# Fonction logarithme : exercices

**Exercice 1** *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *les équations suivantes :*

$2e^x - 3 = 0 \quad e^{-x+1} - 1 = 0 \quad e^{2x} = 4 \quad (2e^x - 1)(e^x + 5) = 0$

$-5e^x - 10 = 0 \quad 7 - e^{5x-2} = 0 \quad e^{-3x} = -8 \quad e^x(e^x - 9) = 0 \quad e^{2x} + 3e^x = 0$

$\ln(x) = 3 \quad \ln(x) = -7 \quad 2\ln(x) - 1 = 0 \quad (\ln(x) + 5)(4\ln(x) - 5) = 0 \quad (\ln(x))^2 = 9$

$\ln(x) = -5 \quad -6\ln(x) + 3 = 0 \quad \ln(x)(2\ln(x) - 7) = 0 \quad (\ln(x))^2 - \ln(x) = 0 \quad (\ln(x))^3 - 2(\ln(x))^2 = 0$

**Exercice 2** *Simplifier les nombres suivants pour les écrire en fonction de* $\ln(3)$ *uniquement :*

$$a = \ln(9) \quad b = \ln\left(\frac{1}{3}\right) \quad c = \ln(3\sqrt{3}) \quad d = \ln(36) - 2\ln(2)$$

**Exercice 3** *Simplifier les nombres suivants pour les écrire en fonction de* $\ln(2)$ *et* $\ln(5)$ *uniquement :*

$$a = \ln(10) - \ln\left(\frac{1}{4}\right) \quad b = \ln(0.05) \quad c = \ln\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right) \quad d = 2\ln(5e^2) + \ln(4e^{-1})$$

**Exercice 4** *Soit* $(u_n)$ *une suite géométrique de raison* $q > 0$ *et de premier terme* $u_0 > 0$.
*On pose* $v_n = \ln(u_n)$.
*Démontrer que la suite* $(v_n)$ *est arithmétique.*

**Exercice 5** *Soit* $f$ *la fonction définie, pour tout réel* $x$*, par :*

$$f(x) = \ln(1 + e^x)$$

*Démontrer que, pour tout réel* $x$ *:*

$$f(x) = x + \ln(1 + e^{-x})$$

**Exercice 6** *Déterminer le plus entier naturel tel que :*

$$0.99^n \leq 10^{-30}$$
$$1.02^n > 10^{2022}$$

**Exercice 7** *Soit* $(u_n)$ *la suite géométrique de premier terme* $u_0 = 1$ *et de raison* $q = 1.001$.
*Déterminer, s'il existe, le plus petit entier naturel* $n$ *tel que :* $u_n > 10000$.

**Exercice 8** *Soit* $f$ *la fonction définie sur* $]0; +\infty[$ *par :*

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{2x + 1}$$

1. *Déterminer la limite de* $f$ *lorsque* $x$ *tend vers* $0$.
2. *Vérifier que, pour tout réel* $x > 0$ *:*

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x} \times \frac{1}{2 + \frac{1}{x}}$$

3. *En déduire la limite de* $f(x)$ *lorsque* $x$ *tend vers* $+\infty$.
4. *Interpréter graphiquement les résultats précédents.*

**Exercice 9** *Résoudre les équations suivantes après avoir déterminé sur quel ensemble on peut les résoudre :*

$$\ln((x - 3)(2x + 1)) = \ln(4)$$
$$\ln(x - 3) + \ln(2x + 1) = 2\ln(2)$$

**Exercice 10** *Résoudre les inéquations suivantes après avoir déterminé sur quel ensemble on peut les résoudre :*

$$\ln(3x-4)<0$$
$$\ln(-x+3)\geq 1$$
$$\ln(-x+1)\ln(x)$$
$$\ln(3+2x)<\ln(x-3)$$

**Exercice 11** *Le carbone* 14 *est un isotope radioactif du carbone permettant de dater les restes d'êtres vivants, comme les squelettes ou les fossiles.*
*La formule suivante donne l'âge $T$, en année, d'un échantillon en fonction du pourcentage $p$ de carbone* 14 *restant :*

$$T = 8264\ln\left(\frac{100}{p}\right)$$

1. *Le squelette d'un homme de Néandertal contient* 2% *du carbone* 14 *initialement contenu dans ses os.*
   *Estimer l'âge de ce squelette.*
2. *La datation au carbone* 14 *a permis d'estimer l'âge d'une momie à* 2500 *ans.*
   *Quelle proportion de carbone* 14 *contient-elle encore ?*

**Exercice 12** *Soit $f$ la fonction définie sur* $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ *par :*

$$f(x) = \ln(2x-1)-x+1$$

1. *Déterminer la limite de $f(x)$ en $\frac{1}{2}$.*
2. *Montrer que, pour tout réel $x>\frac{1}{2}$ :*

   $$f(x) = \ln(x)-x+1+\ln\left(2-\frac{1}{x}\right)$$

   *En déduire la limite de $f(x)$ en $+\infty$.*
3. *Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet deux solutions distinctes $\alpha$ et $\beta$ avec $\alpha<\beta$.*
4. *Donner la valeur exacte de $\alpha$ et un encadrement de $\beta$ d'amplitude* $10^{-2}$

**Exercice 13** *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *les inéquations suivantes :*

$$(e^x-3)\ln(x+1)<0$$
$$\ln(e^x-2)<0$$
$$\ln(-x^2+4x+5)<\ln(x+1)$$

**Exercice 14** *Soit $f$ la fonction définie sur* $]1;+\infty[$ *par :*

$$f(x) = x-\frac{\ln(x)}{x^2}$$

*et soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.*

1. *Soit $g$ la fonction définie sur* $]1;+\infty[$ *par :*

   $$g(x) = x^2-1+\ln(x)$$

   *Montrer que la fonction $g$ est positive sur* $[1;+\infty[$.
2. *Montrer que, pour tout* $x\in[1;+\infty[$ *:*

   $$f'(x) = \frac{g(x)}{x}$$

3. *En déduire le sens de variation de $f$ sur $[1;+\infty[$.*
4. *On note $\mathscr{D}$ la droite d'équation $y = x$.*
   *Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite $\mathscr{D}$.*
5. *Pour tout entier naturel $\geq 2$, on note respectivement $M_k$ et $N_k$ les points d'abscisses $k$ de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$.*
   *Déterminer la limite de $M_kN_k$ quand $k$ tend vers $+\infty$.*
6. *Écrire un algorithme en python permettant de déterminer le plus petit entier $k_0$ supérieur ou égal à 2 tel que la distance $M_kN_k$ soit inférieure ou égale à $10^{-2}$.*

**Exercice 15** *Quand l'oreille humaine est soumise à une intensité acoustique, exprimée en watts par mètre carré (W/m$^2$), le niveau sonore du bruit responsable de cette intensité acoustique est exprimé en décibels (dB).*

***Document***

***Échelle de bruit***

| *Sources sonores* | *Intensité acoustique (W/m$^2$ )* | *Niveau sonore arrondi éventuellement à l'unité* | *Sensation auditive* |
|---|---|---|---|
| *Décollage de la Fusée Ariane* | $10^6$ | 180 | *Exige une protection spéciale* |
| *Turboréacteur* | $10^2$ | 140 | *Exige une protection spéciale* |
| *Course de Formule 1* | 10 | 130 | *Exige une protection spéciale* |
| *Avion au décollage* | 1 | 120 | *Seuil de douleur* |
| *Concert et discothèque* | $10^{-1}$ | 110 | *Très difficilement supportable* |
| *Baladeur à puissance maximum* | $10^{-2}$ | 100 | *Très difficilement supportable* |
| *Moto* | $10^{-5}$ | 70 | *Pénible à entendre* |
| *Voiture au ralenti* | $10^{-7}$ | 50 | *Bruit courant* |
| *Seuil d'audibilité* | $10^{-12}$ | 0,08 | *Silence anormal* |

1. *D'après le tableau, lorsque l'intensité acoustique est multipliée par 10, quelle semble être l'augmentation du niveau sonore ?*
2. *La relation liant l'intensité acoustique $x$ où $x$ appartient à l'intervalle $\left[10^{-12};10^{6}\right]$ et le niveau sonore est donnée par :*

$$f(x) = \frac{10}{\ln(10)} \times \ln(x) + 120.$$

   *On pourra prendre $\dfrac{10}{\ln(10)} \approx 4,34$.*

   a. *Vérifier la conjecture émise à la question 1.*
   b. *Quel serait le niveau sonore de deux motos ?*

3. *Pour éviter tout risque sur la santé, le port d'un casque de protection acoustique est donc conseillé au delà de 85 dB. Déterminer l'intensité acoustique à partir de laquelle le port d'un tel casque est conseillé.*