

☞ Suites : résumé

1 Rappels



Variation d'une suite

Soit (u_n) une suite. On dit que :

1. la suite (u_n) est croissante si, pour tout entier $n : u_{n+1} \geq u_n$.
2. la suite (u_n) est décroissante si, pour tout entier $n : u_{n+1} \leq u_n$.
3. la suite (u_n) est constante si, pour tout entier $n : u_{n+1} = u_n$.

On dira que la suite (u_n) est monotone si son sens de variation ne change pas.
Étudier la monotonie d'une suite, c'est étudier ses variations.



Variation d'une suite donnée par une formule explicite

Soit (u_n) une suite définie pour tout $n \geq p$, par :

$$u_n = f(n)$$

où f est une fonction définie au moins sur l'intervalle $[p; +\infty[$.

- ⇒ si f est croissante sur l'intervalle $[p; +\infty[$, alors la suite (u_n) est croissante à partir du rang p .
- ⇒ si f est décroissante sur l'intervalle $[p; +\infty[$, alors la suite (u_n) est décroissante à partir du rang p .



Suite convergente

Soit (u_n) une suite numérique.

Lorsque, quand n augmente indéfiniment, les termes de (u_n) se rapprochent d'un nombre réel L , on dit que la suite converge vers L .

On dit que la **limite** de u_n , lorsque n tend vers $+\infty$ est égal à L .

On écrit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$$



Suite divergente

Une suite est divergente quand elle n'est pas convergente.



Remarques

1. Une suite n'a pas forcément de limite :

$$u_n = (-1)^n$$

Cette suite a des valeurs qui alternent entre 1 et -1 : elle ne peut pas avoir de limite.

2. Une suite qui dépasse n'importe quelle valeur réelle à partir d'un certain rang sera divergente mais on dira que sa limite en $+\infty$ est $+\infty$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

3. Une suite qui est plus petite que n'importe quelle valeur réelle à partir d'un certain rang sera divergente mais on dira que sa limite en $+\infty$ est $-\infty$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$$

1.1 Suites arithmétiques



Définition par récurrence

On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmétique si il existe un nombre réel r tel que :

$$u_{n+1} = u_n + r \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Le nombre r est alors appelé raison de la suite.

Son premier terme est u_0 .



Remarques

- ⇒ il se peut que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne soit définie qu'à partir d'un certain indice n_0 , dans ce cas si :

$$u_{n+1} = u_n + r \text{ pour tout } n \geq n_0$$

alors la suite est arithmétique de raison r et le premier terme est u_{n_0} .

- ⇒ pour montrer qu'une suite est arithmétique, il faudra montrer que la différence $u_{n+1} - u_n$ est constante : cette constante sera sa raison.

Si cette différence n'est pas constante, cela montrera que la suite n'est pas arithmétique.



Formule explicite

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 .

On peut donner une expression de u_n et en fonction de n , de u_0 , de tout entier naturel p et de r :

$$u_n = u_p + (n - p)r$$

$$u_n = u_0 + nr$$



Somme des termes consécutifs

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 .

Soit p et n deux entiers tels que $0 \leq p \leq n$:

$$\sum_{i=0}^n u_i = u_0 + u_1 + \dots + u_n = \frac{(u_0 + u_n)(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=p}^n u_i = u_p + u_{p+1} + \dots + u_n = \frac{(u_p + u_n)(n-p+1)}{2}$$

1.2 Suites géométriques



Définition par récurrence

On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique si il existe un nombre réel q tel que :

$$u_{n+1} = qu_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Le nombre q est alors appelé raison de la suite.

Son premier terme est u_0 .



Remarques

⇒ Si le premier terme est nul, tous les termes de la suite sont nuls.

Si q est nul, tous les u_n sont nuls sauf éventuellement le premier terme.

⇒ il se peut que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne soit définie qu'à partir d'un certain indice n_0 , dans ce cas si :

$$u_{n+1} = qu_n \text{ pour tout } n \geq n_0$$

alors la suite est géométrique de raison q et le premier terme est u_{n_0} .

⇒ pour montrer qu'une suite est géométrique, il faudra montrer que le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est constant : cette constante sera sa raison. On aura au préalable vérifier que tous les termes de la suite étaient différents de 0.

Si ce quotient n'est pas constant, cela montrera que la suite n'est pas géométrique.



Formule explicite

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 .

On peut donner une expression de u_n et en fonction de n , de u_0 , de tout entier naturel p et de r :

$$u_n = u_p \times q^{n-p}$$

$$u_n = u_0 \times q^n$$



Somme des termes consécutifs

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 .

Soit p et n deux entiers tels que $0 \leq p \leq n$:

1. Si $q \neq 1$:

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^n u_i = u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \\ \sum_{i=p}^n u_i = u_p + u_{p+1} + \dots + u_n = u_p \times \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q} \end{cases}$$

2. Si $q = 1$:

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^n u_i = u_0 + u_1 + \dots + u_n = (n+1)u_0 \\ \sum_{i=p}^n u_i = u_p + u_{p+1} + \dots + u_n = (n-p+1)u_0 \end{cases}$$

2 Raisonnement par récurrence

2.1 Principe



Définition

Une propriété est **héréditaire** à partir du rang n_0 si lorsque pour un entier $k \geq n_0$, la propriété est vraie, alors elle est vraie pour l'entier $k + 1$.



Principe du raisonnement par récurrence

Si la propriété est :

⇒ vraie au rang n_0 (initialisation)

⇒ héréditaire à partir du rang n_0 (hérédité)

alors la propriété est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

2.2 Exemples

Exemple 1 On considère la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + 2n + 3 \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

On va montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (n+1)^2$$

Initialisation :

$$(0+1)^1 = 1 = u_0$$

La propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : On va supposer que la propriété est vraie pour un rang $n \geq 0$:

$$u_n = (n+1)^2 \text{ c'est l'hypothèse de récurrence}$$

On va maintenant montrer qu'elle est également vraie au rang $n+1$, en se servant des données de l'énoncé et de l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + 2n + 3 \text{ d'après l'énoncé} \\ &= (n+1)^2 + 2n + 3 \text{ c'est l'hypothèse de récurrence} \\ &= n^2 + 2n + 1 + 2n + 3 \\ &= n^2 + 4n + 4 \\ &= (n+2)^2 \\ &= (n+1+1)^2 \end{aligned}$$

On vient de montrer l'hérédité.

Par conséquent, on peut en conclure que la propriété est vraie pour $n \geq 0$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (n+1)^2$$

Exemple 2 On considère la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2 \\ u_0 = 2 \end{cases}$$

On va montrer par récurrence qu'elle est croissante.

Initialisation :

On doit calculer u_1 :

$$u_1 = \frac{1}{3}u_0 + 2 = \frac{1}{3} \times 2 + 2 > 2 = u_0$$

On vient de montrer l'initialisation. **Hérédité :**

On suppose que la propriété est vraie pour un rang $n \geq 0$:

$$u_{n+1} \geq u_n \quad \text{c'est l'hypothèse de récurrence}$$

On va montrer la propriété au rang $n + 1$ en utilisant l'énoncé et l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= \frac{1}{3}u_{n+1} + 2 \quad \text{c'est l'énoncé} \\ &\geq \frac{1}{3}u_n + 2 \quad \text{c'est l'hypothèse de récurrence} \\ &= u_{n+1} \end{aligned}$$

On vient de montrer l'hérédité.

Par conséquent, on peut en déduire que la suite (u_n) est croissante pour $n \geq 0$.

2.3 Inégalité de Bernoulli



Inégalité de Bernoulli

Soit un nombre réel a positif.
Pour tout entier naturel n , on a :

$$(1 + a)^n \geq 1 + na$$



Preuve au programme

Initialisation :

On a :

$$(1 + a)^0 = 1 \geq 1 + 0 \times a$$

L'initialisation est démontrée.

Hérédité :

Supposons que la propriété est vraie pour un rang $n \geq 0$:

$$(1 + a)^n \geq 1 + na \quad \text{c'est l'hypothèse de récurrence}$$

On va montrer que l'inégalité est vraie au rang $n + 1$ en utilisant l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned}(1 + a)^{n+1} &= (1 + a) \times (1 + a)^n \\ &\geq (1 + a)(1 + na) \quad \text{c'est l'hypothèse de récurrence} \\ &\geq 1 + a + na + na^2 \\ &\geq 1 + (n + 1)a \quad \text{car } a \text{ est positif}\end{aligned}$$

On vient de démontrer l'hérédité.

Par conséquent, on vient de montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (1 + a)^n \geq 1 + na$$

3 Limite d'une suite



Définitions : limite infinie

1. On dit que la suite (u_n) admet pour limite $+\infty$ si tout intervalle $]a; +\infty[$, a réel, contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang et on note :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

2. On dit que la suite (u_n) admet pour limite $-\infty$ si tout intervalle $] -\infty; b[$, b réel, contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang et on note :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$$



Algorithme de seuil :

On cherche à déterminer un rang à partir duquel une suite croissante de limite infinie est supérieure à un nombre réel A .
On doit écrire un algorithme de seuil :

Définir la fonction de seuil dont l'argument sera A .

Attribuer à n la valeur 0.

Attribuer à u la valeur u_0 donnée dans l'énoncé.

Tant que $u < A$:

n prend la valeur $n + 1$

u prend la valeur correspondant à u_{n+1}

Fin du tant que

Afficher n

L'algorithme a été donné en pseudo language, il doit être adapté au logiciel qui sera utilisé par la suite.



Suites majorées, suites minorées

1. La suite (u_n) est **majorée** s'il existe un réel M tel que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq M$.
2. La suite (u_n) est **minorée** s'il existe un réel m tel que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq m$.
3. La suite (u_n) est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.



Théorème de convergence monotone

- ⇒ Si une suite croissante est majorée alors elle est convergente.
- ⇒ Si une suite décroissante est minorée alors elle est convergente.



Suite monotone non majorée ou non minorée

1. Si une suite croissante est non majorée alors elle tend vers $+\infty$.
2. Si une suite décroissante est non minorée alors elle tend vers $-\infty$.



Preuve du premier point, au programme

Soit a un nombre réel.

Comme la suite (u_n) est non bornée, il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ pour lequel $u_{n_0} \geq a$.

Or, comme la suite est croissante, on a $u_n \geq u_{n_0} \quad \forall n \geq n_0$ et par conséquent :

$$\forall n \geq n_0, \quad u_n \geq a$$

Ce qui signifie que tout intervalle de la forme $]a; +\infty[$ contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang.

La suite (u_n) tend donc vers $+\infty$.



Définitions : limite finie

On dit que la suite (u_n) admet pour limite L si tout intervalle ouvert contenant L contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang et on note :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$$

Une telle suite est **convergente**.

Une suite qui n'est pas convergente est **divergente**.



Limites usuelles

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

4 Opérations sur les limites



Opérations sur les limites

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	0	$L \neq 0$	$L \neq 0$	$L \neq 0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	0	$L' \neq 0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + v_n$	0	$L + L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI
$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \times v_n$	0	$L \times L'$	signe de $L \infty$	-signe de $L \infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n}$	FI	$\frac{L}{L'}$	0	0	FI	FI	FI

Le terme "FI" signifie forme indéterminée. On ne peut pas prévoir le résultat de la limite sans plus d'informations, tout peut arriver. Nous allons voir sur des exemples comment lever ces indéterminations.

Exemple 3 Déterminer les limites suivantes :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 - 5n + 1 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} n - 3\sqrt{n} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5n^2 + 4}{4n^2 + 3n} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^2 + n}{n + 3} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n+2} - \sqrt{n} \end{aligned}$$

1. On sait que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 5n = +\infty$$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 - 5n + 1$ est une forme FI du type $\infty - \infty$

On ne peut pas conclure directement.

Pour lever l'indétermination, on doit factoriser par le monôme qui a le plus grand exposant et ici c'est n^2 :

$$n^2 - 5n + 1 = n^2 \left(\frac{n^2}{n^2} - 5 \times \frac{n}{n^2} + \frac{1}{n^2} \right) = n^2 \left(1 - 5 \times \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right)$$

Or :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - 5 \times \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} = 1$$

donc par produit de limites, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 - 5n + 1 = +\infty \times 1 = +\infty$

2. On sait que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 5n^2 + 4 = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 4n^2 + 3n = +\infty \text{ par somme de limites sans FI}$$

donc par quotient de limites $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5n^2 + 4}{4n^2 + 3n}$ est une FI du type $\frac{+\infty}{+\infty}$

On ne peut pas conclure directement.

Pour lever l'indétermination, on doit factoriser le numérateur par le monôme qui a le plus grand exposant, ici c'est n^2 , et le dénominateur par le monôme qui a le plus grand exposant, c'est également n^2 :

$$\frac{5n^2 + 4}{4n^2 + 3n} = \frac{n^2 \left(5 + \frac{4}{n^2} \right)}{n^2 \left(4 + \frac{3}{n} \right)} = \frac{5 + \frac{4}{n^2}}{4 + \frac{3}{n}}$$

Or :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 5 + \frac{4}{n^2} = 5$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 4 + 3 \times \frac{1}{n} = 4$$

donc par quotient de limites, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5n^2 + 4}{4n^2 + 3n} = \frac{5}{4}$

3. On sait que :

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow +\infty} n &= +\infty \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} 3\sqrt{n} &= +\infty \\ \text{donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} n - 3\sqrt{n} &\text{ est une forme FI du type } \infty - \infty\end{aligned}$$

On ne peut pas conclure directement.

Pour lever l'indétermination, on doit factoriser par le monôme qui a le plus grand exposant et ici c'est n :

$$n - 3\sqrt{n} = n \left(\frac{n}{\sqrt{n}} - 3 \times \frac{\sqrt{n}}{n} \right) = n \left(1 - 3 \times \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$$

Or :

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow +\infty} n &= +\infty \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - 3 \times \frac{1}{\sqrt{n}} &= 1 \\ \text{donc par produit de limites, } \lim_{n \rightarrow +\infty} n - 3\sqrt{n} &= +\infty \times 1 = +\infty\end{aligned}$$

4. On sait que :

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow +\infty} 3n^2 + n &= +\infty \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} n + 3 &= +\infty \text{ par somme de limites sans FI} \\ \text{donc par quotient de limites } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^2 + n}{n + 3} &\text{ est une FI du type } \frac{+\infty}{+\infty}\end{aligned}$$

On ne peut pas conclure directement.

Pour lever l'indétermination, on doit factoriser le numérateur par le monôme qui a le plus grand exposant, ici c'est n^2 , et le dénominateur par le monôme qui a le plus grand exposant, c'est n :

$$\frac{3n^2 + n}{n + 3} = \frac{n^2 \left(3 + \frac{1}{n} \right)}{n \left(1 + \frac{3}{n} \right)} = n \times \frac{3 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{3}{n}}$$

Or :

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow +\infty} n &= +\infty \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} 3 + \frac{1}{n} &= 3 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + 3 \times \frac{1}{n} &= 1 \\ \text{donc par quotient et produit de limites, } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^2 + n}{n + 3} &= \infty \times \frac{5}{4} = +\infty\end{aligned}$$

5. On sait que :

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} &= +\infty & \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n+2} &= +\infty \\ \text{donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n+2} - \sqrt{n} &\text{ est une FI du type } +\infty - \infty\end{aligned}$$

Pour lever cette indétermination, on va multiplier, au numérateur et au dénominateur, par quantité conjuguée à $\sqrt{n+2} - \sqrt{n}$:

$$\sqrt{n+2} - \sqrt{n} = \left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n} \right) \times \frac{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} = \frac{(\sqrt{n+2} - \sqrt{n})(\sqrt{n+2} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n+2}^2 - \sqrt{n}^2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} = \frac{n+2-n}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}}$$

Or :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n+2} + \sqrt{n} = +\infty \text{ par somme de limites sans FI}$$
$$\text{donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} = \frac{2}{+\infty} = 0$$

Par conséquent :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n+2} - \sqrt{n} = 0$$

5 Limites et comparaison



Théorèmes de comparaison

1. Soit (u_n) et v_n deux suites définies sur \mathbb{N} .

Si :

à partir d'un certain rang $u_n \leq v_n$

$$\text{et } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

$$\text{alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$$

2. Soit (u_n) et v_n deux suites définies sur \mathbb{N} .

Si :

à partir d'un certain rang $u_n \geq v_n$

$$\text{et } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$$

$$\text{alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$$



Preuve du premier point

Soit a un nombre réel.

Le fait que la suite (u_n) tende vers $+\infty$ implique que l'intervalle $]a; +\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang n_1 : donc pour tout $n \geq n_1$, $u_n \geq a$.

Il existe un indice n_2 à partir duquel $u_n \leq v_n$.

Posons $N = \max(n_1, n_2)$, pour tout $n \geq N$, on a :

$$n \geq n_1 \text{ et } n \geq n_2$$

$$u_n \geq a$$

$$v_n \geq u_n \geq a$$

La dernière ligne implique pour tout $n \geq N$, les termes v_n de la suite (v_n) sont dans l'intervalle $]a; +\infty[$: cela signifie que la limite de la suite (v_n) est $+\infty$.

Théorème d'encadrement

Soient (u_n) , (v_n) et (w_n) trois suites définies sur \mathbb{N} .

Si, à partir d'un certain rang :

$$\begin{aligned} u_n &\leq v_n \leq w_n \\ \text{et } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = L \\ \text{alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n &= L \end{aligned}$$

Limite d'une suite géométriques

Soit $(u_n) = (q^n)$ une suite géométrique de raison q et de premier terme 1.

q	$q \leq -1$	$-1 < q < 1$	$q = 1$	$q > +\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n$	pas de limite	0	1	$+\infty$

Preuve du cas $q > 1$

D'après le théorème de Bernoulli :

$$(1 + a)^n \geq 1 + na \quad \forall a > 0, \forall n \geq 0$$

Comme $q > 1$, on peut poser $q = 1 + a$ et alors :

$$q^n \geq 1 + n(q - 1) \quad \forall a > 0, \forall n \geq 0$$

Or :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + n(q - 1) = +\infty \text{ car } q - 1 > 0$$

Donc, d'après le théorème de comparaison des limites : $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$.

Exemple 4 Déterminer les limites suivantes :

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 + (-1)^n \\ &\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{\sin(n)}{n} \\ &\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2 \end{cases} \end{aligned}$$

1. La suite $((-1)^n)$ vaut -1 ou 1 donc les termes de la suite $(n^2 + (-1)^n)$ sont minorés par la suite $(n^2 - 1)$ dont la limite est $+\infty$. Par conséquent, par les théorèmes de comparaison des limites, on en déduit que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 + (-1)^n = +\infty$$

2. On sait que :

$$\begin{aligned} &-1 \leq \sin(n) \leq 1 \\ \text{donc } &-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin(n)}{n} \leq \frac{1}{n} \\ \text{ainsi } &1 - \frac{1}{n} \leq 1 + \frac{\sin(n)}{n} \leq 1 + \frac{1}{n} \\ \text{or } &\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1 \end{aligned}$$

Donc par le théorème d'encadrement, on en déduit que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{\sin(n)}{n} = 1$$

3. On va commencer par montrer, par récurrence, que la suite (u_n) est comprise entre 0 et 3 pour tous les $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation :

On a $u_0 = 2 \in [0; 3]$: on a bien vérifié la propriété au premier rang.

Hérédité :

On suppose que la propriété est vraie pour un rang n plus grand que 0 ; c'est à dire :

$$0 \leq u_n \leq 3$$

On va montrer que cet encadrement est encore vrai pour le rang $n + 1$:

$$0 \leq u_n \leq 3$$

$$0 \leq \frac{1}{3}u_n \leq \frac{3}{3}$$

$$1 \leq \frac{1}{3}u_n + 2 \leq 1 + 2$$

$$0 \leq \frac{1}{3}u_n + 2 = u_{n+1} \leq 3$$

L'hérédité est donc démontrée.

On en déduit que $0 \leq u_n \leq 3, \forall n \in \mathbb{N}$.

On va maintenant montrer que la suite (u_n) est croissante.

On sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = -\frac{2}{3}u_n + 2$$

$$\text{or } u_n \leq 3$$

$$\text{donc } -\frac{2}{3}u_n \geq -\frac{2}{3} \times 3 = -2$$

$$\text{ainsi } -\frac{2}{3}u_n + 2 \geq -2 + 2 = 0$$

$$\text{finalement } u_{n+1} - u_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Ce qui signifie que la suite (u_n) est croissante.

Comme elle est également majorée, on en déduit, par le théorème de convergence monotone, qu'elle converge vers $l \in \mathbb{R}$.

On reprend l'égalité établissant la définition par récurrence de la suite (u_n) et on fait tendre n vers $+\infty$ aussi bien à gauche qu'à droite; on en déduit le résultat suivant :

$$l = \frac{1}{3}l + 2 \Leftrightarrow l - \frac{1}{3}l = 2 \Leftrightarrow \frac{2}{3}l = 2 \Leftrightarrow l = \frac{2}{\frac{2}{3}} = 2 \times \frac{3}{2} = 3$$

La suite (u_n) converge donc vers 3.