Récurrences 3

On considère la suite :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 0.5u_n + 2.5 \\ u_0 = -4 \end{cases}$$

1. Montrer par récurrence que :

$$u_n \leq u_{n+1} \leq 5$$

2. En déduire que la suite converge et en déduire sa limite.

1. **Initialisation :**

   On a :

   $$u_1 = 0.5u_0 + 2.5 = 0.5$$
   $$\text{donc } u_0 = -4 \leq u_1 \leq 5$$

   L'initialisation est établie.

   Hérédité :
   On suppose que la propriété est vraie pour un certain rang $n \geq 0$:

   $$u_n \leq u_{n+1} \leq 5 \quad \text{c'est l'hypothèse de récurrence}$$

   On part de cette hypothèse :

   $$\begin{aligned} & u_n \leq u_{n+1} \leq 5 \\ \Rightarrow & 0.5 \times u_n \leq 0.5 \times u_{n+1} \leq 0.5 \times 5 \\ \Rightarrow & 0.5 \times u_n \leq 0.5 \times u_{n+1} \leq 2.5 \\ \Rightarrow & 0.5 \times u_n + 2.5 \leq 0.5 \times u_{n+1} + 2.5 \leq 2.5 + 2.5 \\ \Rightarrow & u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 5 \end{aligned}$$

   L'hérédité est établie.

2. On vient de montrer que la suite est croissante et majorée, par conséquent, d'après le théorème de convergence monotone, la suite converge vers l un nombre réel qui vérifie :

   $$\begin{aligned} & l = 0.5 \times l + 2.5 \\ \Leftrightarrow & l - 0.5 \times l = 2.5 \\ \Leftrightarrow & l \times 0.5 = 2.5 \\ \Leftrightarrow & l = \frac{2.5}{0.5} = 5 \end{aligned}$$