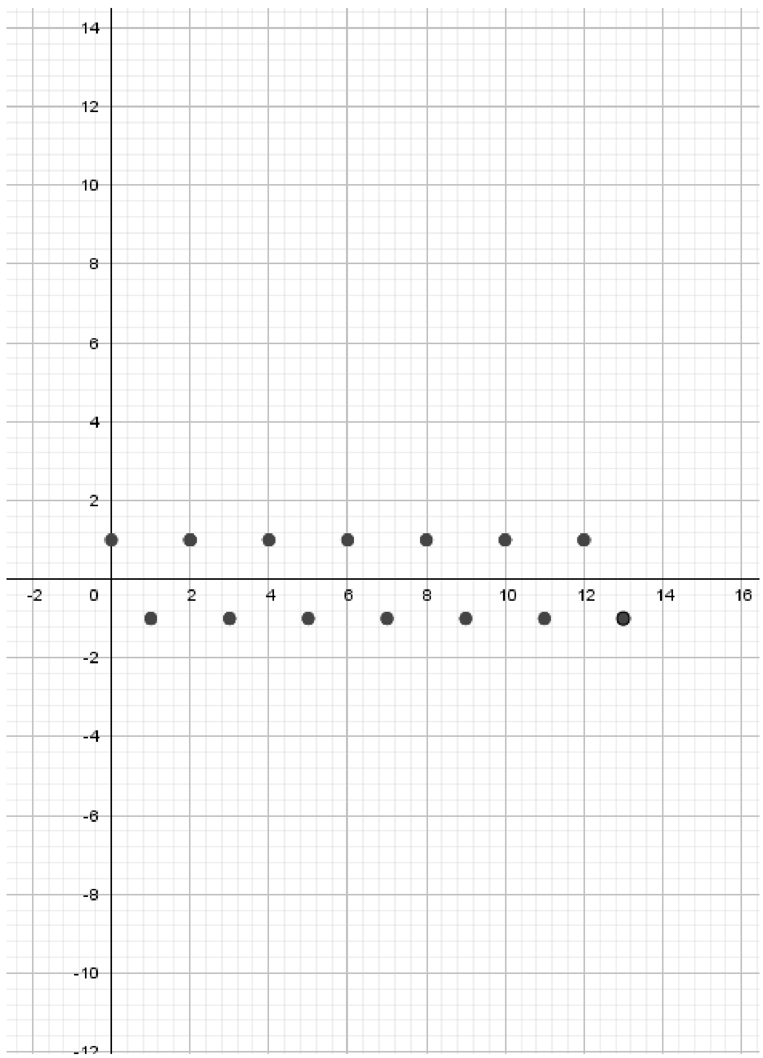
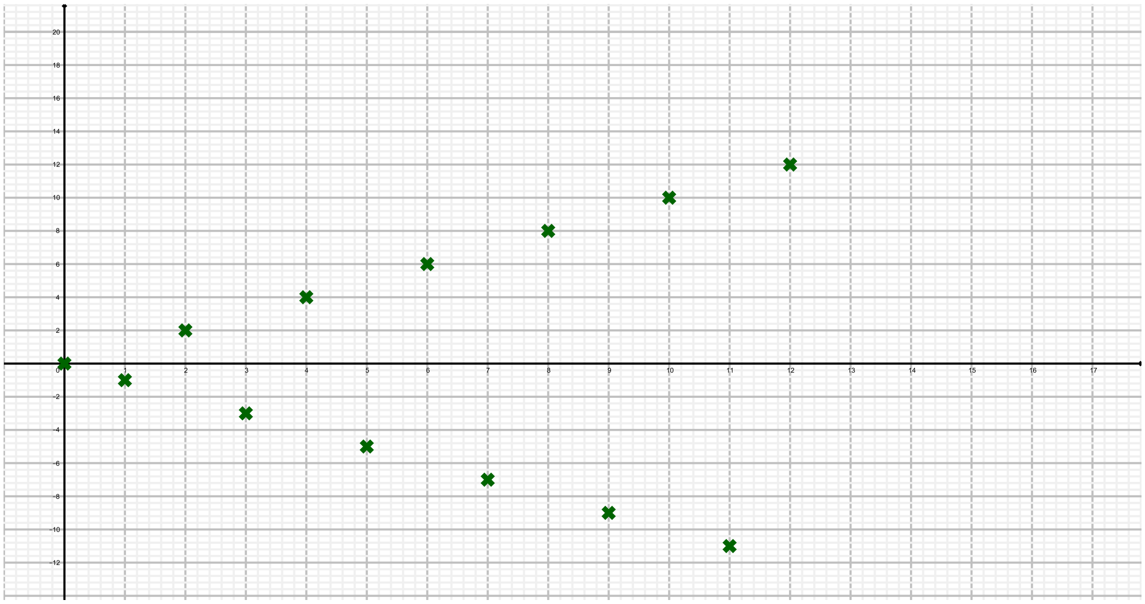
☙ Suites : correction de l'activité sur les limites

Exemple 1 *Pour chacune des courbes qui suivent, choisir une ou plusieurs des propriétés ci-dessous :*

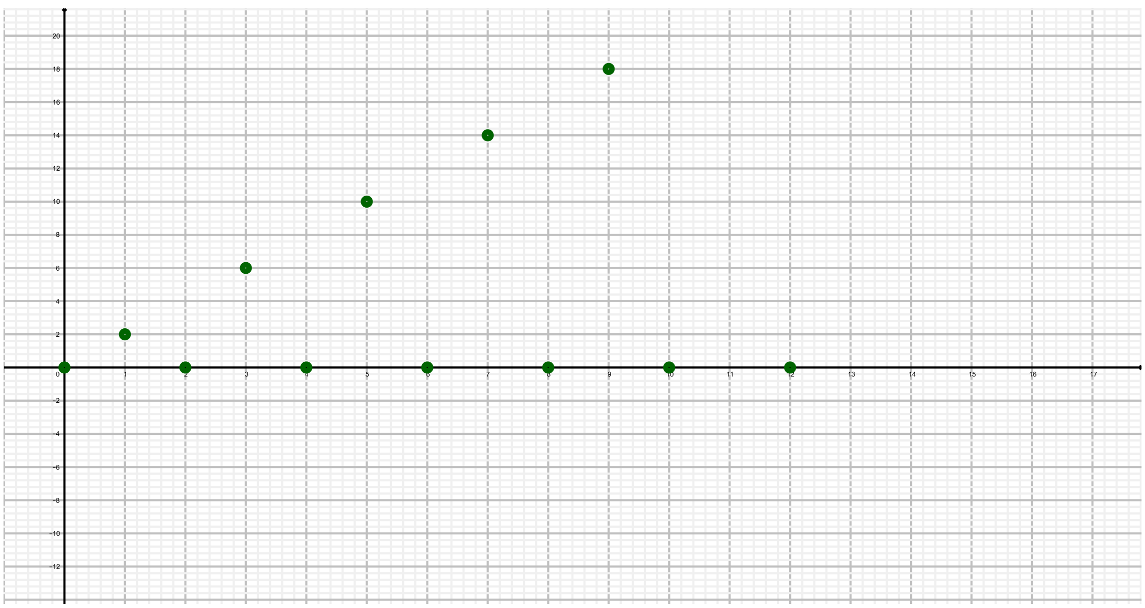
- ✏ (u_n) *a pour une limite finie* l *(que l'on précisera).*
- ✏ (u_n) *a pour limite* $+\infty$.
- ✏ (u_n) *a pour limite* $-\infty$.
- ✏ (u_n) *est croissante.*
- ✏ (u_n) *est décroissante.*
- ✏ (u_n) *est minorée.*
- ✏ (u_n) *est majorée.*
- ✏ (u_n) *est bornée.*



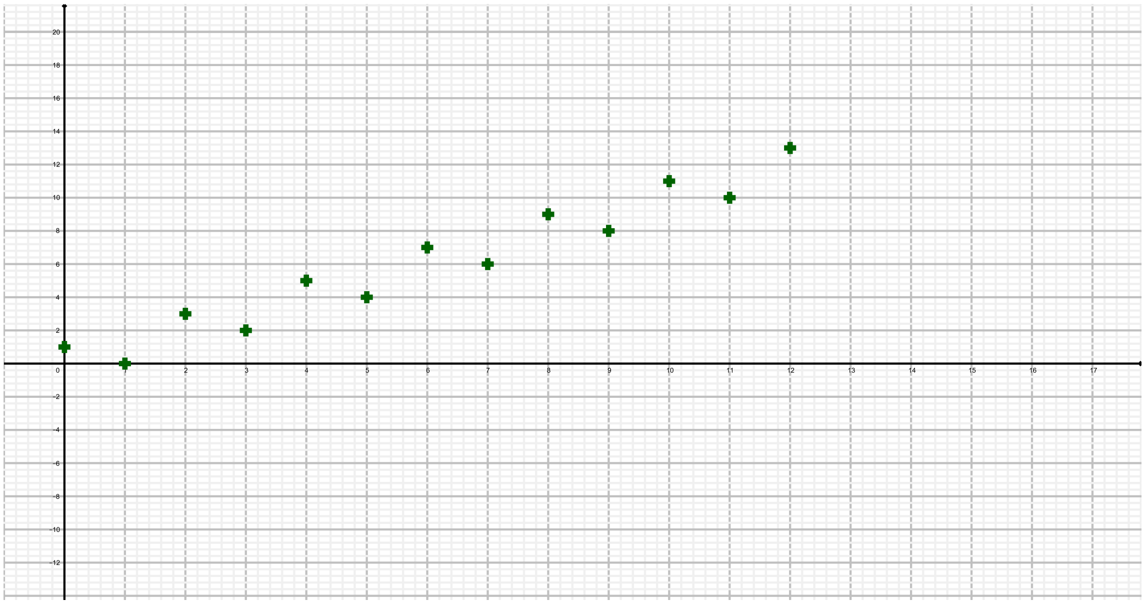
(u_n) *est minorée.*
(u_n) *est majorée.*
(u_n) *est bornée.*



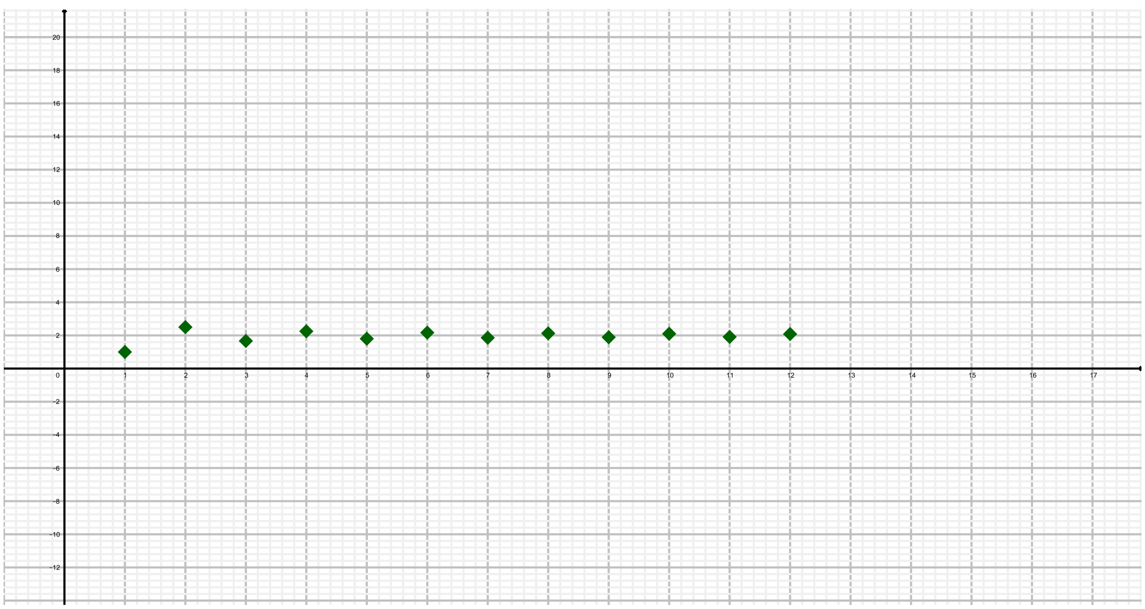
Aucune ne convient



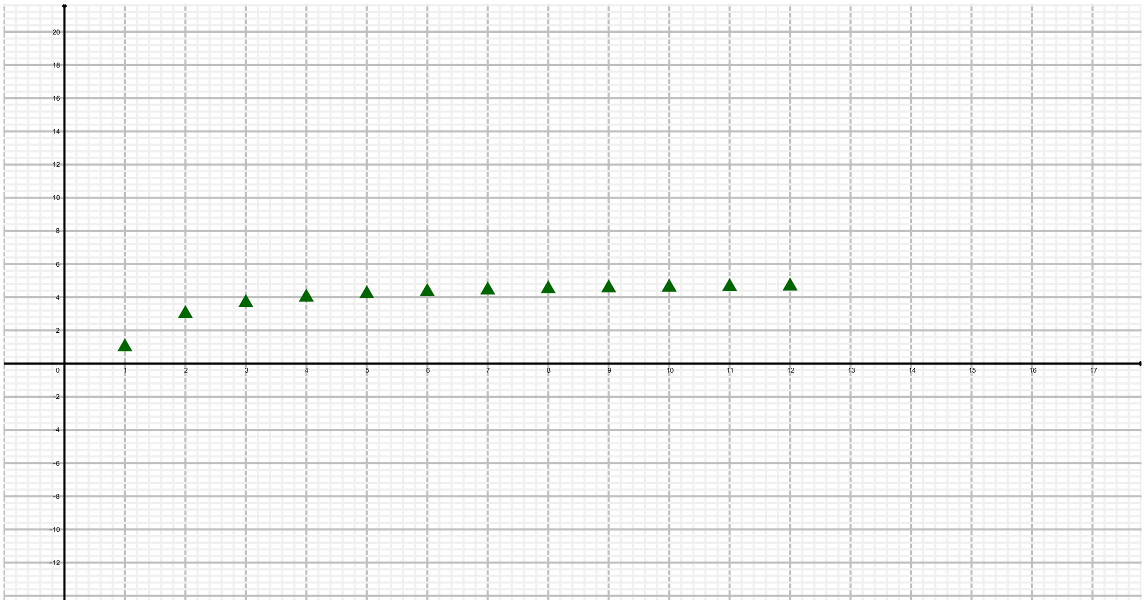
(u_n) est minorée.



(u_n) a pour limite $+\infty$.
(u_n) est minorée.



(u_n) a pour une limite 2.
(u_n) est minorée.
(u_n) est majorée.
(u_n) est bornée.



(u_n) a pour une limite finie 5.
(u_n) est croissante.
(u_n) est minorée.
(u_n) est majorée.
(u_n) est bornée.

Exemple 2 *Préciser si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses :*

- ✏ *Si une suite est croissante, alors elle n'est pas majorée.FAUX; exemple 6*
- ✏ *Si une suite n'est pas majorée, alors elle est croissante.FAUX; exemple 2*
- ✏ *Si une suite n'est pas croissante, alors elle est décroissante.FAUX; exemple 2*
- ✏ *Si une suite n'est pas majorée, alors elle est minorée.FAUX; exemple 2*
- ✏ *Si une suite n'a pas pour limite $+\infty$ ou $-\infty$, alors elle a une limite finie.FAUX : exemple 1*
- ✏ *Si une suite n'a pas de limite finie l, alors elle a pour limite $+\infty$ ou $-\infty$.FAUX : exemple 1*
- ✏ *Si une suite a une limite finie l, alors elle est bornée.VRAI*
- ✏ *Si une suite est bornée, alors elle a une limite finie l.FAUX : exemple 1*
- ✏ *Si une suite est croissante, alors elle a pour limite $+\infty$.FAUX : exemple 6*
- ✏ *Si une suite a pour limite $+\infty$, alors elle est croissante.FAUX : exemple 4*
- ✏ *Si une suite a pour limite $+\infty$, alors elle n'est pas majorée.VRAI*
- ✏ *Si une suite n'est pas majorée, alors elle a pour limite $+\infty$.FAUX : exemple 3*

Exemple 3 *On considère la suite (u_n) définie par :*

$$u_n = \frac{2n^2+4}{n^2+3}$$

1. *Écrire un algorithme qui calcule et affiche les 20 premiers termes de la suite (u_n).*

```
def termes(n):
    l=[]
    for i in range(0,n):
        u=(2*i**2+4)/(i**2+3)
        l=l+[u]
    return l
```

   Ensuite il suffit de remplacer n par 20.

2. *En faisant fonctionner l'algorithme, conjecturer quant à la limite l de cette suite.*

```
In [19]: termes(20)
Out[19]:
[1.3333333333333333,
 1.5,
 1.7142857142857142,
 1.8333333333333333,
 1.894736842105263,
 1.9285714285714286,
 1.9487179487179487,
 1.9615384615384615,
 1.9701492537313432,
 1.9761904761904763,
 1.9805825242718447,
 1.9838709677419355,
 1.9863945578231292,
 1.9883720930232558,
 1.9899497487437185,
 1.9912280701754386,
 1.9922779922779923,
 1.9931506849315068,
 1.9938837920489296,
 1.9945054945054945]
```

On peut en conjecturer que la limite de cette suite sera 20.

3. *Démontrer ce résultat.*
On sait que :

$$\lim_{n\to+\infty} 2n^2+4 = +\infty$$
$$\lim_{n\to+\infty} n^2+3 = +\infty$$
$$\text{donc } \lim_{n\to+\infty} u_n \text{ est une FI du type } \frac{+\infty}{\infty}$$

On doit alors factoriser le numérateur et le dénominateur par leur monôme de plus degré respectif; ça sera n^2 à la fois pour le numérateur et le dénominateur :

$$\frac{2n^2+4}{n^2+3} = \frac{n^2\left(2+4\times\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(1+3\times\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{2+4\times\frac{1}{n^2}}{1+3\times\frac{1}{n^2}}$$
$$\text{or } \lim_{n\to+\infty} 2+4\times\frac{1}{n^2} = 2$$
$$\text{et } \lim_{n\to+\infty} 1+3\times\frac{1}{n^2} = 1$$
$$\text{donc } \lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{2}{1} = 2 \quad \text{par quotient de limites}$$

4. *Démontrer que cette suite est croissante.*
On sait que $u_n = f(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc il suffit de montrer que la dérivée de la fonction f est positive :

$$f(x) = \frac{2x^2+4}{x^2+3}$$
$$f'(x) = \left(\frac{2x^2+4}{x^2+3}\right)'$$
$$f'(x) = \frac{(2x^2+4)'\times(x^2+3)-(2x^2+4)\times(x^2+3)'}{(x^2+3)^2}$$
$$f'(x) = \frac{4x\times(x^2+3)-(2x^2+4)\times 2x}{(x^2+3)^2}$$
$$f'(x) = \frac{4x^3+12x-4x^2-8x)\times 2x}{(x^2+3)^2}$$
$$f'(x) = \frac{4x}{(x^2+3)^2}$$

Or cette fonction est positive pour $x \geq 0$ donc f est croissante pour $x \geq 0$; la suite (u_n) est donc croissante.

5. *Écrire un algorithme qui calcule et affiche la plus petite valeur de N telle que $l-h < u_N$, où $h>0$ est choisi par l'utilisateur.*

```
def indice(l):
    u=4/3
    n=0
    while u<2-l:
        n=n+1
        u=(2*n**2+4)/(n**2+3)
    return n
```

6. *Tester pour $h = 0.01$ puis pour $h = 0.0001$.*

```
In [22]: indice(0.1)
Out[22]: 5

In [23]: indice(0.01)
Out[23]: 15

In [24]: indice(0.0001)
Out[24]: 142
```