

∞ Fonction logarithme : cours

1 Définition et propriétés immédiates



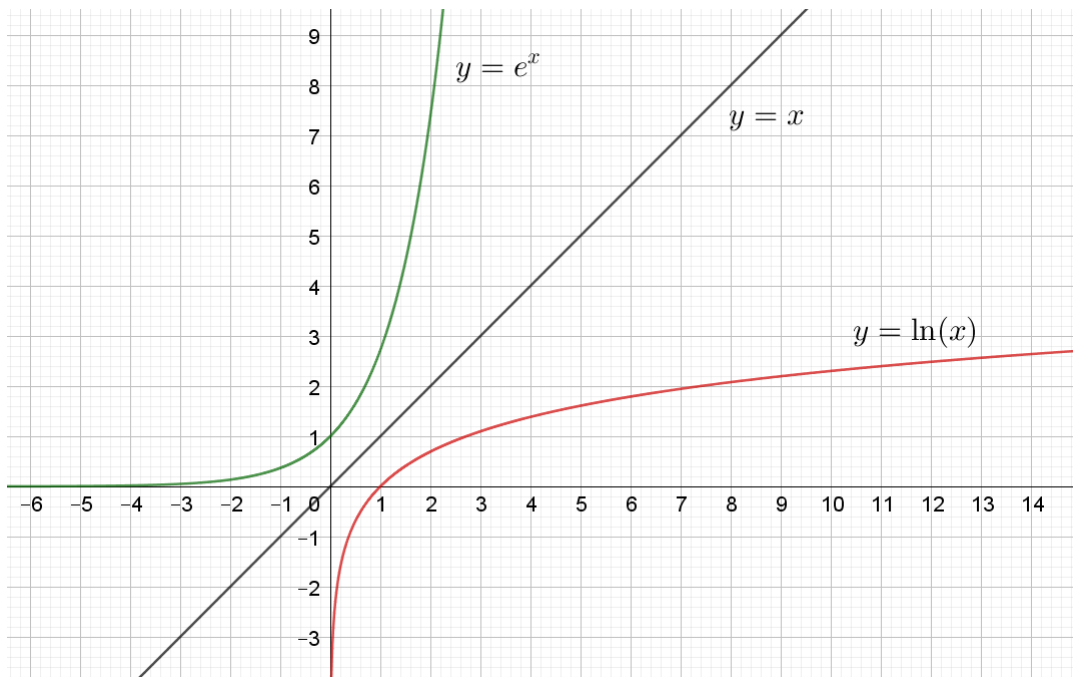
Définition

On appelle logarithme népérien d'un réel strictement positif a , l'unique solution de l'équation $e^x = a$. On la note $\ln(a)$.

La fonction logarithme népérien, notée \ln , est la fonction :


$$\begin{aligned}\ln :]0; +\infty[&\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \ln(x)\end{aligned}$$

Remarque 1 \Leftrightarrow Les fonctions $\exp(x) = e^x$ et $\ln(x)$ sont des fonctions réciproques l'un de l'autre : celui signifie, entre autres, que les courbes représentatives de ces deux fonctions sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.



\Leftrightarrow Dans le domaine scientifique, on utilise la fonction logarithme décimale, notée \log , et définie par :

$$\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$$



Conséquences

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \ln(\exp(x)) = x$$

$$\forall x > 0 \quad \exp(\ln(x)) = x$$


$$\ln(1) = 0$$

$$\ln(e) = 1$$

$$\ln\left(\frac{1}{e}\right) = -1$$

2 Propriétés de la fonction logarithme népérien

2.1 Relation fonctionnelle




Théorème

Pour tous réels x et y strictement positifs, on a :

$$\ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y)$$

Remarque 2 Cette formule permet de transformer un produit en somme.

2.2 Conséquences



Corollaires

Pour tous les réels x et y strictement positifs, on a :

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x) \quad (1)$$

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y) \quad (2)$$

$$\ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2} \ln(x) \quad (3)$$

$$\ln(x^n) = n \ln(x) \quad \text{avec } n \text{ un entier relatif} \quad (4)$$

Exemple 1 Simplifier les expressions suivantes :

$$A = \ln(3 - \sqrt{5}) + \ln(3 + \sqrt{5})$$

$$B = 3\ln(2) + \ln(5) - 2\ln(3)$$

$$C = \ln(e^2) - \ln\left(\frac{2}{e}\right)$$

$$A = \ln((3 - \sqrt{5}) \times (3 + \sqrt{5})) = \ln(3^2 - \sqrt{5}^2) = \ln(9 - 5) = \ln(4)$$

$$B = \ln(2^3) + \ln(5) - \ln(3^2) = \ln\left(\frac{2^3 \times 5}{3^2}\right) = \ln\left(\frac{40}{9}\right)$$

$$C = 2\ln(e) - \ln(2) - (-\ln(e)) = 2 - \ln(2) + 1 = 3 - \ln(2)$$

2.3 Équations et inéquations



Propriétés

Pour tous réels x et y strictement positifs, on a :

$$\Leftrightarrow \ln(x) = \ln(y) \Leftrightarrow x = y.$$

$$\Leftrightarrow \ln(x) < \ln(y) \Leftrightarrow x < y.$$

Exemple 2 1. Résoudre dans I les équations suivantes et inéquations suivantes :

$$\ln(x) = 2 \quad I =]0; +\infty[$$

$$e^{x+1} = 5 \quad I = \mathbb{R}$$

$$3\ln(x) - 4 = 8 \quad I =]0; +\infty[$$

$$\ln(6x - 1) \leq 2 \quad I = \left] \frac{1}{6}; +\infty \right[$$

$$e^x + 5 > 4e^x \quad I = \mathbb{R}$$

$$\ln(x) = 2 \Leftrightarrow \ln(x) = \ln(e^2) \Leftrightarrow x = e^2 \in]0; +\infty[$$

$$e^{x+1} = 5 \Leftrightarrow e^{x+1} = e^{\ln(5)} \Leftrightarrow x+1 = \ln(5) \Leftrightarrow x = \ln(5) - 1 \in \mathbb{R}$$

$$3\ln(x) - 4 = 8 \Leftrightarrow 3\ln(x) = 12 \Leftrightarrow \ln(x) = 4 = \ln(e^4) \Leftrightarrow x = e^4 \in \mathbb{R}$$

$$\ln(6x - 1) \leq 2 \Leftrightarrow 6x - 1 > 0 \text{ et } \ln(6x - 1) \leq \ln(e^2) \Leftrightarrow x > \frac{1}{6} \text{ et } 6x - 1 \leq e^2 \Leftrightarrow \frac{1}{6} < x \leq \frac{e^2 + 1}{6}$$

$$e^x + 5 > 4e^x \Leftrightarrow 5 > 3e^x \Leftrightarrow e^x < \frac{5}{3} = e^{\ln(\frac{5}{3})} \Leftrightarrow x < \ln\left(\frac{5}{3}\right)$$

2. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation et l'inéquation suivante :

$$\ln(x - 3) + \ln(9 - x) = 0$$

$$\ln(3 - x) - \ln(x + 1) \leq 0$$

$$\ln(x - 3) + \ln(9 - x) = 0 \Leftrightarrow \ln((x - 3)(9 - x)) = 0 = \ln(1) \Leftrightarrow (x - 3)(9 - x) = 1 \Leftrightarrow -x^2 + 12x - 27 = 1 \Leftrightarrow -x^2 + 12x - 28 = 0$$

On calcule maintenant le discriminant Δ :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 12^2 - 4 \times (-1) \times (-28) = 32$$

Comme le discriminant est strictement positif, il y a deux solutions réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-12 + \sqrt{32}}{-2} = \frac{-12 + 4\sqrt{2}}{-2} = 6 - 2\sqrt{2}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-12 - \sqrt{32}}{-2} = \frac{-12 - 4\sqrt{2}}{-2} = 6 + 2\sqrt{2}$$

On avait deux conditions pour l'égalité existe, elles viennent de l'ensemble de définition de la fonction logarithme :

$$x - 3 > 0 \text{ et } 9 - x > 0 \Leftrightarrow x > 3 \text{ et } x < 9$$

Il reste à vérifier si $6 - 2\sqrt{2}$ et $6 + 2\sqrt{2}$ sont dans l'intervalle $]3; 9[$. Comme on retire un nombre positif, $6 - 2\sqrt{2} < 6 < 9$ et il nous reste à comparer $6 - 2\sqrt{2}$ à 3 :

$$6 - 2\sqrt{2} - 3 = 3 - \sqrt{8} = \sqrt{9} - \sqrt{8} > 0 \Leftrightarrow 6 - 2\sqrt{2} > 3$$


Comme on ajoute un nombre positif, $6 + 2\sqrt{2} > 6 > 3$ et il nous reste à comparer $6 + 2\sqrt{2}$ à 9 :

$$9 - (6 + 2\sqrt{2}) = 3 - 2\sqrt{2} = \sqrt{9} - \sqrt{8} > 0$$

On a bien montré l'appartenance des deux solutions à l'ensemble $]3; 9[$.

3 Étude de la fonction logarithme népérien


3.1 Continuité et dérivabilité



Propriétés

⇒ La fonction logarithme népérien est continue sur $]0; +\infty[$.

⇒ La fonction logarithme népérien est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$.



Preuve

On applique la formule de dérivation d'une composée de fonction à :

$$e^{\ln(x)} \text{ en posant } u(x) = \ln(x) \text{ et } e^{u(x)}$$

$$(e^{\ln(x)})' = u(x)' \times e^{u(x)} = u'(x) e^{\ln(x)}$$

Or, cette fonction $e^{\ln(x)}$ est égale à x et la dérivée de x est 1, par conséquent :

$$u'(x) e^{\ln(x)} = 1 \Leftrightarrow u'(x) x = 1 \Leftrightarrow u'(x) = \frac{1}{x}$$

La dérivée de la fonction $x \mapsto \ln(x)$ est donc la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$.

Exemple 3 Dériver la fonction suivante sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{(\ln(x))^2}{x}$$

On utilise dans un premier temps la formule de dérivation d'un quotient :

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{((\ln(x))^2)' \times x - (\ln(x))^2 \times x'}{x^2} \\
 &= \frac{((\ln(x))^2)' \times x - (\ln(x))^2 \times x'}{x^2} \\
 &= \frac{2 \times (\ln(x))' \times \ln(x) \times x - (\ln(x))^2 \times 1}{x^2} \quad \text{on a utilisé la formule de dérivation d'une composée pour dériver } (\ln(x))^2 \\
 &= \frac{2 \times \frac{1}{x} \times \ln(x) \times x - (\ln(x))^2}{x^2} \\
 &= \frac{2\ln(x) - (\ln(x))^2}{x^2} \\
 &= \frac{\ln(x)(2 - \ln(x))}{x^2}
 \end{aligned}$$

Le fait de factoriser par $\ln(x)$ va nous permettre de pouvoir donner le signe de cette dérivée en faisant un tableau de signe.

3.2 Variations



Propriétés

La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

3.3 Convexité



Propriétés

La fonction logarithme népérien est concave sur $]0; +\infty[$. On a les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$$

3.4 Limites aux bornes



Propriétés

On a les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} = -\infty$$

x	0	$+\infty$
$f'(x) = \frac{1}{x}$		+
$f(x) = \ln(x)$	$-\infty$	$+\infty$

3.5 Croissance comparée des fonctions logarithme et puissances



Croissances comparées

On a les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \text{ et pour } n \geq 1, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0 \text{ et pour } n \geq 1, \lim_{x \rightarrow 0} x^n \ln(x) = 0$$



Preuve du cas $n = 1$

On va poser $X = \ln(x)$ on peut donc écrire :

$$X = \ln(x) \Leftrightarrow x = e^X$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \Leftrightarrow \lim_{X \rightarrow +\infty} \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{X}{e^X} = 0 \text{ d'après les croissances comparées de la fonction } x \mapsto e^x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \Leftrightarrow \lim_{X \rightarrow -\infty} \text{ car } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = \lim_{X \rightarrow -\infty} X e^X = 0 \text{ d'après les croissances comparées de la fonction } x \mapsto e^x$$

Exemple 4 Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \ln(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x-1}$$

⇒ On sait que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$$

la limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \ln(x)$ est une forme indéterminée du type $+\infty - \infty$.

On va donc factoriser par x :

$$x - \ln(x) = x \left(1 - \frac{\ln(x)}{x} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{\ln(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{\ln(x)}{x} \right) = +\infty \times 1 = +\infty \text{ par produit de limites}$$

La limite cherchée est donc $+\infty$.

⇒ On sait que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1$$

la limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x-1}$ est une forme indéterminée du type $\frac{+\infty}{+\infty}$.

On va factoriser par x :

$$\frac{\ln(x)}{x-1} = \frac{\ln(x)}{x(1 - \frac{1}{x})} = \frac{\ln(x)}{x} \times \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = 1 \text{ par quotient de limites} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} \times \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = 0 \times 1 = 0$$

La limite cherchée est donc 0.

4 Études de fonctions

4.1 Cas de fonctions contenant la fonction $\ln(x)$

Exemple 5 1. Déterminer les variations de la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = 3 - x + 2\ln(x)$.

La fonction est dérivable par somme de fonctions dérivables, on peut donc calculer sa dérivée pour ensuite obtenir son signe, qui nous donnera accès à ses variations :

$$\begin{aligned} f'(x) &= -1 + 2 \times \frac{1}{x} \\ &= \frac{-x + 2}{x} \end{aligned}$$

On en déduit le tableau de signes de $f'(x)$ puis le tableau de variations de f :

x	0	2	$+\infty$
$-x + 2$		- 0 +	
x		+	
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$		$1 + 2\ln(2)$	
	$-\infty$		$-\infty$

Pour la valeur de f en 2 :

$$f(2) = 3 - 2 + 2\ln(2) = 1 + 2\ln(2)$$

De plus :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} 3 - x + 2\ln(x) = 3 - 0 - \infty = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 3 - x + 2\ln(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3 - x \left(1 + 2 \times \frac{\ln(x)}{x} \right) = 3 - \infty \times (1 + 0) = -\infty \text{ par produit de limites}$$

2. Étudier la convexité de la fonction f .

On doit calculer le signe de la fonction f'' ; cette fonction existe car la fonction f' est dérivable par quotient de fonctions dérivables pour $x > 0$:

$$f''(x) = (f'(x))' = \left(-1 + 2 \times \frac{1}{x} \right)' = -\frac{2}{x^2} < 0 \text{ pour tout } x > 0$$

La fonction f est donc concave.

Exemple 6 Étudier la position relative de la courbe de la fonction logarithme et de la droite d'équation $y = x$.

On étudie la fonction $f(x) = \ln(x) - x$. Cette fonction est dérivable pour $x > 0$ par différence de fonctions dérivables pour $x > 0$:

$$f'(x) = \frac{1}{x} - 1$$

On va étudier le signe de cette fonction :

$$x > 0 \text{ et } \frac{1}{x} - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 0 \text{ et } \frac{1}{x} > 1 \Leftrightarrow x > 0 \text{ et } x < 1$$

On en déduit le tableau de variation suivant :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		0	
$f(x)$	$-\infty$	-1	$-\infty$

On va justifier les valeurs du tableau :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) - x = -\infty + 0 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\ln(x)}{x} - 1 \right) = +\infty \times (0 - 1) = -\infty$$

$$f(1) = \ln(1) - 1 = -1$$

Par conséquent, on vient, entre autre, de montrer que :

$$\forall x > 0, \quad f(x) \leq -1 \Rightarrow \forall x > 0, \quad \ln(x) - x < -1 \Rightarrow \forall x > 0, \quad \ln(x) < x$$

Pour $x > 0$, la fonction $x \mapsto \ln(x)$ est sous la droite d'équation $y = x$.

4.2 Cas de fonctions contenant la fonction composée $\ln(u(x))$



Fonctions du type $\ln(u(x))$

La dérivée de la fonction $x \mapsto \ln(u(x))$, définie pour $u(x) > 0$, est :

$$\frac{u'(x)}{u(x)}$$

Exemple 7 Dériver la fonction g définie sur $]0; 2[$ par $g(x) = \ln(2x - x^2)$.

On va déjà vérifier que la fonction $u(x) = 2x - x^2$ est strictement positive sur $]0; 2[$.

La fonction dérivée de u est $u'(x) = 2 - 2x$; elle s'annule en $x = 1$:

$$2 - 2x > 0 \Leftrightarrow x < 1$$

La fonction u est donc décroissante sur $[0; 1]$ puis décroissante sur $[1; 2]$:

$$u(0) = 0$$

$$u(1) = 1$$

$$u(2) = 0$$

Finalement, on peut en conclure que pour $x \in]0; 2[$, $0 < u(x) < 1$: g est donc bien définie sur $]0; 2[$. La fonction g peut s'écrire comme la composée de deux fonctions :

$$g(x) = \ln(u(x))$$

$$u(x) = 2x - x^2 \quad u'(x) = 2 - 2x$$

$$g'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{2 - 2x}{2x - x^2}$$

Exemple 8 On considère la fonction f définie sur $] -2; 1[$ par :

$$f(x) = \ln\left(\frac{x+2}{1-x}\right)$$

1. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition et en déduire les équations d'asymptotes à la courbe.

On va faire le tableau de signe de la fonction $u(x) = \frac{x+2}{1-x}$ pour montrer que f est bien définie sur $] -2; 1[$:

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$x+2$	$-$	0	$+$	
$1-x$		$+$	0	$-$
$u(x)$	$-$	0	$+$	0

La fonction u est bien strictement positive sur $] -2; 1[$ donc f est bien définie sur $] -2; 1[$.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1^-} u(x) &= \frac{3}{0^+} = +\infty \\ \text{donc } \lim_{x \rightarrow 1^-} \ln(u(x)) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} u(x) &= 0 \\ \text{donc } \lim_{x \rightarrow 2^+} \ln(u(x)) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty\end{aligned}$$

La courbe possède donc deux asymptotes verticales d'équation $x = -2$ et $x = 1$ car on obtient une limite infinie en $x = 1$ et $x = -2$.

2. Déterminer le sens de variations de la fonction f .

La fonction u est dérivable sur $] -2; 1[$ par quotient de fonctions dérivables. Comme la fonction u est strictement positive sur $] -2; 1[$ et que la fonction $y \mapsto \ln(y)$ est dérivable pour $y > 0$, alors la fonction f est dérivable sur $] -2; 1[$ par composée de fonctions dérivables :

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{u'(x)}{u(x)} \\ u'(x) &= \left(\frac{x+2}{1-x} \right)' = \frac{(x+2)' \times (1-x) - (x+2) \times (1-x)'}{(1-x)^2} = \frac{(1-x) - (x+2) \times (-1)}{(1-x)^2} = \frac{3}{(1-x)^2} > 0\end{aligned}$$

La fonction est donc strictement croissante sur $] -2; 1[$.

3. Tracer la courbe représentative de f .

