Fonction logarithme 2

On considère la fonction suivante définie sur $]0;+\infty[$:

$$f(x) = 3x^2 + 4x + 3 - 15x^2 \ln(x)$$

1. Calculer la limite de f en 0^+
2. Calculer la limite de f en $+\infty$
3. Calculer la dérivée de f.
4. Calculer la dérivée seconde de f.
5. Déterminer le signe de $f''(x)$.
6. En déduire le tableau de variation de $f'(x)$.
7. Déterminer le nombre de solutions de $f'(x) = 0$ et en donner un encadrement d'amplitude 10^{-2}.
8. En déduire le tableau de variation de $f(x)$.
9. Déterminer le nombre de solutions de $f(x) = 0$.

Correction :

1. On sait que :

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0^+} 3x^2+4x+3 = 3\\
&\lim_{x\to 0^+} 15x^2\ln(x) = 0 \quad \text{par propriété du cours}\\
\text{donc } &\lim_{x\to 0^+} 3x^2+4x+3-15x^2\ln(x) = 3
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to +\infty} 3x^2+4x+3 = +\infty\\
&\lim_{x\to +\infty} -15x^2\ln(x) = -\infty \quad \text{par propriété du cours}\\
\text{donc } &\lim_{x\to +\infty} 3x^2+4x+3-15x^2\ln(x) = -\infty \quad \text{par prédominance de } x^2\ln(x)
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 6x+4-15\left(x^2\ln(x)\right)'\\
&= 6x+4-15\left((x^2)'\ln(x)+x^2\times\ln(x)'\right)\\
&= 6x+4-15\left(2x\ln(x)+x^2\times\frac{1}{x}\right)\\
&= 6x+4-15\left(2x\ln(x)+x\right)\\
&= -9x+4-30\ln(x)
\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
f''(x) &= -9-30\left(x\ln(x)\right)'\\
&= -9-30\left(x'\ln(x)+x\times\ln(x)'\right)\\
&= -9-30\left(\ln(x)+x\times\frac{1}{x}\right)\\
&= -9-30\left(\ln(x)+1\right)\\
&= -39-30\ln(x)
\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}
f'(x) &\geq 0\\
-39-30\ln(x) &\geq 0\\
-30\ln(x) &\geq 39\\
\ln(x) &\leq \frac{39}{-30}\\
x &\leq e^{\frac{39}{-30}}
\end{aligned}$$

6. On a :

x	0		$e^{\frac{39}{-30}}$		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$	4	$\nearrow$	$4+30e^{\frac{39}{-30}}$	$\searrow$	$-\infty$

7. D'après le tableau de variation, comme $4>0$, la fonction f' ne peut pas s'annuler sur l'intervalle $]0;e^{\frac{39}{-30}}]$.
Pour $x>e^{\frac{39}{-30}}$, la fonction est décroissante de $4+30e^{\frac{39}{-30}}>0$ vers $-\infty$, donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe une unique valeur $\alpha>e^{\frac{39}{-30}}$ telle que $f'(\alpha)=0$.
En utilisant la calculatrice, on trouve :

$$f'(0.27)>0$$
$$f'(0.28)<0$$
$$0.27<\alpha<0.28$$

8. On a :

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	3	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$-\infty$

9. D'après le tableau de variation, comme $3>0$, la fonction f ne peut pas s'annuler sur l'intervalle $]0;\alpha]$.
Pour $x>\alpha$, la fonction est décroissante de $f(\alpha)>0$ vers $-\infty$, donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe une unique valeur $\beta>\alpha$ telle que $f(\beta)=0$.

$$f(1.57)<0$$
$$f(1.56)>0$$
$$\text{donc } 1.56<\beta<1.57$$