∽ Intégrales et primitives

1 Primitives

1.1 Introduction

On lâche une pierre à partir d'un point E de la margelle d'un puits. La margelle est située à $1,5$m du sol.
La position de la pierre à un instant t est repérée par $y(t)$ sur un axe vertical orienté vers le bas, d'origine O.
On suppose que la pierre est soumise à la seule force de son poids. La pierre subit une accélération constante $g = 9.8 m.s^{-2}$.
On rappelle qu'en cinématique, l'accélération instantanée $a(t)$ est la dérivée de la vitesse instantanée $v(t)$, qui est elle-même la dérivée de la position $y(t)$ de la pierre à l'instant t.

1. Rappeler la dérivée des fonctions $f(t) = 1$, $g(t) = t$ et $h(t) = t^2$.
2. Déterminer une expression de la vitesse instantanée $v(t)$ de la pierre.
3. Donner d'autres expressions possibles de cette vitesse donnant la même accélération.
4. A quelle vitesse a-t-on lâché la pierre?
5. Parmi les expressions possibles pour $v(t)$, déterminer celle qui correspond à la vitesse à la quelle on a lâché la pierre.
6. Montrer que l'expression de la position $y(t)$ de la pierre à l'instant t est égale à $4.9t^2 - 1.5$. On dira que l'expression $y(t)$ est une _ _ _ _ _ _ _ _ _ de la vitesse $v(t)$.
7. Déterminer à quel moment la pierre passe au niveau du sol.

1.2 Tableau de primitives

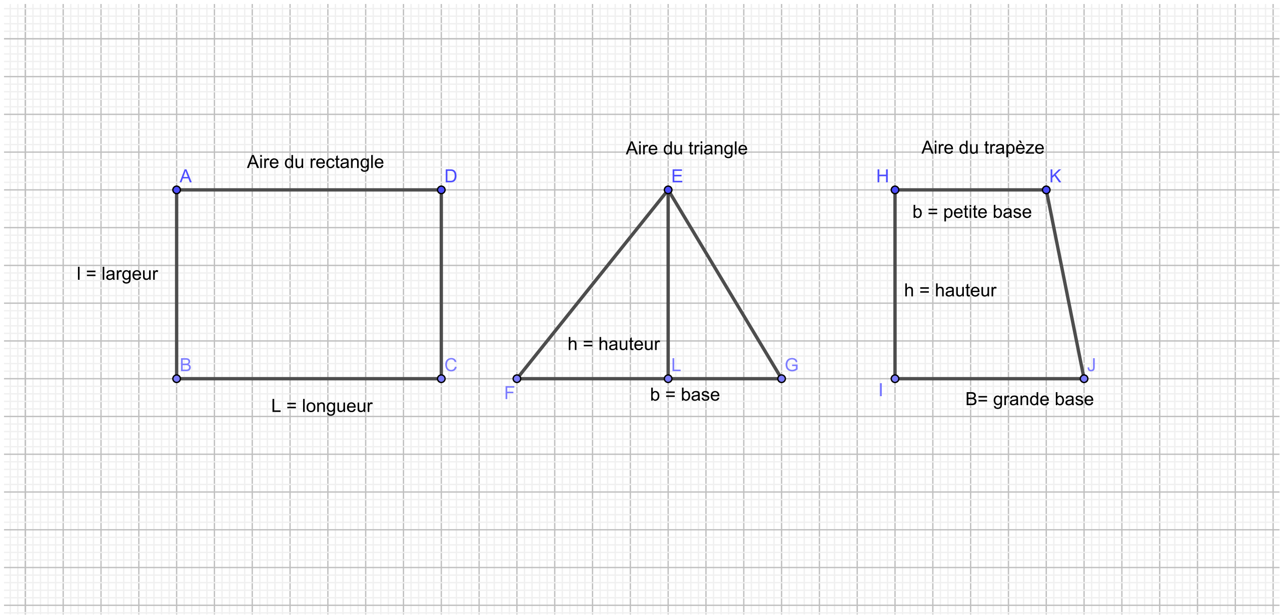
Compléter le tableau suivant :

Primitives	Fonction	Dérivée
	1	
	x	
	$2x+1$	
	$3x+2$	
	$-x+4$	
	x^2	
	$2x^2+3x+1$	
	$-7x^2-2x+1$	
	$\frac{1}{x}$	
	$\frac{1}{x^2}$	
	$\frac{1}{x^3}$	
	$(2x+3)^5$	
	$\frac{1}{(4x+3)^5}$	
	$\frac{1}{1+x^2}$	
	$\sqrt{2x+1}$	
	$\sin(x)$	
	$\cos(x)$	
	e^x	
	e^{-2x+3}	
	$-7e^{3x+2}$	
	$-3e^{-x+2}$	
	$\arctan(x)$	

2 Aire d'un domaine

2.1 Rappels des formules classiques

Rappeler les formules de l'aire pour les domaines suivants :



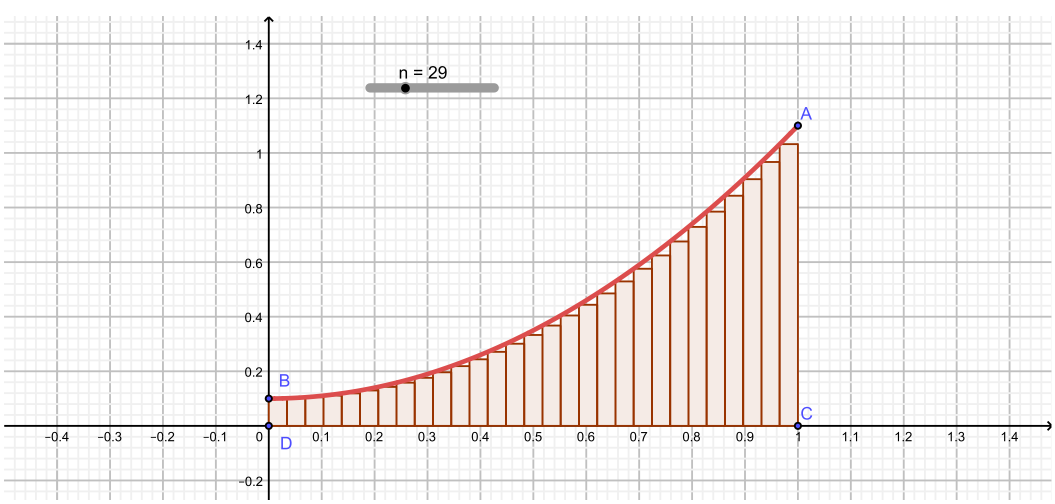
✏ **Rectangle**

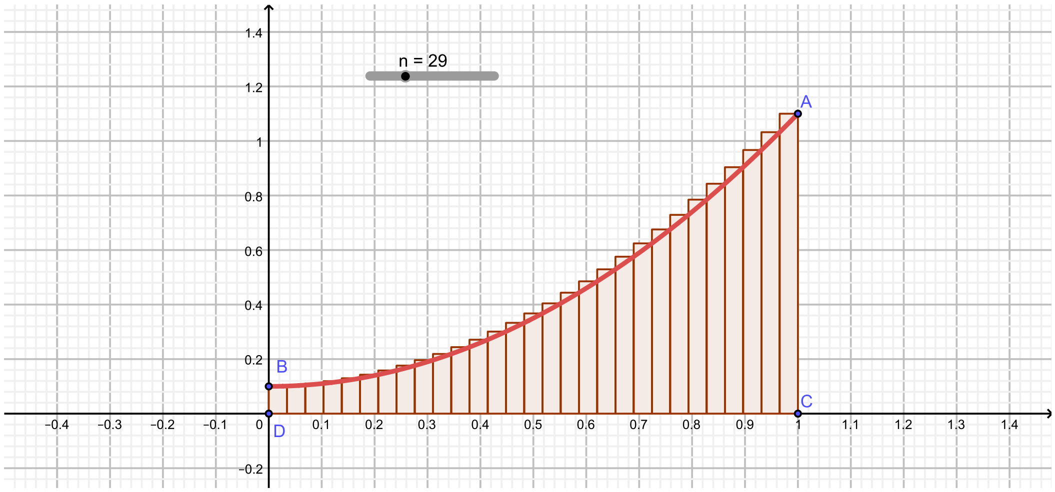
✏ **Triangle**

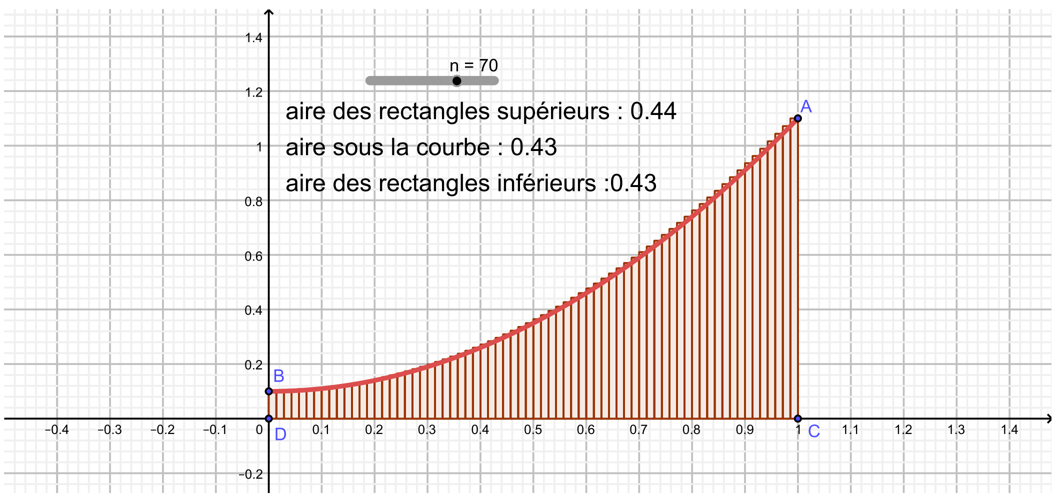
✏ **Trapèze**

2.2 Fonctions positives

Pour déterminer l'aire de figures géométriques plus compliquées, on a essayé de se servir ce que l'on connaissait pour y parvenir.
On décide d'encadrer l'aire du domaine sous la courbe d'une fonction positive et au dessus de l'axe des abscisses par des sommes de n rectangles.







En s'aidant des deux figures et du dessin projeté sur géogébra, répondre aux questions suivantes :

1. Dans le cas où $n = 29$, le logiciel nous renvoie 0.42, 0.43 et 0.45 pour les aires de ces trois domaines. A quelle valeur associer chaque domaine ?
2. Que se passe-t-il quand n augmente ?
3. Le calcul de l'aire des rectangles inférieurs et supérieurs semble-t-il abordable à la main quand n est très grand ?

On va maintenant voir comment déterminer cette valeur quand n tend vers $+\infty$.

2.3 Utilisation des primitives

Définition

Pour une fonction positive sur $[a;b]$, l'aire du domaine sous la courbe et au dessus de l'axe des abscisses, entre les abscisses a et b est :

$$\text{aire du domaine } = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

où F est une primitive de f.

Exemple 1 :
Retrouver les formules classque pour l'aire d'un triangle, d'un rectangle et d'un trapèze un utilisant une intégrale.

Exemple 2
L'aire du domaine sous la courbe de f et au dessus de l'axe des abscisses entre a et b quand :

1. $f(x) = \frac{1}{x}$; $a = 1$ et $b = 2$
2. $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$; $a = 0$ et $b = 1$
3. $f(x) = x^2$; $a = 0$ et $b = 3$.

2.4 Généralisation

Définition

Pour une fonction continue sur $[a;b]$, l'intégrale d'une fonction entre a et b est définie de la façon suivante :

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

où F est une primitive de f. Dans le cas où f est une fonction positive, cette intégrale est aussi l'aire d'un domaine.
Dans le cas où f change de signes, ce n'est pas le cas.

Remarque : Expliquer le dernier point en l'illustrant par un dessin.

3 Exemples

3.1 Calculs directs

Déterminer les intégrales suivantes :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\,dt$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} t\,dt$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\,dt$$
$$\int_0^{\pi} \sin(t)\,dt$$

3.2 Intégration par parties

On veut calculer l'intégrale suivante :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin(t)\,dt$$

1. Peut-on déterminer directement une primitive de $t\sin(t)$?
2. Donner une primitive de $\sin(t)$.
3. Calculer la dérivée de $-t\cos(t)+\sin(t)$.
4. En déduire l'intégrale cherchée.

Intégration par partie

$$\int_a^b u(t)v'(t)\,dt = [u(t)\times v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)\,dt$$

Exemple 1 *L'application de l'intégration par partie nous permet de trouver des primitives aux fonctions suivantes :*

$$t\cos(n\omega t) \longrightarrow \frac{t}{n\omega}\sin(n\omega t) - \frac{1}{n^2\omega^2}\cos(n\omega t)$$
$$t\sin(n\omega t) \longrightarrow -\frac{t}{n\omega}\cos(n\omega t) + \frac{1}{n^2\omega^2}\sin(n\omega t)$$

3.3 Intégrale dépendant de n un entier

On rappelle que :

$$\begin{aligned}
&\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0\\
&\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1\\
&\cos(\pi) = -1\\
&\sin(\pi) = 0\\
&\cos(x+2\pi) = \cos(x)\\
&\sin(x+2\pi) = \sin(x)\\
&\cos(x+\pi) = -\cos(x)\\
&\sin(x+\pi) = -\sin(x)
\end{aligned}$$

Déterminer les intégrales suivantes :

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(nx)dx\\
J_n &= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x\cos(nx)\\
K_n &= \int_{0}^{\pi} x\cos(n\omega x)
\end{aligned}$$