Récurrences 6

On considère la suite :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{20u_n+117}{u_n+16} \\ u_0 = 17 \end{cases}$$

1. Calculer u_1.
2. On considère la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{20x+117}{x+16}$$

   Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = f(u_n)$

   a. Montrer que la fonction f est croissante sur $[0;+\infty[$.

   b. Résoudre l'équation $f(x) = x$ sur $[0;+\infty[$.

   c. En déduire que $f(x) > 13$ pour $x > 13$

   d. Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N} :\ u_n > 13$
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(13-u_n)(u_n+9)}{u_n+16}$$

4. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
5. En déduire que la suite (u_n) converge et donner sa limite.
6. On définit la suite (v_n) pour tout entier naturel par :

$$v_n = \frac{u_n-13}{u_n+9}$$

   Calculer v_0
7. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{7}{29}$.
8. Déterminer la limite de (v_n) puis celle de (u_n).

1. On a :

$$
\begin{aligned}
u_1 &= \frac{20 \times u_0 + 117}{u_0 + 16} \\
&= \frac{20 \times 17 + 117}{17 + 16} \\
&= \frac{457}{33}
\end{aligned}
$$

2. **a.** On va calculer la dérivée de la fonction f :

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(20x+117)' \times (x+16) - (20x+117) \times (x+16)'}{(x+16)^2} \\
&= \frac{20 \times (x+16) - (20x+117) \times 1}{(x+16)^2} \\
&= \frac{20x + 320 - 20x - 117}{(x+16)^2} \\
&= \frac{203}{(x+16)^2}
\end{aligned}
$$

Comme la dérivée de la fonction est strictement positive, on en déduit que la fonction f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$

b. On a :

$$
\begin{aligned}
& f(x) = x \\
& \Leftrightarrow \frac{20x+117}{x+16} = x \\
& \Leftrightarrow 20x + 117 = x(x+16) \\
& \Leftrightarrow 20x + 117 = x^2 + 16x \\
& \Leftrightarrow x^2 - 4x - 117 = 0
\end{aligned}
$$

On doit résoudre l'équation du second degré en commençant par calculer le discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 484 > 0$$

Il y a donc deux racines réelles disctinctes :

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 + \sqrt{484}}{2} = 13 \\
x_2 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 - \sqrt{484}}{2} = -9
\end{aligned}
$$

c. On sait que f est croissante pour $x > 0$, donc :

$$x > 13 \Rightarrow f(x) > f(13) = 13$$

Initialisation :
On a $u_0 = 17 > 13$
L'initialisation est établie.
Hérédité :

On suppose que la propriété est vraie pour un rang $n \geq 0$:

$$u_n > 13 : \text{ c'est l'hypothèse de récurrence}$$

On démarre de l'hypothèse de récurrence :

$$u_n > 13 \Rightarrow u_{n+1} = f(u_n) > f(13) = 13 \text{ par croissance de } f$$

L'hérédité est établie.
Donc, $\forall n \in \mathbb{N} : u_n > 13$

3. On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{20u_n - 117}{u_n + 16} - u_n \\ &= \frac{20u_n - 117}{u_n + 16} - \frac{(u_n + 16)u_n}{u_n + 16} \\ &= \frac{-u_n^2 + 4u_n - 117}{u_n + 16} \end{aligned}$$

Or :

$$\frac{(13 - u_n)(u_n + 9)}{u_n + 16} = \frac{13u_n - 13 \times 9 - u_n^2 - 9u_n}{u_n + 16} = \frac{-u_n^2 + 4u_n - 117}{u_n + 16}$$

4. Comme $u_n > 13$ alors $13 - u_n < 0$, $u_n + 9 > 0$ et $u_n + 16 > 0$, par conséquent, $u_{n+1} - u_n < 0$ et donc la suite (u_n) est décroissante.

5. Comme la suite (u_n) est décroissante et minorée par 13, alors d'après le théorème de convergence monotone, elle converge vers une limite l qui vérifie $f(l) = l$.
On a donc le choix entre 13 et -9 pour l et comme l est positif, on en déduit que $l = 13$.

6. On a :

$$v_0 = \frac{u_0 - 13}{u_0 + 9} = \frac{4}{8}$$

7. On a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{u_{n+1} - 13}{u_{n+1} + 9} \\ &= \frac{\frac{20u_n + 117}{u_n + 16} - 13}{\frac{20u_n + 117}{u_n + 16} + 9} \\ &= \frac{7u_n - 91}{29u_n + 261} \\ &= \frac{7}{29} \times \frac{u_n - 13}{u_n + 9} \\ &= \frac{7}{29} \times v_n \end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison $\frac{7}{29}$ et de premier terme de $v_0 = \frac{4}{8}$.

8. On peut exprimer en fonction de n et de v_0 :

$$v_n = \frac{4}{8}\left(\frac{7}{29}\right)^n$$

Comme la raison est comprise entre 0 et 1, la suite tend vers 0 et on a :

$$\begin{aligned}
&v_n = \frac{u_n - 13}{u_n + 9} \\
\Leftrightarrow\, &v_n(u_n + 9) = u_n - 13 \\
\Leftrightarrow\, &v_n u_n - u_n = -9v_n - 13 \\
\Leftrightarrow\, &u_n = \frac{-9v_n - 13}{v_n - 1}
\end{aligned}$$

Par opération sur les limites, on en déduit que la limite de (u_n) est $\frac{-13}{-1} = 13$