Calcul et numération

1 Fractions rationelles

Définition 1
On appelle fraction rationelle noté $\frac{a}{b}$ l'opération a divisé par b pour a et b des entiers relatifs tels que $b \neq 0$.
Le nombre a est appelé numérateur et le nombre b dénominateur.

Propriété 1
Soit a, b, c, d et k des entiers tels que b et d sont non nuls.

$$-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$$
$$a = \frac{a}{1} = \frac{ka}{k} \text{ si } k \neq 0$$
$$\frac{a}{b} = \frac{k \times a}{k \times b} = \text{ si } k \neq 0$$
$$\frac{a}{b} = 0 \Leftrightarrow a = 0$$
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$$

Réduire une fraction c'est simplifier la fraction $\frac{a}{b}$ en la fraction $\frac{a'}{b'}$ avec $a = ka'$, $b = kb'$ avec $a' < a$ et $b' < b$.
L'opposé de la fraction $\frac{a}{b}$ c'est la fraction $-\frac{a}{b}$ tandis que l'inverse de la fraction $\frac{a}{b}$ est la fraction $\frac{b}{a}$ quand $a \neq 0$.
Diviser par le nombre b non nul, c'est multiplier par son inverse, c'est à dire multiplier par $\frac{1}{b}$.

Propriété 2 (Opération sur les fractions)
Soit a, b, c, d et k des entiers tels que b et d sont non nuls.

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$$
$$1+\frac{a}{b}=\frac{b}{b}+\frac{a}{b}=\frac{b+a}{b}$$
$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\times d+c\times b}{b\times d}$$
$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d}$$
$$k\times\frac{a}{b}=\frac{k}{1}\times\frac{a}{b}=\frac{k\times a}{b}$$
$$\frac{a}{b}\div k=\frac{a}{b}\times\frac{1}{k}=\frac{a}{b\times k}\text{ pour }k\neq 0$$
$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{a\times d}{b\times c}\text{ pour }b\neq 0$$

Propriété 3 (Opérations sur les puissances)
Soient n et m deux nombres entiers relatifs.
Soient a et b deux nombres réels :

$$a^n=\underbrace{a\times a\times..\times a}_{\text{n apparitions de a}}$$
$$a^{-n}=\frac{1}{a^n}$$
$$a^m\times a^n=a^{m+n}$$
$$\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}\text{ avec }a\neq 0$$
$$\left(a^m\right)^n=a^{n\times m}$$
$$a^m\times b^m=(a\times b)^m$$
$$\frac{a^m}{b^m}=\left(\frac{a}{b}\right)^m$$

Définition 2
Tout nombre décimal non nul peut s'écrire sous la forme $a \times 10^n$ *avec* a *un nombre vérifiant* $1 \leq a < 10$.
Cette notation est appelée notation scientifique ou écriture scientifique d'un nombre décimal.

2 Proportion

Calcul d'un effectif
Pour calculer à quel effectif correspond un pourcentage p d'une valeur N, on fait le calcul suivant :

$$N \times p \div 100 = \frac{N \times p}{100}$$

Calcul d'une proportion
Pour calculer la proportion, en pourcentage, que représente une valeur a par rapport à une valeur A, on fait le calcul suivant :

$$\frac{a}{A} \times 100$$

3 Évolutions et indices

Calcul d'une valeur finale
Une valeur V subit une augmentation de p%, la valeur finale est :

$$V \times \left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

Le nombre $1 + \frac{p}{100}$ est appelé coefficient multiplicateur associé à l'augmentation Une valeur V subit une diminution de p%, la valeur finale est :

$$V \times \left(1 - \frac{p}{100}\right)$$

Cette dernière formule n'a de sens que si la diminution est inférieure à 100%.
Le nombre $1 - \frac{p}{100}$ est appelé coefficient multiplicateur associé à la diminution.

Calcul d'une valeur initiale
Une valeur a subi une augmentation de p% pour arriver à la valeur finale V. La valeur initiale était :

$$V \div \left(1 + \frac{p}{100}\right) = \frac{V}{1 + \frac{p}{100}}$$

Une valeur a subi une diminution de p% pour arriver à la valeur finale V. La valeur initiale était :

$$V \div \left(1 - \frac{p}{100}\right) = \frac{V}{1 - \frac{p}{100}}$$

Cette dernière formule n'a de sens que si la diminution est inférieure à 100%.

Calcul d'un taux d'évolution
Une grandeur passe de la valeur A à la valeur B.
Le calcul du taux d'évolution, en pourcentage, est :

$$\frac{|B-A|}{A}\times 100$$

Le |.| désigne la valeur absolue.
La valeur absolue d'une valeur positive est cette même valeur tandis que la valeur absolue d'une valeur négative est la valeur positive qui lui correspond.
On peut aussi ne pas utiliser la valeur absolue. Dans ce cas, un taux d'évolution positif sera une augmentation et un taux d'évolution négatif une diminution.

Taux d'évolution global
Pour déterminer le taux d'évolution global d'une succession d'évolution, on multiplie les coefficients multiplicateurs associés à ces différentes évolution.
Le résultat est le coefficient multiplicateur associé au taux d'évolution global.

Combinaison de diminution et d'augmentation de même pourcentage
Une hausse de t% suivie d'une baisse de t% ne se compensent pas.
Une baisse de t% suivie d'une hausse de t% ne se compensent pas.
Dans chaque cas, le taux d'évolution global est le même :

$$\left(1+\frac{t}{100}\right)\times\left(1-\frac{t}{100}\right)=1-\frac{p^2}{10000}$$

Définition d'un indice de base 100
On étudie des effectifs dont la valeur x_i évolue en fonction des années i.
On choisit une année i_0 qui sera l'année de référence, on fera correspondre l'effectif de cette année à la valeur 100 : on appelle cela prendre pour indice de base 100 l'effectif de l'année i_0.
Cela correspond à un changement d'échelle pour rendre les variations entre les différents effectifs plus parlantes.
Pour trouver l'indice d'une année i, on fera le calcul suivant :

$$\frac{x_i}{x_{i_0}} \times 100$$

Taux d'évolution à partir des indices
On connait les indices i_1 et i_2 correspondant respectivement à des effectifs x_1 et x_2.
Le taux d'évolution entre x_1 et x_2 est :

$$\frac{|x_2 - x_1|}{x_1} = \frac{i_2}{i_1}$$

On utilisera la formule la plus adaptée à l'énoncé.
Cette formule peut nous permettre de retrouver un des quatre termes i_1, i_2, x_1 et x_2 quand on connait les trois autres.

4 Numération

4.1 Origine et principes de la numération entière

L'évolution de nos chiffres s'étale sur plusieurs millénaires : les premières traces de conservation de nombres sur des supports physiques remontent au paléolithique (-30000 ans).
La correspondance terme à terme est la prémice des calculs : elle consiste à faire correspondre chaque individu d'une population à dénombrer (par exemple les moutons d'un troupeau) à des éléments d'une autre variété (doigts, cailloux, doigts et orteils, ...). Cela permet de constater l'évolution d'une population par comparaison avec les éléments d'une autre variété.
Par exemple, pour compter les morts pendant une bataille, on pouvait demander à chaque guerrier de déposer une pierre dans un récipient et de la récupérer une fois revenu : la quantité de pierres restantes permet-

tait de matérialiser le nombre de morts sans faire de décomptes et de calculs.
Cette méthode montre ses limites quand la quantité d'éléments à dénombrer devient trop grande, des erreurs de comptage peuvent vite apparaitre. Une des solutions est de compter par paquets, par exemple des paquets de 10, puis de 100 puis de 1000 si nécessaire et ainsi de suite : c'est le système de numération en base 10. Pourquoi passe-t-on de 10 à 100 ? Parce que 100, c'est dix paquets de 10. Pourquoi passe-t-on de 100 à 1000 ? Parce que 1000, c'est dix paquets de 100. On a besoin dans ce système de 10 symboles de "base" ; le choix de cette quantité a sans nul doute possible pour origine le nombre de nos doigts.
D'autres civilisations ont fait des choix différents de base, avec des représentations plus ou moins efficaces pour les calculs, que l'on peut classifier en trois principes :

- ✏ **le principe additif**, la valeur d'un nombre se calcule en ajoutant tous les symboles qui le compose : on juxtapose les symboles en les répétant autant de fois que nécessaire.
  C'était la méthode choisie par les romains.
  Cette méthode est peu pratique pour les grands nombres assez rapidement et l'utiliser pour faire des calculs requiert un boulier ou une abaque.
- ✏ **le principe de position**, qui généralement est plus efficace pour écrire un nombre avec moins de symboles ainsi que pour faire des calculs.
  Cette méthode répose sur le fait que la valeur du symbole varie en fonction de sa place dans l'écriture du nombre ; c'est ce prinicipe que nous utilisons dans notre système décimal. Par exemple, le nombre 1111 utilise quatre fois le même symbole 1 qui n'a jamais la même valeur : le premier à gauche donne le nombre de millier, le deuxième le nombre de centaine, le troisième le nombre de dizaine et enfin le dernier le nombre d'unité. Avec le même symbole répété, on a écrit un nombre relativement grand.
- ✏ **le principe de mixte, la numération hybride** qui mélange un peu les deux. C'est le cas du premier système de numération chinois et du système babylonien.
  Nous verrons que le système décimal, à l'oral, reprend cette idée et n'a pas la régularité de l'écrit.

Concluons cette partie par des définitions pour se fixer les idées et se mettre d'accord sur les termes employés.

Définition 3
On appelle numération, n'importe quel code permettant de représenter un nombre.

Cette définition est cohérente le paragraphe avec le précédent et est même plus générale.

Définition 4 (Numération en base *b*, où *b* est un entier)

- ✏ *Dans une base b, on utilise b symboles, que nous appelons chiffres, pour écrire les nombres.*
- ✏ *par convention, quand on utilise une numération avec* $b \leq 10$*, on utilise les chiffres arabes de* 0 *à* $b-1$.
- ✏ *par convention, quand* $b > 10$*, on ajoute aux dix chiffres les lettres A,B,C,.., autant que nécessaire pour parvenir à b symboles.*
- ✏ *Un nombre écrit en base b se notera :*

$$\overline{a_n..a_1a_0}^b = a_nb^n + ... + a_1b^1 + a_0b^0$$

4.2 Base 10

C'est la numération que nous employons quand nous faisons du dénombrement et des calculs.
Elle se base sur les neuf chiffres arabes de 1 à 9 auquels on ajoute le zéro, ce dernier rend plus commode les calculs, comme nous le verrons en analysant le calcul avec les chiffres romains.
Ce système a été mis en place en Inde puis les arabes, avec l'extension de leur territoire au $VIII$ ième siècle, l'ont découvert, en ont compris l'importance et l'ont démocratisé en occident.
Ce système, écrit mathématiquement, est régulier, le passage au français ne l'est pas et garde en lui les traces d'autres systèmes ayant existés avant lui ou ayant cohabités avec lui.
Par exemple :

- ✏ onze, douze, treize, quatorze, quinze et seize sont irréguliers, il serait peut être plus régulier d'écrire, une fois avoir convenu de nommer le nombre 10 par le mot dix, "dix-un", "dix-deux"...
  Cependant, ce n'est qu'une irrégularité apparente, ces mots venant de termes latins "usés" qui eux signifiaient bien "dix-un" et ainsi de suite.
- ✏ Le nombre 20 est appelé vingt alors qu'on pourrait s'attendre à "deux dix". Cela vient d'un système en base 20 qui aurait co-existé avec le système décimal ; son origine n'est pas certaine, peut être qu'il viendrait des gaulois.
- ✏ L'influence de ce système vicésimale et sa coexistence avec le système decimal se remarquent également, entre autre, dans le nombre 90 qui se lit quatre vingt dix : on s'attendrait à lire "neuf dix". Certains francophone emploient cette décomposition "neuf dix" par le biais du terme nonante qui signifie exactement ça.

Bien d'autres remarques pourraient être faites sur le manque de régularité, en français, de notre système décimal. Nous allons plutôt rappeler quelques critères de divisibilité d'un nombre entier dans le système décimal.

Propriété 4

1. **Divisibilité par** 2 Un entier est divisible par deux si et seulement son chiffre des unités est 0, 2, 4, 6 ou 4.
2. **Divisibilité par** 3 Un entier est divisible par 3 si et seulement si la somme des chiffres qui le compose est divisible par 3.
3. **Divisibilité par** 4 Un entier est divisible par 4 si et seulement le nombre formé par son chiffre des dizaines et des unités est divisible par 4.
4. **Divisibilité par** 5 Un entier est divisible par cinq si et seulement son chiffre des unités est 0 ou 5.
5. **Divisibilité par** 8 Un entier est divisible par 8 si et seulement le nombre formé par son chiffre des centaines, son chiffre des dizaines et des unités est divisible par 8.
6. **Divisibilité par** 9 Un entier est divisible par 3 si et seulement si la somme des chiffres qui le compose est divisible par 3.

4.2.1 Base 2

Le système binaire est utilisé par les système électroniques les plus courants car les deux chiffres 0 et 1 traduisent un circuit ouvert et un circuit fermé (courant qui ne passe pas donc pas de tension et courant qui passe donc une tension).

Définition 5
Le système binaire est un moyen de représenter les nombres au moyen de deux symboles 01 *et* 1.
C'est un système de numération positionnel. Si $x = \overline{a_n..a_1a_0}^2$, *avec* $a_i \in \{0;1\}$ *:*

$$x = \sum_{i=0}^{n} a_i \times 2^i$$

On appelle **bit** les chiffres de cette numération (donc 0 et 1) : avec un bit, on peut obtenir deux états et avec n bits à placer, on peut obtenir 2^n états, autrement deux 2^n entiers.

Poser une addition en binaire :
C'est le même principe qu'en décimal, avec des retenues dès qu'on dépasse 2 :

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1} \\ 0\,1100\,1001 \\ +\,0\,1111\,1111 \\ \hline 1\,1100\,1000 \end{array}$$

Passage du décimal au binaire :
Le passage du décimal au binaire requiert de faire une succession de divisions euclidiennes par 2 .
A chaque nombre entier, on associera une unique écriture décimale. Détaillons le passage à l'écriture de 137 en binaire :

$$137 = 68 \times 2 + \boxed{1}$$
$$68 = 2 \times 34 + \boxed{0}$$
$$34 = 2 \times 17 + \boxed{0}$$
$$17 = 2 \times 8 + \boxed{1}$$
$$8 = 2 \times 4 + \boxed{0}$$
$$4 = 2 \times 2 + \boxed{0}$$
$$2 = 2 \times 1 + \boxed{0}$$
$$1 = 2 \times 0 + \boxed{1}$$

Il ne nous reste plus qu'à écrire la décomposition du nombre en base en écrivant de gauche à droite les termes obtenus de bas en haut :

$$137 = \overline{10001001}^{2}$$

4.2.2 Base 16

Le système hexadécimal est utilisé en électronique numérique et en informatique.

Définition 6
Il utilise 16 symboles, en général les chiffres arabes pour les dix premiers chiffres et les lettres A à F pour les six suivants.
C'est un système de numération positionnel. Si $x = \overline{a_n..a_1a_0}^{16}$*, avec* $a_i \in \{0;1;..9;A;B;C;D;E;F\}$ *:*

$$x = \sum_{i=0}^{n} a_i \times 16^i$$

en remplaçant A *par 10,* B *par* 11*,* C *par* 12*,* D *par* 13*,* E *par* 14 *et* F *par* 15.

Il permet de compacter les écriture du système binaire et le passage du binaire à l'hexadécimal se fait naturellement car 16 est la puissance 4 de 2.
Un nombre écrit en binaire peut se décomposer en paquets de 4 chiffres (des 0 ou des 1) et chacun des ces groupes de 4 chiffres est un nombre en hexadécimal.
Un autre avantage de la base 16 est sa correspondance facile avec l'octet qui est un mot de 8 bits. Comme $16^2 = 2^8$, il est aisé de coder la valeur d'un octet sur deux chiffres hexadécimaux.
L'un des inconvénients est la conversion directe d'un nombre décimal en hexadécimal qui n'est pas facile.

Conversions :
Sur des exemples, on va expliquer comment passer d'une écriture à l'autre :

1. $x = \overline{101011010101011001111011}^{2}$.
   On regroupe par paquets de quatre chiffres en partant de la droite :

   $$1 \quad 0101 \quad 1010 \quad 1010 \quad 1100 \quad 1111 \quad 0111$$

   Maintenant, convertissons ces six nombres en décimal puis en hexadécimal :

   $$\begin{aligned} 0001 &\Longrightarrow 1 \Longrightarrow 1 \\ 0101 &\Longrightarrow 5 \Longrightarrow 5 \\ 1010 &\Longrightarrow 10 \Longrightarrow A \\ 1010 &\Longrightarrow 10 \Longrightarrow A \\ 1100 &\Longrightarrow 12 \Longrightarrow C \\ 1111 &\Longrightarrow 15 \Longrightarrow F \\ 0111 &\Longrightarrow 7 \Longrightarrow 7 \end{aligned}$$

   On en déduit que $x = \overline{15AACF7}^{16}$.
   Pour l'écriture décimal, on fait la somme suivante : $x = 1 \times 16^6 + 5 \times 16^5 + 10 \times 16^4 + 10 \times 16^3 + 12 \times 16^2 + 15 \times 16^1 + 7 \times 16^0 = 22719735$
2. $x = \overline{D8BACF}^{16}$.
   On peut choisir de passer directement en base 2 puis en base 10.

Nous pouvons aussi d'abord passer en base 10 et après en base 2 par divisions euclidiennes successives. Nous allons faire les deux méthodes.

✏ On passe d'abord par la base 2.

$$D \Longrightarrow 13 \Longrightarrow \overline{1101}^2$$
$$8 \Longrightarrow 8 \Longrightarrow \overline{1000}^2$$
$$B \Longrightarrow 11 \Longrightarrow \overline{1011}^2$$
$$A \Longrightarrow 10 \Longrightarrow \overline{1010}^2$$
$$C \Longrightarrow 12 \Longrightarrow \overline{1100}^2$$
$$F \Longrightarrow 15 \Longrightarrow \overline{1111}^2$$

Donc $x = \overline{110110001011101011001111}^2 = 2^{23} + 2^{22} + 2^{20} + 2^{19} + 2^{15} + 2^{13} + 2^{12} + 2^{11} + 2^9 + 2^7 + 2^6 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0 = 14203599$

✏ On passe d'abord en décimal.

$$x = 13 \times 16^5 + 8 \times 16^4 + 11 \times 16^3 + 10 \times 16^2 + 12 \times 16^1 + 15 = 14203599$$

Ensuite, en faisant les divisions euclidiennes successives, on retrouve la décomposition trouvée précédemment.

3. $x = 541687$.
On peut choisir de passer directement en base 16 en faisant des divisions euclidiennes successives par 16 puis en base 2. Nous pouvons aussi d'abord passer en base 2 et après en base 16.

✏ On passe d'abord en base 2. Les calculs sont très longs, le nombre x est assez grand.

✏ On passe d'abord en base 16.
Comme 16 est plus grand que 2, il sera moins long de d'abord passer en base 16 en faisant des divisions euclidiennes successives :

$$541687 = 16 \times 33855 + 7$$
$$33855 = 16 \times 2115 + 15$$
$$2115 = 16 \times 132 + 3$$
$$132 = 16 \times 8 + 4$$
$$8 = 16 \times 0 + 8$$

Donc $x = \overline{843F7}^{16}$ puis on passe en base 2 :

$$\begin{aligned}
8 &\Longrightarrow 13 \Longrightarrow \overline{1000}^{2}\\
4 &\Longrightarrow 8 \Longrightarrow \overline{0100}^{2}\\
3 &\Longrightarrow 11 \Longrightarrow \overline{0011}^{2}\\
F &\Longrightarrow 10 \Longrightarrow \overline{1111}^{2}\\
7 &\Longrightarrow 12 \Longrightarrow \overline{0111}^{2}
\end{aligned}$$

On obtient $x = \overline{10000100001111110111}^{2}$

4.2.3 Autre base et système de numération

Le système de numération sumérien était un principe additif en base 60. Ce nombre vient de l'utilisation des deux mains et des phalanges : 5 doigts de la main gauche et les phalanges de quatre doigts de la main droite, le pouce servant à compter les phalanges.
On peut aussi parler du système de numération des mayas qui est en base 20, le nombre vient certainement du nombre de doigts et d'orteils. Ces derniers avait aussi inventé le zéro, indépendamment des indiens.
Ce zéro qui, lié à leur principe additionnel de numération, posait des problèmes au romains pour faire des calculs.
Par exemple, 1789 s'écrit $MDCCLXXXIX$ avec :

$$\begin{aligned}
M &= 1000\\
D &= 500\\
CC &= 200\\
L &= 50\\
XXX &= 30\\
IX &= 10-1 = 9
\end{aligned}$$

Le système n'est pas régulier à l'écrit, par exemple :

- ✏ DD n'existe pas mais il est remplacé par M.
- ✏ VV n'existe pas non plus, il est remplacé par X.
- ✏ en revanche CC existe
- ✏ on ne peut excéder trois signes d'affilé sauf pour M.

- ✏ 49 s'écrit $XLIX$ mais pas IL, on ne peut pas soustraire un valeur à une autre dix fois supérieure.

Toutes ces règles et ces exceptions rendent les calculs compliqués et peu fluides, même pour les additions et encore plus pour les multiplications.