Récurrences 7

On considère la suite :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right) \\ u_0 = 8 \end{cases}$$

1. Déterminer la fonction f telle que :

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

2. Démontrer que f est croissante sur $[\sqrt{2};+\infty[$

3. Démontrer que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n \geq u_{n+1} \geq \sqrt{2}$$

4. En déduire que la suite (u_n) converge vers une limite réelle l. Déterminer l.

1. On remplace tous les u_n par x :

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$$

2. On calcule la dérivée de $f(x)$:

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{x^2}\right)$$

On détermine le signe de $f'(x)$:

$$\begin{aligned}
&f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{a}{x^2}\right) \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(1 - \frac{a}{x^2}\right) \geq 0 \\
&\Leftrightarrow 1 - \frac{2}{x^2} \geq 0 \\
&\Leftrightarrow x^2 \geq 2 \\
&\Rightarrow x \geq \sqrt{2}
\end{aligned}$$

Donc la fonction f est croissante pour $x \geq \sqrt{2}$

3. Initialisation :
On a :

$$\begin{aligned}
&u_1 = \frac{1}{2}\left(u_0 + \frac{2}{u_0}\right) \\
&\sqrt{2} \leq u_1 = 4.125 \leq u_0 = 8
\end{aligned}$$

L'initialisation est établie.
Hérédité :
On suppose que la propriété est vraie pour un certain rang $n \geq 0$:

$$u_n \geq u_{n+1} \geq \sqrt{2} \text{ c'est l'hypothèse de récurrence}$$

On part de l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned}
&u_n \geq u_{n+1} \geq \sqrt{2} \\
&\Rightarrow f(u_n) \geq f(u_{n+1}) \geq f(\sqrt{2}) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} + \frac{2}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2} \\
&\Rightarrow u_{n+1} \geq u_{n+2} \geq \sqrt{2}
\end{aligned}$$

L'hérédité est établie.
Donc pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N} : u_n \geq u_{n+1} \geq \sqrt{2}$ Comme la suite est décroissante et minorée, d'après le théorème de convergence monotone, la suite converge vers une limite $l \in \mathbb{R}$.
Cette limite vérifie :

$$
\begin{aligned}
&l = \frac{1}{2}\left(l + \frac{2}{l}\right)\\
\Leftrightarrow &2l = l + \frac{2}{l}\\
\Leftrightarrow &2l^2 = l^2 + 2\\
\Leftrightarrow &l = \pm\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

Comme les termes de la suite dépassent tous $\sqrt{2}$, on en déduit que $l = \sqrt{2}$.