Fonctions de référence : logarithme et exponentielle

1 Logarithme et exponentielles

Exemple 1 *On appelle* $\log(x)$ *la fonction qui associe à* $x = 10^a$ *le nombre* a*, c'est-à-dire la fonction qui à une puissance de* 10 *associe son exposant.*

1. *Quelle relation peut établir entre* $\log(x)$, $\log(y)$ *et* $\log(xy)$ *?*
2. *Nous nous intéressons maintenant à la recherche de toutes les fonctions dérivables qui transforment les produits en sommes, c'est à dire les fonctions* f *vérifiant l'égalité suivantes :*

$$f(a \times b) = f(a) + f(b) \quad (E)$$

   En posant $a = b = 1$ *dans l'égalité (E), calculer* $f(1)$.
3. *Donner une relation entre* $f\left(\frac{a}{b}\right)$, $f(a)$ *et* $f(b)$.
4. *Donner une relation entre* $f(a^n)$, $f(a)$ *et* n.
5. *Montrer que si* f *est définie pour* $a = 0$ *alors* f *est la fonction nulle.*
6. *On définit donc cette fonction sur* $]0;+\infty[$. *Soit* $a > 0$, *on pose* $g(x) = f(ax) - f(x)$ *Pourquoi peut-on dire que* g *est une fonction constante ?*
7. *En déduire la valeur de* $g'(x)$ *pour tout* $x \in]0;+\infty[$.
8. *Calculer la dérivée de* $f(ax)$ *en utilisant le taux d'accroissement.*
9. *Montrer que* $g'(1) = af'(a) - f'(1) = 0$
10. *On pose* $f'(1) = k$ *. Donner l'expression de* $f'(a)$ *en fonction de* a *et de* k.
11. *On appelle* $\ln(x)$, *le logarithme népérien, la fonction* f *vérifiant* (E) *telle que* $k = 1$.
    Donner une expression des fonctions f *en fonction de* k *et* $\ln(x)$.
12. *Quelle valeur de* k *correspond à la fonction définie en préambule,* $\log(x)$ *?*
13. *Que dire des variations de la fonction* $\ln(x)$ *?*
14. *En déduire pour quelle condition* $\ln(x) = \ln(y)$.
15. *En utilisant la question précédente ainsi que l'expression de* $\ln(x^n)$, *en déduire la limite de* $\ln(x)$ *en* 0 *et en* $+\infty$.
16. *Existe-t-il une valeur de* x *pour laquelle* $\ln(x) = 1$ *?*

Exemple 2 *On s'intéresse aux fonctions qui vérifient :*

$$f(x+y) = f(x) \times f(y)(E')$$

1. *En remplaçant x et y par 0, donner les deux valeurs $a < b$ que peut prendre $f(0)$.*
2. *Montrer que si $f(0) = a$ alors f est la fonction nulle.*
3. *On suppose donc que la $f(0) = b$. Montrer que la fonction f ne s'annule jamais. Quel est son signe?'*
4. *Pour $a \in \mathbb{R}$, on pose :*

$$h(x) = \frac{f(x+a)}{f(x)}$$

   Montrer que la fonction h est une fonction constante.
5. *En déduire que $f'(a) = \frac{f'(0)f(a)}{f(0)}$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.*
6. *On s'intéresse au cas où $f'(0) = 1$, reformuler l'égalité précédente. Dans ce cas, la fonction f est appelée fonction exponentielle* $\exp(x)$. *Que peut-on dire de* $\ln(exp(x))$ *?*
7. *Comparer e et $exp(1)$.*
8. *Pour $x > 0$, simplifier $exp(\ln(x))$.*
9. *Dans le cas général, que peut-on dire de $exp(f'(0)x)$?*
10. *Soit $a > 0$ et $f(x) = a^x$. Montrer que f est solution de (E'). En déduire une expression de a^x en fonction de exp.*
11. *Soit n un entier relatif et $x > 0$, comparer les deux expressions :*

$$\ln(x^n)$$
$$\ln\left(e^{x\ln(x)}\right)$$

   En déduire une expression de x^n au moyen de exp.
12. *Comparer e^x et $exp(x)$.*