Equations différentielles : exercices corrigés

Exercice 1 *Résoudre les équation différentielles suivantes :*

1. $y' + 5y = 3$ *avec condition initiale* $f(0) = 1$.
   → *Les solutions de cette équation différentielle sont de la forme* $f(x) = ke^{-5x} + \frac{3}{5}$ *avec* k *une constante à déterminer grâce à la condition initiale* $f(0) = 1$:
   $$f(0) = 1 \Leftrightarrow ke^{-5\times 0} + \frac{3}{5} = 1 \Leftrightarrow k = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$$
   Donc $f(x) = \frac{2}{5}e^{-5x} + \frac{3}{5}$.
2. $y' - 5y = 1$ *avec condition initiale* $f(0) = 0$.
   → *Les solutions de cette équation différentielle sont de la forme* $f(x) = ke^{5x} - \frac{1}{5}$ *avec* k *une constante à déterminer grâce à la condition initiale* $f(0) = 0$:
   $$f(0) = 0 \Leftrightarrow ke^{5\times 0} - \frac{1}{5} = 0 \Leftrightarrow k = \frac{1}{5}$$
   Donc $f(x) = \frac{1}{5}e^{5x} - \frac{1}{5}$.
3. $y'' + 4y = 0$.
   → *On a* $4 = 2^2$ *donc les solutions de cette équation sont de la forme :* $f(x) = \mu\cos(2x) + \lambda\sin(2x)$ *avec* μ *et* λ *deux réels quelconques.*
4. $y'' + 5y = 0$.
   → *On a* $4 = (\sqrt{5})^2$ *donc les solutions de cette équation sont de la forme :* $f(x) = \mu\cos(\sqrt{5}x) + \lambda\sin(\sqrt{5}x)$ *avec* μ *et* λ *deux réels quelconques.*

Exercice 2 *Lorsque la pénicilline est injectée directement dans le sang, on considère que sa vitesse d'élimination est, à chaque instant, proportionnelle à la quantité de pénicilline présente dans le sang à cet instant. Ainsi, la quantité de pénicilline* $Q(t)$*, exprimée en milligrammes, présente dans le sang à l'instant* t ($t \geq 0$*, exprimé en heures), est solution de l'équation différentielle* $Q'(t) = -aQ(t)$*, où* a *est un réel.*
A l'instant $t = 0$*, on injecte une dose de* $5mg$ *de pénicilline.*

1. *Montrer que, pour tout réel* $t \geq 0$: $Q(t) = 5e^{-at}$.
   → *On commence par écrire l'équation différentielle sous la forme suivante :* $Q(t) + aQt(t) = 0$.
   Les solutions de cette équation sont de la forme $Q(t) = ke^{-at}$ *avec* k *une constante qui dépend de la condition initiale* $Q(O) = 5$ *: cette condition est une traduction de la dernière phrase de l'énoncé. Par conséquent, on a :*
   $$Q(0) = 5 \Leftrightarrow ke^{a\times 0} = 5 \Leftrightarrow k = 5$$
   On obtient bien le résultat annoncé.
2. *Sachant qu'au bout de deux heures, la quantité de pénicilline présente dans le sang a diminué de moité, montrer que* $a = \frac{\ln(2)}{2}$*. Donner une valeur arrondie de au centième.*
   → *On sait que* $Q(2) = \frac{5}{2}$ *d'après la condition donnée à cette question, donc :*
   $$Q(2) = \frac{5}{2} \Leftrightarrow 5e^{-a\times 2} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow e^{-a\times 2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \ln(e^{-2a}) = \ln(\frac{1}{2}) \Leftrightarrow -2a = -\ln(2) \Leftrightarrow a = \frac{\ln(2)}{2}$$

3. *On admet que la fonction Q décrit de façon satisfaisante la quantité de péniciliine présente dans le sang entre 0 et 6 heures.*
   Déterminer à partir de quel instant, exprimé en heures et minutes et arrondi à la minute, la quantité de pénicilline présente dans le sang sera inférieure à $1mg$.
   → Cela revient à résoudre l'équation suivante :

$$
\begin{aligned}
Q(t) \leq 1 \Leftrightarrow 5e^{-\frac{\ln(2)}{2}t} \leq 1 \Leftrightarrow e^{-\frac{\ln(2)}{2}t} \leq \frac{1}{5} &\Leftrightarrow \ln(e^{-\frac{\ln(2)}{2}t}) \leq \ln(\frac{1}{5}) \\
&\Leftrightarrow -\frac{\ln(2)}{2}t \leq -\ln(5) \\
&\Leftrightarrow t \geq \frac{2\ln(5)}{\ln(2)} \approx 4.64 \textit{ heure}
\end{aligned}
$$

   Donc la quantité de péniciline deviendra inférieure à $1mg$ à partir de $4h$ et 39 minutes. (0.64×60 pour obtenir 39).

Exercice 3 *Soit l'équation différentielle (E) $y'' + 4y = 4x^2$.*
A cette équation, on associe l'équation (E_0) : $y'' + 4y = 0$.

1. *Résoudre l'équation (E_0).*
   → On a $4 = 2^2$ donc les solutions de cette équation sont de la forme : $f(x) = \mu\cos(2x) + \lambda\sin(2x)$ avec μ et λ deux réels quelconques.
2. *Trouver une solution de (E) sous la forme $g(x) = ax^2 + bx + c$.*
   → On doit calculer les dérivées successives de g :

$$
\begin{aligned}
&g'(x) = 2ax + b \\
&g''(x) = 2a
\end{aligned}
$$

   la fonction g est solution de (E) si et seulement si :

$$g''(x) + 4g(x) = 4x^2 \Leftrightarrow 2a + 4ax^2 + 4bx + 4c = 4x^2$$

   En identifiant les coefficients des deux polynômes, à gauche et à droite, on trouve :

$$
\begin{cases} 4a = 4 \\ 4b = 0 \\ 2a + 4c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = -\frac{1}{2} \end{cases}
$$

   Finalement, on trouve $f(x) = x^2 - \frac{1}{2}$.
3. *Montrer que f est solution de (E) si et seulement si la fonction $f - g$ est solution de (E_0).*
   → On a :

$$
\begin{aligned}
&\textit{f solution de (E)} \\
\Leftrightarrow &f(x)'' + 4f(x) = 4x^2 = g''(x) + 4g(x) \\
\Leftrightarrow &f(x)'' + 4f(x) = g''(x) + 4g(x) \\
\Leftrightarrow &f(x)'' + 4f(x) - g''(x) - 4g(x) = 0 \\
\Leftrightarrow &(f(x) - g(x))'' + 4(f(x) - g(x)) = 0 \\
&\textit{f-g solution de } (E_0))
\end{aligned}
$$

4. *En déduire toutes les solutions de (E).*
   Finalement, d'après la question précédente, les solutions de (E) sont les fonctions $f(x) = \mu\cos(2x) + \lambda\sin(2x) + x^2 - \frac{1}{2}$.

Exercice 4 *Soit l'équation différentielle (E) : $y'' + 9y = e^x$.*
Á cette équation, on associe l'équation (E_0) : $y'' + 9y = 0$.

1. *Résoudre l'équation* (E_0).
   $\rightarrow$ *On a* $9 = 3^2$ *donc les solutions de cette équation sont de la forme :* $f(x) = \mu\cos(3x) + \lambda\sin(3x)$ *avec* μ *et* λ *deux réels quelconques.*
2. *Trouver une solution de* g *de* (E) *sous la forme* $g(x) = ae^x$.
   On calcule les dérivées successives de g *:*

   $$g'(x) = ae^x$$
   $$g''(x) = ae^x$$

   la fonction g *est solution de* (E) *si et seulement si :*

   $$g''(x) + 9g(x) = e^x \Leftrightarrow ae^x + 9ae^x = e^x \Leftrightarrow 10ae^x = e^x \Leftrightarrow 10a = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{10}$$

   Donc $g(x) = \frac{1}{10}e^x$.
3. *Montrer qu'une fonction* f *est solution de* (E) *si et seulement si la fonction* $f - g$ *est solution de* (E_0).
   $\rightarrow$ *On a :*

   $$\begin{aligned} & f \text{ solution de (E)} \\ \Leftrightarrow & f(x)'' + 9f(x) = e^x = g''(x) + 9g(x) \\ \Leftrightarrow & f(x)'' + 9f(x) = g''(x) + 9g(x) \\ \Leftrightarrow & f(x)'' + 9f(x) - g''(x) - 9g(x) = 0 \\ \Leftrightarrow & (f(x) - g(x))'' + 9(f(x) - g(x)) = 0 \\ & f\text{-}g \text{ solution de } (E_0)) \end{aligned}$$

4. *En déduire toutes les solutions de* (E).
   Finalement, d'après la question précédente, les solutions de (E) *sont les fonctions* $f(x) = \mu\cos(3x) + \lambda\sin(3x) + \frac{1}{10}e^x$.