贪心策略篇: 活动选择问题

童咏昕

北京航空航天大学 计算机学院

中国大学MOOC北航《算法设计与分析》



• 会场出租



公司年会: 10:00~19:00



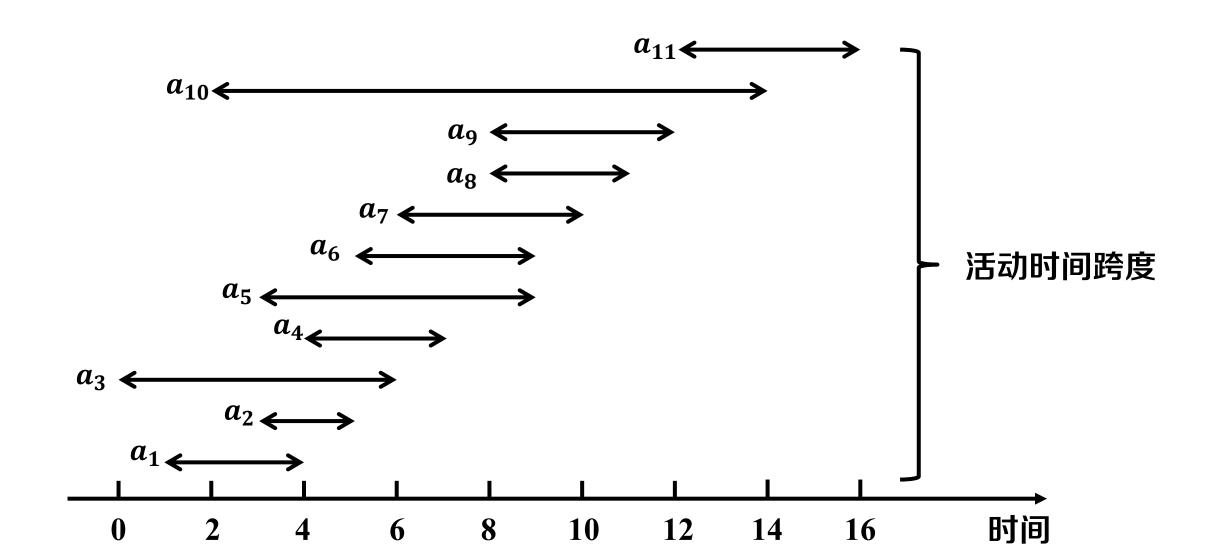
婚礼宴请: 11:00~14:00



学术研讨: 14:00~16:00

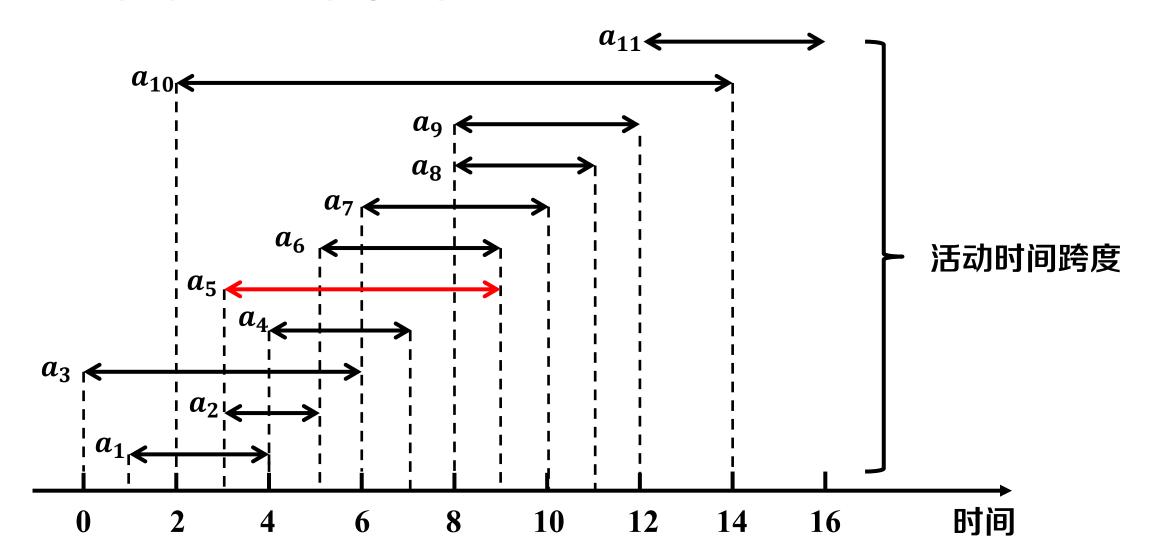


• 会场出租



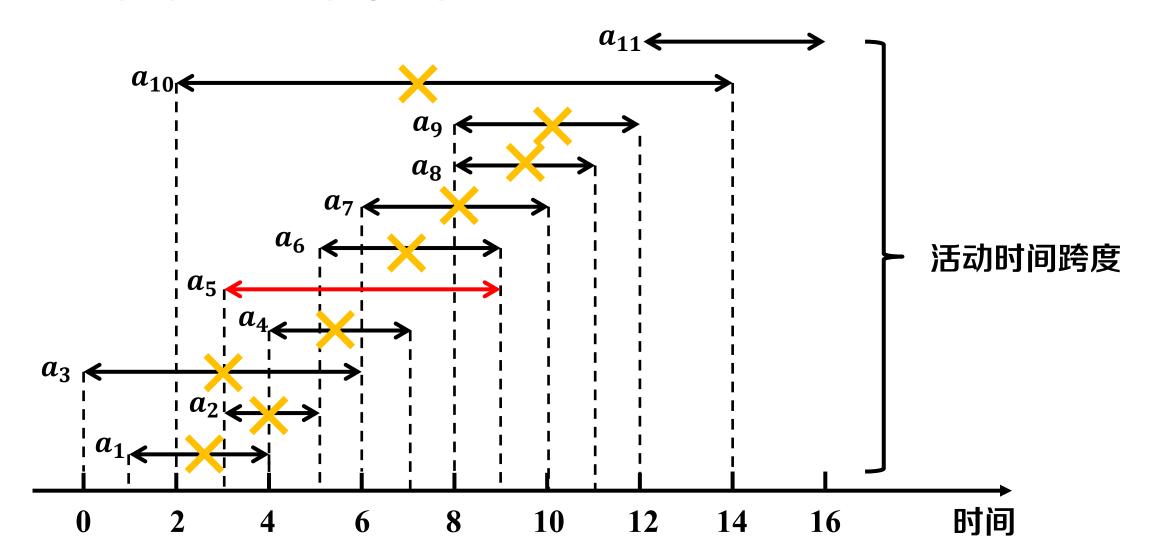


- 会场出租
 - 选择出租的活动时间不能冲突



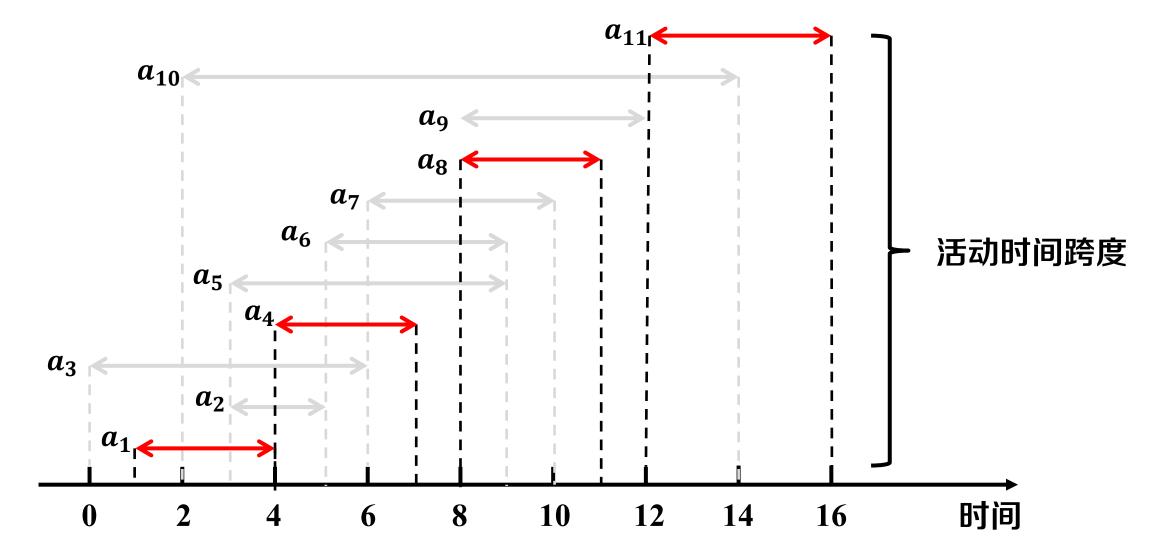


- 会场出租
 - 选择出租的活动时间不能冲突





- 会场出租
 - 选择出租的活动时间不能冲突,怎样选择才能选更多的活动?



问题定义



活动选择问题

Activity Selection Problem

输入

- n个活动组成的集合 $S = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$
- 每个活动 a_i 的开始时间 s_i 和结束时间 f_i

输出

• 找出活动集合S的子集S',令

 $\max |S'|$

$$s.t. \forall a_i, a_j \in S', s_i \geq f_j$$
或 $s_j \geq f_i$

优化目标: 最大化选择活动个数



活动选择问题

Activity Selection Problem

输入

- $| \cdot n$ 个活动组成的集合 $S = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$
- 每个活动 a_i 的开始时间 s_i 和结束时间 f_i

输出

• 找出活动集合S的子集S',令

 $\max |S'|$

$$s.t. \forall a_i, a_j \in S', s_i \geq f_j$$
或 $s_j \geq f_i$

优化目标: 最大化选择活动个数



$$S_j$$
 a_j f_j a_i f_i S_i a_i f_j A_j A_j

贪心策略:一般步骤



提出贪心策略

观察问题特征,构造贪心选择



证明策略正确

假设最优方案,通过替换证明



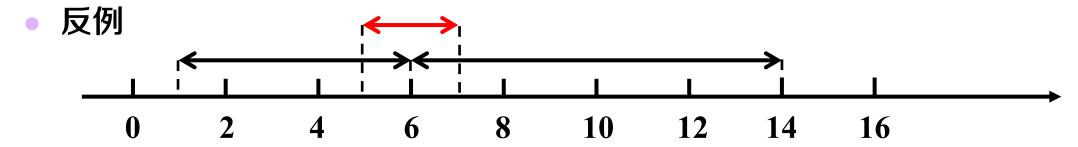
• 策略1: 最短活动优先

• 策略2: 最早开始活动优先

• 策略3: 最早结束活动优先



• 策略1: 最短活动优先

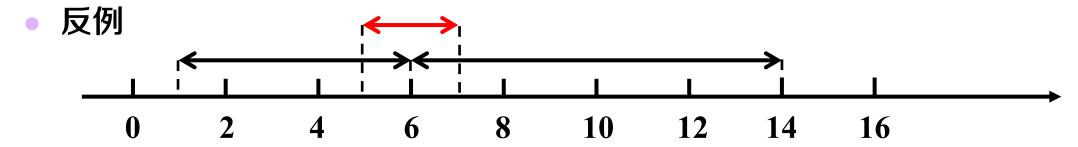


• 策略2: 最早开始活动优先

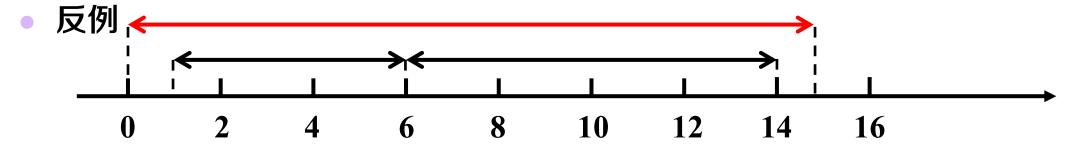
• 策略3: 最早结束活动优先



• 策略1: 最短活动优先



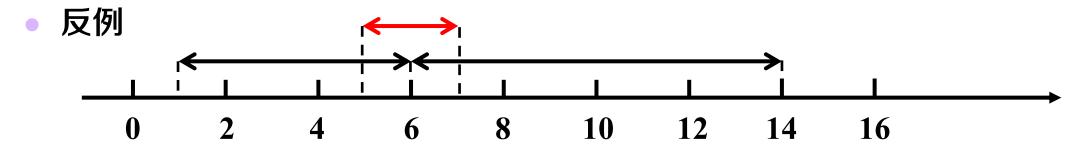
• 策略2: 最早开始活动优先



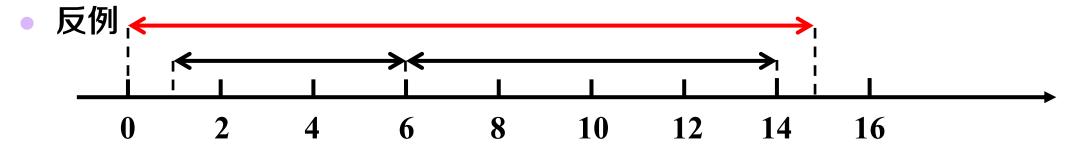
• 策略3: 最早结束活动优先



• 策略1: 最短活动优先



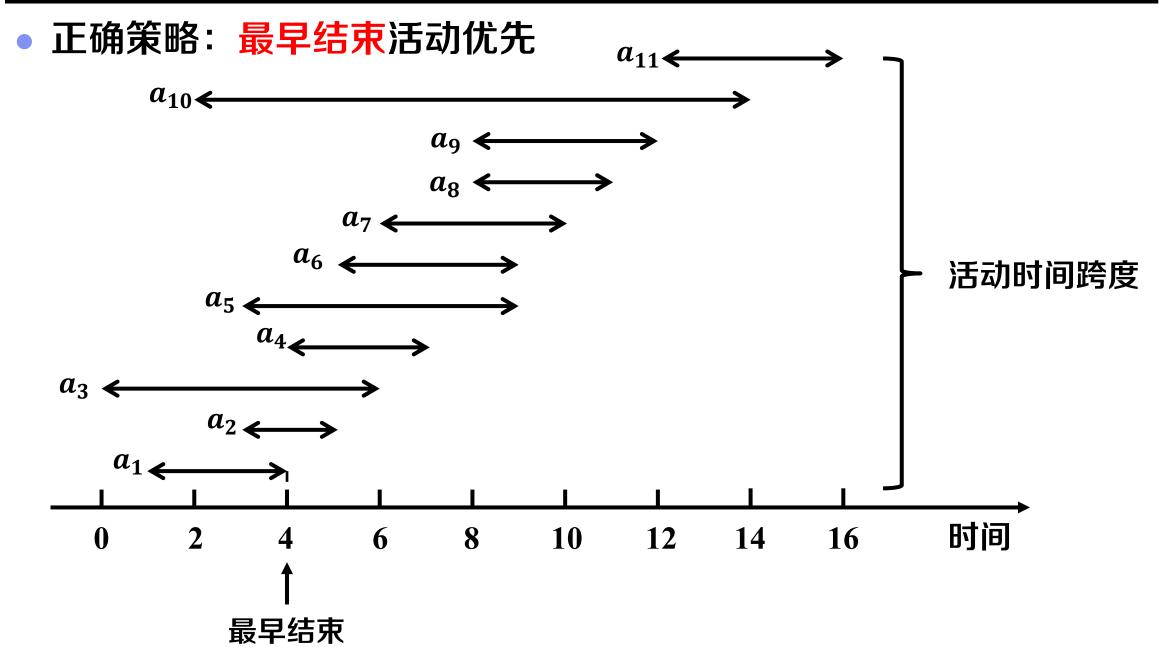
• 策略2: 最早开始活动优先



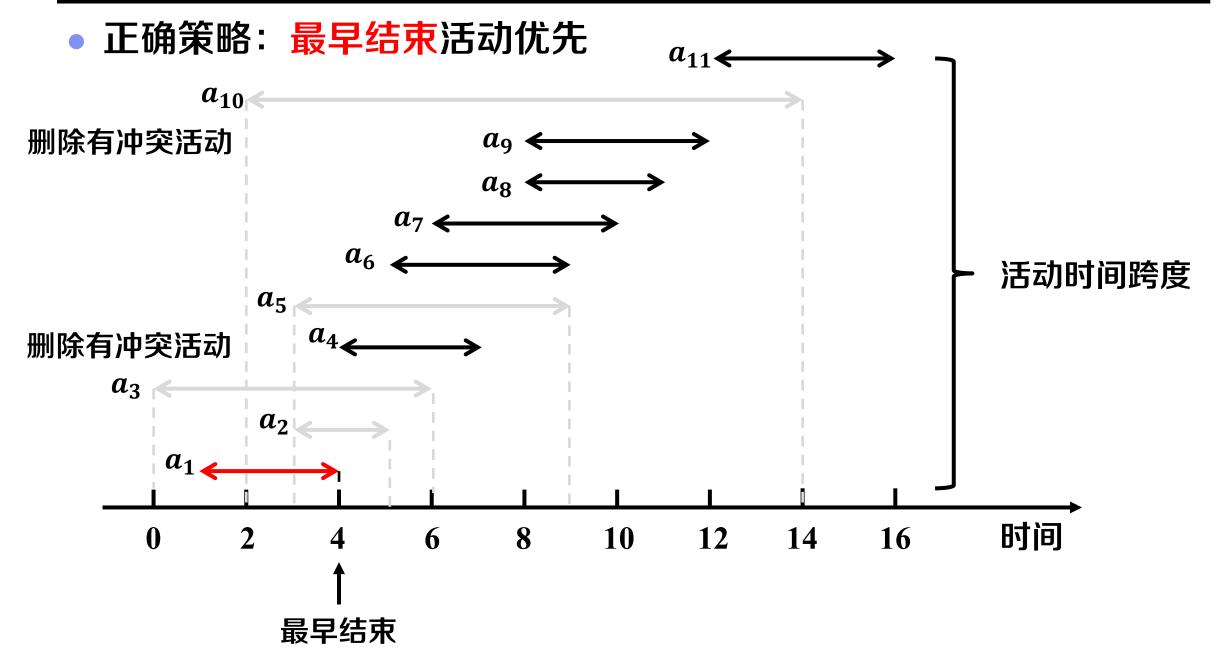
• 策略3: 最早结束活动优先

• 选择最早结束的活动,可以给后面的活动留更大的选择空间

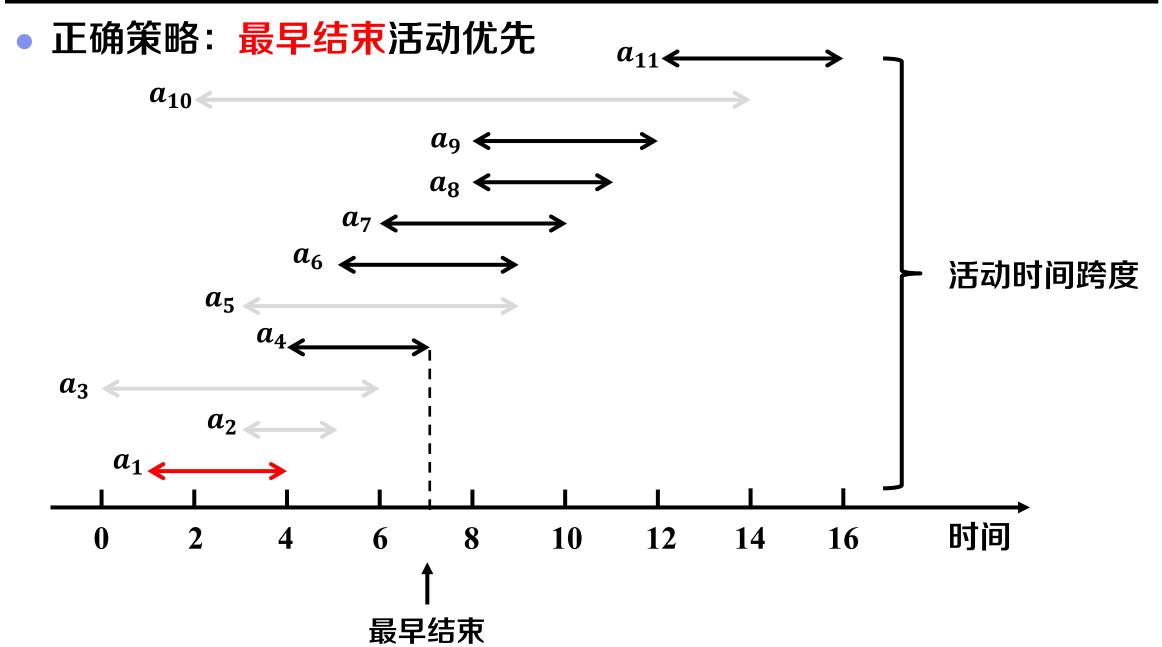




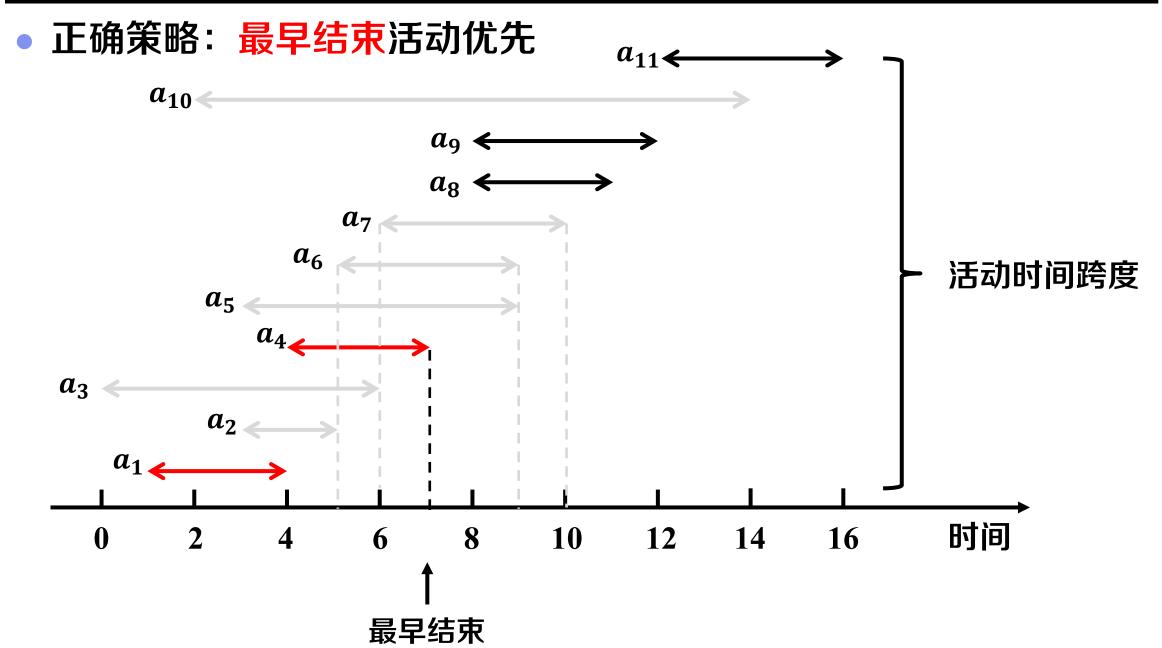




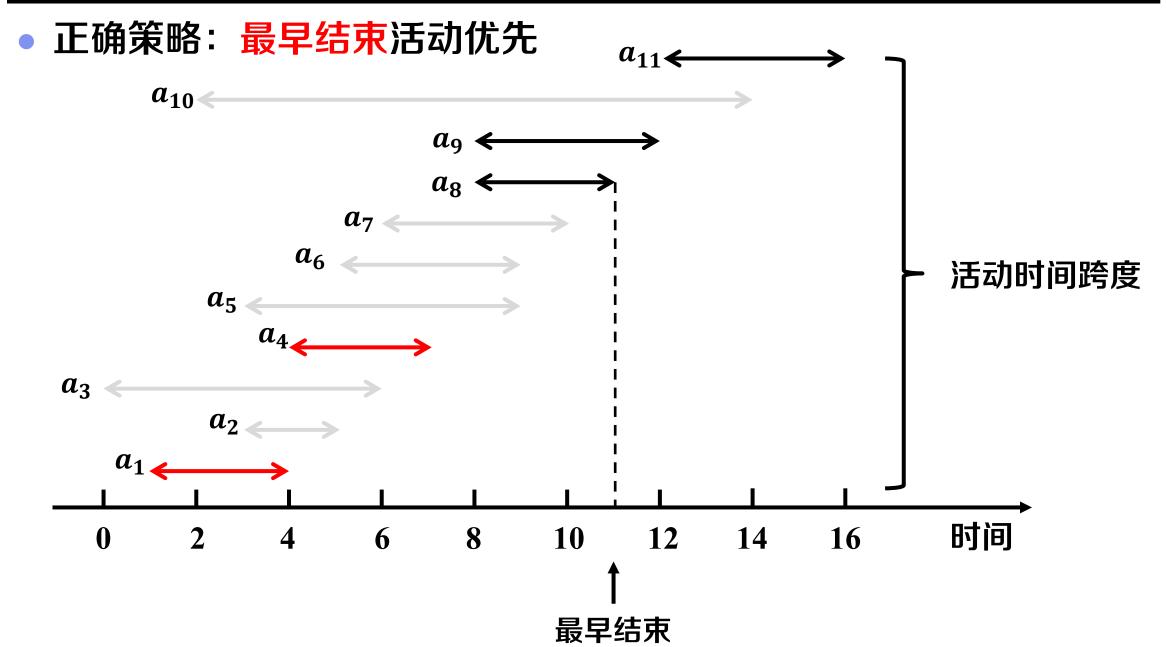




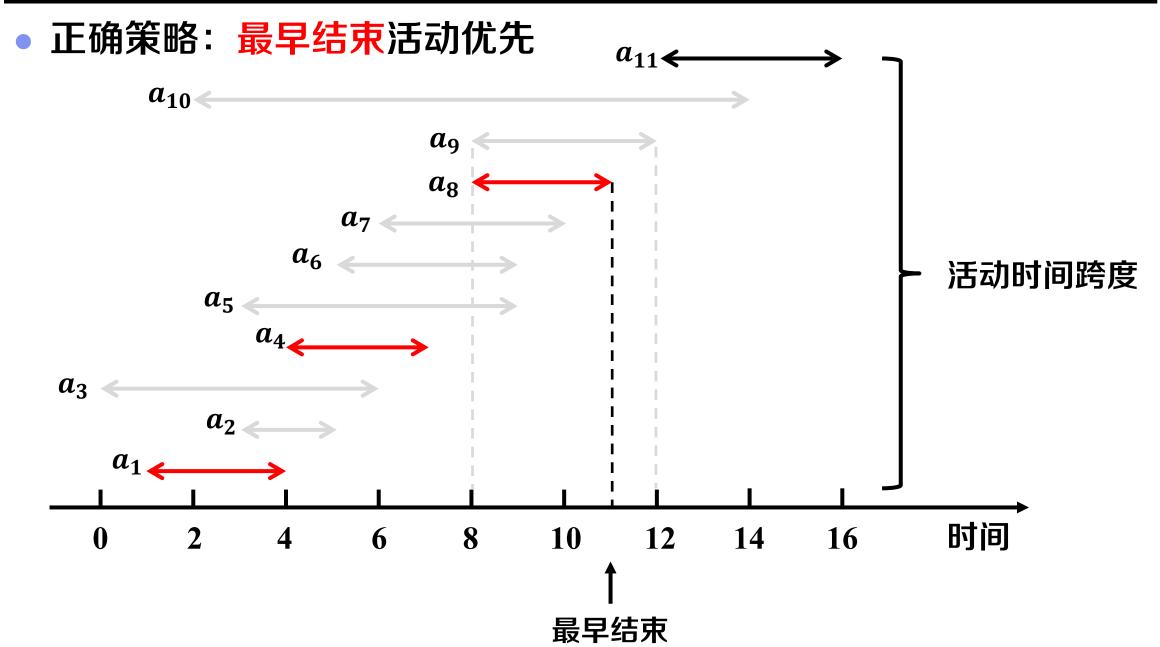




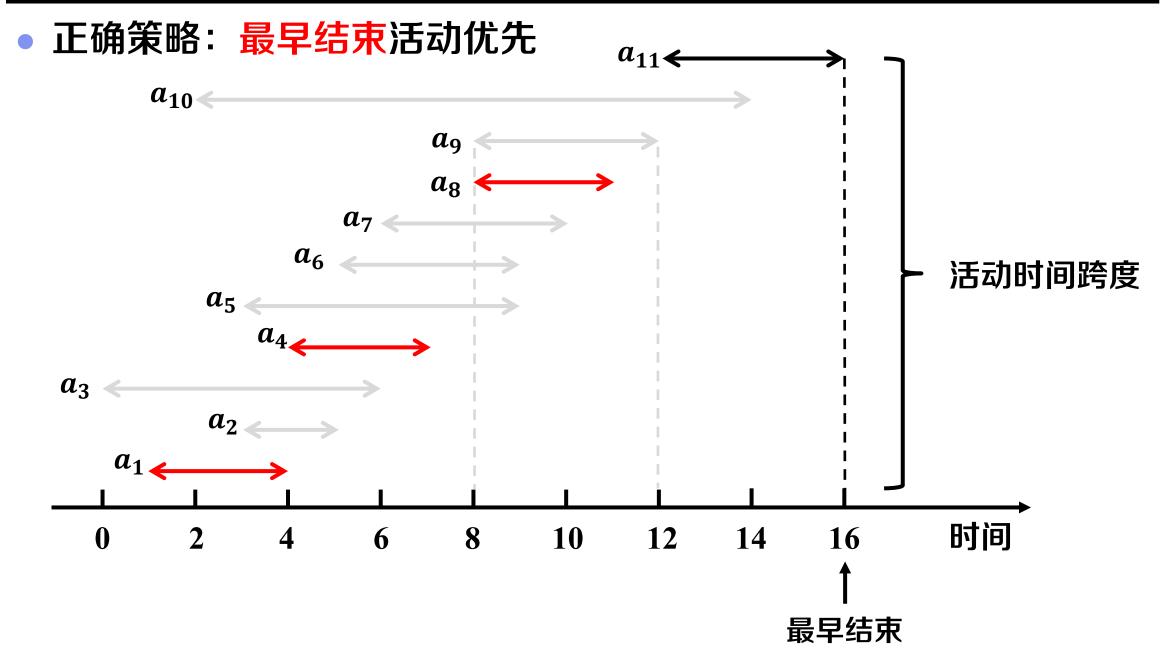




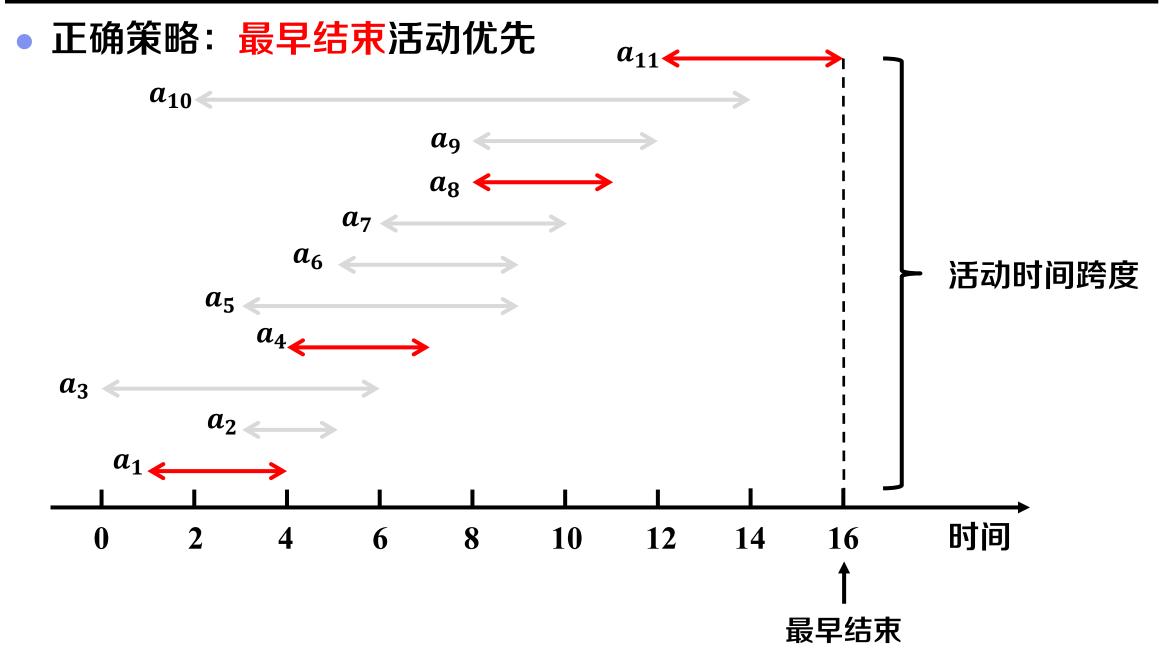






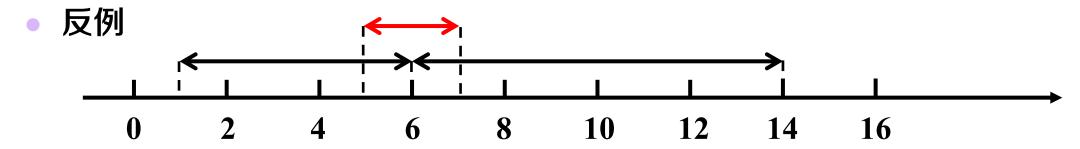




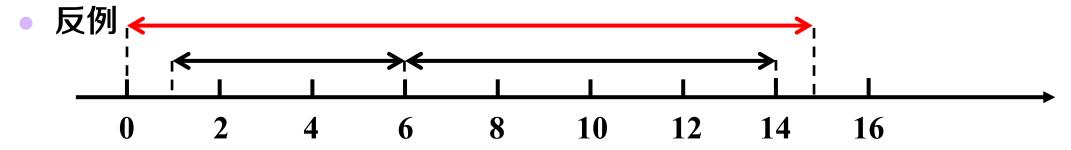




• 策略1: 最短活动优先



• 策略2: 最早开始活动优先



- 策略3: 最早结束活动优先
 - 选择最早结束的活动,可以给后面的活动留更大的选择空间

问题: 策略3是否可以保证最优解?

贪心策略:一般步骤



提出贪心策略

观察问题特征,构造贪心选择



证明策略正确

假设最优方案,通过替换证明

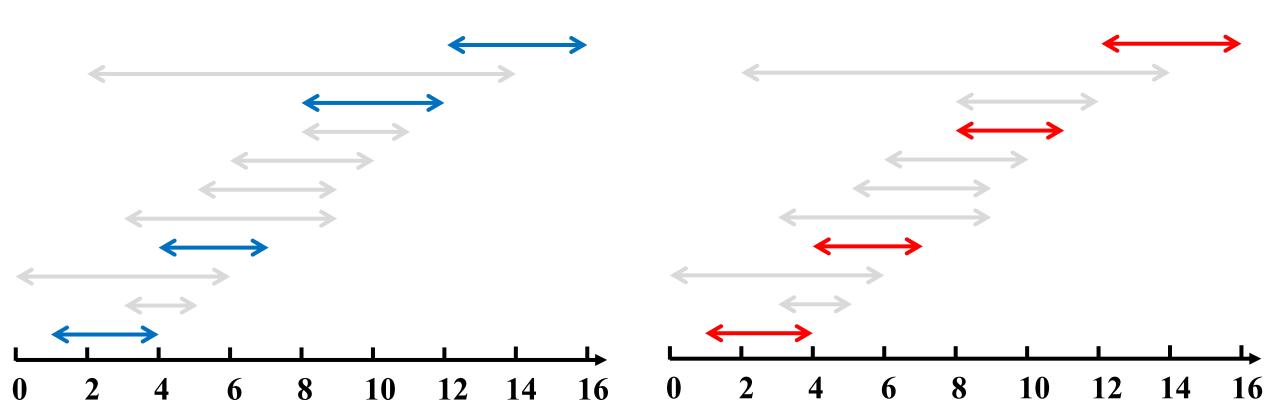


- 正确策略: 最早结束活动优先
- 证明: 贪心解不劣于最优解

任意最优活动集合

依次检查并替换

贪心所得活动集合





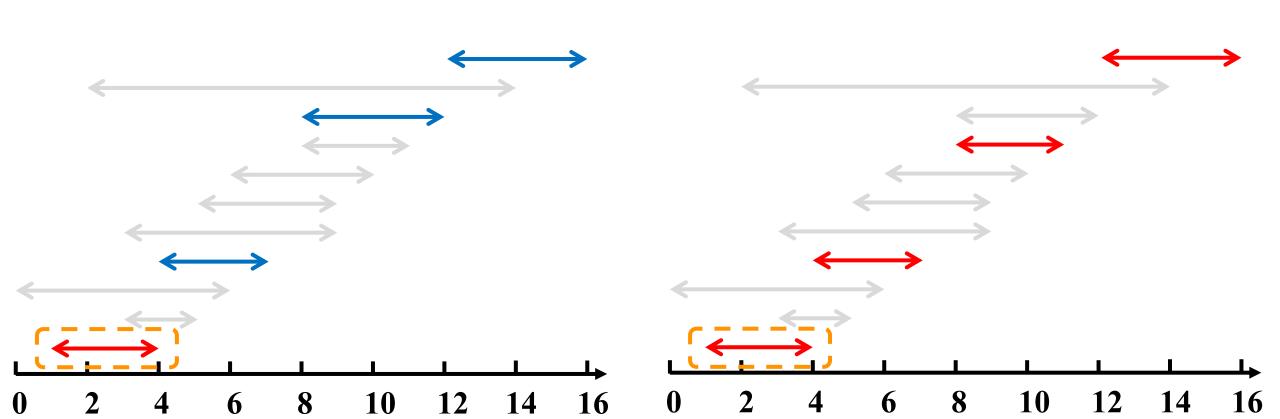
- 正确策略: 最早结束活动优先
- 证明: 贪心解不劣于最优解

任意最优活动集合

依次检查并替换

贪心所得活动集合

活动相同,无需替换





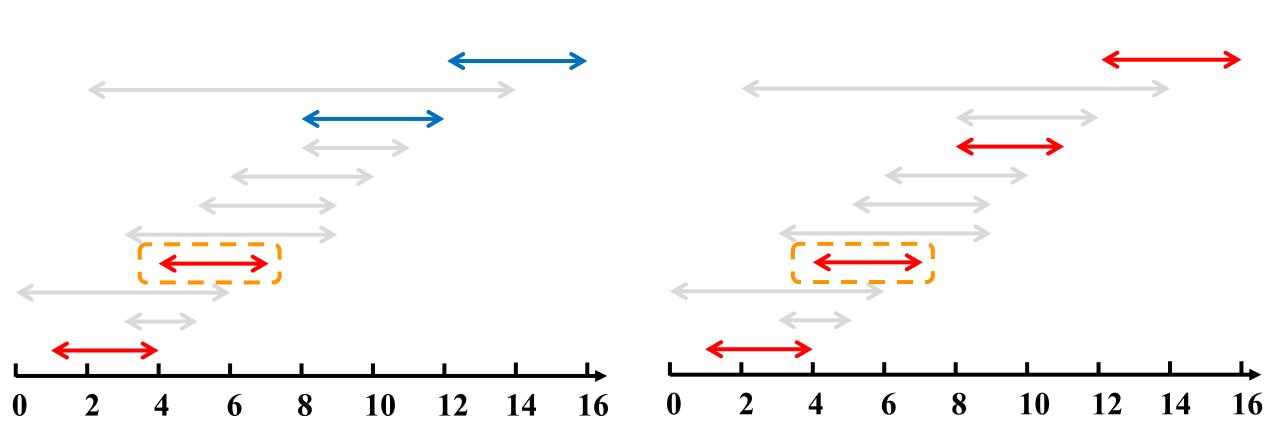
- 正确策略: 最早结束活动优先
- 证明: 贪心解不劣于最优解

任意最优活动集合

依次检查并替换

贪心所得活动集合

活动相同,无需替换





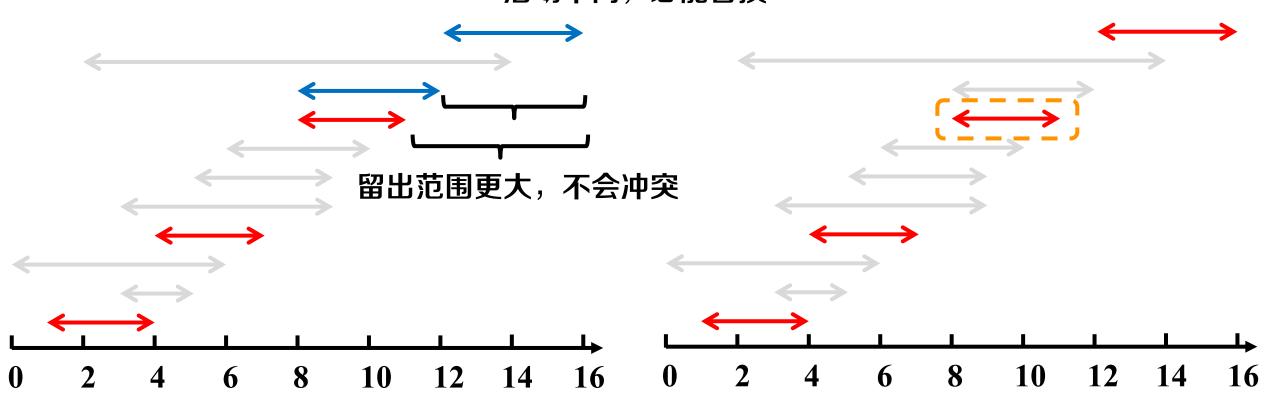
- 正确策略: 最早结束活动优先
- 证明: 贪心解不劣于最优解

任意最优活动集合

依次检查并替换

贪心所得活动集合

活动相同,无需替换活动不同,必能替换





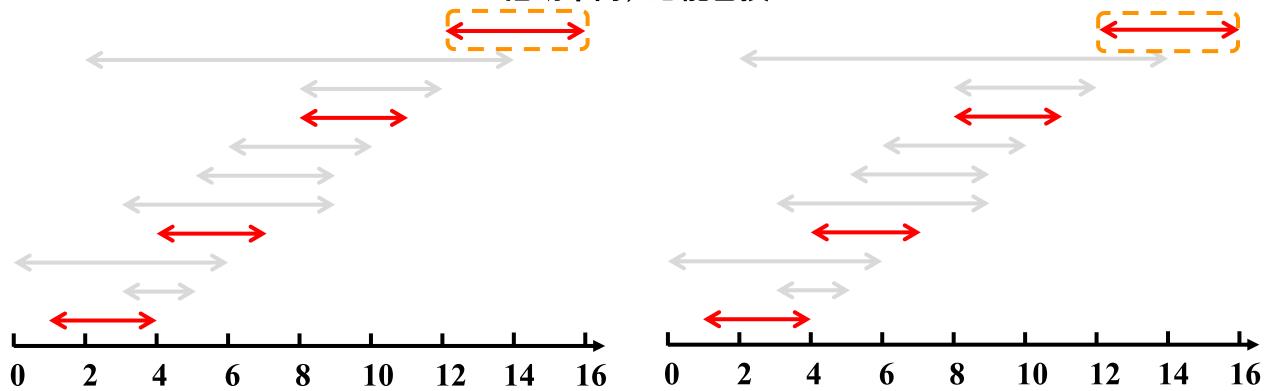
- 正确策略: 最早结束活动优先
- 证明: 贪心解不劣于最优解

任意最优活动集合

依次检查并替换

贪心所得活动集合

活动相同,无需替换活动不同,必能替换



return S'



```
输入: 活动集合S = \{a_1, a_2, ..., a_n\}, 每个活动a_i的起止时间s_i, f_i
输出: 不冲突活动的最大子集S'
把活动按照结束时间升序排序 🛚
S' \leftarrow \{a_1\}
k \leftarrow 1
for i \leftarrow 2 to n do
   if s_i \geq f_k then
      S' \leftarrow S' \cup \{a_i\}
     k \leftarrow i
    end
end
```

为使用贪心策略作准备



```
输入: 活动集合S = \{a_1, a_2, ..., a_n\}, 每个活动a_i的起止时间s_i, f_i
```

输出: 不冲突活动的最大子集S'

把活动按照结束时间升序排序

$$S' \leftarrow \{a_1\}$$

$$k \leftarrow 1$$

把最早结束活动加入到集合

```
for i \leftarrow 2 to n do
\begin{vmatrix}
\mathbf{if} \ s_i \ge f_k \ \mathbf{then} \\
S' \leftarrow S' \cup \{a_i\} \\
k \leftarrow i \\
\mathbf{end}
\end{vmatrix}
```

return S'



```
输入: 活动集合S = \{a_1, a_2, ..., a_n\}, 每个活动a_i的起止时间s_i, f_i
```

输出: 不冲突活动的最大子集S'

把活动按照结束时间升序排序

$$S' \leftarrow \{a_1\}$$

$$k \leftarrow 1$$

$$\text{for } i \leftarrow 2 \text{ to } n \text{ do}$$

记录当前选择的活动

```
egin{aligned} \mathbf{for} \ i \leftarrow 2 \ to \ n \ \mathbf{do} \ & \mathbf{if} \ s_i \geq f_k \ \mathbf{then} \ & S' \leftarrow S' \cup \{a_i\} \ & k \leftarrow i \ & \mathbf{end} \ \end{aligned}
```

return S'



```
输入: 活动集合S = \{a_1, a_2, ..., a_n\}, 每个活动a_i的起止时间s_i, f_i
```

输出: 不冲突活动的最大子集S'

把活动按照结束时间升序排序

$$S' \leftarrow \{a_1\}$$
 $k \leftarrow 1$
 $\mathbf{for} \ i \leftarrow 2 \ to \ n \ \mathbf{do}$

检查每个活动

$$egin{array}{c|c} \mathbf{if} \ s_i \geq f_k \ \mathbf{then} \ S' \leftarrow S' \cup \{a_i\} \ k \leftarrow i \ \mathbf{end} \ \end{array}$$

return S'



```
输入: 活动集合S = \{a_1, a_2, ..., a_n\}, 每个活动a_i的起止时间s_i, f_i
输出: 不冲突活动的最大子集S'
把活动按照结束时间升序排序
S' \leftarrow \{a_1\}
k \leftarrow 1
for i \leftarrow 2 to n do
if s_i \geq f_k then
                                 没有冲突,则加入子集
k \leftarrow i
   \mathbf{end}
end
```



 \mathbf{end}

return S'

更新当前选择的活动

贪心算法:复杂度分析



```
输入: 活动集合S = \{a_1, a_2, ..., a_n\}, 每个活动a_i的起止时间s_i, f_i
输出: 不冲突活动的最大子集S'
把活动按照结束时间升序排序
                                                 O(n \log n)
S' \leftarrow \{a_1\}
k \leftarrow 1
for i \leftarrow 2 to n do
   if s_i \geq f_k then
    \mid S' \leftarrow S' \cup \{a_i\}
                                     O(n)
    k \leftarrow i
   end
end
                                                 时间复杂度: O(n \log n)
return S'
```

问题拓展



• 会场出租

收益很大



公司年会: 10:00~19:00

收益较多







婚礼宴请: 11:00~14:00

收益较少

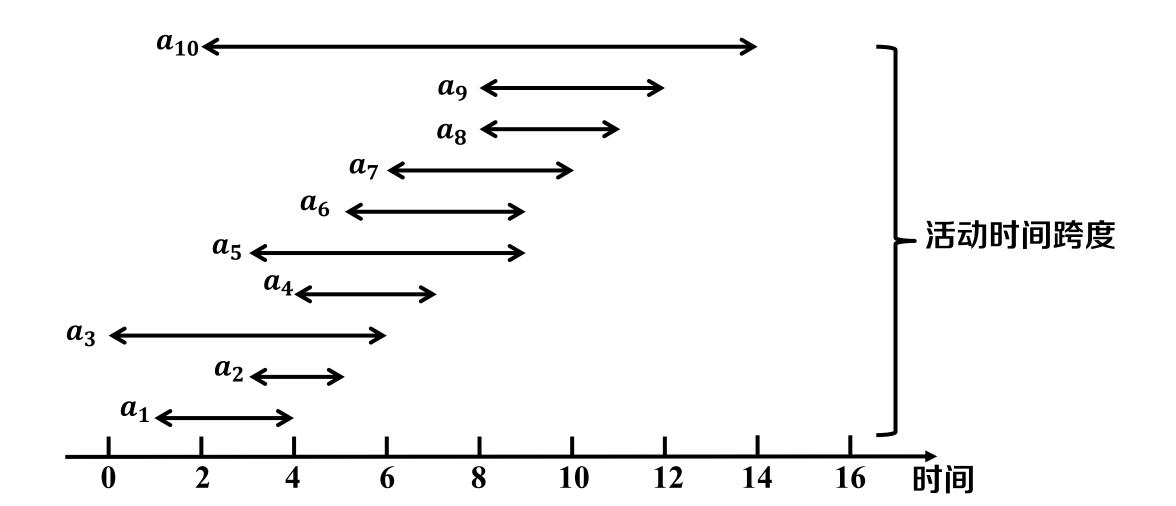


学术研讨: 14:00~16:00

问题拓展



- 会场出租
 - 选择出租的活动时间不能冲突

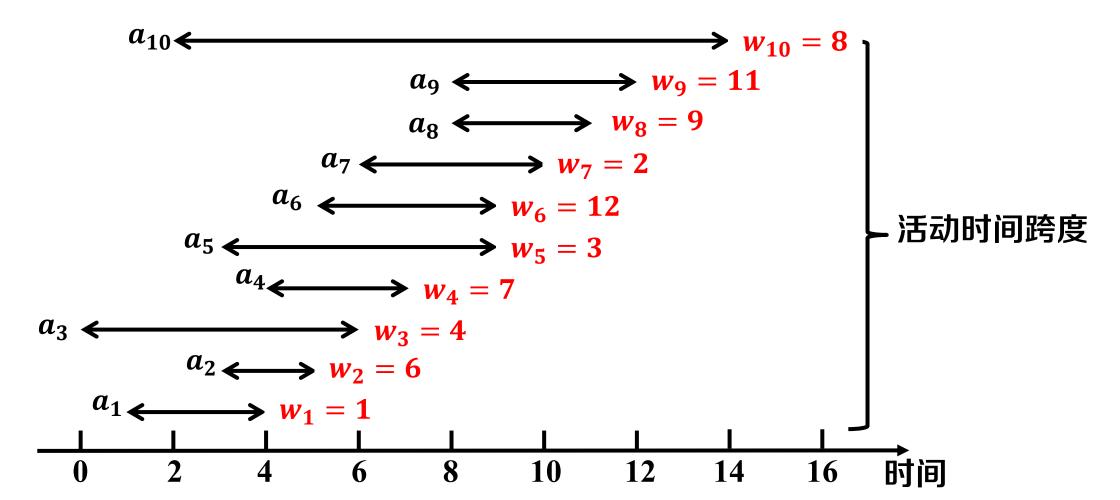


问题拓展



• 会场出租

- 选择出租的活动时间不能冲突,活动出租收益各不相同
- 怎样选让收益总和最大?





带权活动选择问题

Weighted Activity Selection Problem

输入

- n个活动组成的集合 $S = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$
- 每个活动 a_i 的开始时间 s_i ,结束时间 f_i 和权重 w_i

输出

• 找出活动集合S的子集S',令

$$\max \sum_{a_i \in S'} w_i$$

 $s.t. \forall a_i, a_j \in S', s_i \geq f_j$ 或 $s_j \geq f_i$

优化目标: 最大化权重之和

约束条件

问题比较



带权活动选择问题

$$\max \sum_{a_i \in S'} w_i$$

权重均为1

活动选择问题

 $\max |S'|$



带权活动选择问题

$$\max \sum_{a_i \in S'} w_i$$

权重均为1

活动选择问题

 $\max |S'|$

$$a_3 \longleftrightarrow w_3 = 1$$
 $a_2 \longleftrightarrow w_2 = 10000$ $a_2 \longleftrightarrow w_2 = 1$ $a_1 \longleftrightarrow w_1 = 1$ 时间



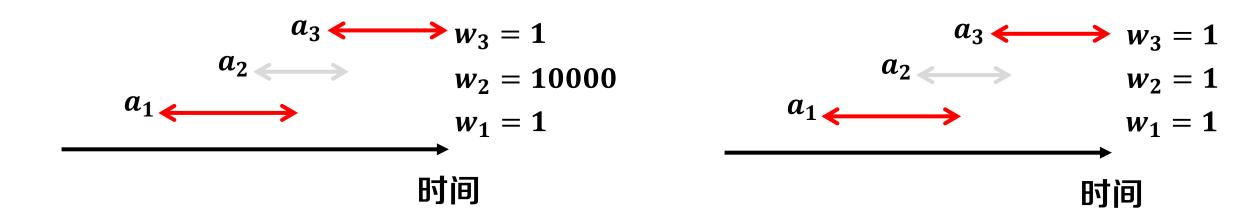


$$\max \sum_{a_i \in S'} w_i$$

权重均为1

活动选择问题

 $\max |S'|$



问题比较



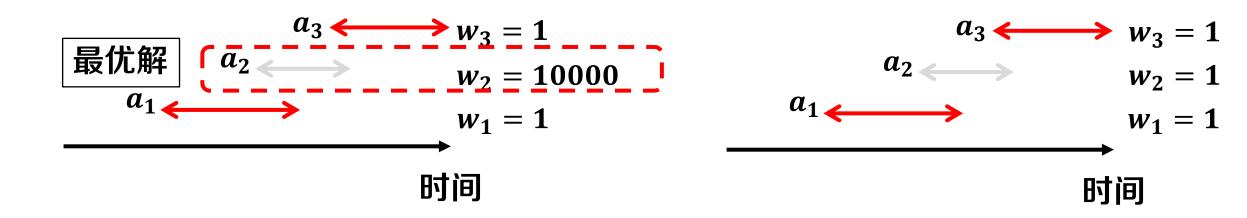


$$\max \sum_{a_i \in S'} w_i$$

权重均为1

活动选择问题

 $\max |S'|$

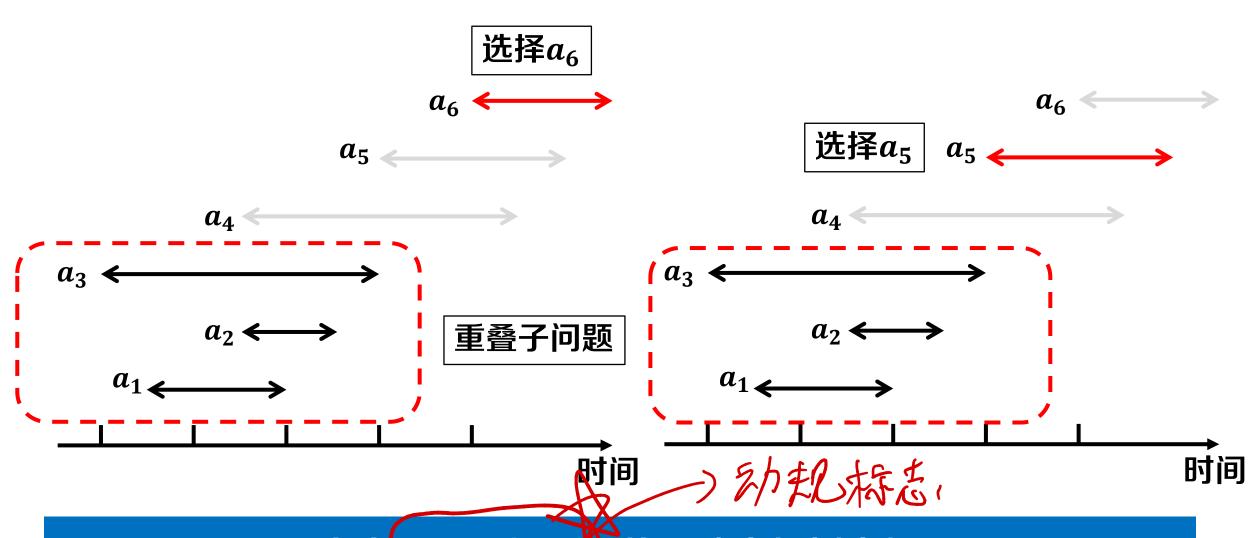


贪心策略不正确

贪心策略正确

从贪心策略到动态规划

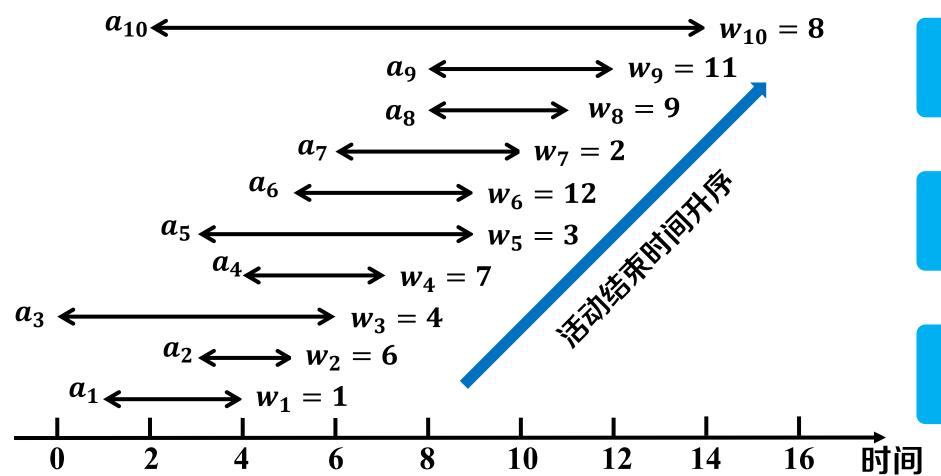




存在重叠子问题,使用动态规划求解



- 预处理
 - 排序: 按活动结束时间升序



问题结构分析



递推关系建立



自底向上计算

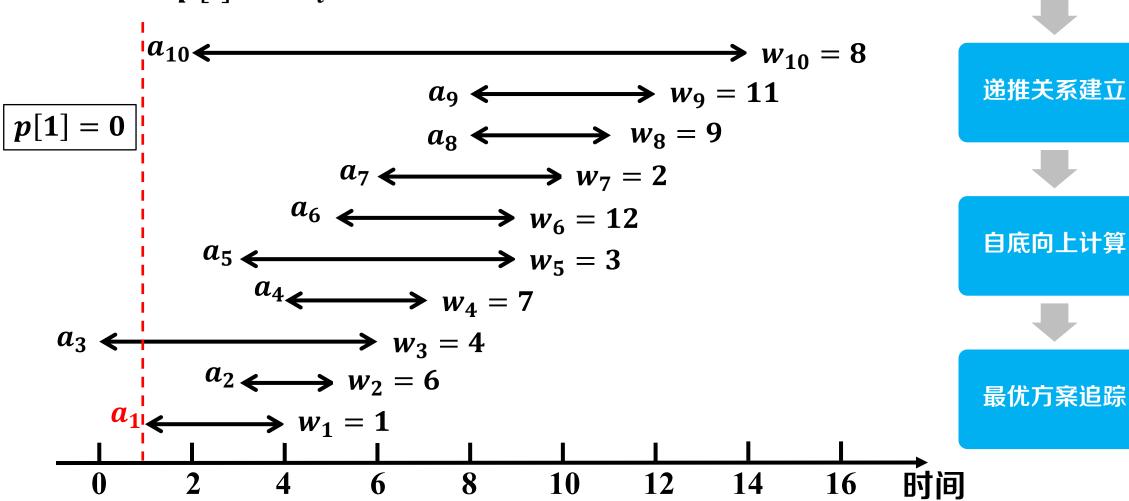




问题结构分析

预处理

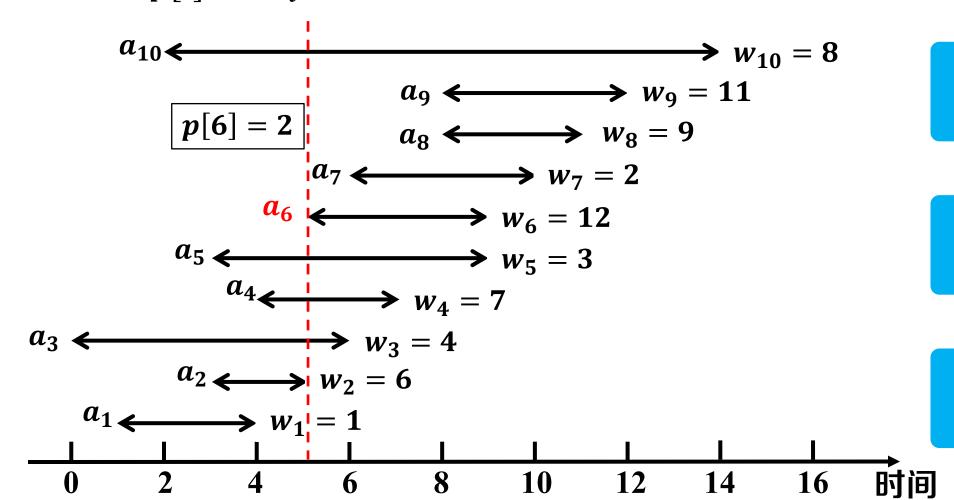
- 排序: 按活动结束时间升序
- 求p[i]: 在 a_i 开始前最后结束的活动





预处理

- 排序: 按活动结束时间升序
- 求p[i]: 在 a_i 开始前最后结束的活动



问题结构分析



递推关系建立



自底向上计算





预处理

• 排序: 按活动结束时间升序

• 求p[i]: 在 a_i 开始前最后结束的活动

。 如何求解p[i]?

。排序后使用二分查找



问题结构分析



递推关系建立



自底向上计算





预处理

排序: 按活动结束时间升序

xp[i]: ta_i 开始前最后结束的活动 ta_i ta_i t

• 给出问题表示

• D[i]: 集合 $\{a_1, a_2, a_3, ..., a_i\}$ 中不冲突活动最大权重和

• 明确原始问题

D[n]: 集合 $\{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$ 中不冲突活动最大权重和

问题结构分析



递推关系建立



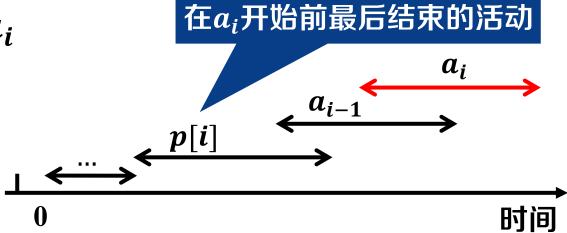
自底向上计算





• 考察活动 a_i

• 选择 a_i



问题结构分析



递推关系建立



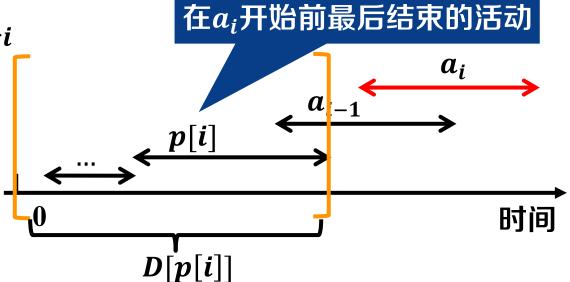
自底向上计算





• 考察活动 a_i

• 选择 a_i



问题结构分析



递推关系建立

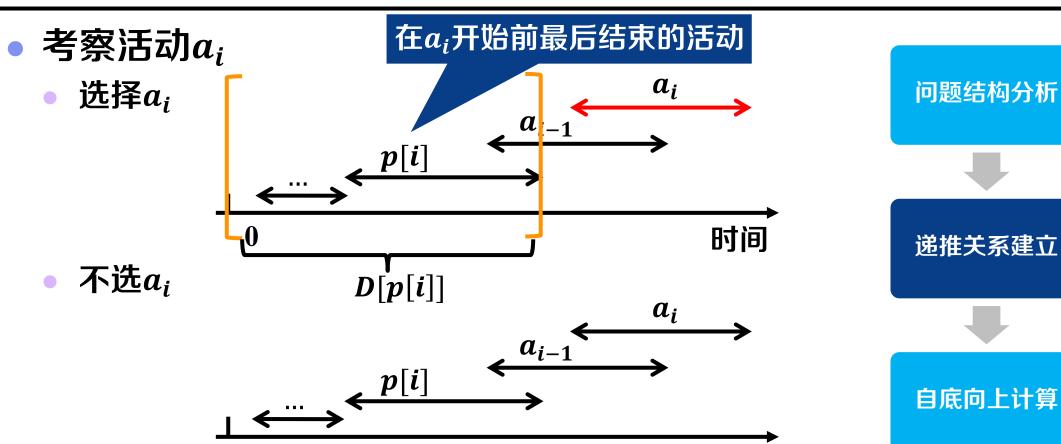


自底向上计算



0





问题结构分析

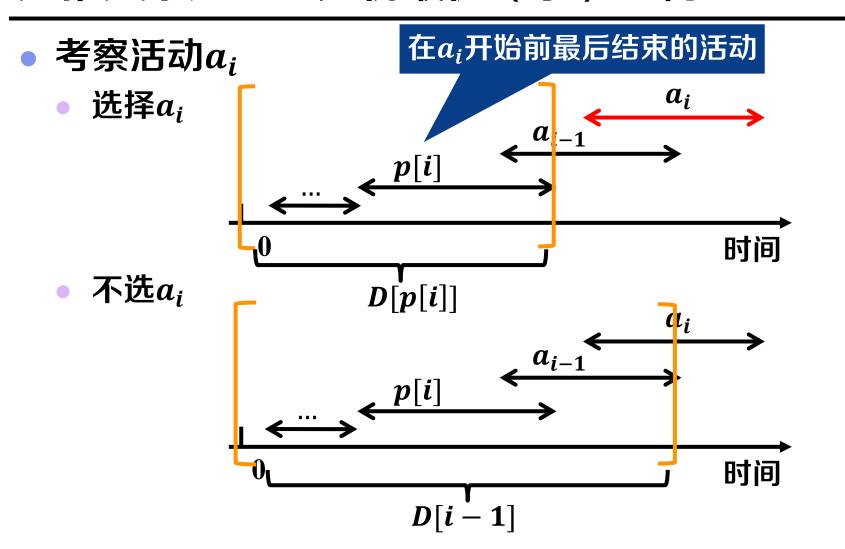


自底向上计算

最优方案追踪

时间





问题结构分析

递推关系建立

自底向上计算

递推关系建立: 构造递推公式

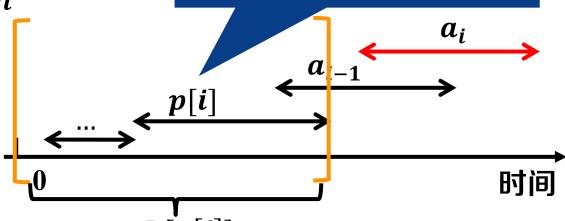


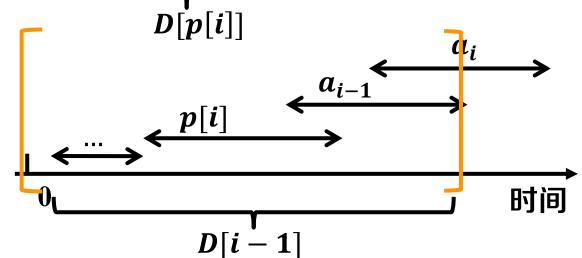


选择 a_i

• 不选 a_i

在 a_i 开始前最后结束的活动





递推公式

• $D[i] = \max\{D[p[i]] + w_i, D[i-1]\}$

问题结构分析



递推关系建立

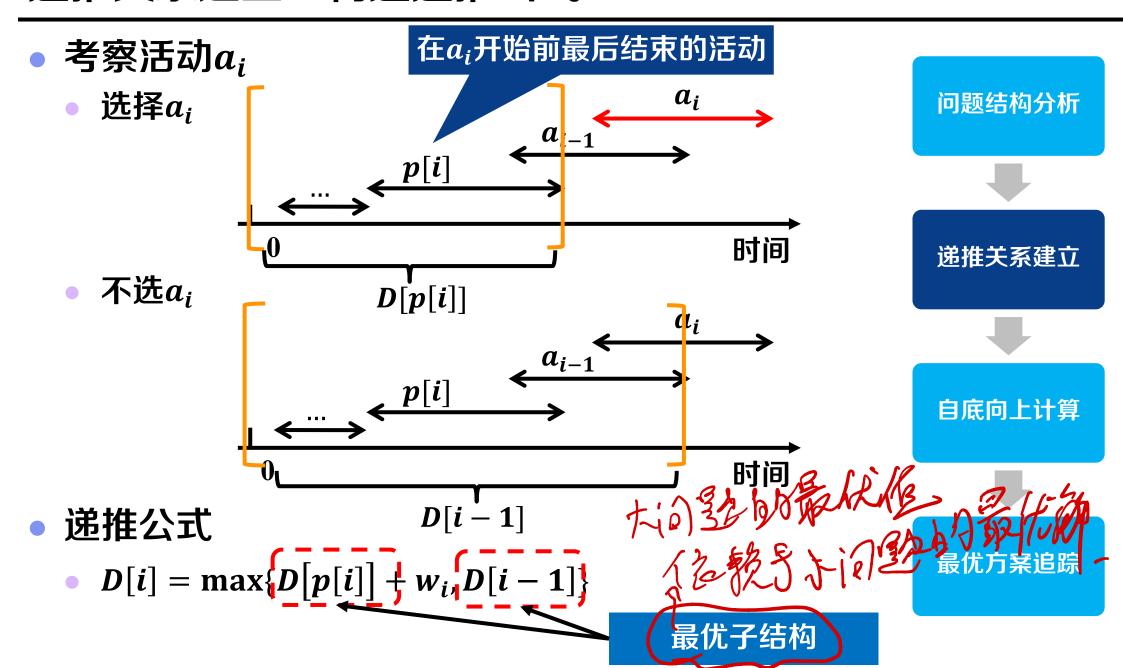


自底向上计算



递推关系建立: 构造递推公式





自底向上计算:确定计算顺序



- 初始化
 - D[0] = 0: 空活动集最大权重和为0

问题结构分析



递推关系建立



自底向上计算



自底向上计算:确定计算顺序



• 初始化

D[i]

- D[0] = 0: 空活动集最大权重和为0
- 递推公式

0

• $D[i] = \max\{D[p[i]] + w_i, D[i-1]\}$

D[p[i]]

己知	W					w_i		
		1	2		i-1	i		n
F #7				•••			•••	10
p[i]	\boldsymbol{p}					p[i]		

i-1

D[i-1]

问题结构分析



递推关系建立

n

n



自底向上计算



自底向上计算:确定计算顺序



- 初始化
 - D[0] = 0: 空活动集最大权重和为0
- 递推公式

已知

• $D[i] = \max\{D[p[i]] + w_i, D[i-1]\}$

	1	2	•••	i-1	i	•••	\boldsymbol{n}
W					w_i		

		1	2	•••	i-1	i	•••	\boldsymbol{n}
p[i]	p					p[i]		



问题结构分析



递推关系建立



自底向上计算



自底向上计算: 依次求解问题



- 初始化
 - D[0] = 0: 空活动集最大权重和为0
- 递推公式
 - $D[i] = \max\{D[p[i]] + w_i, D[i-1]\}$

		1	2	•••	i-1	i	•••	n
己知	W					w_i		



问题结构分析

递推关系建立

自底向上计算

最优方案追踪



• 记录决策过程

•
$$Rec[i] = \begin{cases} 1, & 选择活动 a_i \\ 0, & 不选活动 a_i \end{cases}$$
 为不是没有这个 是是这样,

问题结构分析



递推关系建立



自底向上计算



最优方案追踪



• 记录决策过程

•
$$Rec[i] = \begin{cases} 1, &$$
选择活动 $a_i \\ 0, &$ 不选活动 $a_i \end{cases}$

• 输出最优方案

- Rec[i] = 1时,选择活动 a_i ,考察子问题D[p[i]]
- Rec[i] = 0时,不选活动 a_i ,考察子问题D[i-1]

 题约		+_
7 111 7	$= \Lambda \Lambda$	Λ IT
ルベニ		



递推关系建立



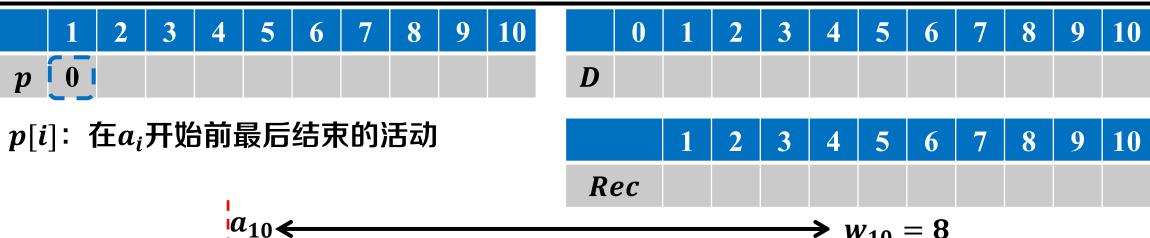
自底向上计算

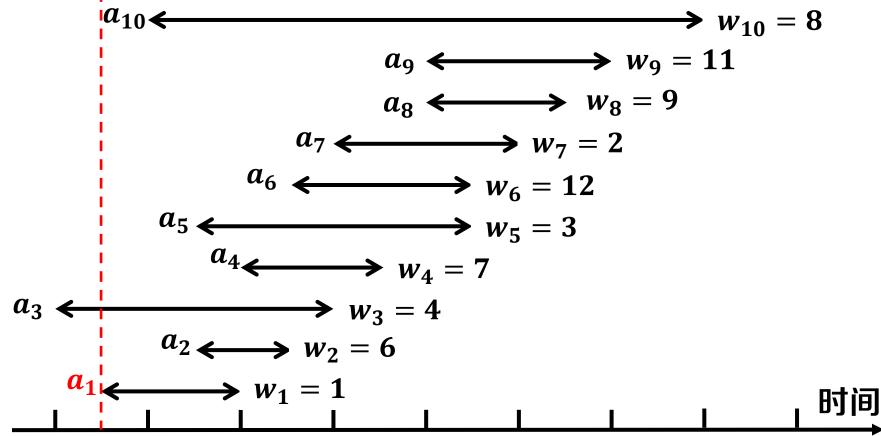


		1	2	•••	i-1	i	•••	n-1	n
已求	p					p[i]		i	

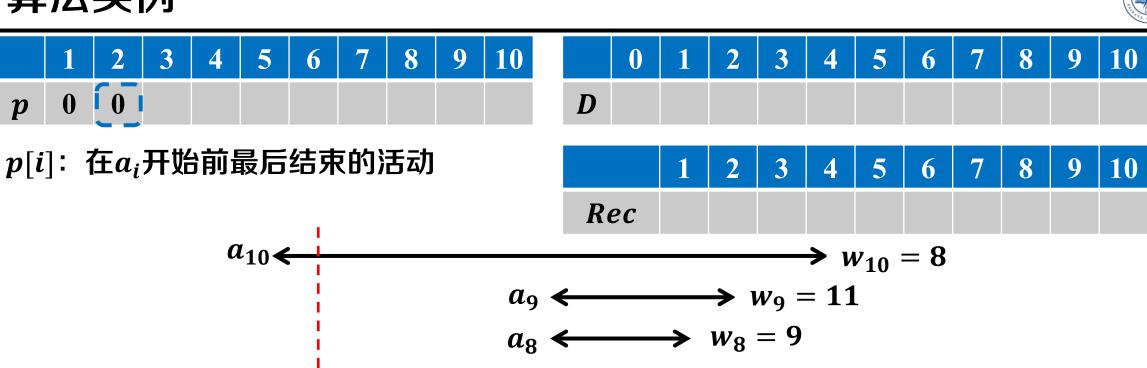
	1	•••	p[i]	•••	i	•••	n-1	n
Rec	1	0	0	0	1	0	1	0
							77	

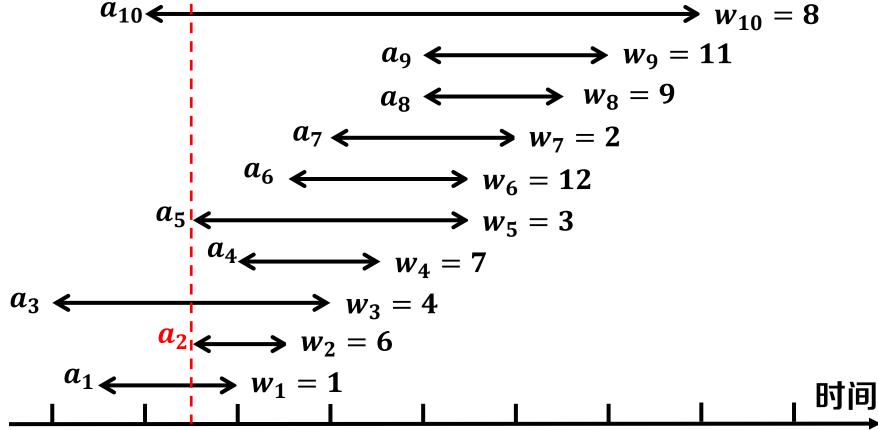




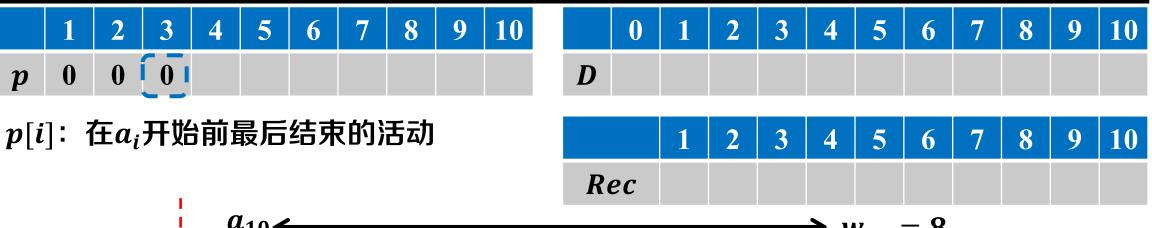


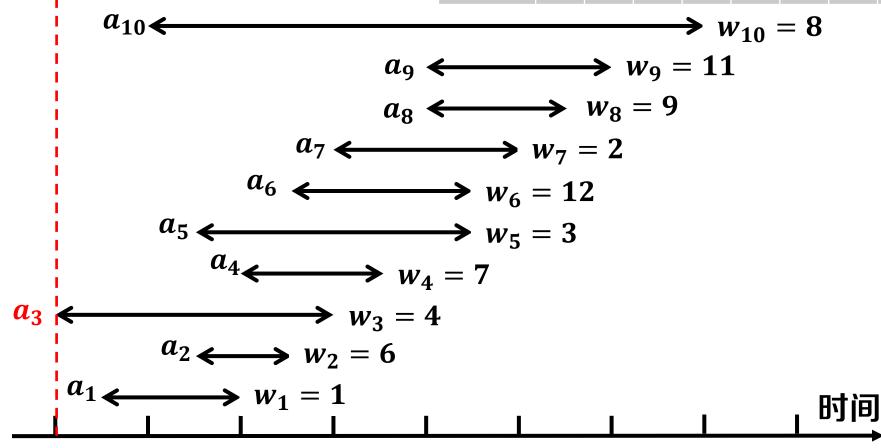




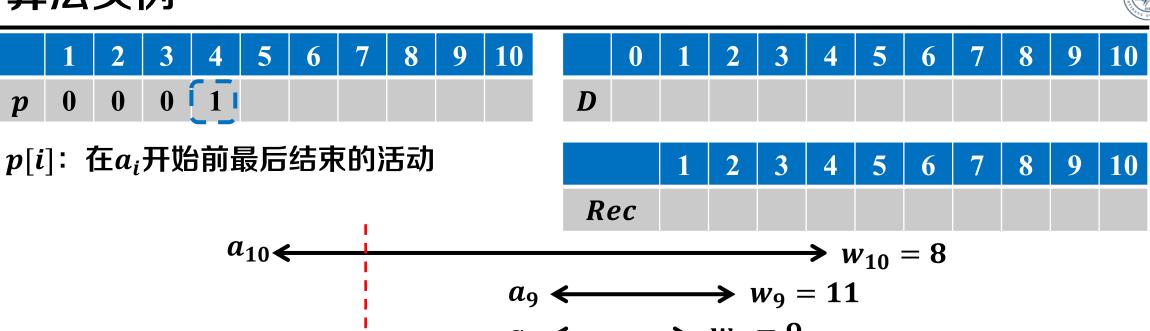


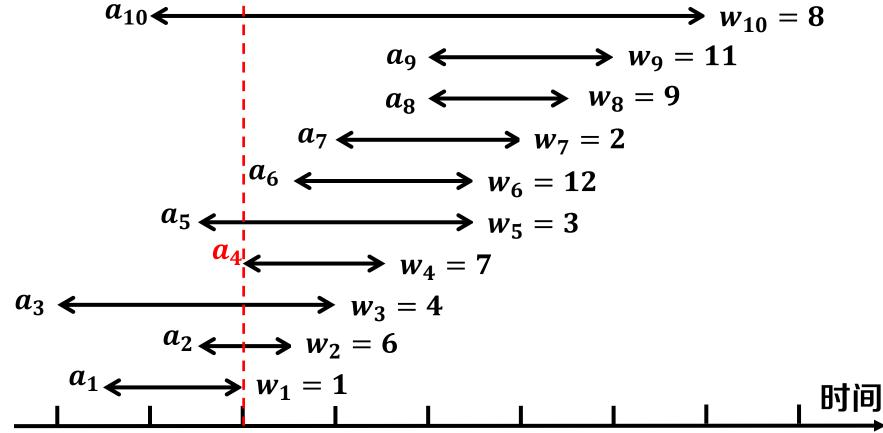




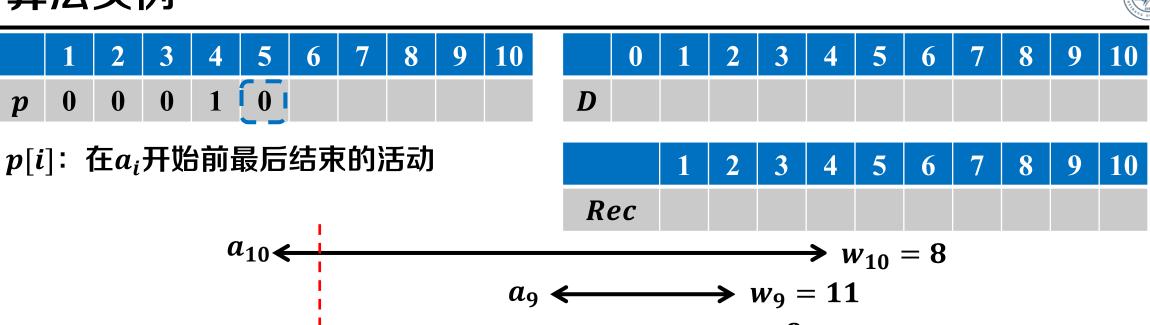


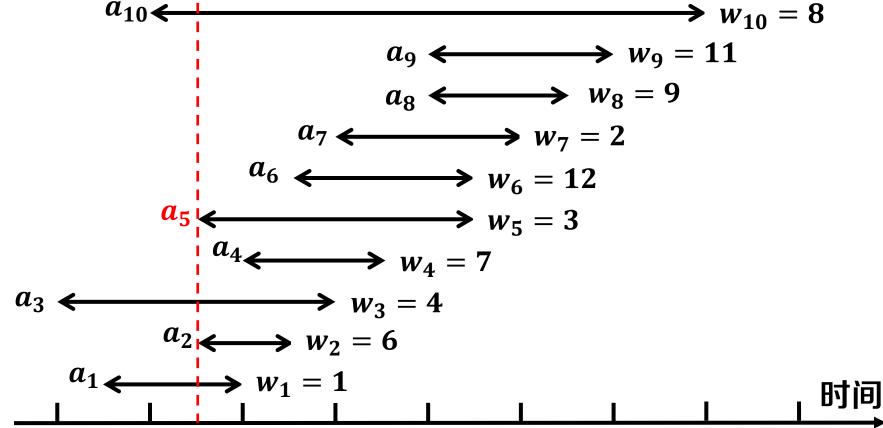






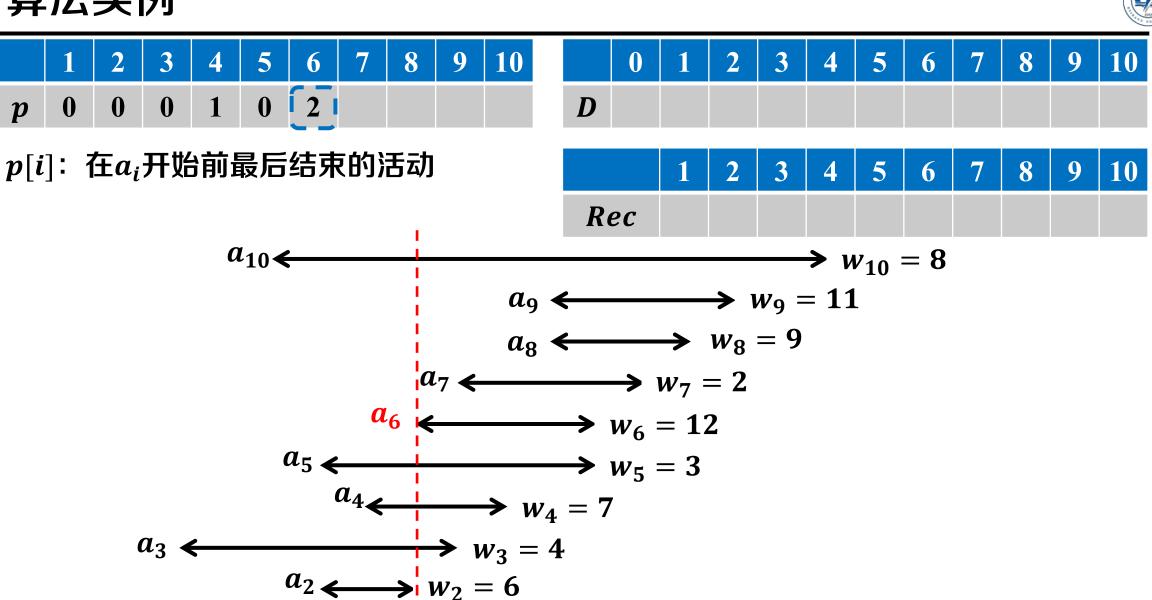




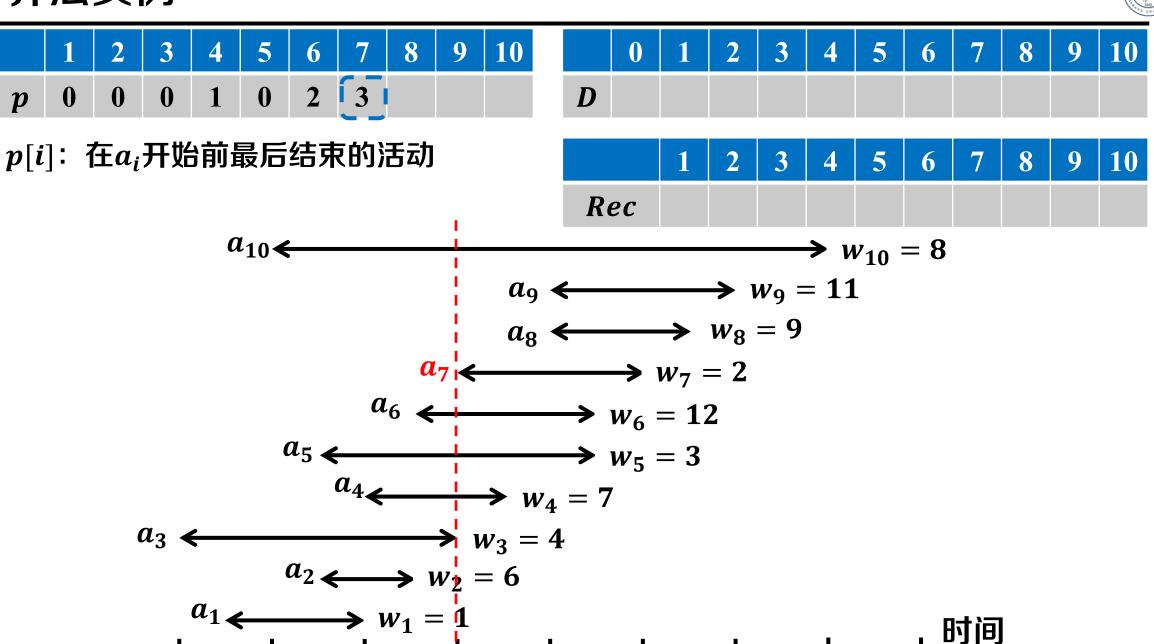




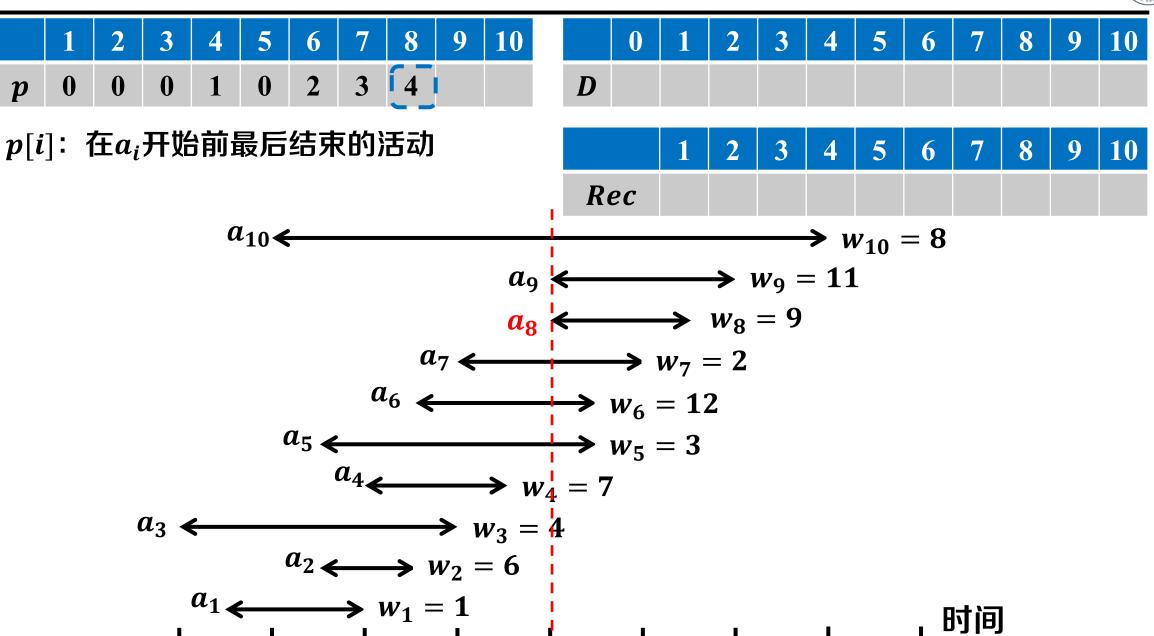
时间



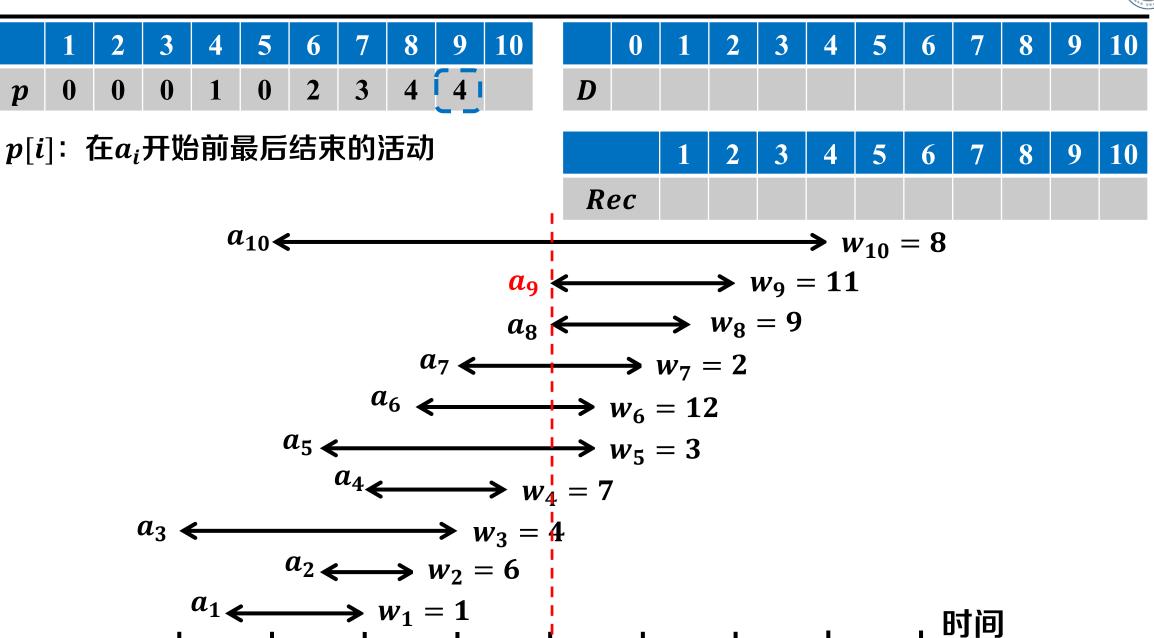








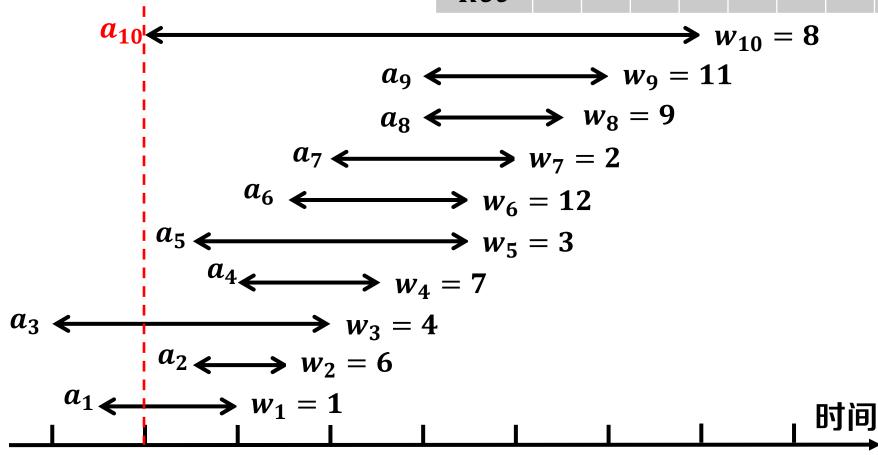




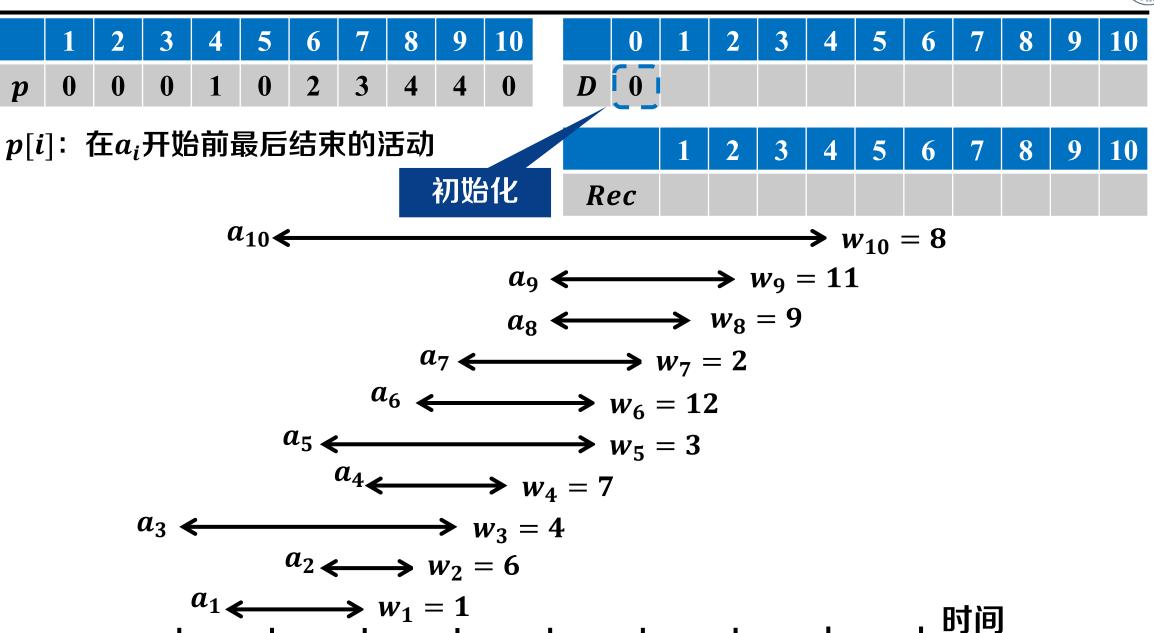




p[i]: 在 a_i 开始前最后结束的活动









开		<u> </u>	ניו																				4 th d A 10 14
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10			0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p																							
																10							
D[i]	[] =	ma	$\mathbf{x}\{\boldsymbol{D}$	p[i]]] +	w_i ,	D[i]	-1]}			R	ec										
				a	¹ 10 ≺	•											→ v	v_{10}	= 8				
										a_{9}	9 ◀				→ 1	W9 =	= 1 1	1					
										a_{ϵ}	3			→	w_8	= 9							
								Π							_ ว								

$$a_{9} \longleftrightarrow w_{9} = 11$$

$$a_{8} \longleftrightarrow w_{8} = 9$$

$$a_{7} \longleftrightarrow w_{7} = 2$$

$$a_{6} \longleftrightarrow w_{6} = 12$$

$$a_{5} \longleftrightarrow w_{5} = 3$$

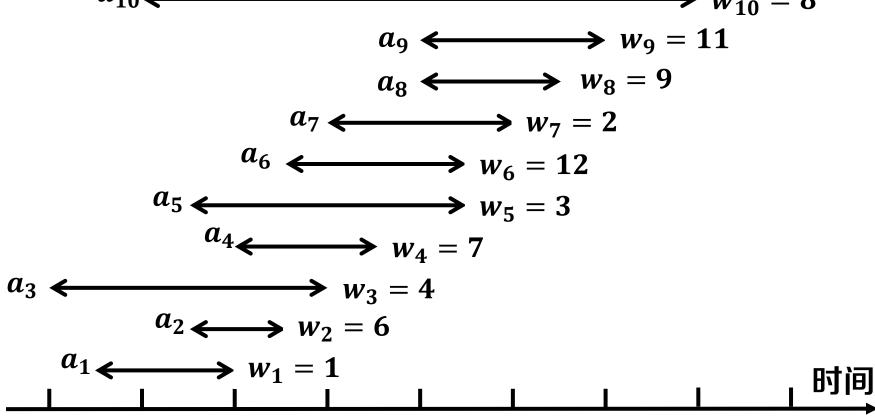
$$a_{4} \longleftrightarrow w_{4} = 7$$

$$a_{3} \longleftrightarrow w_{2} = 6$$

$$a_{1} \longleftrightarrow w_{1} = 1$$
时间



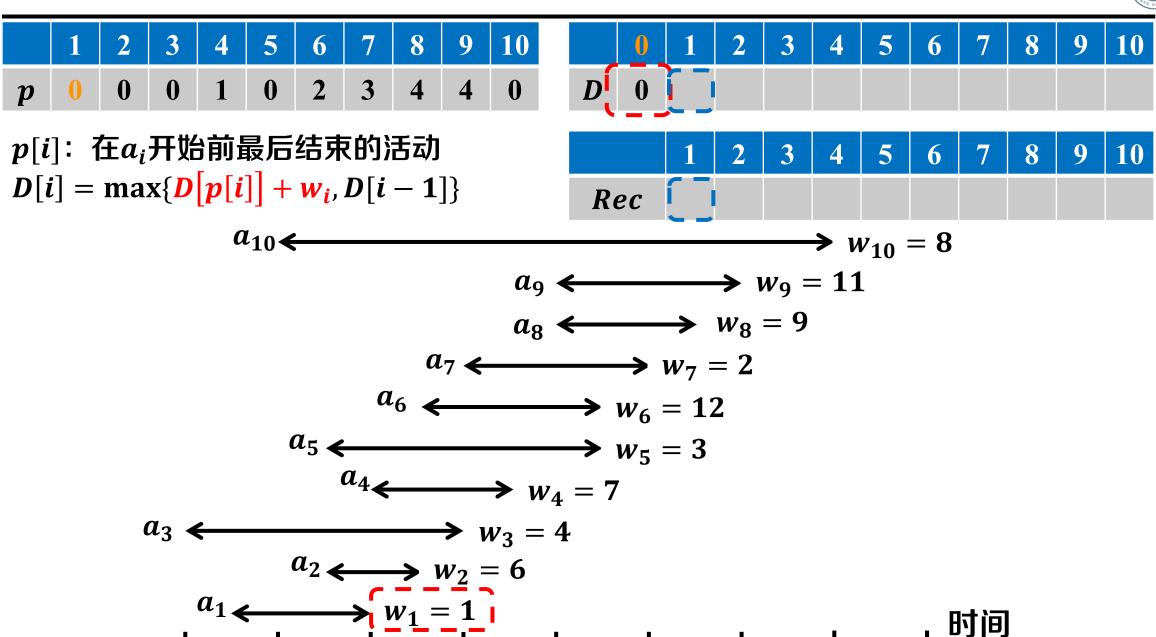
	-/4		ניו																				4 V G R D V 4 P
															10								
p	0	0	0	1	0	2	3	4	4	0		D	0										
				前記										1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D[i]	$i \rfloor =$	ma	x { <i>D</i>	p[i]]] +	w_i ,	D[i]	-1]}			R	ec										
				a	¹ 10 ≺)											→ v	v ₁₀	= 8				
										a_{ς}	•				→	W9 =	= 11	1					
										$a_{\mathfrak{g}}$. ◀			\rightarrow	W_{8}	= 9							





																									4 N 0 WELA
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10			(1	2	3		4	5	6	7	8	9	10
p	0	0	0	1	0	2	3	4	4	0		D	()											
]: 1	•													1	2	3		4	5	6	7	8	9	10
D[i]	[] =	ma	x { D	p i]] +	w_i ,	D[i]	– 1]}			ŀ	Rec	,											
				a	^l 10 ≺	•														_	= 8				
										a_{9}							W 9		11	•					
								0	l7 ←	a_8	}	←					= '	9							
							a	6 €				_	W_{i}		•	= 2 2									
					(a ₅			•				w_{i}	_											
							α ₄ ←			→ v	v ₄			3											
		($a_3 \blacktriangleleft$							$w_3 =$	= 4	1													
				~)			= 6															
				a_1			→ 1	v_1 =	= 1							_					. [对间]		

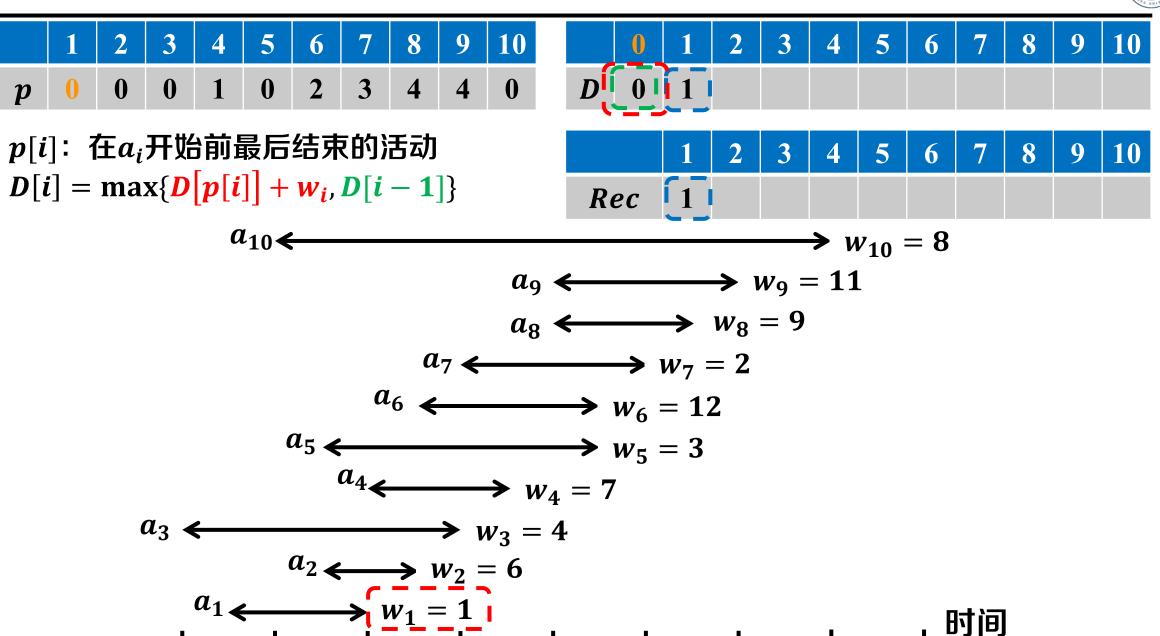






																						440 00140
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p	0	0	0	1	0	2	3	4	4	0		D[0]										
]: 1	•											1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D[i] =	max	$\mathbf{x}\{D$	p i]] +	w_i ,	D[i]	– 1]}			Rec										
				a	^l 10 ≺	•												= 8				
										a_{0}					W ₉ : — ∩		L					
								a	^l 7 ←	a_{ϵ}	} ^		\overrightarrow{w}_7		_ 9							
							a	6 €				$\rightarrow w_6$	•									
					(¹ 5 ←						$\rightarrow w_5$	= 3									
							<i>a</i> ₄ ←			→ v	v ₄	$_{\rm h} = 7$										
		($a_3 \blacktriangleleft$			<i>a</i> -				$v_3 =$	= 4	4										
				a_1			→ []		w ₂ = = 1	= 6 								. [对间]		







																							94 A 0 U W
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10			0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p	0	0	0	1	0	2	3	4	4	0	1	Dĺ	0	1	6	I							
		•			最后									1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D[i]	$i \rfloor =$	ma	$\mathbf{x}\{D$	p i]]+	w_i ,	D[i]	– 1]}			Re	2 <i>C</i>	1	1								
				a	l ₁₀ ∢	•											→ 1	<i>v</i> ₁₀	= 8				
										•	←					-	= 11	1					
											←					=9							
							0		7 ←					-									
						a .		6 €					_	= 1									
						<i>a</i> ₅ ∢	a ₄ ←						<i>w</i> ₅	= 3									
			α .				~4€			→ v	-	· 7											
			<i>a</i> ₃ ∢		(a ₂ ∢	•	→ .1		v ₃ = = 6													
				a_1				v_1 =			ı		ı						, 6	时间]		

 $a_3 \leftarrow$



时间

昇	広	大	נילו																				o that a man to the same of th	1
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10			0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
p	0	0	0	1	0	2	3	4	4	D	0	1	6	6										
	$egin{array}{c c c c c c c c c c c c c c c c c c c $														2	3	4	5	6	7	8	9	10	
D[t]	[i] =	ma	$\mathbf{X}\{D$	p i]] +	w_i ,	D[i]	-1]}			R	ec	1	1	0								
				a	^l 10 ≺	•											→ v	v ₁₀	= 8					
										a_9	→				→	W 9 =	= 1 1	L						
										a_8	•			→	w_8	= 9								
							-		¹ 7 ←				→	w ₇ :	= 2									
							a	6 €				\rightarrow	w_6	= 1	2									
					(<i>a</i> ₅ ←	<u> </u>					\rightarrow	W_5	= 3										

 $\rightarrow w_4 = 7$

 $a_2 \longleftrightarrow w_2 = \overline{6}$

 $\longrightarrow w_1 = 1$



																							440 08145
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10			0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p	0	0	0	1	0	2	3	4	4	0		D	0	1	6	6	8						
$p[i]$: 在 a_i 开始前最后结束的活动 $p[i] = \max\{D[n[i]] + w, D[i = 1]\}$														1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D[$D[i] = \max\{D[p[i]] + w_i, D[i-1]\}$ $a_{10} \leftarrow$														1	0	1						
	a_{10}																→ 1	w_{10}	= 8				
										•			→	W9	= 1	1							
	$a_9 \leftarrow a_8 \leftarrow$														w_8	=9)						
									² 7 ←				→	w_7	= 2								
							a	6				→	w_6	= 1	2								
					(<i>a</i> ₅ ←	•					→	w_5	= 3									
							$a_4 \leftarrow$			→ [ν	7 4	= 7	ì										
		($a_3 \blacktriangleleft$						→ v	$v_3 =$: 4												
						$a_2 \leftarrow$	•	→ 1	$w_2 =$	= 6													
				a_1			→ . <i>\</i>	v ₁ =	= 1						ı		•		, E	时间]		



																							40 BE140
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10			0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p	0	0	0	1	0	2	3	4	4	0		D	0	1	6	6	8	8					
p[i	ː]: 1	Ξa_i	开览	前	最后	结束	初	舌动						1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D[<i>i</i>] =	ma	x { D	p[i]]+	w_i ,	D[i]	-1]}			R	ec	1	1	0	1	0					
				0	l ₁₀ ∢	•											→ 1	w_{10}	= 8				
										a_9	•				→ 1	W9 :	= 1	1					
										a_8	•			\rightarrow	w_8	= 9)						
								a	7 ←				→	w_7	= 2								
							a	6 ←				→	w_6	= 1	2								
					(a ₅ ∢	•							= 3									
						(a_{4}			→ и	7 4	= 7	,										
		($a_3 \blacktriangleleft$	\leftarrow					→ 1	$v_3 =$	4	•											
						a_2	•	→ 1	<i>v</i> ₂ =	= 6													
			_	a_1			→ 1	<i>v</i> ₁ =	= 1		_		_		_		_		. F	计话	1		
				a_1	-		→ \	v_1 =	= 1								ı		, 6	对间]		



			., –																				440 02142
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10			0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p	0	0	0	1	0	2	3	4	4	0		D	0	1	6	6	8	8	18				
	_	•			最后									1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D[i]	[] =	ma	x{D	p i]]+	w_i ,	D[i	-1	}			R	ec	1	1	0	1	0					
				a	^l 10 ≺	•											→ ı	v ₁₀	= 8				
										a_{9}	*				→	W9 =	= 12	1					
										a_8	*			→	w_8	= 9							
									² 7 ←				→	w ₇ :	= 2								
					(a ₅		6 ←				•	w ₆ ∶ w ₅ ∶		2								
							α ₄ ←			→ v	V ₄	= 7	7										
		($a_3 \blacktriangleleft$			~				$v_3 =$	4												
				a		<i>a</i> ₂ ←				= 6													
				a_1			→ 1	$w_1 =$	= 1		,		ı				ı		, Ε	时间]		



																							440 081428
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10			0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p	0	0	0	1	0	2	3	4	4	0		D	0	1	6	6	8	8	18	18			
	_	•			最后									1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D[i]	[i] =	ma	$\mathbf{x}\{\mathbf{D}$	p[i]]+	w_i ,	D[i]	– 1]}			R	ec	1	1	0	1	0	1	0			
				a	^l 10 ≺	•											→ v	v_{10}	= 8				
										a_{9}	→					_	= 1 1	1					
										a_8	<			→ .	<i>w</i> ₈	= 9)						
							O		¹ 7 ←					w ₇ :		-1							
						~		6 €						= 1	2								
						^α 5 ←	a ₄ ←						w_5	= 3									
			or .			·	**			→ v	-		7										
			$a_3 \blacktriangleleft$			a_2	,			$w_3 = $: 4	•											
				a_1_{\blacktriangleleft}		a ₂ ∢			_	- 0											_		
				+	<u> </u>		フ ' 	v_1 =	- 1 		ı		ı		ı		1		,	时间	J		



71	-/-		<i>/ /</i>																				1 a uni	1
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10			0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
														1	6	6	8	8	18	18	18	l		
	$p[i]$: 在 a_i 开始前最后结束的活动 $D[i] = \max\{D[p[i]] + w_i, D[i-1]\}$														2	3 0	4	5 0	6	7 0	8	9	10	
	$D[i] = \max\{D[p[i]] + w_i, D[i-1]\}$ $a_{10} \leftarrow$														1		→ v			U				
$a_{10} \longleftrightarrow w_{10} = 8$ $a_{9} \longleftrightarrow w_{9} = 11$																								
								0	l- 0	a_8	} ◀					= 9	_1							
							a	l ₆ €	¹ 7 ←			→		$w_7 = 1$										
					(¹ 5 ←	<u> </u>						w_5											
			a a				a ₄ ←			→ v	_		•											
		•	$a_3 \blacktriangleleft$			a ₂ ∢)	→ 1		w ₃ = = 6	= 4	1												
			ı	a_1_{\blacktriangleleft}				w ₁ =			ı		ı				ı		, 6	时间	J			



	-/-		<i>/ J</i>																				1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1	SE VIEW
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10			0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
p	0	0	0	1	0	2	3	4	4	0		D	0	1	6	6	8	8	18	18	18	19		
	_	•			最后]] +						R	ec	1	2 1	3 0	4 1	5 0	6 1	7 0	8	9	10		
	$D[i] = \max\{D[p[i]] + w_i, D[i-1]\}$ $a_{10} \leftarrow$																		= 8					
$a_{10} \longleftrightarrow w_{10} = 8$ $a_{9} \longleftrightarrow w_{9} = 11$ $a_{8} \longleftrightarrow w_{8} = 9$																								
								a	l7 ←		_			→ W ₇ :		= 9								
							a	6 €				→		= 1										
					(^a 5 ←	or .					→	w_5	= 3										
			Ma d				α ₄ ←			→ v	_		7											
		•	<i>a</i> ₃ ◀			a ₂ ∢		→ 1		w ₃ = 6	- 4													
			1	a_1			์ → เ				ı						ı		, E	时间				



	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p	0	0	0	1	0	2	3	4	4	0	$D \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$	1	6	6	8	8	18	18	18	19	19
p[i]		•										1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D[i]	=	ma	x { D	p[i]]] +	w_i ,	D[i	-1]}		Rec	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0
				a	^l 10 ≺	•									→ [и		= 8	ì			
										a_9			→ 1		= 11	_					
								a	^l 7 ←	a_8			W ₈	= 9							
							a	6 «	,			W_7									
						a ₅					$\longrightarrow w_6$ $\longrightarrow w_5$										
						•	a ₄ ←			→ w	$_{4} = 7$	- 5									
		($a_3 \blacktriangleleft$							$w_3 =$	4										
				~		<i>a</i> ₂ ←				= 6											
			ı	<i>a</i> ₁ ∢	(→ \ 	<i>v</i> ₁ =	= 1 I		l I		ı		ı		, 8	时间			



			-r –																				4/0 00145
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10			0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p	0	0	0	1	0	2	3	4	4	0		D	0	1	6	6	8	8	18	18	18	19	19
														1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
												R	ec	1	1	0	1	0	1	0	0	7	0
	a_{10} a_{9} $w_{10} = 8$ 最优解 a_{8} $w_{8} = 9$																						
	$u_9 \longleftrightarrow w_9 = 11$																						
							a							-									
					(a ₅		6 €															
							a ₄ ←			→ v			<i>W</i> ₅	– 3									
			$a_3 \blacktriangleleft$							$w_3 =$	4												
				a		<i>a</i> ₂ ∢				= 6													
				a_1	_		_	_	= 1								ı		, Ε	时间			



	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p	0	0	0	1	0	2	3	4	4	0	D	0	1	6	6	8	8	18	18	18	19	19
) <u> </u>	·h #=	∧ a	,	\sim																		

活动集合 $S' = \{\}$

 Rec
 1
 2
 3
 4
 5
 6
 7
 8
 9
 10

 Rec
 1
 1
 0
 1
 0
 1
 0
 1
 0

$$a_{10}$$
 $w_{10} = 8$

$$a_{9} \longleftrightarrow w_{9} = 11$$

$$a_{8} \longleftrightarrow w_{8} = 9$$

$$a_{7} \longleftrightarrow w_{7} = 2$$

$$a_{6} \longleftrightarrow w_{6} = 12$$

$$a_{5} \longleftrightarrow w_{5} = 3$$

$$a_{4} \longleftrightarrow w_{4} = 7$$

$$a_{3} \longleftrightarrow w_{3} = 4$$

$$a_{2} \longleftrightarrow w_{2} = 6$$

$$a_{1} \longleftrightarrow w_{1} = 1$$

时间



	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p	0	0	0	1	0	2	3	4	4	0	D	0	1	6	6	8	8	18	18	18	19	19
活	动集	合 <i>S</i>	′ =	$\{a_9\}$									1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
											Re	e.c	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0

$$a_{10}$$
 $w_{10} = 8$

$$a_{9} \longleftrightarrow w_{9} = 11$$

$$a_{8} \longleftrightarrow w_{8} = 9$$

$$a_{7} \longleftrightarrow w_{7} = 2$$

$$a_{6} \longleftrightarrow w_{6} = 12$$

$$a_{5} \longleftrightarrow w_{5} = 3$$

$$a_{4} \longleftrightarrow w_{4} = 7$$

$$a_{3} \longleftrightarrow w_{2} = 6$$

$$a_{1} \longleftrightarrow w_{1} = 1$$

Fight



	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
\boldsymbol{p}	0	0	0	1	0	2	3	4	4	0	D	0	1	6	6	8	8	18	18	18	19	19
活	动集	合S	′ =	$\{a_9\}$	-								1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
											R	e.c	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0

$$a_{10}$$
 $w_{10} = 8$

$$a_{9} \longleftrightarrow w_{9} = 11$$

$$a_{8} \longleftrightarrow w_{8} = 9$$

$$a_{7} \longleftrightarrow w_{7} = 2$$

$$a_{6} \longleftrightarrow w_{6} = 12$$

$$a_{5} \longleftrightarrow w_{5} = 3$$

$$a_{4} \longleftrightarrow w_{4} = 7$$

$$a_{3} \longleftrightarrow w_{2} = 6$$

$$a_{1} \longleftrightarrow w_{1} = 1$$

Fight



	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p	0	0	0	1	0	2	3	4	4	0	D	0	1	6	6	8	8	18	18	18	19	19
活	动集	合S	′ =	$\{a_4$,	a_9 }								1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
											R	ec	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0

$$a_{10}$$
 a_{9} $w_{10} = 8$

$$a_{9}$$
 $w_{9} = 11$

$$a_{8}$$
 $w_{9} = 9$

$$a_{7}$$
 $w_{7} = 2$

$$a_{6}$$
 $w_{6} = 12$

$$a_{5}$$
 $w_{5} = 3$

$$a_{4}$$
 $w_{4} = 7$

$$a_{3}$$
 $w_{3} = 4$

$$a_{2}$$
 $w_{2} = 6$

$$a_{1}$$
 $w_{1} = 1$



	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
\boldsymbol{p}	0	0	0	1	0	2	3	4	4	0	D	0	1	6	6	8	8	18	18	18	19	19
活	动集	合 <i>S</i>	′ =	$\{a_4,$	$a_9\}$								1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
											R	ec	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0

$$a_{10}$$
 a_{9} $w_{10} = 8$

$$a_{9}$$
 $w_{9} = 11$

$$a_{8}$$
 $w_{9} = 9$

$$a_{7}$$
 $w_{7} = 2$

$$a_{6}$$
 $w_{6} = 12$

$$a_{5}$$
 $w_{5} = 3$

$$a_{4}$$
 $w_{4} = 7$

$$a_{3}$$
 $w_{3} = 4$

$$a_{2}$$
 $w_{2} = 6$

$$a_{1}$$
 $w_{1} = 1$



开	14		ניע																				0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10			0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p	0	0	0	1	0	2	3	4	4	0		D	0	1	6	6	8	8	18	18	18	19	19
活动集合 $S' = \{a_1, a_4, a_9\}$ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$															9	10							
															1	0							
				a	^l 10 ≺	•									•		→ v	v ₁₀	= 8				
										a_{9}	9 •				→ 1	w ₉ =	= 11	L					
										a_8	3 ◀			→	w_8	= 9							
								a	² 7 ←				→	W-7 =	= 2								

$$a_{9} \longleftrightarrow w_{9} = 11$$

$$a_{8} \longleftrightarrow w_{8} = 9$$

$$a_{7} \longleftrightarrow w_{7} = 2$$

$$a_{6} \longleftrightarrow w_{6} = 12$$

$$a_{5} \longleftrightarrow w_{5} = 3$$

$$a_{4} \longleftrightarrow w_{4} = 7$$

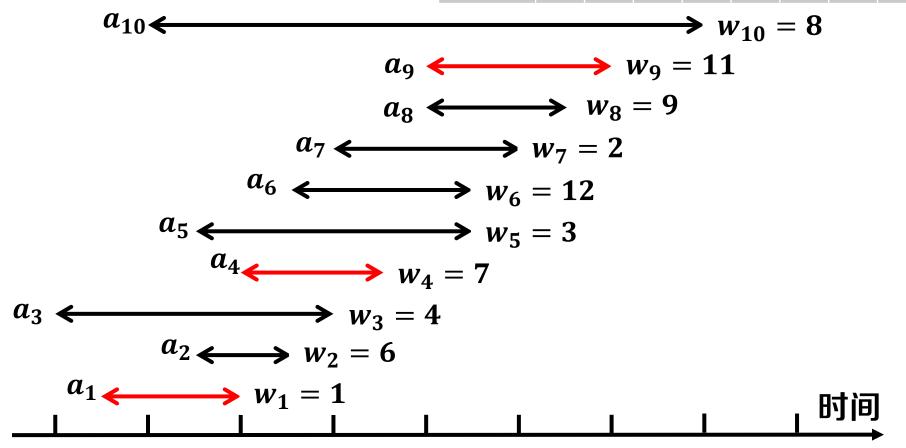
$$a_{3} \longleftrightarrow w_{2} = 6$$

$$a_{1} \longleftrightarrow w_{1} = 1$$

$$\exists j \exists$$



	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p	0	0	0	1	0	2	3	4	4	0	D	0	1	6	6	8	8	18	18	18	19	19
活	动集	合 S	′ =	$\{a_1,$	a_4 ,	a 9}							1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
											R	ec	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0





```
输入: 活动集合S = \{a_1, a_2, ..., a_n\},
    每个活动a_i的起止时间s_i, f_i和权重w_i
输出: 不冲突活动的最大子集S'
//预处理
把活动按照结束时间升序排序
                             预处理
for i \leftarrow 1 to n do
  二分查找求解p[i]
end
//初始化
新建数组D[0..n], Rec[1..n]
D[0] \leftarrow 0
```



```
输入: 活动集合S = \{a_1, a_2, ..., a_n\},
    每个活动a_i的起止时间s_i, f_i和权重w_i
输出: 不冲突活动的最大子集S'
//预处理
把活动按照结束时间升序排序
for i \leftarrow 1 to n do
  二分查找求解p[i]
end
//初始化
新建数组D[0..n], Rec[1..n]
                            初始化
D[0] \leftarrow 0
```



```
//动态规划
for j \leftarrow 1 to n do
                                                     对每个子问题
   if \overline{D[p[j]]} + w_j > \overline{D[j-1]} then
       D[j] \leftarrow D[p[j]] + w_j
        Rec[j] \leftarrow 1
     end
     else
        D[j] \leftarrow D[j-1]
        Rec[j] \leftarrow 0
     end
end
```



//动态规划

```
for j \leftarrow 1 to n do
   (if D[p[j]] + w_j > D[j-1] then
      D[j] \leftarrow D[p[j]] + w_j
   Rec[j] \leftarrow 1
   end
    else
       D[j] \leftarrow D[j-1]
       Rec[j] \leftarrow 0
    end
end
```

选择活动 a_i



```
//动态规划
for j \leftarrow 1 to n do
   if D[p[j]] + w_j > D[j-1] then
       D[j] \leftarrow D[p[j]] + w_j
       Rec[j] \leftarrow 1
    end
   else
                                                        不选活动a_i
   D[j] \leftarrow D[j-1]
   Rec[j] \leftarrow 0
    \mathbf{end}
end
```



```
//输出方案
k \leftarrow n
while k > \theta do
  if Rec[k] = 1 then
                                                               选择活动a_k
    」 print 选择a[k]
     \overline{\phantom{a}} k \leftarrow \overline{p}[\overline{k}]
    end
    else
     k \leftarrow k-1
    \mathbf{end}
end
return D[n]
```



```
//输出方案
k \leftarrow n
while k > \theta do
    if Rec[k] = 1 then
      | print 选择 a[k]   k \leftarrow p[k] 
                                                          回溯子问题
    end
    else
     k \leftarrow k-1
    \mathbf{end}
end
return D[n]
```



```
//输出方案
k \leftarrow n
while k > \theta do
    if Rec[k] = 1 then
         \operatorname{print} 选择a[k]
        k \leftarrow p[k]
    \mathbf{end}
    else
                                                              不选活动a_k
     | k \leftarrow k-1
    \mathbf{end}
end
return D[n]
```

动态规划:复杂度分析

return D[n]



```
输入: 活动集合S = \{a_1, a_2, ..., a_n\},
     每个活动a_i的起止时间s_i, f_i和权重w_i
输出: 不冲突活动的最大子集S'
//预处理和初始化
把活动按照结束时间升序排序 ---O(n\log n)
for i \leftarrow 1 to n do
                                       O(n \log n)
   二分查找求解p[i]
end
新建数组D[0..n], Rec[1..n]
D[0] \leftarrow 0
//动态规划
for j \leftarrow 1 to n do
   if D[p[j]] + w_j > D[j-1] then
      D[j] \leftarrow D[p[j]] + w_j
      Rec[j] \leftarrow 1
   end
                                        O(n)
   else
     D[j] \leftarrow D[j-1]
      Rec[j] \leftarrow 0
   \mathbf{end}
end
//输出方案
k \leftarrow n
while k > \theta do
   if Rec[k] = 1 then
      print 选择a[k]
      k \leftarrow p[k]
                                        O(n)
   end
   else
   k \leftarrow k-1
   end
end
```

时间复杂度: $O(n \log n)$

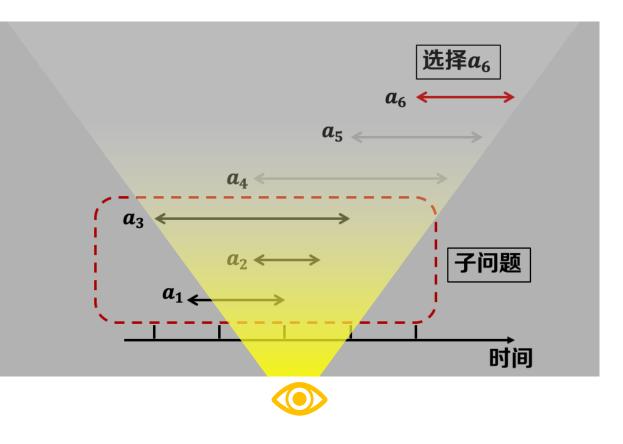
活动选择问题: 动态规划 vs. 贪心策略

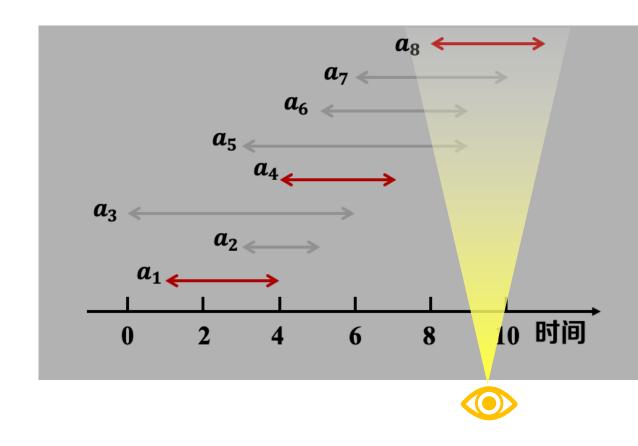


带权活动选择问题

权重均为1 性质更好

活动选择问题





求解子问题,组合最优解

动态规划:考察全局

直接做决策,构造最优解

贪心策略:考察局部



算法设计与分析

分而治之篇

最大子数组问题 提下计数问题 题里的

动态规划篇

最长公共子序列问题Ⅱ

次序选择问题

最长公共子串问题

最小编辑距离问题

钢条切割问题矩阵链乘法问题

贪心策略篇

部分背包问题霍夫曼编码

活动选择问题

课程总结



分而治之

动态规划

贪心策略

分解原问题

问题结构分析

提出贪心策略



-

-

解决子问题

递推关系建立

证明策略正确



合并问题解

自底向上计算



最优方案追踪



