Devoir maison 4 pour la rentrée : correction

Exercice 1 ***1.*** *Mettre sous forme irréductible :*

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{10}=\frac{1\times 2}{5\times 2}+\frac{1}{10}=\frac{2}{10}+\frac{1}{10}=\frac{3}{10}$$
$$1+0.2=1+\frac{2}{10}=\frac{10}{10}+\frac{2}{10}=\frac{12}{10}=\frac{\cancel{2}\times 6}{\cancel{2}\times 5}=\frac{6}{5}$$
$$0.1\times 0.2=\frac{1}{10}\times\frac{2}{10}=\frac{2}{100}=\frac{\cancel{2}\times 1}{\cancel{2}\times 50}=\frac{1}{50}$$

2. *Mettre sous forme décimale :*

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{10}=0.5+0.1=0.6$$
$$\frac{3}{5}+0.1=0.6+0.1=0.7$$
$$10\times\frac{1}{25}=\frac{\cancel{5}\times 2}{\cancel{5}\times 5}=\frac{2}{5}=0.4$$

3. *Simplifier :*

$$2\sqrt{3}+\sqrt{27}=2\sqrt{3}+\sqrt{3^2\times 3}=2\sqrt{3}+\sqrt{3^2}\times\sqrt{3}=2\sqrt{3}+3\times\sqrt{3}=5\sqrt{3}$$
$$\left(2\sqrt{2}\right)^2=2^2\times\sqrt{2}^2=4\times 2=8$$
$$e\times\left(e^{-1}\right)^2=e^1\times e^{-2}=e^{1-2}=e^{-1}$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}^2}{2^2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

4. *Calculer l'image de* 1 *par chacune des fonctions suivantes :*

$$f(x)=xe^{x+1}$$
$$g(x)=(x^2-3)^3$$

On doit remplacer x par 1 *dans chacune des formules :*

$$f(1)=1e^{1+1}=e^2$$
$$g(1)=(1^2-3)^3=(-2)^3=-8$$

5. *Caculer la dérivée des fonctions suivantes :*

$$f(x)=3x^3-2x^2+1$$
$$g(x)=\frac{x}{2}+\frac{2}{x}$$

$$f'(x)=3\times 3x^2-2\times 2x=9x^2-4x$$
$$g'(x)=\frac{1}{2}-\frac{2}{x^2}$$

Exercice 2 *Calculer les limites en $-\infty$ des fonctions suivantes :*

$$f(x)=\frac{2x-e^x}{3}$$
$$g(x)=\frac{7x^3-x+1}{x}$$

Justifier.
On sait que :

$$\lim_{x\to-\infty} 2x = -\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} -e^x = 0$$
$$\lim_{x\to-\infty} 3 = 0$$

On en déduit, par somme et quotient de limites, que :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

On a :

$$\lim_{x\to-\infty} 7x^3 = -\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} -x = +\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} 1 = 1$$
$$\lim_{x\to-\infty} x = -\infty$$

On a donc une forme indéterminée au numérateur, on va alors distribuer la division par x :

$$g(x) = \frac{7x^3 - x + 1}{x} = 7x^2 - 1 + \frac{1}{x}$$

de plus :

$$\lim_{x\to-\infty} 7x^2 = +\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} -1 = -1$$
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Par somme de limite, on en déduit que :

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$$

Exercice 3 *Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x, $f(x) = (1 + x + x^2)e^{-2x+1}$.*

1. *Déterminer la limite en $-\infty$ de f. Justifier.*
   On sait que :

$$\lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} x = -\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} 1 = 1$$

On a donc une forme indéterminée pour $1 + x + x^2$, on va donc factoriser par x^2 :

$$f(x) = x^2\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)e^{-2x+1}$$

de plus :

$$x^2 e^{-2x+1} = e\frac{(-2x)^2}{4}e^{-2x}$$

Or :

$$\lim_{x\to-\infty} -2x = +\infty$$
$$\lim_{X\to+\infty} X^2e^X = +\infty \textit{ par produit de limites}$$
$$\textit{donc } \lim_{x\to-\infty} x^2e^{-2x+1} = +\infty \textit{ par composition de limites}$$

Nous savons aussi que :

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right) = 1$$
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{e}{4} = \frac{e}{4}$$

par conséquent, par produit de limites, on en déduit que :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

2. *Démontrer que :*

$$\forall x > 1 \;\; 1 < x < x^2$$

Il suffit de montrer que $x < x^2 \Leftrightarrow x - x^2 < 0$ *pour* $x > 1$ *:*

$$x - x^2 = x(1-x)$$
$$\textit{or } x > 1 \Leftrightarrow 1 - x < 0 \textit{ et } x > 1 > 0$$
$$\textit{par produit des signes } x(1-x) < 0$$

On vient de montrer que pour $x > 1, \;\; x < x^2$.

3. *En déduire que, pour* $x > 1$ *:*

$$\forall x > 1 \;\; 0 < f(x) < 3x^2e^{-2x+1}$$

Pour $x > 1$*, on a :*

$$0 < 1 + x + x^2 < x + x + x^2 < x^2 + x^2 + x^2 = 3x^2$$
$$e^{-2x+1} > 0$$
$$\textit{donc } \;\; 0e^{-2x+1} < (1+x+x^2)e^{-2x+1} = f(x) < 3x^2e^{-2x+1}$$

Comme on a multiplié par une expression positive, le sens des inégalités n'a pas changé.

4. *Vérifier que :*

$$\forall x \in \mathbb{R} \;\; 3x^2e^{-2x+1} = \frac{3}{4}e \times \frac{(2x)^2}{e^{2x}}$$

en déduire la limite de $3x^2e^{-2x+1}$ *en* $+\infty$.
Justifier.
On va partir de l'expression de droite pour obtenir celle de gauche :

$$\frac{3}{4}e \times \frac{(2x)^2}{e^{2x}} = \frac{3}{4}e \times \frac{4x^2}{e^{2x}} = \frac{3}{\cancel{4}}e^1 \times \frac{\cancel{4}x^2}{e^{2x}} = 3x^2e^{-2x+1}$$
$$\textit{car } e^{-u} = \frac{1}{e^u} \quad \textit{et} \quad e^a \times e^b = e^{a+b}$$

5. *En déduire la limite en $+\infty$ de f et en déduire une interprétation graphique pour la courbe représentant f.*
On sait que :

$$\lim_{x\to+\infty} 2x = +\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^X}{X^2} = +\infty$$
$$\textit{donc } \lim_{x\to+\infty} \frac{X^2}{e^X} = 0$$
$$\textit{et par composition de limites } \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{4}e \times \frac{(2x)^2}{e^{2x}} = 0$$

En utilisant le théorème d'encadrement et l'inégalité $\forall x > 1\ \ 0 < f(x) < 3x^2 e^{-2x+1}$, on en déduit que :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

Cette limite nous permet d'en déduire la présence d'une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $+\infty$.

6. *Calculer la dérivée de f.*
On va utiliser la formule de dérivation d'un produit :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= (1+x+x^2)'e^{-2x+1} + (1+x+x^2)\left(e^{-2x+1}\right)' \\
&= (2x+1)e^{-2x+1} + (1+x+x^2)\times(-2)e^{-2x+1} \\
&= \left(2x+1-2(1+x+x^2)\right)e^{-2x+1} \textit{ en factorisant par } e^{-2x+1} \\
&= \left(2x+1-2-2x-2x^2\right)e^{-2x+1} \\
&= \left(-1-2x^2\right)e^{-2x+1}
\end{aligned}$$

7. *En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$.*
$\forall x \in \mathbb{R}$, on sait que $-1-2x^2 < 0$ car on a la somme d'un nombre négatif et de l'opposé d'un nombre réel au carré.
De plus, d'après les propriétés de la fonction exponentielle, on sait que $\forall x \in \mathbb{R},\ \ e^{-2x+1} > 0$.
Par conséquent, la fonction $f'(x)$ est strictement négative sur $\mathbb{R}$: la fonction f est alors strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.