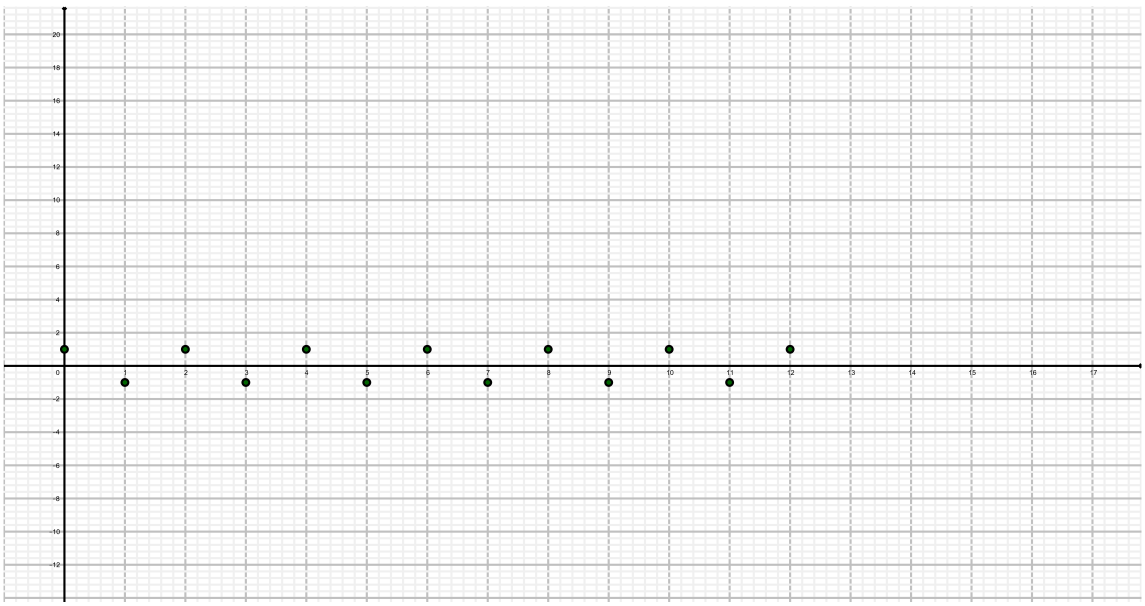
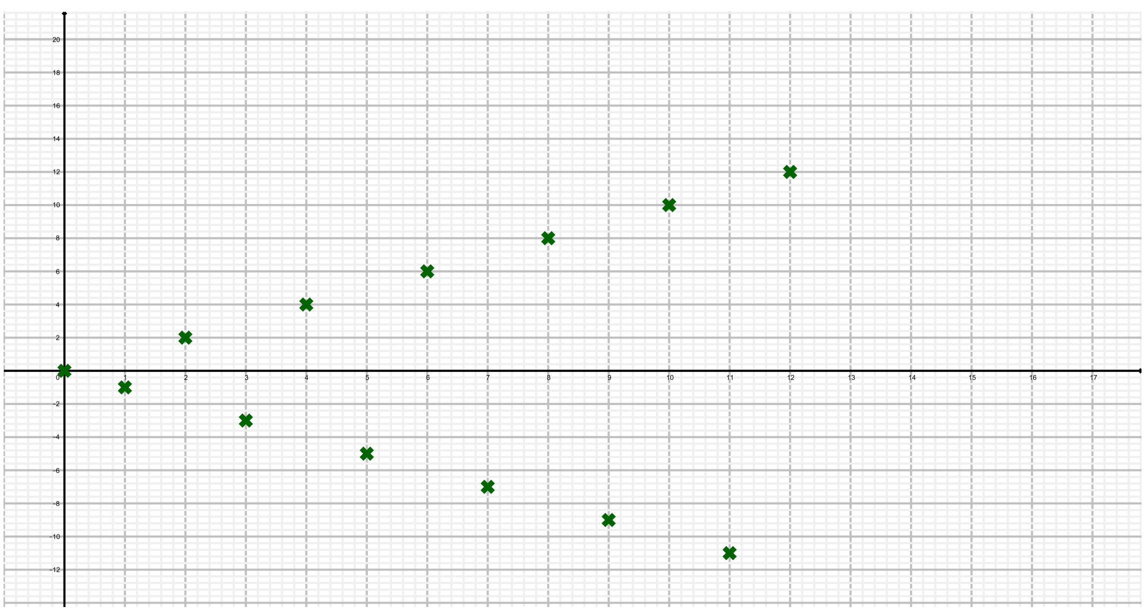
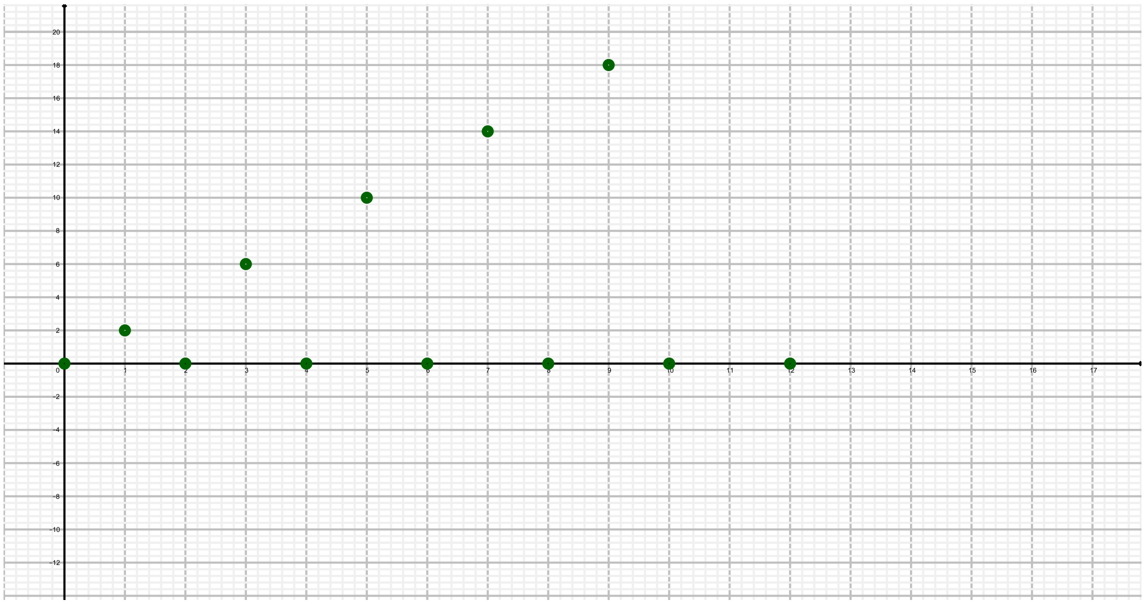
∽ Suites : activités sur les limites

Exemple 1 *Pour chacune des courbes qui suivent, choisir une ou plusieurs des propriétés ci-dessous :*

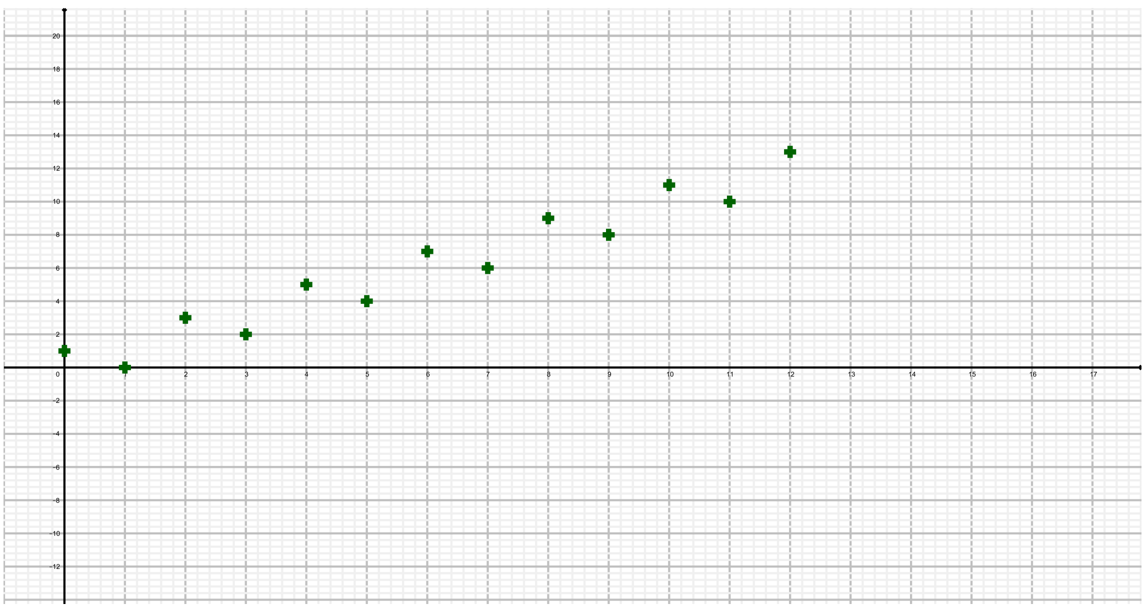
- ✏ (u_n) *a pour une limite finie* l *(que l'on précisera).*
- ✏ (u_n) *a pour limite* $+\infty$.
- ✏ (u_n) *a pour limite* $-\infty$.
- ✏ (u_n) *est croissante.*
- ✏ (u_n) *est décroissante.*
- ✏ (u_n) *est minorée.*
- ✏ (u_n) *est majorée.*
- ✏ (u_n) *est bornée.*



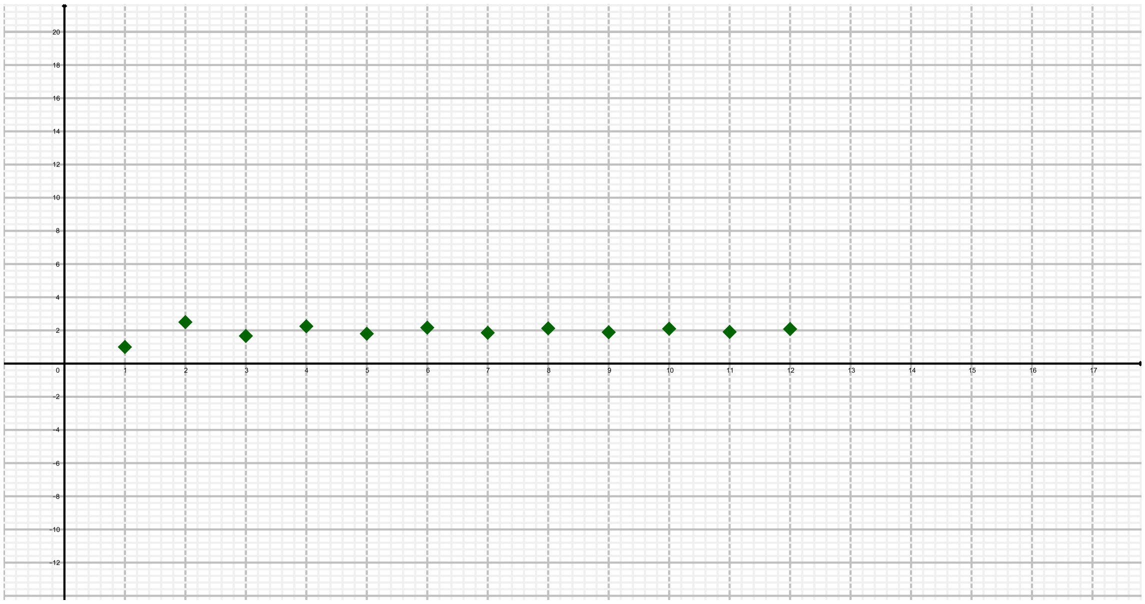


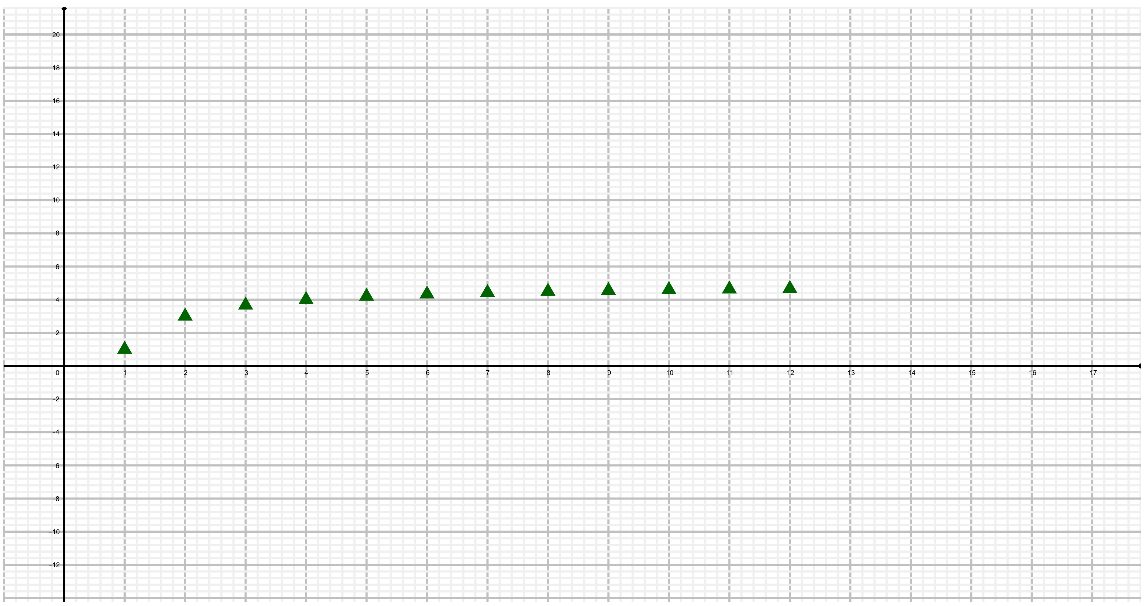


20
18
16
14
12
10
8
6
4
2
-2
-4
-6
-8
-10
-12
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17



20
18
16
14
12
10
8
6
4
2
-2
-4
-6
-8
-10
-12
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17





Exemple 2 *Préciser si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses :*

- ✏ *Si une suite est croissante, alors elle n'est pas majorée.*
- ✏ *Si une suite n'est pas majorée, alors elle est croissante.*
- ✏ *Si une suite n'est pas croissante, alors elle est décroissante.*
- ✏ *Si une suite n'est pas majorée, alors elle est minorée.*
- ✏ *Si une suite n'a pas pour limite $+\infty$ ou $-\infty$, alors elle a une limite finie.*
- ✏ *Si une suite n'a pas de limite finie l, alors elle a pour limite $+\infty$ ou $-\infty$.*
- ✏ *Si une suite a une limite finie l, alors elle est bornée.*
- ✏ *Si une suite est bornée, alors elle a une limite finie l.*
- ✏ *Si une suite est croissante, alors elle a pour limite $+\infty$.*
- ✏ *Si une suite a pour limite $+\infty$, alors elle est croissante.*
- ✏ *Si une suite a pour limite $+\infty$, alors elle n'est pas majorée.*
- ✏ *Si une suite n'est pas majorée, alors elle a pour limite $+\infty$.*

Exemple 3 *On considère la suite (u_n) définie par :*

$$u_n = \frac{2n^2+4}{n^2+3}$$

1. *Écrire un algorithme qui calcule et affiche les 20 premiers termes de la suite (u_n).*
2. *En faisant fonctionner l'algorithme, conjecturer quant à la limite l de cette suite.*
3. *Démontrer ce résultat.*
4. *Démontrer que cette suite est croissante.*
5. *Écrire un algorithme qui calcule et affiche la plus petite valeur de N telle que $l-h<u_N$, où $h>0$ est choisi par l'utilisateur.*
6. *Tester pour $h=0.01$ puis pour $h=0.0001$.*

Exemple 4 (Paradoxe d'Achille et de la tortue) *Le paradoxe d'Achille et de la tortue, formulé par Zénon d'Élée (-490;-425), dit qu'un jour, le héros grec Achille a disputé une course à pieds avec une tortue.*
Comme il était beaucoup plus rapide que la tortue, il lui avait accordé une avance de 100 unités de longueur (on prendra le mètre par la suite mais le mètre n'existait pas à l'époque).
Dans les faits, Achille va rattraper la tortue alors qu'à priori il ne le devrait pas si on considère le raisonnement suivant :

- ✏ *quand Achille va rattraper l'endroit où était la tortue à son départ, celle-ci aura se sera déplacée plus loin.*
- ✏ *quand Achille va arriver à ce nouvel endroit, la tortue aura encore bougé.*
- ✏ *et on peut continuer ce raisonnement un nombre de fois infini*

Le paradoxe vient du fait qu'une infinité d'étapes va se passer en un temps fini, ce qui est possible mais contre-intuitif.
C'est ce que nous allons montrer.
On va supposer qu'Achille court à $10 m.s^{-1}$ et la tortue à $0.1 m.s^{-1}$, juste pour simplifier les notations.
On appelle t_n le temps qu'Achille met à chaque étape pour rattraper l'endroit où la tortue était à l'étape précédente. On conviendra du fait qu'on débutera à $n=1$ et que t_1 sera la durée mise par Achille pour effectuer les 100 premiers mètres.
On appelle $S_n=\sum_{k=1}^{n} t_k$: si on fait tendre n vers plus l'infini, on va obtenir le temps qu'Achille va mettre pour rattaper la tortue.

1. *Calculer t_2 et t_3.*
2. *Déterminer t_n.*
3. *En déduire S_n.*
4. *Conclure.*