# Équations différentielles : activités

En 1950, un pays comptait 30.5 millions d'habitants.
Depuis cette date, sa population a un taux annuel moyen de natalité de 20 pour 1000, c'est-à-dire qu'il y a en moyenne 20 naissances enregistrées au cours d'une année pour 1000 habitants. De façon analogue, depuis 1950, le taux annuel moyen de mortalité est de 15 pour 1000.
De plus, chaque année en moyenne, 100000 nouveaux arrivants dans ce pays.

**On se propose d'étudier l'évolution démographique de ce pays**

1. **Modèle à temps discret**

   On note $P(n)$ la population de ce pays, en million d'habitants, l'année $1950+n$ avec $n \in \mathbb{N}$

   **a.** Donner la valeur de $P(0)$.

   La valeur $P(0)$ correspond à la population en 1950, c'est à dire 30.5.

   **b.** Pour 1000 habitants, quelle évolution a-t-on d'une année sur l'autre ?

   Pour chaque groupe de 1000 habitants pour l'année $1950+n$, on gagne $5 = 20-15$ habitants à l'année $1950+n+1$.

   **c.** En déduire une relation de récurrence reliant $P(n+1)$ et $P(n)$.

   On en déduit que :

$$\begin{aligned} &P(n+1) = P(n) + \frac{P(n)}{1000} \times 5 + 0.1 \\ \Leftrightarrow &P(n+1) = 1.005P(n) + 0.1 \end{aligned}$$

   **d.** Déterminer le terme général de $P(n)$ et en déduire la population de ce pays en 2050, si les conditions restent inchangées.

   Comme dans les énoncés du bac, on va étudier une suite intermédiaire :

$$u_n = P(n) - \alpha$$
$$\text{telle que } u_{n+1} = 1.005u_n$$

   On obtient :

$$\begin{aligned} &u_{n+1} = 1.005u_n \\ \Leftrightarrow &P(n+1) - \alpha = 1.005\left(P(n) - \alpha\right) \\ \Leftrightarrow &1.005P(n) + 0.1 - \alpha = 1.005\left(P(n) - \alpha\right) \\ \Leftrightarrow &1.005P(n) + 0.1 - \alpha = 1.005P(n) - 1.005\alpha \\ \Leftrightarrow &0.1 - \alpha = -1.005\alpha \\ \Leftrightarrow &0.1 = -0.005\alpha \\ \Leftrightarrow &\alpha = -\frac{0.1}{0.005} = -20 \end{aligned}$$

La suite $u_n$ est géométrique de raison 1.005 et on a alors :

$$\begin{aligned} & u_n = u_0 \times 1.005^n \\ \Leftrightarrow & P(n) + 20 = (30.5 + 20) \times 1.005^n \\ \Leftrightarrow & P(n) = 50.5 \times 1.005^n - 20 \end{aligned}$$

Pour 2050, la population sera donc de $50.5 \times 1.005^{100} - 20 \approx 63.15$ millions d'habitants.

2. **Modèle à temps continu**
On considère la fonction $P$ définie sur $[0;+\infty[$, qui à l'instant $1950 + t$, en années, associe la population de ce pays à cet instant.

**a.** Pourquoi la fonction est définie sur $[0;+\infty[$ ?
Nous n'avons pas d'informations quant à l'évolution de la population avant les années 1950.

**b.** Donner la valeur de $P(0)$ et une relation entre $P(t+1)$ et $P(t)$.
On a :

$$P(0) = 30.5$$
$$P(t+1) = P(t) + \frac{P(t)}{1000} \times 5 + 0.1$$

**c.** Peut-on raisonner comme dans la première partie pour calculer $P(t)$ ?
Comme les fonctions sont continues sur $\mathbb{R}$ et ne sont pas définis uniquement pour les valeurs entières de $t$ : ce n'est donc pas une étude de suite.

**d.** On suppose que la fonction est dérivable sur son ensemble de définition.
Rappeler la définition de la dérivée de $P$ au point $t$ ? Quelle nouvelle équation peut-on en déduire ?
La définition de la dérivée en $t$ de la fonction $P$ est la limite quand $\epsilon$ tend vers 0 de :

$$\frac{P(t+\epsilon) - P(t)}{\epsilon}$$

Pour $t = 1$, on peut donc considérer que :

$$P'(t) \approx \frac{P(t+1) - P(t)}{1} \Rightarrow P'(t) \approx P(t+1) - P(t)$$

Finalement, on peut obtenir l'équation suivante :

$$P'(t) = 0.005P(t) + 0.1$$

**e.** Vérifier que toute fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $P(t) = ke^{0.005t} - 20$ avec $k$ un nombre réel est solution de la nouvelle équation obtenue, que l'on appelle équation différentielle.
On doit faire les calculs suivants :

$$P'(t) = \left(ke^{0.005t} - 20\right)' = 0.005ke^{0.005t}$$
$$0.005P(t) + 0.1 = 0.005\left(ke^{0.005t} - 20\right) + 0.1 = 0.005ke^{0.005t} - 0.1 + 0.1 = 0.005ke^{0.005t}$$

On vient bien de vérifier que $P'(t) = 0.005P(t) + 0.1$ pour cette expression de $P(t)$.

**f.** Utiliser la condition initiale, c'est-à-dire la valeur de $P(0)$, pour déterminer $k$.
On sait que :

$$P(0) = ke^{0.005\times 0} - 20 = k - 20$$

et, de plus :

$$P(0) = 30.5$$

Ainsi :

$$k = 30.5 + 20 = 50.5$$

**g.** En suivant ce modèle déterminer la valeur de la population de ce pays en 2050 et comparer au résultat obtenu avec le premier modèle.
Le nombre d'habitants, suivant ce modèle, sera, en 2050, de 63.26 millions d'habitants : l'approximation faite semble pertinente.