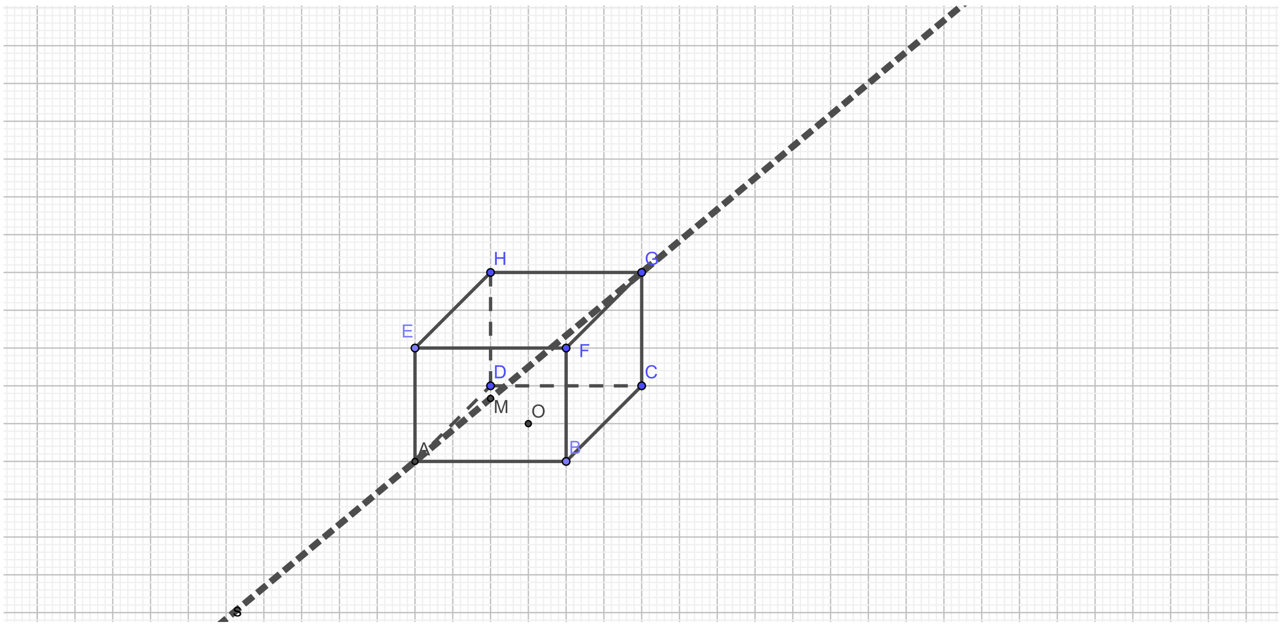
ᔓ Devoir maison 5

Exercice 1 *ABCDEFGH est un cube et O est le centre de la face ABCD.*
On définit le point M à l'aide de l'égalité suivante :

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}$$

1. *Faire une figure.*



2. *Écrire le vecteur $\overrightarrow{CM}$ à l'aide des vecteurs $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{CG}$.*
On a :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{CM} &= \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OM} \\
&= \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AE} \text{ car O milieu de [AC]} \\
&= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}\right) + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CG} \text{ car O milieu de [AC]} \\
&= \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} + \frac{1}{6}\left(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}\right) + \frac{1}{3}\overrightarrow{CG} \\
&= \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} + \frac{1}{6}\overrightarrow{CB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{CD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CG} \\
&= \frac{2}{3}\overrightarrow{CB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CG}
\end{aligned}$$

3. *Donner les coordonnées des points M, A et G dans le repère $\left(C;\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CD};\overrightarrow{CG}\right)$.*
Dans le repère $\left(C;\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CD};\overrightarrow{CG}\right)$, on a :

$$M\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$$

$$A(1;1;0)$$

$$G(0;0;1)$$

4. *Montrer que les points A, M et G sont alignées.*

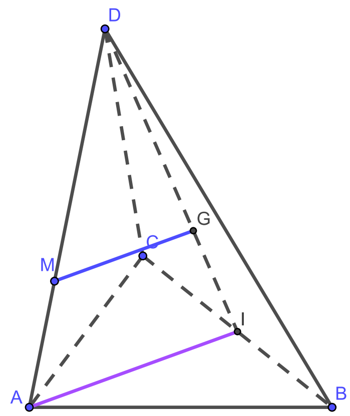
Dans le repère $\left(C;\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CD};\overrightarrow{CG}\right)$, on a :

$$\overrightarrow{AM}\left(x_M-x_A;y_M-y_A;z_M-z_A\right)=\left(\frac{2}{3}-1;\frac{2}{3}-1;\frac{1}{3}-0\right)=\left(-\frac{1}{3};-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$$
$$\overrightarrow{AG}\left(x_G-x_A;y_G-y_A;z_G-z_A\right)=(-1;-1;1)$$

Finalement, on en déduit que : $\overrightarrow{AG}=3\overrightarrow{AM}$.
Les deux droites (AG) et (AM) sont donc parallèles avec un point commun : les trois points A,G et M sont alors alignés.

Exercice 2 *On considère un tétraèdre ABCD.*

1. *Faire une figure.*



2. *Construire le milieu I de $[BC]$.*

3. *Construire le point G tel que :*

$$\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{DG}=\overrightarrow{0}$$

On justifiera en donnant une relation entre $\overrightarrow{DI}$ et $\overrightarrow{DG}$.

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{DG}=\overrightarrow{0}\\
\Leftrightarrow&\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{IG}+\overrightarrow{CI}+\overrightarrow{IG}+\overrightarrow{DG}=\overrightarrow{0}\\
\Leftrightarrow&\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{CI}+\overrightarrow{IG}+\overrightarrow{IG}+\overrightarrow{DG}=\overrightarrow{0}\\
\Leftrightarrow&\overrightarrow{0}+\overrightarrow{IG}+\overrightarrow{IG}+\overrightarrow{DG}=\overrightarrow{0}\text{ car I milieu de [BC]}\\
\Leftrightarrow&\overrightarrow{ID}+\overrightarrow{DG}+\overrightarrow{ID}+\overrightarrow{DG}+\overrightarrow{DG}=\overrightarrow{0}\\
\Leftrightarrow&2\overrightarrow{ID}+3\overrightarrow{DG}=\overrightarrow{0}\\
\Leftrightarrow&\overrightarrow{DG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{DI}
\end{aligned}$$

4. *Constuire le point M tel que :*

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$$

5. *Démontrer que $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{MG}$ sont colinéaires.*
   On sait que :

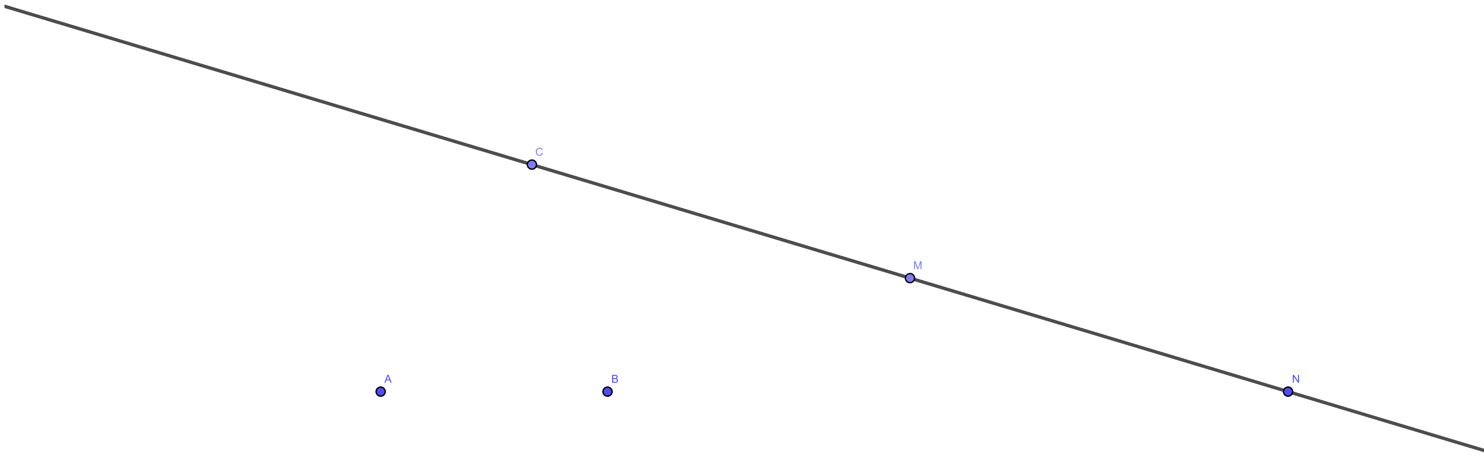
$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AI} &= \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MI}\\
&= \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GI}\\
&= \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{DI}\\
&= \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{MG} - \frac{2}{3}\overrightarrow{DI} + \overrightarrow{DI}\\
&= \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{MG} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DI}\\
&= \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DI}\right) + \overrightarrow{MG}\\
&= \frac{1}{3}\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{MG}
\end{aligned}$$

   En passant tous les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ à gauche, on obtient : $\overrightarrow{MG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$.

Exercice 3 *On considère les points de l'espace A, B et C non alignés.*
On considère les point M et N qui vérifient :

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\\
&\overrightarrow{BN} = 3\overrightarrow{AB}
\end{aligned}$$

1. *Faire une figure.*



2. *Montrer que le point C appartient à la droite (MN).*
Il suffit de montrer que les vecteurs $\overrightarrow{MC}$ et $\overrightarrow{MN}$ sont colinéaires :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} \\
&= -2\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AB} \\
&= 2\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \\
\overrightarrow{MC} &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} \\
&= -2\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} \\
&= -2\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}
\end{aligned}$$

On en déduit que : $\overrightarrow{MC} = -\overrightarrow{MN}$.
Comme ces vecteurs sont coliénaires, alors les droites (MC) et (MN) sont parallèles avec un point commun M : elles sont donc confondues et les points M, N et C sont alignés.