# Calculs d'intégrales : cours

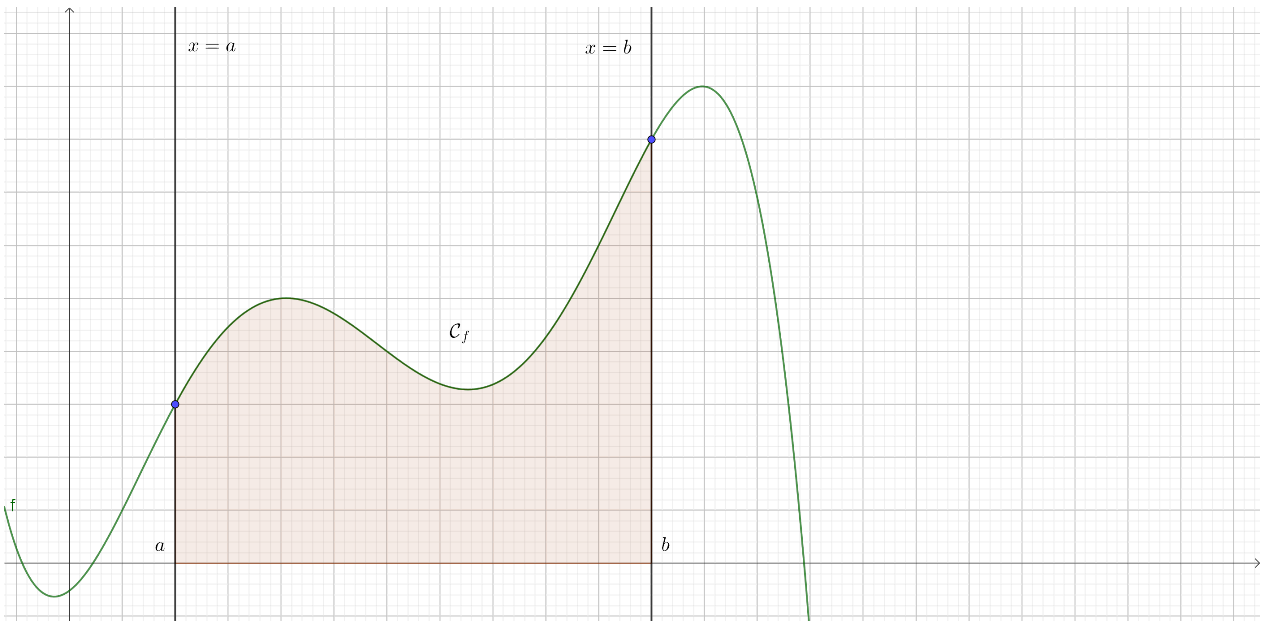
## 1 Intégrale et aire

### 1.1 Introduction

**Définition**

Soit $f$ une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$.
L'intégrale de $f$ sur $[a;b]$ est l'aire de la surface composée des points $M(x;y)$ tels que :

- $a \leq x \leq b$.
- $0 \leq y \leq f(x)$.

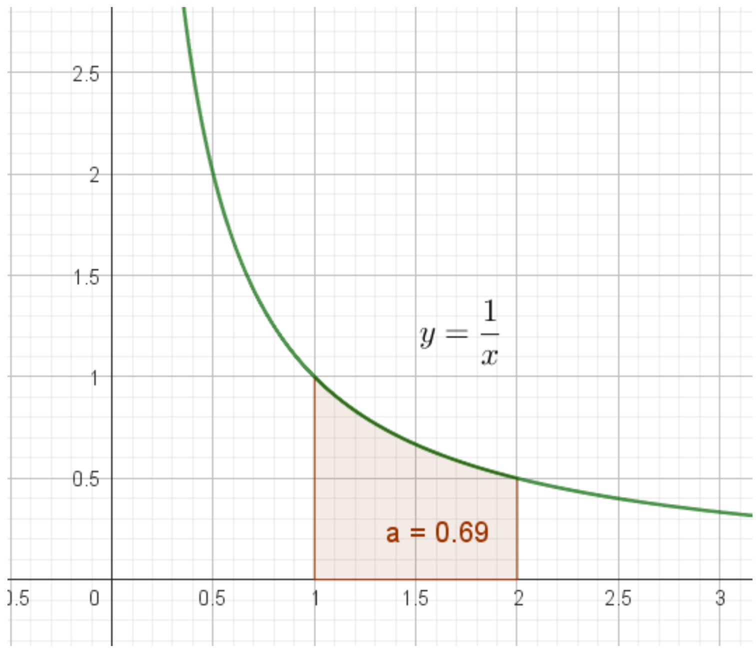



L'intégrale de la fonction $f$ sur $[a;b]$ se note :

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

et se lit **intégrale de** $a$ **à** $b$ **de f(x)dx**.
Les valeurs $a$ et $b$ sont appelées bornes d'intégration.
La variable $x$ est **muette** : on peut la remplacer par $t$, $y$ ou encore $s$ sans que cela change le sens ou la valeur de l'intégrale. On reconnaîtra la variable d'intégration en regardant celle après le **d**.

**Exemple 1** *L'aire de la surface délimitée par la courbe représentant la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$, l'axe des abscisses et les deux droites d'équation $x = -2$ et $x = 1$ se note $\int_1 2$ et vaut environ 0.69 unité d'aire.*




## 1.2 Encadrement

On va prendre l'exemple d'une fonction continue, positive et monotone sur un intervalle $[a;b]$.
On va découper l'intervalle d'intégration $[a;b]$ en $n$ intervalles égaux : leur longueur sera de $\frac{b-a}{n}$.
L'intervalle $[a;b]$ peut s'écrire :

$$[a;b] = \cup_{i=0}^{n-1} \left[ a + i \times \frac{b-a}{n} ; a + (i+1) \times \frac{b-a}{n} \right]$$

Sur chacun des intervalles $\left[ a + i \times \frac{b-a}{n} ; a + (i+1) \times \frac{b-a}{n} \right]$, la fonction $f$ peut être encadrée par :

- la valeur $f\left(a + i \times \frac{b-a}{n}\right)$
- la valeur $f\left(a + (i+1) \times \frac{b-a}{n}\right)$

L'ordre d'encadrement va dépendre la monotonie de $f$.
Finalement sur chacun de ces intervalles, l'aire de la fonction $f$ sera encadrée par les aires des rectangles suivantes :

- la valeur $\frac{b-a}{n} f\left(a + i \times \frac{b-a}{n}\right)$
- la valeur $\frac{b-a}{n} f\left(a + (i+1) \times \frac{b-a}{n}\right)$

On peut traduire ces inégalités dans une fonction Python, après avoir défini la fonction $f$ :

```python
from math import log
def f(x):
    y=log(x)
    return y


def encadrement(a,b,n):
    l=(b-a)/n
    x=a
    m=0
    p=0
    for i in range(0,n):
        m=m+l*f(x)
        x=x+l
        p=p+l*f(x)
    return [m,p]
```

Dans cet exemple, on a étudié la fonction $ln(x)$ et on trouve les encadrements suivants :

```
In [27]: encadrement(1,2,10)
Out[27]: [0.35122057771775705, 0.42053529577375165]

In [28]: encadrement(1,2,100)
Out[28]: [0.38282445857472924, 0.3897559303803287]

In [29]: encadrement(1,2,1000)
Out[29]: [0.3859477458629128, 0.3866408930434727]
```

### 1.3 Passage aux fonctions de signe quelconque

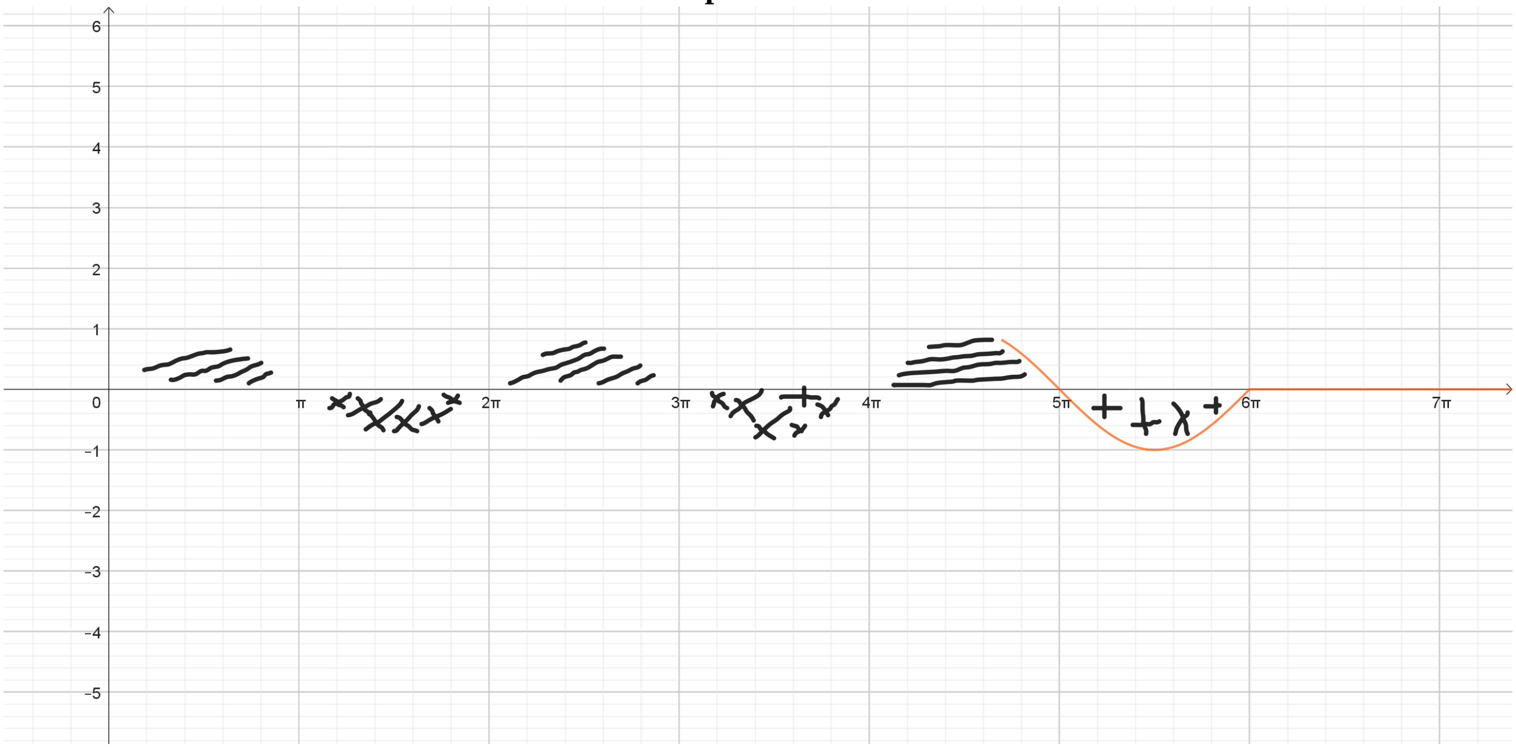
**Définition**

Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$.
On appelle intégrale de $f$ sur $[a;b]$, le nombre $I=\int_a^b f(x)dx$ défini par :

$$I=\int_a^b f(x)dx = Aire(P)-Aire(N)$$

où $Aire(P)$ est la somme des aires des surfaces sous la courbe et au dessus de l'axe des abscisess quand $f$ est positive et $Aire(N)$ est la somme des aires des surfaces au dessus de la courbe et sous l'axe des abscisses quand $f$ est négative.

**Exemple 2**



*L'intégrale* $\int 0^{6\pi} \sin(x)dx$ *est la somme des aires hachurées moins la somme des aires cruciformes; on peut conjecturer que cette intégrale vaut* $0$.

## 1.4 Propriétés

**Propriétés élémentaires**

Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $I$, et $a$, $b$ et $c$ des réels de $I$ :

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx \quad \text{Relation de Chasles}$$

# 2 Intégrale et primitive

## 2.1 Fonction définie par une intégrale

Théorème

Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$.
La fonction $F$ définie sur $[a;b]$ par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est la primitive de $f$ qui s'annule en $a$.

Preuve

On va démontrer cette propriété dans le cas où $f$ est croissante.
Soit $x \in [a;b]$ et $\epsilon \in \mathbb{R}$ tel que $x+\epsilon \in [a;b]$ :

$$\begin{aligned}\frac{F(x+\epsilon)-F(x)}{\epsilon} &= \frac{\int_a^{x+\epsilon} f(t)dt - \int_a^x f(t)}{\epsilon} \\ &= \frac{\int_x^{x+\epsilon} f(t)dt}{\epsilon} \qquad \text{relation de Chasles}\end{aligned}$$

**Premier cas :** $\epsilon > 0$.
Dans ce cas, $x+\epsilon \geq x$, de plus, comme $f$ est croissante, alors $f(t)-f(x) \geq 0 \forall t \in [x;x+\epsilon]$.
L'intégrale de $f(t)-f(x)$ sur $[x;x+\epsilon]$ correspond donc à une aire et est positive, par conséquent :

$$\begin{aligned}\int_x^{x+\epsilon} \big(f(t)-f(x)\big)dt \geq 0 &\Leftrightarrow \int_x^{x+\epsilon} f(t)dt \geq \int_x^{x+\epsilon} f(x)dt \\ &\Leftrightarrow \int_x^{x+\epsilon} f(t)dt \geq \epsilon f(x)dt\end{aligned}$$

De même, $f(x+\epsilon)-f(t)$ est positive pour toute valeur de $t \in [x;x+\epsilon]$ et par conséquent :

$$\int_x^{x+\epsilon} f(t)dt \leq \epsilon f(x+\epsilon)$$

Finalement :

$$f(x) \leq \frac{F(x+\epsilon)-F(x)}{\epsilon} \leq f(x+\epsilon)$$

Quand $\epsilon$ tend vers 0, on obtient, d'après le théorème d'encadrement des limites, :

$$F'(x) = f(x)$$

Cela signifie que $F$ est dérivable sur $[a;b]$ et de dérivée $f$ ; de plus $F(a) = \int_a^a f(t)dt = 0$.

**Deuxième cas :** $\epsilon > 0$.
Dans ce cas, $x+\epsilon \leq x$, de plus, comme $f$ est croissante, alors $f(x) - f(t) \geq 0 \forall t \in [x+\epsilon; x]$.
L'intégrale de $f(x) - f(t)$ sur $[x+\epsilon; x]$ correspond donc à une aire et est positive, par conséquent :

$$\int_{x+\epsilon}^{x} \big(f(x) - f(t)\big)\,dt \geq 0 \Leftrightarrow \int_{x+\epsilon}^{x} f(x)dt \geq \int_{x+\epsilon}^{x} f(t)dt$$
$$\Leftrightarrow \int_{x+\epsilon}^{x} f(t)dt \leq -\epsilon f(x)$$

De même, $f(t) - f(x+\epsilon)$ est positive pour toute valeur de $t \in [x+\epsilon; x]$ et par conséquent :

$$\int_{x+\epsilon}^{x} f(t)dt \geq -\epsilon f(x+\epsilon)$$

Finalement :

$$-\epsilon f(x+\epsilon) \leq \int_{x+\epsilon}^{x} f(t)dt \leq -\epsilon f(x)$$
$$\text{donc} \quad \epsilon f(x+\epsilon) \geq \int_{x}^{x+\epsilon} f(t)dt \geq \epsilon f(x)$$
$$\text{ainsi} \quad f(x+\epsilon) \leq \frac{F(x+\epsilon) - F(x)}{\epsilon} \leq f(x)$$

Quand $\epsilon$ tend vers 0, on obtient, d'après le théorème d'encadrement des limites, :

$$F'(x) = f(x)$$

Cela signifie que $F$ est dérivable sur $[a; b]$ et de dérivée $f$ ; de plus $F(a) = \int_a^a f(t)dt = 0$.

Théorème

Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives.

**Exemple 3** *Étudier les variations de la fonction* $F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$ *pour* $x \geq 0$.
*On sait que la fonction* $F(x)$ *est dérivable et a pour dérivée* $f(x) = e^{-x^2}$ *qui est strictement positive pour* $x \geq 0$.
*La fonction* $F$ *est donc croissante pour* $x \geq 0$.

## 2.2 Calcul d'intégrales

## Propriété

Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$.
Si $F$ est une primitive de $f$, alors :

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

## Preuve

La fonction $\tilde{F}(x) = \int_a^x f(t)dt$ est la primitive de $f$ s'annulant en $a$.
On a $\tilde{F}(b) = \int_a^b f(t)dt$.
Soit $F$ une primitive de $f$. On sait qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $F(x) = \tilde{F}(x) + k$.
Par conséquent :

$$\begin{aligned} F(b) &= \tilde{F}(b) + k \\ F(a) &= \tilde{F}(a) + k = 0 + k = k \\ \text{donc } F(b) &= \tilde{F}(b) + F(a) \\ \text{ainsi } \int_a^b f(t)dt &= \tilde{F}(b) = F(b) - F(a) \end{aligned}$$

## Définition

Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $I$, $a$ et $b$ deux réels de $I$ et $F$ une primitive de $f$ sur $[a;b]$.
On appelle intégrale de $f$ sur $[a;b]$, le nombre $I = \int_a^b f(x)dx$ la différence $F(b) - F(a)$.

**Exemple 4**

$$A = \int_1^e \frac{1}{x}dx = [\ln(x)]_1^e = \ln(e) - \ln(1) = 1$$

$$B = \int_1^2 \frac{1}{x^2}dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^2 = -\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{1}\right) = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

$$C = \int_0^2 \left(3x^2 + 4x - 5\right)dx = \left[x^3 + 2x^2 - 5x\right]_0^2 = 2^3 + 2\times 2^2 - 5\times 2 - \left(0^3 + 2\times 0^2 - 5\times 0\right) = 8 + 8 - 10 = 6$$

$$D = \int_0^1 te^{-t^2}dt = \left[-\frac{1}{2}e^{-t^2}\right]_0^1 = -\frac{1}{2}e^{-1^2} - \left(-\frac{1}{2}e^{-0^2}\right) = -\frac{1}{2}e^{-1} + \frac{1}{2}$$

### 2.3 Propriétés

**Propriétés**

Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $I$; $a$ et $b$ deux réels de $I$ :

- ✏ $\forall k \in \mathbb{R}$, $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$.
- ✏ $\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.

**Propriétés**

Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $I$; $a$ et $b$ deux réels de $I$ tels que $a \leq b$ :

- ✏ Si, pour tout $x \in [a;b]$, $f(x) \geq 0$, alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.
- ✏ Si, pour tout $x \in [a;b]$, $f(x) \geq g(x)$, alors $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$.

**Exemple 5 ( Intégrales de Wallis )** *Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la suite $(W_n)$ par :*

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin(t)^n dt$$

*Montrer que la suite est décroissante et convergente.*

## 3 Aire délimitée par deux courbes

**Propriété**

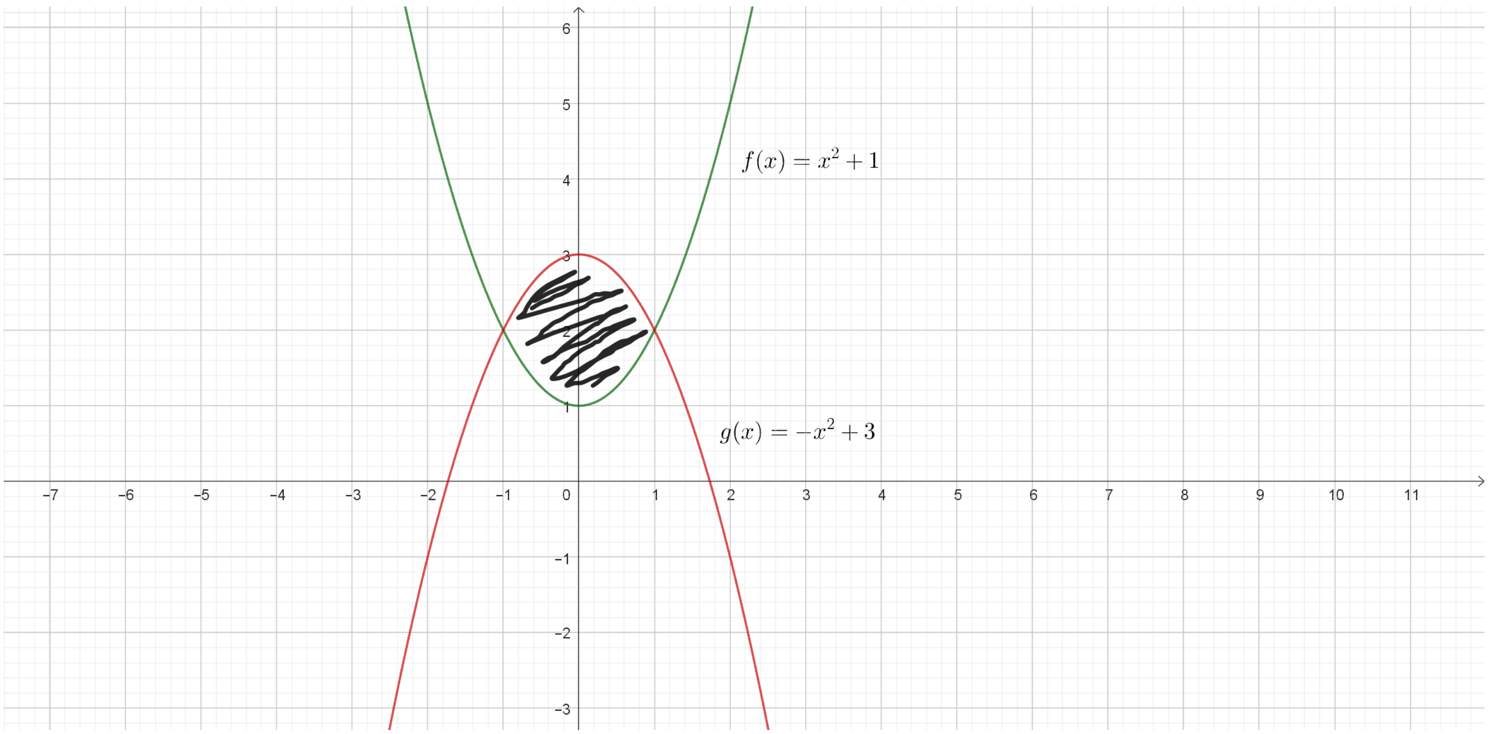
Soit $f$ et $g$ deux fonctions définies sur $I$ un intervalle telles que :

- ✏ $a \leq b$ avec $a, b \in I$
- ✏ $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in [a;b]$
- ✏ les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ représentant respectivement $f$ et $g$ se coupent en $a$ et $b$.

L'aire comprise entre les deux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ pour $x$ compris entre $a$ et $b$ est l'intégrale suivante :

$$\int_a^b \big(g(x) - f(x)\big)\,dx$$

**Exemple 6** *On va déterminer la valeur de l'aire hachurée :*




*L'aire recherchée se calcule de la manière suivante :*

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1} \big(g(x) - f(x)\big)\, dx \\
&= \int_{-1}^{1} \big(-x^2 + 3 - (x^2 + 1)\big)\, dx \\
&= \int_{-1}^{1} \big(-x^2 + 3 - (x^2 + 1)\big)\, dx \\
&= \int_{-1}^{1} \big(-2x^2 + 2\big)\, dx \\
&= \left[-\frac{2}{3}x^3 + 2x\right]_{-1}^{1} \\
&= -\frac{2}{3} \times 1^3 + 2 \times 1 - \left(-\frac{2}{3} \times (-1)^3 + 2 \times (-1)\right) \\
&= -\frac{2}{3} + 2 - \frac{2}{3} + 2 \\
&= \frac{8}{3} \textit{ unités d'aire}
\end{aligned}$$

## 4 Valeur moyenne d'une fonction

**Définition**

Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ avec $a \neq b$.
On appelle valeur moyenne de $f$ sur $[a;b]$ le nombre réel :

$$m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

**Exemple 7** *On modélise à l'aide d'une fonction le nopbre de malades lors d'une épidémie.*
*Au bout de $x$ jours après le signalement des premiers cas, le nombre de malades est égale à $f(x) = 16x^2 - x^3$.*
*Déterminer le nombre moyen de malades chaque jour sur une période de 16 jours.*
*Le nombre moyen $m$ de malades par jour sur une période de 16 jours est :*

$$\begin{aligned}
m &= \frac{1}{16-0}\int_0^{16} f(x)dx \\
&= \frac{1}{16-0}\int_0^{16} \left(16x^2 - x^3\right)dx \\
&= \frac{1}{16}\left[\frac{16}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^{16} \\
&= \frac{1}{16}\left(\frac{16}{3}\times 16^3 - \frac{1}{4}\times 16^4 - \left(\frac{16}{3}\times 0^3 - \frac{1}{4}\times 0^4\right)\right) \\
&= \frac{1}{16}\left(\frac{16^4}{3} - \frac{16^4}{4}\right) \\
&= \frac{16^3}{12} \\
&= \frac{1024}{3} \approx 341
\end{aligned}$$

*En moyenne, sur une période de 16 jours, le nombre moyen journalier de malade est de 341.*

## 5 Intégration par parties

**Théorème**

Soit $u$ et $v$ deux fonctions dérivables sur $[a;b]$. Alors, on a :

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$$

**Preuve**

On part de la formule de dérivation d'un produit :

$$\begin{aligned}
&(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)\\
\text{donc } &\int_a^b (u(x)v(x))'\,dx = \int_a^b u'(x)v(x)dx + \int_a^b u(x)v'(x)dx\\
&\Rightarrow u(b)v(b) - u(a)v(a) = \int_a^b u'(x)v(x)dx + \int_a^b u(x)v'(x)dx\\
&\Rightarrow [u(x)v(x)]_a^b = \int_a^b u'(x)v(x)dx + \int_a^b u(x)v'(x)dx\\
&\Rightarrow \int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx
\end{aligned}$$

**Exemple 8** *Calculer les intégrales suivantes :*

$$\begin{aligned}
A &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(x)dx\\
B &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin(x)dx\\
C &= \int_1^{e^2} \ln(x)dx
\end{aligned}$$

# 6 Intégration et suites

**Exemple 9 ( Intégrales de Wallis )** *Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la suite $(W_n)$ par :*

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin(t)^n dt$$

*Donner une relation de récurrence entre $W_{n+2}$ et $W_n$.*
*En déduire l'expression des $W_{2n}$ et des $W_{2n+1}$ pour tout entier naturel $n$.*