

分而治之篇：次序选择问题

童咏昕

北京航空航天大学
计算机学院

中国大学MOOC北航《算法设计与分析》

问题背景：最小值查找



- 给定数组 $A[1..16]$ ，寻找其中最小值

21	17	37	28	13	14	22	52	40	24	48	4	47	8	42	18
----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	---	----	---	----	----

问题背景：最小值查找



- 给定数组 $A[1..16]$ ，寻找其中最小值

21	17	37	28	13	14	22	52	40	24	48	4	47	8	42	18
----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	---	----	---	----	----

- 依次扫描，记录最小值

21	17	37	28	13	14	22	52	40	24	48	4	47	8	42	18
----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	---	----	---	----	----



扫描

问题背景：最小值查找

- 给定数组 $A[1..16]$ ，寻找其中最小值

21	17	37	28	13	14	22	52	40	24	48	4	47	8	42	18
----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	---	----	---	----	----

- 依次扫描，记录最小值

21	17	37	28	13	14	22	52	40	24	48	4	47	8	42	18
----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	---	----	---	----	----



扫描

问题：如何求得数组中第 k 小的元素？

- 形式化定义

次序选择问题

Selection Problem

输入

- 包含 n 个不同元素的数组 $A[1..n]$
- 整数 $k(1 \leq k \leq n)$

- 形式化定义

次序选择问题

Selection Problem

输入

- 包含 n 个不同元素的数组 $A[1..n]$
- 整数 $k(1 \leq k \leq n)$

输出

- 数组 $A[1..n]$ 中第 k 小的元素($1 \leq k \leq n$)

- 数组排序
 - 求得所有元素的次序
 - 时间复杂度: $O(n \log n)$

21	17	37	28	13	14	22	52	40	24	48	4	47	8	42	18
----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	---	----	---	----	----

↓ 排序

4	8	13	14	17	18	21	22	24	28	37	40	42	47	48	52
---	---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

- 数组排序
 - 求得所有元素的次序
 - 时间复杂度: $O(n \log n)$
- 选择元素
 - 求得第8小的元素
 - 时间复杂度: $O(1)$

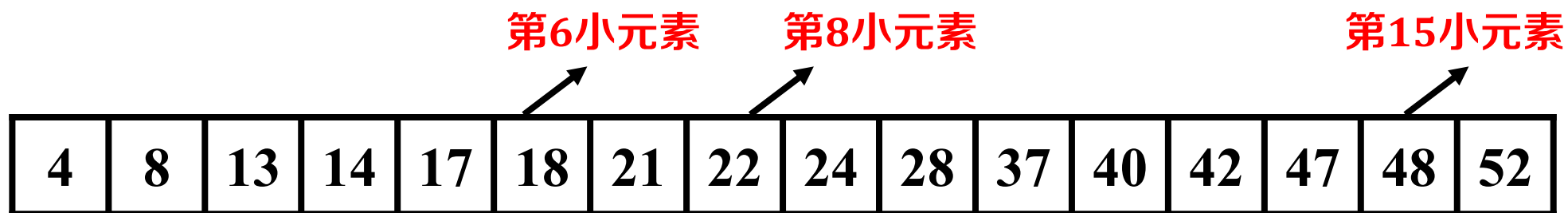
21	17	37	28	13	14	22	52	40	24	48	4	47	8	42	18
----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	---	----	---	----	----

↓ 排序

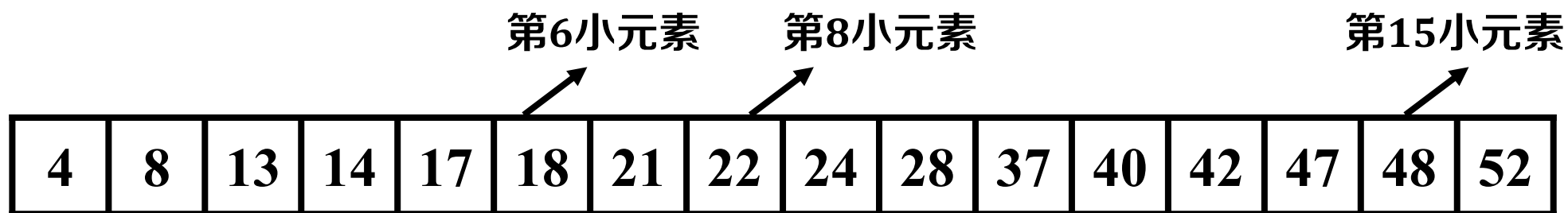
查找第8小元素

4	8	13	14	17	18	21	22	24	28	37	40	42	47	48	52
---	---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

- 数组排序
 - 求得所有元素的次序
 - 时间复杂度: $O(n \log n)$



- 数组排序
 - 求得所有元素的次序
 - 时间复杂度: $O(n \log n)$

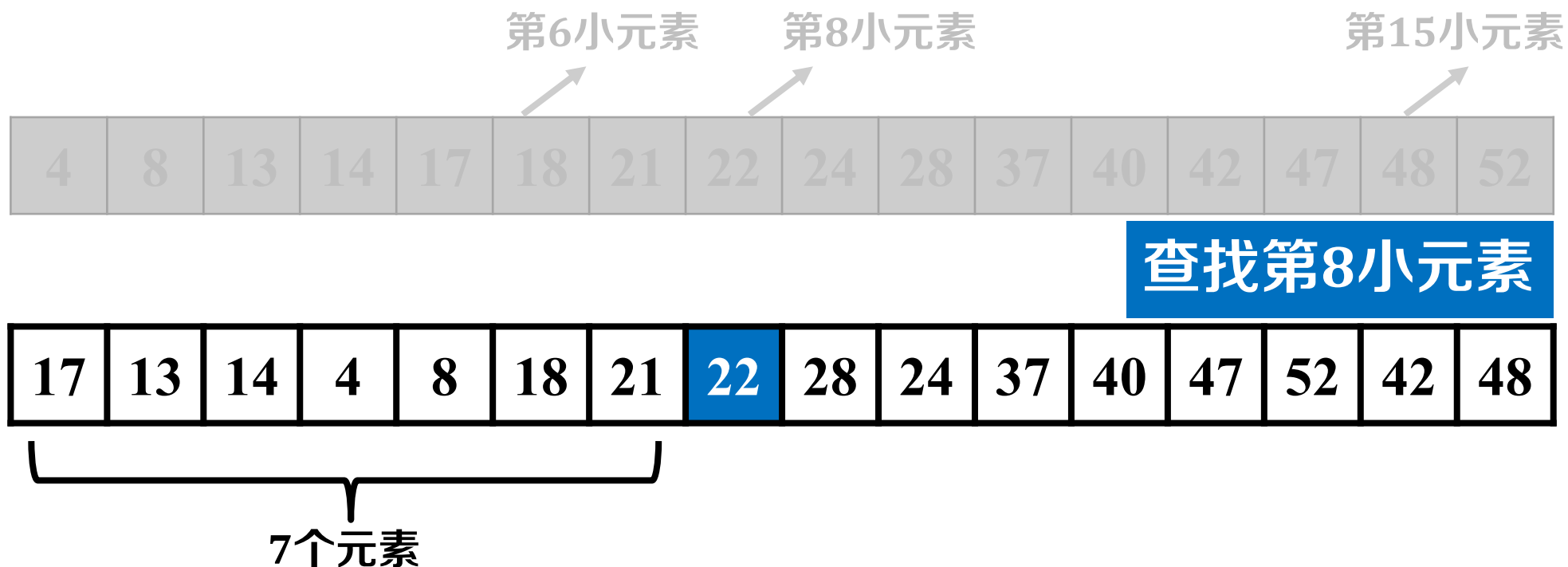


问题：是否有必要求得所有元素的次序？

问题分析



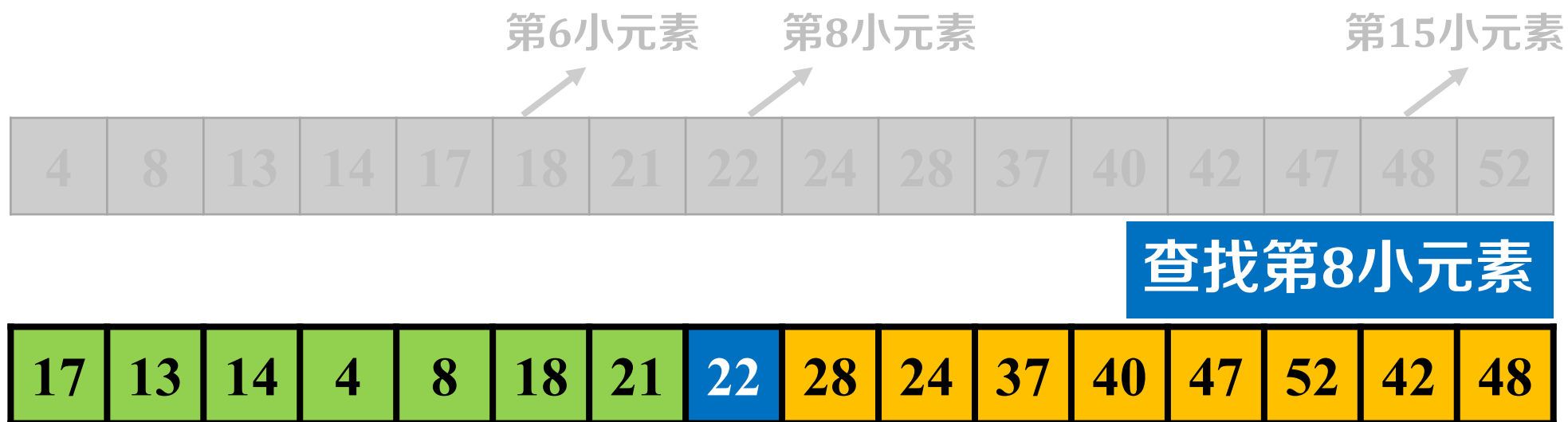
- 次序选择
 - 不必求得所有元素次序
 - 时间复杂度: $O(?)$



问题分析



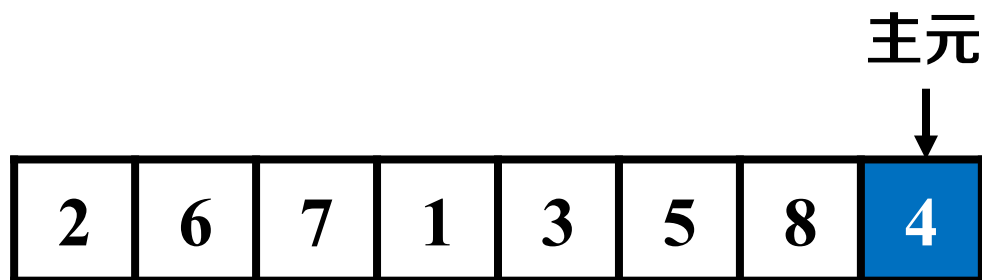
- 次序选择
 - 不必求得所有元素次序
 - 时间复杂度: $O(?)$



受启发于快速排序的数组划分

2	6	7	1	3	5	8	4
---	---	---	---	---	---	---	---

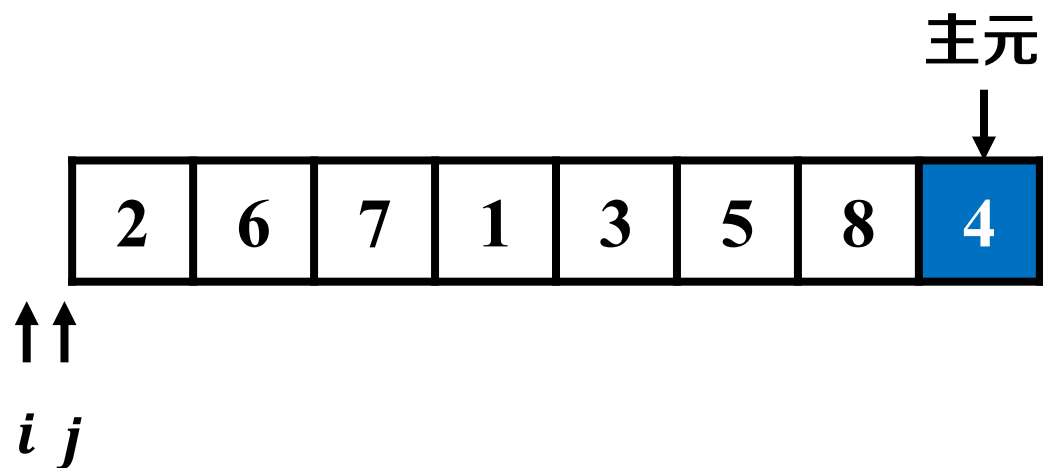
- 选取固定位置主元 x （如尾元素）



回顾与启发

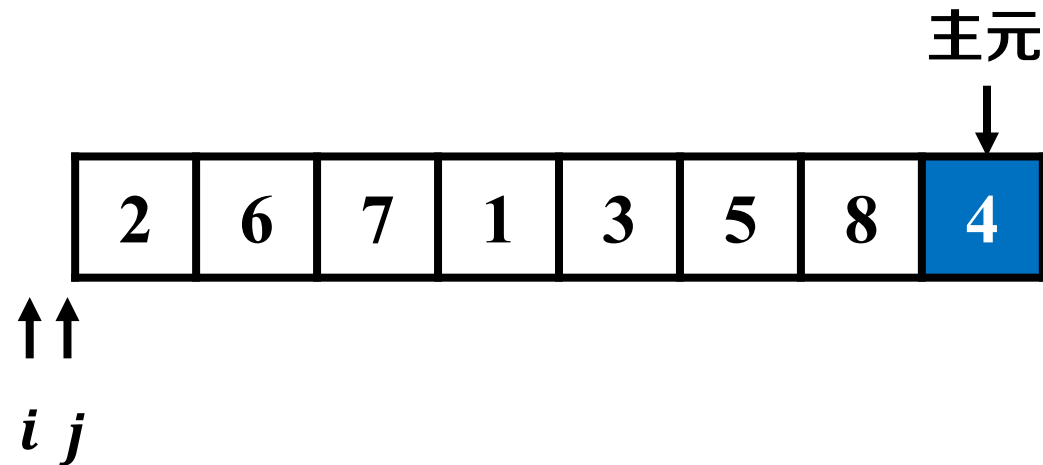


- 选取固定位置主元 x （如尾元素）
- 维护两个部分的右端点变量 i, j



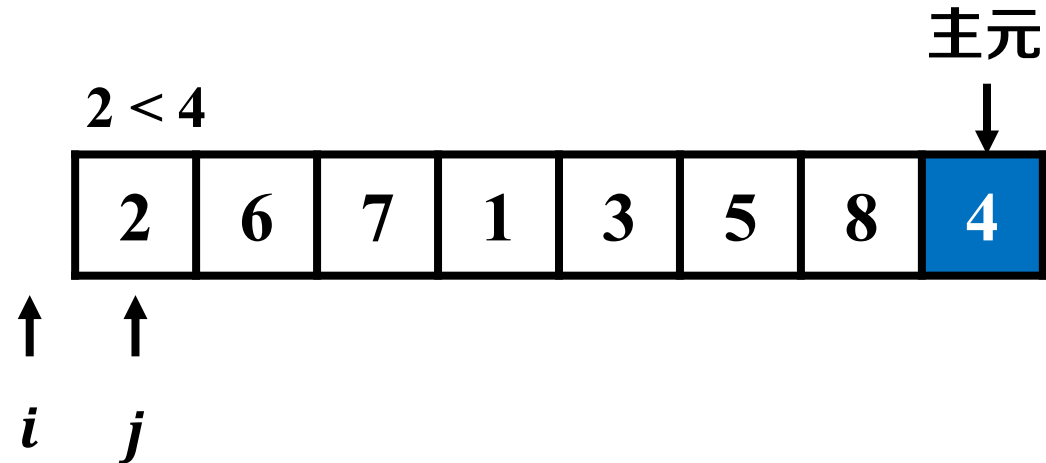
回顾与启发

- 选取固定位置主元 x （如尾元素）
- 维护两个部分的右端点变量 i, j
- 考察数组元素 $A[j]$ ，只和主元比较
 - 若 $A[j] \leq x$ ，则交换 $A[j]$ 和 $A[i + 1]$ ， i 与 j 右移
 - 若 $A[j] > x$ ，则 j 右移



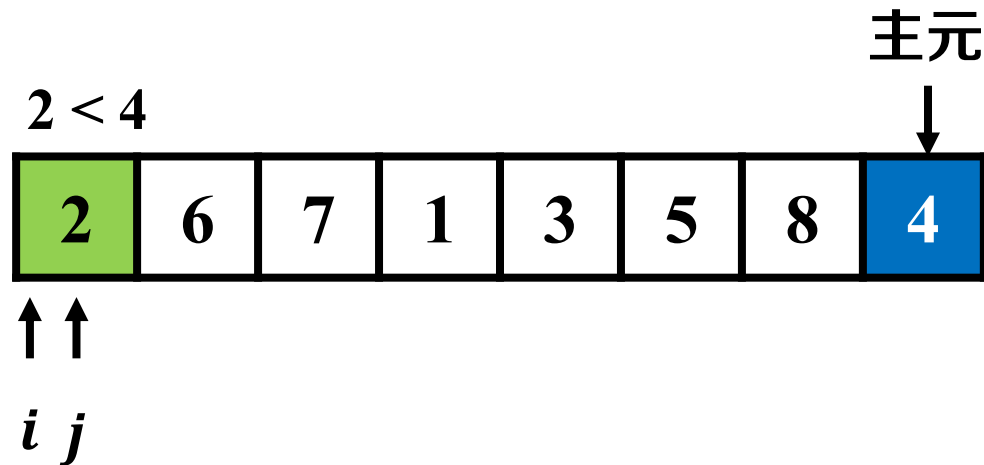
回顾与启发

- 选取固定位置主元 x （如尾元素）
- 维护两个部分的右端点变量 i, j
- 考察数组元素 $A[j]$ ，只和主元比较
 - 若 $A[j] \leq x$ ，则交换 $A[j]$ 和 $A[i + 1]$ ， i 与 j 右移
 - 若 $A[j] > x$ ，则 j 右移



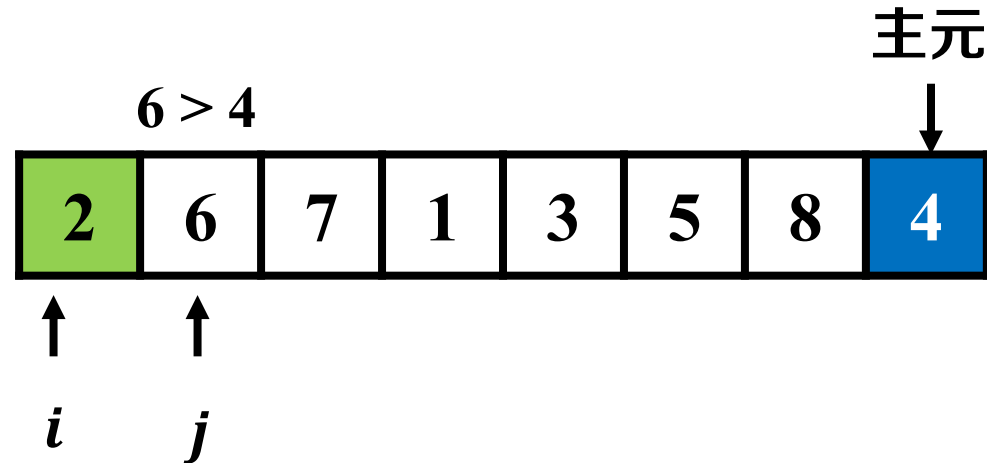
回顾与启发

- 选取固定位置主元 x （如尾元素）
- 维护两个部分的右端点变量 i, j
- 考察数组元素 $A[j]$ ，只和主元比较
 - 若 $A[j] \leq x$ ，则交换 $A[j]$ 和 $A[i + 1]$ ， i 与 j 右移
 - 若 $A[j] > x$ ，则 j 右移



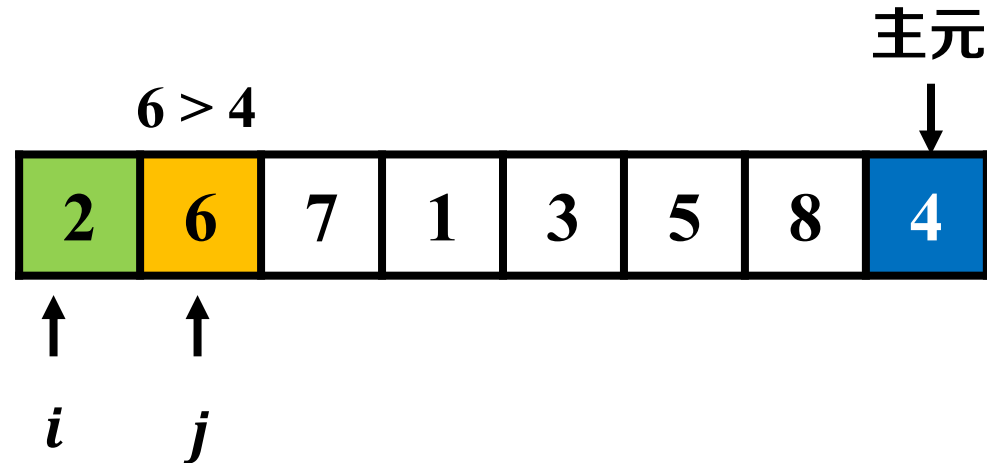
回顾与启发

- 选取固定位置主元 x （如尾元素）
- 维护两个部分的右端点变量 i, j
- 考察数组元素 $A[j]$ ，只和主元比较
 - 若 $A[j] \leq x$ ，则交换 $A[j]$ 和 $A[i + 1]$ ， i 与 j 右移
 - 若 $A[j] > x$ ，则 j 右移



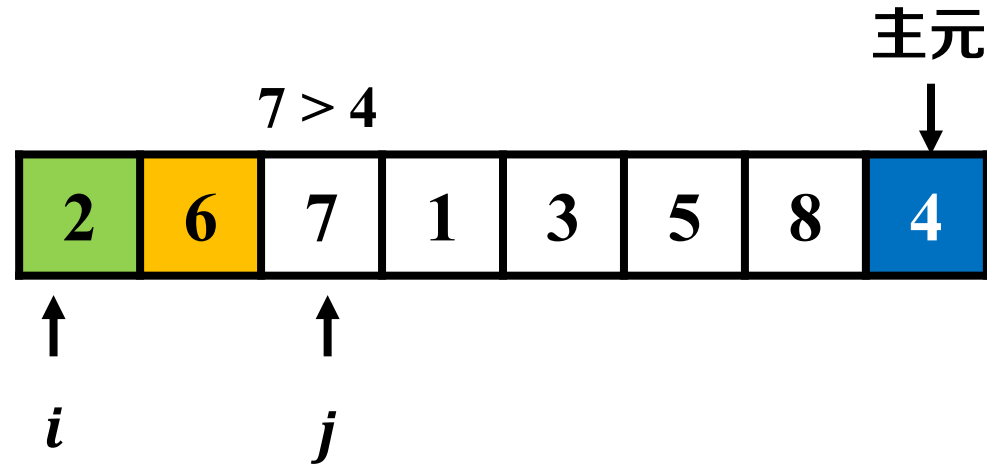
回顾与启发

- 选取固定位置主元 x （如尾元素）
- 维护两个部分的右端点变量 i, j
- 考察数组元素 $A[j]$ ，只和主元比较
 - 若 $A[j] \leq x$ ，则交换 $A[j]$ 和 $A[i + 1]$ ， i 与 j 右移
 - 若 $A[j] > x$ ，则 j 右移



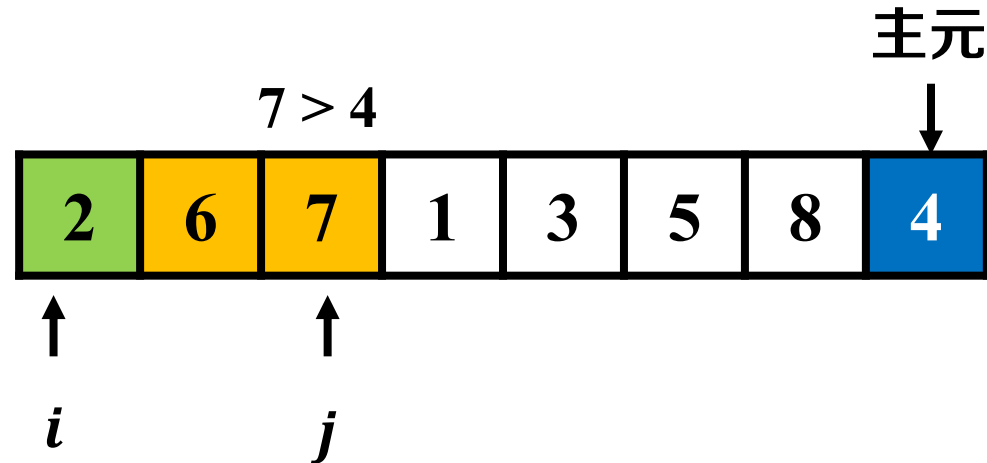
回顾与启发

- 选取固定位置主元 x （如尾元素）
- 维护两个部分的右端点变量 i, j
- 考察数组元素 $A[j]$ ，只和主元比较
 - 若 $A[j] \leq x$ ，则交换 $A[j]$ 和 $A[i + 1]$ ， i 与 j 右移
 - 若 $A[j] > x$ ，则 j 右移



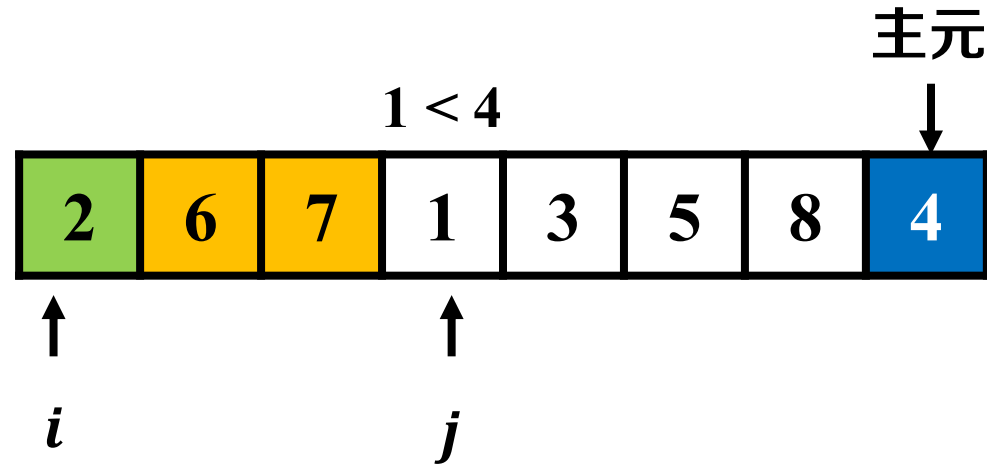
回顾与启发

- 选取固定位置主元 x （如尾元素）
- 维护两个部分的右端点变量 i, j
- 考察数组元素 $A[j]$ ，只和主元比较
 - 若 $A[j] \leq x$ ，则交换 $A[j]$ 和 $A[i + 1]$ ， i 与 j 右移
 - 若 $A[j] > x$ ，则 j 右移



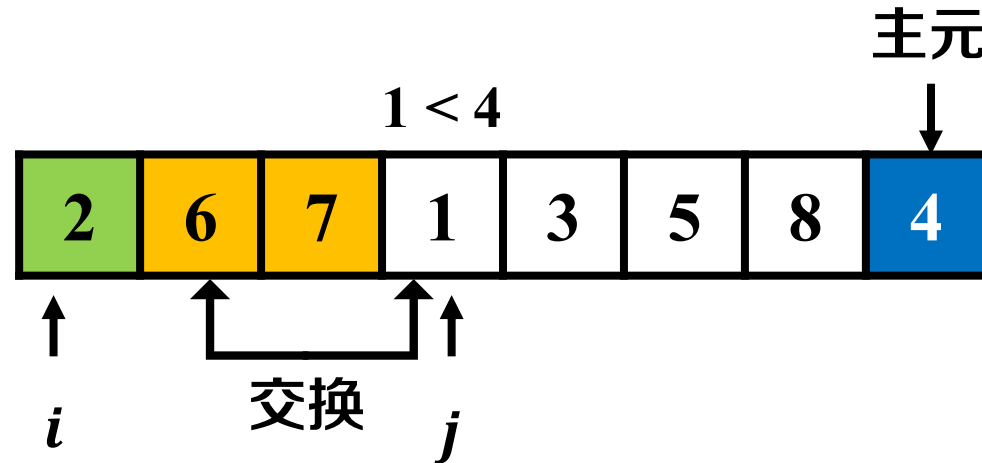
回顾与启发

- 选取固定位置主元 x （如尾元素）
- 维护两个部分的右端点变量 i, j
- 考察数组元素 $A[j]$ ，只和主元比较
 - 若 $A[j] \leq x$ ，则交换 $A[j]$ 和 $A[i + 1]$ ， i 与 j 右移
 - 若 $A[j] > x$ ，则 j 右移



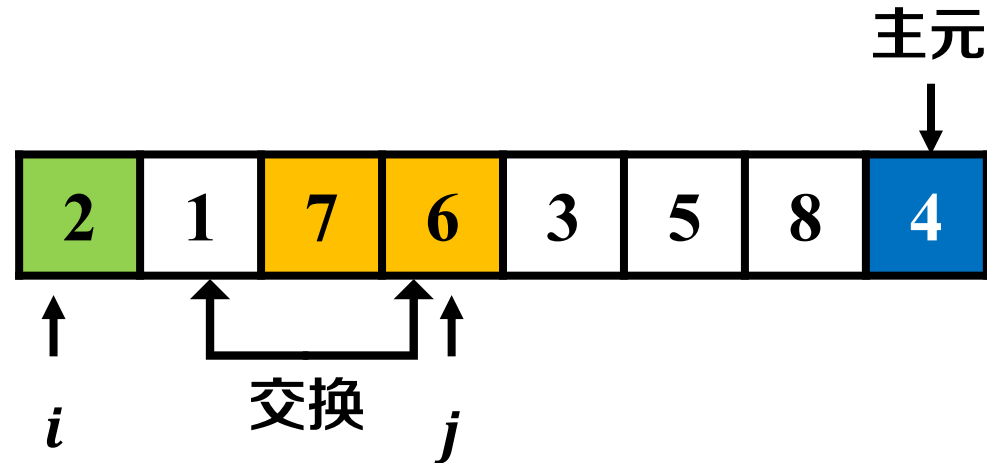
回顾与启发

- 选取固定位置主元 x （如尾元素）
- 维护两个部分的右端点变量 i, j
- 考察数组元素 $A[j]$ ，只和主元比较
 - 若 $A[j] \leq x$ ，则交换 $A[j]$ 和 $A[i + 1]$ ， i 与 j 右移
 - 若 $A[j] > x$ ，则 j 右移



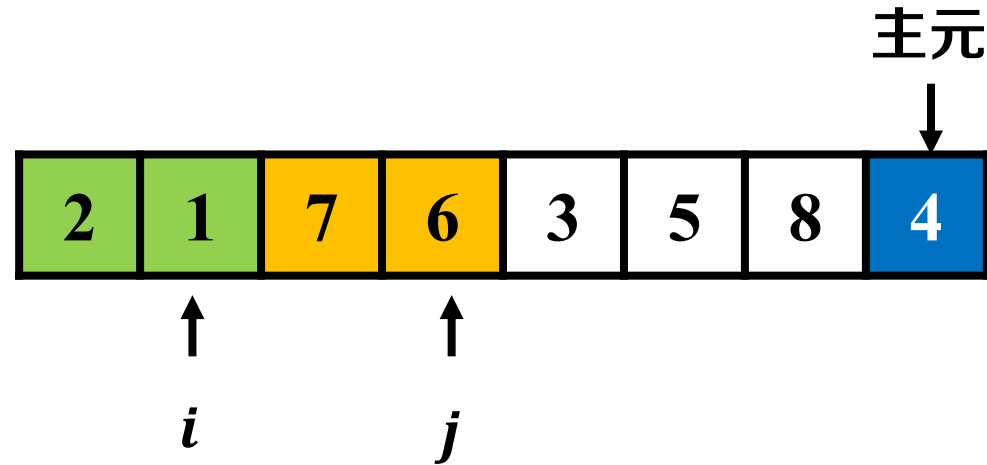
回顾与启发

- 选取固定位置主元 x （如尾元素）
- 维护两个部分的右端点变量 i, j
- 考察数组元素 $A[j]$ ，只和主元比较
 - 若 $A[j] \leq x$ ，则交换 $A[j]$ 和 $A[i + 1]$ ， i 与 j 右移
 - 若 $A[j] > x$ ，则 j 右移



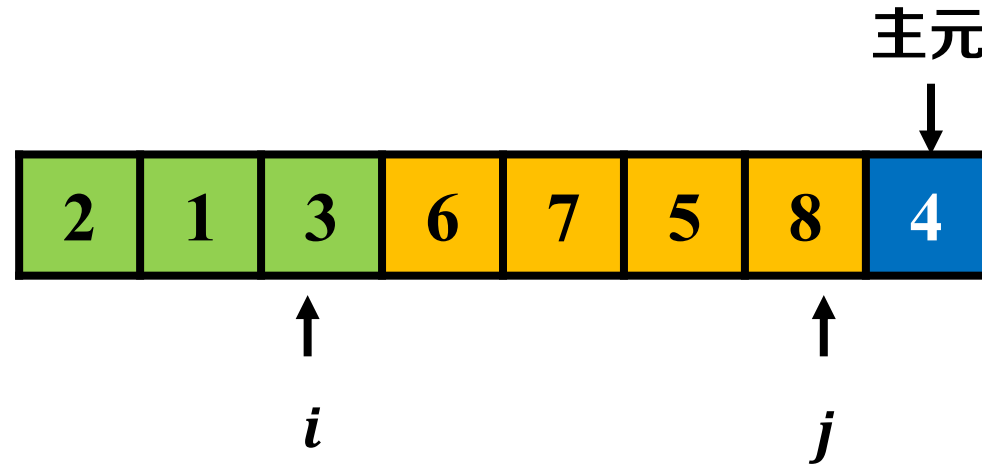
回顾与启发

- 选取固定位置主元 x （如尾元素）
- 维护两个部分的右端点变量 i, j
- 考察数组元素 $A[j]$ ，只和主元比较
 - 若 $A[j] \leq x$ ，则交换 $A[j]$ 和 $A[i + 1]$ ， i 与 j 右移
 - 若 $A[j] > x$ ，则 j 右移



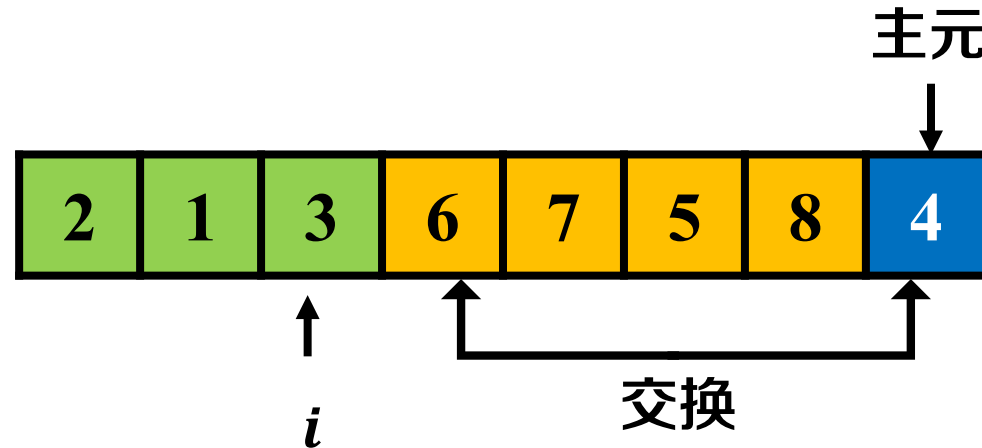
回顾与启发

- 选取固定位置主元 x （如尾元素）
- 维护两个部分的右端点变量 i, j
- 考察数组元素 $A[j]$ ，只和主元比较
 - 若 $A[j] \leq x$ ，则交换 $A[j]$ 和 $A[i + 1]$ ， i 与 j 右移
 - 若 $A[j] > x$ ，则 j 右移



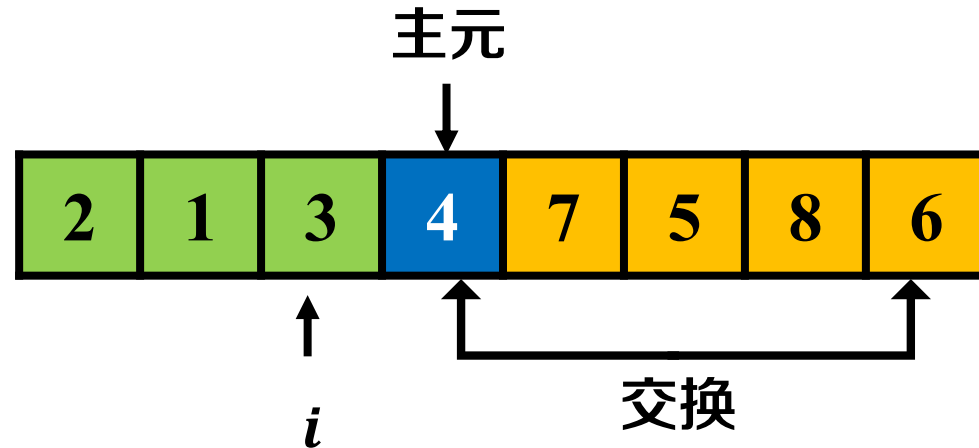
回顾与启发

- 选取固定位置主元 x （如尾元素）
- 维护两个部分的右端点变量 i, j
- 考察数组元素 $A[j]$ ，只和主元比较
 - 若 $A[j] \leq x$ ，则交换 $A[j]$ 和 $A[i + 1]$ ， i 与 j 右移
 - 若 $A[j] > x$ ，则 j 右移



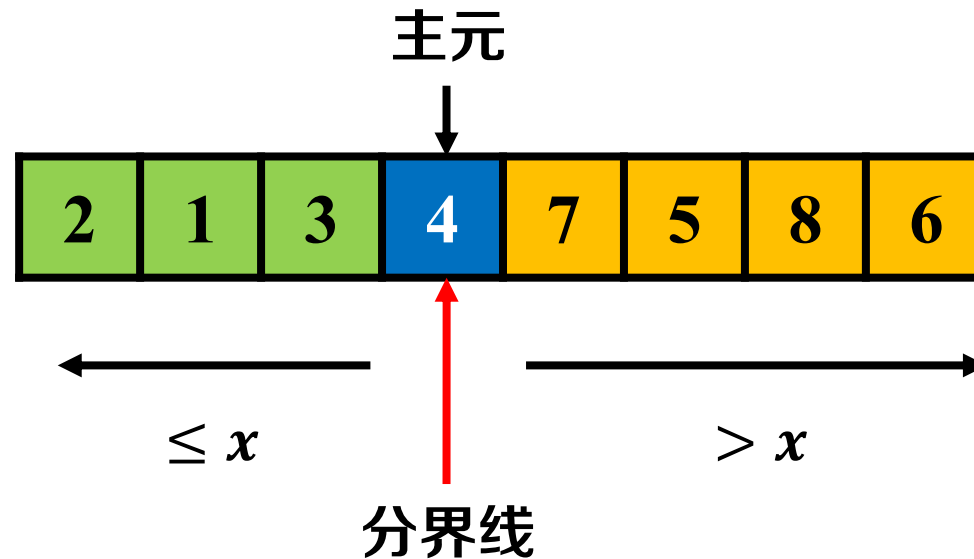
回顾与启发

- 选取固定位置主元 x （如尾元素）
- 维护两个部分的右端点变量 i, j
- 考察数组元素 $A[j]$ ，只和主元比较
 - 若 $A[j] \leq x$ ，则交换 $A[j]$ 和 $A[i + 1]$ ， i 与 j 右移
 - 若 $A[j] > x$ ，则 j 右移



回顾与启发

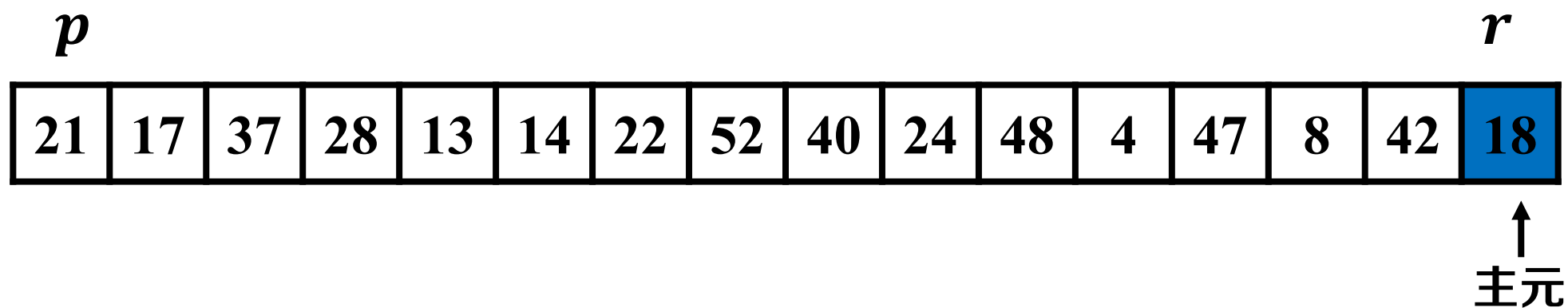
- 选取固定位置主元 x （如尾元素）
- 维护两个部分的右端点变量 i, j
- 考察数组元素 $A[j]$ ，只和主元比较
 - 若 $A[j] \leq x$ ，则交换 $A[j]$ 和 $A[i + 1]$ ， i 与 j 右移
 - 若 $A[j] > x$ ，则 j 右移



固定位置划分求解



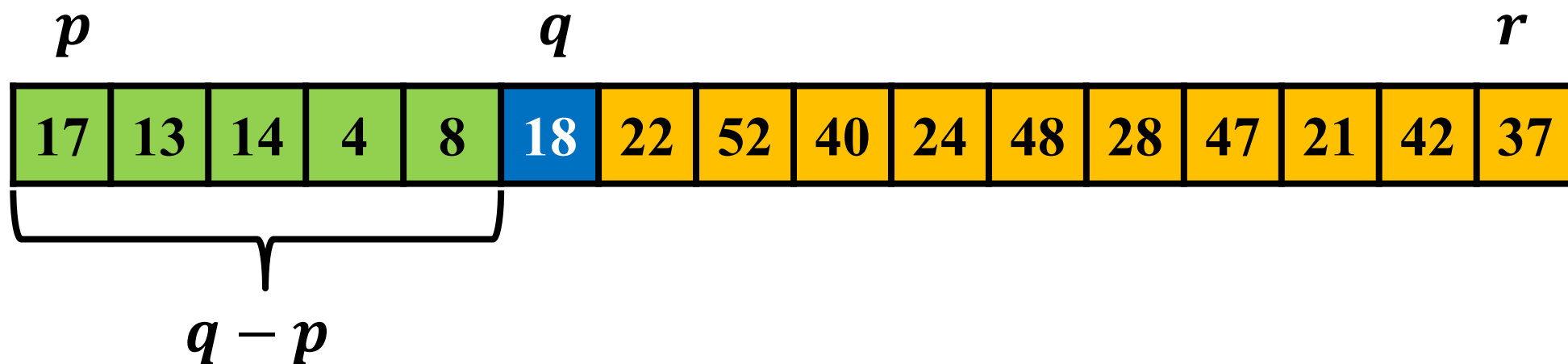
- 选取固定位置主元



固定位置划分求解



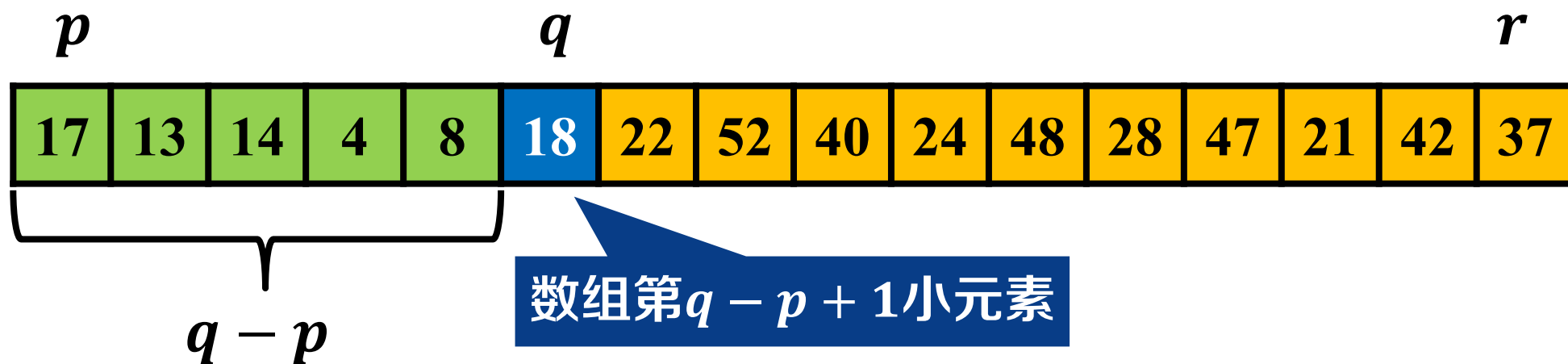
- 选取固定位置主元，小于主元的元素个数 $q - p$



固定位置划分求解

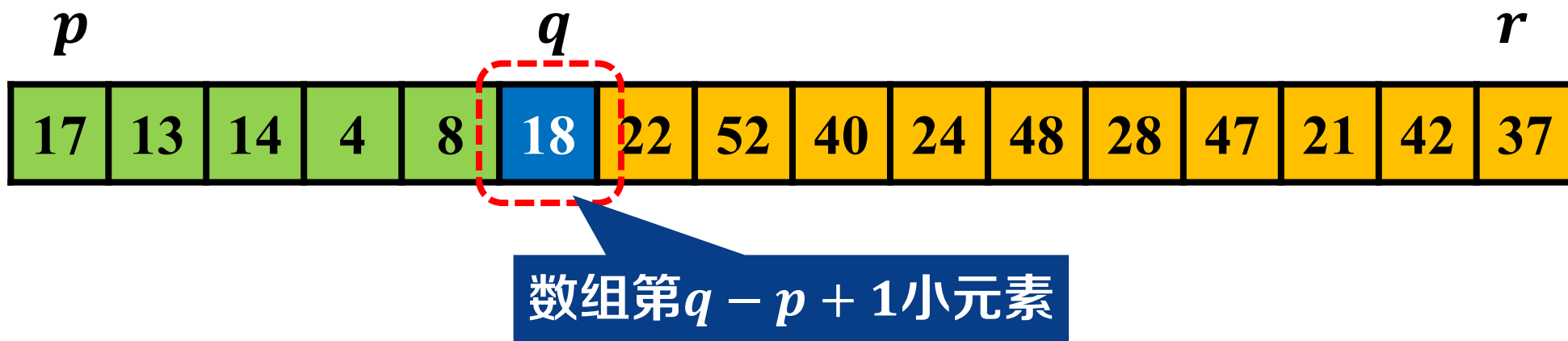


- 选取固定位置主元，小于主元的元素个数 $q - p$



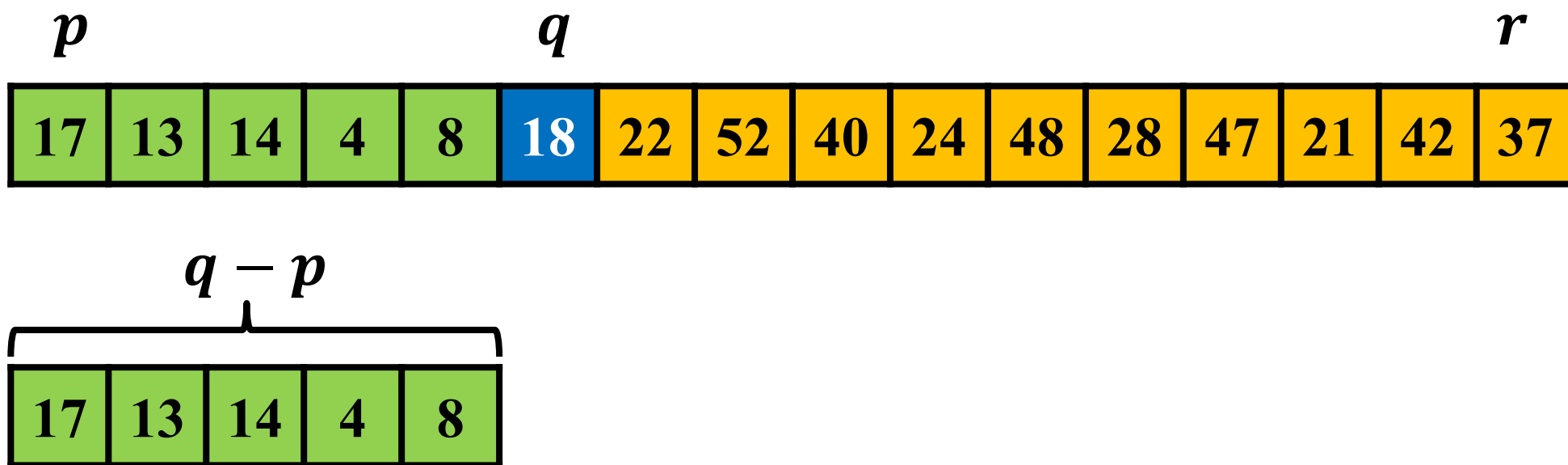
固定位置划分求解

- 选取固定位置主元，小于主元的元素个数 $q - p$
 - 情况1: $k = q - p + 1$, $A[q]$ 为数组第 k 小元素



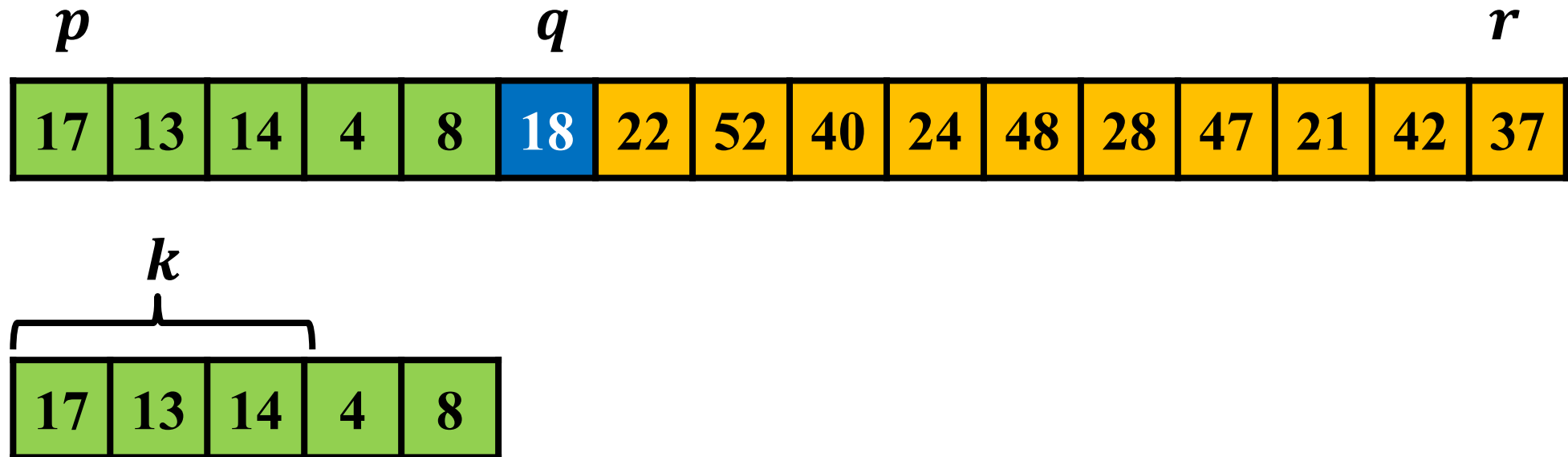
固定位置划分求解

- 选取固定位置主元，小于主元的元素个数 $q - p$
 - 情况1: $k = q - p + 1$, $A[q]$ 为数组第 k 小元素
 - 情况2: $k < q - p + 1$, 数组第 k 小元素在 $A[p..q-1]$ 中



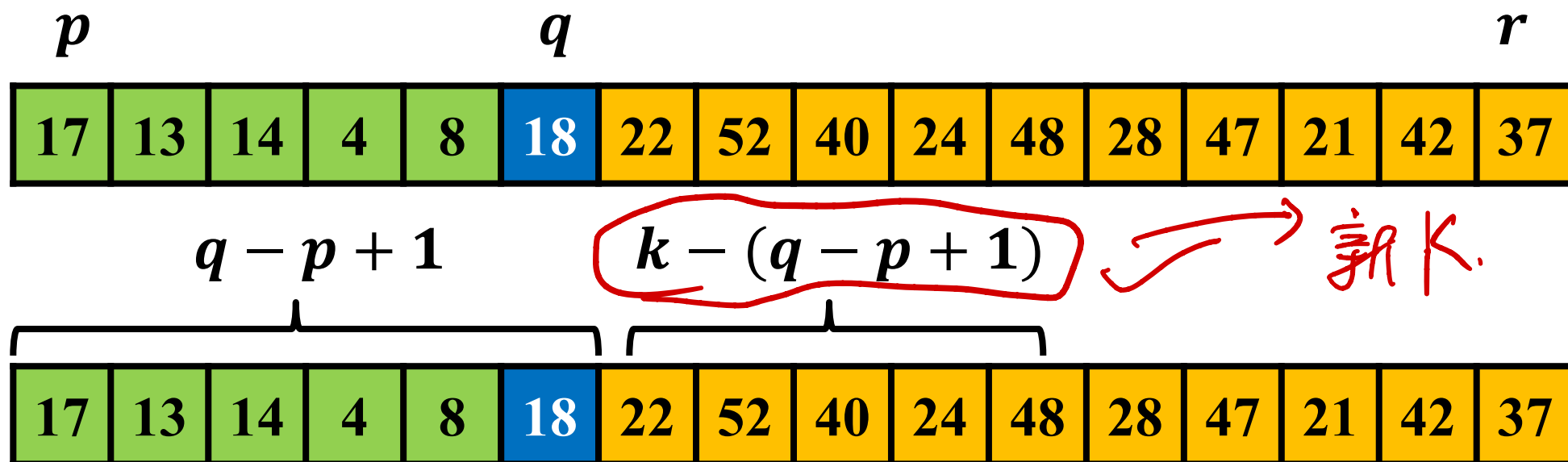
固定位置划分求解

- 选取固定位置主元，小于主元的元素个数 $q - p$
 - 情况1: $k = q - p + 1$, $A[q]$ 为数组第 k 小元素
 - 情况2: $k < q - p + 1$, 在 $A[p..q-1]$ 中寻找第 k 小元素



固定位置划分求解

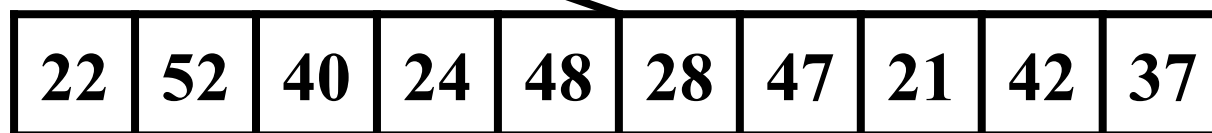
- 选取固定位置主元，小于主元的元素个数 $q - p$
 - 情况1: $k = q - p + 1$, $A[q]$ 为数组第 k 小元素
 - 情况2: $k < q - p + 1$, 在 $A[p..q - 1]$ 中寻找第 k 小元素
 - 情况3: $k > q - p + 1$, 在 $A[q + 1..r]$ 中寻找第 $k - (q - p + 1)$ 小元素





固定位置划分求解

原问题解在某个子问题中



分而治之框架

分解原问题



解决子问题



合并问题解

固定位置划分求解



分而治之框架

分解原问题



解决子问题



合并问题解



递归求解子问题

...

固定位置划分求解



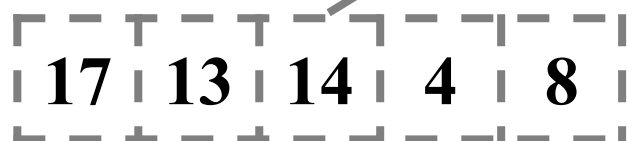
分而治之框架

分解原问题

解决子问题

合并问题解

$O(0)$
不用合并



...



子问题始终唯一
无需合并问题解

- 选取固定位置主元

- 情况1: $k = q - p + 1$, $A[q]$ 为数组第 k 小元素
- 情况2: $k < q - p + 1$, 在 $A[p..q - 1]$ 中寻找第 k 小元素
- 情况3: $k > q - p + 1$, 在 $A[q + 1..r]$ 中寻找第 $k - (q - p + 1)$ 小元素

$p = 1$

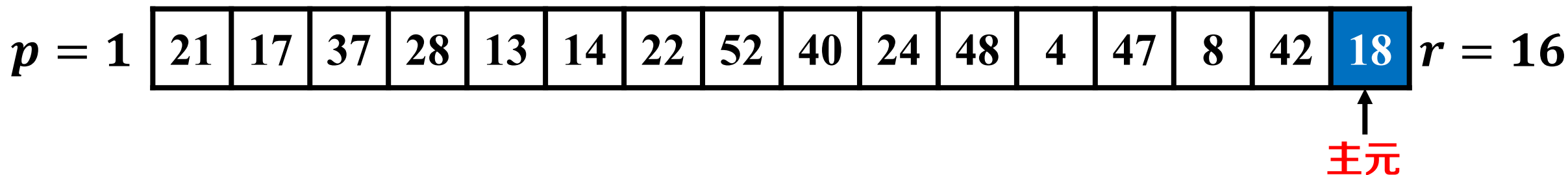
21	17	37	28	13	14	22	52	40	24	48	4	47	8	42	18
----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	---	----	---	----	----

 $r = 16$

查找第8小元素

- 选取固定位置主元

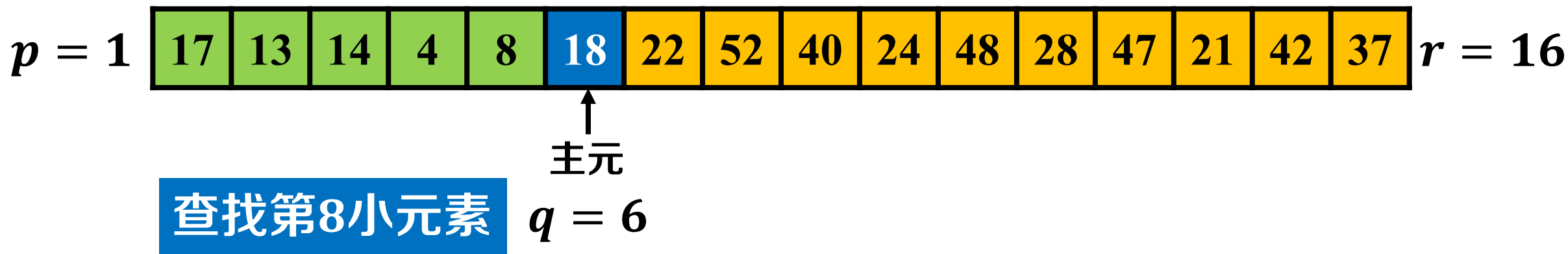
- 情况1: $k = q - p + 1$, $A[q]$ 为数组第 k 小元素
- 情况2: $k < q - p + 1$, 在 $A[p..q - 1]$ 中寻找第 k 小元素
- 情况3: $k > q - p + 1$, 在 $A[q + 1..r]$ 中寻找第 $k - (q - p + 1)$ 小元素



查找第8小元素

- 选取固定位置主元

- 情况1: $k = q - p + 1$, $A[q]$ 为数组第 k 小元素
- 情况2: $k < q - p + 1$, 在 $A[p..q - 1]$ 中寻找第 k 小元素
- 情况3: $k > q - p + 1$, 在 $A[q + 1..r]$ 中寻找第 $k - (q - p + 1)$ 小元素



- 选取固定位置主元

- 情况1: $k = q - p + 1$, $A[q]$ 为数组第 k 小元素
- 情况2: $k < q - p + 1$, 在 $A[p..q - 1]$ 中寻找第 k 小元素
- 情况3: $k > q - p + 1$, 在 $A[q + 1..r]$ 中寻找第 $k - (q - p + 1)$ 小元素



↑
主元

查找第8小元素 $q = 6$

$$q - p + 1 = 6 - 1 + 1 = 6$$

- 选取固定位置主元

- 情况1: $k = q - p + 1$, $A[q]$ 为数组第 k 小元素
- 情况2: $k < q - p + 1$, 在 $A[p..q - 1]$ 中寻找第 k 小元素
- 情况3: $k > q - p + 1$, 在 $A[q + 1..r]$ 中寻找第 $k - (q - p + 1)$ 小元素



↑
主元

查找第8小元素 $q = 6$

$$q - p + 1 = 6 - 1 + 1 = 6$$

- 选取固定位置主元

- 情况1: $k = q - p + 1$, $A[q]$ 为数组第 k 小元素
- 情况2: $k < q - p + 1$, 在 $A[p..q - 1]$ 中寻找第 k 小元素
- 情况3: $k > q - p + 1$, 在 $A[q + 1..r]$ 中寻找第 $k - (q - p + 1)$ 小元素

17	13	14	4	8	18	22	52	40	24	48	28	47	21	42	37
----	----	----	---	---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

$p = 7$

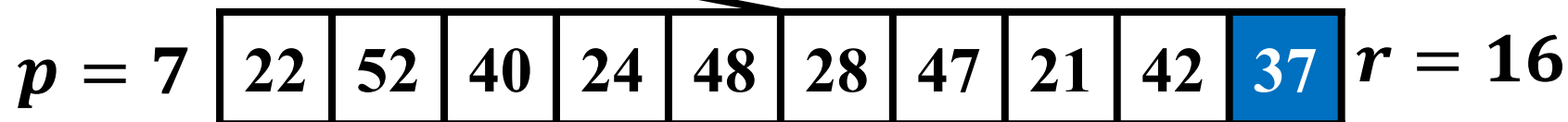
22	52	40	24	48	28	47	21	42	37
----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

 $r = 16$

查找第2小元素

● 选取固定位置主元

- 情况1: $k = q - p + 1$, $A[q]$ 为数组第 k 小元素
- 情况2: $k < q - p + 1$, 在 $A[p..q - 1]$ 中寻找第 k 小元素
- 情况3: $k > q - p + 1$, 在 $A[q + 1..r]$ 中寻找第 $k - (q - p + 1)$ 小元素



查找第2小元素

↑
主元

- 选取固定位置主元

- 情况1: $k = q - p + 1$, $A[q]$ 为数组第 k 小元素
- 情况2: $k < q - p + 1$, 在 $A[p..q - 1]$ 中寻找第 k 小元素
- 情况3: $k > q - p + 1$, 在 $A[q + 1..r]$ 中寻找第 $k - (q - p + 1)$ 小元素



查找第2小元素

↑
主元

$q = 11$

- 选取固定位置主元

- 情况1: $k = q - p + 1$, $A[q]$ 为数组第 k 小元素
- 情况2: $k < q - p + 1$, 在 $A[p..q - 1]$ 中寻找第 k 小元素
- 情况3: $k > q - p + 1$, 在 $A[q + 1..r]$ 中寻找第 $k - (q - p + 1)$ 小元素



查找第2小元素

↑
主元

$q = 11$

$$q - p + 1 = 11 - 7 + 1 = 5$$

- 选取固定位置主元

- 情况1: $k = q - p + 1$, $A[q]$ 为数组第 k 小元素
- 情况2: $k < q - p + 1$, 在 $A[p..q - 1]$ 中寻找第 k 小元素
- 情况3: $k > q - p + 1$, 在 $A[q + 1..r]$ 中寻找第 $k - (q - p + 1)$ 小元素



查找第2小元素

↑
主元

$$q - p + 1 = 11 - 7 + 1 = 5$$

$$q = 11$$

与2比较

- 选取固定位置主元

- 情况1: $k = q - p + 1$, $A[q]$ 为数组第 k 小元素
- 情况2: $k < q - p + 1$, 在 $A[p..q - 1]$ 中寻找第 k 小元素
- 情况3: $k > q - p + 1$, 在 $A[q + 1..r]$ 中寻找第 $k - (q - p + 1)$ 小元素

17	13	14	4	8	18	22	52	40	24	48	28	47	21	42	37
----	----	----	---	---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

22	24	28	21	37	40	47	52	42	48
----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

$p = 7$	22	24	28	21	$r = 10$
---------	----	----	----	----	----------

查找第2小元素

● 选取固定位置主元

- 情况1: $k = q - p + 1$, $A[q]$ 为数组第 k 小元素
- 情况2: $k < q - p + 1$, 在 $A[p..q - 1]$ 中寻找第 k 小元素
- 情况3: $k > q - p + 1$, 在 $A[q + 1..r]$ 中寻找第 $k - (q - p + 1)$ 小元素

17	13	14	4	8	18	22	52	40	24	48	28	47	21	42	37
----	----	----	---	---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

22	24	28	21	37	40	47	52	42	48
----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

$p = 7$	22	24	28	21	$r = 10$
---------	----	----	----	----	----------

查找第2小元素

↑
主元

- 选取固定位置主元

- 情况1: $k = q - p + 1$, $A[q]$ 为数组第 k 小元素
- 情况2: $k < q - p + 1$, 在 $A[p..q - 1]$ 中寻找第 k 小元素
- 情况3: $k > q - p + 1$, 在 $A[q + 1..r]$ 中寻找第 $k - (q - p + 1)$ 小元素



查找第2小元素

↑
主元

$q = 7$

• 选取固定位置主元

- 情况1: $k = q - p + 1$, $A[q]$ 为数组第 k 小元素
- 情况2: $k < q - p + 1$, 在 $A[p..q - 1]$ 中寻找第 k 小元素
- 情况3: $k > q - p + 1$, 在 $A[q + 1..r]$ 中寻找第 $k - (q - p + 1)$ 小元素



查找第2小元素

主元

$$q - p + 1 = 7 - 7 + 1 = 1$$

$q = 7$

与2比 对应情况③

• 选取固定位置主元

- 情况1: $k = q - p + 1$, $A[q]$ 为数组第 k 小元素
- 情况2: $k < q - p + 1$, 在 $A[p..q - 1]$ 中寻找第 k 小元素
- 情况3: $k > q - p + 1$, 在 $A[q + 1..r]$ 中寻找第 $k - (q - p + 1)$ 小元素



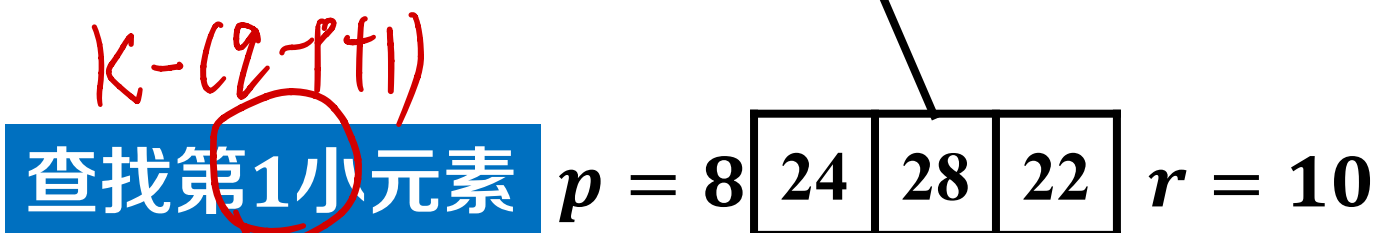
查找第2小元素

↑
主元

$$q - p + 1 = 7 - 7 + 1 = 1 \quad q = 7$$

- 选取固定位置主元

- 情况1: $k = q - p + 1$, $A[q]$ 为数组第 k 小元素
- 情况2: $k < q - p + 1$, 在 $A[p..q - 1]$ 中寻找第 k 小元素
- 情况3: $k > q - p + 1$, 在 $A[q + 1..r]$ 中寻找第 $k - (q - p + 1)$ 小元素



● 选取固定位置主元

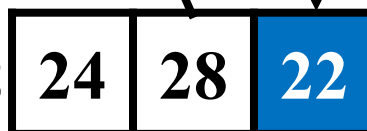
- 情况1: $k = q - p + 1$, $A[q]$ 为数组第 k 小元素
- 情况2: $k < q - p + 1$, 在 $A[p..q - 1]$ 中寻找第 k 小元素
- 情况3: $k > q - p + 1$, 在 $A[q + 1..r]$ 中寻找第 $k - (q - p + 1)$ 小元素



主元

查找第1小元素

$p = 8$



$r = 10$

- 选取固定位置主元

- 情况1: $k = q - p + 1$, $A[q]$ 为数组第 k 小元素
- 情况2: $k < q - p + 1$, 在 $A[p..q - 1]$ 中寻找第 k 小元素
- 情况3: $k > q - p + 1$, 在 $A[q + 1..r]$ 中寻找第 $k - (q - p + 1)$ 小元素



$q = 8$ 主元

查找第1小元素



• 选取固定位置主元

- 情况1: $k = q - p + 1$, $A[q]$ 为数组第 k 小元素
- 情况2: $k < q - p + 1$, 在 $A[p..q - 1]$ 中寻找第 k 小元素
- 情况3: $k > q - p + 1$, 在 $A[q + 1..r]$ 中寻找第 $k - (q - p + 1)$ 小元素



$q = 8$ 主元

$$q - p + 1 = 8 - 8 + 1 = 1$$

查找第1小元素



- 选取固定位置主元

- 情况1: $k = q - p + 1$, $A[q]$ 为数组第 k 小元素
- 情况2: $k < q - p + 1$, 在 $A[p..q - 1]$ 中寻找第 k 小元素
- 情况3: $k > q - p + 1$, 在 $A[q + 1..r]$ 中寻找第 $k - (q - p + 1)$ 小元素



$q = 8$ 主元

$$q - p + 1 = 8 - 8 + 1 = 1$$

查找第1小元素



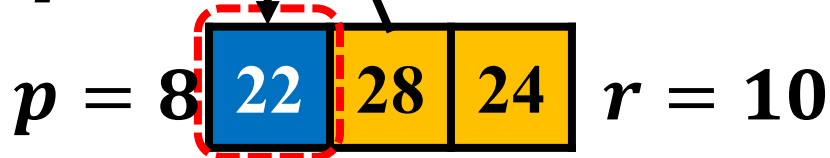
- 选取固定位置主元

- 情况1: $k = q - p + 1$, $A[q]$ 为数组第 k 小元素
- 情况2: $k < q - p + 1$, 在 $A[p..q - 1]$ 中寻找第 k 小元素
- 情况3: $k > q - p + 1$, 在 $A[q + 1..r]$ 中寻找第 $k - (q - p + 1)$ 小元素



$q = 8$ 主元

查找第1小元素



固定位置划分：伪代码



- Partition(A, p, r)

输入：数组 A , 起始位置 p , 终止位置 r

输出：划分位置 q

$x \leftarrow A[r]$

$i \leftarrow p - 1$

for $j \leftarrow p$ to $r - 1$ do

 if $A[j] \leq x$ then

 exchange $A[i + 1]$ with $A[j]$

$i \leftarrow i + 1$

 end

end

exchange $A[i + 1]$ with $A[r]$

$q \leftarrow i + 1$

return q

选取主元

固定位置划分：伪代码



- Partition(A, p, r)

输入：数组 A , 起始位置 p , 终止位置 r

输出：划分位置 q

$x \leftarrow A[r]$

$i \leftarrow p - 1$

for $j \leftarrow p$ to $r - 1$ do

 if $A[j] \leq x$ then

 exchange $A[i + 1]$ with $A[j]$

$i \leftarrow i + 1$

 end

end

exchange $A[i + 1]$ with $A[r]$

$q \leftarrow i + 1$

return q

初始化下标

固定位置划分：伪代码



- Partition(A, p, r)

输入：数组 A , 起始位置 p , 终止位置 r

输出：划分位置 q

$x \leftarrow A[r]$

$i \leftarrow p - 1$

for $j \leftarrow p$ **to** $r - 1$ **do**

if $A[j] \leq x$ **then**

 exchange $A[i + 1]$ with $A[j]$

$i \leftarrow i + 1$

end

end

exchange $A[i + 1]$ with $A[r]$

$q \leftarrow i + 1$

return q

依次扫描

固定位置划分：伪代码



- Partition(A, p, r)

输入：数组 A , 起始位置 p , 终止位置 r

输出：划分位置 q

$x \leftarrow A[r]$

$i \leftarrow p - 1$

for $j \leftarrow p$ to $r - 1$ do

 if $A[j] \leq x$ then

 exchange $A[i + 1]$ with $A[j]$

$i \leftarrow i + 1$

 end

end

exchange $A[i + 1]$ with $A[r]$

$q \leftarrow i + 1$

return q

比主元小的元素交换到前面

固定位置划分：伪代码



- Partition(A, p, r)

输入：数组 A , 起始位置 p , 终止位置 r

输出：划分位置 q

$x \leftarrow A[r]$

$i \leftarrow p - 1$

for $j \leftarrow p$ to $r - 1$ do

 if $A[j] \leq x$ then

 exchange $A[i + 1]$ with $A[j]$

$i \leftarrow i + 1$

 end

end

exchange $A[i + 1]$ with $A[r]$

$q \leftarrow i + 1$

return q

主元作分界线

固定位置划分：伪代码



- Partition(A, p, r)

输入：数组 A , 起始位置 p , 终止位置 r

输出：划分位置 q

$x \leftarrow A[r]$

$i \leftarrow p - 1$

for $j \leftarrow p$ to $r - 1$ do

 if $A[j] \leq x$ then

 exchange $A[i + 1]$ with $A[j]$

$i \leftarrow i + 1$

 end

end

exchange $A[i + 1]$ with $A[r]$

$q \leftarrow i + 1$

return q

返回划分位置

固定位置次序选择：伪代码



- Selection(A, p, r, k)

输入：数组 A ,起始位置 p ,终止位置 r ,元素次序 k

输出：第 k 小元素 x

$q \leftarrow \text{Partition}(A, p, r)$

if $k = (q - p + 1)$ **then**

$x \leftarrow A[q]$

end

if $k < (q - p + 1)$ **then**

$x \leftarrow \text{Selection}(A, p, q - 1, k)$

end

if $k > (q - p + 1)$ **then**

$x \leftarrow \text{Selection}(A, q + 1, r, k - (q - p + 1))$

end

return x

划分数组

固定位置次序选择：伪代码



- Selection(A, p, r, k)

输入：数组 A ,起始位置 p ,终止位置 r ,元素次序 k

输出：第 k 小元素 x

$q \leftarrow \text{Partition}(A, p, r)$

if $k = (q - p + 1)$ then

$x \leftarrow A[q]$

end

if $k < (q - p + 1)$ then

$x \leftarrow \text{Selection}(A, p, q - 1, k)$

end

if $k > (q - p + 1)$ then

$x \leftarrow \text{Selection}(A, q + 1, r, k - (q - p + 1))$

end

return x

主元为第 k 小元素

固定位置次序选择：伪代码



- Selection(A, p, r, k)

输入：数组 A ,起始位置 p ,终止位置 r ,元素次序 k

输出：第 k 小元素 x

$q \leftarrow \text{Partition}(A, p, r)$

if $k = (q - p + 1)$ **then**

$x \leftarrow A[q]$

end

if $k < (q - p + 1)$ **then**

$x \leftarrow \text{Selection}(A, p, q - 1, k)$

end

if $k > (q - p + 1)$ **then**

$x \leftarrow \text{Selection}(A, q + 1, r, k - (q - p + 1))$

end

return x

第 k 小元素在 $A[p..q - 1]$ 中

固定位置次序选择：伪代码



- Selection(A, p, r, k)

输入：数组 A ,起始位置 p ,终止位置 r ,元素次序 k

输出：第 k 小元素 x

$q \leftarrow \text{Partition}(A, p, r)$

if $k = (q - p + 1)$ **then**

$x \leftarrow A[q]$

end

if $k < (q - p + 1)$ **then**

$x \leftarrow \text{Selection}(A, p, q - 1, k)$

end

if $k > (q - p + 1)$ **then**

$x \leftarrow \text{Selection}(A, q + 1, r, k - (q - p + 1))$

end

return x

第 k 小元素在 $A[q + 1..r]$ 中

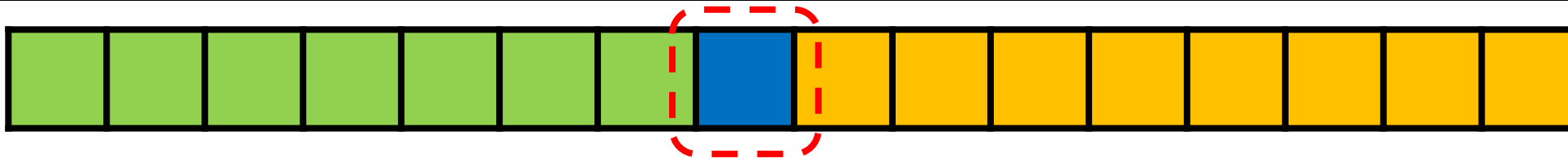
起始

新 k

复杂度分析：最好情况



$O(n)$



第k小元素

- 时间复杂度： $T(n) = O(n)$ 最好情况

复杂度分析：最坏情况



$O(n)$



复杂度分析：最坏情况



$O(n)$



$O(n - 1)$



复杂度分析：最坏情况



$O(n)$



$O(n - 1)$



$O(n - 2)$



...

...

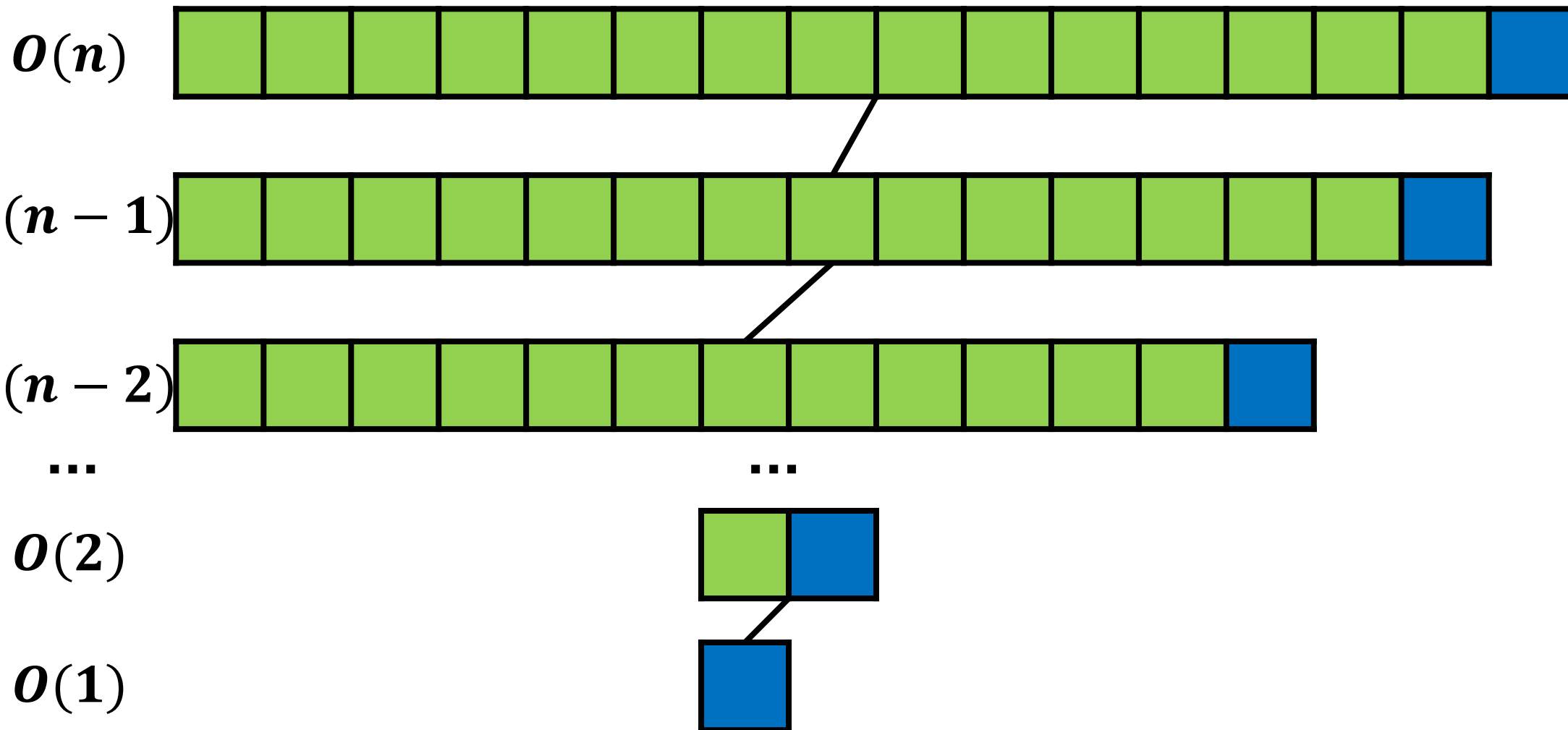
$O(2)$



$O(1)$



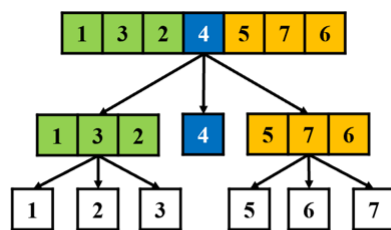
复杂度分析：最坏情况



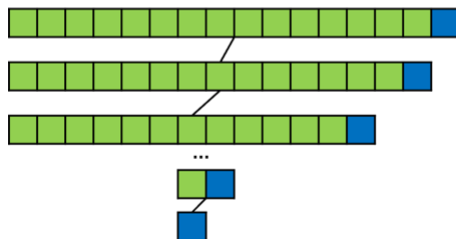
- 时间复杂度: $T(n) = \sum_{i=1}^n i \leq n^2 = O(n^2)$ ✓ 最坏情况

算法名称	最好情况复杂度	最坏情况复杂度
固定位置快速排序	$O(n \log n)$	$O(n^2)$
固定位置次序选择		

快速排序



最好情况: $O(n \log n)$

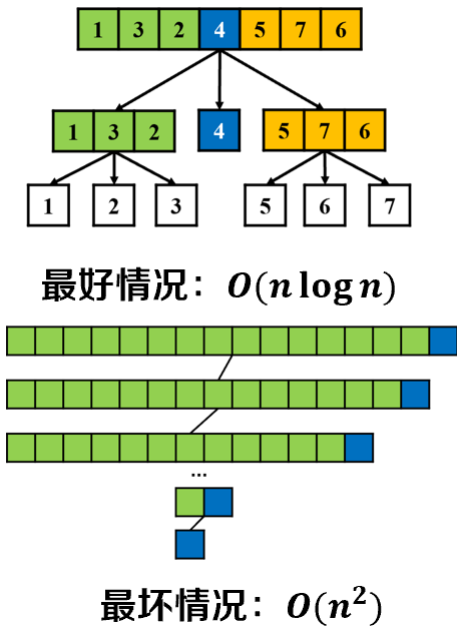


最坏情况: $O(n^2)$

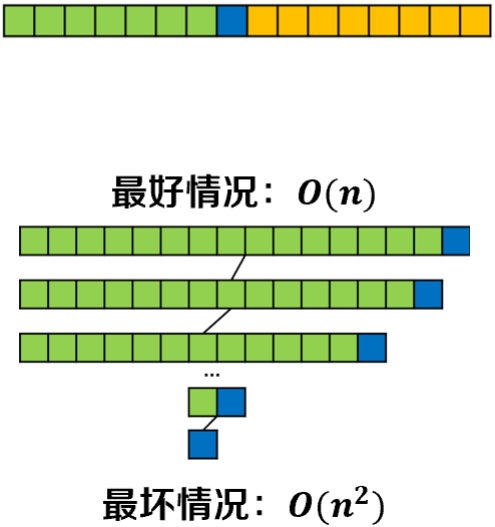


算法名称	最好情况复杂度	最坏情况复杂度
固定位置快速排序	$O(n \log n)$	$O(n^2)$
固定位置次序选择	$O(n)$	$O(n^2)$

快速排序



次序选择



复杂度比较



算法名称	最好情况复杂度	最坏情况复杂度
固定位置快速排序	$O(n \log n)$	$O(n^2)$
固定位置次序选择	$O(n)$	$O(n^2)$

算法名称	最好情况复杂度	最坏情况复杂度
固定位置快速排序	$O(n \log n)$	$O(n^2)$
固定位置次序选择	$O(n)$	$O(n^2)$

问题：如何摆脱最坏情况的困境？

算法名称	最好情况复杂度	最坏情况复杂度
固定位置快速排序	$O(n \log n)$	$O(n^2)$
固定位置次序选择	$O(n)$	$O(n^2)$

问题：如何摆脱最坏情况的困境？

使用随机位置划分

随机位置划分：伪代码



- Randomized-Partition(A, p, r)

输入：数组 A , 起始位置 p , 终止位置 r

输出：划分位置 q

$s \leftarrow \text{Random}(p, r)$

exchange $A[s]$ with $A[r]$

$q \leftarrow \text{Partition}(A, p, r)$

return q

随机选择主元

随机位置次序选择：伪代码



- Randomized-Selection(A, p, r, k)

输入：数组 A , 起始位置 p , 终止位置 r , 元素次序 k

输出：第 k 小元素 x

$q \leftarrow \text{Randomized-Partition}(A, p, r)$

if $k = (q - p + 1)$ **then**

$x \leftarrow A[q]$

end

if $k < (q - p + 1)$ **then**

$x \leftarrow \text{Randomized-Selection}(A, p, q - 1, k)$

end

if $k > (q - p + 1)$ **then**

$x \leftarrow \text{Randomized-Selection}(A, q + 1, r, k - (q - p + 1))$

end

return x

随机划分数组

复杂度分析：期望情况



- 随机选择主元，共 n 种情况



0: $n - 1$



1: $n - 2$



2: $n - 3$

...

...



$n - 2$: 1

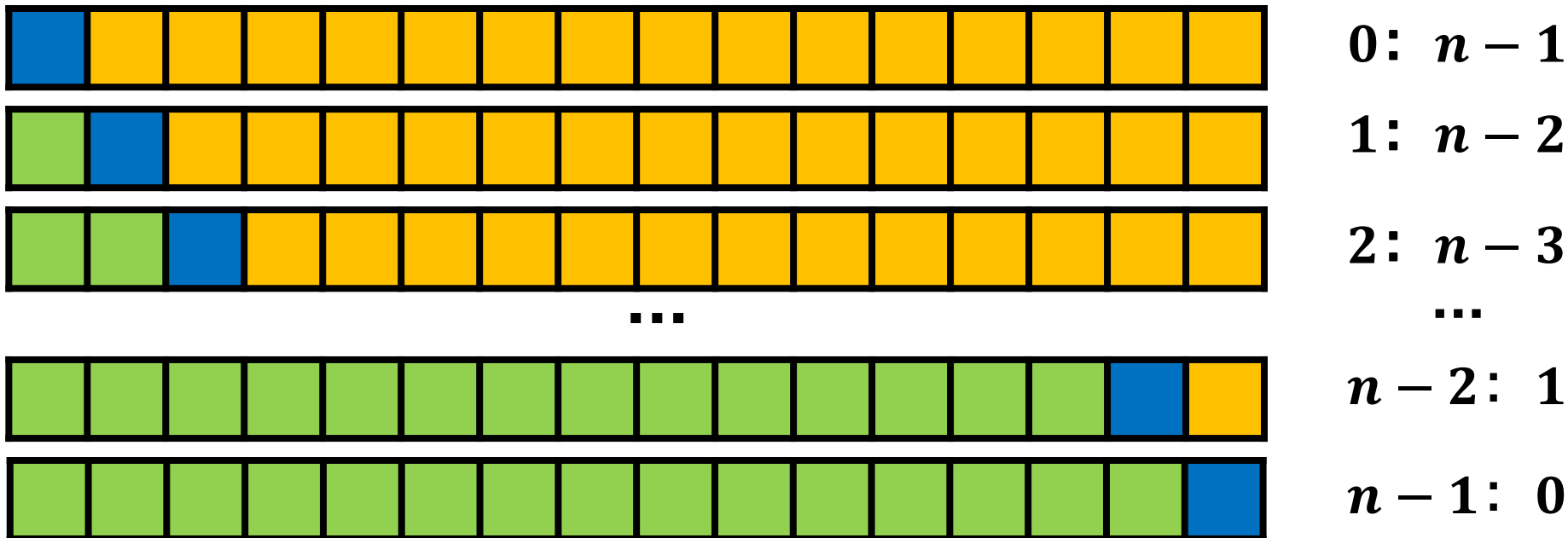


$n - 1$: 0

复杂度分析：期望情况



- 随机选择主元，共 n 种情况



- $$T(n) \leq \begin{cases} \max\{T(0), T(n-1)\} + O(n) \\ \max\{T(1), T(n-2)\} + O(n) \\ \max\{T(2), T(n-3)\} + O(n) \\ \dots \\ \max\{T(n-1), T(0)\} + O(n) \end{cases}$$

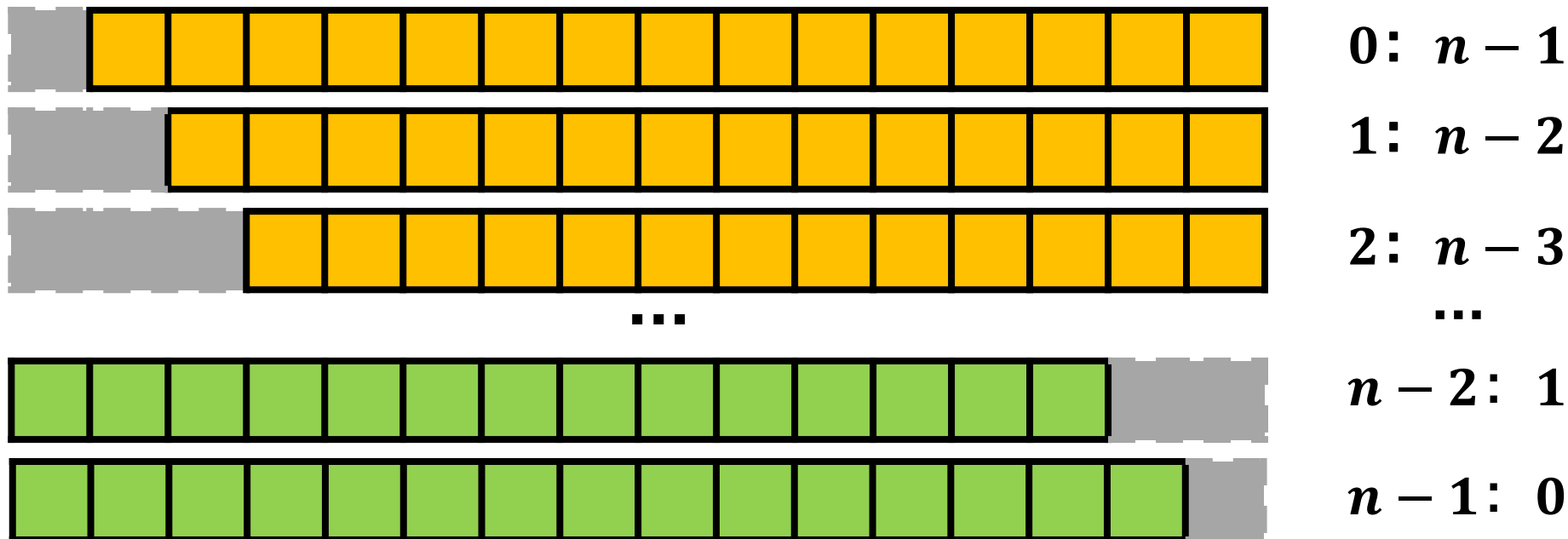
取较长的一段进行分析

- $T(n) \leq \begin{cases} T(n-1) + O(n) \\ T(n-2) + O(n) \\ T(n-3) + O(n) \\ \dots \\ T(n-1) + O(n) \end{cases}$

复杂度分析：期望情况



- 随机选择主元，共 n 种情况



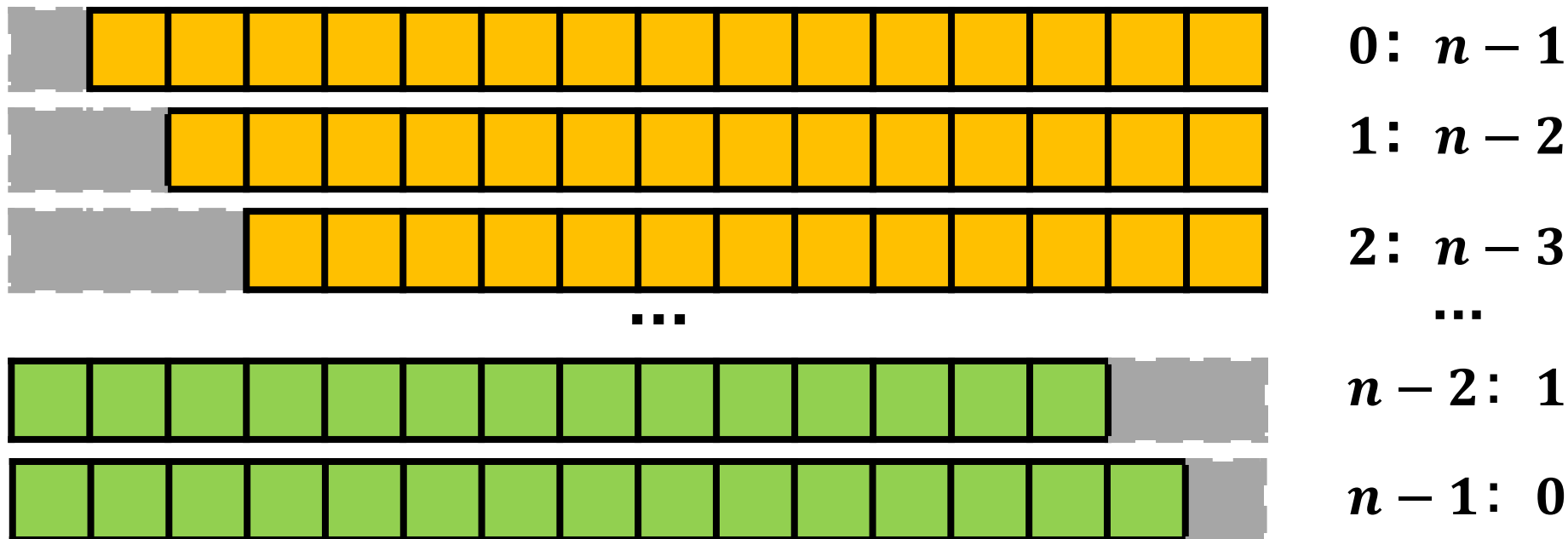
- $$T(n) \leq \left\{ \begin{array}{l} T(n-1) + O(n) \\ T(n-2) + O(n) \\ T(n-3) + O(n) \\ \dots \\ T(n-1) + O(n) \end{array} \right\}$$

n 种情况概率均为 $1/n$

复杂度分析：期望情况



- 随机选择主元，共 n 种情况



- $$T(n) \leq \left\{ \begin{array}{l} T(n-1) + O(n) \\ T(n-2) + O(n) \\ T(n-3) + O(n) \\ \dots \\ T(n-1) + O(n) \end{array} \right.$$

n 种情况概率均为 $1/n$
每个值 $T(i)$ 出现2次, $i \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$

- 期望时间：

$$E[T(n)] \leq E\left[\frac{2}{n} \cdot \sum_{i=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^{n-1} (T(i) + O(n))\right]$$

- 期望时间：

$$E[T(n)] \leq E\left[\frac{2}{n} \cdot \sum_{i=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^{n-1} (T(i) + O(n))\right]$$

每个值出现2次，概率均为 $1/n$

- 期望时间：

$$E[T(n)] \leq E\left[\frac{2}{n} \cdot \sum_{i=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^{n-1} (T(i) + O(n))\right]$$

- $T(n) \leq \begin{cases} T(n-1) + O(n) \\ T(n-2) + O(n) \\ T(n-3) + O(n) \\ \dots \\ T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + O(n) \end{cases}$

- 期望时间：

$$\begin{aligned} E[T(n)] &\leq E\left[\frac{2}{n} \cdot \sum_{i=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^{n-1} (T(i) + O(n))\right] \\ &\leq \frac{2}{n} \cdot \sum_{i=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^{n-1} E[(T(i) + O(n))] \end{aligned}$$

期望的线性特性

- 期望时间：

$$\begin{aligned} E[T(n)] &\leq E\left[\frac{2}{n} \cdot \sum_{i=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^{n-1} (T(i) + O(n))\right] \\ &\leq \frac{2}{n} \cdot \sum_{i=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^{n-1} E[T(i)] + \frac{2}{n} \sum_{i=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^{n-1} O(n) \end{aligned}$$

期望的线性特性

- 期望时间：

$$\begin{aligned} E[T(n)] &\leq E\left[\frac{2}{n} \cdot \sum_{i=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^{n-1} (T(i) + O(n))\right] \\ &\leq \frac{2}{n} \cdot \sum_{i=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^{n-1} E[T(i)] + \frac{2}{n} \sum_{i=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^{n-1} O(n) \\ &\leq \frac{2}{n} \cdot \sum_{i=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^{n-1} E[T(i)] + O(n) \end{aligned}$$

$$\frac{2}{n} \sum_{i=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^{n-1} O(n) = O(n)$$

- 期望时间：

$$\begin{aligned} E[T(n)] &\leq E\left[\frac{2}{n} \cdot \sum_{i=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^{n-1} (T(i) + O(n))\right] \\ &\leq \frac{2}{n} \cdot \sum_{i=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^{n-1} E[T(i)] + \frac{2}{n} \sum_{i=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^{n-1} O(n) \\ &\leq \frac{2}{n} \cdot \sum_{i=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^{n-1} E[T(i)] + O(n) \end{aligned}$$

问题：如何进一步求解该递归式？

复杂度分析：期望情况



算法名称	最好时间复杂度	最坏时间复杂度	期望时间复杂度
快速排序	$O(n \log n)$	$O(n^2)$	$O(n \log n)$
次序选择	$O(n)$	$O(n^2)$?

快速排序：期望时间复杂度=最好时间复杂度

算法名称	最好时间复杂度	最坏时间复杂度	期望时间复杂度
快速排序	$O(n \log n)$	$O(n^2)$	$O(n \log n)$
次序选择	$O(n)$	$O(n^2)$	$O(n)$

问题：次序选择期望时间复杂度是否为 $O(n)$ ？

算法名称	最好时间复杂度	最坏时间复杂度	期望时间复杂度
快速排序	$O(n \log n)$	$O(n^2)$	$O(n \log n)$
次序选择	$O(n)$	$O(n^2)$	$O(n)$

问题：次序选择期望时间复杂度是否为 $O(n)$ ？

使用代入法验证



代入法分析：期望情况

- 最好情况： $T(n) = O(n)$
- 假设： $\forall i < n, E[T(i)] \leq c \cdot i$



代入法分析：期望情况

- 最好情况： $T(n) = O(n)$
- 假设： $\forall i < n, E[T(i)] \leq c \cdot i$

$$E[T(n)] \leq O(n) + \frac{2}{n} \cdot \sum_{i=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^{n-1} E[T(i)]$$

代入法分析：期望情况

- 最好情况： $T(n) = O(n)$
- 假设： $\forall i < n, E[T(i)] \leq c \cdot i$

$$\begin{aligned} E[T(n)] &\leq O(n) + \frac{2}{n} \cdot \sum_{i=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^{n-1} E[T(i)] \\ &\leq O(n) + \frac{2}{n} \cdot \sum_{i=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^{n-1} c \cdot i \end{aligned}$$

代入假设

代入法分析：期望情况

- 最好情况： $T(n) = O(n)$
- 假设： $\forall i < n, E[T(i)] \leq c \cdot i$

$$\begin{aligned} E[T(n)] &\leq O(n) + \frac{2}{n} \cdot \sum_{i=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^{n-1} E[T(i)] \\ &\leq O(n) + \frac{2}{n} \cdot \sum_{i=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^{n-1} c \cdot i \\ &\leq O(n) + \frac{2}{n} \cdot c \cdot \frac{3}{8} n^2 \end{aligned}$$

使用不等式 $\sum_{i=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^{n-1} i \leq \frac{3}{8} n^2$



代入法分析：期望情况

- 最好情况： $T(n) = O(n)$
- 假设： $\forall i < n, E[T(i)] \leq c \cdot i$

$$\begin{aligned} E[T(n)] &\leq O(n) + \frac{2}{n} \cdot \sum_{i=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^{n-1} E[T(i)] \\ &\leq O(n) + \frac{2}{n} \cdot \sum_{i=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^{n-1} c \cdot i \\ &\leq O(n) + \frac{2}{n} \cdot c \cdot \frac{3}{8} n^2 \\ &= O(n) + c \cdot \frac{3}{4} n \end{aligned}$$

整理表达式

代入法分析：期望情况

- 最好情况： $T(n) = O(n)$
- 假设： $\forall i < n, E[T(i)] \leq c \cdot i$

$$\begin{aligned} E[T(n)] &\leq O(n) + \frac{2}{n} \cdot \sum_{i=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^{n-1} E[T(i)] \\ &\leq O(n) + \frac{2}{n} \cdot \sum_{i=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^{n-1} c \cdot i \\ &\leq O(n) + \frac{2}{n} \cdot c \cdot \frac{3}{8} n^2 \\ &= c \cdot n - \left(\frac{1}{4} c \cdot n - O(n) \right) \end{aligned}$$

整理表达式



代入法分析：期望情况

- 最好情况： $T(n) = O(n)$
- 假设： $\forall i < n, E[T(i)] \leq c \cdot i$

$$\begin{aligned} E[T(n)] &\leq O(n) + \frac{2}{n} \cdot \sum_{i=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^{n-1} E[T(i)] \\ &\leq O(n) + \frac{2}{n} \cdot \sum_{i=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^{n-1} c \cdot i \\ &\leq O(n) + \frac{2}{n} \cdot c \cdot \frac{3}{8} n^2 \\ &= c \cdot n - \left(\frac{1}{4} c \cdot n - O(n) \right) \\ &\leq c \cdot n \end{aligned}$$

选择足够大的常数 c
 $c \cdot \frac{n}{4}$ 渐近大于 $O(n)$

代入法分析：期望情况

- 最好情况： $T(n) = O(n)$
- 假设： $\forall i < n, E[T(i)] \leq c \cdot i$

$$\begin{aligned} E[T(n)] &\leq O(n) + \frac{2}{n} \cdot \sum_{i=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^{n-1} E[T(i)] \\ &\leq O(n) + \frac{2}{n} \cdot \sum_{i=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^{n-1} c \cdot i \\ &\leq O(n) + \frac{2}{n} \cdot c \cdot \frac{3}{8} n^2 \\ &= c \cdot n - \left(\frac{1}{4} c \cdot n - O(n) \right) \\ &\leq c \cdot n \end{aligned}$$

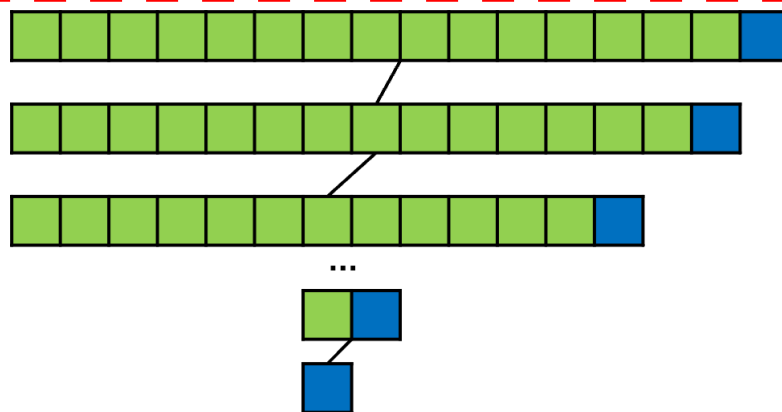
随机位置次序选择：期望时间复杂度为 $O(n)$

快速排序

次序选择

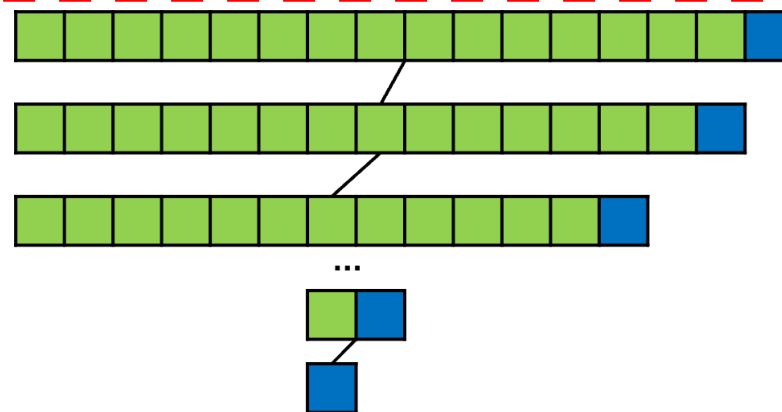
快速排序

固定位置划分

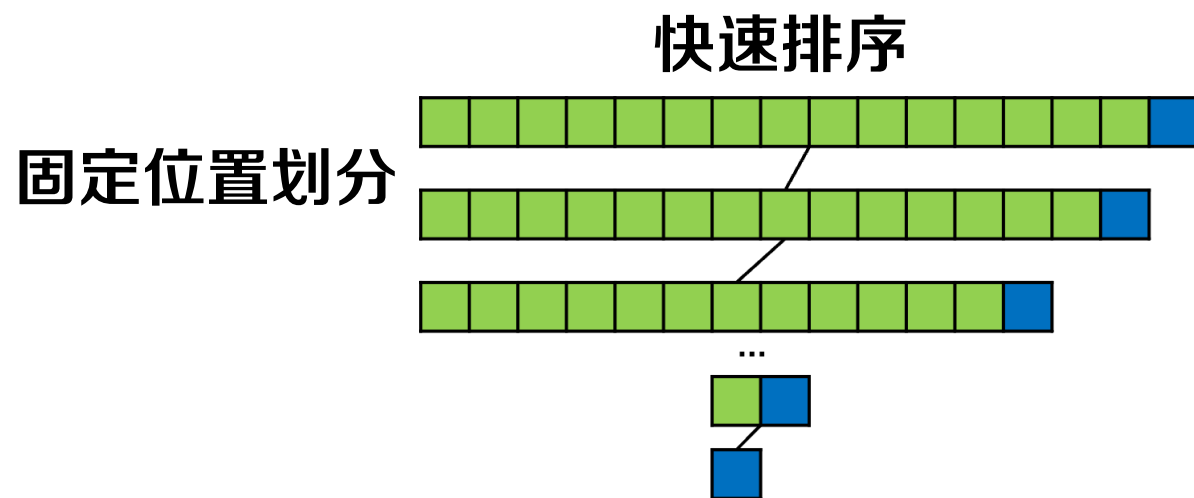


最坏情况: $O(n^2)$

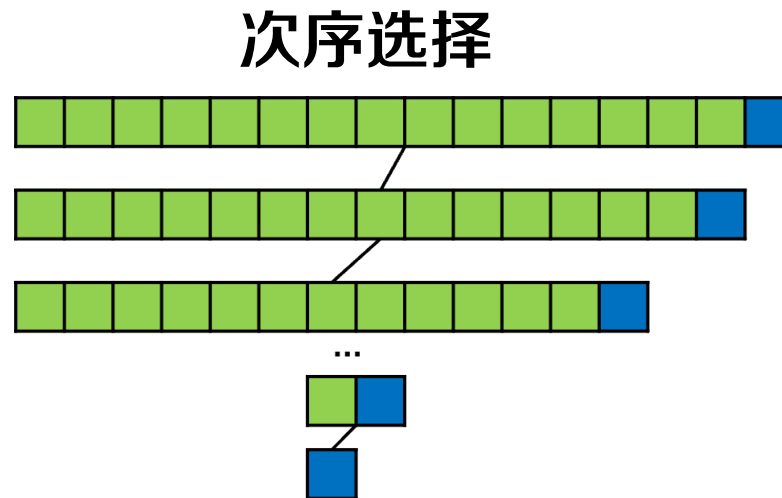
次序选择



最坏情况: $O(n^2)$



最坏情况: $O(n^2)$



最坏情况: $O(n^2)$

随机化

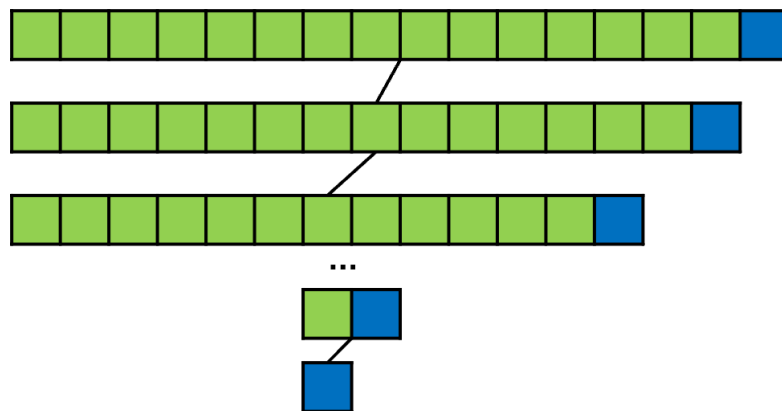


小结



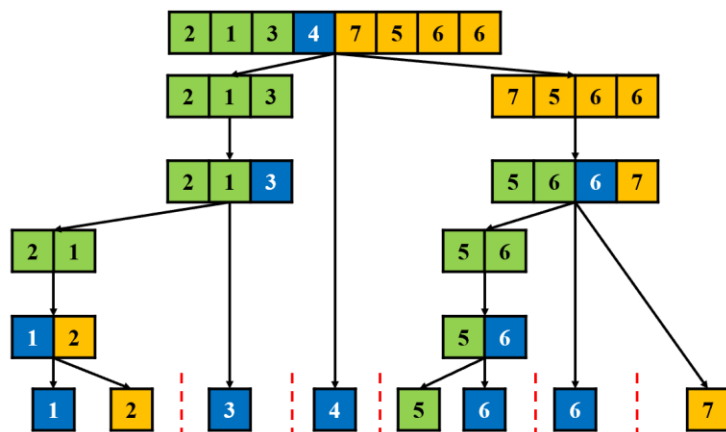
快速排序

固定位置划分



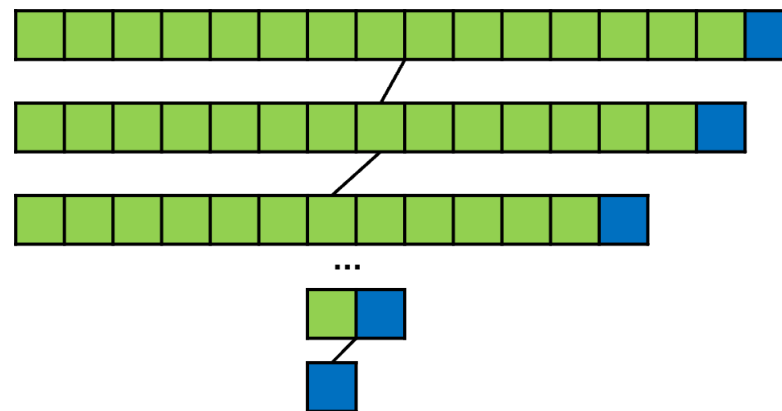
最坏情况: $O(n^2)$

随机位置划分

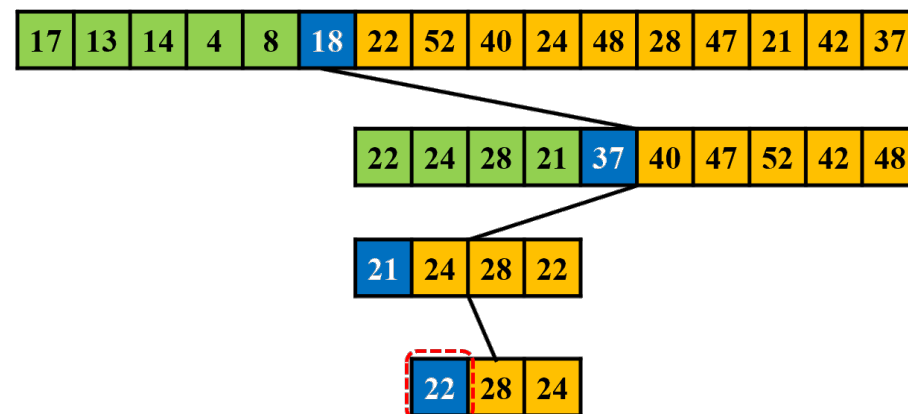


期望情况: $O(n \log n)$

次序选择



最坏情况: $O(n^2)$



期望情况: $O(n)$

分而治之框架

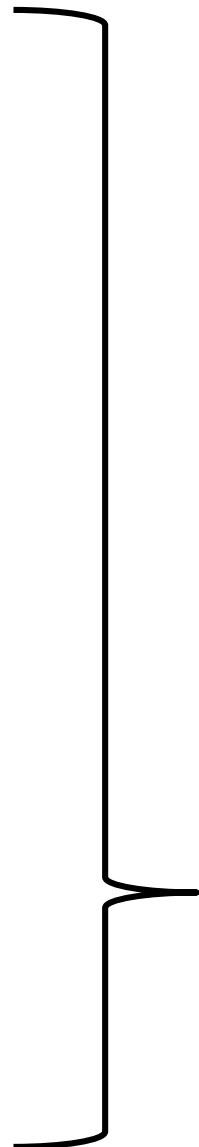
分解原问题



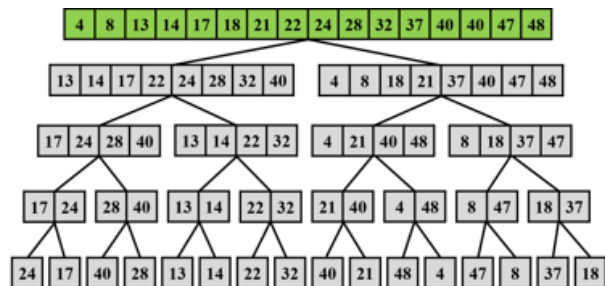
解决子问题



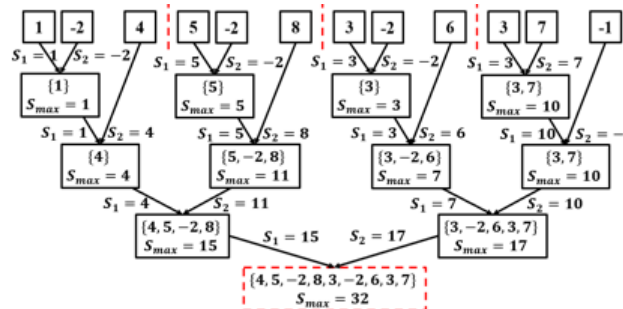
合并问题解



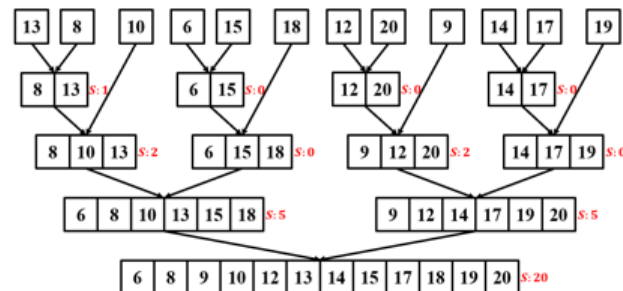
归并排序



最大子数组



逆序计数



分而治之框架

分解原问题

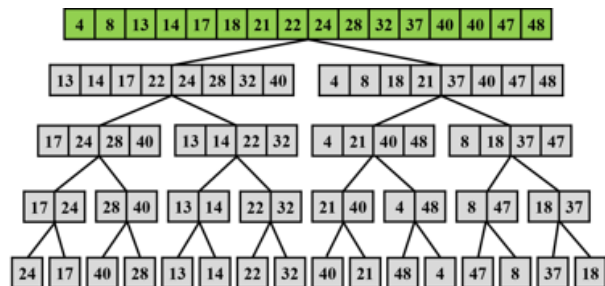


解决子问题

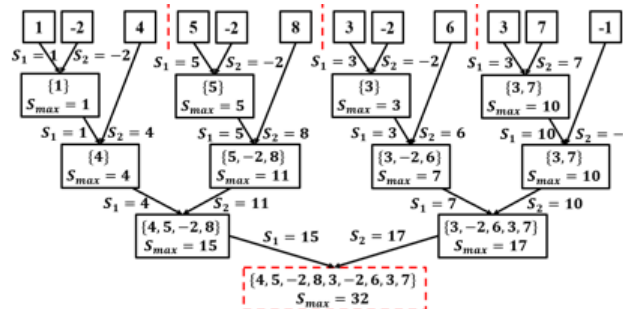


合并问题解

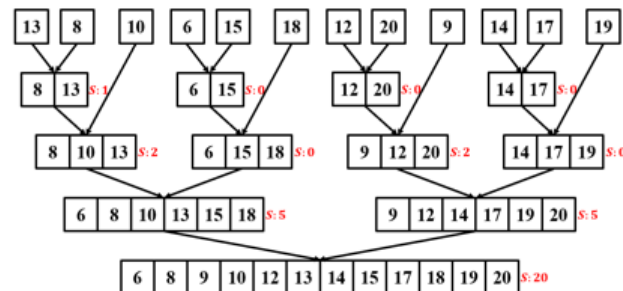
归并排序



最大子数组



逆序计数



分而治之框架

分解原问题

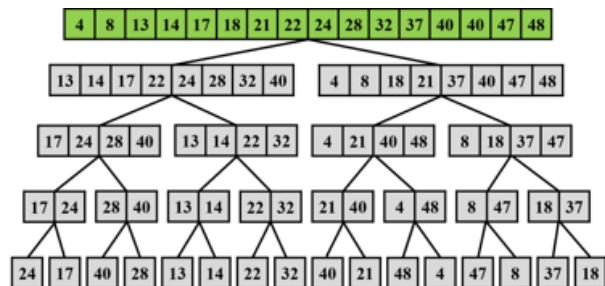


解决子问题

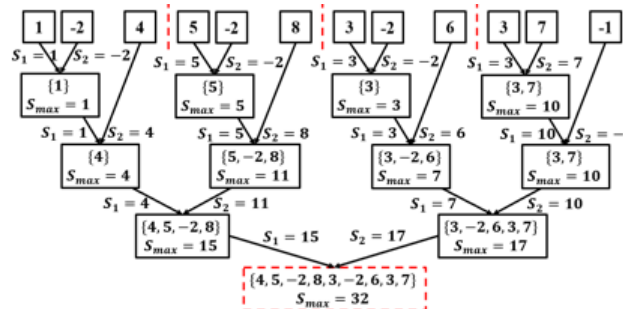


合并问题解

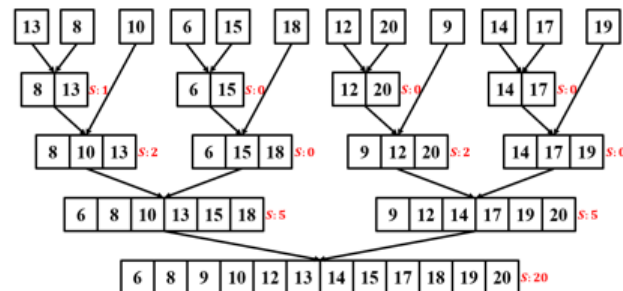
归并排序



最大子数组



逆序计数



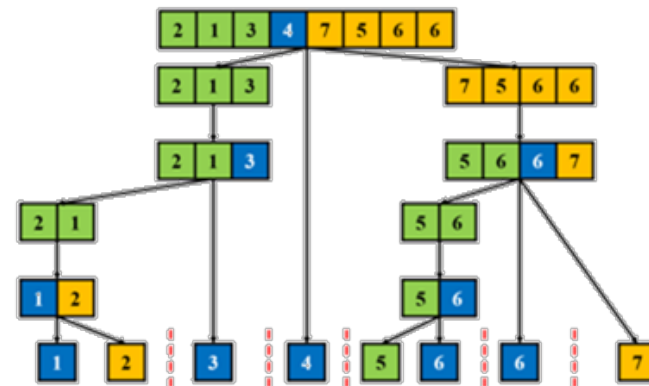
分而治之框架

分解原问题

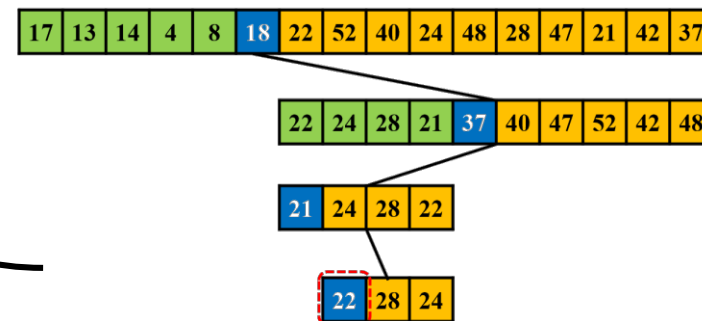
解决子问题

合并问题解

快速排序



次序选择



- 选取固定位置主元

- 情况1: $k = q - p + 1$, $A[q]$ 为数组第 k 小元素
- 情况2: $k < q - p + 1$, 在 $A[p..q - 1]$ 中寻找第 k 小元素
- 情况3: $k > q - p + 1$, 在 $A[q + 1..r]$ 中寻找第 $k - (q - p + 1)$ 小元素

17	13	14	4	8	18	22	52	40	24	48	28	47	21	42	37
----	----	----	---	---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

22	24	28	21	37	40	47	52	42	48
----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

21	24	28	22
----	----	----	----

22	28	24
----	----	----