Récurrences 5

On considère la suite :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 9u_n - 80n - 126 \\ u_0 = 27 \end{cases}$$

1. Calculer u_1.
2. On pose : $\forall n \in \mathbb{N} :\ v_n = u_n - 10n - 17$.
   Montrer que la suite (v_n) est géométrique . Donner la raison et le premier terme.
3. En déduire que l'expression de v_n en fonction de n.
4. En déduire que l'expression de u_n en fonction de n.
5. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

1. On a :

$$u_1 = 9u_0 - 80 \times 0 - 126 = 117$$

2. On a :

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= u_{n+1} - 10(n+1) - 17\\
v_{n+1} &= 9u_n - 80n - 126 - 10(n+1) - 17\\
v_{n+1} &= 9u_n - (80+10)n - 17 - 126 - 10\\
v_{n+1} &= 9u_n - 90n - 153\\
v_{n+1} &= 9\left(u_n - \frac{90}{9}n - \frac{153}{9}\right)\\
v_{n+1} &= 9\left(u_n - 10n - 17\right)\\
v_{n+1} &= 9v_n
\end{aligned}$$

3. Comme la suite (v_n) est géométrique de raison 9, on peut en déduire que :

$$\begin{aligned}
v_n &= 9^n v_0\\
v_n &= 9^n(u_0 - 17)\\
v_n &= 10 \times 9^n
\end{aligned}$$

4. On a :

$$\begin{aligned}
&v_n = u_n - 10n - 17\\
\Leftrightarrow\, &u_n = v_n + 10n + 17\\
\Leftrightarrow\, &u_n = 10 \times 9^n + 10n + 17
\end{aligned}$$

5. On doit déterminer le signe de $u_{n+1} - u_n$:

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= 10 \times 9^{n+1} + 10(n+1) + 17 - (10 \times 9^n + 10n + 17)\\
&= 10 \times 9^n(9-1) + 10n + 10 + 17 - 10n - 17\\
&= 80 \times 9^n + 10 > 0
\end{aligned}$$

Comme $u_{n+1} - u_n > 0$, on en déduit que la suite (u_n) est croissante.