Devoir maison 1 de synthèse

1. u_n est une suite géométrique de raison $1,18$. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
On a $u_{n+1} = 1.18u_n$

2. u_{n+1} est une diminution de u_n de 14%. Quelle est la nature (u_n) ? Exprimer u_n en fonction de n quand $u_0 = 1000$.
u_n est géométrique de raison 0.86 et de premier terme : $u_n = 1000 \times 0.86^n$

3. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(x)}{x}$.
La limite est $-\infty$.

4. Déterminer $\lim\limits_{x\to +\infty} xe^{-x}$.
La limite est 0.

5. Dériver $(x+14)\ln(4x+21)$.
On a :

$$\begin{aligned}((x+14)\ln(4x+21))' &= (x+14)' \times \ln(4x+21) + (x+14) \times \ln(4x+21)' \\ &= 1 \times \ln(4x+21) + (x+14) \times \frac{(4x+21)'}{(4x+21)} \\ &= \ln(4x+21) + (x+14) \times \frac{4}{4x+21}\end{aligned}$$

6. Dériver xe^{-9x}

$$\begin{aligned}\left(xe^{-9x}\right)' &= x'e^{-9x} + x\left(e^{-9x}\right)' \\ &= 1e^{-9x} + x \times \left(-9e^{-9x}\right) \\ &= 1e^{-9x} - 9xe^{-9x} \\ &= (1-9x)e^{-9x}\end{aligned}$$

7. Montrer que $F(x) = 8e^{2x} + x^2 + x$ est une primitive de $f(x) = 16e^{2x} + 2x + 1$.
On a :

$$\begin{aligned}F'(x) &= (8e^{2x} + x^2 + x)' \\ &= 8(e^{2x})' + (x^2)' + x' \\ &= 8 \times 2e^{2x} + 2x + 1 \\ &= 16e^{2x} + 2x + 1 \\ &= f(x)\end{aligned}$$

Donc F est bien une primitive de f.

8. Montrer que $F(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ est une primitive de $f(x) = \frac{1-\ln(x)}{x^2}$.
On a :

$$\begin{aligned}F'(x) &= \left(\frac{\ln(x)}{x}\right)' \\ &= \frac{\ln(x)' \times x - x' \times \ln(x)}{x^2} \\ &= \frac{\frac{1}{x} \times x - 1\ln(x)}{x^2} \\ &= \frac{1-\ln(x)}{x^2} \\ &= f(x)\end{aligned}$$

Donc F est bien une primitive de f.

9. Déterminer le module de $3+4i$ ainsi que son argument.
On a :

$$|3+4i| = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5$$
$$\cos(\theta) = \frac{3}{5}$$
$$\sin(\theta) = \frac{4}{5}$$

avec θ un argument de $3+4i$.
Comme le sinus et le cosinus sont positifs, θ peut être choisi entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.
En utilisant la calculatrice et $\cos^{-1}$ de $\frac{3}{5}$, on trouve $\theta \approx 53.13°$

10. En déduire l'écriture exponentielle de ce nombre complexe.
On a $3+4i = 5e^{i\theta}$ avec $\theta \approx 53.13°$.

11. Ecrire sous la forme d'un seul logarithme : $\ln(8)+\ln(6)$.
$\ln(8\times 6) = \ln(48)$

12. Ecrire sous la forme d'un seul logarithme : $\ln(2520)-\ln(8)$.
$\ln\left(\frac{2520}{8}\right) = \ln(315)$

13. Ecrire sous la forme d'une seule exponentielle : $e^{4x}\times e^{2x}$.
$e^{4x+2x} = e^{6x}$

14. Ecrire sous la forme d'une seule exponentielle : $\frac{e^{5x}}{e^{-7x}}$.
$e^{5x-(-7x)} = e^{5x+7x} = e^{12x}$

15. Calculer $\int_3^{17} \frac{5}{x+3}dx$.
On a :

$$\int_3^{17} \frac{5}{x+3}dx$$
$$= [5\ln(x+3)]_3^{17}$$
$$= 5\ln(3+17) - 5\ln(3+3)$$
$$= 5\ln\left(\frac{20}{6}\right)$$
$$= 5\ln\left(\frac{10}{3}\right)$$
$$\approx 6.02$$

16. Donner la valeur exacte de $\int_0^1 e^{-7x}dx$.
On a :

$$\int_0^1 e^{-7x}dx$$
$$= \left[-\frac{1}{7}e^{-7x}\right]_0^1$$
$$= -\frac{1}{7}e^{-7\times 1} - \left(-\frac{1}{7}e^{-7\times 0}\right)$$
$$= \frac{1}{7}\left(-e^{-7}+1\right)$$

17. X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(50, 0.07)$. Quelle est l'espérance de X ?
L'espérance est $50\times 0.07 = 3.5$.

18. X suit la loi exponentielle de paramètre 0,06. Quelle est l'espérance de X ?
L'espérance de la X est $\frac{1}{0.06} \approx 16.67$

19. X suit une loi normale de paramètres 144 et 6, calculer $P(138 \leq X \leq 150)$
On trouve environ 0.68.

20. X suit la loi uniforme sur $[4;10]$. Calculer $P(5.5 \leq X \leq 8.5)$
On a $P(5.5 \leq X \leq 8.5) = \frac{8.5-5.5}{10-4} = \frac{3.0}{6} = 0.5$