\left(-\frac{b}{a}; 1; 0\right)$ et $\overrightarrow{AC}\,(-\frac{c}{a}; 0; 1)$ ne sont pas colinéaires et sont non nuls et tous les points $M(x; y; z)$ de $\mathscr{E}$ vérifient :

$$\overrightarrow{AM} = y\overrightarrow{AB} + z\overrightarrow{AC}$$

Cela signifie que le point M appartient au plan passant par A de vecteurs directeurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$: donc $\mathscr{E}$ est exactement ce plan.
De plus, pour tout point $M(x; y; z)$ et $M'(x'; y'; z')$ de ce plan :

$$\overrightarrow{MM'}.\vec{n} = a(x' - x) + b(y' - y) + c(z' - z) = ax' + by' + cz' - (ax + by + cz) = d - d = 0$$

Le vecteur $\vec{n}$ est donc bien un vecteur normal à ce plan.

Remarque 1 *Si on reprend les notations précédentes, on peut noter que chaque plan parallèle au plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne $ax+by+cz+d=0$ a une équation du type $ax+by+cz+d'=0$: la seule différence vient de la valeur du terme "constant".*
En revanche, les vecteurs inclus dans chacun de ses plans parallèles ont des coordonnées qui vérifient l'équation $ax+by+cz=0$.

3 Positions relatives d'une droite et d'un plan

Propriété

Soit $(\mathscr{D})$ une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ et $(\mathscr{P})$ un plan de vecteur normal $\overrightarrow{n}$:

- ✏ si $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{P})$ sont sécants alors $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{n}$ ne sont pas orthogonaux et $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{n}\neq 0$.
- ✏ si $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{P})$ sont parallèle au sens large alors $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{n}$ ne sont orthogonaux et $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{n}=0$.

Exemple 2 (Détermination de l'intersection d'une droite et d'un plan) *Dans un repère orthonormée, on considère le plan $(\mathscr{P})$ d'équation $2x-y+3z-2=0$ et les deux points $A(1;2;-3)$ et $B(-1;2;0)$.*
On va montrer que la droite (AB) et le plan $(\mathscr{P})$ sont sécants en un point que l'on déterminera.
Première étape : *On va montrer que la droite et le plan sont sécants.*

Pour cela, il suffit de montrer que le produit scalaire d'une vecteur directeur de la droite et d'un vecteur directeur du plan n'est pas nul.
Un vecteur normal de $(\mathscr{P})$ est $\overrightarrow{n}(2;-1;3)$ et un vecteur directeur de la droite (AB) est $\overrightarrow{AB}(-2;0;3)$ et on a :

$$\overrightarrow{n}.\overrightarrow{AB}=2\times(-2)+(-1)\times 0+3\times 3=-4+0+9=5\neq 0$$

Par conséquent, les deux vecteurs ne sont pas orthogonaux, cela signifie que le plan et la droite ne sont parallèles au sens large : ils sont donc sécantes en un point I.
Deuxième étape : *Calcul des coordonnée du point $I(x_I;y_I;z_I)$.*

On commence par donner le système de représentation paramétrique de la droite (AB) :

$$\begin{cases} x=1-2t \\ y=2 \\ z=-3+3t \end{cases} \quad \textit{avec } t\in\mathbb{R}$$

On remplace les coordonnées précédente dans l'équation de $(\mathscr{P})$:

$$2(1-2t)-2+3(-3+3t)-2=0 \Leftrightarrow 2-4t-2-9+9t-2=0 \Leftrightarrow t=\frac{11}{5}$$

Et pour conclure, on remplace t par la valeur que l'on vient de trouver dans la représentation paramétrique de (AB) :

$$\begin{cases} x=1-2\times\frac{11}{5} \\ y=2 \\ z=-3+3\times\frac{11}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{17}{5} \\ y=2 \\ z=\frac{18}{5} \end{cases}$$

Exemple 3 (Détermination des coordonnées du projeté orthogonale d'un point sur un droite) *Dans un repère orthonormé, on considère trois points :*

$$A(1;0;2) \quad B(-1;2;1) \quad C(0;1;-2)$$

On cherche les coordonnées du projeté I orthogonal du point C sur la droite (AB).
On commence par déterminer la représentation paramétrique de la droite (AB) :

$$\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2t \\ z = 2 - t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

On sait que les coordonnées de I sont de la forme précédente et de plus :

$$\overrightarrow{IC}.\overrightarrow{AB} = 0$$

$$\Leftrightarrow (0 - 1 + 2t) \times (-2) + (1 - 2t) \times 2 + (-2 - 2 + t) \times (-1) = 0 \Leftrightarrow -4t + 2 + 2 - 4t - t + 4 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{8}{9}$$

Propriété

Deux plans sont perpendiculaires lorsque un vecteur normal de l'un est orthogonal à un vecteur normal de l'autre.

Exemple 4 (Orthogonalité de deux plans) *Dans un repère orthonormée, on considère les deux plans suivants définis par leur équation cartésienne respective :*

$$(\mathscr{P}_1) \ : \ 2x + 3y - 4z + 3 = 0 \qquad\qquad (\mathscr{P}_2) \ : \ x - 2y - z + 7 = 0$$

Un vecteur normal de $(\mathscr{P}_1)$ est $\overrightarrow{n}_1(2;3;-4)$ et un vecteur normal de $(\mathscr{P}_2)$ est $\overrightarrow{n}_2(1;-2;-1)$. On a :

$$\overrightarrow{n}_1.\overrightarrow{n}_2 = 2 \times 1 + 3 \times (-2) - 4 \times (-1) = 2 - 6 + 4 = 0$$

Ces deux vecteurs normaux sont donc orthogonaux : les deux plans sont perpendiculaires.