

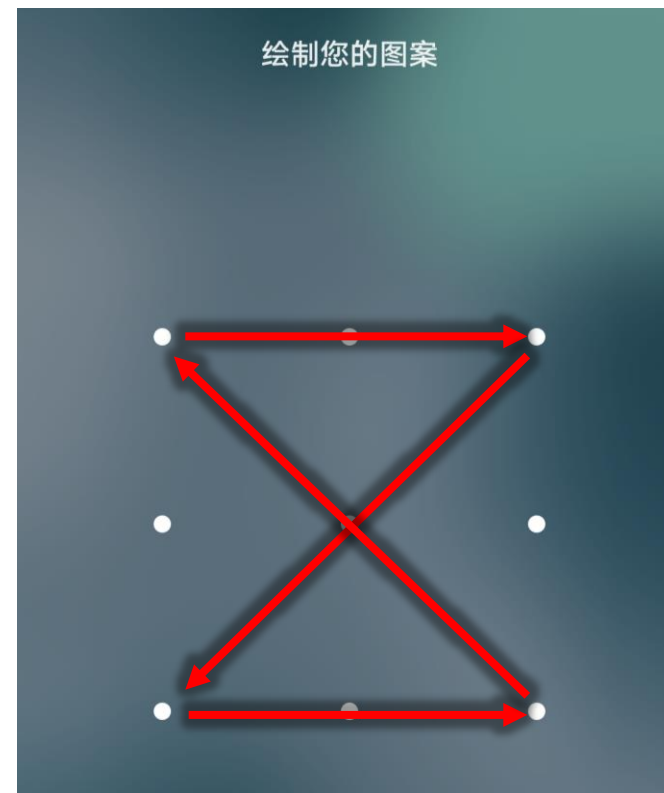
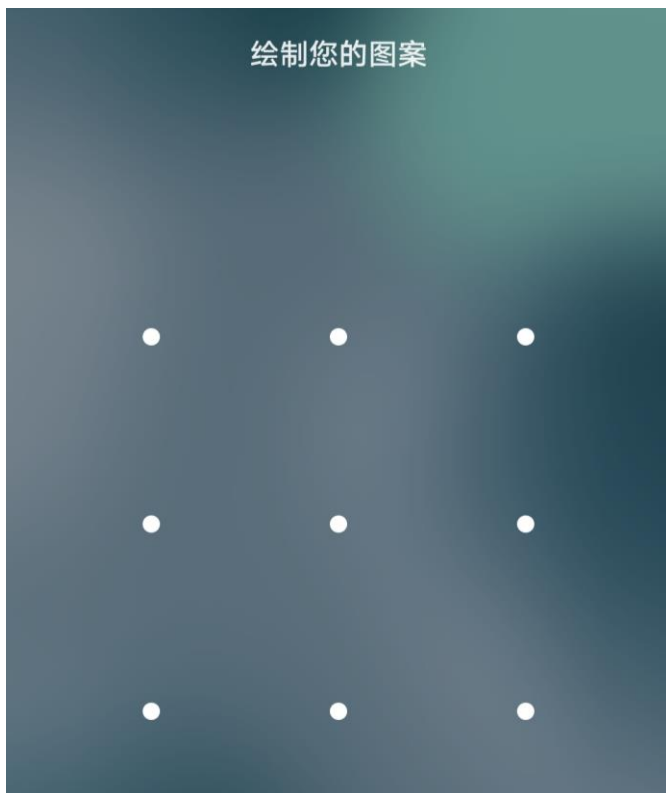
# 图算法篇：图算法小结

童咏昕

北京航空航天大学  
计算机学院

中国大学MOOC北航《算法设计与分析》

- 一笔画问题：手机解锁图案需一笔画出



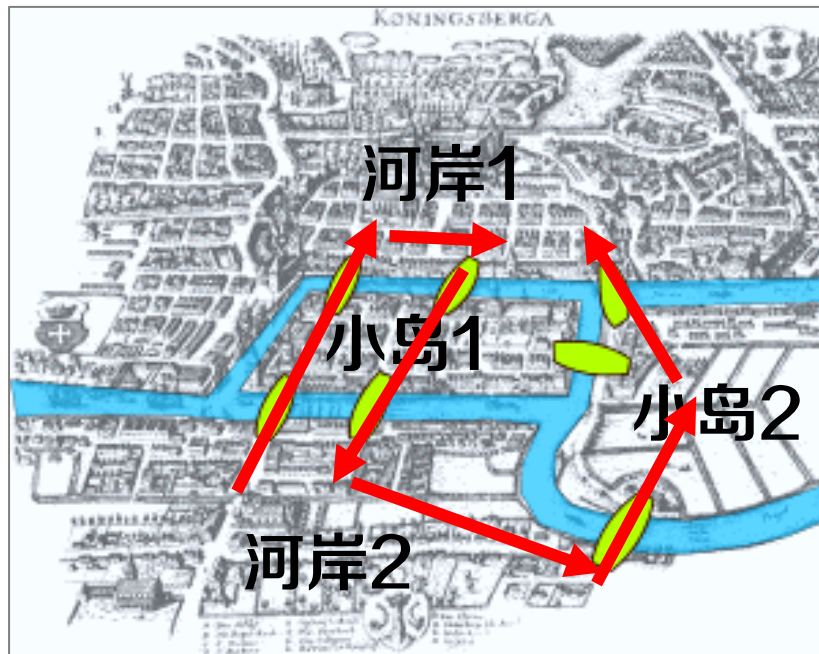
# 图的背景



- 柯尼斯堡七桥问题：七座桥连接河岸和两个小岛，步行者怎样才能**不重复、不遗漏**地一次走完七座桥？



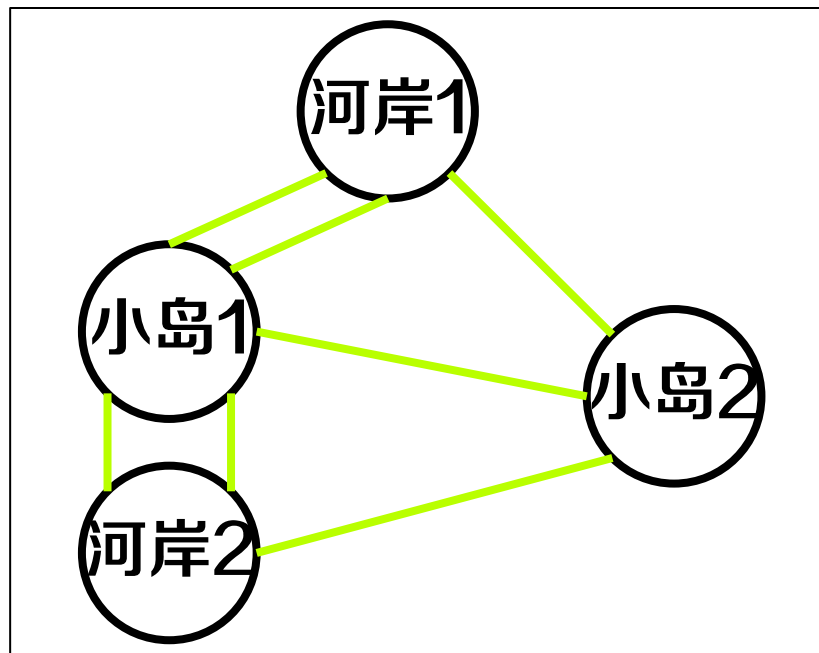
瑞士数学家  
欧拉



- 柯尼斯堡七桥问题：七座桥连接河岸和两个小岛，步行者怎样才能**不重复、不遗漏**地一次走完七座桥？



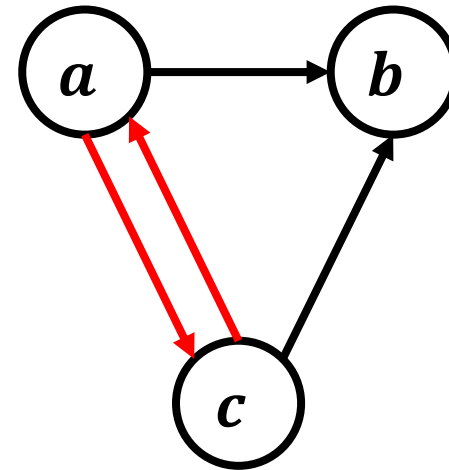
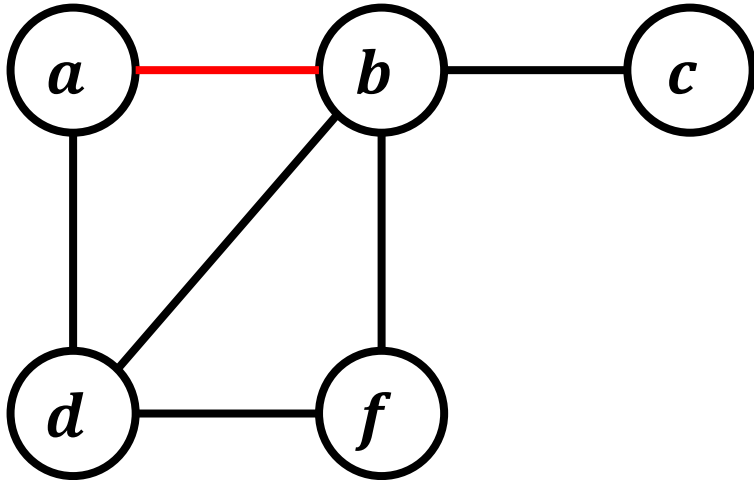
瑞士数学家  
欧拉



经过抽象之后，仅保留**点和边**的结构称为图

# 图的定义

- 图可以表示为一个二元组  $G = \langle V, E \rangle$ ，其中
  - $V$  表示非空顶点集，其元素称为顶点(Vertex)
  - $E$  表示边集，其元素称为边(Edge)
- $e = (u, v)$  表示一条边，其中  $u \in V, v \in V, e \in E$
- 无向图与有向图



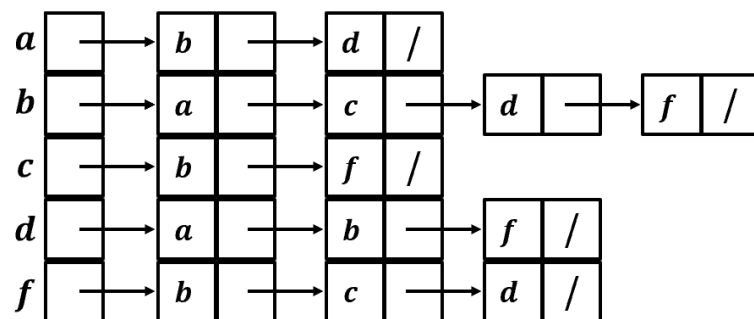
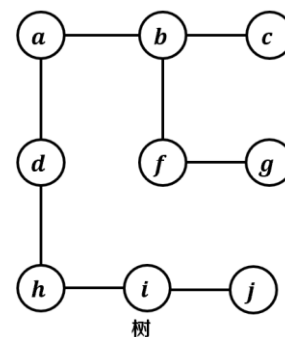
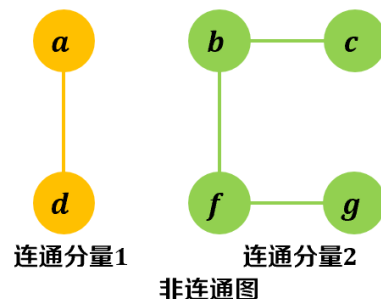
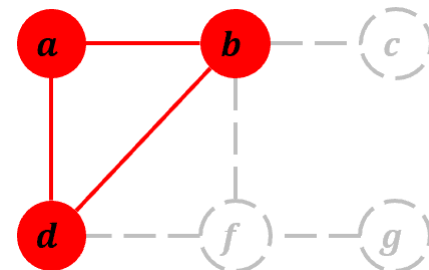
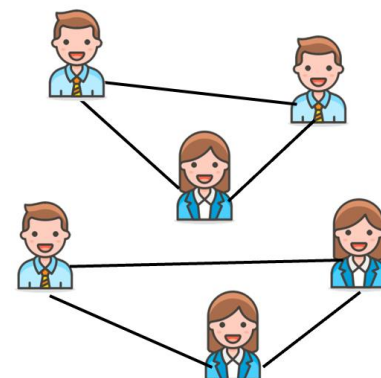
# 图的概念与表示

## 图的概念

- 图的定义、相邻与关联
- 顶点的度与图的度、握手定理
- 路径与环路
- 连通、连通分量
- 子图、生成子图、树

## 图的表示

- 邻接链表与邻接矩阵




		<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>f</i>
<i>a</i>		1	2	3	4	5
	1	0	1	0	1	0
<i>b</i>	2	1	0	1	1	1
<i>c</i>	3	0	1	0	0	1
<i>d</i>	4	1	1	0	0	1
<i>f</i>	5	0	1	1	1	0

- 数组结构

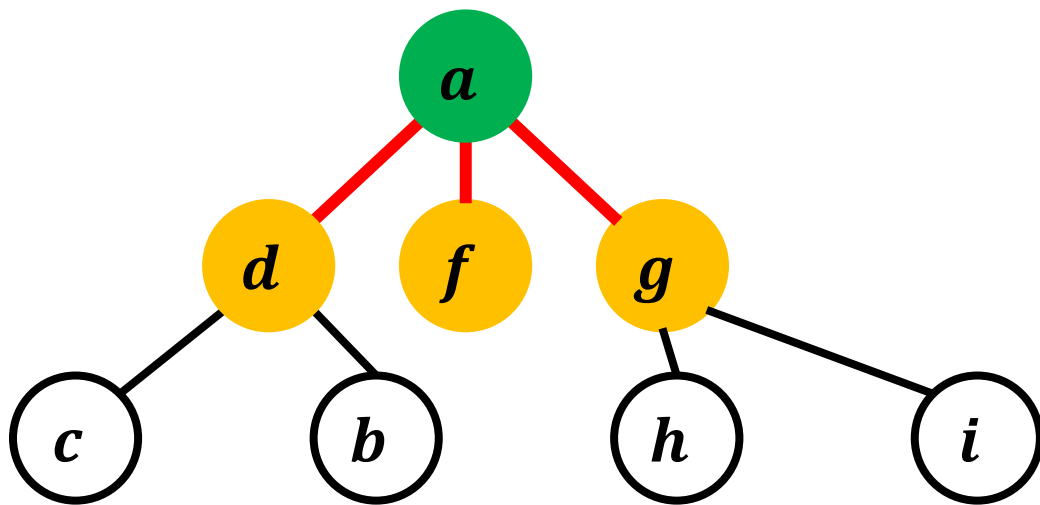
- 查询最大值：简单循环搜索所有元素，记录最大值

	1	2	3	4	5
A	4	6	8	3	5



- 图结构

- 查询相邻顶点：简单循环搜索各顶点关联的边
- 查询可达顶点：简单循环搜索，不能找到全部可达顶点！是否存在有效算法？



按照什么次序搜索顶点？

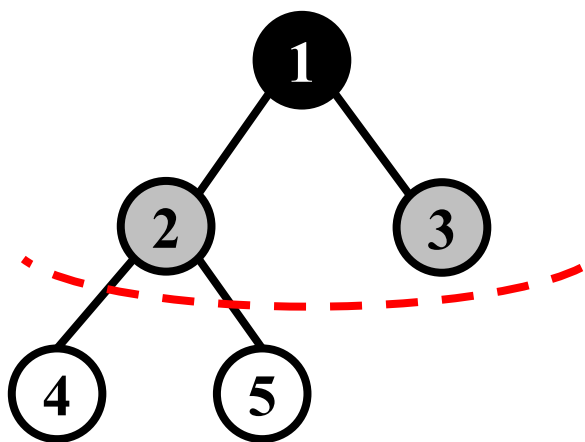
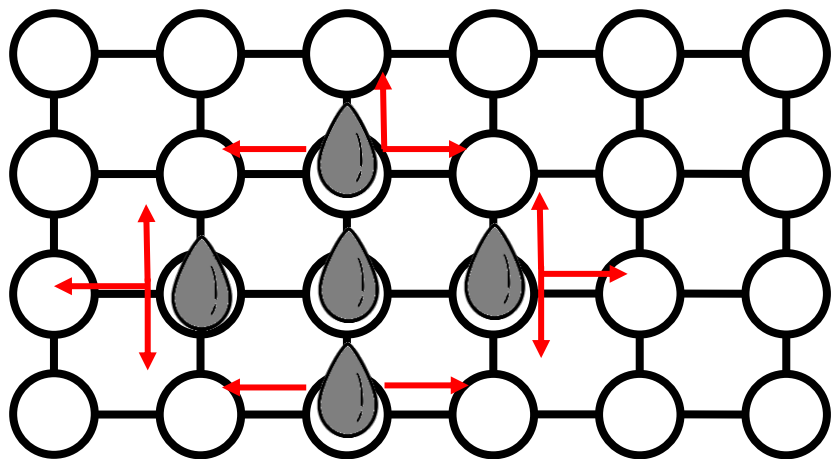
广度优先搜索

深度优先搜索

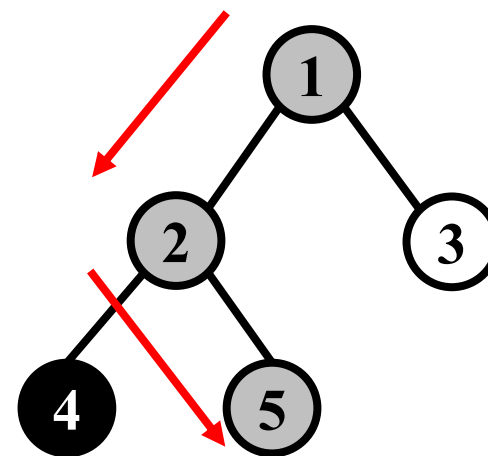
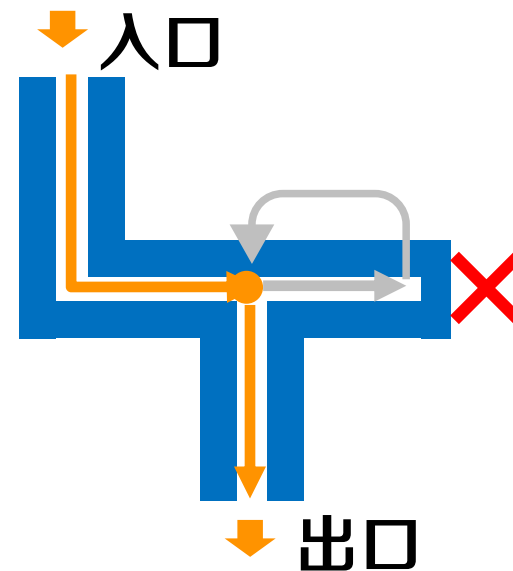
# 图的搜索算法



- 算法思想



广度优先搜索：步步为营



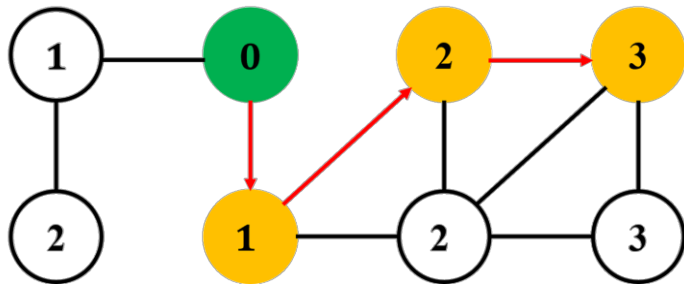
深度优先搜索：勇往直前



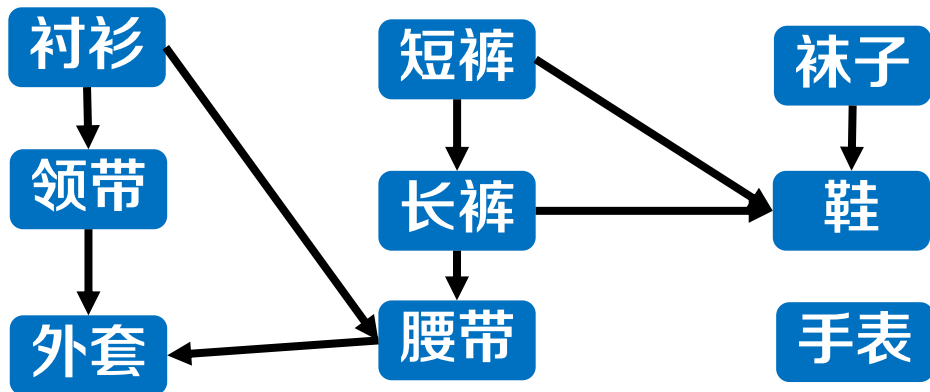
# 图的搜索算法



- 算法应用



无权图的最短路径



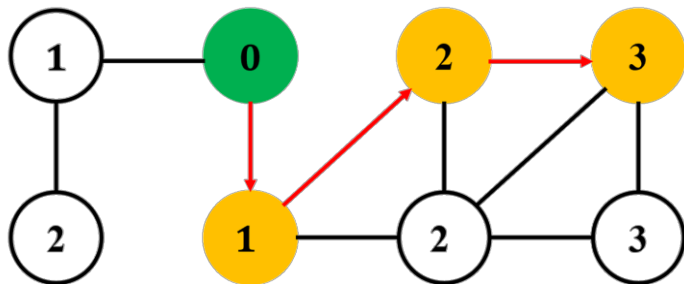
拓扑排序

广度优先搜索

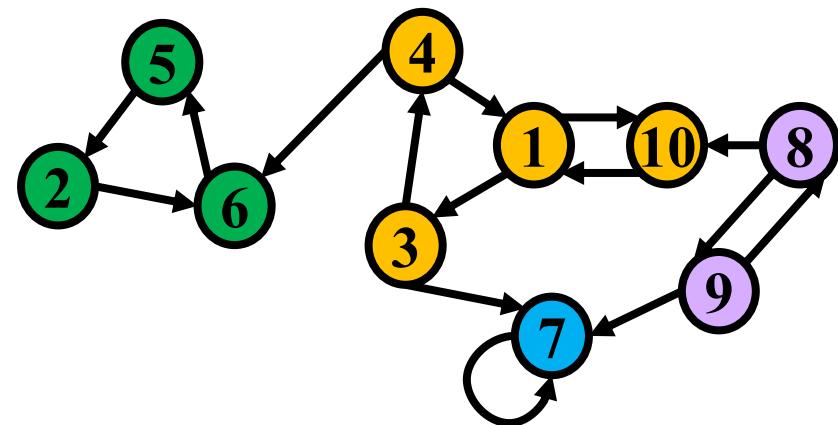
# 图的搜索算法



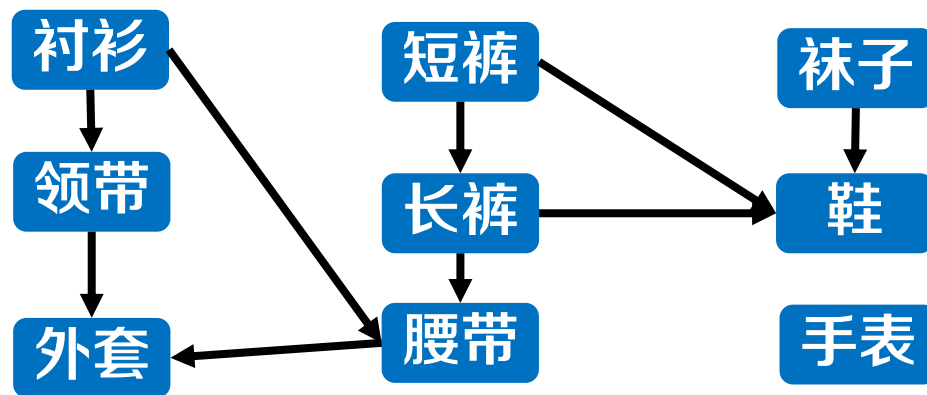
## ● 算法应用



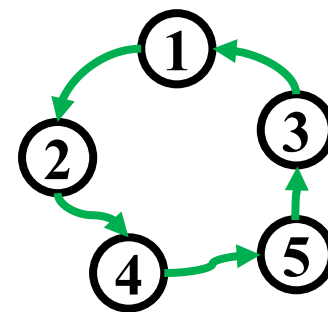
无权图的最短路径



强连通分量



拓扑排序



环路的存在性判断

广度优先搜索

深度优先搜索

## ● 最小生成树

```
A ← ∅  
while 没有形成最小生成树 do  
    | 寻找A的安全边(u, v)  
    | A ← A ∪ (u, v)  
end  
return A
```

通用框架	Prim算法	Kruskal算法
成环判断	始终保持一棵树，不断扩展	森林合成一棵树，不相交集合
轻边发现	优先队列	全部边排序
求解视角	微观视角，基于当前点选边	宏观视角，基于全局顺序选边
算法思想	都是采用贪心策略的图算法	

- 单源最短路径

	广度优先搜索	Dijkstra算法	Bellman-Ford算法
适用范围	无权图	带权图 (所有边权为正)	带权图
松弛次数	--	$ E $ 次	$ V  \cdot  E $ 次
数据结构	队列	优先队列	--
运行时间	$O( V  +  E )$	$O( E  \cdot \log V )$	$O( E  \cdot  V )$