Devoir maison 3 : 10/10/2022

Exercice 1 *Déterminer les limites des suites suivantes :*

$$a_n = 3n^2 - 9n + 5$$
$$b_n = \frac{4n-5}{-2n^2-3n+7}$$
$$c_n = \frac{1-4^n}{3^n+5^n}$$
$$d_n = \frac{\sqrt{n}+(-1)^n}{n}$$
$$e_n = \frac{\cos(n)-n}{\sqrt{n}}$$

Exercice 2 *Soit u_n la suite définie pour tout entier naturel n par :*

$$\frac{2n+5}{3n+6}$$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > \frac{2}{3}$.
On pensera à mettre au même dénominateur et ne pas faire de récurrence

Exercice 3 *Soit v_n la suite définie pour tout entier naturel n par :*

$$v_n = -2n^2 + 14n - 17$$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \leq 7$.
On pensera à faire une étude de signes et ne pas faire de récurrence

Exercice 4 (Valentin et Lohann) *Soit (u_n) la suite définie par :*

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 1 \\ u_{n+2} = -\frac{1}{2}u_{n+1} + \frac{1}{2}u_n \end{cases}$$

On cherche deux réels α et β tels que les suites (v_n) et (w_n), définies par :

$$v_n = u_{n+1} - \alpha u_n$$
$$w_n = u_{n+1} - \beta u_n$$

soient des suites géométriques de raisons respectives β et α.

1. *Montrer que α et β sont solutions de l'équation :*

$$X^2 = -\frac{1}{2}X + \frac{1}{2}$$

2. *En déduire les valeurs de α et de β ; on prendra $\alpha < \beta$.*
3. *Démontrer que $v_n = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.*
4. *Déterminer l'expression du terme général de la suite (w_n).*
5. *En déduire l'expression du terme général de la suite (u_n).*

Exercice 5 (Pas Valentin et Lohann) *Soit u_n la suite définie par :*

$$\begin{cases} u_0 = 12 \\ u_{n+1} = 0.8u_n + 2 \end{cases}$$

1. *Montrer par récurrence que* $u_n > 10 \ \ \forall n \in \mathbb{N}$.
2. *Montrer par récurrence que la suite* (u_n) *est décroissante.*
3. *En déduire que la convergence de la suite* u_n.
4. *On définit la suite* (v_n) *pour tout entier naturel* n *par :*

$$v_n = u_n - 10$$

   Monter que cette suite est géométrique de raison 0.8.
5. *Donner l'expression de* v_n *en fonction de* n *pour tout entier naturel* n.
6. *En déduire l'expression de* u_n *pour tout entier naturel* n.
7. *En déduire la limite de la suite* (u_n).