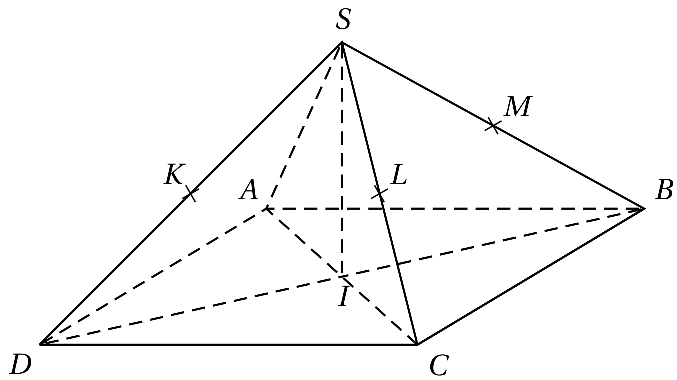
☙ Évaluation 2

Exercice 1 *SABCD est une pyramide régulière à base carrée ABCD dont toutes les arêtes ont la même longueur.*
Le point I est le centre du carré ABCD.
On suppose que : $IC = IB = IS = 1$.
Les points K, L et M sont les milieux respectifs des arêtes [SD], [SC] et [SB].



1. *Parmi les couples de droites suivantes, lequelles ne sont pas coplanaires :*

   a. *(DK) et (SD)* ***b.*** *(AS) et (IC)* ***c.*** *(AC) et (SB)* ***d.*** *(LM) et (AD)*

2. *Calculer $\overrightarrow{IM}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{IC}$, $\overrightarrow{IB}$ et $\overrightarrow{IS}$.*
3. *Calculer $\overrightarrow{IK}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{IC}$, $\overrightarrow{IB}$ et $\overrightarrow{IS}$.*
4. *Calculer $\overrightarrow{IL}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{IC}$, $\overrightarrow{IB}$ et $\overrightarrow{IS}$.*
5. *Pour les questions suivantes, on se place dans le repère orthonormé de l'espace $\left(I;\overrightarrow{IC}, \overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IS}\right)$.*

   a. *Donner les coordonnées de chacun des points du dessin.*
   b. *Déterminer les coordonnées du milieu N de $[KL]$.*
   c. *Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AS}$.*
   d. *Montrer ques les vecteurs $\overrightarrow{IC}$ et $\overrightarrow{IC}$ son colinéaires.*
   Que peut-on en déduire sur les droites (KM) et (DB) ?

Exercice 2 **1.** *La limite en $+\infty$ de la fonction $f(x) = \frac{2x^2+3}{x+3}$ est :*

a. 0 ***b.*** $+\infty$ ***c.*** $-\infty$ ***d.*** 2

2. *La limite en $+\infty$ de la fonction $f(x) = \frac{2x^2+3}{x^2+3}$ est :*

   a. 0 ***b.*** $+\infty$ ***c.*** $-\infty$ ***d.*** 2

3. *Déterminer la limite en $+\infty$ de $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$. Justifier.*

Exercice 3 *La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n,*

$$u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1.$$

1. *Calculer, en détaillant les calculs, u_1 et u_2 sous forme de fraction irréductible.*

L'extrait, reproduit ci-contre, d'une feuille de calcul réalisée avec un tableur présente les valeurs des premiers termes de la suite (u_n).

	A	B
1	n	u_n
2	0	1
3	1	1,75
4	2	2,5625
5	3	3,421875
6	4	4,31640625

2. a. *Quelle formule, étirée ensuite vers le bas, peut-on écrire dans la cellule B3 de la feuille de calcul pour obtenir les termes successifs de (u_n) dans la colonne B ?*

b. *Conjecturer le sens de variation de la suite (u_n).*

3. a. *Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $n \leqslant u_n \leqslant n+1$.*

b. *En déduire, en justifiant la réponse, le sens de variation et la limite de la suite (u_n).*

c. *Démontrer que :*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} = 1.$$

4. *On désigne par (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - n$*

a. *Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{3}{4}$.*

b. *En déduire que, pour tout entier naturel n,on a : $u_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n + n$.*