# ∽ Probabilités : cours

## 1 Loi exponentielle

### 1.1 Expression des probabilités

**Définition 1 (Densité)** *On dit qu'une variable aléatoire $X$ une loi à densité, de densité $f(x)$, sur $[a;b]$ si :*

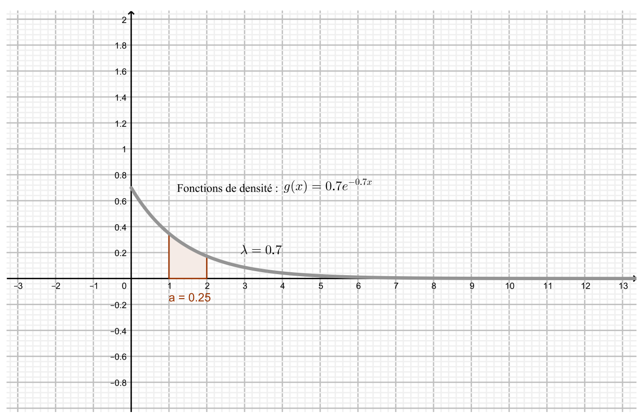
$$\forall t \in [a;b],\ \ P(X \leq t) = \int_a^t f(x)dx$$

**Définition 2** *La loi exponentielle de paramètre $\lambda$, un nombre positif, est la loi à densité dont la fonction de densité est définie pour $x \geq 0$ : $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$.*

**Propriété 1** *Pour $X$ une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda$ :*

$$\forall c, d \geq 0,\ \ P(c \leq X \leq d) = \int_c^d \lambda e^{-\lambda x} dx = e^{-\lambda c} - e^{-\lambda d}$$

**Illustration 1** *Avec géogébra, on obtient la probabilité $P(1 \leq X \leq 2) = 0.25$ qui s'interpréte comme l'aire sous la courbe et au dessus de l'axe des abscisses entre les abscisses* 1 *et* 2.




**Propriété 2 (Calculs de probabilités)** *Si $X$ est une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda$ :*

$$\forall t \geq 0,\ \ P(X \leq t) = 1 - e^{-\lambda t} \quad \textit{et} \quad P(X > t) = e^{-\lambda t}$$
$$\forall 0 \leq x \leq y,\ \ P_{X \geq x}(X \geq y) = P(X \geq y - x)(\ \textit{loi sans mémoire})$$

### 1.2 Espérance et écart-type

**Définition 3** *Pour $X$ suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda$ :*

1. *L'espérance de $X$ est le nombre réel :*

$$E(X) = \lim_{x \to +\infty} \int_0^x t\lambda e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}$$

2. *La variance de $X$ est le nombre réel :*

$$V(X) = \lim_{x \to +\infty} \int_0^x (t - E(X))^2 \lambda e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda^2}$$

3. *L'écart-type de $X$ est $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \frac{1}{\lambda}$*

# 2 Loi de Poisson

**Définition 4** *On dit qu'une variable aléatoire $X$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ si, pour tout entier naturel $k$, la loi de probabilité de $X$ est donnée par :*

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

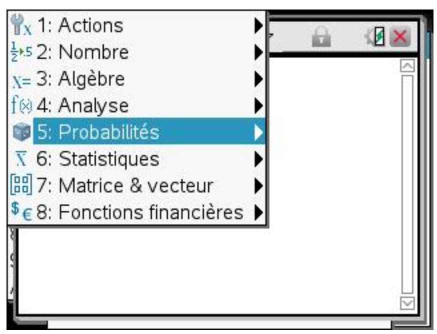
*On notera $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$.*
*On dira que $X$ suit une loi de Poisson si $X$ compte le nombre d'événements durant un intervalle de temps donné tel que :*

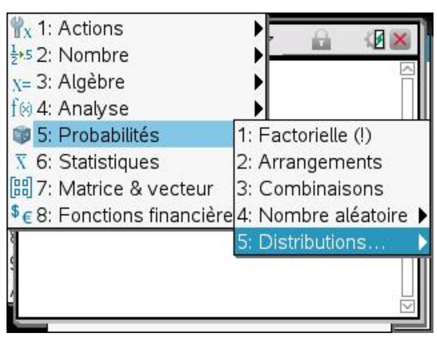
- ✏ *il y a rarement deux événements qui ont lieu en même temps.*
- ✏ *le nombre d'événements sur une période donnée ne dépend que de la durée de la période.*
- ✏ *les événements sont indépendants les uns des autres.*

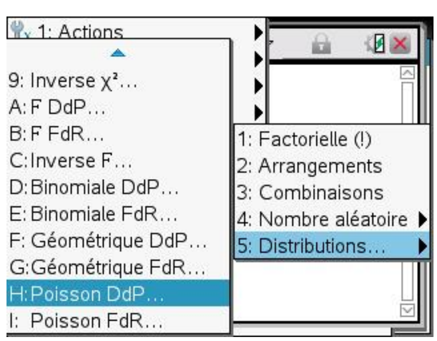
**Remarque 1 (Calculs avec la calculatrice)** *On cherche les trois probabilités suivantes :*

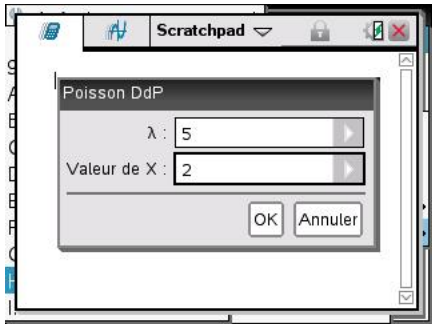
$$P(X = 2)$$
$$P(X \leq 3)$$
$$P(X \geq 1)$$

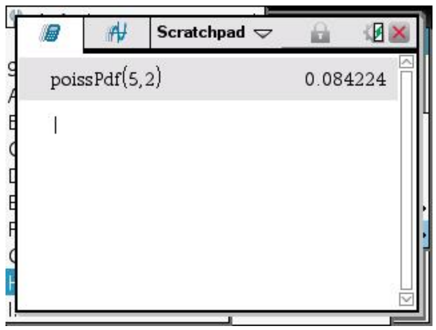
*avec $X \sim \mathscr{P}(5)$.*
*On les calcule dans le même ordre avec la calculatrice.*

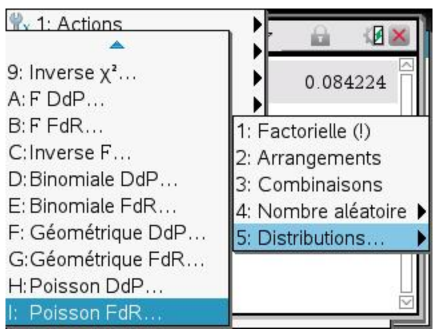


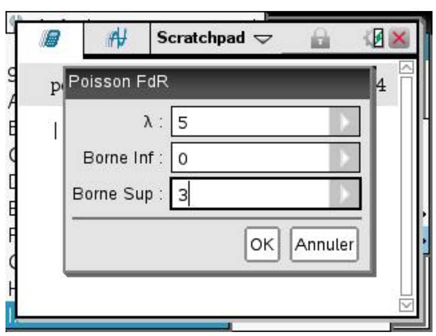



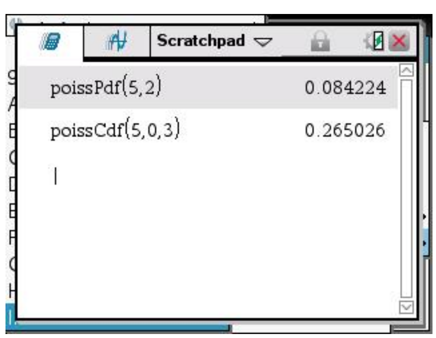



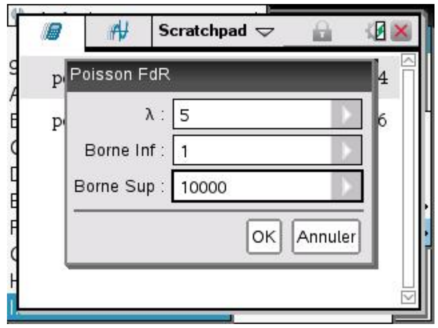

Scratchpad
Poisson DdP
λ : 5
Valeur de X : 2
OK
Annuler

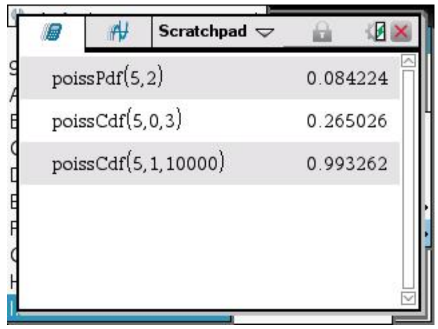

Scratchpad
poissPdf(5,2)
0.084224


1: Actions
9: Inverse χ²…
A: F DdP…
B: F FdR…
C: Inverse F…
D: Binomiale DdP…
E: Binomiale FdR…
F: Géométrique DdP…
G: Géométrique FdR…
H: Poisson DdP…
I: Poisson FdR…
0.084224
1: Factorielle (!)
2: Arrangements
3: Combinaisons
4: Nombre aléatoire
5: Distributions…


Scratchpad
Poisson FdR
λ : 5
Borne Inf : 0
Borne Sup : 3
OK
Annuler


Scratchpad
poissPdf(5,2)
0.084224
poissCdf(5,0,3)
0.265026




**Remarque 2 (Espérance et variance)** *Si une variable aléatoire $X$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda$, alors :*

$$E(X) = \lambda$$
$$V(X) = \lambda$$

## 3 Exercices

**Exercice 1** *La durée de vie, en heuresn d'un composant électronique est modélisée par la loi exponentielle de paramètre* $0.005$.

1. *Quelle est la probabilité que l'un des composants pris au hasard :*
   - **a.** *ait une durée de vie inférieure à* $100h$ *?*
   - **b.** *soit encore en état de marche au bout de* $250h$ *?*
2. *Calculer la durée de vie moyenne de l'un de ces composants.*

**Exercice 2** *La durée de vie, en heures, d'une ampoule d'un certain type peut être modélisée par une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle.*

1. *Quel est le paramètre $\lambda$ de cette loi sachant que $P(X \geq 800) = 0.2$ ? Arrondir au millième.*
2. *Calculer la durée de vie moyenne d'une ampoule.*

**Exercice 3** *Une entreprise estime que la durée de vie $X$ de ses machine-outil, exprimée en années, est une variable aléatoire qui soit une loi exponentielle.*
*Une étude statistique a permis de montrer que la durée moyenne de vie de ses machines est de* $15$ *ans.*

1. *Calculer la probabilité que la durée de vie d'une machine soit supérieure à* $25$ *ans.*
2. *Quelle est la probabilité qu'une machine ayant fonctionné pendant* $15$ *ans soit encore opérationelle* $10$ *ans plus tard ?*

**Exercice 4** *Dans une entreprise, une étude statistique a montré qu'en moyenne* $5\%$ *des articles d'une chaîne de fabrication présentent des défauts. Lors d'un contrôle de qualité, on envisage de prélever un échantillon de 120 articles.*

1. *Calculer le nombre moyen d'articles ayant des défauts sur* 120.
2. *On admet que la loi de la variable aléatoire X donnant le nombre d'articles défectueux d'un tel échantillon peut être approchée par la loi de Poisson de paramètre* $\lambda$.
   *Quelle est la valeur de* $\lambda$ *?*
3. *Évaluer les probabilités* $P(X = k)$ *pour k entier naturel inférieur à 8.*

**Exercice 5** *La variable aléatoire X donnant le nombre de clients se présentant au guichet "Affranchissements" d'un bureau de poste par intervalle de temps de durée 10 minutes, entre 14 h 30 et 16 h 30, suit la loi de Poisson de paramètre 5.*
*Calculer la probabilité que, sur une période de 10 minutes choisie au hasard entre 14 h 30 et 16 h 30 un jour d'ouverture du guichet, il y ait au moins 8 personnes à se présenter à ce guichet.*

**Exercice 6** *Dans un grand magasin, la variable aléatoire X dénombrant le nombre de lecteurs dvd vendus au cours d'une journée quelconque, suit la loi de Poisson de paramètre 4. Les ventes pendant deux journées sont supposées indépendantes.*

1. *On choisit une journée au hasard, calculer la probabilité de chacun des événements suivants :*
   **a.** *"La vente de la journée est au plus égale à 5."*
   **b.** *"La vente de la journée est au plus égale à 2 ou au moins égale à 6."*
2. *On choisit deux jours consécutifs au hasard.*
   **a.** *Calculer la probabilité que les ventes de chacune des deux journées soit au moins égale à 5.*
   **b.** *Calculer la probabilité que la somme des ventes de deux jours consécutifs soit égale à 2.*