Dérivées et primitives : exos

Déterminer la dérivée des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \frac{2}{(x+1)^3}$ et indiquer où cette fonction est dérivable.
2. $g(x) = \cos(x)^3$.
3. $h(x) = (2x^2 - 3x + 7)^3$
4. $i(x) = \left(\frac{x+1}{x+2}\right)^{-2}$ et indiquer où cette fonction est dérivable.

- $f(x) = \frac{2}{(x+1)^3}$ et indiquer où cette fonction est dérivable.

- $f(x) = \frac{2}{(x+1)^3}$ et indiquer où cette fonction est dérivable.
  $\rightarrow$ La fonction f est dérivable sur les intervalles où son dénominateur est non nul : $(x+1)^3 = 0 \Leftrightarrow x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$. Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$.
  La fonction f est de la forme $f(x) = 2 \times \frac{1}{u(x)^3}$ avec $u(x) = x+1$, on en déduit que

$$f'(x) = 2 \times \frac{-3 \times u'(x)}{u(x)^{3+1}} = -\frac{6}{(x+1)^4}$$

Exercice 1

- $f(x) = \frac{2}{(x+1)^3}$ et indiquer où cette fonction est dérivable.
  $\rightarrow$ La fonction f est dérivable sur les intervalles où son dénominateur est non nul : $(x+1)^3 = 0 \Leftrightarrow x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$. Donc f est dérivable sur $\mathbb{R} \backslash \{-1\}$.
  La fonction f est de la forme $f(x) = 2 \times \frac{1}{u(x)^3}$ avec $u(x) = x+1$, on en déduit que

$$f'(x) = 2 \times \frac{-3 \times u'(x)}{u(x)^{3+1}} = -\frac{6}{(x+1)^4}$$

- $g(x) = \cos(x)^3$.

- $f(x) = \frac{2}{(x+1)^3}$ et indiquer où cette fonction est dérivable.
  $\rightarrow$ La fonction f est dérivable sur les intervalles où son dénominateur est non nul : $(x+1)^3 = 0 \Leftrightarrow x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$. Donc f est dérivable sur $\mathbb{R} \backslash \{-1\}$.
  La fonction f est de la forme $f(x) = 2 \times \frac{1}{u(x)^3}$ avec $u(x) = x+1$, on en déduit que

$$f'(x) = 2 \times \frac{-3 \times u'(x)}{u(x)^{3+1}} = -\frac{6}{(x+1)^4}$$

- $g(x) = \cos(x)^3$.
  $\rightarrow$ La fonction g est de la forme $g(x) = u(x)^3$ avec $u(x) = \cos(x)$, on en déduit que :

  $g'(x) = 3 \times u'(x) \times u(x)^{3-1} = 3 \times (-\sin(x)) \times (\cos(x))^{3-1} = -3\sin(x)\cos(x)^2$

- $f(x) = \frac{2}{(x+1)^3}$ et indiquer où cette fonction est dérivable.
  $\rightarrow$ La fonction f est dérivable sur les intervalles où son dénominateur est non nul : $(x+1)^3 = 0 \Leftrightarrow x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$. Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$.
  La fonction f est de la forme $f(x) = 2 \times \frac{1}{u(x)^3}$ avec $u(x) = x+1$, on en déduit que
  $$f'(x) = 2 \times \frac{-3 \times u'(x)}{u(x)^{3+1}} = -\frac{6}{(x+1)^4}$$
- $g(x) = \cos(x)^3$.
  $\rightarrow$ La fonction g est de la forme $g(x) = u(x)^3$ avec $u(x) = \cos(x)$, on en déduit que :
  $$g'(x) = 3 \times u'(x) \times u(x)^{3-1} = 3 \times (-\sin(x)) \times (\cos(x))^{3-1} = -3\sin(x)\cos(x)^2$$
- $h(x) = (2x^2 - 3x + 7)^3$.

Exercice 1

- $f(x) = \frac{2}{(x+1)^3}$ et indiquer où cette fonction est dérivable.
  $\rightarrow$ La fonction f est dérivable sur les intervalles où son dénominateur est non nul : $(x+1)^3 = 0 \Leftrightarrow x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$. Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$.
  La fonction f est de la forme $f(x) = 2 \times \frac{1}{u(x)^3}$ avec $u(x) = x+1$, on en déduit que

$$f'(x) = 2 \times \frac{-3 \times u'(x)}{u(x)^{3+1}} = -\frac{6}{(x+1)^4}$$

- $g(x) = \cos(x)^3$.
  $\rightarrow$ La fonction g est de la forme $g(x) = u(x)^3$ avec $u(x) = \cos(x)$, on en déduit que :

$$g'(x) = 3 \times u'(x) \times u(x)^{3-1} = 3 \times (-\sin(x)) \times (\cos(x))^{3-1} = -3\sin(x)\cos(x)^2$$

- $h(x) = (2x^2 - 3x + 7)^3$.
  $\rightarrow$ La fonction h est de la forme $h(x) = u(x)^3$ avec $u(x) = 2x^2 - 3x + 7$, on en déduit que :

$$h'(x) = 3 \times u'(x) \times u(x)^{3-1} = 3(4x-3)(2x^2 - 3x + 7)^2$$

Exercice 2

Déterminer :

1. les primitives de $x^2 - \frac{3}{2}x + 4$.
2. les primitives de $\frac{1}{(3x+5)^3}$.
3. les primitives de $3\sin(2x + \frac{\pi}{4})$.
4. les primitives de $\sin(x)\cos(x)^3$.
5. la primitive de $\frac{1}{(4x+3)^2}$ qui s'annule en 0 ; donner son ensemble de dérivation.
6. la primitive de $6x^2 + \frac{4}{x^2}$ qui vaut 1 en 1 ; donner son ensemble de dérivation.

Exercice 2

- les primitives de $x^2 - \frac{3}{2}x + 4$.

- les primitives de $x^2 - \frac{3}{2}x + 4$.
  $\rightarrow$ On cherche une primitive de chaque terme puis on fera la somme en faisant attention aux signes.
  Une primitive de x^2 est $\frac{x^3}{3}$, une primitive de $\frac{3}{2}x$ est $\frac{3}{2} \times \frac{x^2}{2}$ et une primitive de 4 est $4x$.
  Donc les primitives de $x^2 - \frac{3}{2}x + 4$ sont $\frac{x^3}{3} - \frac{3}{4}x^2 + 4x + k$ avec k une constante réelle.

- les primitives de $x^2 - \frac{3}{2}x + 4$.
  $\rightarrow$ On cherche une primitive de chaque terme puis on fera la somme en faisant attention aux signes.
  Une primitive de x^2 est $\frac{x^3}{3}$, une primitive de $\frac{3}{2}x$ est $\frac{3}{2} \times \frac{x^2}{2}$ et une primitive de 4 est $4x$.
  Donc les primitives de $x^2 - \frac{3}{2}x + 4$ sont $\frac{x^3}{3} - \frac{3}{4}x^2 + 4x + k$ avec k une constante réelle.
- les primitives de $\frac{1}{(3x+5)^3}$.

- les primitives de $x^2 - \frac{3}{2}x + 4$.
  $\rightarrow$ On cherche une primitive de chaque terme puis on fera la somme en faisant attention aux signes.
  Une primitive de x^2 est $\frac{x^3}{3}$, une primitive de $\frac{3}{2}x$ est $\frac{3}{2} \times \frac{x^2}{2}$ et une primitive de 4 est $4x$.
  Donc les primitives de $x^2 - \frac{3}{2}x + 4$ sont $\frac{x^3}{3} - \frac{3}{4}x^2 + 4x + k$ avec k une constante réelle.
- les primitives de $\frac{1}{(3x+5)^3}$.
  $\rightarrow$ La fonction $\frac{1}{(3x+5)^3}$ est de la forme $\frac{1}{3} \times \frac{u'(x)}{u(x)^3}$ avec $u(x) = 3x + 5$.
  On en déduit que les primitives de cette fonction sont :
  $$\frac{1}{3} \times \frac{1}{-3+1} \times \frac{1}{u(x)^{2-1}} + k = \frac{-1}{6} \times \frac{1}{(3x+5)^2} + k \text{ avec k une constante réelle}$$

- les primitives de $x^2 - \frac{3}{2}x + 4$.
  $\rightarrow$ On cherche une primitive de chaque terme puis on fera la somme en faisant attention aux signes.
  Une primitive de x^2 est $\frac{x^3}{3}$, une primitive de $\frac{3}{2}x$ est $\frac{3}{2} \times \frac{x^2}{2}$ et une primitive de 4 est $4x$.
  Donc les primitives de $x^2 - \frac{3}{2}x + 4$ sont $\frac{x^3}{3} - \frac{3}{4}x^2 + 4x + k$ avec k une constante réelle.
- les primitives de $\frac{1}{(3x+5)^3}$.
  $\rightarrow$ La fonction $\frac{1}{(3x+5)^3}$ est de la forme $\frac{1}{3} \times \frac{u'(x)}{u(x)^3}$ avec $u(x) = 3x + 5$.
  On en déduit que les primitives de cette fonction sont :
  $$\frac{1}{3} \times \frac{1}{-3+1} \times \frac{1}{u(x)^{2-1}} + k = \frac{-1}{6} \times \frac{1}{(3x+5)^2} + k \text{ avec k une constante réelle}$$
- les primitives de $3\sin(2x + \frac{\pi}{4})$.

- les primitives de $x^2 - \frac{3}{2}x + 4$.
  $\rightarrow$ On cherche une primitive de chaque terme puis on fera la somme en faisant attention aux signes.
  Une primitive de x^2 est $\frac{x^3}{3}$, une primitive de $\frac{3}{2}x$ est $\frac{3}{2} \times \frac{x^2}{2}$ et une primitive de 4 est $4x$.
  Donc les primitives de $x^2 - \frac{3}{2}x + 4$ sont $\frac{x^3}{3} - \frac{3}{4}x^2 + 4x + k$ avec k une constante réelle.
- les primitives de $\frac{1}{(3x+5)^3}$.
  $\rightarrow$ La fonction $\frac{1}{(3x+5)^3}$ est de la forme $\frac{1}{3} \times \frac{u'(x)}{u(x)^3}$ avec $u(x) = 3x + 5$.
  On en déduit que les primitives de cette fonction sont :
  $$\frac{1}{3} \times \frac{1}{-3+1} \times \frac{1}{u(x)^{2-1}} + k = \frac{-1}{6} \times \frac{1}{(3x+5)^2} + k \text{ avec k une constante réelle}$$
- les primitives de $3\sin(2x + \frac{\pi}{4})$.
  $\rightarrow$ Les primitives de cette fonction sont de la forme :
  $$-\frac{3}{2}\cos(2x + \frac{\pi}{4}) + k \text{ avec k une constante réelle}$$

Exercice 2

- les primitives de $\sin(x)\cos(x)^3$.

Exercice 2

- les primitives de $\sin(x)\cos(x)^3$.
  $\rightarrow$ La fonction $\sin(x)\cos(x)^3$ est de la forme $-u(x)' \times u(x)^3$ avec $u(x) = \cos(x)$ donc ses primitives sont de la forme :

$$-\frac{1}{3+1}u(x)^4 + k = -\frac{1}{4} \times \cos(x)^4 + k \text{ avec k une constante réelle}$$

Exercice 2

- les primitives de $\sin(x)\cos(x)^3$.
$\rightarrow$ La fonction $\sin(x)\cos(x)^3$ est de la forme $-u(x)' \times u(x)^3$ avec $u(x) = \cos(x)$ donc ses primitives sont de la forme :

$$-\frac{1}{3+1}u(x)^4 + k = -\frac{1}{4} \times \cos(x)^4 + k \text{ avec k une constante réelle}$$

- la primitive de $\frac{1}{(4x+3)^2}$ qui s'annule en 0 ; donner son ensemble de dérivation.

- les primitives de $\sin(x)\cos(x)^3$.
  $\rightarrow$ La fonction $\sin(x)\cos(x)^3$ est de la forme $-u(x)' \times u(x)^3$ avec $u(x) = \cos(x)$ donc ses primitives sont de la forme :

$$-\frac{1}{3+1}u(x)^4 + k = -\frac{1}{4} \times \cos(x)^4 + k \text{ avec k une constante réelle}$$

- la primitive de $\frac{1}{(4x+3)^2}$ qui s'annule en 0 ; donner son ensemble de dérivation.
  $\rightarrow$ Cette fonction est dérivable là où sont dénominateur est non nul, c'est à dire là où $4x + 3 \neq 0$ donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-\frac{3}{4}\}$.
  Cette fonction est de la forme $\frac{1}{4} \times \frac{u'(x)}{u(x)^2}$ avec $u(x) = 4x + 3$, donc ses primitives sont de la forme :

$$F(x) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{-2+1} \times \frac{1}{u(x)^{2-1}} + k = -\frac{1}{4} \times \frac{1}{4x+3} + k \text{ avec k une constante réelle}$$

  Pour trouver la primitive cherchée, il suffit de trouver la constante k adaptée en résolvant l'équation :

$$F(0) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{4} \times \frac{1}{4 \times 0 + 3} + k = 0 \Leftrightarrow k = \frac{1}{12}$$

  La primitive chercheé est donc $-\frac{1}{4} \times \frac{1}{4x+3} + \frac{1}{12}$.

Exercice 2

- la primitive de $6x^2 + \frac{4}{x^2}$ qui vaut 1 en 1 ; donner son ensemble de dérivation.

- la primitive de $6x^2 + \frac{4}{x^2}$ qui vaut 1 en 1 ; donner son ensemble de dérivation.
  $\rightarrow$ Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ car il faut que x soit différent de 0.
  Une primitive de $\frac{6}{x^2}$ est $-6 \times \frac{1}{x}$, une primitive de $4x^2$ est $4 \times \frac{1}{3}x^3 = \frac{4}{3}x^3$ donc les primitives de $6x^2 + \frac{4}{x^2}$ sont les fonctions :

  $$P(x) = \frac{-6}{x} + \frac{4}{3}x^3 + k \text{ avec k une constante réelle}$$

  Pour trouver la primitive cherchée, il suffit de trouver la bonne constante k en résolvant l'équation :

  $$P(1) = 1 \Leftrightarrow \frac{-6}{1} + \frac{4}{3} \times 1^3 + k = 1 \Leftrightarrow -6 + \frac{4}{3} + k = 1 \Leftrightarrow k = \frac{17}{3}$$

  La primitive cherchée est donc $\frac{-6}{x} + \frac{4}{3}x^3 + \frac{17}{3}$

Dans un circuit, un générateur de force éléctromotrice $E = 15V$ et de resistance interne $r = 10\Omega$, est branché en série avec une résistance variable R, en ohm.

1. La puissance, en watt, dissipée dans la résistance R est donnée par la relation $P = \frac{225R}{(10+R)^2}$. Calculer P pour $R = 30$ Ohm.
   On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 40]$ par $f(x) = \frac{225x}{(10+x)^2}$.
2. Calculer $f'(x)$
3. Montrer que sur l'intervalle $[0; 40]$, $f'(x)$ a le signe de $10 - x$.
4. Etablir le tableau de variations de f sur $[0; 40]$
5. En utilisant le tableau de variation, indiquer combien de solution possède l'équation $f(x) = 2$. On peut aussi s'aider de la calculatrice.
   En s'aidant de ce qu'on vient de faire sur la fonction f, répondre aux question suivantes :
6. Indiquer en combien de valeurs de R la puissance P vaut 4 W.
7. Indiquer pour quelle valeur de R la puissance dissipée est maximale.
8. Donner la valeur de cette puissance maximale.

Exercice 3

- La puissance, en watt, dissipée dans la résistance R est donnée par la relation $P = \frac{225R}{(10+R)^2}$. Calculer P pour $R = 30$ Ohm.

- La puissance, en watt, dissipée dans la résistance R est donnée par la relation $P = \frac{225R}{(10+R)^2}$. Calculer P pour $R = 30$ Ohm.
  $\rightarrow$ Pour $R = 30$ Ohm, on a $P = \frac{225 \times 30}{(10+30)^2} \approx 4.22W$.

- La puissance, en watt, dissipée dans la résistance R est donnée par la relation $P = \frac{225R}{(10+R)^2}$. Calculer P pour $R = 30$ Ohm.
  $\rightarrow$ Pour $R = 30$ Ohm, on a $P = \frac{225\times 30}{(10+30)^2} \approx 4.22W$.
- Calculer $f'(x)$.
  On a :

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(225x)' \times (10+x)^2 - 225x \times ((10+x)^2)'}{((10+x)^2)^2} \\
&= \frac{225(10+x)^2 - 225x \times 2(10+x)' \times (10+x)}{(10+x)^4} \\
&= \frac{225(10+x)^2 - 450x \times (10+x)}{(10+x)^4} \\
&= \frac{(10+x)(225(10+x) - 450x)}{(10+x)^4} \\
&= \frac{2250 - 225x}{(10+x)^3} \\
&= 225\frac{10-x}{(10+x)^3}
\end{aligned}
$$

Exercice 3

- Montrer que sur l'intervalle $[0; 40]$, $f'(x)$ a le signe de $10 - x$.

- Montrer que sur l'intervalle $[0;40]$, $f'(x)$ a le signe de $10-x$.
  $\rightarrow$ Sur l'intervalle $[0;40]$, le terme $10+x$ est positif donc $(10+x)^3$ est également positif sur $[0;40]$ donc ce terme n'a pas d'influence sur le signe de $f'(x)$. Donc dans $f'(x)$, il reste au nunérateur $10-x$: c'est son signe sur $[0;40]$ qui déterminera le signe de $f'(x)$ sur $[0;40]$.

- Montrer que sur l'intervalle $[0;40]$, $f'(x)$ a le signe de $10-x$.
  $\rightarrow$ Sur l'intervalle $[0;40]$, le terme $10+x$ est positif donc $(10+x)^3$ est également positif sur $[0;40]$ donc ce terme n'a pas d'influence sur le signe de $f'(x)$. Donc dans $f'(x)$, il reste au nunérateur $10-x$: c'est son signe sur $[0;40]$ qui déterminera le signe de $f'(x)$ sur $[0;40]$.
- Etablir le tableau de variations de f sur $[0;40]$.

Exercice 3

- Montrer que sur l'intervalle $[0;40]$, $f'(x)$ a le signe de $10-x$.
  $\rightarrow$ Sur l'intervalle $[0;40]$, le terme $10+x$ est positif donc $(10+x)^3$ est également positif sur $[0;40]$ donc ce terme n'a pas d'influence sur le signe de $f'(x)$. Donc dans $f'(x)$, il reste au nunérateur $10-x$: c'est son signe sur $[0;40]$ qui déterminera le signe de $f'(x)$ sur $[0;40]$.
- Etablir le tableau de variations de f sur $[0;40]$.
  $\rightarrow$

x	0		10		40
$10-x$		+	0	$-$	
$f'(x)$		+	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	5.625	$\searrow$	3.6

Exercice 3

- Montrer que sur l'intervalle $[0;40]$, $f'(x)$ a le signe de $10-x$.
  $\rightarrow$ Sur l'intervalle $[0;40]$, le terme $10+x$ est positif donc $(10+x)^3$ est également positif sur $[0;40]$ donc ce terme n'a pas d'influence sur le signe de $f'(x)$. Donc dans $f'(x)$, il reste au nunérateur $10-x$: c'est son signe sur $[0;40]$ qui déterminera le signe de $f'(x)$ sur $[0;40]$.
- Etablir le tableau de variations de f sur $[0;40]$.
  $\rightarrow$

x	0		10		40
$10-x$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	5.625	$\searrow$	3.6

- En utilisant le tableau de variation, indiquer combien de solution possède l'équation $f(x)=2$. On peut aussi s'aider de la calculatrice.

Exercice 3

- Montrer que sur l'intervalle $[0;40]$, $f'(x)$ a le signe de $10-x$.
  $\rightarrow$ Sur l'intervalle $[0;40]$, le terme $10+x$ est positif donc $(10+x)^3$ est également positif sur $[0;40]$ donc ce terme n'a pas d'influence sur le signe de $f'(x)$. Donc dans $f'(x)$, il reste au nunérateur $10-x$: c'est son signe sur $[0;40]$ qui déterminera le signe de $f'(x)$ sur $[0;40]$.
- Etablir le tableau de variations de f sur $[0;40]$.
  $\rightarrow$

x	0		10		40
$10-x$	$+$		0	$-$	
$f'(x)$	$+$		0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	5.625	$\searrow$	3.6

- En utilisant le tableau de variation, indiquer combien de solution possède l'équation $f(x)=2$. On peut aussi s'aider de la calculatrice.
  $\rightarrow$ L'équation $f(x)=2$ admet une seule solution sur $[0;40]$. En effet, elle est croissante sur $[0;10]$ de 0 à 5.625 : elle passe donc une seule fois par l'ordonnée $y=2$, par conséquent, l'équation $f(x)=2$ admet une unique solution sur $[0;10]$. Ensuite elle est décroissante sur $[10;40]$ de 5.625 à 3.6 : elle ne passe pas donc pas par l'ordonnée $y=2$, par conséquent, l'équation $f(x)=2$ n'admet aucune solution sur $[10;40]$.

En s'aidant de ce qu'on vient de faire sur la fonction f, répondre aux question suivantes :

- Indiquer en combien de valeurs de R la puissance P vaut 4 W.

En s'aidant de ce qu'on vient de faire sur la fonction f, répondre aux question suivantes :

- Indiquer en combien de valeurs de R la puissance P vaut 4 W.
  $\rightarrow$ En utilisant le même raisonnement que précédemment, on peut en déduire que la puissance P vaut 4W en deux valeurs de R. En effet, P joue le rôle de f et R joue le rôle de x.

En s'aidant de ce qu'on vient de faire sur la fonction f, répondre aux question suivantes :

- Indiquer en combien de valeurs de R la puissance P vaut 4 W.
  $\rightarrow$ En utilisant le même raisonnement que précédemment, on peut en déduire que la puissance P vaut 4W en deux valeurs de R. En effet, P joue le rôle de f et R joue le rôle de x.
- Indiquer pour quelle valeur de R la puissance dissipée est maximale.

En s'aidant de ce qu'on vient de faire sur la fonction f, répondre aux question suivantes :

- Indiquer en combien de valeurs de R la puissance P vaut 4 W.
  $\rightarrow$ En utilisant le même raisonnement que précédemment, on peut en déduire que la puissance P vaut 4W en deux valeurs de R. En effet, P joue le rôle de f et R joue le rôle de x.
- Indiquer pour quelle valeur de R la puissance dissipée est maximale.
  $\rightarrow$ La puissance dissipée est maximale en $R = 10$.

En s'aidant de ce qu'on vient de faire sur la fonction f, répondre aux question suivantes :

- Indiquer en combien de valeurs de R la puissance P vaut 4 W.
  $\rightarrow$ En utilisant le même raisonnement que précédemment, on peut en déduire que la puissance P vaut 4W en deux valeurs de R. En effet, P joue le rôle de f et R joue le rôle de x.
- Indiquer pour quelle valeur de R la puissance dissipée est maximale.
  $\rightarrow$ La puissance dissipée est maximale en $R = 10$.
- Donner la valeur de cette puissance maximale.

En s'aidant de ce qu'on vient de faire sur la fonction f, répondre aux question suivantes :

- Indiquer en combien de valeurs de R la puissance P vaut 4 W.
  $\rightarrow$ En utilisant le même raisonnement que précédemment, on peut en déduire que la puissance P vaut 4W en deux valeurs de R. En effet, P joue le rôle de f et R joue le rôle de x.
- Indiquer pour quelle valeur de R la puissance dissipée est maximale.
  $\rightarrow$ La puissance dissipée est maximale en $R = 10$.
- Donner la valeur de cette puissance maximale.
  $\rightarrow$ La puissance maximale dissipée vaut alors ≈ 5.625W.