☙ Suites : activité sur les récurrences

Une société produit des bactéries pour l'industrie. En laboratoire, il a été mesuré que, dans un milieu nutritif approprié, la masse de ces bactéries, mesurée en grammes, augmente de 20 % en un jour.
La société met en place le dispositif industriel suivant.
Dans une cuve de milieu nutritif, on introduit initialement 1 kg de bactéries. Ensuite, chaque jour, à heure fixe, on remplace le milieu nutritif contenu dans la cuve. Durant cette opération, 100 g de bactéries sont perdus.

1. Montrer que $u_n = 500 + 500 \times 1.2^n, \;\; \forall n \geq 0$.
   Une démonstration par récurrence se fait en trois temps :
   - ✏ **L'initialisation** : on montre la propriété pour le premier indice ; en général $n = 0$ ou $n = 1$.
   - ✏ **L'hérédité** : une fois l'initialisation faite, on fait une hypothèse de récurrence.
     On suppose que la propriété est vraie pour un indice n plus grand que celui de l'initialisation
     On se sert de cette propriété et des données de l'exercice pour montrer la propriété au rang $n+1$.
   - ✏ On conclut et on énonce la propriété et on précise pour quelle indice elle est vraie.

   Initialisation : on montre la propriété pour $n = 0$. On sait que $u_0 = 1000$ et $500 + 500 \times 1.2^0 = 500 + 500 \times 1 = 500 + 500 = 1000$: la propriété est donc vraie pour le rang $n = 0$.
   Hérédité : On suppose que la propriété est vraie pour un rang n plus grand que 0 ; donc $u_n = 500 + 500 \times 1.2^n$.
   Regardons si la propriété est vraie au rang $n+1$:

   $$u_{n+1} = 1.2u_n - 100 = 1.2\left(500 + 500 \times 1.2^n\right) - 100$$

   On vient de montrer l'hérédité de la propriété.
   Couplé avec l'initialisation, nous venons de montrer que cette propriété etait vraie pour $n \geq 0$:

   $$u_n = 500 + 500 \times 1.2^n, \;\; \forall n \geq 0$$

2. Montrer que $u_n \geq 1000, \;\; \forall n \geq 0$.
   Initialisation : on montre la propriété pour $n = 0$. On sait que $u_0 = 1000$: la propriété est vraie au rang $n = 0$.
   Hérédité : on suppose que la propriété est vraie pour un rang n plus grand que 0 ; donc $u_n \geq 1000$.
   Regardons si c'est le cas pour $n+1$, en se servant uniquement des propriétés données dans l'énoncé et de l'hypothèse de recurrence :

   $$u_{n+1} = 1.2u_n - 100 \geq 1.2 \times 1000 - 100 \geq 1200 - 100 \geq 1000$$

   On vient de montrer l'hérédité de la propriété.
   Couplé avec l'initialisation, nous venons de montrer que cette propriété etait vraie pour $n \geq 0$:

   $$u_n \geq 1000, \;\; \forall n \geq 0$$

3. Montrer que (u_n) est croissante.
   Initialisation : on montre la propriété pour $n = 0$. On sait que $u_0 = 1000$ et $u_1 = 1.2 \times u_0 - 100 = 1100$ donc $u_1 \geq u_0$.
   Hérédité : on suppose que la propriété est vraie pour un rang n plus grand que 0 ; donc $u_{n+1} \geq u_n$.
   Regardons si c'est le cas pour $n+1$, en se servant uniquement des propriétés données dans l'énoncé et de l'hypothèse de recurrence :

   $$u_{n+2} = 1.2u_{n+1} - 100 \geq 1.2 \times u_n - 100 = u_{n+1}$$

   On vient de montrer l'hérédité de la propriété.
   Couplé avec l'initialisation, nous venons de montrer que cette propriété etait vraie pour $n \geq 0$:

   $$u_{n+1} \geq u_n, \;\; \forall n \geq 0$$