Orthogonalité et distance dans l'espace : activité

1. **Rappels sur le produit scalaire dans un plan** .

 a. Rappeler la formule du produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ en fonction de AB, AC et BC.

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right)$$

 b. Rappeler la formule d'Al-Kashi.
 C'est la même formule que précédemment mais vu d'un autre aspect :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BC}^2 = BC^2 &= \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\\ &= AB^2 + AC^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

 c. Rappeler l'expression du produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ en fonction de $||\overrightarrow{AB}||$, $||\overrightarrow{AC}||$ et l'angle α entre les deux vecteurs.
 Rappeler la définition de la norme d'un vecteur.

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = ||\overrightarrow{AB}||.||\overrightarrow{AC}||.\cos(\alpha)$$

 La norme d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ est la longueur du segment AB.

 d. Rappeler l'expression analytique du produit scalaire de deux vecteurs dans un repère orthonormé.

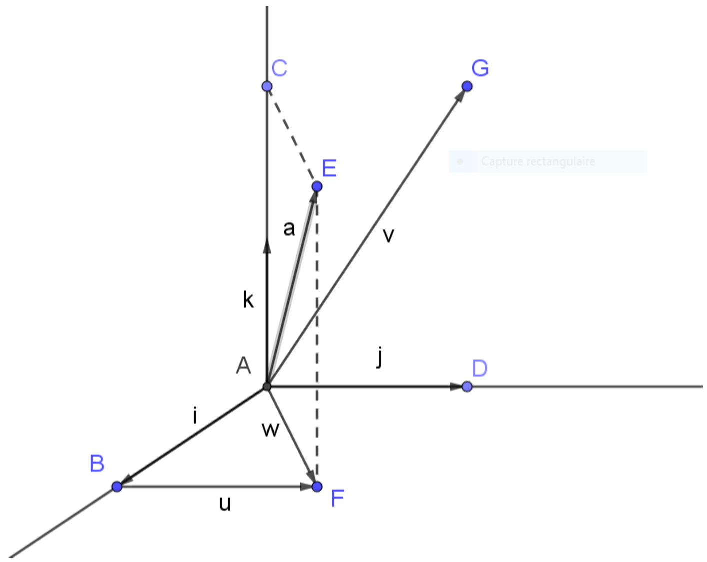
$$\begin{aligned}&\overrightarrow{u}\,(x, y)\\ &\overrightarrow{v}\,(x', y')\\ &\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = x.x' + y.y'\end{aligned}$$

 e. Que dire du produit scalaire quand les deux vecteurs sont orthogonaux?

$$\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v} \Leftrightarrow \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$$

2. **Produit scalaire de deux vecteurs de l'espace**

On se place maintenant dans l'espace où les vecteurs $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$ sont de norme 1 et orthogonaux deux à deux.



a. Comment appelle-t-on le triplet $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$?

Le triplet $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est, par analogie avec ce qu'on connait dans le plan, une base orthonormale : tous les vecteurs de l'espace peuvent se décomposer en une unique combinaison linéaire de ces trois vecteurs qui sont de norme 1 et orthogonaux deux à deux.

b. Exprimer $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{a}$ en fonction de $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$.

D'après les informations du graphique, on peut écrire :

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{j}$$
$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}$$
$$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$$
$$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}$$

c. Dans quel plan se trouvent les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$?

D'après les égalités précédentes, les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont engendrés uniquement par les vecteurs $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{k}$: les deux vecteurs sont donc dans le plan vectoriel généré par les vecteurs $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{k}$.

En prenant $\overrightarrow{AG}$ comme représentant de $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{AD}$ comme représentant de $\overrightarrow{u}$, on peut alors travailler dans le plan $(A, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{k})$ et utiliser les propriétés du produit scalaire dans le plan.

d. Exprimer le produit scalaire $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$ dans ce plan, en fonction de AD, AG et $\widehat{GAD}$.

Dans le plan $(A, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{k})$, on peut écrire :

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = AD \times AG \times \cos(\widehat{GAD})$$

e. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$ dans ce plan en utilisant l'expression analytique.

On exprime les coordonnées des vecteurs dans le plan orthonormé :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{u} &= (1,0)\\ \overrightarrow{v} &= (1,2)\\ \text{donc } \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} &= 1\times 1+0\times 2 = 1\end{aligned}$$

f. Dans quel plan se trouvent les vecteurs $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$?
Les deux vecteurs se trouvent dans le plan (AFG).
Pour calculer leur norme par la suite, il est utile de préciser que $\overrightarrow{v}$ appartient au plan $(A, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ et que $\overrightarrow{w}$ appartient au plan $(A, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

g. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{FG}$ en fonction de $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$. Dans quel plan se trouve-t-il ?

$$\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{AG}-\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{v}-\overrightarrow{w} = \overrightarrow{j}+2\overrightarrow{k}-(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}) = 2\overrightarrow{k}-\overrightarrow{i}$$

Ce vecteur est donc dans le plan vectoriel $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{k})$.

h. En déduire la longueur FG puis calculer AF et AG afin de calculer $\overrightarrow{v}.\overrightarrow{w}$.
On peut donc utiliser la formule donnant la norme d'un vecteur dans le repère orthonormé $(F, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{k})$:

$$\begin{aligned}||\overrightarrow{FG}|| &= \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}\\ ||\overrightarrow{AG}|| &= \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}\\ ||\overrightarrow{AF}|| &= \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}\\ \overrightarrow{v}.\overrightarrow{w} &= \frac{1}{2}\left(AG^2+AF^2-FG^2\right) = \frac{1}{2}(5+2-5) = 1\end{aligned}$$

i. Exprimer le produit scalaire $\overrightarrow{v}.\overrightarrow{w}$ dans ce plan, en fonction de AF, AG et $\widehat{FAG}$.

$$\overrightarrow{v}.\overrightarrow{w} = AF\times AG\times\cos(\widehat{FAG})$$

j. Dans quel plan se trouvent les vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{j}$?
Les deux vecteurs se trouvent dans le plan (AEG).

k. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{DE}$ en fonction de $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$. Dans quel plan se trouve-t-il ?

$$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{a}-\overrightarrow{j} = \overrightarrow{i}+2\overrightarrow{k}$$

l. En déduire la longueur DE puis $\overrightarrow{a}.\overrightarrow{j}$.

$$\begin{aligned}||\overrightarrow{DE}|| &= \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}\\ ||\overrightarrow{AE}|| &= \sqrt{AF^2+AC^2} = \sqrt{\sqrt{2}^2+2^2} = \sqrt{6}\\ ||\overrightarrow{AD}|| &= 1\\ \text{donc } \overrightarrow{a}.\overrightarrow{j} &= \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\left(AE^2+AD^2-DE^2\right) = \frac{1}{2}(6+1-5) = 1\end{aligned}$$

m. Dans ce plan où les vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{j}$ se trouvent, exprimer leur produit scalaire en fonction de AE, AD et $\widehat{EAD}$.

$$\overrightarrow{a}.\overrightarrow{j} = AE \times AD \times \cos(\widehat{EAD})$$

n. Comparer les résultats obtenus pour les produits scalaires avec l'application :

$$f(\overrightarrow{m}, \overrightarrow{n}) = x_{\overrightarrow{m}}x_{\overrightarrow{n}} + y_{\overrightarrow{m}}y_{\overrightarrow{n}} + z_{\overrightarrow{m}}z_{\overrightarrow{n}}$$

On sait que :

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{u} = (0;1;0)\\
&\overrightarrow{v} = (0;1;2)\\
&\overrightarrow{w} = (1;1;0)\\
&\overrightarrow{a} = (1;1;2)\\
&f(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 0\times 0 + 1\times 1 + 0\times 2 = 1\\
&f(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = 0\times 1 + 1\times 1 + 2\times 0 = 1\\
&f(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{j}) = 1\times 0 + 1\times 1 + 0\times 2 = 1
\end{aligned}$$

On constate, qu'apparament, l'application $f(\overrightarrow{m}, \overrightarrow{n})$ renvoie la valeur du produit scalaire $\overrightarrow{m}.\overrightarrow{n}$.

o. Conclure quant aux formules possibles pour un produit scalaire de deux vecteurs de l'espace.
Pour deux vecteurs de l'espace $\overrightarrow{u}(x, y, z)$ et $\overrightarrow{v}(x', y', z')$ dont l'angle entre les réprésentants dans un même plan est α, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = ||\overrightarrow{u}||.||\overrightarrow{v}|| \times \cos(\alpha)\\
&\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = x.x' + y.y' + z.z'
\end{aligned}$$