☙ Évaluation du 12/03/2021 : correction

Exercice 1 *La durée de vie, exprimée en mois, d'un ordinateur portable est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.*
On suppose que l'espérance de vie d'un ordinateur est de 5 ans.

1. *Déterminer le paramètre λ .*
   Comme X compte une durée en mois, on doit convertir les anneées en mois, ce qui donne 60 *mois.*
   Ensuite le paramètre d'une loi exponentielle est l'inverse de sa moyenne, on a donc :
   $$\lambda = \frac{1}{60}$$
2. *Calculer alors $P(X \leq 48)$. Interpréter.*
   On a :
   $$P(X \leq 48) = 1 - e^{-\frac{48}{60}} \approx 0.55$$
   On vient de calculer la probabilité qu'un ordinateur portable ait une durée de vie inférieure à 4 *ans.*
3. *Calculer la probabilité que l'ordinateur ait un problème dès la première année.*
   L'ordinateur a un problème avant la première année revient à dire que sa durée de vie est inférieure à 1 *ans, soit* 24 *mois :*
   $$P(X \leq 12) = 1 - e^{-\frac{12}{60}} \approx 0.18$$

Exercice 2 *Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre 2.*

1. *Déterminer l'espérance de X.*
   L'espérance d'une loi de Poisson est son paramètre, autrement 2 *ici.*
2. *Calculer les probabilités suivantes :*
   $$P(X = 1)$$
   $$P(X \leq 1)$$
   $$P(X > 1)$$

$$P(X = 1) \approx 0.27$$
$$P(X \leq 1) \approx 0.406$$
$$P(X \geq 1) = 1 - P(X \leq 0) \approx 1 - 0.135 \approx 0.865$$

Exercice 3 *On considère la suite causale $x(n)$ définie par*

$$x(n) = \frac{1}{12}x(n-1) + \frac{1}{12}x(n-2) + u(n)$$

1. *Calculer $x(0)$, $x(1)$ et $x(2)$.*

$$\begin{aligned}
x(0) &= \frac{1}{12}x(0-1)+\frac{1}{12}x(0-2)+u(0) = \frac{1}{12}\times 0+\frac{1}{12}\times 0+1 = 1\\
x(1) &= \frac{1}{12}x(1-1)+\frac{1}{12}x(1-2)+u(1) = \frac{1}{12}\times 1+\frac{1}{12}\times 0+1 = \frac{13}{12}\\
x(2) &= \frac{1}{12}x(2-1)+\frac{1}{12}x(2-2)+u(2) = \frac{1}{12}\times \frac{13}{12}+\frac{1}{12}\times 1+1 = \frac{169}{144}
\end{aligned}$$

2. *Écrire la transformée de l'égalité définissant la suite $x(n)$. On notera $X(z)$ la transformée de $x(n)$.*

$$\begin{aligned}
X(z) &= \frac{1}{12}\frac{X(z)}{z}+\frac{1}{12}\frac{X(z)}{z^2}+\frac{z}{z-1}\\
X(z)-\frac{1}{12}\frac{X(z)}{z}-\frac{1}{12}\frac{X(z)}{z^2} &= \frac{z}{z-1}\\
X(z)\left(1-\frac{1}{12z}-\frac{1}{12z^2}\right) &= \frac{z}{z-1}\\
X(z)\times\frac{12z^2-z-1}{12z^2} &= \frac{z}{z-1}\\
X(z) &= \frac{12z^3}{(z-1)(12z^2-z-1)}
\end{aligned}$$

3. *Montrer que* $\dfrac{X(z)}{z} = \dfrac{z^2}{(z+\frac{1}{4})(z-\frac{1}{3})(z-1)}$.

$$\begin{aligned}
X(z) &= \frac{12z^3}{(z-1)(12z^2-z-1)}\\
\frac{X(z)}{z} &= \frac{12z^2}{(z-1)(12z^2-z-1)}
\end{aligned}$$

On doit factoriser le polynôme $12z^2-z-1$ et pour cela, on doit calculer son discriminant :

$$\Delta = b^2-4ac = (-1)^2-4\times 12\times(-1) = 1+48 = 48 > 0$$

Il y a donc deux racines pour la factorisation :

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1+7}{24} = \frac{1}{3}\\
x_2 &= \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1-7}{24} = -\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$12z^2-z-1 = 12\left(z-\frac{1}{3}\right)\left(z+\frac{1}{4}\right)$$

Finalement :

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{12z^2}{(z-1)(12z^2-z-1)} = \frac{12z^2}{12(z-1)\left(z-\frac{1}{3}\right)\left(z+\frac{1}{4}\right)} = \frac{z^2}{(z-1)\left(z-\frac{1}{3}\right)\left(z+\frac{1}{4}\right)}$$

4. *Déterminer les réels A, B et C pour que :* $\dfrac{X(z)}{z} = \dfrac{A}{z+\frac{1}{4}} + \dfrac{B}{z-\frac{1}{3}} + \dfrac{C}{z-1}$.

✏ *Pour A, on multiplie par* $z+\frac{1}{4}$ *:*

$$\frac{z^2}{(z-1)\left(z-\frac{1}{3}\right)} = A + \frac{B\left(z+\frac{1}{4}\right)}{z-\frac{1}{3}} + \frac{C\left(z+\frac{1}{4}\right)}{z-1}$$

On remplace z par $-\frac{1}{4}$ *et on obtient :*

$$A = \frac{3}{35}$$

✏ *Pour B, on multiplie par* $z-\frac{1}{3}$ *:*

$$\frac{z^2}{(z-1)\left(z+\frac{1}{4}\right)} = \frac{A}{z+\frac{1}{4}} + B + \frac{C\left(z-\frac{1}{3}\right)}{z-1}$$

On remplace z par $\frac{1}{3}$ *et on obtient :*

$$B = -\frac{2}{7}$$

✏ *Pour C, on multiplie par* $z-1$ *:*

$$\frac{z^2}{\left(z-\frac{1}{3}\right)\left(z+\frac{1}{4}\right)} = \frac{A(z-1)}{z+\frac{1}{4}} + B\frac{B(z-1)}{z-\frac{1}{3}} + C$$

On remplace z par 1 *et on obtient :*

$$B = \frac{6}{5}$$

5. *En déduire l'originale* $x(n)$.
En prenant l'original de chacun des termes de l'égalité de la question précédente, on obtient, en remplaçant par les valeurs de A, B et C :

$$x(n-1) = \frac{3}{35} \times \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1} u(n-1) - \frac{2}{7} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} u(n-1) + \frac{6}{5} \times u(n-1)$$

Finalement :

$$x(n) = \frac{3}{35} \times \left(-\frac{1}{4}\right)^{n} u(n) - \frac{2}{7} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n} u(n) + \frac{6}{5} \times u(n)$$

6. *Comparer avec les résultats obtenus en 1).*

$$x(0) = \frac{3}{35} \times \left(-\frac{1}{4}\right)^{0} u(0) - \frac{2}{7} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{0} u(0) + \frac{6}{5} \times u(0) = \frac{3}{35} - \frac{2}{7} + \frac{6}{5} = 1$$

$$x(1) = \frac{3}{35} \times \left(-\frac{1}{4}\right)^{1} u(1) - \frac{2}{7} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{1} u(1) + \frac{6}{5} \times u(1) = \frac{3}{35} \times \left(-\frac{1}{4}\right) - \frac{2}{7} \times \left(\frac{1}{3}\right) + \frac{6}{5} = \frac{13}{12}$$

$$x(2) = \frac{3}{35} \times \left(-\frac{1}{4}\right)^{2} u(2) - \frac{2}{7} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{2} u(2) + \frac{6}{5} \times u(2) = \frac{3}{35} \times \left(\frac{1}{16}\right) - \frac{2}{7} \times \left(\frac{1}{9}\right) + \frac{6}{5} = \frac{169}{144}$$

On trouve bien les mêmes résultats.