

♻ Récurrences 3

On considère la suite :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 0.9u_n + 0.8 \\ u_0 = 2 \end{cases}$$

1. Montrer par récurrence que :

$$u_n \leq u_{n+1} \leq 8$$

2. En déduire que la suite converge et en déduire sa limite.

1. Initialisation :

On a :

$$u_1 = 0.9u_0 + 0.8 = 2.6$$
$$\text{donc } u_0 = 2 \leq u_1 \leq 8$$

L'initialisation est établie.

Hérédité :

On suppose que la propriété est vraie pour un certain rang $n \geq 0$:

$$u_n \leq u_{n+1} \leq 8 \quad \text{c'est l'hypothèse de récurrence}$$

On part de cette hypothèse :

$$\begin{aligned} u_n &\leq u_{n+1} \leq 8 \\ \Rightarrow 0.9 \times u_n &\leq 0.9 \times u_{n+1} \leq 0.9 \times 8 \\ \Rightarrow 0.9 \times u_n &\leq 0.9 \times u_{n+1} \leq 7.2 \\ \Rightarrow 0.9 \times u_n + 0.8 &\leq 0.9 \times u_{n+1} + 0.8 \leq 7.2 + 0.8 \\ \Rightarrow u_{n+1} &\leq u_{n+2} \leq 8 \end{aligned}$$

L'hérédité est établie.

2. On vient de montrer que la suite est croissante et majorée, par conséquent, d'après le théorème de convergence monotone, la suite converge vers l un nombre réel qui vérifie :

$$\begin{aligned} l &= 0.9 \times l + 0.8 \\ \Leftrightarrow l - 0.9 \times l &= 0.8 \\ \Leftrightarrow l \times 0.1 &= 0.8 \\ \Leftrightarrow l &= \frac{0.8}{0.1} = 8 \end{aligned}$$