

1 Limite d'une fonction à l'infini

1.1 Limite finie à l'infini



Définition intuitive

Soit $l \in \mathbb{R}$.

On dit que la limite de f en $+\infty$ est l lorsque la distance entre f(x) et l est aussi petite que l'on veut dès que x est assez grand.

On note $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$.



Définition plus rigoureuse

⊜ On dit que la fonction f admet pour limite $L \in \mathbb{R}$ en $+\infty$ si tout intervalle ouvert contenant L contient toutes les valeurs de f(x) dès que x est suffisamment grand. On note :

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = L$$

⊜ On dit que la fonction f admet pour limite $L \in \mathbb{R}$ en $-\infty$ si tout intervalle ouvert contenant L contient toutes les valeurs de f(x) dès que -x est suffisamment grand. On note :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$



Définition d'asymptote

Example La droite d'équation y = L est asymptote horizontale à la courbe représentative de la fonction f en $+\infty$ si

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$

 \blacksquare La droite d'équation y = L est asymptote horizontale à la courbe représentative de la fonction f en $-\infty$ si

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

Lorsque x se rapproche de $+\infty$, ou $-\infty$ suivant le cas, la distance entre le point (x; f(x)) et (x; L) diminue et s'approche de 0.

1.2 Limite infinie à l'infini



Définitions intuitives

- Soit f définie sur un intervalle de la forme $[a; +\infty[$, on dit que la limite de f en $+\infty$ est égale à $+\infty$ lorsque f(x) est aussi grand que l'on veut dès que x est assez grand. On note $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
- Soit f définie sur un intervalle de la forme $[a; +\infty[$, on dit que la limite de f en $+\infty$ est égale à $-\infty$ lorsque f(x) est plus petit que n'importe quel nombre négatif que l'on veut dès que x est assez grand. On note $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.
- Soit f définie sur un intervalle de la forme $[-\infty; a[$, on dit que la limite de f en $-\infty$ est égale à $+\infty$ lorsque f(x) est aussi grand que l'on veut dès que -x est assez grand. On note $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.
- Soit f définie sur un intervalle de la forme $[-\infty; a[$, on dit que la limite de f en $-\infty$ est égale à $-\infty$ lorsque f(x) est plus petit que n'importe quel nombre négatif que l'on veut dès que -x est assez grand.

On note $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.



Définitions plus rigoureuses

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

⊜ On dit que la fonction f admet pour limite $-\infty$ en $+\infty$ si tout intervalle $]-\infty$; b[, avec b réel, contient toutes les valeurs de f(x) dès que x est suffisamment grand et on note :

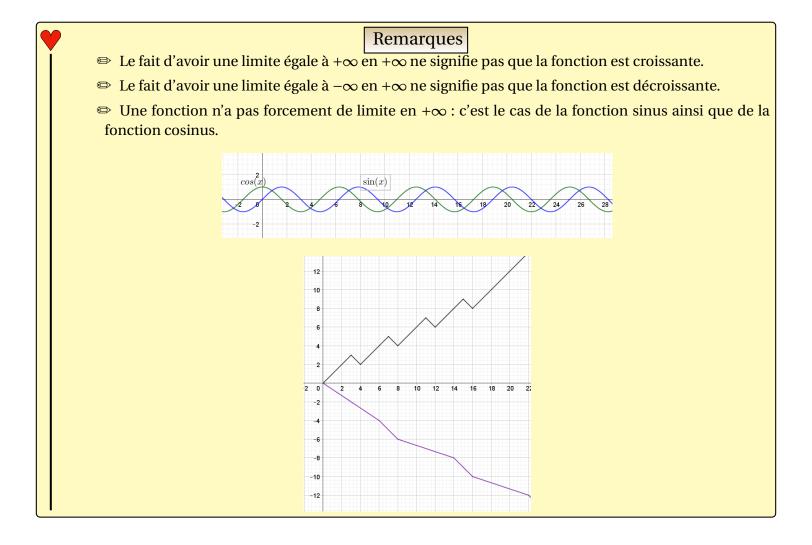
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

⊜ On dit que la fonction f admet pour limite $+\infty$ en $-\infty$ si tout intervalle] a; $+\infty$ [, avec a réel, contient toutes les valeurs de f(x) dès que -x est suffisamment grand et on note :

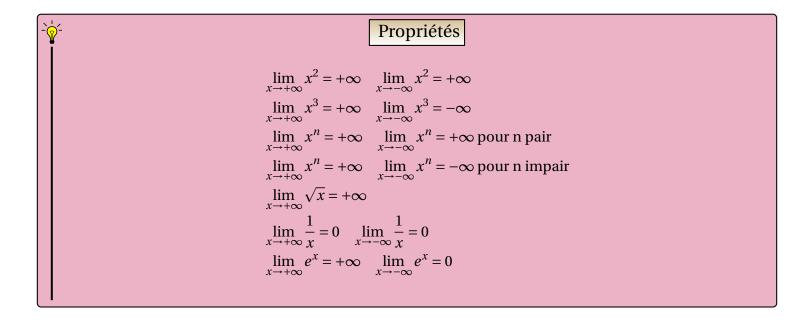
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

⊜ On dit que la fonction f admet pour limite $-\infty$ en $-\infty$ si tout intervalle $]-\infty$; b[, avec b réel, contient toutes les valeurs de f(x) dès que -x est suffisamment grand et on note :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$



1.3 Limite des fonctions usuelles



2 Limite d'une fonction en un réel A



Définitions intuitives

Soit $a \in \mathbb{R}$. On dit que la limite $de f en a est + \infty lorsque f(x)$ est aussi grand que l'on veut dès que x est assez proche de a.

On note $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$.

Soit $a \in \mathbb{R}$. On dit que la limite de f en a est $-\infty$ lorsque f(x) est plus petit que n'importe quel nombre négatif que l'on veut dès que x est assez proche de a.

On note $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$.



Définitions plus rigoureuses

⊜ On dit que la fonction f admet pour limite $+\infty$ quand x tend vers A par valeur négative (ou à gauche) si tout intervalle $]a; +\infty[$, a réel, contient toutes les valeurs de f(x) dès que x est suffisamment proche de A tout en restant plus petit que A et on note :

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = \lim_{\substack{x \to a^{-}}} f(x) = +\infty$$

⊜ On dit que la fonction f admet pour limite $+\infty$ quand x tend vers A par valeur positif (ou à droite) si tout intervalle $]a; +\infty[$, a réel, contient toutes les valeurs de f(x) dès que x est suffisamment proche de A tout en restant plus grand que A et on note :

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

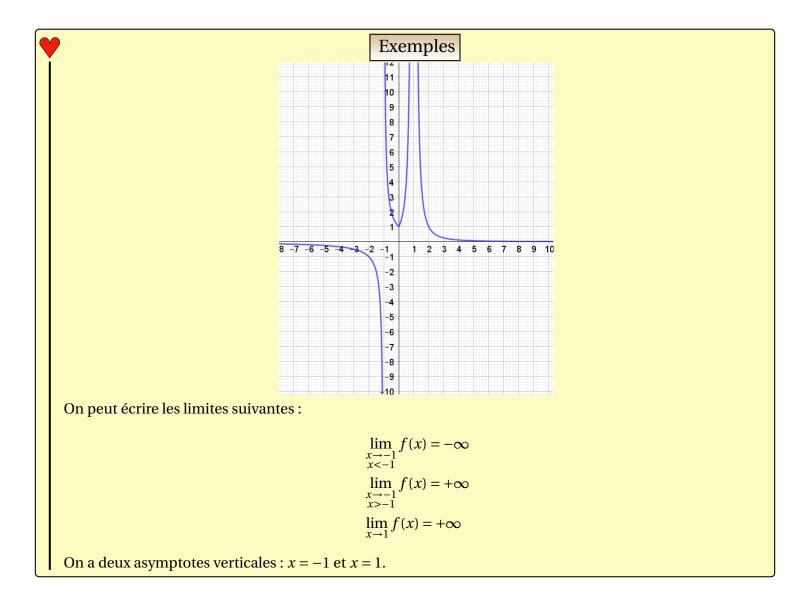
⊜ On dit que la fonction f admet pour limite $-\infty$ quand x tend vers A par valeur négative si tout intervalle $]-\infty$; b[, b réel, contient toutes les valeurs de f(x) dès que x est suffisamment proche de A tout en restant plus petit que A et on note :

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = \lim_{\substack{x \to a^{-}}} f(x) = -\infty$$

⊜ On dit que la fonction f admet pour limite $-\infty$ quand x tend vers A par valeur positif si tout intervalle $]-\infty$; b[, b réel, contient toutes les valeurs de f(x) dès que x est suffisamment proche de A tout en restant plus grand que A et on note :

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

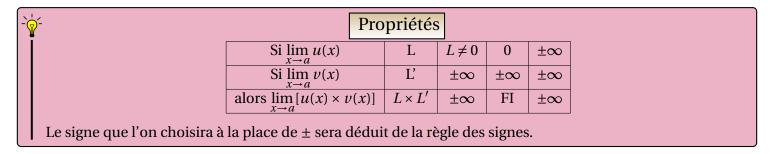


3 Opérations sur les limites

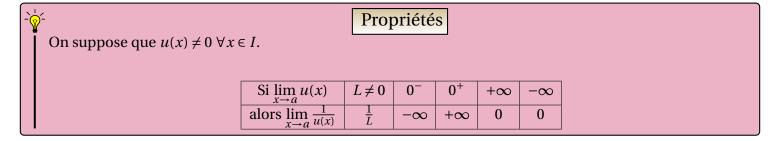
3.1 Limite d'une somme

-` \ overline{-			Prop	riétés	3			
		$\operatorname{Si} \lim_{x \to a} u(x)$	L	L	L	+∞	+∞	$-\infty$
		$\operatorname{Si} \lim_{x \to a} v(x)$	Ľ	+∞	$-\infty$	+∞	$-\infty$	$-\infty$
		alors $\lim_{x \to a} [u(x) + v(x)]$	L+L'	+∞	$-\infty$	+∞	FI	$-\infty$

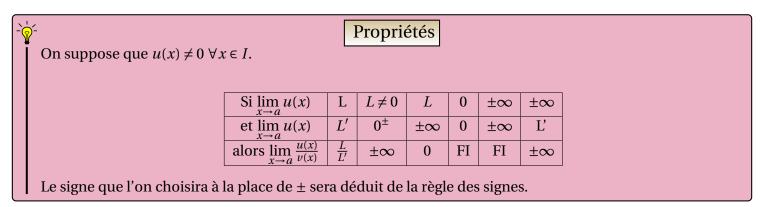
3.2 Limite d'un produit

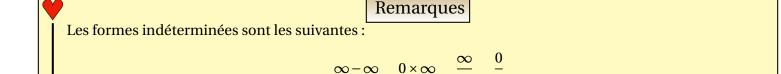


3.3 Limite de l'inverse d'une fonction



3.4 Limite d'un quotient





Exemple 1 Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x \to -\infty} (x-5)(3+x^2)$$

$$\lim_{x \to 3} \frac{1-2x}{x-3}$$

$$\lim_{x \to +\infty} -3x^3 + 2x^2 - 6x + 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2 - 5x + 1}{6x^2 - 5}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{3x^2 + 2}{4x - 1}$$

○ On a:

$$\lim_{x \to -\infty} (x - 5) = -\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} (3 + x^2) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} (x - 5)(3 + x^2) = -\infty \times (+\infty) = -\infty$$

donc, par produit de limites $\lim_{x \to -\infty} (x-5)(3+x^2) = -\infty \times (+\infty) = -\infty$

◎ *On a*:

$$\lim_{x \to 3} 1 - 2x = 1 - 6 = -5$$

De plus:

$$\lim_{x \to 3^{+}} \frac{1}{x - 3} = +\infty$$

$$donc \lim_{x \to 3} \frac{1 - 2x}{x - 3} = -5 \times (+\infty) = -\infty$$

$$\lim_{x \to 3^{-}} \frac{1}{x - 3} = -\infty$$

$$donc \lim_{x \to 3} \frac{1 - 2x}{x - 3} = -5 \times (-\infty) = +\infty$$

On sait que:

$$\lim_{x \to +\infty} -3x^3 = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} 2x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} -6x + 1 = -\infty$$

La limite de $\lim_{x \to +\infty} -3x^3 + 2x^2 - 6x + 1$ *est du type* $+\infty - \infty$; *on doit factoriser par x*³ *pour lever l'indétermination*:

$$-3x^3 + 2x^2 - 6x + 1 = x^3 \left(-3\frac{x^3}{x^3} + 2\frac{x^2}{x^3} - 6\frac{x}{x^3} + \frac{1}{x^3} \right) = x^3 \left(-3 + 2 \times \frac{1}{x} - 6 \times \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right)$$

Or:

$$\lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} -3 + 2 \times \frac{1}{x} - 6 \times \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} = -3$$

$$donc \lim_{x \to +\infty} -3x^3 + 2x^2 - 6x + 1 = -3 \times (+\infty) = -\infty$$

On sait que:

$$\lim_{x \to +\infty} 2x^2 - 5x + 1 = +\infty - 5 \times (-\infty) = +\infty$$
$$\lim_{x \to +\infty} 6x^2 - 5 = +\infty$$

La limite de $\lim_{x\to +\infty} \frac{2x^2-5x+1}{6x^2-5}$ est du type $\frac{+\infty}{+\infty}$; on va devoir factoriser par le mônome de plus haut de degré au numérateur et au dénominateur, c'est-à-dire x^2 :

$$\frac{2x^2 - 5x + 1}{6x^2 - 5} = \frac{x^2 \left(2 \times \frac{x^2}{x^2} - 5 \times \frac{x}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right)}{x^2 \left(6 \times \frac{x^2}{x^2} - \frac{5}{x^2}\right)} = \frac{2 - 5 \times \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{6 - \frac{5}{x^2}}$$

Or:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2 - 5 \times \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{6 - \frac{5}{x^2}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \text{ par quotient de limites}$$

Donc:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2 - 5x + 1}{6x^2 - 5} = \frac{1}{3}$$

On sait que:

$$\lim_{x \to -\infty} 3x^2 + 2 = +\infty$$
$$\lim_{x \to -\infty} 4x - 1 = -\infty$$

La limite de $\lim_{x\to -\infty} \frac{3x^2+2}{4x-1}$ est de la forme $\frac{+\infty}{-\infty}$; on doit donc factoriser au numérateur par x^2 et au numérateur par x:

$$\frac{3x^2 + 2}{4x - 1} = \frac{x^2 \left(3 \times \frac{x^2}{x^2} + \frac{2}{x^2}\right)}{x \left(4 \times \frac{x}{x} - \frac{1}{x}\right)} = x \times \frac{3 + \frac{2}{x^2}}{4 - \frac{1}{x}}$$

Or:

$$\lim_{x \to -\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{3 + \frac{2}{x^2}}{4 - \frac{1}{x}} = \frac{3}{4} \text{ par quotient de limites}$$

$$donc \lim_{x \to -\infty} \frac{3x^2 + 2}{4x - 1} = -\infty \times \frac{3}{4} = -\infty \text{ par produit de limites}$$

Exemple 2 Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$$

$$\lim_{x \to 5} \frac{\sqrt{x-1} - 2}{x-5}$$

On sait que:

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x+1} = +\infty$$
$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

donc $\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ est une FI du type $+\infty - \infty$; pour lever l'indétermination, on va multiplier par la quantité conjuguée :

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x+1}^2 - \sqrt{x}^2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$$

Or:

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x+1} + \sqrt{x} = +\infty$$

$$donc \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

La limite cherchée est donc 0 : *la courbe représentant* f *a une asymptote horizontale d'équation* y = 0 *en* $+\infty$.

On sait que :

$$\lim_{x \to 5^{+}} x - 5 = 0$$

$$\lim_{x \to 5^{-}} x - 5 = 0$$

$$\lim_{x \to 5^{-}} \sqrt{x - 1} - 2 = 0$$

 $donc \lim_{x \to 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$ est une FI du type $\frac{0}{0}$; on va à nouveau multiplier par la quantité conjuguée :

$$\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5} = \frac{\left(\sqrt{x-1}-2\right)\left(\sqrt{x-1}+2\right)}{\left(x-5\right)\left(\sqrt{x-1}+2\right)} = \frac{x-1-4}{\left(x-5\right)\left(\sqrt{x-1}+2\right)} = \frac{x-5}{\left(x-5\right)\left(\sqrt{x-1}+2\right)} = \frac{1}{\sqrt{x-1}+2}$$

Finalement:

$$\lim_{x \to 5} \frac{1}{\sqrt{x - 1} + 2} = \frac{1}{\sqrt{5 - 1} + 2} = \frac{1}{4}$$

Exemple 3 *Soit* f *la fonction définie sur* $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ *par :*

$$f(x) = \frac{-2}{1 - x}$$

Démontrer que la courbe représentative de la fonction f admet des asymptotes dont on précisera les équations. On constate que le dénominateur vaut 0 quand x=1 donc on va déterminer les limites à gauche et à droite de ce point puis les limites en $+\infty$ et $-\infty$.

$$\lim_{x \to 1^{+}} \frac{-2}{1-x} = \frac{-2}{0^{-}} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 1^{+}} \frac{-2}{1-x} = \frac{-2}{0^{+}} = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{-2}{1-x} = \frac{-2}{-\infty} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{-2}{1-x} = \frac{-2}{+\infty} = 0$$

Les deux premières égalités nous permettent de conclure à l'existence d'un asymptote verticale d'équation x=1. La troisième égalité nous permet de conclure à l'existence d'une asymptote horizontale d'équation y=0 en $+\infty$ et la quatrième égalité nous permet de conclure à l'existance d'une asymptote horizontale d'équation y=0 en $-\infty$.

4 Limite d'une fonction composée



Propriétés

Soit f et u deux fonctions.

a, b et c sont des réels ou $-\infty$ ou $+\infty$:

$$x \xrightarrow{u} u(x) \xrightarrow{f} f[u(x)]$$

Si $\lim_{x \to a} u(x) = b$ et $\lim_{x \to b} f(x) = c$, alors $\lim_{x \to a} f(u(x)) = c$.

Exemple 4 Soit f la fonction définie sur $]\frac{1}{2}$; $+\infty$ [par :

$$f(x) = \sqrt{2 - \frac{1}{x}}$$

Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

On a:

$$f(x) = u(v(x))$$

$$v(x) = 2 - \frac{1}{x}$$

$$u(x) = \sqrt{x}$$

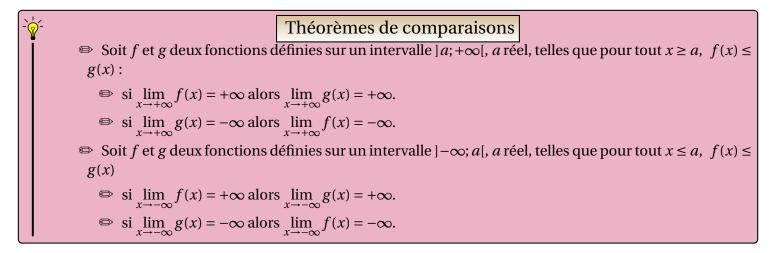
$$\lim_{x \to +\infty} v(x) = 2$$

$$\lim_{x \to 2} u(x) = \sqrt{2}$$

$$par composition des limites \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} u(v(x)) = \sqrt{2}$$

Limites et comparaisons 5

5.1 Théorèmes de comparaisons



Exemple 5 Déterminer $\lim_{x \to +\infty} x + \sin(x)$. La fonction $x \to \sin(x)$ n'a pas de limite en $+\infty$, en revanche on sait que :

$$-1 \le \sin(x) \le 1$$

On peut donc écrire:

$$x - 1 \le x + \sin(x)$$

Or:

$$\lim_{x \to +\infty} x - 1 = +\infty$$

Donc, en utilisant le théorème de comparaison, on en déduit que : $\lim_{x\to +\infty} x + \sin(x) = +\infty$

5.2 Théorème d'encadrement



Théorèmes de comparaisons

Si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} h(x) = L$ alors $\lim_{x \to +\infty} g(x) = L$.

On peut évidemment adapter ce théorème à la limite en $-\infty$ et en un point réel.

Exemple 6 Déterminer $\lim_{x \to +\infty} \frac{x \cos(x)}{x^2 + 1}$. La fonction $x \to x \cos(x)$ n'a pas de limite en $+\infty$, en revanche on sait que :

$$-1 \le \cos(x) \le 1$$

Comme on cherche la limite en $+\infty$, on peut supposer que x > 0 et par conséquent :

$$-1 \le \cos(x) \le 1$$

$$\Leftrightarrow -x \le x \cos(x) \le x$$

$$\Leftrightarrow -x \le x \cos(x) \le x$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x}{x^2 + 1} \le x \cos(x) \le \frac{x}{x^2 + 1} car x^2 + 1 > 0$$

Il nous reste à déterminer la limite en $+\infty$ de $\frac{x}{x^2+1}$ qui, pour l'instant, est une FI du type $\frac{+\infty}{+\infty}$. On va factoriser le numérateur par x et le dénominateur par x^2 :

$$\frac{x}{x^2+1} = \frac{x \times 1}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = \frac{1}{x \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = \frac{1}{x} \times \frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}}$$

Or, par somme et quotient de limites :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} 1 + \frac{1}{x^2} = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}} = 1$$

$$\operatorname{donc} \frac{1}{x} \times \frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}} = 0 \times 1 = 0 \ \operatorname{par \ produit \ de \ limites}$$

Finalement, on vient de montrer que :

$$\lim_{x \to +\infty} -\frac{x}{x^2 + 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2 + 1} = 0$$

donc, par théorème d'encadrement, on en déduit que $\lim_{x\to +\infty} \frac{x\cos(x)}{x^2+1} = 0$.

6 Fonction exponentielle

6.1 Limites aux bornes



Propriétés

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$



Preuve

riangle Pour la première égalité, on pose f la fonction définie sur $\mathbb R$ par :

$$f(x) = e^x - x$$

Cette fonction est dérivable sur $\mathbb R$ par somme de fonctions dérivables :

$$f'(x) = e^x - 1$$

La fonction $x \to e^x$ est croissante et elle vaut 1 pour x = 0, donc f'(x) est positive pour $x \ge 0$: la fonction f est croissante pour $x \ge 0$:

$$f(x) \ge f(0) \Leftrightarrow f(x) \ge 1 \Leftrightarrow e^x - x \ge 1 \Leftrightarrow e^x \ge x + 1$$

Or la limite de la fonction $x \to x+1$ est $+\infty$ en $+\infty$ donc, d'après les théorèmes de comparaison, on en déduit que la fonction $x \to e^x$ admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$.

Pour la seconde égalité, on écrit :

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x}$$

On peut donc écrire :

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = \lim_{x \to +\infty} e^{-x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

Exemple 7 Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \to +\infty} x + e^{-3x}$$

$$\lim_{x \to -\infty} e^{1 - \frac{1}{x}}$$

On a:

$$\lim_{x \to +\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} e^{-3x} = \lim_{X \to -\infty} e^X = 0 \text{ en posant } X = 3x$$

$$donc \lim_{x \to +\infty} x + e^{-3x} = +\infty \text{ par somme de limites}$$

Pour la fonction suivante, on va décomposer les limites :

$$\lim_{x \to -\infty} 1 - \frac{1}{x} = 1 - 0 = 1 \text{ par somme de limites}$$

$$\lim_{x \to 1} e^x = e$$

donc, par composition de limites $\lim_{x \to -\infty} e^{1-\frac{1}{x}} = e$

6.2 Croissances comparées des fonctions puissances et exponentielles





Preuve

Commençons par la première ligne.

© On commence par la fonction $f(x) = \frac{e^x}{x}$. On pose $h(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$; c'est une fonction dérivable par somme de fonctions dérivables :

$$h'(x) = e^x - x$$

D'après la preuve précédente, on sait que, pour $x \ge 0$, $e^x - x \ge 1$. Donc, pour $x \ge 0$, h'(x) > 0: la fonction h est donc croissante sur x > 0. On peut donc écrire :

$$\forall x \ge 0 \quad h(x) \ge h(0) \Leftrightarrow \forall x \ge 0 \quad h(x) \ge 1 \Leftrightarrow \forall x \ge 0 \quad e^x - \frac{x^2}{2} \ge 1$$

Par conséquent, pour x > 0:

$$e^x \ge 1 + \frac{x^2}{2} \Leftrightarrow \frac{e^x}{x} \ge \frac{1}{x} + \frac{x}{2}$$

Or, par somme de limites:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} + \frac{x}{2} = +\infty$$

et finalement, d'après le théorème de comparaison des limites :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

Soit *n* un entier naturel supérieur ou égale à 1. On a :

$$\frac{e^x}{x^n} = \frac{\left(e^{\frac{x}{n}}\right)^n}{x^n} = \frac{\left(e^{\frac{x}{n}}\right)^n}{n^n \left(\frac{x}{n}\right)^n} = \frac{1}{n^n} \times \left(\frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}}\right)^n$$

On pose maintenant $X = \frac{x}{n}$: X tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$. On peut donc écrire :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = \lim_{X \to +\infty} \frac{1}{n^n} \times \left(\frac{e^X}{X}\right)^n = \frac{1}{n^n} \times (+\infty)^n = +\infty \text{ par produit de n limites}$$

Do va utiliser les résultats précédents.

 \bigcirc Commençons par xe^x :

$$xe^x = \frac{x}{e^{-x}} = -\frac{X}{e^X}$$
 avec $X = -x$

Donc on en déduit que :

$$\lim_{x \to -\infty} x e^x = \lim_{X \to +\infty} -\frac{X}{e^X} = \lim_{X \to +\infty} -\frac{1}{\frac{e^X}{X}} = 0 \text{ par inverse de limite}$$

Soit *n* un entier naturel supérieur ou égale à 1.

$$x^n e^x = x^n \left(e^{\frac{x}{n}} \right)^n = n^n \times \left(\frac{x}{n} \right)^n \left(e^{\frac{x}{n}} \right)^n = n^n \times \left(\frac{x}{n} e^{\frac{x}{n}} \right)^n$$

Par produit de n limites, en posant $X = \frac{x}{n}$, on en déduit que :

$$\lim_{x \to -\infty} n^n \times \left(\frac{x}{n} e^{\frac{x}{n}}\right)^n = \lim_{X \to -\infty} n^n \times \left(X e^X\right)^n = 0$$

Exemple 8 Calculer la limite suivante :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x + x}{e^x - x^2}$$

On va tout de suite factoriser par e^x pour conclure rapidement et illustrer la propriété précédente :

$$\frac{e^x + x}{e^x - x^2} = \frac{e^x \left(1 + \frac{x}{e^x}\right)}{e^x \left(1 - \frac{x^2}{e^x}\right)} = \frac{1 + \frac{x}{e^x}}{1 - \frac{x^2}{e^x}}$$

Par quotient de limites et en utilisant la propriété précédente :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x + x}{e^x - x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 + \frac{x}{e^x}}{1 - \frac{x^2}{e^x}} = \frac{1 + 0}{1 - 0} = 1$$