☙ Devoir maison 2 : correction

Exercice 1 *Un protocole médical consiste à injecter initialement au patient, par piqûre intraveineuse, une dose de* 3 *mg de médicament puis à réinjecter toutes les heures une dose de* $1,7$ *mg.*
On suppose que le médicament se diffuse instantanément dans le sang et qu'il est ensuite progressivement éliminé.
On estime que lorsqu'une heure s'est écoulée après une injection, la quantité de médicament dans le sang a diminué de 25 % par rapport à la quantité présente immédiatement après cette injection.
On modélise cette situation à l'aide de la suite (u_n) *où, pour tout entier naturel* n, u_n *désigne la quantité de médicament, exprimée en mg, présente dans le sang du patient immédiatement après l'injection de la* n*-ième heure. On a donc* $u_0 = 3$.

1. *Calculer, selon cette modélisation, la quantité* u_1, *de médicament (en mg) présente dans le sang du patient immédiatement après l'injection de la première heure.*
Une diminution de 25% *correspond à une multiplication par* 0.75*, par conséquent :*

$$u_1 = 0.75u_0 + 1.7 = 3.95$$

2. *Justifier que, pour tout entier naturel* n*, on a :* $u_{n+1} = 0,75u_n + 1,7$.
La multiplication par 0.75 *correspond à la diminution de* 25% *de la quantité de médicament présent dans le sang à l'heure n et le* $+1.7$ *correspond à la dose de* 1.7 *rajoutée toutes les heures donc :*

$$u_{n+1} = 0,75u_n + 1,7$$

3. **a.** *Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel* n*, on a :* $u_n \leqslant u_{n+1} < 6.8$.

Initialisation :
On va vérifier que la propriété est vraie au rang $n = 0$.
On a $u_0 = 3 \leq 3.95 = u_1$ *et* $u_1 = 3.95 < 6.8$ *: la propriété est donc vraie au rang* $n = 0$.
Hérédité :
On suppose que la propriété est vraie pour un rang $n \geq 0$*, on va regarder si elle reste vraie au rang* $n + 1$.
L'hypothèse de récurrence est la suivante :

$$u_n \leqslant u_{n+1} < 6.8$$

On sait que :

$$\begin{aligned}
&u_n \leqslant u_{n+1} < 6.8 \text{ hypothèse de récurrence}\\
&0,75u_n \leqslant 0,75u_{n+1} < 0,75 \times 6.8 \text{ multiplication par un positif}\\
&0,75u_n + 1.7 \leqslant 0,75u_{n+1} + 1.7 < 0,75 \times 6.8 + 1.7
\end{aligned}$$

Or $0,75u_{n+1} + 1.7 = u_{n+2}$, $0,75u_n + 1.7 = u_{n+1}$ *et* $0,75 \times 6.8 + 1.7 = 6.8$*, on déduit donc que :*

$$u_{n+1} \leqslant u_{n+2} < 6.8$$

L'hérédité est donc établie.
On vient de montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n*, on a :* $u_n \leqslant u_{n+1} < 6.8$

b. En déduire que la suite (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.
La suite (u_n) *est croissante et majorée par* 6.8 *(question précédente), d'après le théorème de convergence monotone, on en déduit que cette suite converge vers* $l \in \mathbb{R}$.

c. Déterminer la valeur de ℓ. Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.
Par unicité de limite et en faisant tendre n vers plus $+\infty$ *dans l'égalité* $u_{n+1} = 0,75u_n + 1,7$*, on peut écrire :*

$$l = 0.75l + 1.7 \Leftrightarrow l - 0.75l = 1.7 \Leftrightarrow 0.25l = 1.7 \Leftrightarrow l = \frac{1.7}{0.25} = 6.8$$

La limite de la suite est donc 6.8 *: au bout d'un temps suffisamment long et suffisamment d'injections, la quantité de médicaments dans le sang montera pour être presque égale à* 6.8*mg.*

4. *On considère la suite* (v_n) *définie, pour tout entier naturel* n*, par* $v_n = 6.8 - u_n$.

a. *Montrer que la suite* (v_n) *est une suite géométrique de raison* $0,75$ *dont on précisera le premier terme.*
On sait que :

$$v_{n+1} = 6.8 - u_{n+1} = 6.8 - (0,75u_n + 1,7) = 5.1 - 0.75u_n = 0.75\left(\frac{5.1}{0.75} - u_n\right) = 0.75\,(6.8 - u_n) = 0.75\,v_n$$

Par conséquent, la suite (v_n) *est géométrique de raison* 0.75 *et de premier terme* $v_0 = 6.8 - u_0 = 6.8 - 3 = 3.8$

b. *Déterminer l'expression de* v_n *en fonction de* n*, puis de* u_n *en fonction de* n.
Par propriété des suites géométriques, on sait que, pour tout entier naturel n :

$$v_n = 3.8 \times 0.75^n \Leftrightarrow 6.8 - u_n = 3.8 \times 0.75^n \Leftrightarrow 6.8 = 3.8 \times 0.75^n + u_n \Leftrightarrow u_n = 6.8 - 3.8 \times 0.75^n$$

c. *Avec ce protocole, on arrête les injections lorsque la quantité de médicament présente dans le sang du patient est supérieure ou égale à* $5,5$ *mg.*
Déterminer, en détaillant les calculs, le nombre d'injections réalisées en appliquant ce protocole.
En utilisant la calculatrice grâce à laquelle on fait un tableau de valeurs pour notre suite, on trouve :

$$u_3 \approx 5.197$$
$$u_4 \approx 5.598$$

Il suffit alors de quatre heures, soit cinq injections pour que la quantité de médicaments présente dans le sang dépasse 5.5*mg.*

Exercice 2 *On considère la suite* (u_n) *définie par :* $u_0 = 1$ *et, pour tout entier naturel* n*,*

$$u_{n+1} = \frac{3u_n}{u_n + 3}.$$

1.

n	u_n	$\frac{3}{u_n}$
0	1,00	3
1	0.75	4
2	0.6	5
3	0.5	6
4	0.43	7
5	0.375	8
6	0.33	9
7	0.3	10
8	0.2727	11
9	0.25	12
10	0.231	13
11	0.214	14
12	0.2	15

Compléter le tableau suivant.
À l'aide de ces valeurs, conjecturer l'expression de $\dfrac{3}{u_n}$ *en fonction de* n.

Le but de cet exercice est de démontrer cette conjecture (question **5.***), et d'en déduire la limite de la suite* (u_n) *(question* **6.***).*

2. *Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel* n*, on a :* $u_n > 0$.
Initialisation :
On sait que $u_0 = 1 > 0$ *: l'initialisation est donc établie.*
Hérédité :
On suppose que la propriété est vraie pour un rang $n \geq 0$ *:*

$$u_n > 0 \text{ c'est l'hypothèse de récurrence}$$

On va regarder si cette propriété reste vraie au rang $n+1$:

$$u_{n+1}=\frac{3u_n}{u_n+3}$$

Or $3u_n>0$ et $u_n+3>0$ grâce à l'hypothèse de récurrence. Comme le quotient de deux nombres positifs est positif, on en déduit que u_{n+1} est positif : l'hérédite est donc établie.
On vient donc de montrer, par récurrence, que $u_n>0$ pour tout entier naturel n.

3. *Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.*
On va montrer que pour tout entier naturel n, l'expression $u_{n+1}-u_n$ est négative :

$$u_{n+1}-u_n=\frac{3u_n}{u_n+3}-u_n=\frac{3u_n}{u_n+3}-\frac{(u_n+3)u_n}{u_n+3}=\frac{3u_n-u_n^2-3u_n}{u_n+3}=\frac{-u_n^2}{u_n+3}<0$$

car $u_n+3>0$ et $-u_n^2<0$: par produit, on obtient donc un nombre négatif.
La suite est donc décroissante.

4. *Que peut-on conclure des questions **2.** et **3.** concernant la suite (u_n) ?*
Comme cette suite est décroissante et minorée par 0, on en déduit, d'après le théorème de convergence monotone, que la suite converge.

5. *On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n=\dfrac{3}{u_n}$.*
Démontrer que (v_n) est une suite arithmétique.
Préciser sa raison et son premier terme.
En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de v_n en fonction de n.
On sait que, pour tout entier naturel n :

$$v_{n+1}=\frac{3}{u_{n+1}}=\frac{3}{\dfrac{3u_n}{u_n+3}}=\cancel{3}\times\frac{u_n+3}{\cancel{3}u_n}=1+\frac{3}{u_n}=1+v_n$$

cela signifie que la suite (v_n) est arithmétique de raison 1 et de premier terme $v_0=\frac{3}{v_0}=\frac{3}{1}=3$

6. *Déterminer, pour tout entier naturel n, l'expression de u_n en fonction de n.*
En déduire la limite de la suite (u_n).
D'après les propriétés sur les suites arithmétiques, on peut écrire pour tout entier naturel n :

$$v_n=v_0+1\times n=3+n=n+3$$

Par conséquent, $\forall n\in\mathbb{N}$:

$$v_n=\frac{3}{u_n}\Leftrightarrow u_n=\frac{3}{v_n}\Leftrightarrow u_n=\frac{3}{n+3}$$

or la limite de la suite $\left(\frac{3}{n+3}\right)$ est 0 d'après les propriétés du cours : la limite de la suite u_n est donc également 0.