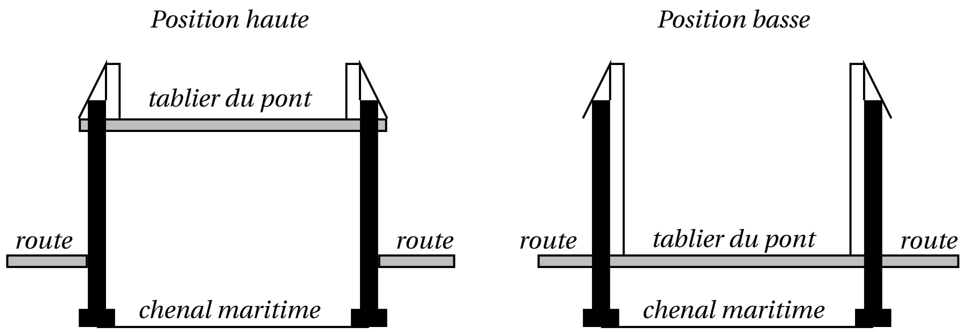
Lois de probabilités sur les lois uniformes et exponentielles : correction

Exercice 1 ***Les parties A et B sont indépendantes.***
Un pont levant enjambant un canal peu fréquenté est constitué d'un tablier qui, une fois relevé, permet le passage de bateaux de différentes tailles.



Hauteur du tablier en position haute : 9 mètres
Longueur du tablier : 30 mètres
Temps de montée du tablier : 3 minutes
Temps en position haute du tablier (hors incident) : 9 minutes
Temps de descente du tablier : 3 minutes

Partie A - Sur la route

Un automobiliste se présente devant le pont. Le tablier du pont est en position haute. *On s'intéresse ici au temps d'attente D, exprimé en minutes, de l'automobiliste avant qu'il puisse franchir le canal, pont baissé (hors incident).*

1. *Combien de temps l'automobiliste attend-il au minimum ? au maximum ?*
L'automobiliste attend au minimum 3 *minutes (quand il arrive devant le pont, le tablier commence à redescendre) et au maximum* 12 *minutes (quand il arrive devant le pont, le tablier vient d'arriver en haut).*
2. *On admet que le temps d'attente, en minutes, de l'automobiliste pour franchir le pont est une variable aléatoire D qui suit la loi uniforme un intervalle que l'on précisera. Déterminer l'espérance $E(D)$ de la variable aléatoire D et interpréter le résultat dans le contexte.*
L'intervalle sur lequel la loi uniforme est définie est $[3;12]$ *; dans ce cas, l'espérance est la moyenne des deux bornes de l'intervalle, c'est à dire* $\frac{3+12}{2} = 7.5$.
Autrement dit, le temps d'attente moyen de l'automobiliste devant le pont est de 7 *minutes et* 30 *secondes.*
3. *Calculer la probabilité que le temps d'attente de l'automobiliste ne dépasse pas 6 minutes.*
On cherche la probabilité suivante :

$$P(D \leq 6) = P(3 \leq D \leq 6) = \frac{6-3}{12-3} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

Partie B - Sur l'eau

Dans cette partie les résultats demandés seront arrondis à 10^{-2} près.

Lorsqu'un bateau est passé, le tablier du pont revient en position basse. Le temps, exprimé en heures, avant que le bateau suivant se présente devant le pont est une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,04$. Ce temps est appelé temps de latence.

1. *Déterminer l'espérance $E(T)$ de la variable aléatoire T et interpréter le résultat dans le contexte.*
L'espérance de la loi T est l'inverse de son paramètre, c'est à dire $\frac{1}{0.04} = 25$. Cette valeur est le nombre moyen d'heures qu'ils s'écoulent entre le passage de deux bateaux.

2. *On considère la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par*

$$f(x) = 0,04e^{-0,04x}.$$

   a. *Montrer que la fonction F définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $F(x) = -e^{-0,04x}$ est une primitive de f.*
   On doit dériver F pour tomber sur f :

$$F'(x) = (-e^{-0,04x})' = -(-0.04x)'e^{-0.04x} = 0.04e^{-0.04x} = f(x)$$

   Donc F est une primitive de f.

   b. *On rappelle que pour tout nombre réel t de $[0\,;\,+\infty[$, $P(T \leqslant t) = \int_0^t f(x)\,dx$.*
   Démontrer que $P(T \leqslant t) = 1 - e^{-0,04t}$.
   On a :

$$P(T \leqslant t) = \int_0^t f(x)dx = \int_0^t -e^{-0,04x}dx = [F(x)]_0^t = F(t) - F(0) = -e^{-0,04t} - (-e^{-0,04\times 0}) = -e^{-0,04t} + 1$$

3. **a.** *Calculer la probabilité que le temps de latence soit inférieur à une demi-journée, soit 12 heures.*
   On cherche :

$$P(T \leqslant 12) = 1 - e^{-0,04\times 12} = 1 - e^{-0.48} \approx 0.3812$$

   b. *Calculer la probabilité que le temps de latence soit supérieur à un jour.*
   On cherche :

$$P(T \geq 24) = 1 - P(T \leq 24) = 1 - (1 - e^{-0,04\times 24}) = e^{-0.96} \approx 0.3829$$

   c. *Calculer $P(12 \leqslant T \leqslant 24)$. Donner une interprétation du résultat.*
   On cherche :

$$P(12 \leq T \leq 24) = P(T \leq 24) - P(T \leq 12) = 1 - e^{-0.96} - (1 - e^{-0.48}) = -e^{-0.96} + e^{-0.48} \approx 0.2359$$

   Il y a une probabilité de 0.2359 que le temps qu'il s'écoule entre le passage de deux bateaux soit compris entre 12 et 24.

Exercice 2 Dans cet exercice, les résultats sont à arrondir à 10^{-3} près. Les trois parties sont indépendantes.

Partie A

Les téléphones portables intègrent des capteurs photographiques de plus en plus évolués. Ces capteurs sont fragiles et ont une durée de vie limitée.
La durée de fonctionnement sans panne, exprimée en années, d'un capteur photographique est modélisée par une variable aléatoire D qui suit la loi normale de paramètres $\mu = 4.2$ et $\sigma = 1,1$.

1. *Quelle est la durée moyenne de fonctionnement sans panne d'un capteur photographique ?*
   La durée moyenne de fonctionnement sans panne est 4.2 années, c'est à dire l'espérance de la loi normale que suit X.
2. *Déterminer la probabilité $P(3,1 \leqslant D \leqslant 5,3)$.*
   A la calculatrice, on trouve 0.683.
3. *Lors de l'achat d'un téléphone portable, la garantie pièces et main d' uvre est de deux ans. Quelle est la probabilité que la durée de fonctionnement sans panne d'un capteur photographique soit inférieure à la durée de garantie ?*
   On cherche :

$$P(D \leq 2) \approx 0.02275$$

Partie B

Lorsqu'un téléphone portable devient défectueux et qu'il est encore sous garantie, le client peut le déposer dans un point de vente agréé pour réparation ou échange contre un appareil neuf.
On s'intéresse au temps d'attente, exprimé en jours, avant le retour de l'appareil, réparé ou échangé. Ce temps peut être modélisé par une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,02$.

1. **a.** *Déterminer l'espérance $E(T)$ de la variable aléatoire T.*
   L'espérance de T est $\frac{1}{0.02} = 50$.
   b. *Interpréter cette valeur dans le contexte.*
   Cette valeur signifie qu'en moyenne, il s'écoule 50 *jours entre la vente et le retour d'un appareil réparé ou échangé.*
2. *Un téléphone portable, défectueux et encore sous garantie, a été déposé par un client dans un point de vente agréé.*
   a. *Calculer la probabilité $P(T \leqslant 7)$ et interpréter ce résultat.*
   On a :

$$P(T \leqslant 7) = \int_0^7 0.02e^{-0.02t}\,dt = \left[-e^{-0.02t}\right]_0^7 = -e^{-0.14} + 1 \approx 0.131$$

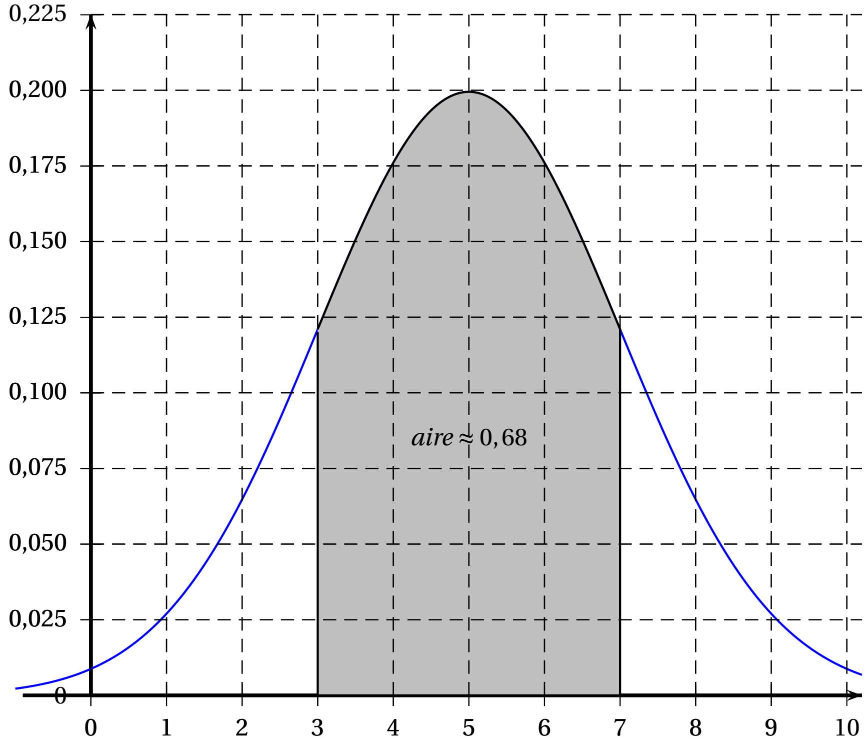
   Il y a environ 13% *de chance qu'il s'écoule moins de* 7 *jours avant qu'un appareil ne soit retourné pour être réparé ou échangé.*
   b. *Calculer la probabilité que le client doive attendre plus de 25 jours avant de récupérer son téléphone portable.*
   On cherche :

$$P(T \geq 25) = e^{-0.02\times 25} \approx 0.606$$

Exercice 3

1. *Une variable aléatoire X suit la loi uniforme sur l'intervalle [3 ; 11].*
   Calculer $P(X \leqslant 5)$ est égale à : $\frac{5-3}{11-3} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$
2. *Une variable aléatoire X suit la loi normale d'espérance 19 et d'écart-type $\sigma = 2$.*
   Caculer $P(X \leqslant 18)$ peut être égale à : 0.3085.
3. *La durée de vie, en années, d'un composant électronique est une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre λ. La durée de vie moyenne de ce composant électronique est de 10 ans. Que vaut le paramètre λ ?*
   L'espérance est égale à $\frac{1}{\lambda}$, donc $\frac{1}{\lambda} = 10$, c'est à dire $\lambda = \frac{1}{10} = 0.1$.

4. *Le graphique ci-dessous donne la courbe représentative de la densité d'une variable aléatoire suivant une loi normale de paramètres* μ *et* σ. *L'aire du domaine grisé est environ égale à* $0,68$.



A partir de ce graphique, en déduire l'espérance et l'écart type.
L'espérance est 5 *car la courbe est symétrique par rapport à* $x = 5$.
On sait que $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) = 0.68$. *Or, ici, on a* $P(3 \leq X \leq 7) = P(5 - 2 \leq X \leq 5 + 2) = 0.68$.
Par conséquent, $2\sigma = 2$ *et* $\sigma = 1$.