☙ Étude de fonctions : aide pour le ds

Exercice 1 *Soit* $f(x) = \dfrac{6x^2+5x+30}{x+2}$ *définie sur* $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$.

1. *Déterminer* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{6x^2}{x} = \lim_{x\to+\infty} 6x = +\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{6x^2}{x} = \lim_{x\to-\infty} 6x = -\infty$$

Les limites sont infinies car le degré du numérateur est strictement plus grand que celui du dénominateur.

2. *Déterminer* $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x)$. *Quelles interprétations graphiques peut on en déduire ?*

$$\lim_{x\to-2^+} f(x) = \frac{6\times(-2)^2+5\times(-2)+30}{-2^+ +2} = \frac{44}{0^+} = +\infty$$
$$\lim_{x\to-2^-} f(x) = \frac{6\times(-2)^2+5\times(-2)+30}{-2^- +2} = \frac{44}{0^-} = -\infty$$

On en déduit l'existence d'une asymptote verticale d'équation $x = -2$.

3. *Déterminer les variations de* f.
On doit commencer par calculer la dérivée de f *:*

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\frac{6x^2+5x+30}{x+2}\right)' \\
&= \frac{(6x^2+5x+30)'\times(x+2)-(6x^2+5x+30)\times(x+2)'}{(x-2)^2} \\
&= \frac{(12x+5)(x+2)-(6x^2+5x+30)\times 1}{(x-2)^2} \\
&= \frac{12x^2+29x+10-6x^2-5x-30}{(x-2)^2} \\
&= \frac{6x^2+24x-20}{(x-2)^2}
\end{aligned}$$

On doit maintenant déterminer le signe du numérateur afin d'obtenir le signe de la dérivée, sachant que le dénominateur est positif.
On calcule alors son discriminant Δ *:*

$$\Delta = b^2-4ac = 24^2-4\times6\times(-20) = 1056 > 0$$

On a donc deux solutions distinctes à l'équation $6x^2+24x-30=0$ *:*

$$x_1 = \frac{-24+\sqrt{1056}}{12} \equiv 0.71$$
$$x_2 = \frac{-24-\sqrt{1056}}{12} \equiv -4.71$$

On a donc $x_2 < x_1$.
On peut en déduire le tableau de signe de $f'(x)$ *puis les variations de* f *:*

x	$-\infty$		x_2		-2		x_1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(x_2)$	$\searrow$	$-\infty \;\|\|\; +\infty$	$\searrow$	$f(x_1)$	$\nearrow$	$+\infty$

4. *Montrer que :*

$$\frac{6x^2+5x+30}{x+2} = 6x-7+\frac{44}{x+2}$$

En déduire une interprétation graphique.
On a :

$$6x-7+\frac{44}{x+2} = \frac{(6x-7)(x+2)+44}{x+2} = \frac{6x^2+12x-7x-14+44}{x+2} = \frac{6x^2+5x+30}{x+2}$$

On en déduit que la droite $y = 6x-7$ est asymptote oblique en $+\infty$ et en $-\infty$.

Exercice 2 *Soit* $f(x) = \dfrac{3x^2+7}{x^2+2}$ *définie sur* $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$.
Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{1} = 3$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3}{1} = 3$$

On en déduit l'existence d'une asymptote horizontale d'équation $y = 3$ en $+\infty$ et en $-\infty$.
Le degré du numérateur est le même que le degré du dénominateur, donc la limite est le quotient des coefficients devant les termes de plus grand degré.

Exercice 3 *Soit* $f(x) = \dfrac{3x+7}{x^2+2}$ *définie sur* $\mathbb{R}$.
Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{x} = 0$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3}{x} = 0$$

On en déduit l'existence d'une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $+\infty$ et en $-\infty$.
Le degré du numérateur est strictement plus petit que le degré du dénominateur, donc la limite est $y = 0$.