Fonction logarithme 5

On considère la fonction suivante définie sur $]0;+\infty[$:

$$g(x) = 3x + 5 + 10\ln(x)$$

1. Calculer la limite de g en 0^+
2. Calculer la limite de g en $+\infty$
3. Calculer la dérivée de g.
4. Déterminer le signe de $g'(x)$.
5. En déduire le tableau de variation de $g(x)$.
6. En déduire le nombre de solutions de $g(x) = 0$ et un encadrement d'amplitude 10^{-2} de cette solution.

Correction :

1. On sait que :

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to 0^+} 3x+5 = +5 \\ &\lim_{x\to 0^+} 10\ln(x) = -\infty \quad \text{par propriété du cours} \\ \text{donc } &\lim_{x\to 0^+} 3x+5+10\ln(x) = -\infty \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to +\infty} 3x+5 = +\infty \\ &\lim_{x\to +\infty} 10x\ln(x) = +\infty \quad \text{par propriété du cours} \\ \text{donc } &\lim_{x\to +\infty} 3x+5+10\ln(x) = +\infty \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} g'(x) &= 3+10\times\frac{1}{x} \\ &= \frac{3x+10}{x} \end{aligned}$$

4.

$$g'(x) > 0 \ \ \forall x > 0$$

5. On a :

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	$\Vert$	$+$
$g(x)$	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$

6. Comme la fonction$g$ est continue, croissante de $-\infty$ à $+\infty$, alors, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit qu'il existe une unique solution $\alpha > 0$ tel que $g(\alpha) = 0$.

$$\begin{aligned} g(0.51) < 0 \\ g(0.52) > 0 \\ \text{donc } 0.51 < \alpha < 0.52 \end{aligned}$$