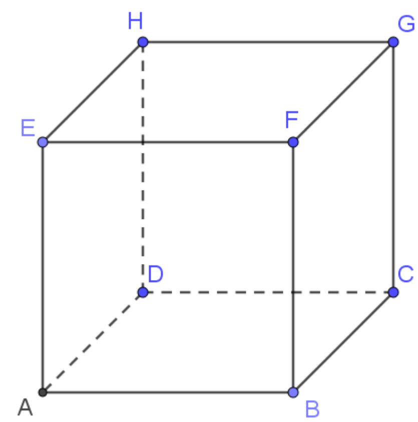
☙ Orthogonalité et distance dans l'espace : exercices

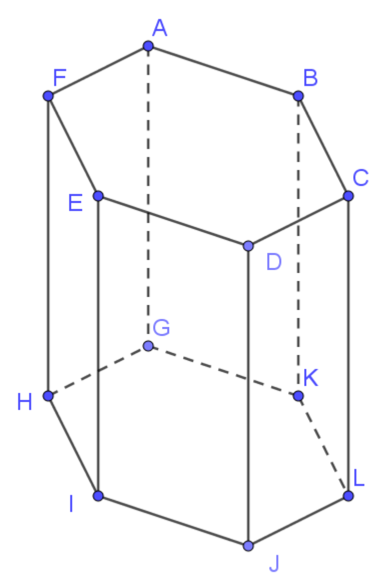
Exercice 1 *On considère le cube $ABCDEFGH$ de côté a ci-dessous.*



Calculer les produits scalaires suivants :

$$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$$
$$\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{DC}$$
$$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}$$
$$\overrightarrow{BF}.\overrightarrow{CG}$$
$$\overrightarrow{EH}.\overrightarrow{BC}$$
$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EG}$$

Exercice 2 *On considère le prisme droit $ABCDEFGKLJIH$ dont les faces du dessus et du dessous sont deux hexagones réguliers.*

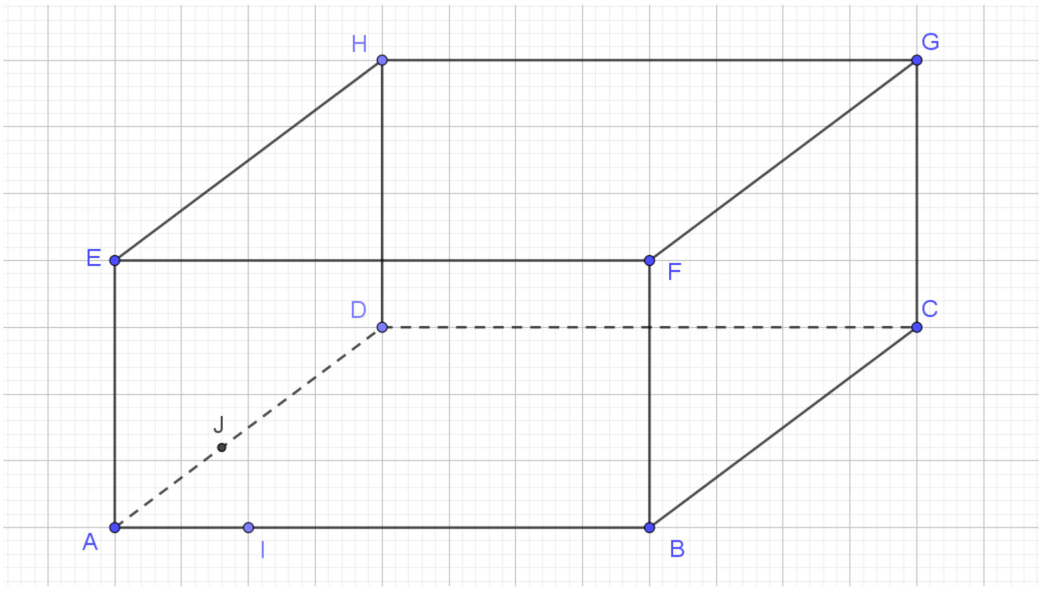


Donner :

- ✏ *trois vecteurs coplanaires.*

- ✏ *deux couples de vecteurs orthogonaux.*
- ✏ *deux vecteurs colinéaires mais non égaux.*
- ✏ *trois vecteurs non coplanaires.*
- ✏ *un couple de vecteurs non orthogonaux.*

Exercice 3 *On considère le pavé droit $ABCDEFGH$ ci-dessous tel que $AB = 8$, $AD = 5$ et $AE = 3$:*



Les points I et J sont définis par les relations :

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$$
$$\overrightarrow{AJ} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AD}$$

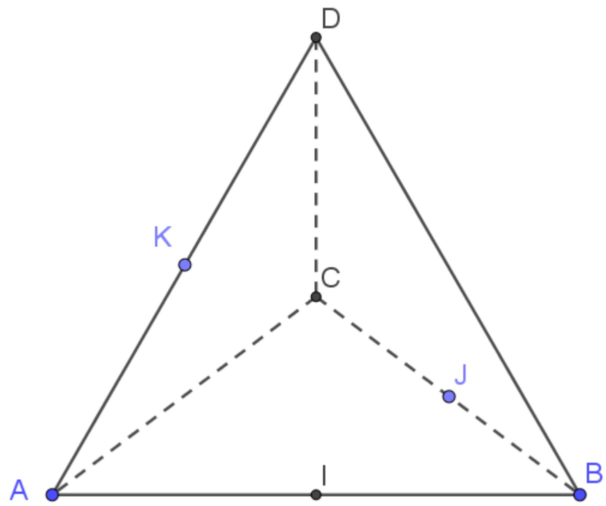
Calculer les produits scalaires suivants :

$$\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AB}$$
$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DH}$$
$$\overrightarrow{EH}.\overrightarrow{CB}$$
$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$$
$$\overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{EF}$$
$$\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{BD}$$

Exercice 4 *Dans l'espace, on considère trois vecteurs $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$ orthogonaux deux à deux et de norme* 1.
Parmi les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ ci-dessous, déterminer les couples de vecteurs orthogonaux :

$$\overrightarrow{u} = 3\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{k}$$
$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j} + \frac{3}{2}\overrightarrow{k}$$
$$\overrightarrow{w} = 2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{k}$$

Exercice 5



$ABCD$ est un tétraèdre régulier de côté a, ce qui signifie que ses quatre faces sont des triangles équilateraux de côté a.
I,J et K sont les milieux respectifs des arêtes $[AB]$, $[BC]$ et $[AD]$. Calculer les produits scalaires suivants :

$$\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DB}$$
$$\overrightarrow{AK}.\overrightarrow{DI}$$
$$\overrightarrow{IK}.\overrightarrow{AC}$$
$$\overrightarrow{JK}.\overrightarrow{AD}$$

Exercice 6

1. *On considère deux vecteurs de l'espace $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ tels que :*

$$||\overrightarrow{u}|| = 5$$
$$||\overrightarrow{v}|| = 2$$
$$||\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}|| = 6$$

   Calculer $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$.

2. *On considère deux vecteurs de l'espace $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ tels que :*

$$||\overrightarrow{u}|| = 2$$
$$||\overrightarrow{v}|| = 3$$
$$||\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}|| = 4$$

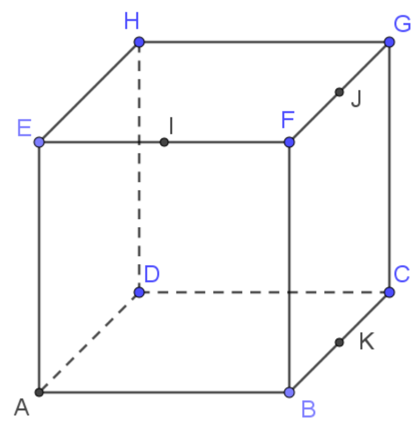
   Calculer $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$.

3. *On considère deux vecteurs de l'espace $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ tels que :*

$$||\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}|| = 3$$
$$||\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}|| = 7$$

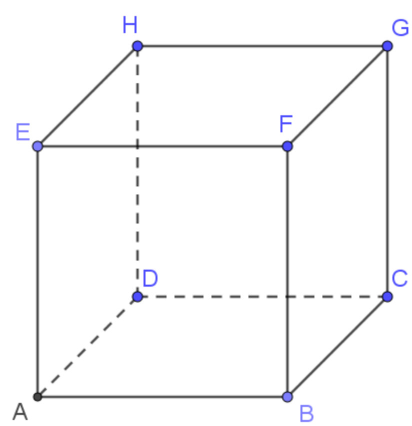
   Calculer $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$.

Exercice 7 *On considère le cube $ABCDEFGH$ ci-contre. Les points I, J et K sont les milieux respectifs des segments $[EF]$, $[FG]$ et $[BC]$.*



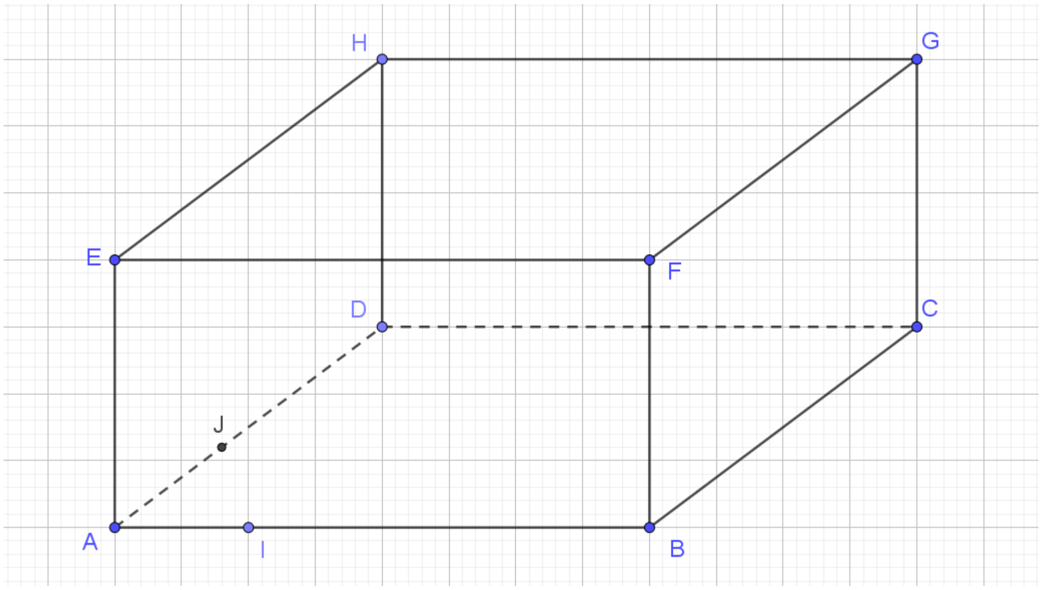
1. *Citer deux droites perpendiculaires.*
2. *Citer deux droites orthogonales mais non perpendiculaires.*
3. *Citer une droite et un plan orthogonaux entre eux.*
4. *Justifier que les droites (JK) et (AD) sont orthogonales.*
5. *Prouver que la droite (GF) est orthogonale au plan (ABI).*
6. *Citer une autre droite orthogonale au plan (ABI).*

Exercice 8 *$ABCDEFGH$ est un cube.*



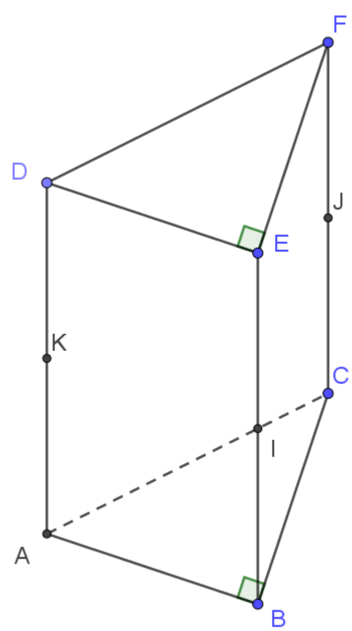
1. *Justifier que la droite (BG) est orthogonale à la droite (FC).*
2. *Démontrer que la droite (BG) est orthogonale à la droite (CD).*
3. *En déduire un vecteur normal au plan (FDC).*
4. *Démontrer que le projeté orthogonal du point B sur le plan (FDC) est le milieu du segement $[CF]$.*

Exercice 9 *On considère le pavé droit $ABCDEFGH$ ci-dessous tel que $AB = 8$, $AD = 5$ et $AE = 3$:*



1. *A l'aide des points de cette figure, citer trois bases orthonormées.*
2. *A l'aide des points de cette figure, citer trois repères orthonormées.*

Exercice 10 *$ABCDEF$ est un prisme droite qui a pour bases les triangles rectangles DEF et ABC.*
I, J et K sont les milieux respectifs des segments $[EB]$, $[FC]$ et $[DA]$.



Recopier le tableau sans justifier.

Le projeté orthogonal de ..	*sur ..*	*est ..*
K	*le plan* (ABC)	
C	*le plan* (DEF)	
A	*la droite* (CD)	
J	*la droite* (DA)	
F	*le plan* (DAB)	
	la droite (CF)	J
K		I
	la droite (EB)	I

Exercice 11 ***1.*** *On se place dans une base orthonormée de l'espace.*
Calculer $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$ *dans chacun des cas suivants :*

$$\overrightarrow{u}(-3.5;2;-4) \quad \overrightarrow{v}(-4;5.5;-3)$$
$$\overrightarrow{u}\left(\frac{2}{3};\frac{15}{7};-\frac{12}{11}\right) \quad \overrightarrow{v}\left(-\frac{3}{4};\frac{14}{3};-\frac{22}{4}\right)$$

2. *On se place dans une base orthonormée de l'espace.*
Calculer $||\overrightarrow{u}||$ *dans chacun des cas suivants :*

$$\overrightarrow{u}(12;-9;15)$$
$$\overrightarrow{u}\left(-\frac{1}{4};\frac{1}{2};1\right)$$
$$\overrightarrow{u}\left(3\sqrt{2};-5\sqrt{2};4\sqrt{2}\right)$$

3. *On se place dans une base orthonormée de l'espace.*
Calculer AB *dans chacun des cas suivants :*

$$A(5,5;-6.3;-4.3) \quad B(2.5;2.7;-0.7)$$
$$A\left(\frac{1}{4};-\frac{3}{2};\frac{5}{9}\right) \quad B\left(\frac{3}{4};\frac{5}{2};-\frac{4}{9}\right)$$

Exercice 12 *MNPSQRTU est un cube de côté* 5*.* A *et* B *sont les centres respectifs des faces* $MNPQ$ *et* $RSTU$*.*

1. *Justifier que* $\left(M;\frac{1}{5}\overrightarrow{MN};\frac{1}{5}\overrightarrow{MQ};\frac{1}{5}\overrightarrow{MR}\right)$ *est un repère orthonormée de l'espace.*
2. *Donner, dans ce repère, les coordonnées des sommets du cube.*
3. *Calculer, dans ce repère, les coordonnées des points* A *et* B*.*
4. *Montrer que la droite* (AB) *est à la fois orthogonale aux droites* (MN) *et* (NP)*.*
5. *Que peut-on en déduire quant à la droite* (AB) *?*
6. *Déterminer la distance du point* A *au plan* (MNP)*.*

Exercice 13 $ABCDEFGH$ *est une cube de côté* 1*,* R*,* S *et* T *sont les centres respectifs des faces* $FGCB$*,* $GHDC$ *et* $ADHE$*.*

1. *Justifier que* $(D;\overrightarrow{DA};\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DH})$ *est un repère orthonormé de l'espace.*
2. *Dans ce repère, donner les coordonnées des sommets du cube, puis calculer les coordonnées des points* R*,* S *et* T*.*
3. *Calculer les longueurs* RS*,* RT *et* ST*.*
4. *En déduire la nature du triangle* RST*.*
5. *En calculant* $\overrightarrow{RS}.\overrightarrow{ST}$ *de deux façons différentes, déterminer les angles du triangle* RST*.*

Exercice 14 *Dans un repère orthonormée de l'espace, on considère les points* $A(5;-1;-9)$, $B(7;3;-7)$, $C(9;13;19)$, $D(11;15;13)$ *et* $E(15;19;1)$.

1. *Montrer que les droites* (AB) *et* (CD) *sont orthogonales.*
2. *Montrer que* $\overrightarrow{AE}$ *et* $\overrightarrow{AB}$ *sont colinéaires.*
3. *Que peut-on en déduire pour le point* E *?*
4. *Montrer que* $\overrightarrow{CE}$ *et* $\overrightarrow{CD}$ *sont colinéaires.*
5. *Que peut-on en déduire pour le point* E *?*
6. *Que peut-on en déduire pour les droites* (AB) *et* (CD) *?*

Exercice 15 *On considère le parallélépipède rectangle ci-dessous tel que* $AB = 2$, $AD = 4$ *et* $AE = 3$.
Les points I *et* J *sont les milieus respectifs des arêtes* $[FE]$ *et* $[CD]$. *Le point* Q *appartient au segment* $[AD]$ *et est tel que* $AQ = 0.25AD$.

1. *Calculer* $\overrightarrow{AQ}.\overrightarrow{AJ}$.
2. *Calculer* $\overrightarrow{DJ}.\overrightarrow{IB}$.
3. *Démontrer que les droites* (IJ) *et* (FE) *sont orthogonales.*
4. *Quel est le projeté orthogonal de* I *sur la droite* (CD) *? Justifier.*

Exercice 16 $ABCDEFGH$ *est un cube de côté* 5.
En choisissant un repère adapté, démontrer que la droite (DF) *est orthogonale au plan* (ACH).

Exercice 17 *Soit* a *un réel strictement positif et* $OABC$ *un tétraèdre tel que :*

- ✏ OAB, OAC *et* OBC *sont des triangles rectangles en* O
- ✏ $OA = OB = OC = a$.

On appelle I *le projeté orthogonal du point* C *sur la droite* (AB) *et* H *le projeté orthogonal du point* O *sur la droite* (IC).

1. *Quelle est la nature du triangle* ABC *?*
2. *Justifier que la droite* (OI) *est la médiatrice du segment* $[AB]$.
3. *Que peut-on en déduire quant aux droites* (OI) *et* (AB) *?*
4. *Pourquoi les droites* (AB) *et* (CI) *sont-elles perpendiculaires ?*
5. *Que peut-on en déduire quant à la droite* (AB) *et le plan* (OCI) *? Justifier.*
6. *En déduire que les droites* (OH) *et* (AB) *sont orthogonales.*
7. *Pourquoi la droite* (OH) *est-elle perpendiculaire à la droite* (CI) *?*
8. *Pourquoi peut-on en déduire que le droite* (OH) *est orthogonale au plan* (ABC) *?*
9. *Que peut-on en déduire quant au point* H *par rapport au point* O *et au plan* (ABC) *?*
10. *Calculer le volume* V *du tétraèdre* $OABC$ *puis l'aire* S *du triangle* ABC.
11. *Exprimer* OH *en fonction de* V *et* S. *En déduire que :*

$$OH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Exercice 18 *On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé. On considère un plan* $\mathscr{P}$ *de base* $(\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{v})$ *tel que :*

$$\overrightarrow{u}\,(1;-2;5)$$
$$\overrightarrow{v}\,(0;4;-3)$$

et un plan $\mathscr{P}'$ *de vecteur normal* $\overrightarrow{n'}(2;8;1)$

1. *On note $\overrightarrow{n}(a;b;c)$ (avec a, b, c réels) un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$.*
   Montrer que les coordonnées de $\overrightarrow{n}$ vérifient le système suivant :

$$\begin{cases} a-2b+5c=0 \\ 4b-3c=0 \end{cases}$$

2. *Montrer que ce système est équivalent au système suivant :*

$$\begin{cases} a=-\frac{7}{2}c \\ b=\frac{3}{4}c \end{cases}$$

3. *Donner un vecteur normal, de coordonnées entères, au plan $\mathscr{P}$.*
4. *Que peut-on en déduire quant aux plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$?*
5. *Le point $A(0;0;0)$ appartient aux plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$.*
   Montrer que le point $B(29;-22;118)$ appartient aux plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$.
6. *Que peut-on en déduire ?*