∽ Équations différentielles, primitives et intégrales

1 Équations différentielles

Premier cas :

On considère une équation différentielle de la forme :

$$\left\{\begin{array}{l} ay'(t) = by(t) + c \\ y(d) = f \end{array}\right.$$

Les solutions sont de la forme :

$$y(t) = Ke^{\frac{b}{a}t} + \frac{c}{-b}$$

avec K une valeur réelle qui dépend des conditions initiales :

$$y(d) = Ke^{\frac{b}{a}\times d} + \frac{c}{-b} = f$$

$$\text{donc } K = \frac{f - \frac{c}{-b}}{e^{\frac{b\times d}{a}}}$$

Par exemple :

$$\left\{\begin{array}{l} 3y'(t) = 7y(t) + 12 \\ y(-1) = 1 \end{array}\right.$$

On repère les nombres devant y', c'est 3 et le nombre devant y, on a 7.
Par conséquent, on aura la fraction $\frac{7}{3}$ dans l'exponentielle.
On regarde le nombre tout seul, 12, on va le diviser par l'opposé du nombre devant y, -7.
Les solutions de l'équation sont donc de la forme :

$$Ke^{\frac{7}{3}t} + \frac{12}{-7}$$

avec K un nombre réel.
On parle des solutions tant qu'on a pas utilisé la condition initiale, cette dernière va fixer une valeur précise pour K.
On a :

$$y(-1) = 1 \Leftrightarrow Ke^{\frac{7}{3}\times(-1)} + \frac{12}{-7} = 1 \Leftrightarrow Ke^{-\frac{7}{3}} - \frac{12}{7} = 1 \Leftrightarrow Ke^{-\frac{7}{3}} = 1 + \frac{12}{7} \Leftrightarrow Ke^{-\frac{7}{3}} = \frac{19}{7} \Leftrightarrow K = \frac{19}{7e^{-\frac{7}{3}}} = \frac{19e^{\frac{7}{3}}}{7}$$

La solution attendue est $y(t) = \frac{19e^{\frac{7}{3}}}{7}e^{\frac{7}{3}t} + \frac{12}{-7}$.

Deuxième cas :

On considère une équation différentielle de la forme :

$$\left\{\begin{array}{l} ay'(t)+by(t)=c \\ y(d)=f \end{array}\right.$$

Les solutions sont de la forme :

$$y(t)=Ke^{-\frac{b}{a}t}+\frac{c}{b}$$

avec K une valeur réelle qui dépend des conditions initiales :

$$y(d)=Ke^{-\frac{b}{a}\times d}+\frac{c}{b}=f$$

$$\text{donc } K=\frac{f-\frac{c}{b}}{e^{-\frac{b\times d}{a}}}$$

Par exemple :

$$\left\{\begin{array}{l} 3y'(t)-7y(t)=12 \\ y(0)=1 \end{array}\right.$$

On repère les nombres devant y', c'est 3 et le nombre devant y, on a -7.
Par conséquent, on aura la fraction $\frac{7}{3}$ dans l'exponentielle : on change les signes.
On regarde le nombre tout seul, 12, on va le diviser par le nombre devant y, 7.
Les solutions de l'équation sont donc de la forme :

$$Ke^{\frac{7}{3}t}+\frac{12}{7}$$

avec K un nombre réel.
On parle des solutions tant qu'on a pas utilisé la condition initiale, cette dernière va fixer une valeur précise pour K.
On a :

$$y(0)=1 \Leftrightarrow Ke^{\frac{7}{3}\times 0}+\frac{12}{7}=1 \Leftrightarrow Ke^{0}+\frac{12}{7}=1 \Leftrightarrow K=1-\frac{12}{7} \Leftrightarrow K=-\frac{5}{7}$$

La solution attendue est $y(t)=-\frac{5}{7}e^{\frac{7}{3}t}+\frac{12}{7}$.

Troisième cas :

On veut montrer que la fonction $g(t)=\cos(2t)$ est solution de l'équation différentielle :

$$2y'(t)+y(t)=-4\sin(2t)+\cos(2t)$$

Il s'agit de montrer que $2g'(t)+g(t)=-2\sin(2t)+\cos(2t)$.
On a :

$$\begin{aligned} &g'(t)=(\cos(2t))'=-2\sin(2t) \\ &2g'(t)=-4\sin(2t) \\ &2g'(t)+g(t)=-4\sin(2t)+\cos(2t) \end{aligned}$$

La fonction $g(t)$ est donc solution de l'équation différentielle étudiée.
Qautrième cas :
On veut montrer que la fonction $h(x) = xe^{-x}$ est solution de l'équation différentielle :

$$y'(x) + y'(x) = e^{-x}$$

Il s'agit de montrer que $h'(x) + h(x) = xe^{-x}$.
On a :

$$h'(x) = \left(xe^{-x}\right) = (x)' \times e^{-x} + x \times (e^{-x})' = e^{-x} - xe^{-x}$$
$$h'(x) + h(x) = e^{-x} - xe^{-x} + xe^{-x} = e^{-x}$$

La fonction $h(x)$ est donc solution de l'équation différentielle étudiée.

2 Primitives et intégrales

Exemples de primitives Des primitives des fonctions suivantes seront données en bleu :

$$x \longrightarrow \frac{x^2}{2}$$
$$x^2 \longrightarrow \frac{x^3}{3}$$
$$x^3 \longrightarrow \frac{x^4}{4}$$
$$x^4 \longrightarrow \frac{x^5}{5}$$
$$x^5 \longrightarrow \frac{x^6}{6}$$
$$\frac{1}{x} \longrightarrow \ln(x)$$
$$\frac{1}{x^2} \longrightarrow -\frac{1}{x}$$
$$\frac{1}{x^3} \longrightarrow -\frac{1}{2x^2}$$
$$\frac{1}{x^4} \longrightarrow -\frac{1}{3x^3}$$
$$e^{-2x} \longrightarrow \frac{e^{-2x}}{-2}$$
$$\frac{e^{-2x}}{2} \longrightarrow \frac{e^{-2x}}{-4}$$
$$\frac{e^{3x}}{2} \longrightarrow \frac{e^{3x}}{6}$$
$$\cos(2x+\pi) \longrightarrow \frac{\sin(2x+\pi)}{2}$$
$$\sin(3x+1) \longrightarrow -\frac{\cos(3x+1)}{3}$$
$$5\cos(2x+\pi) \longrightarrow \frac{5\sin(2x+\pi)}{2}$$
$$\frac{\sin(3x+1)}{5} \longrightarrow -\frac{\cos(3x+1)}{15}$$

Intégration par partie :

On va étudier l'exemple suivant :

$$\int_0^{\pi} x\sin(2x)dx$$

Le but est d'obtenir une intégrale pour laquelle on connaît une primitive de la fonction qu'on intègre.
On ne connait pas de primitives de $x\sin(2x)$.
Si on choisit $u'(x) = x$ et $v(x) = \sin(2x)$ alors on aura $u(x) = \frac{x^2}{2}$ et $v'(x) = 2\cos(2x)$; la fonction à intégrer sera alors $u(x)v'(x) = x^2\cos(2x)$ dont on ne connaît pas davantage une primitive.
On va alors choisir :

$$\left\{\begin{array}{l} u'(x) = \sin(2x) \\ v(x) = x \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} u(x) = -\frac{\cos(2x)}{2} \\ v'(x) = 1 \end{array}\right.$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi x\sin(2x)dx &= [u(x)v(x)]_0^\pi - \int_0^\pi u(x)v'(x)dx \\
&= \left[-x \times \frac{\cos(2x)}{2}\right]_0^\pi - \int_0^\pi -\frac{\cos(2x)}{2} \times 1dx \\
&= -\pi\frac{\cos(2\times\pi)}{2} - \left(-0 \times \frac{\cos(2\times 0)}{2}\right) + \int_0^\pi \frac{\cos(2x)}{2}dx \\
&= -\pi\frac{\cos(2\pi)}{2} + \left[\frac{\sin(2x)}{4}\right]_0^\pi \\
&= \frac{\pi}{2} + \frac{\sin(2\times\pi)}{4} - \frac{\sin(2\times 0)}{4} \\
&= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$