Fonction logarithme 6

On considère la fonction suivante définie sur $]-\frac{3}{20};+\infty[$:

$$f(x) = \ln(20x+3) - 4x + 3$$

1. Calculer la limite de f en $-\frac{3}{20}$
2. Calculer la limite de f en $+\infty$
3. Calculer la dérivée de f.
4. Déterminer le signe de $f'(x)$.
5. En déduire le tableau de variation de $f(x)$.
6. En déduire le nombre de solutions de $f(x) = 0$ et un encadrement d'amplitude 10^{-2} de cette solution.

Correction :

1. On sait que :

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to -\frac{3}{20}^+} \ln(20x+3) = -\infty\\
&\lim_{x\to -\frac{3}{20}^+} -4x+3 = \frac{3}{20}\times 4+3\\
\text{donc } &\lim_{x\to -\frac{3}{20}^+} \ln(20x+3)+4x+3 = -\infty
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to +\infty} \ln(20x+3) = +\infty\\
&\lim_{x\to +\infty} -4x+3 = -\infty\\
\text{donc } &\lim_{x\to +\infty} \ln(20x+3)-4x+3 = -\infty \quad \text{par dominance de } x
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{20}{20x+3}-4\\
&= \frac{20-4-(20x+3)}{20x+3}\\
&= \frac{20-80x-12)}{20x+3}\\
&= \frac{8-80x}{20x+3}\\
&= \frac{8-80x}{20x+3}
\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
f'(x) > 0 &\Leftrightarrow \frac{8-80x}{20x+3} > 0\\
&\Leftrightarrow 8-80x > 0 \text{ car } 20x+3 > 0\\
&\Leftrightarrow x < \frac{8}{80}
\end{aligned}$$

5. On a :

x	$-\frac{3}{20}$		$\frac{8}{80}$		$+\infty$
$g'(x)$	||	$+$	0	$-$	
$g(x)$	|| $-\infty$	$\nearrow$	4.2094379124341	$\searrow$	$-\infty$

6. Comme la fonction g est continue, croissante de $-\infty$ à $4.2094379124341 > 0$, alors, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit qu'il existe une unique solution $\alpha_1 \in]-\frac{3}{20};\frac{8}{80}[$ tel que $g(\alpha_1)=0$.
Comme la fonction g est continue, croissante de $4.2094379124341 > 0$ à $-\infty$

, alors, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit qu'il existe une unique solution $\alpha_2 \in]-\frac{3}{20};+\infty[$ tel que $g(\alpha_2) = 0$.

$$f(-0.15) < 0$$
$$f(-0.14) > 0$$
$$\text{donc } -0.15 < \alpha_1 < -0.14$$
$$f(1.64) > 0$$
$$f(1.65) < 0$$
$$\text{donc } 1.64 < \alpha_2 < 1.65$$