Fonction logarithme 6

On considère la fonction suivante définie sur $]-\frac{4}{19};+\infty[$:

$$f(x) = \ln(19x+4) - 4x + 3$$

1. Calculer la limite de f en $-\frac{4}{19}$
2. Calculer la limite de f en $+\infty$
3. Calculer la dérivée de f.
4. Déterminer le signe de $f'(x)$.
5. En déduire le tableau de variation de $f(x)$.
6. En déduire le nombre de solutions de $f(x) = 0$ et un encadrement d'amplitude 10^{-2} de cette solution.

Correction :

1. On sait que :

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to -\frac{4}{19}^+} \ln(19x+4) = -\infty \\
&\lim_{x\to -\frac{4}{19}^+} -4x+3 = \frac{4}{19}\times 4+3 \\
\text{donc } &\lim_{x\to -\frac{4}{19}^+} \ln(19x+4)+4x+3 = -\infty
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to +\infty} \ln(19x+4) = +\infty \\
&\lim_{x\to +\infty} -4x+3 = -\infty \\
\text{donc } &\lim_{x\to +\infty} \ln(19x+4)-4x+3 = -\infty \quad \text{par dominance de } x
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{19}{19x+4} - 4 \\
&= \frac{19-4-(19x+4)}{19x+4} \\
&= \frac{19-76x-16)}{19x+4} \\
&= \frac{3-76x}{19x+4} \\
&= \frac{3-76x}{19x+4}
\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
f'(x) > 0 &\Leftrightarrow \frac{3-76x}{19x+4} > 0 \\
&\Leftrightarrow 3-76x > 0 \text{ car } 19x+4 > 0 \\
&\Leftrightarrow x < \frac{3}{76}
\end{aligned}$$

5. On a :

x	$-\frac{4}{19}$		$\frac{3}{76}$		$+\infty$
$g'(x)$	||	$+$	0	$-$	
$g(x)$	|| $-\infty$	$\nearrow$	4.4002498812044	$\searrow$	$-\infty$

6. Comme la fonction$g$ est continue, croissante de $-\infty$ à $4.4002498812044 > 0$, alors, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit qu'il existe une unique solution $\alpha_1 \in]-\frac{4}{19};\frac{3}{76}[$ tel que $g(\alpha_1) = 0$.
Comme la fonction$g$ est continue, croissante de $4.4002498812044 > 0$ à $-\infty$

, alors, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit qu'il existe une unique solution $\alpha_2 \in]-\frac{4}{19};+\infty[$ tel que $g(\alpha_2)=0$.

$$\begin{aligned}
&f(-0.21052631578947) < 0\\
&f(-0.20052631578947) > 0\\
\text{donc } &-0.21052631578947 < \alpha_1 < -0.20052631578947\\
&f(1.63) > 0\\
&f(1.64) < 0\\
\text{donc } &1.63 < \alpha_2 < 1.64
\end{aligned}$$