



Міністерство освіти і науки

України Національний технічний університет України
“Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського” Факультет
інформатики та обчислювальної техніки Кафедра автоматики та
управління в технічних системах

Лабораторна робота №2
Теорія ймовірності і математична статистика
«Інтервальні оцінки параметрів розподілу»
Варіант 65

Виконали
студенти групи
ІА-11:

Юраш Б.В.
Воробей А.О.
Нікіфоров М.С.
Мельник В.О.

Перевірив:

ас. Цимбал С. І.

Київ 2022

Мета роботи

Ознайомитись з методикою визначення інтервальних оцінок параметрів розподілу та дослідити, що впливає на якість інтервальних оцінок

Теоретичні відомості

Інтервальною називають оцінку, яка визначається двома числами — кінцями інтервалу.

Інтервальні оцінки дозволяють встановити точність та надійність оцінок.

Надійністю (довірчою ймовірністю) оцінки параметра ϑ за ϑ' називають ймовірність

$$\gamma = P(|\theta - \theta'| < \delta)$$

з якою виконується нерівність

$$|\theta - \theta'| < \delta$$

Інтервал називають довірчим, якщо він покриває невідомий параметр ϑ із заданою надійністю γ . Наприклад, нехай надійність дорівнює 95%, а шуканий параметр – математичне сподівання розподілу генеральної сукупності. Це означає, що якби ми повторювали експеримент знову і знову, 95% всіх вибірок – результатів експерименту дали б довірчий інтервал, що містить справжнє значення математичного сподівання, і лише 5% вибірок дали б помилковий інтервал.

Інформація про точність оцінки передається довжиною інтервалу. Короткий інтервал передбачає точну оцінку. Ми не можемо бути впевнені, що інтервал містить справжнє значення невідомого параметру генеральної сукупності, оскільки ми використовуємо лише вибірку з генеральної сукупності для обчислення оцінки параметру та довірчого інтервалу. Однак ми маємо високу впевненість, що довірчий інтервал містить невідомий параметр генеральної сукупності.

Якщо вибіркове середнє \bar{x} для випадкової вибірки об'ємом n від нормальної генеральної сукупності з відомою дисперсією σ^2 , $100(1 - \alpha)\%$ довірчий інтервал на μ задається за формулою:

$$\bar{x} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Якщо \bar{x} і s – вибіркові середнє і середньоквадратичне відхилення випадкової вибірки від нормального розподілу з невідомою дисперсією σ^2 , довірчий інтервал $100(1 - \alpha)\%$ на μ задається за формулою:

$$\bar{x} - t_{\alpha/2, n-1} s / \sqrt{n} \leq \mu \leq \bar{x} + t_{\alpha/2, n-1} s / \sqrt{n}$$

Якщо \bar{x} і s^2 – дисперсія випадкової вибірки n спостережень від генеральної сукупності з нормальним розподілом з невідомою дисперсією σ^2 , то довірчий інтервал на σ^2 з надійністю $100(1 - \alpha)\%$ дорівнює:

$$\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2, n-1}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2, n-1}}$$

Де $\chi^2_{\alpha/2, n-1}$ і $\chi^2_{1-\alpha/2, n-1}$ значення перцентилів функції розподілу χ^2 з відповідними α та $n - 1$ степенями вільності.

Завдання

Продовжити роботу зі згенерованими вибірками у л/р №1 та:

1. Побудувати 95% двосторонні довірчі інтервали на математичне сподівання та середньоквадратичне відхилення.
2. Дослідити залежність оцінок від рівня довіри та обсягу вибірки.

Результат роботи

```
-----Task 1-----

Вибірка: [-0.4  0.3 -0.71 -0.17  0.13 -0.11  2.46  1.94  1.27  0.37 -1.09 -2.76
 2.06  1.45 -1.31  0.9   0.58  2.69  1.02 -2.36 -1.86 -0.03  2.72 -0.95
 0.32 -1.89  1.16 -0.99 -1.73  0.46  0.49  2.35  0.84 -1.14 -1.38 -2.07
-1.1   0.61  0.96 -2.36  1.45  0.47 -1.89 -0.69 -0.79  0.35  0.78 -0.64
-0.4   -0.33 -0.37  0.17  1.73  1.72 -2.65 -2.33  0.52 -2.31  0.57 -1.33
 0.03  0.75 -2.14  1.33 -0.53  1.19  0.78  0.5   0.1   1.65 -1.49  0.46
 2.61 -0.4   -0.77  1.22 -0.24  1.49  1.48 -1.47  1.29 -1.92  1.24 -2.01
-0.25  1.72  1.34  0.38  0.23  1.43  1.16  0.84 -1.5   0.06  1.11  0.53
-0.62  1.11  3.95 -1.35 -1.02  0.99 -0.88 -0.36  0.95 -0.42 -0.18  1.02
-0.25 -1.93  2.68 -0.28 -1.16 -0.91  0.27 -0.96 -0.49  0.61 -0.68 -1.09
-0.75]

Вибіркове середнє:  0.04256198347107441
Вибіркове середньоквадратичне відхилення:  1.3

Двохсторонній довірчий інтервал для математичного сподівання з рівнем довіри 95%:
(-0.18907012379275018, 0.274194090734899)

Двохсторонній довірчий інтервал для середньоквадратичного відхилення з рівнем довіри 95%:
(1.193913198456123, 1.539265287085225)
```

```
Залежність інтервальної оцінки математичного сподівання
Різні значення довіри
0.1  : (-0.06650377900849226, -0.03680200611547477)  diff  0.029701772893017495
0.2  : (-0.08159391384166893, -0.021711871282298092)  diff  0.05988204255937084
0.3  : (-0.09719076586469606, -0.006115019259270965)  diff  0.0910757466054251
0.4  : (-0.11362749860929744,  0.010321713485330411)  diff  0.12394921209462785
0.5  : (-0.13136531758515682,  0.028059532461189786)  diff  0.1594248500463466
0.6  : (-0.1511172201660552,  0.04781143504208817)  diff  0.19892865520814337
0.7  : (-0.17414047495670415,  0.07083468983273711)  diff  0.24497516478944126
0.8  : (-0.20310898667179994,  0.0998032015478329)  diff  0.30291218821963284
0.9  : (-0.24604468483806663,  0.1427388997140996)  diff  0.3887835845521662

Різний обсяг вибірки
10   : (-0.63573354199593,  0.9757335419959299)  diff  1.61146708399186
20   : (-1.1277396513747782,  0.011739651374777949)  diff  1.1394793027495562
30   : (-0.33385714403312755,  0.5965238106997941)  diff  0.9303809547329216
40   : (-0.5541167709979651,  0.2516167709979649)  diff  0.80573354199593
50   : (-0.4463349943309162,  0.2743349943309162)  diff  0.7206699886618324
60   : (-0.3089393410892316,  0.34893934108923164)  diff  0.6578786821784632
70   : (-0.24025293930063552,  0.36882436787206396)  diff  0.6090773071726995
80   : (-0.169994825687389,  0.399744825687389)  diff  0.569739651374778
```

Залежність інтервальної оцінки середньоквадратичного відхилення

Різні значення довіри

0.1	:	(1.0884982704330517,	1.1063425378776015)	diff	0.01784426744454981
0.2	:	(1.0796153834328557,	1.1155958392086336)	diff	0.03598045577577791
0.3	:	(1.0705606943967423,	1.1252958473004349)	diff	0.054735152903692574
0.4	:	(1.0611549742011361,	1.1356706753839436)	diff	0.07451570118280748
0.5	:	(1.0511588735864992,	1.147045883488353)	diff	0.09588700990185384
0.6	:	(1.040212087397262,	1.1599364189336956)	diff	0.11972433153643358
0.7	:	(1.0276916934725753,	1.1752669076386932)	diff	0.14757521416611796
0.8	:	(1.012294235871757,	1.1950366258377982)	diff	0.1827423899660412
0.9	:	(0.9901764200572885,	1.2253628760624018)	diff	0.23518645600511334

Різний обсяг вибірки

10	:	(0.7325898830114557,	1.9443953099722338)	diff	1.211805426960778
20	:	(1.0032384858285013,	1.9267852527650797)	diff	0.9235467669365784
30	:	(0.8117088060568661,	1.3701443624055045)	diff	0.5584355563486384
40	:	(1.208351660337617,	1.8940921032689813)	diff	0.6857404429313643
50	:	(1.1394472942104374,	1.6998030343169281)	diff	0.5603557401064907
60	:	(1.067376192011974,	1.5358492407831252)	diff	0.46847304877115126
70	:	(1.0306980348138544,	1.442401921649606)	diff	0.41170388683575165
80	:	(1.0876903380558038,	1.4886303630263331)	diff	0.4009400249705293

Висновок

На лабораторній роботі, ми навчилися застосовувати знання з теорії ймовірності у програмування Python. Написали програмний код, який будує двосторонні довірчі інтервали на параметри розподілу, а саме на математичне сподівання та середньоквадратичне відхилення. Дослідили вплив обсягу вибірки та рівню довіри на шукані оцінки.

Посилання на код

