Fonctions de référence : fonctions logarithmes

1 Fonctions logarithmes

1.1 Définitions équivalentes

Définition 1 *Les fonctions logarithmes sont les fonction définie sur* $\mathbb{R}^{+*}$ *par :*

$$f(x \times y) = f(x) + f(y) \text{ pour } x, y > 0 \quad (E)$$

Définition 2 *La fonction logarithme népérien est la fonction définie sur* $\mathbb{R}^{+*}$*, vérifiant* (E)*, dont la dérivée est* $\frac{1}{x}$ *et qui s'annule en* 1*.*

Définition 3 *La fonction logarithme décimale* $\log(x)$ *est une fonction multiple de la fonction* $\ln(x)$ *:*

$$\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$$

Elle associe son exposant à une puissance de 10*.*

1.2 Propriétés

Propriétés 1 (Relations fonctionnelles) *Pour* $x > 0$*,* $y > 0$ *et un* n *un entier relatif :*

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$$
$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$$
$$\ln\left(x^n\right) = n\ln(x)$$

Propriétés 2 (Dérivées de fonctions logarithmiques) *Soit* u *une fonction définie sur* I *à valeurs dans* $\mathbb{R}^{+,*}$*.*
La fonction $\ln(u(x))$ *est dérivable et :*

$$[\ln(u(x))]' = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

Nous résumons les dernières propriétés de la fonction $\ln(x)$ par le biais de son tableau de variation :

x	0	e	$+\infty$
$(\ln(x))' = \frac{1}{x}$	‖	$+$	
$\ln(x)$	‖ $-\infty$	↗ 1 ↗	$+\infty$

La valeur e pour laquelle $\ln(e) = 1$ s'appelle nombre d'Euler.

Propriétés 3

$$\ln(x) < 0 \Leftrightarrow x < 1$$
$$\ln(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

Propriétés 4 *L'équation d'inconnue* x *:*

$$\ln(x) = y$$

a pour solution $x = e^y$