Résumé

I Etude de fonctions :

Dérivations et variations

- Pour déterminer les variations de f, on étudie le signe de $f'(x)$.
- Si $f'(x) \geq 0$ alors la fonction est croissante.
- Si $f'(x) \leq 0$ alors la fonction est décroissante.
- Si $f'(x)$ s'annule en changeant de signe en x_0 alors la fonction f admet un maximum ou un minimum en x_0 qui a pour valeur $f(x_0)$.
- Quand on a une exponentielle dans l'expression d'une dérivée, on va chercher à la mettre en facteur puisque son signe est toujours positif.

Primitives

- Une fonction F est une primitive de f si $F'(x) = f(x)$ pour toutes les valeurs de x de l'ensemble de définition.
- Soit $a < b$ dans l'ensemble de définition de f :

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

- Quand la fonction f est positive sur $[a;b]$, alors l'aire sous la courbe représentant f, au dessus de l'axe des abscisses et entre les abscisses a et b est égale à $\int_a^b f(x)dx$.

Primitives

Primitive	Fonction	Dérivée
kx	constante=k	0
$a\frac{t^2}{2}$	at	a
$a\frac{t^3}{3}+b\frac{t^2}{2}$	at^2+b	2at
$t\ln(t)-t$	$\ln(t)$	$\frac{1}{t}$
$\frac{1}{a}\times e^{at+b}$	e^{at+b}	ae^{at+b}
pas à connaître	$\ln(u(t))$	$\frac{u'(t)}{u(t)}$
pas à connaître	$\arctan(u(t))$	$\frac{u'(t)}{1+u(t)^2}$
pas à connaître	$e^{u(t)}$	$u'(t)e^{u(t)}$
$\sin(t)$	$\cos(t)$	$-\sin(t)$
$-\cos(t)$	$\sin(t)$	$\cos(t)$
$\frac{1}{an}\sin(ant)$	$\cos(ant)$	$-an\sin(ant)$
$-\frac{1}{an}\cos(ant)$	$\sin(ant)$	$an\cos(ant)$

Formules de dérivation

$$(u(t)\times v(t))' = u'(t)\times v(t)+u(t)\times v'(t)$$

$$\left(\frac{u(t)}{v(t)}\right)' = \frac{u'(t)\times v(t)-u(t)\times v'(t)}{v(t)^2}$$

II Transformation de Laplace

Primitives

Soit f une fonction admettant une transformée de Laplace F

$$L(f(t)U(t)) = F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$$

Tableau des transformées

Formule	Transformée de Laplace $F(p)$
$U(t)$	$\frac{1}{p}$
$tU(t)$	$\frac{1}{p^2}$
$t^nU(t)$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$e^{-at}U(t)$	$\frac{1}{p+a}$
$\cos(\omega t)U(t)$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$
$\sin(\omega t)U(t)$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
$f(t-\tau)U(t-\tau)$	$e^{-p\tau}F(p)$
$f(\alpha)U(t)$	$\frac{1}{\alpha}F\left(\frac{p}{\alpha}\right)$
$f(t)e^{-at}U(t)$	$F(p+a)$
$e^{-at}U(t)$	$\frac{1}{p+a}$
$f'(t)U(t)$	$pF(p) - f(0^+)$
$f''(t)U(t)$	$p^2F(p) - pf(0^+) - f'(0^+)$
$\int_0^t f(x)U(x)dx$	$\frac{1}{p}F(p)$
$(\alpha f(t) + g(t))U(t)$	$\alpha F(p) + G(p)$

Théorème de la valeur finale et initiale

Si les fonctions considérées ont des limites dans les conditions indiquées, alors on a :

- $\lim\limits_{p\to+\infty} pF(p) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(t)$
- $\lim\limits_{p\to 0^+} pF(p) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(t)$

Ce théorème permet de déterminer la limite de f en 0 ou en $+\infty$.

III Séries de Fourier

Définitions

Dans le cas où f est une fonction périodique de période T, on pose :

- $\omega = \frac{2\pi}{T}$: c'est ce qu'on appelle la pulsation
- $S(f)(t)$, la série de Fourier associée à f :

$$a_0(f) + \sum_{n\geq 1}^{+\infty} a_n(f)\cos(n\omega t) + b_n(f)\sin(n\omega t)$$

f périodique de période T sans parité apparente

Le coefficient a_0 et les coefficients a_n et b_n, pour $n \geq 1$, s'expriment de la façon suivante :

- $a_0(f) = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(t)dt$ =valeur moyenne de f sur une période
- pour $n \geq 1$, $a_n(f) = \frac{2}{T}\int_a^{a+T} f(t)\cos(n\omega t)dt$
- pour $n \geq 1$, $b_n(f) = \frac{2}{T}\int_a^{a+T} f(t)\sin(n\omega t)dt$

f périodique de période T paire

Le coefficient a_0 et les coefficients a_n et b_n, pour $n \geq 1$, s'expriment de la façon suivante :

- valeur moyenne de f sur une période= $a_0(f) = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)dt$
- pour $n \geq 1$, $a_n(f) = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(n\omega t)dt$
- pour $n \geq 1$, $b_n(f) = 0$

f périodique de période T impaire

Le coefficient a_0 et les coefficients a_n et b_n, pour $n \geq 1$, s'expriment de la façon suivante :

- $a_0(f) = 0$
- pour $n \geq 1$, $a_n(f) = 0$
- pour $n \geq 1$, $b_n(f) = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\sin(n\omega t)dt$

Théorème de Dirichlet

Sous de bonnes conditions, (on ne les vérifiera pas) :

$$f(t) = S(f)(t)a_0(f) + \sum_{n\geq 1}^{+\infty} a_n(f)\cos(n\omega t) + b_n(f)\sin(n\omega t)$$

Formule de Parseval

Ce théorème nous permet de calculer la valeur de certaines séries numériques.

$$\begin{aligned}
&\text{Valeur moyenne de } f^2\\
&= \text{(valeur efficace de f)}^{\,2}\\
&= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)^2\,dt\\
&= a_0(f)^2 + \frac{1}{2}\sum_{n\geq 1}^{+\infty} a_n(f)^2 + b_n(f)^2
\end{aligned}$$

Égalités à connaître

- $\cos(0) = 1$
- $\sin(0) = 0$
- $\cos(2\pi n) = 1$
- $\sin(2\pi n) = 0$
- $\cos(\pi n) = \begin{cases} 1 & \text{si n est pair} \\ -1 & \text{si n est impair} \end{cases}$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$
- $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$

Primitives à connaître

L'application de l'intégration par partie nous permet de trouver des primitives aux fonctions suivantes :

$$\begin{aligned}
t\cos(n\omega t) &\longrightarrow \frac{t}{n\omega}\sin(n\omega t) - \frac{1}{n^2\omega^2}\cos(n\omega t)\\
t\sin(n\omega t) &\longrightarrow -\frac{t}{n\omega}\cos(n\omega t) + \frac{1}{n^2\omega^2}\sin(n\omega t)
\end{aligned}$$

IV Equations différentielles : premier ordre, méthode sans Laplace

Définitions

$$a(t)y'(t)+b(t)y(t)=s(t)\ \ (E)$$
$$a(t)y'(t)+b(t)y(t)=0\ \ (E_0)$$

Ces deux équations ont du sens quand $a(t)$ ne s'annule pas.
(E) est l'équation que l'on cherche à résoudre et (E_0) est appelée équation homogène : on doit d'abord la résoudre pour trouver les solutions de (E).

Solution de (E_0)

Les solutions de (E_0) sont de la forme :

$$Ke^{-\textbf{ une primitive de } \frac{b(t)}{a(t)}}$$

avec K une constante qui dépendra des conditions initiales données par l'énoncé.

Solutions particulières

- ✏ En général, pour vérifier que $h(t)$ est une solution particulière de (E) il faut calculer :

  $$a(t)h'(t)+b(t)h(t)$$

  et vérifier que cette somme est égale à $s(t)$.

- ✏ Il se peut que l'on nous demande de déterminer une solution constante de (E).
  Cela arrive quand $a(t)=a$, $b(t)=b$ et $s(t)=s$, c'est à dire des constantes.
  Dans ce cas, on pose $h(t)=\alpha$ donc $h'(t)=0$, on sait que :

  $$\begin{aligned} & a\times h'(t)+b\times h(t)=s \\ \Leftrightarrow & a\times 0+b\times\alpha=s \\ \Leftrightarrow & b\times\alpha=s \\ \Leftrightarrow & \alpha=\frac{s}{b} \end{aligned}$$

Solutions de (E)

Les solutions de (E) sont de la forme :

$$f(t)=Ke^{-\textbf{ une primitive de } \frac{b(t)}{a(t)}}+h(t)$$

avec K une constante dont la valeur dépend de la condition initiale et $h(t)$ une solution particulière de (E).

Condition initiale

Pour trouver la solution f qui vérifie $f(x_0) = y_0$, on doit remplacer t par x_0 puis déterminer pour quelle valeur de K, on obtient y_0

V Equation différentielle du second ordre, méthode sans Laplace

Définitions

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = s(t) \ \ (E)$$
$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0 \ \ (E_0)$$

Ces deux équations ont du sens quand $a \neq 0$.
(E) est l'équation que l'on cherche à résoudre et (E_0) est appelée équation homogène : on doit d'abord la résoudre pour trouver les solutions de (E).

Solution de (E_0)

Pour résoudre (E_0), on résout l'équation second degré suivante :

$$ar^2 + br + c = 0 \ \ (S)$$

On calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ et suivant la valeur de ce discriminant les solutions de (E_0) ne seront pas le mêmes :

- ☞ Si $\Delta > 0$, (S) a deux solutions réelles distinctes :

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad r_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

  Les solutions de (E_0) sont de la forme $f_0(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$ avec $A, B \in \mathbb{R}$.

- ☞ Si $\Delta = 0$, (S) a une solution réelle double :

$$r_0 = -\frac{b}{2a}$$

  Les solutions de (E_0) sont de la forme $f_0(t) = (At + B)e^{r_0 t}$ avec $A, B \in \mathbb{R}$.

- ☞ Si $\Delta < 0$, (S) a deux solutions complexes conjuguées :

$$r_1 = \frac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a} = \alpha + i\beta \qquad r_2 = \frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a} = \alpha - i\beta$$

  Les solutions de (E_0) sont de la forme $f_0(t) = e^{\alpha t}(A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t))$ avec $A, B \in \mathbb{R}$.

Solutions particulières

- ✏ En général, pour vérifier que $h(t)$ est une solution particulière de (E) il faut calculer :

$$ah''(t)+bh'(t)+ch(t)$$

et vérifier que cette somme est égale à $s(t)$.

- ✏ Il se peut que l'on nous demande de déterminer une solution constante de (E).
Dans ce cas, on pose $h(t)=\alpha$ donc $h'(t)=h''(t)=0$, on sait que :

$$\begin{aligned}
& a\times h''(t)+b\times h'(t)+ch(t)=s \\
\Leftrightarrow & a\times 0+b\times 0+c\times\alpha=s \\
\Leftrightarrow & c\times\alpha=s \\
\Leftrightarrow & \alpha=\frac{s}{c}
\end{aligned}$$

Solutions de (E)

Les solutions de (E) sont de la forme :

$$f(t)=f_0(t)+h(t)$$

avec $h(t)$ une solution particulière de (E) et $f_0(t)$ la solution de (E_0).

Conditions initiales

Pour trouver la solution f qui vérifie $f(x_0)=y_1$ et $f'(x_0)=y_2$, on doit résoudre un système d'équations dont les inconnues sont les constantes A et B intervenant dans la détermination de la solution de (E_0).
La première équation se trouve en remplaçant t par x_0 dans $f(t)$ et en écrivant que le résultat est y_1.
La seconde équation se trouve en dérivant $f(t)$ puis en remplaçant t par x_0 dans $f'(t)$ et en écrivant que le résultat est y_2.

VI Equations différentielles en utilisant Laplace

Méthode de résolution

On détermine la transformée de Laplace de l'équation $ay'(t)+by(t)=s(t)$, de condition initiale $y(0^+)=y_0$ est :

$$a\left(pY(p)-y_0\right)+bY(p)=S(p)$$
$$\Leftrightarrow Y(p)=\frac{S(p)+ay_0}{ap+b} \text{ avec S(p) transformée de Laplace de } s(t)$$

Il reste maintenant à trouver l'original de la fonction $\frac{S(p)+ay_0}{ap+b}$ en utilisant la décomposition donnée dans l'énoncée.

Méthode de résolution

On détermine la transformée de Laplace de l'équation $ay''(t)+by'(t)+cy(t)=s(t)$, de conditions initiales $y(0^+)=y_1$ et $y'(0^+)=y_2$ est :

$$a\left(p^2Y(p)-py_1-y_2\right)+b\left(Y(p)-y_1\right)+cY(p)=S(p)$$
$$\Leftrightarrow Y(p)=\frac{S(p)+py_1+y_2}{ap^2+bp+c} \text{ avec S(p) transformée de Laplace de } s(t)$$

Il reste maintenant à trouver l'original de la fonction $\frac{S(p)+py_1+y_2}{ap^2+bp+c}$ en utilisant la décomposition donnée dans l'énoncée.

VII Probabilités et variables aléatoires

VII.1 Probabilités conditionnelles

Propriétés

Soit A et B deux événements.

$$P_A(B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \text{ probabilité de B sachant A}$$
$$P(A\cap B) = P_A(B)\times P(A)$$
$$P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

Deux événements A et B sont indépendants si et seulement si $P(A\cap B) = P(A)\times P(B)$.

VII.2 Loi binomiale

Propriétés

On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètre n et p si :

- ✏ X compte le nombre de succès d'une répétition de n épreuves de Bernouilli car deux issues.
- ✏ Ces issues sont indépendantes : soit l'énoncé le dit explicitement, soit cette indépendance est due au tirage avec remise.
- ✏ Les épreuves de Bernouilli ont toutes le même paramètre p.

L'espérance de X est alors $n \times p$: c'est le nombre moyen sur n lancers de l'apparition du caractère étudié.

Calculs

Les calculs se feront systématiquement à la calculatrice :

1. $P(X = k)$.
   Sur la TI, on fera 5 : Probabilités, 5 : Distributions, puis dans le menu des distributions, on prendra D : Binomiale Ddp.
   Le nombre d'essai sera n, la probabilité de succès p et la valeur de X sera k.

2. $P(X \leq k)$.
   Sur la TI, on fera 5 : Probabilités, 5 : Distributions, puis dans le menu des distributions, on prendra E : Binomiale FdR.
   Le nombre d'essai ou trials sera n, la probabilité p, la borne inf sera 0 et la borne sup sera k.

3. $P(X \geq k)$.
   Sur la TI, on fera 5 : Probabilités, 5 : Distributions , puis dans le menu des distributions, on prendra E : Binomiale FdR.
   Le nombre d'essai ou trials sera n, la probabilité p, la borne inf sera k et la borne sup sera n.

4. $P(i \leq X \leq j)$.
   Sur la TI, on fera 5 : Probabilitées, 5 : Distributions, puis dans le menu des distributions, on prendra E : Binomiale FdR.
   Le nombre d'essai ou trials sera n, la probabilité p, la borne inf sera i et la borne sup sera j.

VII.3 Loi de Poisson :

Propriétés

On associe cette loi à des événements qui se produisent rarement. Elle est associée à un paramètre : λ.
Son espérance sera : λ.
On écrira $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$.

Calculs

Les calculs se feront systématiquement à la calculatrice :

1. $P(X = k)$.
   Sur la TI, on fera 5 : Probabilités, 5 : Distributions, puis dans le menu des distributions, on prendra H : Poisson Ddp.
   Le nombre d'essai sera n, la probabilité de succès p et la valeur de X sera k.

2. $P(X \leq k)$.
   Sur la TI, on fera 5 : Probabilités, 5 : Distributions,puis dans le menu des distributions, on prendra I : Poisson FdR.
   Le nombre d'essai ou trials sera n, la probabilité p,la borne inf sera 0 et la borne sup sera k.

3. $P(X \geq k)$.
   Sur la TI, on fera 5 : Probabilités, 5 : Distributions, puis dans le menu des distributions, on prendra I : Poisson FdR.
   Le nombre d'essai ou trials sera n, la probabilité p, la borne inf sera k et la borne sup sera 1000.

4. $P(i \leq X \leq j)$.
   Sur la TI, on fera 5 : Probabilités, 5 : Distributions , puis dans le menu des distributions, on prendra I : Poisson FdR.
   Le nombre d'essai ou trials sera n, la probabilité p, la borne inf sera i et la borne sup sera j.

Approximation de la loi binomiale

Sous de bonnes conditions, (que nous ne vérifirons pas), on peut approcher une loi $X \sim \mathscr{B}(n, p)$ par une loi de Poisson de paramètre $\lambda = n \times p$.

VII.4 Loi normale

Propriétés

Pour une loi normale $N(\mu,\sigma)$, on a :

1. μ qui est la moyenne
2. σ qui est l'écart-type.
3. $P(X \leq \mu) = P(X \geq \mu) = 0.5$.
4. $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0.95$

Calculs

Pour $t, u \in \mathbb{R}$:

1. $P(X \leq t)$ se calcule avec normalFDR, borne inf $= -10^9$ et borne sup t.
2. $P(X \geq t)$ se calcule avec normalFDR, borne inf $= t$ et borne sup 10^9.
3. $P(u \leq X \leq t)$ se calcule avec normalFDR, lower=u et upper=t.
4. $P(\mu - h \leq Y \leq \mu + h) = t \Leftrightarrow 2P(Y \leq \mu + h) - 1 = t \Leftrightarrow P(Y \leq \mu + h) = \frac{1+t}{2}$, on trouve la valeur de $\mu + h$ en utilisant $InverseNormale$ pour les TI : surface, c'est $\frac{1+t}{2}$.

Pour accéder à normalFDR, on fera les mêmes manipulations que dans le cas de la loi binomiale mais en choisissant les menus de la loi normale.

STOP

Calculs

Une loi binomiale $\mathscr{B}(n;p)$ peut être approchée par une loi normale de moyenne $n \times p$ et d'écart-type $\sqrt{n \times p \times (1-p)}$.
Il faut bien comprendre la signification du terme approcher dans ce contexte, il faudra prendre en compte la correction de continuité.
Pour $X \sim \mathscr{B}(n,p)$ et $Y \sim N(n \times p; \sqrt{n \times p \times (1-p)})$:

- ✏ $P(X = k)$ ne sera pas approximé par $P(Y = k)$, qui est nul, mais par $P(k - 0,5 \leq Y \leq k + 0,5)$
- ✏ $P(i \leq X \leq j)$ sera approximé par $P(i - 0,5 \leq Y \leq j + 0.5)$
- ✏ $P(X \geq i)$ sera approximé par $P(Y \geq i - 0,5)$.
- ✏ $P(X \leq i)$sera approximé par $P(Y \leq i + 0.5)$.

Dans les exercices, on demandera surtout de donner les paramètres de la loi normale par laquelle on pourra approcher la loi binomiale.

VIII Nombres complexes :

Convention

Dans les sujets de BTS, le nombre complexe i sera noté j : on a donc $j^2 = -1$.

Forme algébrique

Un nombre z appartient à l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ s'il s'écrit de la façon suivante :

$$z = a + i \times b \text{ avec } a \in \mathbb{R} \text{ et } b \in \mathbb{R}$$

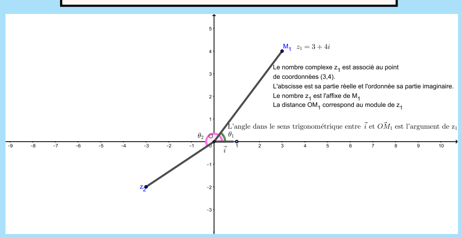
Cette représentation de z est appelé écriture algébrique de z :

- ✏ le nombre a est appelé partie réelle de z.
- ✏ le nombre b est appelé partie imaginaire de z.

Conjugué d'un nombre complexe

On appelle conjugué du nombre complexe $z = a + i \times b$ le nombre complexe noté $\bar{z}$ qui s'écrit $\bar{z} = a - ib$.

Forme trigonométrique



On peut relier le nouveau sytème de coordonnées à l'ancien de la façon suivante :

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$\cos(\theta) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$
$$\sin(\theta) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$
$$z = |z|\,(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$$

La dernière écriture s'appelle forme trigonométrique de z.

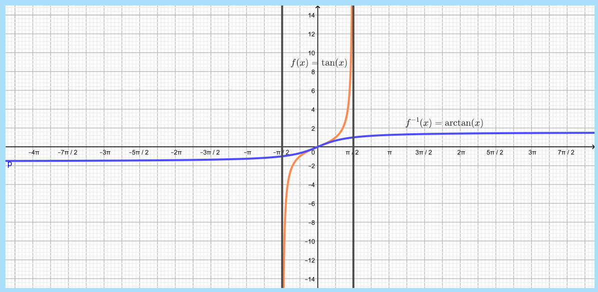
Rappels

La fonction $\tan(\theta)$ est définie sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ et elle est y est strictement croissante de $-\infty$ à $+\infty$.
On peut la définir sur d'autre intervalle mais elle perdra les propriétés qu'elles partagent avec la fonction suivante :

Propriétés de arctan

La fonction arctan(x) est définie sur $\mathbb{R}$ et elle y est strictement croissante de $-\frac{\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{2}$, elle vérifie les propriétés suivantes :

$$\tan(\arctan(x)) = x \text{ pour } x \in \mathbb{R}$$
$$\arctan(\tan(x)) = x \text{ pour } x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$$



Expression de θ

- Pour $a > 0$:

$$\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

- Pour $a < 0$:

$$\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) - \pi$$

- si $b = 0$ Dans cas, le nombre complexe est un imaginaire pur : son argument est $\frac{\pi}{2}$ si $b > 0$ et $-\frac{\pi}{2}$ si $b > 0$.

Forme exponentielle

La fonction exponentielle dont nous avons déjà parlée a des propriétés semblables aux fonctions puissances vues au collège. En dédurie les simplifications des expressions suivantes :

- $e^x \times e^y$
- $\frac{1}{e^x}$
- $\frac{e^x}{e^y}$

On s'est rendu compte d'un lien entre les propriétés des fonctions trigonométriques et celle de l'exponentielle qui amènent à poser :

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

Généralisation

$$|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2|$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1}{|z_2|}$$

$$\arg(z_1 \times z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$$

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$$

Logarithme

La fonction logarithme notée $\ln(x)$ ou la fonction logarithme décimal notée $\frac{\ln(x)}{\ln(10)}$ présente les mêmes propriétés que l'argument d'un nombre complexe :

- ✏ $\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$
- ✏ $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
- ✏ $\ln(a^n) = n\ln(a)$