

☞ Fonction logarithme 5

On considère la fonction suivante définie sur $]0; +\infty[$:

$$g(x) = 3x + 7 + 9\ln(x)$$

1. Calculer la limite de g en 0^+
2. Calculer la limite de g en $+\infty$
3. Calculer la dérivée de g .
4. Déterminer le signe de $g'(x)$.
5. En déduire le tableau de variation de $g(x)$.
6. En déduire le nombre de solutions de $g(x) = 0$ et un encadrement d'amplitude 10^{-2} de cette solution.

Correction :

1. On sait que :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} 3x + 7 = +7$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} 9\ln(x) = -\infty \text{ par propriété du cours}$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow 0^+} 3x + 7 + 9\ln(x) = -\infty$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x + 7 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 9x\ln(x) = +\infty \text{ par propriété du cours}$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x + 7 + 9\ln(x) = +\infty$$

3.

$$\begin{aligned} g'(x) &= 3 + 9 \times \frac{1}{x} \\ &= \frac{3x + 9}{x} \end{aligned}$$

4.

$$g'(x) > 0 \quad \forall x > 0$$

5. On a :

x	0 +∞	
$g'(x)$		+
$g(x)$		<div style="display: flex; align-items: center; justify-content: space-between;"> -∞ ↗ +∞ </div>

6. Comme la fonction g est continue, croissante de $-\infty$ à $+\infty$, alors, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit qu'il existe une unique solution $\alpha > 0$ tel que $g(\alpha) = 0$.

$$g(0.4) < 0$$

$$g(0.41) > 0$$

$$\text{donc } 0.4 < \alpha < 0.41$$