## 

On considère la fonction suivante définie sur ]0;  $+\infty$ [ :

$$f(x) = 3x^2 + 4x + 3 - 15x^2 \ln(x)$$

- 1. Calculer la limite de f en  $0^+$
- **2.** Calculer la limite de f en  $+\infty$
- **3.** Calculer la dérivée de f.
- **4.** Calculer la dérivée seconde de f.
- **5.** Déterminer le signe de f''(x).
- **6.** En déduire le tableau de variation de f'(x).
- 7. Déterminer le nombre de solutions de f'(x) = 0 et en donner un encadrement d'amplitude  $10^{-2}$ .
- **8.** En déduire le tableau de variation de f(x).
- **9.** Déterminer le nombre de solutions de f(x) = 0.

Logarithme TG

## **Correction:**

1. On sait que:

$$\lim_{x \to 0^{+}} 3x^{2} + 4x + 3 = 3$$

$$\lim_{x \to 0^{+}} 15x^{2} \ln(x) = 0 \text{ par propriété du cours}$$
donc 
$$\lim_{x \to 0^{+}} 3x^{2} + 4x + 3 - 15x^{2} \ln(x) = 3$$

2.

$$\lim_{x \to +\infty} 3x^2 + 4x + 3 = +\infty$$
 
$$\lim_{x \to +\infty} -15x^2 \ln(x) = -\infty \quad \text{par propriété du cours}$$
 donc 
$$\lim_{x \to +\infty} 3x^2 + 4x + 3 - 15x^2 \ln(x) = -\infty \quad \text{par prédominance de } x^2 \ln(x)$$

3.

$$f'(x) = 6x + 4 - 15(x^{2}\ln(x))'$$

$$= 6x + 4 - 15((x^{2})'\ln(x) + x^{2} \times \ln(x)')$$

$$= 6x + 4 - 15(2x\ln(x) + x^{2} \times \frac{1}{x})$$

$$= 6x + 4 - 15(2x\ln(x) + x)$$

$$= -9x + 4 - 30\ln(x)$$

4.

$$f''(x) = -9 - 30 (x \ln(x))'$$

$$= -9 - 30 (x' \ln(x) + x \times \ln(x)')$$

$$= -9 - 30 (\ln(x) + x \times \frac{1}{x})$$

$$= -9 - 30 (\ln(x) + 1)$$

$$= -39 - 30 \ln(x)$$

5.

$$f'(x) \ge 0$$

$$-39 - 30 \ln(x) \ge 0$$

$$-30 \ln(x) \ge 39$$

$$\ln(x) \le \frac{39}{-30}$$

$$x \le e^{\frac{39}{-30}}$$

**6.** On a:

Logarithme TG

x	0	e	<u>39</u> -30	+∞
f''(x)		+	0 -	
f'(x)	4	4+3	$50e^{\frac{39}{-30}}$	-∞

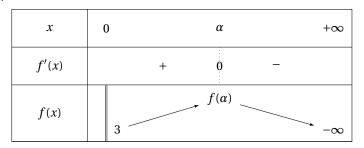
7. D'après le tableau de variation, comme 4 > 0, la fonction f' ne peut pas s'annuler sur l'intervalle  $]0; e^{\frac{39}{-30}}]$ .

Pour  $x > e^{\frac{39}{-30}}$ , la fonction est décroissante de  $4 + 30e^{\frac{39}{-30}} > 0$  vers  $-\infty$ , donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe une unique valeur  $\alpha > e^{\frac{39}{-30}}$  telle que  $f'(\alpha) = 0$ .

En utilisant la calculatrice, on trouve :

$$f'(0.27) > 0$$
  
 $f'(0.28) < 0$   
 $0.27 < \alpha < 0.28$ 

8. On a:



**9.** D'après le tableau de variation, comme 3 > 0, la fonction f ne peut pas s'annuler sur l'intervalle  $]0; \alpha]$ .

Pour  $x > \alpha$ , la fonction est décroissante de  $f(\alpha) > 0$  vers  $-\infty$ , donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe une unique valeur  $\beta > \alpha$  telle que  $f(\beta) = 0$ .

$$f(1.57) < 0$$
  
 $f(1.56) > 0$   
donc  $1.56 < \beta < 1.57$