Probabilités et variables aléatoires : activités

⚽ Exemple 1

Coefficients binomiaux

Ludwig pratique le football dans un club de ligue 1. Il y a **20 équipes** dans le championnat et avant la trève hivernale, chaque équipe doit rencontrer chacune des autres une seule fois.

1. *Quel sera le nombre total de matchs avant la trève ?*
   Comparer ce résultat au nombre :

$$\binom{\mathbf{20}}{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{20}!}{(\mathbf{20}-\mathbf{2})!\mathbf{2}!}$$

   avec $\mathbf{n}! = \mathbf{1} \times \mathbf{2} \times \ldots \times \mathbf{n}$ *que l'on appelle* ***factorielle n***.
   On pourra compter le nombre de matchs que chaque équipe doit faire.

2. *On décide choisir* ***trois équipes*** *au hasard pour faire un mini championnat. Ludwig souhaite calculer le nombre de poules de trois équipes qu'il est possible de construire à partir de* **20** *équipes initiales.*

   a. *De combien d'options dispose-t-on pour choisir la première équipe de la poule ?*

   b. *De combien d'options dispose-t-on pour choisir la deuxième équipe de la poule ?*

c. *De combien d'options dispose-t-on pour choisir la troisième équipe de la poule ?*

d. *En déduire le nombre de possibilités de choisir trois équipes en les sélectionnant l'une après l'autre.*

e. *Est ce que deux triplets de trois mêmes équipes choisies dans des ordres différents constituent des poules différentes ?*

f. *On appelle A, B et C les trois équipes choisies.*
Il n'a pas été précisé l'ordre dans lequel ont été choisies les équipes.
Lister toutes les possibilités. Exprimer leur nombre en fonction d'une factorielle.

g. *En déduire le nombre de poules de trois équipes qu'il est possible de construire à partir de* **20** *équipes initiales.*

h. *Comparer ce nombre au coefficient binomial suivant :*

$$\binom{\mathbf{20}}{\mathbf{3}} = \frac{\mathbf{20}!}{(\mathbf{20}-\mathbf{3})!\mathbf{3}!}$$

3. *Conjecturer une formule donnant le nombre d'ensembles à* **p** *éléments parmi un plus grand ensemble à* **n** *éléments.*

⚽ Exemple 2

Probabilités et arbres

Ludwig a été selectionné pour la coupe du monde de football.
Il veut estimer les chances de succès de la France, si jamais elle sort de sa poule, en fonction de ses résultats aux coupes du monde précédentes.
Une étude statistique lui permet de savoir que si elle sort de sa poule :

- ✏ la France a une probabilité de $\frac{4}{5}$ d'en être première et à partir de là, une probabilité de $\frac{1}{2}$ d'aller en finale.

- ✏ dans le cas où elle finit deuxième de sa poule, elle a une probabilité de $\frac{3}{10}$ d'aller en finale.

1. *Représenter la situation par un arbre de probabilité en explicitant les événements.*

2. *Préciser la probabilité des événements et les probabilités conditionnelles que nous donne l'énoncé.*

3. *Calculer la probabilité que Ludwig aille en finale de la coupe du monde en donnant les détails.*

⚽ Exemple 3

Loi binomiale

Une grande école organise un test de sélection pour recruter ses futurs étudiants.
Dans ce test, il y a **40** questions, qui sont toutes indépendantes les unes des autres.
Chacune des questions propose **quatre solutions possibles dont une seule est correcte**.
Pour réussir ce test, un étudiant doit répondre correctement à au moins **36** questions.
Ludwig, qui a participé à la coupe du monde et qui a donc eu du mal à se préparer pour l'examen, se demande quelle est la probabilité d'obtenir une note donnée, s'il répondait au hasard à chaque question.
On appelle X la variable aléatoire donnant le nombre de réponses correctes obtenues en répondant au hasard.

1. *Pour une question donnée du test, quelle est la probabilité qu'il y réponde correctement au hasard ?*

2. *Combien y-a-t-il de façon d'obtenir* **20** *réponses correctes ?* **36** *réponses correctes ?*

3. *Si l'étudiant a* **20** *réponses correctes, combien de questions sont incorrectes ?*
   Si l'étudiant a **36** *réponses correctes, combien de questions sont incorrectes ?*

4. *En déduire les expressions de* $\mathbf{P(X=20)}$ *et* $\mathbf{P(X=36)}$.

5. *Exprimer* $\mathbf{P(X \leq 35)}$ *comme une somme de probabilités.*

6. *Exprimer* $\mathbf{P(X \geq 36)}$ *en fonction de* $\mathbf{P(X \leq 35)}$.

7. *Exprimer* $\mathbf{P}(\mathbf{X} > \mathbf{n})$ *en fonction de* $\mathbf{P}(\mathbf{X} \leq \mathbf{n})$.

8. *Est-ce que l'étudiant qui répond au hasard a choisi une stratégie qui a de bonnes chances de réussir ?*

9. *En répondant au hasard, quelle note peut-il espérer avoir ?*

10. *Que font les deux fonctions présentées dans l'encadré suivant ? :*

```python
def f(n):
    if n==0:
        return 1
    else:
        F=1
        for k in range(2,n+1):
            F=F*k
        return F

def seuil(a,p,n):
    P=(1-p)**n
    k=0
    while P<a:
        k=k+1
        P=P+f(n)/(f(n-k)*f(k))*p**k*(1-p)**(n-k)
    return k
```

11. *On veut déterminer l'entier n tel que :*

$$P(X > n) \leq 0.25$$

Comment peut-on utiliser l'algorithme précédent ?