↜ Représentations paramétriques et équations cartésiennes

Exercice 1 *Soit $\mathscr{D}$ la droite passant par le point A et dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}$, donnés ci-dessus.*
Dans chacun des cas suivants, déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}$ et une autre point de cette droite.

1. $A(-2;4;1)$ *et* $\overrightarrow{u}(3;2;1)$
2. $A(5;0;-4)$ *et* $\overrightarrow{u}(-2;4;3)$
3. $A(-7;8;2)$ *et* $\overrightarrow{u}(0;2;-3)$
4. $A(16;4;0)$ *et* $\overrightarrow{u}(-3;3;0)$

Exercice 2 *Soient* $G(4;-6;-7)$ *et* $F(8;-3;-5)$ *deux points de l'espace.*
Déterminer une représentation paramétrique de la droite (FG).

Exercice 3 *On considère une droite Δ dont une représentation paramétrique est :*

$$\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 7 - t \\ z = -11 - t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

1. *Justifier que les points* $A(-5;11;-7)$ *et* $B(9;-3;-21)$ *appartiennent à la droite* Δ.
2. *Les points A et B sont-ils alignés avec le point* $C(-4;4;6)$ *?*
3. *Que peut-on en déduire sur la position relative du point C et de la droite Δ ?*
4. *Proposer une autre méthode pour justifier la réponse donnée à la question précédente.*

Exercice 4 *On considère les droites Δ_1 et Δ_2 dont on donne respectivement pour chacune une représentation paramétrique :*

$$\begin{cases} x = 3t - 6 \\ y = t \\ z = 4 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \qquad \begin{cases} x = -3t' + 3 \\ y = 2t' - 3 \\ z = t' + 2 \end{cases} \quad t' \in \mathbb{R}$$

1. *Justifier que le point* $A(-3;1;4)$ *appartient à chacune de ces deux droites.*
2. *Que peut-on en déduire sur la position relative de Δ_1 et Δ_2 ?*
3. *Ces deux droites sont-elles perpendiculaires ? confondues ?*

Exercice 5 *On considère la droite $(\mathscr{D})$ dont une représentation paramétrique est :*

$$\begin{cases} x = 4 - 3t \\ y = -1 + 2t \\ z = 3 + 2t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

Le point $B(4;-1;3)$ *est-il le projeté orthogonal sur la droite* $(\mathscr{D})$ *du point* $A(-1;0;1)$ *? Justifier.*

Exercice 6 *On considère les plans définis par les équations cartésiennes suivantes :*

$$\begin{aligned} (\mathscr{P}_1) &: \ 2x - 5y + z - 4 = 0 \\ (\mathscr{P}_2) &: \ x + 3y - z + 12 = 0 \\ (\mathscr{P}_3) &: \ 8x - y + 5 = 0 \\ (\mathscr{P}_4) &: \ x - z = 0 \end{aligned}$$

Déterminer les coordonnées d'un vecteur normal à chacun de ces plans.

Exercice 7 *Soit $(\mathscr{P})$ le plan de l'espace dont une équation cartésienne est $6x+3y+z-12=0$.*

1. *Le point $A(5;-1;-7)$ appartient-il au plan $(\mathscr{P})$?*
2. *Déterminer les coordonnées du point de $(\mathscr{P})$ dont l'abscisse et l'ordonnées sont égales à -2.*
3. *Soit c un nombre réel. Pour quelles valeurs de c le point $C(c;c;c)$ appartient-il au plan $(\mathscr{P})$?*

Exercice 8 *On considère le plan $\mathscr{P}$ qui passe par le point A et donc le vecteur $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal.*
Déterminer une équation cartésienne de $\mathscr{P}$ dans chacun des cas suivants :

$$\begin{array}{ll} A(-2;4;1) & \overrightarrow{n}(4;2;-1) \\ A(5;3;-2) & \overrightarrow{n}(1;-3;5) \\ A(3;3;-5) & \overrightarrow{n}(1;0;-1) \\ A(3;3;-5) & \overrightarrow{n}(0;-2;3) \end{array}$$

Exercice 9 *On considère les points $A(1;-1;4)$, $B(2;-3;0)$ et $C(2;-1;5)$.*

1. *Justifier que ces trois plans définissent bien un plan.*
2. *Justifier que le vecteur $\overrightarrow{n}(2;5;-2)$ est un vecteur normal à ce plan.*
3. *En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).*

Exercice 10 *On considère un plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne $5x-3y+2z=0$ ainsi que les points $A(1;1;-1)$, $B\left(0;3;\frac{9}{2}\right)$ et $C(4;0;-10)$.*
Justifier que le plan $(\mathscr{P})$ est le plan (ABC).

Exercice 11 *On considère le plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne $-x+2y+2z-1=0$ et le point $A(1;1;1)$.*
Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathscr{P}$.

Exercice 12 *On considère le plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne $3x-5y+2z+1=0$ et la droite Δ de représentation paramétrique :*

$$\begin{cases} x = 2-2t \\ y = 5-3t \\ z = 2t \end{cases}$$

1. *Justifier que la droite Δ et le plan $\mathscr{P}$ ne sont pas parallèles.*
2. *Justifier qu'un point $M(x;y;z)$ appartient à l'intersection de plan et de cette droite s'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que :*

$$3(2-2t)-5(5-3t)+2(2t)+1=0$$

3. *En déduire l'intersection entre le plan et la droite.*

Exercice 13 *On considère les droites $\mathscr{D}$ et Δ de représentations paramétriques respectives :*

$$\begin{cases} x = 2+t \\ y = 1-t \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} x = 3+3u \\ y = 5+2u \\ z = 2u \end{cases} \quad u \in \mathbb{R}$$

1. *Justifier qu'un point $M(x;y;z)$ appartient à l'intersection des deux droites s'il existe $t \in \mathbb{R}$ et $u \in$ tel que :*

$$\begin{cases} 2+t = 3+3u \\ 1-t = 5+2u \\ t = 2u \end{cases}$$

2. *En déduire les valeurs des réels t et u.*
3. *Conclure sur l'intersection des deux droites.*

Exercice 14 *L'espace est rapporté un repère orthonormal où l'on considère :*

- *les points* $A(2~;~-1~;~0)$ $B(1~;~0~;~-3)$, $C(6~;~6~;~1)$ *et* $E(1~;~2~;~4)$ *;*
- *Le plan* $\mathcal{P}$ *d'équation cartésienne* $2x-y-z+4=0$.

1. **a.** *Démontrer que le triangle ABC est rectangle en A.*

   b. *Calculer le produit scalaire* $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$ *puis les longueurs BA et BC.*

   c. *En déduire la mesure en degrés de l'angle* $\widehat{ABC}$ *arrondie au degré.*
2. **a.** *Démontrer que le plan* $\mathcal{P}$ *est parallèle au plan ABC.*

   b. *En déduire une équation cartésienne du plan ABC.*

   c. *Déterminer une représentation paramétrique de la droite* $\mathcal{D}$ *orthogonale au plan ABC et passant par le point E.*

   d. *Démontrer que le projeté orthogonal H du point E sur le plan ABC a pour coordonnées* $\left(4~;~\dfrac{1}{2}~;~\dfrac{5}{2}\right)$.
3. *On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par* $\mathcal{V}=\dfrac{1}{3}\mathcal{B}h$ *où* $\mathcal{B}$ *désigne l'aire d'une base et* h *la hauteur de la pyramide associée à cette base.*
   Calculer l'aire du triangle ABC puis démontrer que le volume de la pyramide ABCE est égal à $16,5$ *unités de volume.*

Exercice 15 *L'espace est muni d'un repère orthonormé* $\left(O,~\vec{\imath},~\vec{\jmath},~\vec{k}\right)$.
On considère les points

$$A(3~;~-2~;~2),\quad B(6~;~1~;~5),\quad C(6~;~-2~;~-1)\quad \text{et } D(0~;~4~;~-1).$$

On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par la formule :

$$V=\frac{1}{3}\mathcal{A}\times h$$

où $\mathcal{A}$ est l'aire de la base et h la hauteur correspondante.

1. *Démontrer que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.*
2. **a.** *Montrer que le triangle ABC est rectangle.*

   b. *Montrer que la droite (AD) est perpendiculaire au plan (ABC).*

   c. *En déduire le volume du tétraèdre ABCD.*
3. *On considère le point H(5; 0; 1).*

   a. *Montrer qu'il existe des réels* α *et* β *tels que* $\overrightarrow{BH}=\alpha\overrightarrow{BC}+\beta\overrightarrow{BD}$.

   b. *Démontrer que H est le projeté orthogonal du point A sur le plan (BCD).*

   c. *En déduire la distance du point A au plan (BCD).*
4. *Déduire des questions précédentes l'aire du triangle BCD.*

Exercice 16 *Dans l'espace, rapporté à un repère orthonormé* $\left(O,~\vec{\imath},~\vec{\jmath},~\vec{k}\right)$, *on considère les points :*

$$A(2~;~0~;~3),\ B(0~;~2~;~1),\ C(-1~;~-1~;~2)\ \text{et } D(3~;~-3~;~-1).$$

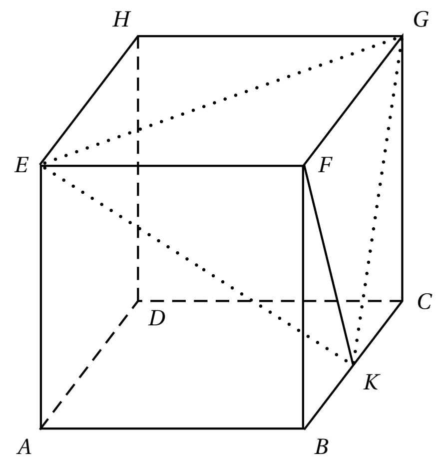
1. ***Calcul d'un angle***
   a. *Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ et en déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés.*
   b. *Calculer les longueurs AB et AC.*
   c. *À l'aide du produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, déterminer la valeur du cosinus de l'angle $\widehat{BAC}$ puis donner une valeur approchée de la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ au dixième de degré.*
2. ***Calcul d'une aire***
   a. *Déterminer une équation du plan $\mathscr{P}$ passant par le point C et perpendiculaire à la droite (AB).*
   b. *Donner une représentation paramétrique de la droite (AB).*
   c. *En déduire les coordonnées du projeté orthogonal E du point C sur la droite (AB), c'est-à-dire du point d'intersection de la droite (AB) et du plan $\mathscr{P}$*
   d. *Calculer l'aire du triangle ABC.*
3. ***Calcul d'un volume***
   a. *Soit le point $F(1\ ;\ -1\ ;\ 3)$. Montrer que les points A, B, C et F sont coplanaires.*
   b. *Vérifier que la droite (FD) est orthogonale au plan (ABC).*
   c. *Sachant que le volume d'un tétraèdre est égal au tiers de l'aire de sa base multiplié par sa hauteur, calculer le volume du tétraèdre ABCD.*

Exercice 17 *On considère un cube ABCDEFGH.*

On appelle K le milieu du segment [BC].
On se place dans le repère $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AD},\,\overrightarrow{AE}\right)$ et on considère le tétraèdre EFGK.
On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par :

$$V = \frac{1}{3} \times \mathscr{B} \times h$$

où $\mathscr{B}$ désigne l'aire d'une base et h la hauteur relative à cette base.



1. *Préciser les coordonnées des points E, F, G et K.*
2. *Montrer que le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$ est orthogonal au plan (EGK).*
3. *Démontrer que le plan (EGK) admet pour équation cartésienne : $2x-2y+z-1=0$.*
4. *Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d) orthogonale au plan (EGK) passant par F.*
5. *Montrer que le projeté orthogonal L de F sur le plan (EGK) a pour coordonnées $\left(\frac{5}{9}\ ;\ \frac{4}{9}\ ;\ \frac{7}{9}\right)$.*
6. *Justifier que la longueur LF est égale à $\dfrac{2}{3}$.*
7. *Calculer l'aire du triangle EFG. En déduire que le volume du tétraèdre EFGK est égal à $\dfrac{1}{6}$.*
8. *Déduire des questions précédentes l'aire du triangle EGK.*
9. *On considère les points P milieu du segment [EG], M milieu du segment [EK] et N milieu du segment[GK]. Déterminer le volume du tétraèdre FPMN.*