Récurrences 5

On considère la suite :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 9u_n - 64n - 112 \\ u_0 = 20 \end{cases}$$

1. Calculer u_1.
2. On pose : $\forall n \in \mathbb{N} :\ v_n = u_n - 8n - 15$.
   Montrer que la suite (v_n) est géométrique . Donner la raison et le premier terme.
3. En déduire que l'expression de v_n en fonction de n.
4. En déduire que l'expression de u_n en fonction de n.
5. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

1. On a :

$$u_1 = 9u_0 - 64 \times 0 - 112 = 68$$

2. On a :

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= u_{n+1} - 8(n+1) - 15\\
v_{n+1} &= 9u_n - 64n - 112 - 8(n+1) - 15\\
v_{n+1} &= 9u_n - (64+8)n - 15 - 112 - 8\\
v_{n+1} &= 9u_n - 72n - 135\\
v_{n+1} &= 9\left(u_n - \frac{72}{9}n - \frac{135}{9}\right)\\
v_{n+1} &= 9\left(u_n - 8n - 15\right)\\
v_{n+1} &= 9v_n
\end{aligned}$$

3. Comme la suite (v_n) est géométrique de raison 9, on peut en déduire que :

$$\begin{aligned}
v_n &= 9^n v_0\\
v_n &= 9^n(u_0 - 15)\\
v_n &= 5 \times 9^n
\end{aligned}$$

4. On a :

$$\begin{aligned}
v_n &= u_n - 8n - 15\\
\Leftrightarrow u_n &= v_n + 8n + 15\\
\Leftrightarrow u_n &= 5 \times 9^n + 8n + 15
\end{aligned}$$

5. On doit déterminer le signe de $u_{n+1} - u_n$:

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= 5 \times 9^{n+1} + 8(n+1) + 15 - (5 \times 9^n + 8n + 15)\\
&= 5 \times 9^n(9-1) + 8n + 8 + 15 - 8n - 15\\
&= 40 \times 9^n + 8 > 0
\end{aligned}$$

Comme $u_{n+1} - u_n > 0$, on en déduit que la suite (u_n) est croissante.