

## ♣ Récurrences 4

On considère la suite :

$$\begin{cases} u_{n+1} = -\frac{1}{18}u_n^2 + \frac{26}{18}u_n \\ u_0 = 5 \end{cases}$$

1. Donner l'expression de  $f$  telle que :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$
2. Résoudre l'équation :  $f(x) = x$
3. Montrer que  $f$  est croissante sur  $[0; 13]$ .
4. Montrer par récurrence que  $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq u_n \leq 8$ .
5. Montrer par récurrence que  $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \leq u_{n+1}$ .
6. En déduire que la suite est convergente et donner sa limite.

1. On remplace tous les  $u_n$  par des  $x$  et on obtient :

$$f(x) = -\frac{1}{18}x^2 + \frac{26}{18}x$$

2. Résoudre l'équation :  $f(x) = x$

$$\begin{aligned}f(x) &= x \\ \Leftrightarrow -\frac{1}{18}x^2 + \frac{26}{18}x &= x \\ \Leftrightarrow -\frac{1}{18}x^2 + \frac{26}{18}x - x &= 0 \\ \Leftrightarrow x\left(-\frac{1}{18}x + \frac{8}{18}\right) &= 0 \\ \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } -\frac{1}{18}x &= -\frac{8}{18} \\ \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x &= \frac{-\frac{8}{18}}{-\frac{1}{18}} \\ \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x &= 8\end{aligned}$$

3. Pour montrer que  $f$  est croissante, on doit calculer sa dérivée et ensuite déterminer son signe :

$$f'(x) = -\frac{2}{18}x + \frac{26}{18}$$

4. On doit maintenant résoudre l'inéquation suivante :

$$\begin{aligned}f'(x) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow -\frac{2}{18}x + \frac{26}{18} &\geq 0 \\ \Leftrightarrow -\frac{2}{18}x &\geq -\frac{26}{18} \\ \Leftrightarrow x &\leq \frac{-\frac{26}{18}}{-\frac{2}{18}} \\ \Leftrightarrow x &\leq 13\end{aligned}$$

Par conséquent sur l'intervalle  $[0; 13]$ , la fonction  $f$  est croissante.

##### 5. Initialisation :

On a :

$$0 \leq u_0 = 5 \leq 8$$

L'initialisation est établie.

**Hérédité :**

On suppose que la propriété est vraie pour un certain rang  $n \geq 0$  :

$$0 \leq u_n \leq 8 \text{ c'est l'hypothèse de récurrence}$$

On part de l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned}0 &\leq u_n \leq 8 \\ \Rightarrow 0 &\leq f(u_n) \leq f(8) \text{ car } f \text{ est croissante} \\ \Rightarrow 0 &\leq u_{n+1} \leq 8 \text{ d'après les questions précédentes}\end{aligned}$$

L'hérédité est établie.

Donc  $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq u_n \leq 8$

**6. Initialisation :**

On a :

$$u_1 = f(u_0) = f(5) = 5.83333333333333 > 5 = u_0$$

L'initialisation est établie.

**7. Hérédité :**

On suppose que la propriété est vraie pour un certain rang  $n \geq 0$  :

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \text{ c'est l'hypothèse de récurrence}$$

On part de l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} 0 &\leq u_n \leq u_{n+1} \\ \Rightarrow 0 &\leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \text{ car } f \text{ est croissante} \\ \Rightarrow 0 &\leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \end{aligned}$$

L'hérédité est établie.

Donc  $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \leq u_{n+1}$

**8. En déduire que la suite est convergente et donner sa limite.**

Comme la suite est croissante et majorée, d'après le théorème de convergence monotone, la suite converge vers un nombre réel  $l$  qui vérifie :

$$\begin{aligned} f(l) &= l \\ \Leftrightarrow l &= 0 \text{ ou } l = 8 \end{aligned}$$

Comme la suite est croissante et que  $u_0 > 0$ , alors  $l$  ne peut pas être nul donc  $l = 8$