Devoir maison 3 : correction

Exercice 1 *Déterminer les limites des suites suivantes :*

$$a_n = 3n^2 - 9n + 5$$
$$b_n = \frac{4n-5}{-2n^2-3n+7}$$
$$c_n = \frac{1-4^n}{3^n+5^n}$$
$$d_n = \frac{\sqrt{n}+(-1)^n}{n}$$
$$e_n = \frac{\cos(n)-n}{\sqrt{n}}$$

1.

$$\lim_{n\to+\infty} 3n^2 = +\infty$$
$$\lim_{n\to+\infty} -9n = -\infty$$
$$\lim_{n\to+\infty} +5 = 5$$

On en déduit que la limite de a_n est du type $+\infty - \infty$: c'est une forme indéterminée.
On doit alors factoriser :

$$3n^2 - 9n + 5 = n^2\left(\frac{3n^2}{n^2} - \frac{9n}{n^2} + \frac{5}{n^2}\right) = n^2\left(3 - \frac{9}{n} - \frac{5}{n^2}\right)$$
$$\lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$$
$$\lim_{n\to+\infty} 3 - \frac{9}{n} - \frac{5}{n^2} = 3$$

donc par produit de limites $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$

2.

$$\lim_{n\to+\infty} 4n-5 = +\infty$$
$$\lim_{n\to+\infty} -2n^2-3n+7 = -\infty \text{ par somme de limites}$$

On en déduit que la limite de b_n est du type $\frac{+\infty}{-\infty}$: c'est une forme indéterminée.
On doit alors factoriser :

$$b_n = \frac{4n-5}{-2n^2-3n+7} = \frac{n\left(\frac{4n}{n} - \frac{5}{n}\right)}{n^2\left(\frac{-2n^2}{n^2} - \frac{3n}{n^2} + \frac{7}{n^2}\right)} = \frac{1}{n} \times \frac{4 - \frac{5}{n}}{-2 - \frac{3}{n} + \frac{7}{n^2}}$$

On sait que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$$
$$\lim_{n\to+\infty} 4 - \frac{5}{n} = 4$$
$$\lim_{n\to+\infty} -2 - \frac{3}{n} + \frac{7}{n^2} = -2$$

Par produit de limites, on en déduit que la limite de c_n est $0 \times \frac{4}{-2} = 0$.

3.

$$\lim_{n\to+\infty} 1-4^n = -\infty \text{ car la suite } 4^n \text{ est géométrique de raison } q>1$$
$$\lim_{n\to+\infty} 3^n+5^n = +\infty \text{ par somme de limites et car les suites } 3^n \text{ et } 5^n \text{ sont géométriques de raison } q>1$$

On en déduit que la limite de c_n est du type $\frac{+\infty}{+\infty}$: c'est une forme indéterminée.
On doit alors factoriser, par 4^n et au dénominateur par 5^n :

$$\begin{aligned} c_n = \frac{1-4^n}{3^n+5^n} &= \frac{4^n\left(\frac{1}{4^n}-\frac{4^n}{4^n}\right)}{5^n\left(\frac{3^n}{5^n}+\frac{5^n}{5^n}\right)} \\ &= \frac{4^n}{5^n}\times\frac{\frac{1}{4^n}-1}{\frac{3^n}{5^n}+1} = \left(\frac{4}{5}\right)^n\times\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^n-1}{\left(\frac{3}{5}\right)^n+1}\end{aligned}$$

Or :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$$
$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n = 0$$
$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n = 0$$

car ce sont les termes généraux de suites géométrique de raison $0\le q\le 1$.
Donc par produits de limites, on en déduit que la limite de c_n est 0.

4. *La limite de $\sqrt{n}+(-1)^n$ n'existe pas car la limite de $(-1)^n$ n'existe pas.*
Pour déterminer la limite de d_n, on doit alors distribuer la division par n et ensuite utiliser un théorème d'encadrement.
On sait que :

$$\begin{aligned} d_n &= \frac{\sqrt{n}+(-1)^n}{n} = \frac{\sqrt{n}}{n}+\frac{(-1)^n}{n} \\ \text{or } &\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = 0 \\ \text{de plus } -1\le(-1)^n\le 1 \text{ donc } &\frac{-1}{n}\le\frac{(-1)^n}{n}\le\frac{1}{n} \\ \text{ensuite } &\lim_{n\to+\infty}\frac{-1}{n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = 0 \\ &\text{on en déduit, en appliquant le théorème d'encadrement, que } \lim_{n\to+\infty} d_n = 0\end{aligned}$$

5. *On sait que :*

$$e_n = \frac{\cos(n)-n}{\sqrt{n}} = \frac{\cos(n)}{\sqrt{n}}-\sqrt{n}$$

On va encadrer la fonction cos *:*

$$-1\le\cos(n)\le 1 \Rightarrow -\frac{1}{n}\le\frac{\cos(n)}{n}\le\frac{1}{n}$$

Exercice 2 *Soit u_n la suite définie pour tout entier naturel n par :*

$$\frac{2n+5}{3n+6}$$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > \frac{2}{3}$.
On pensera à mettre au même dénominateur et ne pas faire de récurrence
Montrer ce résultat est équivalent à montrer le résultat suivant :

$$\frac{2n+5}{3n+6} - \frac{2}{3} > 0$$

Et pour le démontrer, il va falloir mettre les deux fractions au même dénominateur :

$$\frac{2n+5}{3n+6} - \frac{2}{3} = \frac{3(2n+5)}{3(3n+6)} - \frac{2(3n+6)}{3(3n+6)} = \frac{3(2n+5)-2(3n+6)}{3(3n+6)} = \frac{6n+15-6n-12}{3(3n+6)} = \frac{3}{3(3n+6)}$$

Or le numérateur est positif, le dénominateur est positif (car $\in \mathbb{N}$ *) donc le quotient est positif par la règle des signes.*
Finalement, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > \frac{2}{3}$.

Exercice 3 *Soit* v_n *la suite définie pour tout entier naturel* n *par :*

$$v_n = -2n^2 + 14n - 17$$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n \leq 7$.
On pensera à faire une étude de signes et ne pas faire de récurrence
Montrer ce résultat est équivalent à montrer le résultat suivant :

$$-2n^2 + 14n - 17 - 7 \leq 0 \Leftrightarrow -2n^2 + 14n - 14 \leq 0$$

On va donc faire un tableau de signes et on commence par calculer le discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 14^2 - 4 \times (-2) \times (-24) = 196 - 192 = 4 > 0$$

Comme le discriminant est strictement positif, il y a deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-14+2}{-4} = 3$$
$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-14-2}{-4} = 4$$

On en déduit le tableau de signes suivants :

x	$-\infty$		3		4		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

D'après ce tableau, pour $n \leq 3$, $v_n \leq 7$ *et pour* $n \geq 3$, $v_n \leq 7$ *mais comme il n'y a pas d'entier entre* 3 *et* 4, *on en déduit que :*

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n \leq 7$$

Exercice 4 (Valentin et Lohann) *Soit* (u_n) *la suite définie par :*

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 1 \\ u_{n+2} = -\frac{1}{2}u_{n+1} + \frac{1}{2}u_n \end{cases}$$

On cherche deux réels α *et* β *tels que les suites* (v_n) *et* (w_n), *définies par :*

$$v_n = u_{n+1} - \alpha u_n$$
$$w_n = u_{n+1} - \beta u_n$$

soient des suites géométriques de raisons respectives β *et* α.

1. *Montrer que α et β sont solutions de l'équation :*

$$X^2 = -\frac{1}{2}X + \frac{1}{2}$$

On sait que (v_n) est une suite géométrique de raison β et (w_n) une suite géométrique de raison α :

$$\begin{cases} v_{n+1} = \beta v_n \\ w_{n+1} = \alpha w_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{n+2} - \alpha u_{n+1} = \beta(u_{n+1} - \alpha u_n) \\ u_{n+2} - \beta u_{n+1} = \alpha(u_{n+1} - \beta u_n) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}u_{n+1} + \frac{1}{2}u_n - \alpha u_{n+1} = \beta(u_{n+1} - \alpha u_n) \\ -\frac{1}{2}u_{n+1} + \frac{1}{2}u_n - \beta u_{n+1} = \alpha(u_{n+1} - \beta u_n) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(-\frac{1}{2} - \alpha - \beta\right) u_{n+1} + \left(\frac{1}{2} + \alpha\beta\right) u_n = 0 \\ \left(-\frac{1}{2} - \alpha - \beta\right) u_{n+1} + \left(\frac{1}{2} + \alpha\beta\right) u_n = 0 \end{cases}$$

Après une justification que l'on ne fera pas et qui ne serait pas triviale, on peut montrer que cela signifie :

$$-\frac{1}{2} - \alpha - \beta = 0$$
$$\frac{1}{2} - \alpha\beta = 0$$

Cela s'appelle faire une identification puisque à droite, on peut écrire 0 comme $0u_{n+1} + 0u_n$.
Finalement, on peut écrire :

$$\alpha + \beta = -\frac{1}{2}$$
$$\alpha \times \beta = -\frac{1}{2}$$

En utilisant le cours de première sur les fonctions du second degré, cela revient à dire que α et β sont solutions de l'équation :

$$X^2 - (\alpha + \beta)X + \alpha\beta = 0 \Leftrightarrow X^2 + \frac{1}{2}X - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow X^2 = -\frac{1}{2}X + \frac{1}{2}$$

2. *En déduire les valeurs de α et de β ; on prendra $\alpha < \beta$.*
On va calculer le discriminant de $X^2 + \frac{1}{2}X - \frac{1}{2} = 0$:

$$\Delta = b^2 - 4ac = \frac{1}{4} + 4 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + 2 = \frac{9}{4} > 0$$

Comme le discriminant est strictement positif, alors il y a deux racines distinctes :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{9}{4}}}{2} = \frac{-\frac{1}{2} - \frac{3}{2}}{2} = -1$$
$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{9}{4}}}{2} = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}}{2} = \frac{1}{2}$$

On en déduit que $\alpha = -1$ et $\beta = \frac{1}{2}$.

3. *Démontrer que $v_n = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.*
Comme la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\beta = \frac{1}{2}$ alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = v_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = (u_1 - (-1)u_0) \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

4. *Déterminer l'expression du terme général de la suite (w_n).*
Comme la suite (w_n) est une suite géométrique de raison $\alpha = -1$ alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad w_n = w_0 \times (-1)^n = (u_1 - \frac{1}{2}u_0) \times (-1)^n = \frac{1}{2} \times (-1)^n$$

5. *En déduire l'expression du terme général de la suite (u_n).*
On sait que :

$$\begin{cases} v_n = u_{n+1} + u_n \\ w_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n \end{cases}$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N},\quad v_n - w_n = \frac{3}{2}u_n$.
Finalement :

$$u_n = \frac{2}{3}\left(2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{1}{2} \times (-1)^n\right)$$

Exercice 5 (Pas Valentin et Lohann) *Soit u_n la suite définie par :*

$$\begin{cases} u_0 = 12 \\ u_{n+1} = 0.8u_n + 2 \end{cases}$$

1. *Montrer par récurrence que $u_n > 10 \ \ \forall n \in \mathbb{N}$.*
Initialisation :
On va montrer la propriété au rang $n = 0$: $u_0 = 12 > 10$, l'initialisation est donc établie.
Hérédité :
On suppose que la propriété est vraie au rang n :

$$u_n > 10 : \text{ c'est l'hypothèse de récurrence}$$

On va regarder si elle est vraie au rang $n + 1$:

$$\begin{aligned} u_n &> 10 : \text{ hypothèse de récurrence} \\ \text{donc } 0.8u_n &> 0.8 \times 10 \\ 0.8u_n + 2 &> 0.8 \times 10 + 2 = 10 \\ \text{c'est à dire } u_{n+1} &> 10 \end{aligned}$$

L'hérédité est donc établie.
Donc $\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n > 10$.

2. *Montrer par récurrence que la suite (u_n) est décroissante.*
On va montrer la propriété suivante $\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n \geq u_{n+1}$.
Commençons au rang $n = 0$: $u_0 = 12$ et $u_1 = 0.8u_0 + 2 = 10$.
Par conséquent, $u_1 < u_0$, la propriété ***Hérédité :***
On suppose que la propriété est vraie au rang n :

$$u_n \geq u_{n+1} : \text{ c'est l'hypothèse de récurrence}$$

On va regarder si elle est vraie au rang $n + 1$:

$$\begin{aligned} u_n &\geq u_{n+1} : \text{ hypothèse de récurrence} \\ \text{donc } 0.8u_n &\geq 0.8u_{n+1} \\ 0.8u_n + 2 &\geq 0.8 \times u_{n+1} + 2 \\ \text{c'est à dire } u_{n+1} &> u_{n+2} \end{aligned}$$

L'hérédité est donc établie.
Donc $\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n > u_{n+1}$.

3. *En déduire que la convergence de la suite u_n.*
La suite est décroissante et minorée par 10, donc, d'après le théorème de convergence monotone, la suite converge vers une valeur réelle.
4. *On définit la suite (v_n) pour tout entier naturel n par :*

$$v_n = u_n - 10$$

Montrer que cette suite est géométrique de raison 0.8.
Pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 10 \\ &= 0.8u_n + 2 - 10 \\ &= 0.8u_n - 8 \\ &= 0.8\left(u_n - 10\right) \\ &= 0.8v_n \end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison 0.8 et de premier terme $v_0 = u_0 - 10 = 2$.
5. *Donner l'expression de v_n en fonction de n pour tout entier naturel n.*
Pour tout entier naturel n :

$$v_n = v_0 \times q^n = 2 \times 0.8^n$$

6. *En déduire l'expression de u_n pour tout entier naturel n.*
Pour tout entier naturel n :

$$v_n = u_n - 10 \Leftrightarrow u_n = v_n + 10 \Leftrightarrow u_n = 10 + 0.8^n$$

7. *En déduire la limite de la suite (u_n).*
La limite de la suite constante 10 est 10 et celle de la suite géométrique 0.8^n est 0 car sa raison est strictement comprise netre -1 et 1.
Par conséquent, la limite de la suite (u_n) est 10.