Limites de fonctions : cours

1 Limite d'une fonction à l'infini

1.1 Limite finie à l'infini

Définition intuitive

Soit $l \in \mathbb{R}$.
On dit que la limite de f en $+\infty$ est l lorsque la distance entre $f(x)$ et l est aussi petite que l'on veut dès que x est assez grand.
On note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$.

Définition plus rigoureuse

- On dit que la fonction f admet pour limite $L \in \mathbb{R}$ en $+\infty$ si tout intervalle ouvert contenant L contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment grand. On note :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$

- On dit que la fonction f admet pour limite $L \in \mathbb{R}$ en $-\infty$ si tout intervalle ouvert contenant L contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que $-x$ est suffisamment grand. On note :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

Définition d'asymptote

- La droite d'équation $y = L$ est asymptote horizontale à la courbe représentative de la fonction f en $+\infty$ si

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$

- La droite d'équation $y = L$ est asymptote horizontale à la courbe représentative de la fonction f en $-\infty$ si

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

Lorsque x se rapproche de $+\infty$, ou $-\infty$ suivant le cas, la distance entre le point $(x; f(x))$ et $(x; L)$ diminue et s'approche de 0.

1.2 Limite infinie à l'infini

Définitions intuitives

- Soit f définie sur un intervalle de la forme $[a; +\infty[$, on dit que la limite de f en $+\infty$ est égale à $+\infty$ lorsque $f(x)$ est aussi grand que l'on veut dès que x est assez grand.
On note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
- Soit f définie sur un intervalle de la forme $[a; +\infty[$, on dit que la limite de f en $+\infty$ est égale à $-\infty$ lorsque $f(x)$ est plus petit que n'importe quel nombre négatif que l'on veut dès que x est assez grand.
On note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.
- Soit f définie sur un intervalle de la forme $[-\infty; a[$, on dit que la limite de f en $-\infty$ est égale à $+\infty$ lorsque $f(x)$ est aussi grand que l'on veut dès que $-x$ est assez grand.

On note $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

✏ Soit f définie sur un intervalle de la forme $[-\infty; a[$, on dit que la limite de f en $-\infty$ est égale à $-\infty$ lorsque $f(x)$ est plus petit que n'importe quel nombre négatif que l'on veut dès que $-x$ est assez grand.
On note $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

Définitions plus rigoureuses

✏ On dit que la fonction f admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si tout intervalle $]a; +\infty[$, avec a réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment grand et on note :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

✏ On dit que la fonction f admet pour limite $-\infty$ en $+\infty$ si tout intervalle $]-\infty; b[$, avec b réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment grand et on note :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

✏ On dit que la fonction f admet pour limite $+\infty$ en $-\infty$ si tout intervalle $]a; +\infty[$, avec a réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que $-x$ est suffisamment grand et on note :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

✏ On dit que la fonction f admet pour limite $-\infty$ en $-\infty$ si tout intervalle $]-\infty; b[$, avec b réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que $-x$ est suffisamment grand et on note :

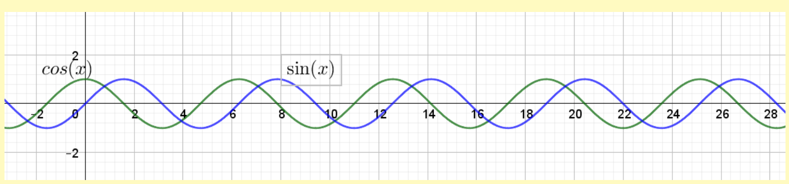
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

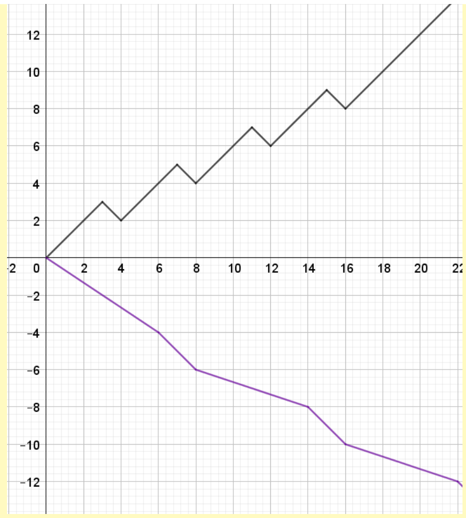
Remarques

✏ Le fait d'avoir une limite égale à $+\infty$ en $+\infty$ ne signifie pas que la fonction est croissante.

✏ Le fait d'avoir une limite égale à $-\infty$ en $+\infty$ ne signifie pas que la fonction est décroissante.

✏ Une fonction n'a pas forcement de limite en $+\infty$: c'est le cas de la fonction sinus ainsi que de la fonction cosinus.





1.3 Limite des fonctions usuelles

Propriétés

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} x^n = +\infty \text{ pour n pair}$$
$$\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} x^n = -\infty \text{ pour n impair}$$
$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$$
$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0$$

2 Limite d'une fonction en un réel A

Définitions intuitives

✏ Soit $a \in \mathbb{R}$. On dit que la limite de f en a est $+\infty$ lorsque $f(x)$ est aussi grand que l'on veut dès que x est assez proche de a.
On note $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$.

✏ Soit $a \in \mathbb{R}$. On dit que la limite de f en a est $-\infty$ lorsque $f(x)$ est plus petit que n'importe quel nombre négatif que l'on veut dès que x est assez proche de a.
On note $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$.

Définitions plus rigoureuses

- ✏ On dit que la fonction f admet pour limite $+\infty$ quand x tend vers A par valeur négative (ou à gauche) si tout intervalle $]a;+\infty[$, a réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment proche de A tout en restant plus petit que A et on note :

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)=\lim_{x\to a^-} f(x)=+\infty$$

- ✏ On dit que la fonction f admet pour limite $+\infty$ quand x tend vers A par valeur positif (ou à droite) si tout intervalle $]a;+\infty[$, a réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment proche de A tout en restant plus grand que A et on note :

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)=\lim_{x\to a^+} f(x)=+\infty$$

- ✏ On dit que f admet pour limite $+\infty$ quand x tend vers A si la limite à gauche et la limite à droite de f en A est $+\infty$ et on note :

$$\lim_{x\to a} f(x)=+\infty$$

- ✏ On dit que la fonction f admet pour limite $-\infty$ quand x tend vers A par valeur négative si tout intervalle $]-\infty;b[$, b réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment proche de A tout en restant plus petit que A et on note :

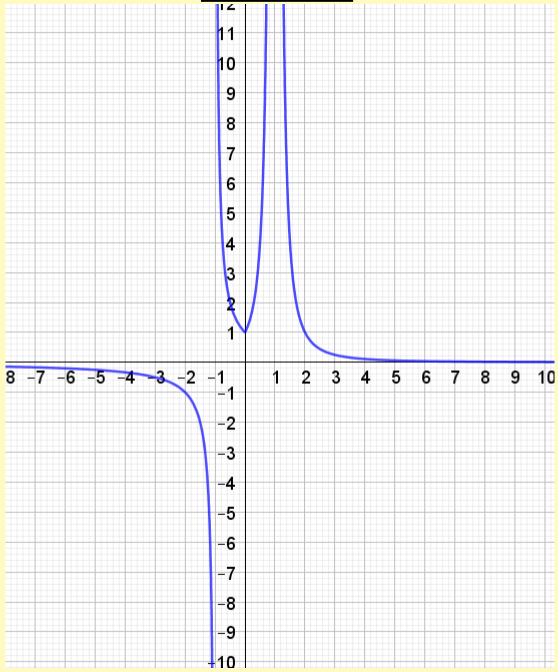
$$\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)=\lim_{x\to a^-} f(x)=-\infty$$

- ✏ On dit que la fonction f admet pour limite $-\infty$ quand x tend vers A par valeur positif si tout intervalle $]-\infty;b[$, b réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment proche de A tout en restant plus grand que A et on note :

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)=\lim_{x\to a^+} f(x)=-\infty$$

- ✏ On dit que f admet pour limite $-\infty$ quand x tend vers A si la limite à gauche et la limite à droite de f en A est $-\infty$ et on note :

$$\lim_{x\to a} f(x)=-\infty$$



On peut écrire les limites suivantes :

$$\lim_{\substack{x\to \\ x<-1}} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to a \\ x>-1}} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = +\infty$$

On a deux asymptotes verticales : $x = -1$ et $x = 1$.

3 Opérations sur les limites

3.1 Limite d'une somme

Propriétés

Si $\lim\limits_{x\to a} u(x)$	L	L	L	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
Si $\lim\limits_{x\to a} v(x)$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $\lim\limits_{x\to a} [u(x)+v(x)]$	L+L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI	$-\infty$

3.2 Limite d'un produit

Propriétés

Si $\lim\limits_{x \to a} u(x)$	L	$L \neq 0$	0	$\pm\infty$
Si $\lim\limits_{x \to a} v(x)$	L'	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
alors $\lim\limits_{x \to a} [u(x) \times v(x)]$	$L \times L'$	$\pm\infty$	FI	$\pm\infty$

Le signe que l'on choisira à la place de $\pm$ sera déduit de la règle des signes.

3.3 Limite de l'inverse d'une fonction

Propriétés

On suppose que $u(x) \neq 0 \; \forall x \in I$.

Si $\lim\limits_{x \to a} u(x)$	$L \neq 0$	0^-	0^+	$+\infty$	$-\infty$
alors $\lim\limits_{x \to a} \frac{1}{u(x)}$	$\frac{1}{L}$	$-\infty$	$+\infty$	0	0

3.4 Limite d'un quotient

Propriétés

On suppose que $u(x) \neq 0 \; \forall x \in I$.

Si $\lim\limits_{x \to a} u(x)$	L	$L \neq 0$	L	0	$\pm\infty$	$\pm\infty$
et $\lim\limits_{x \to a} u(x)$	L'	$0^{\pm}$	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	L'
alors $\lim\limits_{x \to a} \frac{u(x)}{v(x)}$	$\frac{L}{L'}$	$\pm\infty$	0	FI	FI	$\pm\infty$

Le signe que l'on choisira à la place de $\pm$ sera déduit de la règle des signes.

Remarques

Les formes indéterminées sont les suivantes :

$$\infty - \infty \qquad 0 \times \infty \qquad \frac{\infty}{\infty} \qquad \frac{0}{0}$$

Exemple 1 *Déterminer les limites suivantes :*

$$\lim_{x \to -\infty} (x-5)(3+x^2)$$
$$\lim_{x \to 3} \frac{1-2x}{x-3}$$
$$\lim_{x \to +\infty} -3x^3 + 2x^2 - 6x + 1$$
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2 - 5x + 1}{6x^2 - 5}$$
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{3x^2 + 2}{4x - 1}$$

✏ *On a :*

$$\lim_{x\to-\infty}(x-5)=-\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty}(3+x^2)=+\infty$$
$$\textit{donc par produit de limites } \lim_{x\to-\infty}(x-5)(3+x^2)=-\infty\times(+\infty)=-\infty$$

✏ *On a :*

$$\lim_{x\to 3}1-2x=1-6=-5$$

De plus :

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{1}{x-3}=+\infty$$
$$\textit{donc } \lim_{x\to 3}\frac{1-2x}{x-3}=-5\times(+\infty)=-\infty$$
$$\lim_{x\to 3^-}\frac{1}{x-3}=-\infty$$
$$\textit{donc } \lim_{x\to 3}\frac{1-2x}{x-3}=-5\times(-\infty)=+\infty$$

✏ *On sait que :*

$$\lim_{x\to+\infty}-3x^3=-\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty}2x^2=+\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty}-6x+1=-\infty$$

La limite de $\lim\limits_{x\to+\infty}-3x^3+2x^2-6x+1$ *est du type* $+\infty-\infty$ *; on doit factoriser par* x^3 *pour lever l'indétermination :*

$$-3x^3+2x^2-6x+1=x^3\left(-3\frac{x^3}{x^3}+2\frac{x^2}{x^3}-6\frac{x}{x^3}+\frac{1}{x^3}\right)=x^3\left(-3+2\times\frac{1}{x}-6\times\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)$$

Or :

$$\lim_{x\to+\infty}x^3=+\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty}-3+2\times\frac{1}{x}-6\times\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}=-3$$
$$\textit{donc } \lim_{x\to+\infty}-3x^3+2x^2-6x+1=-3\times(+\infty)=-\infty$$

✏ *On sait que :*

$$\lim_{x\to+\infty}2x^2-5x+1=+\infty-5\times(-\infty)=+\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty}6x^2-5=+\infty$$

La limite de $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^2-5x+1}{6x^2-5}$ *est du type* $\frac{+\infty}{+\infty}$ *; on va devoir factoriser par le mônome de plus haut de degré au numérateur et au dénominateur, c'est-à-dire* x^2 *:*

$$\frac{2x^2-5x+1}{6x^2-5}=\frac{x^2\left(2\frac{x^2}{x^2}-5\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(6\frac{x^2}{x^2}-\frac{5}{x^2}\right)}=\frac{2-5\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{6-\frac{5}{x^2}}$$

Or :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2-5\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{6-\frac{5}{x^2}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \text{ par quotient de limites}$$

Donc :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2-5x+1}{6x^2-5} = \frac{1}{3}$$

✏ *On sait que :*

$$\lim_{x\to-\infty} 3x^2+2 = +\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} 4x-1 = -\infty$$

La limite de $\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2+2}{4x-1}$ *est de la forme* $\frac{+\infty}{-\infty}$ *; on doit donc factoriser au numérateur par* x^2 *et au numérateur par* x *:*

$$\frac{3x^2+2}{4x-1} = \frac{x^2\left(3\frac{x^2}{x^2}+\frac{2}{x^2}\right)}{x\left(4\frac{x}{x}-\frac{1}{x}\right)} = x \times \frac{3+\frac{2}{x^2}}{4-\frac{1}{x}}$$

Or :

$$\lim_{x\to-\infty} x = -\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3+\frac{2}{x^2}}{4-\frac{1}{x}} = \frac{3}{4} \text{ par quotient de limites}$$
$$\text{donc } \lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2+2}{4x-1} = -\infty \times \frac{3}{4} = -\infty \text{ par produit de limites}$$

Exemple 2 *Déterminer les limites suivantes :*

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+1}-\sqrt{x}$$
$$\lim_{x\to 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$$

✏ *On sait que :*

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+1} = +\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

donc $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+1}-\sqrt{x}$ *est une F.I du type* $+\infty-\infty$ *; pour lever l'indétermination, on va multiplier par la quantité conjuguée :*

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x} = \frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x+1}^2-\sqrt{x}^2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$

Or :

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+1}+\sqrt{x} = +\infty$$
$$\text{donc } \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

La limite cherchée est donc 0 *: la courbe représentant* f *a une asymptote horizontale d'équation* $y=0$ *en* $+\infty$.

✏ *On sait que :*

$$\lim_{x \to 5^+} x-5 = 0^+$$
$$\lim_{x \to 5^-} x-5 = 0^-$$
$$\lim_{x \to 5} \sqrt{x-1}-2 = 0$$

donc $\lim\limits_{x \to 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$ *est une F.I du type* $\frac{0}{0}$ *; on va à nouveau multiplier par la quantité conjuguée :*

$$\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5} = \frac{\left(\sqrt{x-1}-2\right)\left(\sqrt{x-1}+2\right)}{(x-5)\left(\sqrt{x-1}+2\right)} = \frac{x-1-4}{(x-5)\left(\sqrt{x-1}+2\right)} = \frac{x-5}{(x-5)\left(\sqrt{x-1}+2\right)} = \frac{1}{\sqrt{x-1}+2}$$

Finalement :

$$\lim_{x \to 5} \frac{1}{\sqrt{x-1}+2} = \frac{1}{\sqrt{5-1}+2} = \frac{1}{4}$$

Exemple 3 *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par :*

$$f(x) = \frac{-2}{1-x}$$

Démontrer que la courbe représentative de la fonction f admet des asymptotes dont on précisera les équations.
On constate que le dénominateur vaut 0 *quand* $x = 1$ *donc on va déterminer les limites à gauche et à droite de ce point puis les limites en* $+\infty$ *et* $-\infty$*.*

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{-2}{1-x} = \frac{-2}{0^-} = +\infty$$
$$\lim_{x \to 1^+} \frac{-2}{1-x} = \frac{-2}{0^+} = -\infty$$
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{-2}{1-x} = \frac{-2}{-\infty} = 0$$
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{-2}{1-x} = \frac{-2}{+\infty} = 0$$

Les deux premières égalités nous permettent de conclure à l'existence d'un asymptote verticale d'équation $x = 1$.
La troisième égalité nous permet de conclure à l'existence d'une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ *en* $+\infty$ *et la quatrième égalité nous permet de conclure à l'existance d'une asymptote horizontale d'équation* $y = 0$ *en* $-\infty$*.*

4 Limite d'une fonction composée

Propriétés

Soit f et u deux fonctions.
a, b et c sont des réels ou $-\infty$ ou $+\infty$:

$$x \xrightarrow{u} u(x) \xrightarrow{f} f[u(x)]$$

Si $\lim\limits_{x \to a} u(x) = b$ et $\lim\limits_{x \to b} f(x) = c$, alors $\lim\limits_{x \to a} f(u(x)) = c$.

Exemple 4 *Soit f la fonction définie sur $]\frac{1}{2};+\infty[$ par :*

$$f(x)=\sqrt{2-\frac{1}{x}}$$

Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
On a :

$$\begin{aligned} f(x) &= u(v(x)) \\ v(x) &= 2-\frac{1}{x} \\ u(x) &= \sqrt{x} \\ \lim_{x\to+\infty} v(x) &= 2 \\ \lim_{x\to 2} u(x) &= \sqrt{2} \\ \text{par composition des limites } \lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} u(v(x)) = \sqrt{2} \end{aligned}$$

5 Limites et comparaisons

5.1 Théorèmes de comparaisons

Théorèmes de comparaisons

- ✏ Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle $]a;+\infty[$, a réel, telles que pour tout $x \geq a$, $f(x) \leq g(x)$:
  - ✏ si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$.
  - ✏ si $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.
- ✏ Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle $]-\infty;a[$, a réel, telles que pour tout $x \leq a$, $f(x) \leq g(x)$
  - ✏ si $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ alors $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$.
  - ✏ si $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$ alors $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

Exemple 5 *Déterminer* $\lim\limits_{x\to+\infty} x+\sin(x)$.
La fonction $x\to\sin(x)$ n'a pas de limite en $+\infty$, en revanche on sait que :

$$-1 \leq \sin(x) \leq 1$$

On peut donc écrire :

$$x-1 \leq x+\sin(x)$$

Or :

$$\lim_{x\to+\infty} x-1=+\infty$$

Donc, en utilisant le théorème de comparaison, on en déduit que : $\lim\limits_{x\to+\infty} x+\sin(x)=+\infty$

5.2 Théorème d'encadrement

Théorèmes de comparaisons

Soit f, g et h trois fonctions définies sur un intervalle $]a;+\infty[$, a réel, telles que pour tout $x \geq a$, on a $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$.
Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = L$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = L$.
On peut évidemment adapter ce théorème à la limite en $-\infty$ et en un point réel.

Exemple 6 *Déterminer* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x\cos(x)}{x^2+1}$.
La fonction $x \to x\cos(x)$ *n'a pas de limite en* $+\infty$*, en revanche on sait que :*

$$-1 \leq \cos(x) \leq 1$$

Comme on cherche la limite en $+\infty$*, on peut supposer que* $x > 0$ *et par conséquent :*

$$\begin{aligned}
&-1 \leq \cos(x) \leq 1\\
\Leftrightarrow &-x \leq x\cos(x) \leq x\\
\Leftrightarrow &-x \leq x\cos(x) \leq x\\
\Leftrightarrow &\frac{-x}{x^2+1} \leq x\cos(x) \leq \frac{x}{x^2+1} \text{ car } x^2+1>0
\end{aligned}$$

Il nous reste à déterminer la limite en $+\infty$ *de* $\frac{x}{x^2+1}$ *qui, pour l'instant, est une FI du type* $\frac{+\infty}{+\infty}$.
On va factoriser le numérateur par x *et le dénominateur par* x^2 *:*

$$\frac{x}{x^2+1} = \frac{x\times 1}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{1}{x\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{1}{x}\times\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}$$

Or, par somme et quotient de limites :

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0\\
&\lim_{x\to+\infty} 1+\frac{1}{x^2} = 1\\
&\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = 1\\
\text{donc } &\frac{1}{x}\times\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = 0\times 1 = 0 \text{ par produit de limites}
\end{aligned}$$

Finalement, on vient de montrer que :

$$\lim_{x\to+\infty} -\frac{x}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2+1} = 0$$

donc, par théorème d'encadrement, on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\cos(x)}{x^2+1} = 0$.

6 Fonction exponentielle

6.1 Limites aux bornes

Propriétés

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$$

Preuve

✏ Pour la première égalité, on pose f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^x - x$$

Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ par somme de fonctions dérivables :

$$f'(x) = e^x - 1$$

La fonction $x \to e^x$ est croissante et elle vaut 1 pour $x = 0$, donc $f'(x)$ est positive pour $x \geq 0$: la fonction f est croissante pour $x \geq 0$:

$$f(x) \geq f(0) \Leftrightarrow f(x) \geq 1 \Leftrightarrow e^x - x \geq 1 \Leftrightarrow e^x \geq x + 1$$

Or la limite de la fonction $x \to x+1$ est $+\infty$ en $+\infty$ donc, d'après les théorèmes de comparaison, on en déduit que la fonction $x \to e^x$ admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$.

✏ Pour la seconde égalité, on écrit :

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x}$$

On peut donc écrire :

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = \lim_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

Exemple 7 *Calculer les limites suivantes :*

$$\lim_{x\to+\infty} x + e^{-3x}$$
$$\lim_{x\to-\infty} e^{1-\frac{1}{x}}$$

On a :

$$\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} e^{-3x} = \lim_{X\to-\infty} e^X = 0 \text{ en posant } X = 3x$$
$$\text{donc } \lim_{x\to+\infty} x + e^{-3x} = +\infty \text{ par somme de limites}$$

Pour la fonction suivante, on va décomposer les limites :

$$\lim_{x\to-\infty} 1 - \frac{1}{x} = 1 - 0 = 1 \text{ par somme de limites}$$
$$\lim_{x\to1} e^x = e$$
$$\text{donc, par composition de limites } \lim_{x\to-\infty} e^{1-\frac{1}{x}} = e$$

6.2 Croissantes comparées des fonctions puissances et exponentielles

Propriétés

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad \text{et pour tout entier n ,} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0 \quad \text{et pour tout entier n ,} \lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$$

Preuve

- Commençons par la première ligne.
  - On commence par la fonction $f(x) = \frac{e^x}{x}$.
    On pose $h(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$; c'est une fonction dérivable par somme de fonctions dérivables :

$$h'(x) = e^x - x$$

D'après la preuve précédente, on sait que, pour $x \geq 0$, $e^x - x \geq 1$.
Donc, pour $x \geq 0$, $h'(x) > 0$: la fonction h est donc croissante sur $x > 0$.
On peut donc écrire :

$$\forall x \geq 0 \quad h(x) \geq h(0) \Leftrightarrow \forall x \geq 0 \quad h(x) \geq 1 \Leftrightarrow \forall x \geq 0 \quad e^x - \frac{x^2}{2} \geq 1$$

Par conséquent, pour $x > 0$:

$$e^x \geq 1 + \frac{x^2}{2} \Leftrightarrow \frac{e^x}{x} \geq \frac{1}{x} + \frac{x}{2}$$

Or, par somme de limites :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} + \frac{x}{2} = +\infty$$

et finalement, d'après le théorème de comparaison des limites :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

  - Soit n un entier naturel supérieur ou égale à 1.
    On a :

$$\frac{e^x}{x^n} = \frac{\left(e^{\frac{x}{n}}\right)^n}{x^n} = \frac{\left(e^{\frac{x}{n}}\right)^n}{n^n\left(\frac{x}{n}\right)^n} = \frac{1}{n^n} \times \left(\frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}}\right)^n$$

On pose maintenant $X = \frac{x}{n}$: X tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.
On peut donc écrire :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = \lim_{X\to+\infty} \frac{1}{n^n} \times \left(\frac{e^X}{X}\right)^n = +\infty \text{ par produit de n limites}$$

- On va utiliser les résultats précédents.

✎ Commençons par xe^x :

$$xe^x = \frac{x}{e^{-x}} = -\frac{X}{e^X} \text{ avec } X = -x$$

Donc on en déduit que :

$$\lim_{x\to-\infty} xe^x = \lim_{X\to-\infty} -\frac{X}{e^X} = \lim_{X\to-\infty} -\frac{1}{\frac{e^X}{X}} = 0 \text{ par inverse de limite}$$

✎ Soit n un entier naturel supérieur ou égale à 1.

$$x^n e^x = x^n \left(e^{\frac{x}{n}}\right)^n = n^n \times \left(\frac{x}{n}\right)^n \left(e^{\frac{x}{n}}\right)^n = n^n \times \left(\frac{x}{n} e^{\frac{x}{n}}\right)^n$$

Par produit de n limites, en posant $X = \frac{x}{n}$, on en déduit que :

$$\lim_{x\to-\infty} n^n \times \left(\frac{x}{n} e^{\frac{x}{n}}\right)^n = \lim_{X\to-\infty} n^n \times \left(Xe^X\right)^n = 0$$

Exemple 8 *Calculer la limite suivante :*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x + x}{e^x - x^2}$$

On va tout de suite factoriser par e^x pour conclure rapidement illustrer la propriété précédente :

$$\frac{e^x + x}{e^x - x^2} = \frac{e^x\left(1 + \frac{x}{e^x}\right)}{e^x\left(1 - \frac{x^2}{e^x}\right)} = \frac{1 + \frac{x}{e^x}}{1 - \frac{x^2}{e^x}}$$

Par quotient de limites et en utilisant la propriété précédente :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x + x}{e^x - x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1 + \frac{x}{e^x}}{1 - \frac{x^2}{e^x}} = \frac{1+0}{1-0} = 1$$