☙ Orthogonalité et distance dans l'espace : correction de l'activité

1. Rappels sur le produit scalaire dans un plan .

a. Rappeler la formule du produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ en fonction de AB, AC et BC.

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right)$$

b. Rappeler la formule d'Al-Kashi.
C'est la même formule que précédemment mais vu d'un autre aspect :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BC}^2 = BC^2 &= \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\\ &= AB^2 + AC^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

c. Rappeler l'expression du produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ en fonction de $||\overrightarrow{AB}||$, $||\overrightarrow{AC}||$ et l'angle α entre les deux vecteurs.
Rappeler la définition de la norme d'un vecteur.

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = ||\overrightarrow{AB}||.||\overrightarrow{AC}||.\cos(\alpha)$$

La norme d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ est la longueur du segment AB.

d. Rappeler l'expression analytique du produit scalaire de deux vecteurs dans un repère orthonormé.

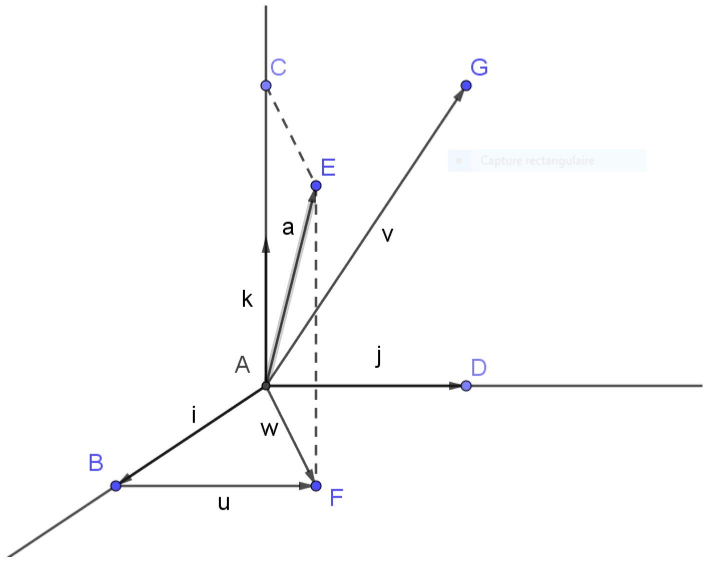
$$\begin{aligned}&\overrightarrow{u}\,(x, y)\\ &\overrightarrow{v}\,(x', y')\\ &\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = x.x' + y.y'\end{aligned}$$

e. Que dire du produit scalaire quand les deux vecteurs sont orthogonaux?

$$\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v} \Leftrightarrow \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$$

2. **Produit scalaire de deux vecteurs de l'espace**

On se place maintenant dans l'espace où les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont de norme 1 et orthogonaux deux à deux.



a. Comment appelle-t-on le triplet $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$?

Le triplet $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est, par analogie avec ce qu'on connait dans le plan, une base orthonormale : tous les vecteurs de l'espace peuvent se décomposer en une unique combinaison linéaire de ces trois vecteurs qui sont de norme 1 et orthogonaux deux à deux.

b. Exprimer $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et $\vec{a}$ en fonction de $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$.

D'après les informations du graphique, on peut écrire :

$$\vec{u} = \vec{j}$$
$$\vec{v} = \vec{j} + 2\vec{k}$$
$$\vec{w} = \vec{i} + \vec{j}$$
$$\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$$

c. Deux vecteurs sont-ils toujours coplanaires ?

Deux vecteurs sont toujours coplanaires.

d. Dans quel plan se trouvent les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$?

D'après les égalités précédentes, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont engendrés uniquement par les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{k}$: les deux vecteurs sont donc dans le plan vectoriel généré par les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{k}$.

En prenant $\overrightarrow{AG}$ comme représentant de $\vec{v}$ et $\overrightarrow{AD}$ comme représentant de $\vec{u}$, on peut alors travailler dans le plan $(A, \vec{i}, \vec{k})$ et utiliser les propriétés du produit scalaire dans le plan.

e. Exprimer le produit scalaire $\vec{u}.\vec{v}$ dans ce plan, en fonction de AD, AG et $\widehat{GAD}$.

Dans le plan $(A, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{k})$, on peut écrire :

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = AD \times AG \times \cos(\widehat{GAD})$$

f. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$ dans ce plan en utilisant l'expression analytique.

On exprime les coordonnées des vecteurs dans le repère $(A; \overrightarrow{j}; \overrightarrow{k})$:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{u} &= (1,0) \\ \overrightarrow{v} &= (1,2) \\ \text{donc } \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} &= 1\times 1 + 0\times 2 = 1 \end{aligned}$$

g. Dans quel plan se trouvent les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{w}$?

Les deux vecteurs se trouvent dans le plan (ABD).

h. Exprimer le produit scalaire dans ce plan puis vérifier le résultat en utilisant, dans ce plan, l'expression analytique.

On a $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{w}$:

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{w} = \overrightarrow{j}.(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}) = \overrightarrow{j}.\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}.\overrightarrow{i} = 1 + 0 = 1$$

Dans ce plan, les vecteurs ont pour coordonnées :

$$\begin{aligned} &\overrightarrow{u}(0;1) \\ &\overrightarrow{w}(1;1) \\ \text{donc } &\overrightarrow{u}.\overrightarrow{w} = 0\times 1 + 1\times 1 = 1 \end{aligned}$$

i. Comparer les résultats obtenus pour les produits scalaires avec l'application :

$$f(\overrightarrow{m}, \overrightarrow{n}) = x_{\overrightarrow{m}}x_{\overrightarrow{n}} + y_{\overrightarrow{m}}y_{\overrightarrow{n}} + z_{\overrightarrow{m}}z_{\overrightarrow{n}}$$

On sait que :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{u} &= (0;1;0) \\ \overrightarrow{v} &= (0;1;2) \\ \overrightarrow{w} &= (1;1;0) \\ f(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) &= 0\times 0 + 1\times 1 + 0\times 2 = 1 \\ f(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) &= 0\times 1 + 1\times 1 + 2\times 0 = 1 \\ f(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}) &= 0\times 1 + 1\times 1 + 0\times 0 = 1 \end{aligned}$$

On constate, qu'apparament, l'application $f(\overrightarrow{m}, \overrightarrow{n})$ renvoie la valeur du produit scalaire $\overrightarrow{m}.\overrightarrow{n}$.

j. Conclure quant aux formules possibles pour un produit scalaire de deux vecteurs de l'espace.
Pour deux vecteurs de l'espace $\overrightarrow{u}(x, y, z)$ et $\overrightarrow{v}(x', y', z')$ dont l'angle entre les réprésentants dans un même plan est α, on peut écrire :

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = ||\overrightarrow{u}||.||\overrightarrow{v}|| \times \cos(\alpha)$$
$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = x.x' + y.y' + z.z'$$