Combinatoires et dénombrement

1 Notion de dénombrement sur un ensemble fini

Ensemble fini

Un ensemble E est fini lorsqu'il admet un nombre fini d'éléments.
Le nombre de ses éléments est appelé le cardinal de E, on peut le noter de plusieurs manières : $Card(E)$, $|E|$ ou encore $\#E$. L'ensemble vide, noté , est un ensemble fini de cardinal 0.
Dénombrer, c'est compter le nombre d'éléments que contient un ensemble fini, autrement dit en déterminer le cardinal.

1.1 Principe additif

Définition

On dit que deux ensembles sont disjoints s'ils n'ont aucun éléments en commun.

Propriété

1. Soit E_1, E_2,..,E_n, n ensembles finis deux à deux disjoints.

$$Card\left(E_1 \cup E_2 \cup .. \cup E_n\right) = Card\left(E_1\right) + Card\left(E_2\right) + .. + Card\left(E_n\right)$$

2. Soit E_1 et E_2 deux ensembles finis :

$$Card\left(E_1 \cup E_2\right) = Card\left(E_1\right) + Card\left(E_2\right) - Card\left(E_1 \cap E_2\right)$$

Exemple 1 *Dans une classe, deux options sont proposées : latin et théâtre.*
On sait que, 16 *élèves pratiquent le latin,* 14 *le théâtre,* 5 *pratiquent les deux options et* 8 *n'en pratiquent aucune.*
: Calculer le nombre d'élèves dans cette classe.
On va définir les événements par le biais d'une lettre :

- ✏ *L le latin*
- ✏ *T le théâtre*

On sait que :

$$\begin{aligned}
Card\left(L\right) &= 16\\
Card\left(T\right) &= 14\\
Card\left(T \cap L\right) &= 5\\
Card\left(\bar{T} \cap \bar{L}\right) &= 8
\end{aligned}$$

La classe entière est l'événement $\left(L \cup T\right) \cup \left(\bar{T} \cap \bar{L}\right)$ *et les deux événements entre parenthèses sont disjoints :*

$$\begin{aligned}
&Card\left(L \cup T\right) = Card\left(L\right) + Card\left(T\right) - Card\left(L \cap T\right) = 14 + 16 - 5 = 25\\
&Card\left(\bar{T} \cap \bar{L}\right) = 8\\
\text{donc } &Card\left(\left(L \cup T\right) \cup \left(\bar{T} \cap \bar{L}\right)\right) = Card\left(L \cup T\right) + Card\left(\bar{T} \cap \bar{L}\right) = 33
\end{aligned}$$

1.2 Principe multiplicatif

Définitions

Soit E_1, E_2,..,E_n, n ensembles finis.
Le produit cartésien $E_1 \times E_2 \times .. \times E_n$ est l'ensemble des n-uplets $(a_1, a_2, .., a_n)$ où $a_1 \in E_1$, $a_2 \in E_2$ et $a_n \in E_n$.
Dans le cas où chacun des n ensembles seront identiques et égaux à E alors le produit cartésien $E \times E \times .. \times E$ sera noté E^n.

Propriété

Soit E_1, E_2,..,E_n, n ensembles finis :

$$Card\,(E_1 \times E_2 \times .. \times E_n) = Card\,(E_1) \times Card\,(E_2) \times .. \times Card\,(E_n)$$

Exemple 2 *Un restaurant propose sur sa carte 3 entrées, 4 plats de résistance et 2 desserts.*

1. *Combien de menus différents composés d'une entrée, d'un plat et d'un dessert peut-on constituer ?*
   On appelle E l'ensemble des entrées, P celui des plats et D celui des desserts.

   $$Card\,(E \times P \times D) = Card\,(E) \times Card\,(P) \times Card\,(D) = 3 \times 4 \times 2 = 24$$

   Il existe donc 24 menus différents.
2. *Même squestion si le dessert est une tarte aux pommes imposée.*
   Le troisième ensemble D est maintenant réduit à un seul élément.

   $$Card\,(E \times P \times D) = Card\,(E) \times Card\,(P) \times Card\,(D) = 3 \times 4 \times 1 = 12$$

Propriété

Soit E un ensemble fini à n éléments :

$$Card\left(E^p\right) = n^p$$

2 Arrangements et permutations

2.1 La factorielle d'un nombre

Définition

On appelle factorielle n le produit de tous les nombres entiers de 1 à n.
Et on note $n! = 1 \times 2 \times .. \times n$ qui se lit factorielle n.

Exemple 3

$$5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$$
$$1! = 1$$
$$0! = 1$$

2.2 Arrangements

Définition

Soit E un ensemble à n éléments avec $p \leq n$. Un arrangement de p éléments de E est un p-uplets d'éléments dinstincts de E.

Propriété

Dans un arrangement, l'ordre des éléments compte et les éléments ne se répètent pas.

Propriété

Soit E un ensemble à n éléments.
Le nombre d'arrangements de p éléments de E est égal à :

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Exemple 4 *Pour nettoyer un appareil électrique, un homme débranche les trois prises de couleurs différentes qui sont situées à l'arrière de l'appareil.*
Une fois nettoyées, il souhaite le replacer mais il a oublié quel etait le bon branchement des trois prises parmi les 12 entrées possibles.
Quelle est la probabilité qu'il tombe au hasard et au premier essai sur le bon branchement ? Le fait que les trois prises soient de couleurs différentes implique que l'on cherche un arrangement particulier sur tous les arrangements possibles.
Le nombre de tous les arrangements de trois prises est :

$$\frac{12!}{(12-3)} = \frac{12!}{9!} = 12 \times 11 \times 10 = 1320$$

La probabilité cherchée est donc $\frac{1}{1320}$.

2.3 Permutations

Définition

Soit E un ensemble à n éléments.
Une permutation de E est un arrangement de E à n éléments

Propriétés

Soit E un ensemble à n éléments.
Le nombre de permutations de E est égal à n!

Exemple 5 *Pour une conférence, on a invité* 12 *scientifiques :* 6 *hommes et* 6 *femmes. On attend* 5 *mathématiciens,* 3 *physiciens et* 4 *biologistes. Calculer le nombre de façons différentes de s'assoir quand :*

1. *chacune des personnes se placent au hasard.*
2. *les physiciens restent ensemble.*
3. *les hommes se placent ensemble et les femmes ensemble.*

1. *quand il s'agit de se placer au hasard, cela revient à déterminer le nombre de permutations de* 12 *personnes :* $12! = 479001600$
2. *on doit d'abord compter le nombre de façons de se placer des physiciens au sein de leur groupe : c'est le nombre de permutation de* 3 *personnes :* $3! = 6$.
   Ensuite, on voit le groupe des physiciens comme un seul conférencier ; cela revient à dire qu'il y a 10 *conférenciers, le nombre de permutations est donc* $10!$.
   Finalement, le nombre de façons différentes de s'assoir est $10! \times 3! = 21772800$
3. *il y a* $6!$ *façons de répartir les hommes ensemble,* $6!$ *façons de répartir les femmes ensemble et* $2!$ *façons de repartir les deux groupes d'hommes et femmes.*
   Finalement, le nombre de façons différentes de s'assoir est $6! \times 6! \times 2! = 1036800$.

3 Combinaisons

3.1 Nombre de combinaisons

Définitions

Soit E un ensemble à n éléments et $p \leq n$.
Une combinaison de p éléments de E est un sous-ensemble de E à p éléments.

Propriété

Soit E un ensemble à n éléments et $p \leq n$.
Le nombre de combinaison de p éléments de E est égal à :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Cette valeur s'appelle un coefficient binomial.
On a :

$$\binom{n}{0} = 1$$

$$\binom{n}{1} = n$$

$$\binom{n}{n} = 1 \qquad \binom{0}{0} = 1$$

Exemple 6 *Une classe composée de* 18 *filles et* 16 *garcons va élire les* 4 *délégués.*

1. *Combien existe de combinaison possibles pour cette élection ?*
2. *Emma dit qu'elle ne veut pas être élue si Bastien l'est. Dans ces conditions, combien existe-t-il de possibilités ?*

1. *Il y a en tout* 34 *personnes et on cherche le nombre de sous-ensembles de* 4 *éléments parmi un ensemble à* 34 *éléments.*
   Il y en a :

$$\binom{34}{4} = \frac{34!}{30! \times 4!} = \frac{34 \times 33 \times 32 \times 31}{1 \times 2 \times 3 \times 4} = 46376$$

2. *Pour répondre à la question, il nous faut dénombrer les trois sous-ensembles suivants : les sous-ensembles à quatre éléments sans Emma et Bastien ($\binom{32}{4}$), les sous-ensembles à quatre éléments sans Emma avec Bastien ($\binom{32}{3}$) et les sous-ensembles à quatre éléments sans Bastien avec Emma ($\binom{32}{3}$). Cela nous donne :*

$$\binom{32}{4}+\binom{32}{3}+\binom{32}{3}=\frac{32\times31\times30\times29}{1\times2\times3\times4}+\frac{32\times31\times30}{1\times2\times3}+\frac{32\times31\times30}{1\times2\times3}=45880$$

3.2 Coefficients binomiaux

Propriété de symétrie

Pour tout entier naturel p tel que $0\leq p\leq n$:

$$\binom{n}{p}=\binom{n}{n-p}$$

3.3 Triangle de Pascal

Propriété du triangle de Pascal

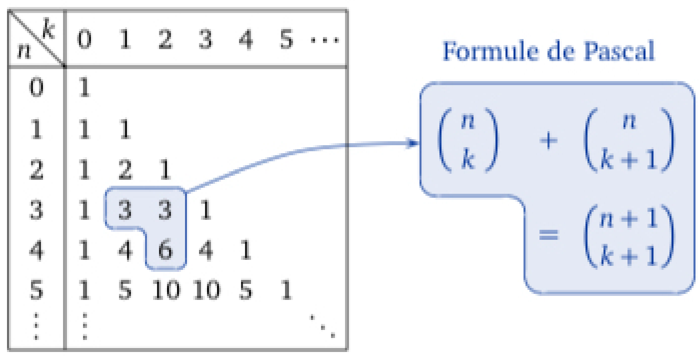
Pour tout entier naturel p tel que $0\leq p\leq n$:

$$\binom{n}{p}+\binom{n}{p+1}=\binom{n+1}{p+1}$$

Démonstration

$$\begin{aligned}\binom{n}{p}+\binom{n}{p+1}&=\frac{n!}{p!(n-p)!}+\frac{n!}{(p+1)!(n-p-1)!}\\&=\frac{n!}{p!(n-p-1)!\times(n-p)}+\frac{n!}{p!\times(p+1)(n-p-1)!}\\&=\frac{n!(p+1)}{p!(n-p-1)!\times(n-p)\times(p+1)}+\frac{n!(n-p)}{p!(p+1)(n-p-1)!\times(n-p)}\\&=\frac{n!(p+1)}{(p+1)!(n-p)!)}+\frac{n!(n-p)}{(p+1)!(n-p)!}\\&=\frac{n!(p+1)+n!(n-p)}{(p+1)!(n-p)!)}\\&=\frac{n!(p+1+n-p)}{(p+1)!(n-p)!)}\\&=\frac{n!(n+1)}{(p+1)!(n+1-(p-1))!)}\\&=\frac{(n+1)!}{(p+1)!(n+1-(p-1))!)}\\&=\binom{n+1}{(p+1)}\end{aligned}$$

Exemple 7 *Le tableau suivant illustre la méthode qui nous permet de calculer, pas à pas, les coefficients binomiaux ; c'est ce qu'on appelle le triangle de Pascal.*



$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	$\cdots$
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
$\vdots$	$\vdots$						$\ddots$

3.4 Parties d'un ensemble

Propriété

Soit E un ensemble à n éléments.
Le nombre de sous-ensemble de E est égal à :

$$\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + .. + \binom{n}{n} = 2^n$$

Démonstration