∽ Fonction logarithme 1

On considère la fonction suivante définie sur $]0;+\infty[$:

$$f(x) = 4x + 7 - 3x\ln(x)$$

1. Calculer la limite de f en 0^+
2. Calculer la limite de f en $+\infty$
3. Calculer la dérivée de f.
4. Déterminer le signe de $f'(x)$.
5. En déduire le tableau de variation de $f(x)$.
6. Déterminer le nombre de solutions de $f(x) = 0$ et en donner un encadrement d'amplitude 10^{-2}.

Correction :

1. On sait que :

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to 0^+} 4x+7=7 \\ &\lim_{x\to 0^+} 3x\ln(x)=0 \quad \text{par propriété du cours} \\ \text{donc } &\lim_{x\to 0^+} 4x+7-3x\ln(x)=7 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to +\infty} 4x+7=+\infty \\ &\lim_{x\to +\infty} -3x\ln(x)=-\infty \quad \text{par propriété du cours} \\ \text{donc } &\lim_{x\to +\infty} 4x+7-3x\ln(x)=-\infty \quad \text{par prédominance de } x\ln(x) \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4-3\,(x\ln(x))' \\ &= 4-3\left(x'\ln(x)+x\times\ln(x)'\right)' \\ &= 4-3\left(\ln(x)+x\times\frac{1}{x}\right)' \\ &= 4-3\,(\ln(x)+1)' \\ &= 1-3\ln(x) \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} f'(x) &\geq 0 \\ 1-3\ln(x) &\geq 0 \\ -3\ln(x) &\geq -1 \\ \ln(x) &\leq \frac{-1}{-3} \\ x &\leq e^{\frac{-1}{-3}} \end{aligned}$$

5. On a :

x	0		$e^{\frac{-1}{-3}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	7	$\nearrow$	$7+3e^{\frac{-1}{-3}}$	$\searrow$	$-\infty$

6. D'après le tableau de variation, comme $7>0$, la fonction f ne peut pas s'annuler sur l'intervalle $]0;e^{\frac{-1}{-3}}]$.
Pour $x > e^{\frac{-1}{-3}}$, la fonction est décroissante de $7+3e^{\frac{-1}{-3}} > 0$ vers $-\infty$, donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe une unique valeur

$\alpha > e^{\frac{-1}{-3}}$ telle que $f(\alpha) = 0$.
En utilisant la calculatrice, on trouve :

$$f(1.39) > 0$$
$$f(1.4) < 0$$
$$1.39 \leq \alpha \leq 1.4$$