Variables aléatoires et loi des grands nombres : correction de l'interrogation

Exercice 1 *Un jeu consiste à lancer un dé cubique bien équilibré numéroté de 1 à 6. Si le résultat est :*

- 1, 2 *ou* 3, *alors on perd* 2 *points ;*
- 4 *ou* 5, *alors on ne perd ni ne gagne rien ;*
- 6, *alors on gagne* 3 *points.*

On note G la variable aléatoire qui, à chaque lancer, associe le gain, positif ou négatif, du joueur.

1. *Compléter le tableau qui représente la loi de probabilité de la variable G :*

$G =$	-2	0	3
$P(G=)$	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$

2. *Calculer E(G).*
On a :

$$E(G) = -2 \times P(G=-2) + 0 \times P(G=0) + 3 \times P(G=3) = -2 \times \frac{3}{6} + 3 \times \frac{1}{6} = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

3. *Que peut-on remarquer ?*
Comme l'espérance est négative, le jeu n'est pas favorable au joueur.

4. *Quel est l'écart moyen entre les gains obtenus et le gain moyen ?*
On a besoin de calculer l'écart-type et avant la variance :

$$\begin{aligned} V(G) &= P(G=-2) \times (-2 - E(G))^2 + P(G=0) \times (0 - E(G))^2 + P(G=3) \times (3 - E(G))^2 \\ &= \frac{3}{6} \times \left(-2 + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2}{6} \times \left(0 + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{6} \times \left(3 + \frac{1}{2}\right)^2 \\ &= 3.25 \end{aligned}$$

L'écart-type $\sigma(G)$ *est donc* $\sigma(G) = \sqrt{3.25} \approx 1.8$ *: en moyenne, l'écart moyen entre le gain moyen et le gain obtenu est de* 1.8.

Exercice 2 *Un joueur lance n fois une pièce de monnaie parfaitement équilibrée.*
On note F la variable aléatoire qui, à chaque série de n lancers, associe le nombre de côtés « FACE » obtenus.
On admet que F suit la loi binomiale de paramètres n et $p = 0,5$.

1. *Interpréter l'événement :* $F \geq 2$.
C'est obtenir au moins deux fois le côté face après n *lancers.*

2. *On suppose que* $n = 4$.

a. *Calculer $P(F=0)$ puis $P(F=1)$.*
On a :

$$P(F=0)=\binom{4}{0}\times 0.5^0\times 0.5^{4-0}=0.0625$$
$$P(F=1)=\binom{4}{1}\times 0.5^1\times 0.5^{4-1}=0.25$$

b. *En déduire la probabilité d'obtenir au moins deux fois le côté « FACE » lors de 4 lancers successifs.*
On cherche la probabilité $P(F\geq 2)$:

$$P(F\geq 2)=1-P(F\leq 1)=1-P(X=0)-P(X=1)=0.6875$$

3. *On suppose désormais que n est un entier naturel non nul quelconque.*

a. *Calculer en fonction de n : $P(F=0)$ et $P(F=1)$.*
On a :

$$P(F=0)=\binom{n}{0}\times 0.5^0\times 0.5^{n-0}=0.5^n$$
$$P(F=1)=\binom{n}{1}\times 0.5^1\times 0.5^{n-1}=n\times 0.5^n$$

b. *Démontrer que :$P(F\leq 1)=(1+n)0,5^n$.*
On a :

$$P(F\leq 1)=P(F=0)+P(X=1)=0.5^n+n\times 0.5^n=(n+1)\times 0.5^n$$

4. *Le joueur souhaite déterminer le nombre minimal n de lancers pour qu'il obtienne au moins deux fois le côté « FACE » avec une probabilité supérieure ou égale à $0,999$.*

a. *Montrer que cette condition est équivalente à : $P(F\leq 1)\leq 0,001$.*
On cherche la probabilité suivante :

$$\begin{aligned}&P(F\geq 2)\geq 0.999\\ \Leftrightarrow\ &1-P(F\leq 1)\geq 0.999\\ \Leftrightarrow\ &-P(F\leq 1)\geq 0.999-1\\ \Leftrightarrow\ &P(F\leq 1)\leq 0.001\end{aligned}$$

b. *Pour déterminer le nombre minimal de lancers, le joueur a réalisé l'algorithme ci-dessous à compléter :*

$N \leftarrow 0$

While $(1+N)0,5^N > 0.001$.

$N \leftarrow N+1$

Fin du while

Afficher N

5. *Calculer l'espérance de F ainsi que son écart-type.*
Comme la variable F suit une loi binomiale de paramètres n et 0.5 *:*

$$E(F) = n \times 0.5$$
$$V(F) = n \times 0.5 \times 0.5$$
$$\sigma(F) = \sqrt{n} \times 0.5$$

6. *Combien de fois faut il lancer la pièce pour espérer avoir* 10 *piles ?*
Comme l'espérance vaut $0.5n$*, on cherche cherche à résoudre parmi les entiers :*

$$0.5n \geq 10 \Leftrightarrow n \geq \frac{10}{0.5} = 20$$

Il faut jetter en moyenne 20 *fois la pièce.*

Exercice 3 *Léna prend le bus chaque matin pour se rendre au lycée. Son bus roule à* 40 *km/h en moyenne sur un trajet de* 4 *km. Sur son parcours, il y a* 8 *arrêts de bus. A chaque fois, la probabilité pour que le bus s'arrête est de* $0,75$ *ce qui lui fait perdre* 1 *minute. On pose* X *la variable aléatoire qui, à chaque trajet, associe le nombre de fois que le bus s'arrêtera sur le trajet de Léna. On admet que* X *suit une loi binomiale.*

1. *Préciser les paramètres n et p de la loi de* X.
On a $n = 8$ *et* $p = 0.75$

2. *Calculer la durée du trajet si le bus n'effectue aucun arrêt.*
Si le bus n'effectue aucun arrêt, il mettra :

$$\frac{4}{40} = 0.1h = 10\ minutes$$

3. *Calculer l'espérance de la variable aléatoire* X.
Comme la variable X *suit la loi binomiale de paramètres* 8 *et* 0.75*, alors :*

$$E(X) = 8 \times 0.75 = 6$$

4. *Calculer le temps de parcours moyen pour que Léna se rende au lycée.*
La variable aléatoire qui compte le temps que Léna met pour aller au lycée, en minutes, est appelé T et on a :

$$T = 10 + X$$
$$\text{donc } E(T) = E(10 + X) = 10 + E(X) = 10 + 6 = 16$$

Léna met donc en moyenne 16 *minutes pour aller au lycée.*

5. *Léna n'a que* 11 *minutes pour effectuer son trajet lorsqu'elle monte dans le bus.*
Calculer la probabilité pour qu'elle soit à l'heure.
On cherche la probabilité suivante :

$$\begin{aligned} & P(T \leq 11) \\ =& P(10 + X \leq 11) \\ =& P(X \leq 1) \\ \approx& 3.8 \times 10^{-4} \end{aligned}$$