动态规划篇：编辑距离问题

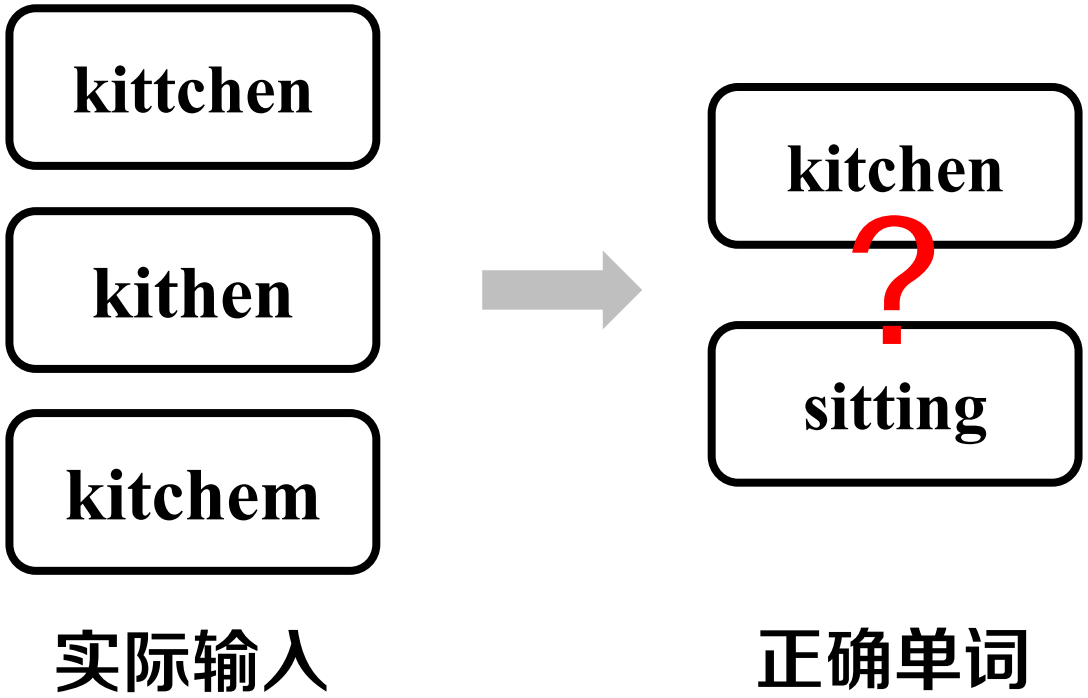
童咏昕

北京航空航天大学
计算机学院

中国大学MOOC北航《算法设计与分析》

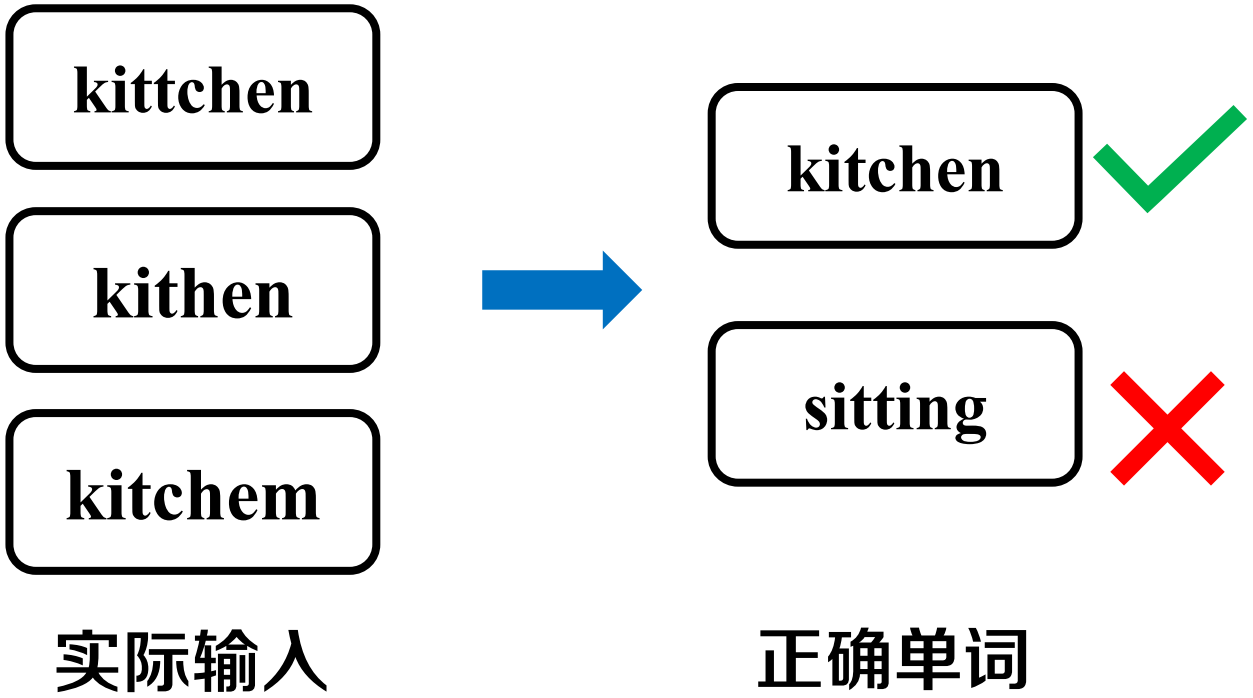
问题背景

- 输入法自动更正



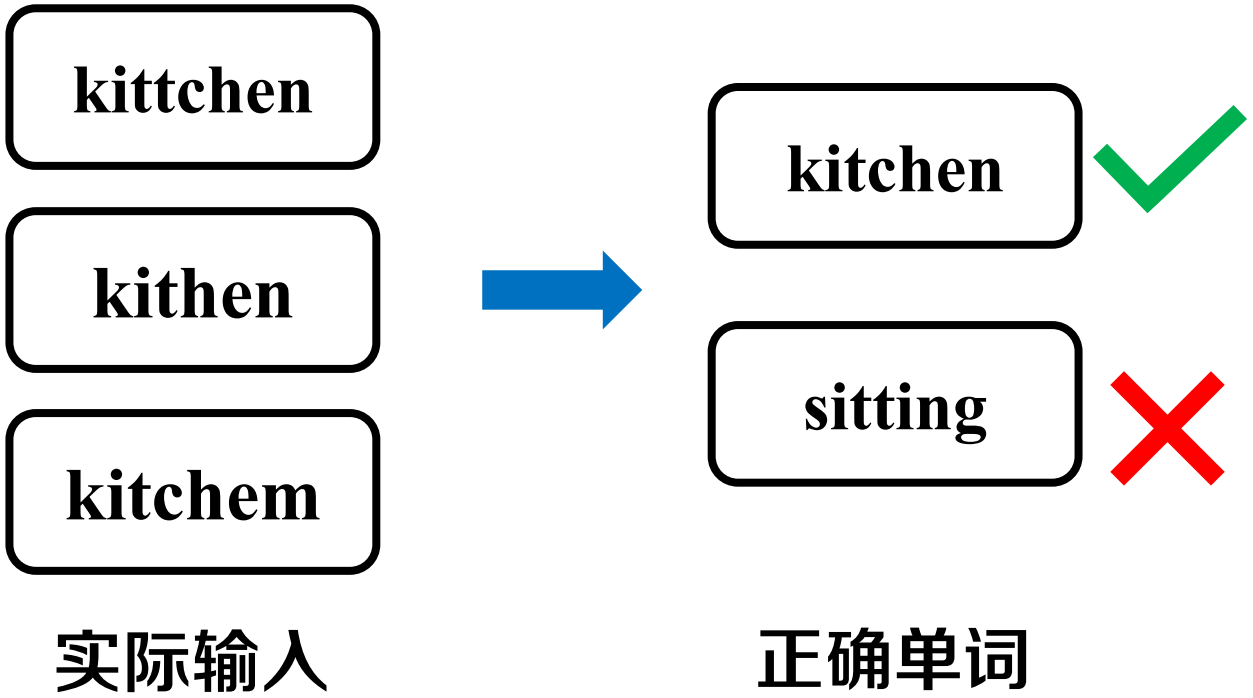
问题背景

- 输入法自动更正



问题背景

- 输入法自动更正



问题：如何衡量序列的相似程度?

编辑操作

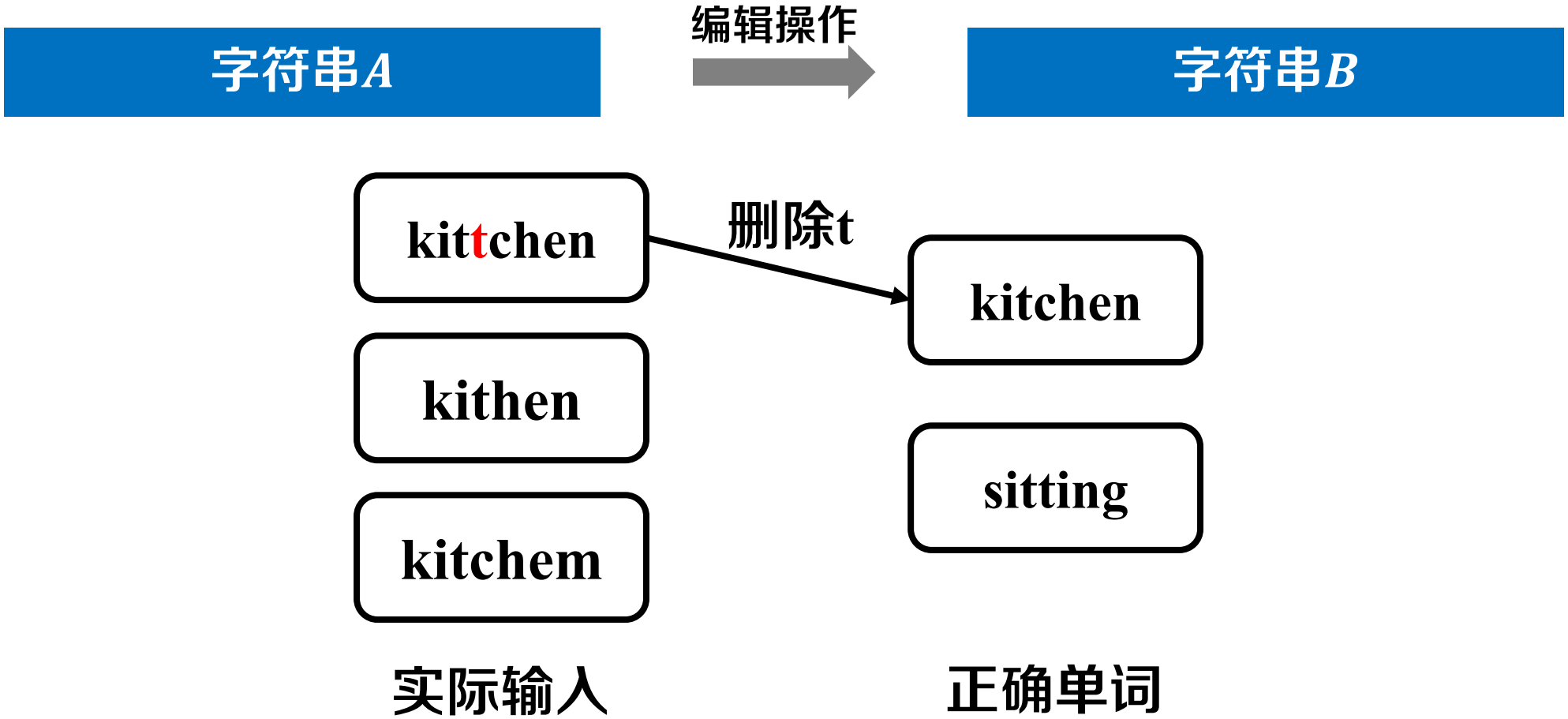
- 基本思想

字符串A $\xrightarrow{\text{编辑操作}}$ 字符串B

- 编辑操作：删除、插入、替换 只有这三种

编辑操作

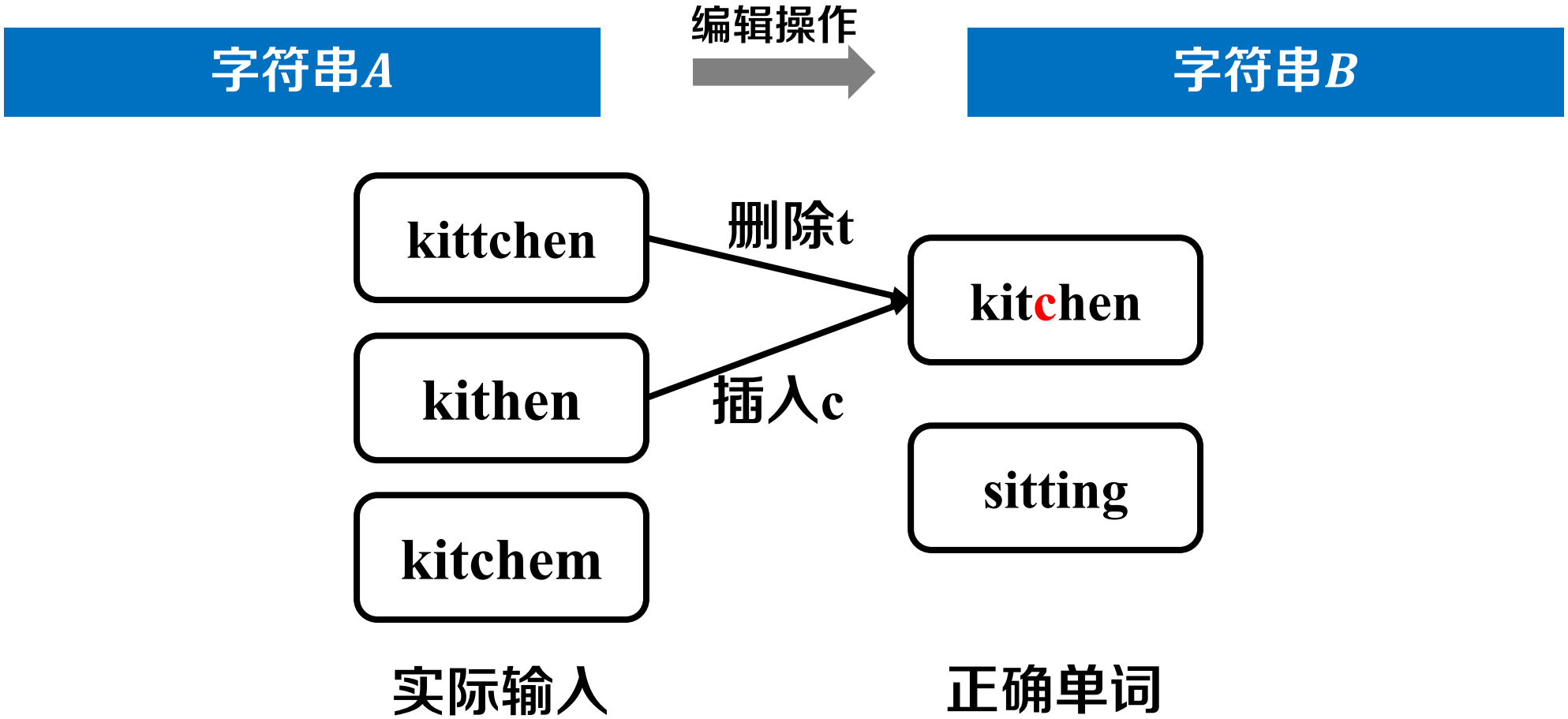
- 基本思想



- 编辑操作：删除、插入、替换

编辑操作

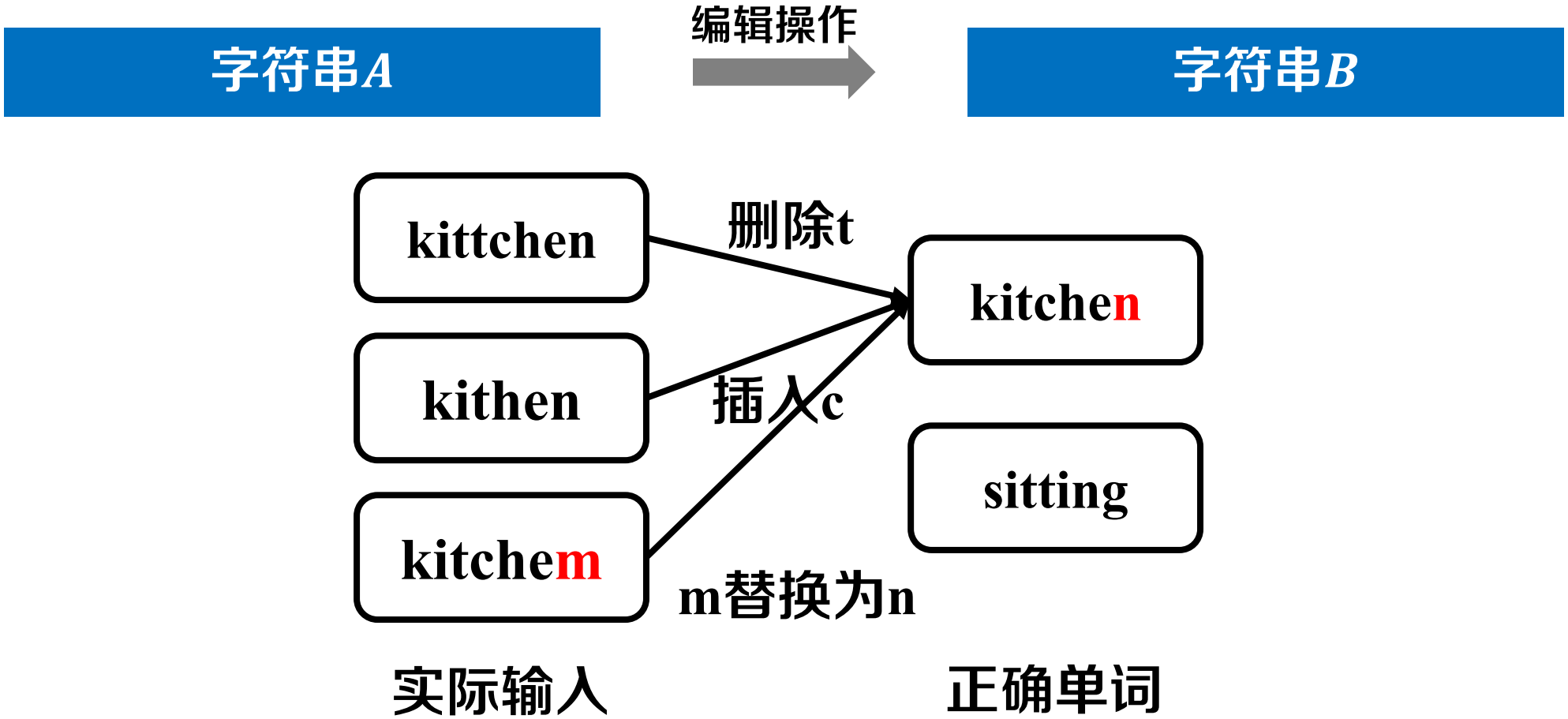
- 基本思想



- 编辑操作：删除、插入、替换

编辑操作

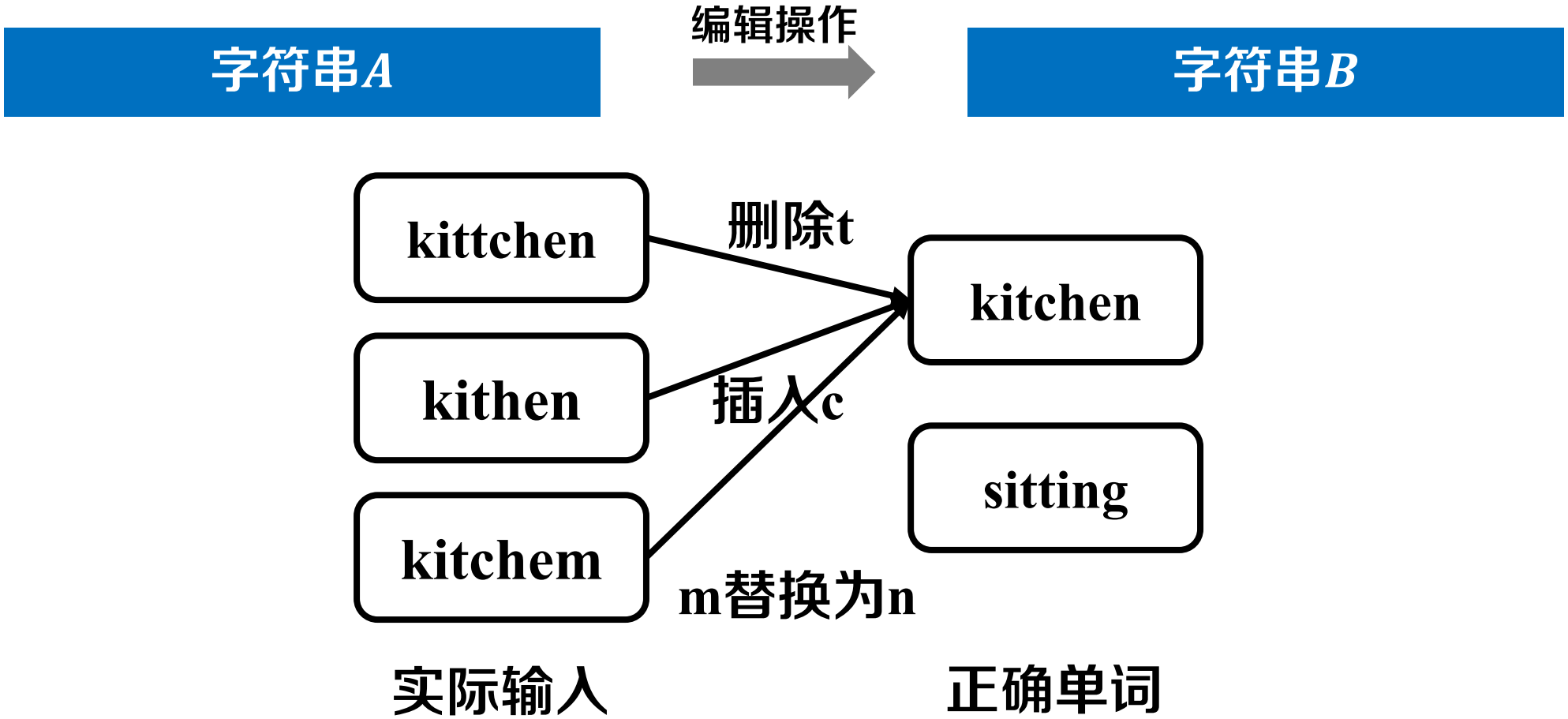
- 基本思想



- 编辑操作：删除、插入、替换

编辑操作

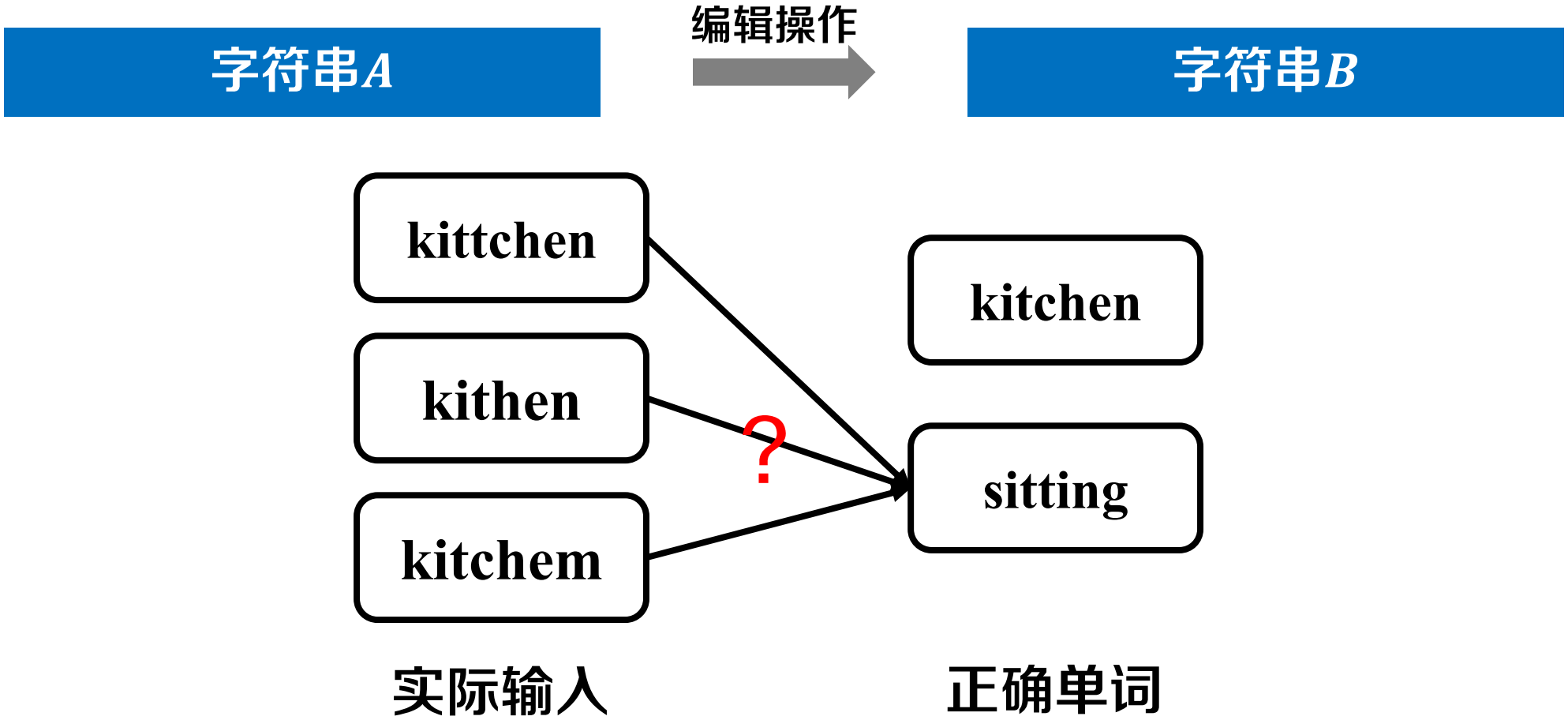
- 基本思想



- 编辑操作：删除、插入、替换

编辑操作

- 基本思想



- 编辑操作：删除、插入、替换

编辑操作示例

A = kittchen

编辑操作

B = sitting

操作名称	操作示例
删除	kittchen → kitchen
插入	kithen → kitchen
替换	kitchem → kitchen

编辑操作示例

A = kittchen

编辑操作

B = sitting

操作名称	操作示例
删除	kittchen → kitchen
插入	kithen → kitchen
替换	kitchem → kitchen

- 方案1 6次

kittchen —k→s→ sittchen —删除c→ sitthen —删除h→ sitten —删除e→ sittn —插入i→ sittin —插入g→ sitting

编辑操作示例

A = kittchen

编辑操作

B = sitting

操作名称	操作示例
删除	kittchen → kitchen
插入	kithen → kitchen
替换	kitchem → kitchen

- 6次 方案1: kittchen —k→s→ sittchen —删除c→ sitthen —删除h→ sitten —删除e→ sittn —插入i→ sittin —插入g→ sitting
- 5次 方案2: kittchen —k→s→ sittchen —删除c→ sitthen —删除h→ sitten —e→i→ sittin —插入g→ sitting

编辑操作示例

A = kittchen

编辑操作

B = sitting

操作名称	操作示例
删除	kittchen → kitchen
插入	kithen → kitchen
替换	kitchem → kitchen

- 方案1 kittchen —k→s→ sittchen —删除c→ sitthen —删除h→ sitten —删除e→ sittn —插入i→ sittin —插入g→ sitting
- 方案2 kittchen —k→s→ sittchen —删除c→ sitthen —删除h→ sitten —e→i→ sittin —插入g→ sitting

编辑距离：编辑操作次数

编辑操作示例

A = kittchen

编辑操作

B = sitting

操作名称	操作示例
删除	kittchen → kitchen
插入	kithen → kitchen
替换	kitchem → kitchen

- 方案1 kittchen —k→s→ sittchen —删除c→ sitthen —删除h→ sitten —删除e→ sittn —插入i→ sittin —插入g→ sitting
- 方案2 kittchen —k→s→ sittchen —删除c→ sitthen —删除h→ sitten —e→i→ sittin —插入g→ sitting

问题：如何求出最少的编辑操作数（最小编辑距离）？

问题定义

编辑距离问题

Minimum Edit Distance, MED

输入

- 长度为n的字符串s，长度为m的字符串t

输出

- 求出一组编辑操作$O = < e_1, e_2, \dots e_d >$，令

$$\min |O|$$

$$s.t.\ \text{字符串}s\text{经过}O\text{的操作后满足}s = t$$

优化目标

约束条件

问题结构分析

- 给出问题表示
  - $D[i,j]$：字符串$s[1..i]$变为$t[1..j]$的最小编辑距离 一数字

$$\underbrace{s[1..i] \longrightarrow t[1..j]}_{D[i,j]}$$

- 明确原始问题
  - $D[n,m]$：字符串$s[1..n]$变为$t[1..m]$的最小编辑距离

问题结构分析

↓

递推关系建立

↓

自底向上计算

↓

最优方案追踪

递推关系建立：回顾与启发

- 最长公共子序列
  - 如果$s_i \neq t_j$

s	A	B	C	B	D	A	B
t	B	D	C	A	B	A	

s	A	B	C	B	D	A	B
t	B	D	C	A	B	A	

s	A	B	C	B	D	A	B
t	B	D	C	A	B	A	

  - 如果$s_i = t_j$

s	A	B	C	B	D	A	B
t	B	D	C	A	B		

s	A	B	C	B	D	A	B
t	B	D	C	A	B		

考察末尾元素

递推关系建立

- 考察末尾元素
  - 删除
  - 插入
  - 替换

枚举所有操作后结果.

s	A	B	C	B	D	A	B
t	B	D	C	A	B	A	

→ ?

s	A	B	C	B	D	A	B	?
t	B	D	C	A	B	A		

→ ?

								?
s	A	B	C	B	D	A	B	
t	B	D	C	A	B	A		

→ ?

问题结构分析

↓

递推关系建立

↓

自底向上计算

↓

最优方案追踪

递推关系建立：分析最优（子）结构

- 考察末尾元素：删除

s	A	B	C	B	D	A	B

t	B	D	C	A	B	A

s	A	B	C	B	D	A	B

t	B	D	C	A	B	A

问题结构分析

递推关系建立

自底向上计算

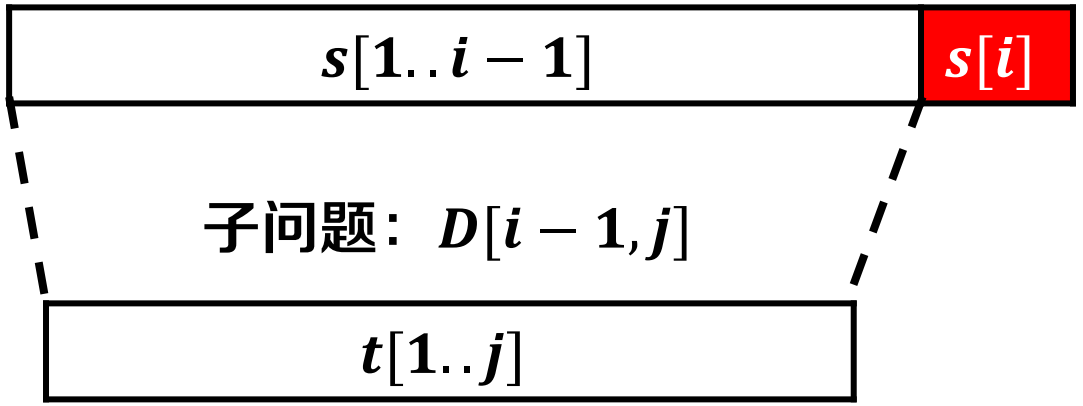
最优方案追踪

递推关系建立：分析最优（子）结构

- 考察末尾元素：删除

s	A	B	C	B	D	A	B
t	B	D	C	A	B	A	

s	A	B	C	B	D	A	B
t	B	D	C	A	B	A	



递推关系建立：分析最优（子）结构

- 考察末尾元素：删除

s	A	B	C	B	D	A	B
t	B	D	C	A	B	A	

s	A	B	C	B	D	A	B
t	B	D	C	A	B	A	

$s[1..i-1]$ | $s[i]$

子问题：$D[i-1,j]$

$t[1..j]$

$s[1..i]$ —删除$s[i]$→ $s[1..i-1]$ —$D[i-1,j]$→ $t[1..j]$

$D[i,j]$

问题结构分析

递推关系建立

自底向上计算

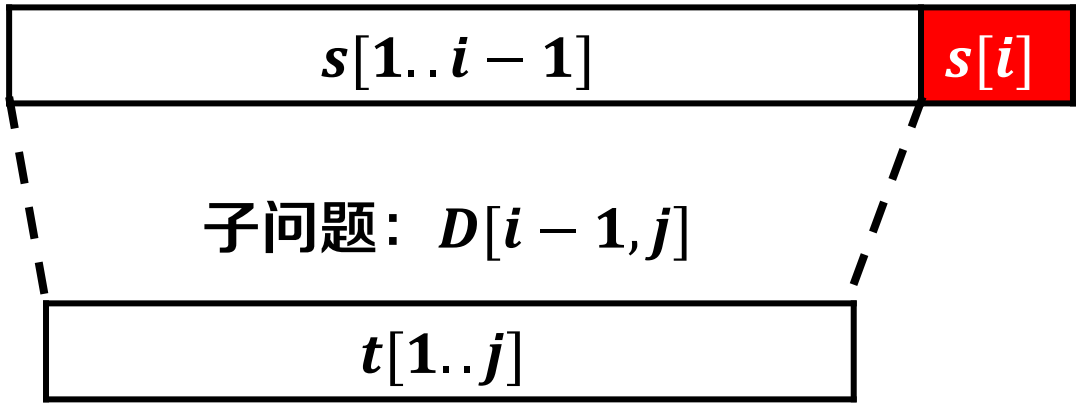
最优方案追踪

递推关系建立：分析最优（子）结构

- 考察末尾元素：删除

s	A	B	C	B	D	A	B
t	B	D	C	A	B	A	

s	A	B	C	B	D	A	B
t	B	D	C	A	B	A	



- $D[i,j] = D[i-1,j] + 1$

问题结构分析

递推关系建立

自底向上计算

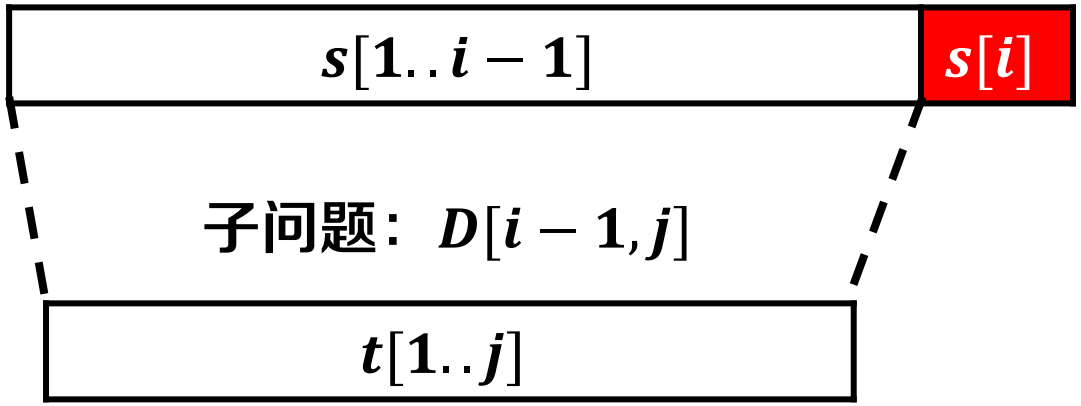
最优方案追踪

递推关系建立：分析最优（子）结构

- 考察末尾元素：删除

s	A	B	C	B	D	A	B
t	B	D	C	A	B	A	

s	A	B	C	B	D	A	B
t	B	D	C	A	B	A	



- $D[i,j] = D[i-1,j] + 1$

子问题最优 ⇒ 原问题最优

最优子结构

问题结构分析

递推关系建立

自底向上计算

最优方案追踪

递推关系建立：分析最优（子）结构

- 考察末尾元素：插入

s	A	B	C	B	D	A	B	?

t	B	D	C	A	B	A

问题结构分析

递推关系建立

自底向上计算

最优方案追踪

递推关系建立：分析最优（子）结构

- 考察末尾元素：插入

s	A	B	C	B	D	A	B	A

t	B	D	C	A	B	A

s	A	B	C	B	D	A	B	A

t	B	D	C	A	B	A

问题结构分析

递推关系建立

自底向上计算

最优方案追踪

递推关系建立：分析最优（子）结构

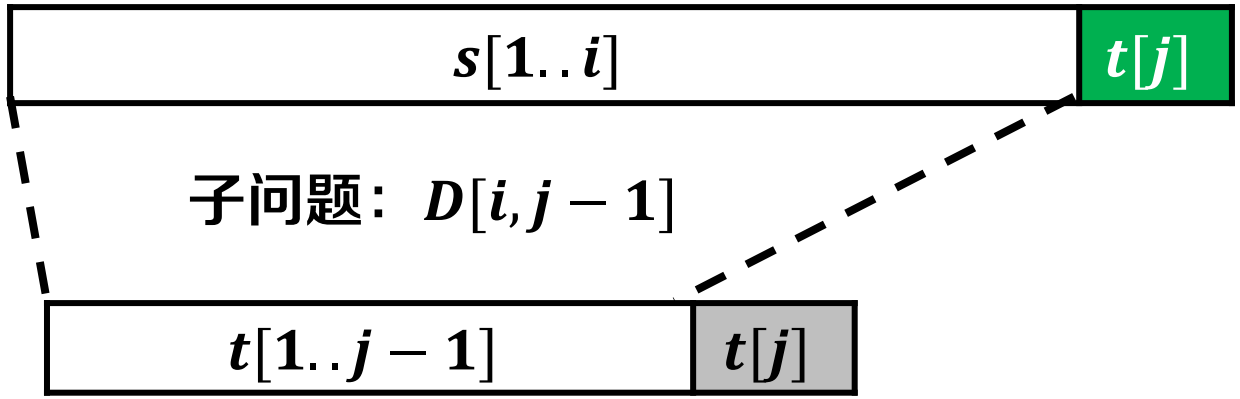
- 考察末尾元素：插入

s	A	B	C	B	D	A	B	A

t	B	D	C	A	B	A

s	A	B	C	B	D	A	B	A

t	B	D	C	A	B	A



问题结构分析

递推关系建立

自底向上计算

最优方案追踪

递推关系建立：分析最优（子）结构

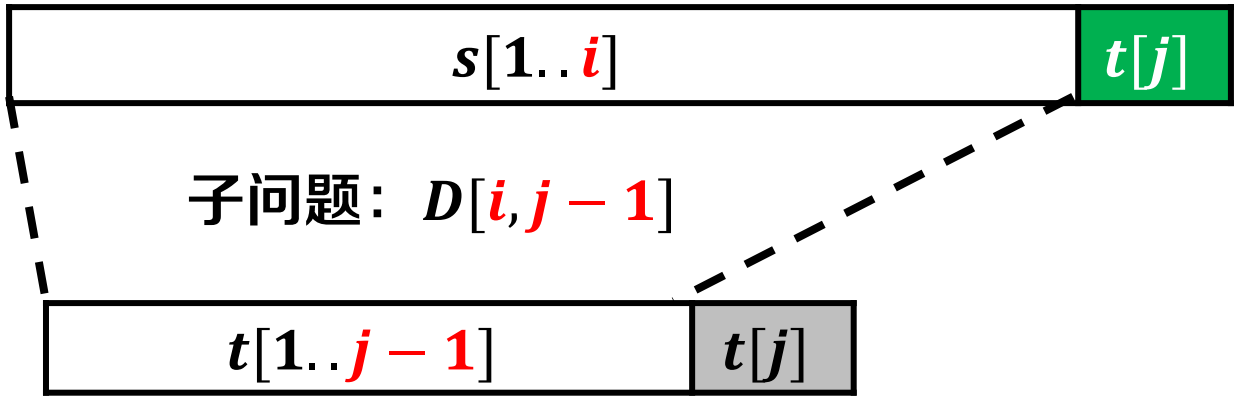
- 考察末尾元素：插入

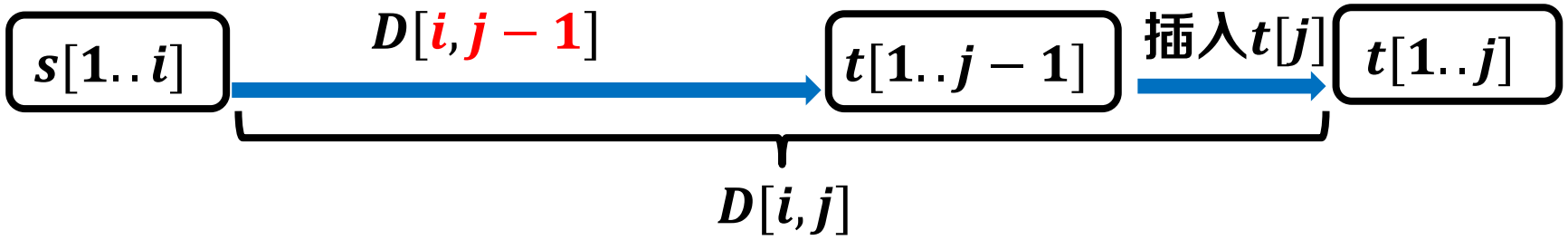
s	A	B	C	B	D	A	B	A

t	B	D	C	A	B	A

s	A	B	C	B	D	A	B	A

t	B	D	C	A	B	A





递推关系建立：分析最优（子）结构

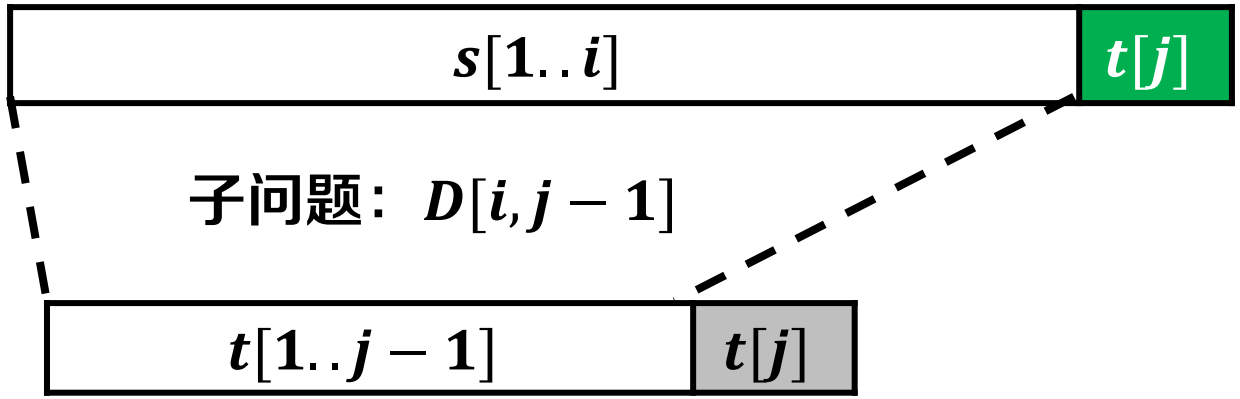
- 考察末尾元素：插入

s	A	B	C	B	D	A	B	A

t	B	D	C	A	B	A

s	A	B	C	B	D	A	B	A

t	B	D	C	A	B	A



- $D[i,j] = D[i,j-1] + 1$ → 插入最后一个元素

问题结构分析

递推关系建立

自底向上计算

最优方案追踪

递推关系建立：分析最优（子）结构

- 考察末尾元素：插入

s	A	B	C	B	D	A	B	A

t	B	D	C	A	B	A

s	A	B	C	B	D	A	B	A

t	B	D	C	A	B	A

$s[1..i]$	$t[j]$

子问题：$D[i, j-1]$

$t[1..j-1]$	$t[j]$

- $D[i,j] = D[i,j-1] + 1$

最优子结构

问题结构分析

递推关系建立

自底向上计算

最优方案追踪

递推关系建立：分析最优（子）结构

- 考察末尾元素：替换

s	A	B	C	B	D	A	B

t	B	D	C	A	B	A

问题结构分析

递推关系建立

自底向上计算

最优方案追踪

递推关系建立：分析最优（子）结构

- 考察末尾元素：替换

s	A	B	C	B	D	A	?

t	B	D	C	A	B	A

问题结构分析

递推关系建立

自底向上计算

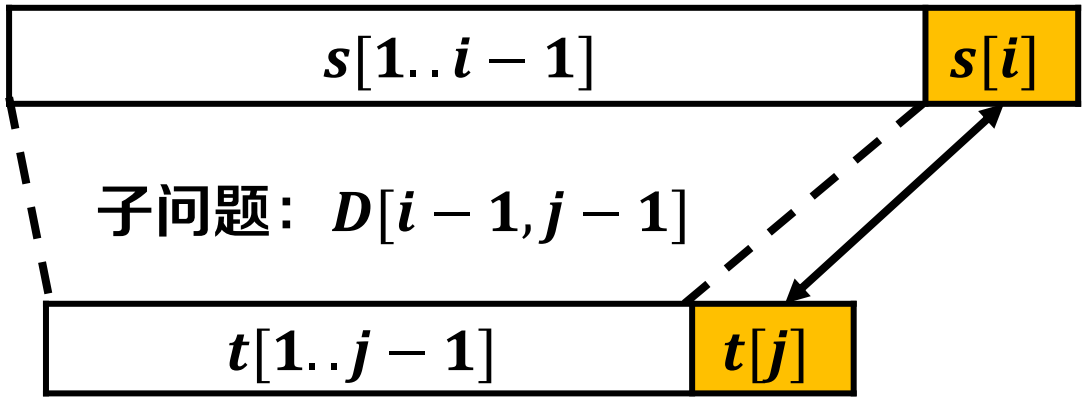
最优方案追踪

递推关系建立：分析最优（子）结构

- 考察末尾元素：替换

s	A	B	C	B	D	A	A
t	B	D	C	A	B	A	

s	A	B	C	B	D	A	A
t	B	D	C	A	B	A	

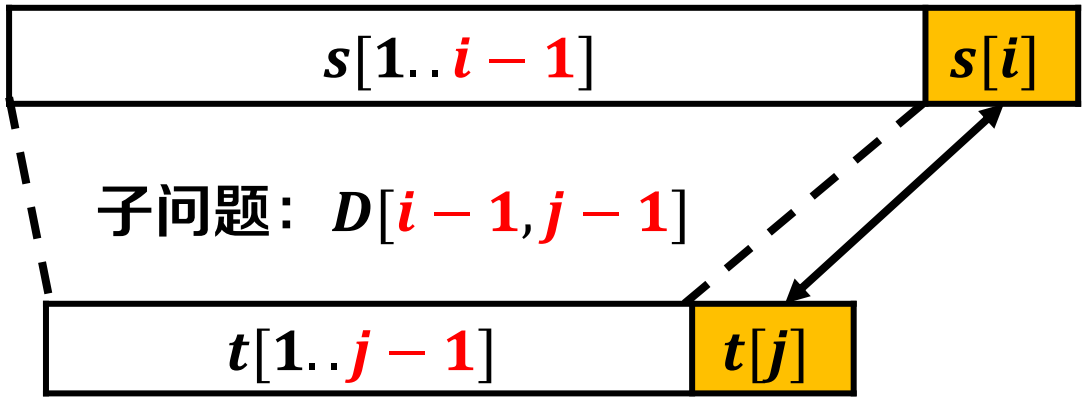


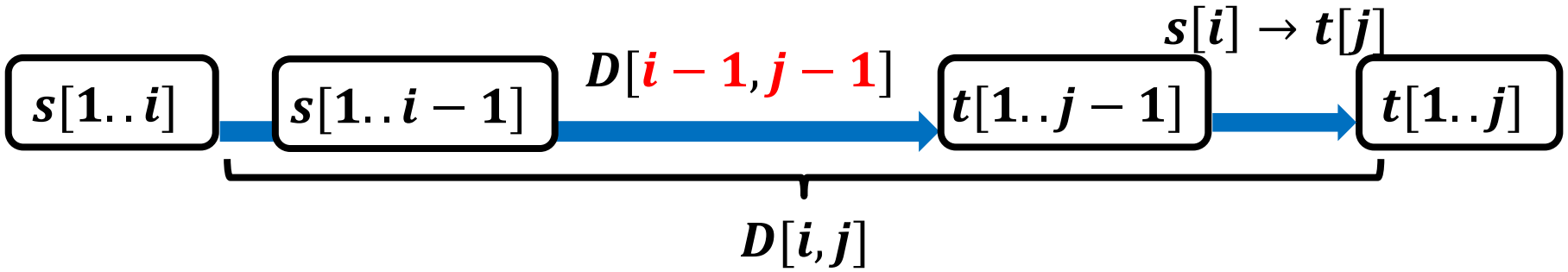
递推关系建立：分析最优（子）结构

- 考察末尾元素：替换

s	A	B	C	B	D	A	A
t	B	D	C	A	B	A	

s	A	B	C	B	D	A	A
t	B	D	C	A	B	A	





问题结构分析

递推关系建立

自底向上计算

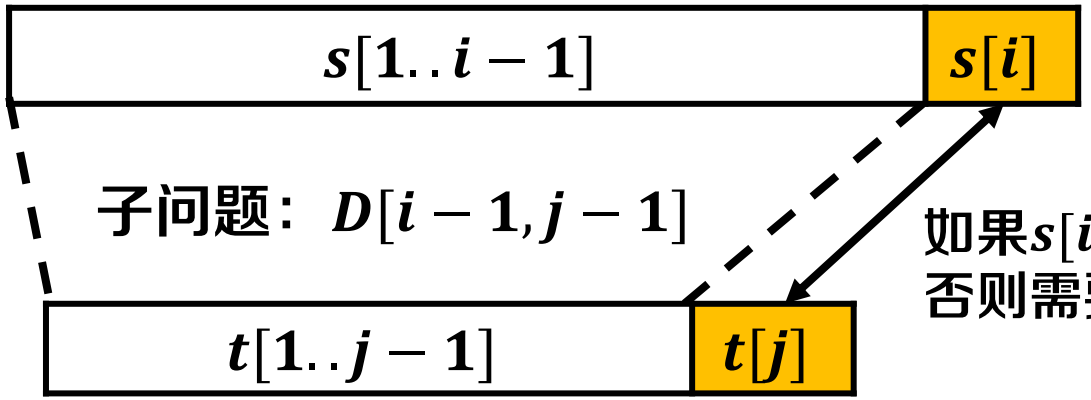
最优方案追踪

递推关系建立：分析最优（子）结构

- 考察末尾元素：替换

s	A	B	C	B	D	A	A
t	B	D	C	A	B	A	

s	A	B	C	B	D	A	A
t	B	D	C	A	B	A	



如果$s[i]=t[j]$，不需要替换
否则需要替换

- $$D[i,j]=D[i-1,j-1]+\begin{cases}0, & if\ s[i]=t[j]\\ 1, & if\ s[i]\neq t[j]\end{cases}$$

问题结构分析

递推关系建立

自底向上计算

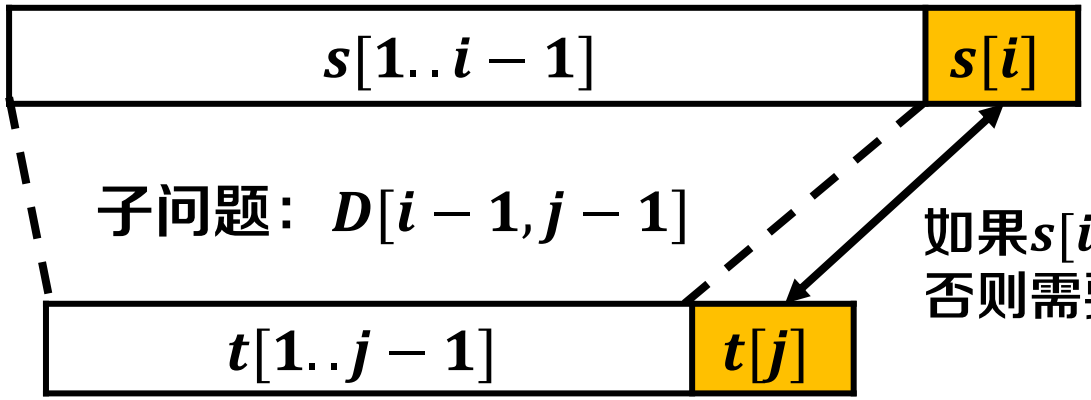
最优方案追踪

递推关系建立：分析最优（子）结构

- 考察末尾元素：替换

s	A	B	C	B	D	A	A
t	B	D	C	A	B	A	

s	A	B	C	B	D	A	A
t	B	D	C	A	B	A	



如果$s[i]=t[j]$，不需要替换
否则需要替换

- $$D[i,j]=D[i-1,j-1]+\begin{cases}0, & if\ s[i]=t[j]\\ 1, & if\ s[i]\neq t[j]\end{cases}$$

最优子结构

问题结构分析

递推关系建立

自底向上计算

最优方案追踪

递推关系建立：构造递推公式

- 综合上面三种方式

  - $$D[i,j] = \min \begin{cases} D[i-1,j]+1 & \text{删除} \\ D[i,j-1]+1 & \text{插入} \\ D[i-1,j-1] + \begin{cases} 0, & if\ s[i] = t[j] \\ 1, & if\ s[i] \neq t[j] \end{cases} & \text{替换} \end{cases}$$

递推关系建立：构造递推公式

- 最小编辑距离 vs. 最长公共子序列

  - $$D[i,j] = \min \begin{cases} D[i-1,j]+1 & \text{删除} \\ D[i,j-1]+1 & \text{插入} \\ D[i-1,j-1] + \begin{cases} 0, & if\ s[i]=t[j] \\ 1, & if\ s[i] \neq t[j] \end{cases} & \text{替换} \end{cases}$$

区别①

  - $$C[i,j] = \begin{cases} \max\{C[i-1,j], C[i,j-1]\}, & x_i \neq y_j \\ C[i-1,j-1]+1 & , x_i = y_j \end{cases}$$

问题结构分析

↓

递推关系建立

↓

自底向上计算

↓

最优方案追踪

自底向上计算：确定计算顺序

- 初始化
  - $D[i,0]=i$
    - 把长度为i的串变为空串至少需要i次操作（删除）
  - $D[0,j]=j$
    - 把空串变为长度为j的串至少需要j次操作（插入）

与之前不同.

i \ j	0	1	2	…	$m-1$	m
0	0	1	2	…	$m-1$	m
1	1					
2	2					
…	…					
$n-1$	$n-1$					
n	n					

问题结构分析

递推关系建立

自底向上计算

最优方案追踪

自底向上计算：确定计算顺序

- 递推公式

$$D[i,j] = \min \begin{cases} D[i-1,j]+1 & \text{删除} \\ D[i,j-1]+1 & \text{插入} \\ D[i-1,j-1] + \begin{cases} 0, & if\ s[i]=t[j] \\ 1, & if\ s[i] \neq t[j] \end{cases} & \text{替换} \end{cases}$$

i \ j	0	1	2	…	$m-1$	m
0	0	1	2	…	$m-1$	m
1	1					
2	2					
…	…					
$n-1$	$n-1$					
n	n					

$D[i-1,j-1] + \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$

$D[i-1,j]+1$

$D[i,j]$

$D[i,j-1]+1$

问题结构分析

递推关系建立

自底向上计算

最优方案追踪

自底向上计算：依次计算问题

- 递推公式

$$D[i,j] = \min \begin{cases} D[i-1,j]+1 & \text{删除} \\ D[i,j-1]+1 & \text{插入} \\ D[i-1,j-1] + \begin{cases} 0, & if\ s[i]=t[j] \\ 1, & if\ s[i] \neq t[j] \end{cases} & \text{替换} \end{cases}$$

i \ j	0	1	2	…	$m-1$	m
0	0	1	2	…	$m-1$	m
1	1					
2	2					
…	…					
$n-1$	$n-1$					
n	n					★

问题结构分析

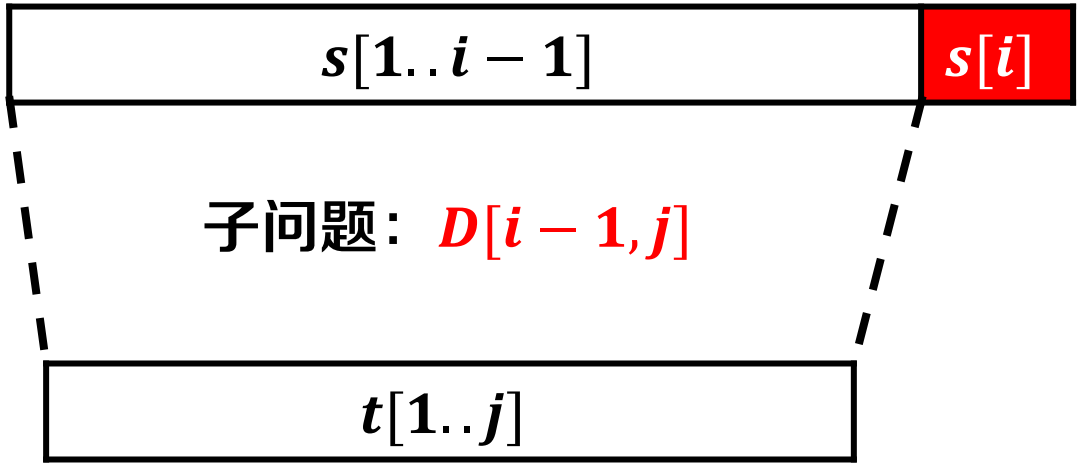
递推关系建立

自底向上计算

最优方案追踪

最优方案追踪：记录决策过程

- 追踪数组Rec，记录子问题来源



$D[i-1,j-1]$	$D[i-1,j]$ ↑
$D[i,j-1]$	$D[i,j]$

$Rec[i,j]$	子问题来源	操作
U	上侧，即$D[i-1,j]$	删除$s[i]$

问题结构分析

↓

递推关系建立

↓

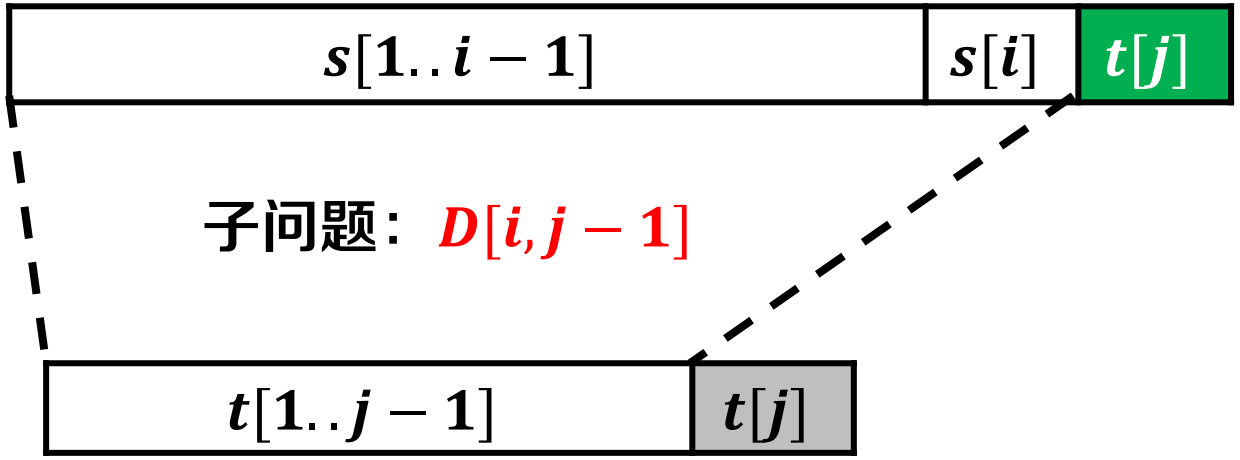
自底向上计算

↓

最优方案追踪

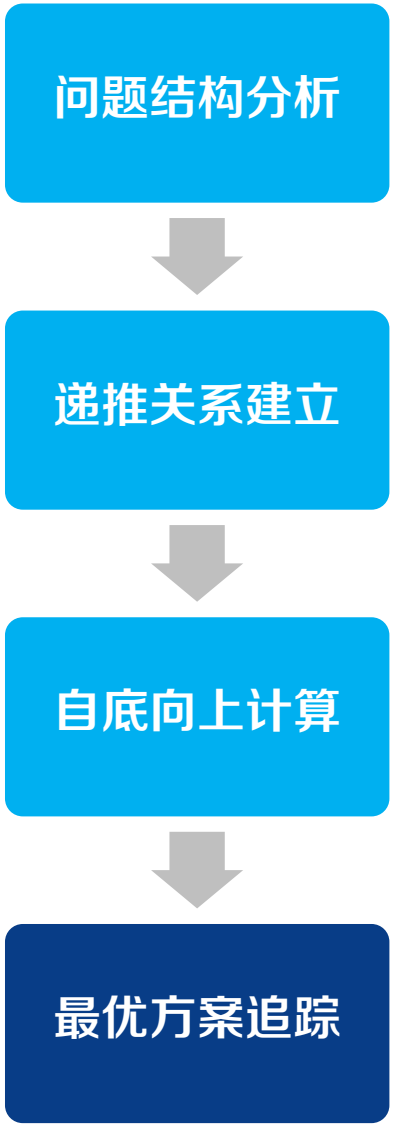
最优方案追踪：记录决策过程

- 追踪数组Rec，记录子问题来源



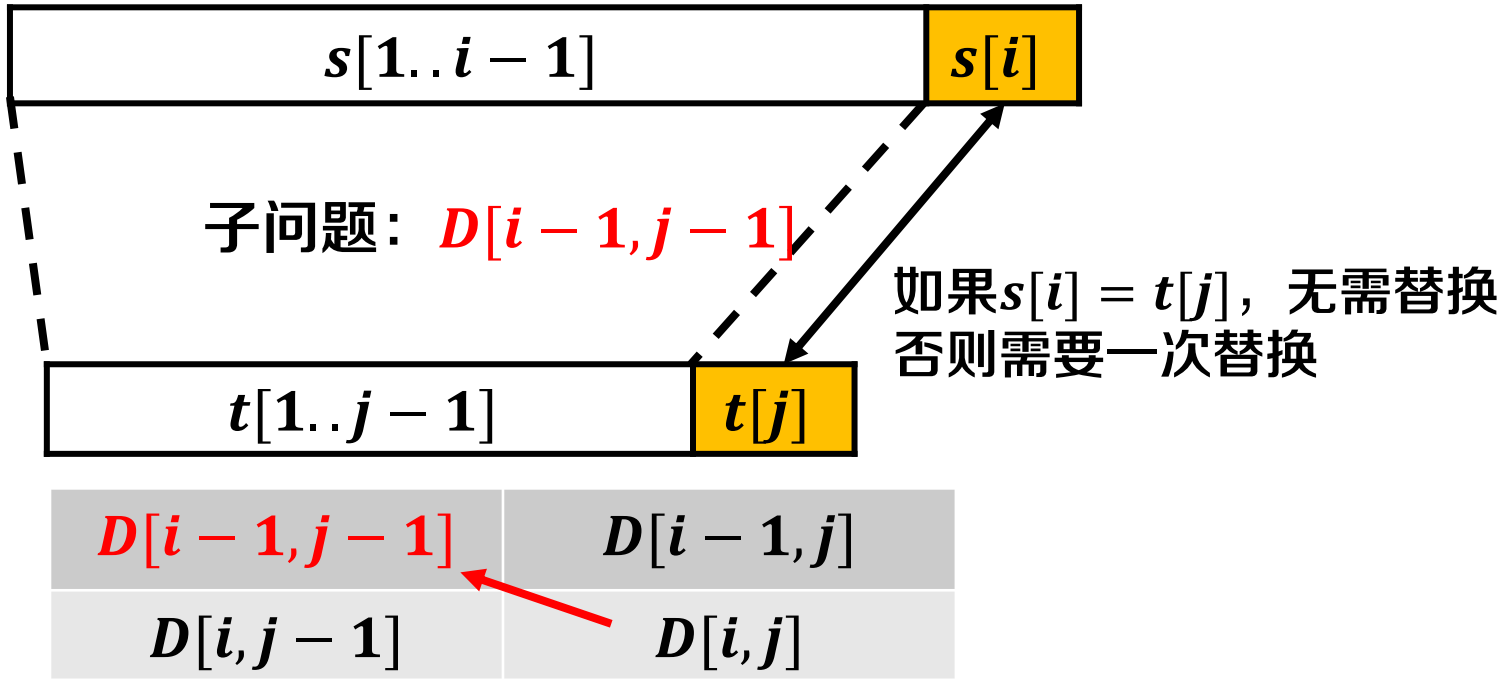
$D[i-1,j-1]$	$D[i-1,j]$
$D[i,j-1]$ ←	$D[i,j]$

$Rec[i,j]$	子问题来源	操作
U	上侧，即$D[i-1,j]$	删除$s[i]$
L	左侧，即$D[i,j-1]$	插入$t[j]$

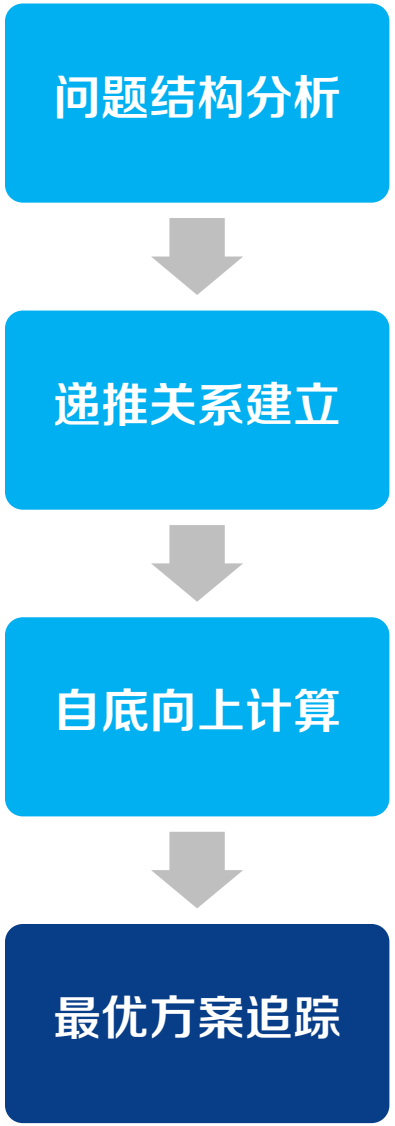


最优方案追踪：记录决策过程

- 追踪数组Rec，记录子问题来源



$Rec[i,j]$	子问题来源	操作
U	上侧，即$D[i-1,j]$	删除$s[i]$
L	左侧，即$D[i,j-1]$	插入$t[j]$
LU	左上，即$D[i-1,j-1]$	用$t[j]$替换$s[i]$/无操作



最优方案追踪：输出最优方案

- 根据数组Rec，输出最少编辑操作

i \ j	0	1	2	…	m
0					
1					
…					
n					

$Rec[i,j] = L$

$Rec[i,j] = LU$

$Rec[i,j] = U$

$Rec[i,j]$	子问题来源	操作
U	上侧，即$D[i-1,j]$	删除$s[i]$
L	左侧，即$D[i,j-1]$	插入$t[j]$
LU	左上，即$D[i-1,j-1]$	用$t[j]$替换$s[i]$/无操作

问题结构分析

递推关系建立

自底向上计算

最优方案追踪

算法实例

	1	2	3	4	5	6	7
s	A	B	C	B	D	A	B
t	B	D	C	A	B	A	

D

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1						
2	2						
3	3						
4	4						
5	5						
6	6						
7	7						

初始化

Rec

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0		L	L	L	L	L	L
1	U						
2	U						
3	U						
4	U						
5	U						
6	U						
7	U						

算法实例

	1	2	3	4	5	6	7
s	A	B	C	B	D	A	B
t	B	D	C	A	B	A	

$$D[i,j] = \min \begin{cases} D[i-1,j]+1 \\ D[i,j-1]+1 \\ D[i-1,j-1] + \begin{cases} 0, if\ s[i] = t[j] \\ 1, if\ s[i] \neq t[j] \end{cases} \end{cases}$$

D

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1						
2	2						
3	3						
4	4						
5	5						
6	6						
7	7						

Rec

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0		L	L	L	L	L	L
1	U						
2	U						
3	U						
4	U						
5	U						
6	U						
7	U						

算法实例

	1	2	3	4	5	6	7
s	A	B	C	B	D	A	B
t	B	D	C	A	B	A	

$$D[i,j] = \min \begin{cases} D[i-1,j] + 1 & \text{删除A} \\ D[i,j-1] + 1 \\ D[i-1,j-1] + \begin{cases} 0, if\ s[i] = t[j] \\ 1, if\ s[i] \neq t[j] \end{cases} \end{cases}$$

$D[i-1,j]$

D

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1						
2	2						
3	3						
4	4						
5	5						
6	6						
7	7						

Rec

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0		L	L	L	L	L	L
1	U						
2	U						
3	U						
4	U						
5	U						
6	U						
7	U						

算法实例

	1	2	3	4	5	6	7
s	A	B	C	B	D	A	B
t	B	D	C	A	B	A	

$$D[i,j] = \min \begin{cases} D[i-1,j]+1 & \text{删除A} \\ D[i,j-1]+1 & \text{插入B} \\ D[i-1,j-1]+\begin{cases} 0, if\ s[i]=t[j] \\ 1, if\ s[i] \neq t[j] \end{cases} \end{cases}$$

D

$D[i-1,j]$

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1						
2	2						
3	3						
4	4						
5	5						
6	6						
7	7						

$D[i,j-1]$

Rec

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0		L	L	L	L	L	L
1	U						
2	U						
3	U						
4	U						
5	U						
6	U						
7	U						

算法实例

	1	2	3	4	5	6	7
s	A	B	C	B	D	A	B
t	B	D	C	[illegible]	[illegible]	A	

$s[i] \neq t[j]$

$$D[i,j] = \min \begin{cases} D[i-1,j]+1 & \text{删除A} \\ D[i,j-1]+1 & \text{插入B} \\ D[i-1,j-1] + \begin{cases} 0, if\ s[i] = t[j] \\ 1, if\ s[i] \neq t[j] \end{cases} & \text{A替换为B} \end{cases}$$

D

$D[i-1,j]$

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1						
2	2						
3	3						
4	4						
5	5						
6	6						
7	7						

$D[i-1,j-1]$

$D[i,j-1]$

Rec

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0		L	L	L	L	L	L
1	U						
2	U						
3	U						
4	U						
5	U						
6	U						
7	U						

算法实例

	1	2	3	4	5	6	7
s	A	B	C	B	D	A	B
t	B	D	C	[illegible]	[illegible]	A	

$s[i] \neq t[j]$

$$D[i,j] = \min \begin{cases} D[i-1,j]+1 \\ D[i,j-1]+1 \\ D[i-1,j-1] + \begin{cases} 0, if\ s[i] = t[j] \\ 1, if\ s[i] \neq t[j] \end{cases} \end{cases}$$

D

$D[i-1,j]$

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	1					
2	2						
3	3						
4	4						
5	5						
6	6						
7	7						

$D[i-1,j-1]$

$D[i,j-1]$

Rec

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0		L	L	L	L	L	L
1	U	LU					
2	U						
3	U						
4	U						
5	U						
6	U						
7	U						

算法实例

	1	2	3	4	5	6	7
s	A	B	C	B	D	A	B
t	B	D	C	A	B	A	

$$D[i,j] = \min \begin{cases} D[i-1,j]+1 \\ D[i,j-1]+1 \\ D[i-1,j-1] + \begin{cases} 0, if\ s[i] = t[j] \\ 1, if\ s[i] \neq t[j] \end{cases} \end{cases}$$

$s[i] \neq t[j]$

$D[i-1,j]$

$D[i-1,j-1]$

$D[i,j-1]$

D

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	1	2				
2	2						
3	3						
4	4						
5	5						
6	6						
7	7						

Rec

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0		L	L	L	L	L	L
1	U	LU	LU				
2	U						
3	U						
4	U						
5	U						
6	U						
7	U						

算法实例

	1	2	3	4	5	6	7
s	A	B	C	B	D	A	B
t	B	D	C	A	B	A	

$$D[i,j] = \min \begin{cases} D[i-1,j]+1 \\ D[i,j-1]+1 \\ D[i-1,j-1] + \begin{cases} 0, if\ s[i]=t[j] \\ 1, if\ s[i] \neq t[j] \end{cases} \end{cases}$$

D

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	1	2	3			
2	2						
3	3						
4	4						
5	5						
6	6						
7	7						

Rec

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0		L	L	L	L	L	L
1	U	LU	LU	LU			
2	U						
3	U						
4	U						
5	U						
6	U						
7	U						

算法实例

	1	2	3	4	5	6	7
s	A	B	C	B	D	A	B
t	B	D	C	A	B	A	

$$D[i,j] = \min \begin{cases} D[i-1,j]+1 \\ D[i,j-1]+1 \\ D[i-1,j-1] + \begin{cases} 0, if\ s[i]=t[j] \\ 1, if\ s[i] \neq t[j] \end{cases} \end{cases}$$

$s[i] = t[j]$

$D[i-1,j]$

无需替换

D

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	1	2	3	3		
2	2						
3	3						
4	4						
5	5						
6	6						
7	7						

c

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0		L	L	L	L	L	L
1		LU	LU	LU	LU		
2	U						
3	U						
4	U						
5	U						
6	U						
7	U						

$D[i-1,j-1]$

$D[i,j-1]$

算法实例

	1	2	3	4	5	6	7
s	A	B	C	B	D	A	B
t	B	D	C	A	B	A	

$$D[i,j] = \min \begin{cases} D[i-1,j]+1 \\ D[i,j-1]+1 \\ D[i-1,j-1] + \begin{cases} 0, if\ s[i] = t[j] \\ 1, if\ s[i] \neq t[j] \end{cases} \end{cases}$$

D

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	1	2	3	3	4	
2	2						
3	3						
4	4						
5	5						
6	6						
7	7						

Rec

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0		L	L	L	L	L	L
1	U	LU	LU	LU	LU	L	
2	U						
3	U						
4	U						
5	U						
6	U						
7	U						

算法实例

	1	2	3	4	5	6	7
s	A	B	C	B	D	A	B
t	B	D	C	A	B	A	

$$D[i,j] = \min \begin{cases} D[i-1,j]+1 \\ D[i,j-1]+1 \\ D[i-1,j-1] + \begin{cases} 0, if\ s[i] = t[j] \\ 1, if\ s[i] \neq t[j] \end{cases} \end{cases}$$

D

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	1	2	3	3	4	5
2	2						
3	3						
4	4						
5	5						
6	6						
7	7						

Rec

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0		L	L	L	L	L	L
1	U	LU	LU	LU	LU	L	LU
2	U						
3	U						
4	U						
5	U						
6	U						
7	U						

算法实例

	1	2	3	4	5	6	7
s	A	B	C	B	D	A	B
t	B	D	C	A	B	A	

$$D[i,j] = \min \begin{cases} D[i-1,j]+1 \\ D[i,j-1]+1 \\ D[i-1,j-1] + \begin{cases} 0, if\ s[i]=t[j] \\ 1, if\ s[i] \neq t[j] \end{cases} \end{cases}$$

D

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	1	2	3	3	4	5
2	2	1					
3	3						
4	4						
5	5						
6	6						
7	7						

Rec

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0		L	L	L	L	L	L
1	U	LU	LU	LU	LU	L	LU
2	U	LU					
3	U						
4	U						
5	U						
6	U						
7	U						

算法实例

	1	2	3	4	5	6	7
s	A	B	C	B	D	A	B
t	B	D	C	A	B	A	

$$D[i,j] = \min \begin{cases} D[i-1,j]+1 \\ D[i,j-1]+1 \\ D[i-1,j-1] + \begin{cases} 0, if\ s[i] = t[j] \\ 1, if\ s[i] \neq t[j] \end{cases} \end{cases}$$

D

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	1	2	3	3	4	5
2	2	1	2				
3	3						
4	4						
5	5						
6	6						
7	7						

Rec

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0		L	L	L	L	L	L
1	U	LU	LU	LU	LU	L	LU
2	U	LU	LU				
3	U						
4	U						
5	U						
6	U						
7	U						

算法实例

	1	2	3	4	5	6	7
s	A	B	C	B	D	A	B
t	B	D	C	A	B	A	

$$D[i,j] = \min \begin{cases} D[i-1,j]+1 \\ D[i,j-1]+1 \\ D[i-1,j-1] + \begin{cases} 0, if\ s[i] = t[j] \\ 1, if\ s[i] \neq t[j] \end{cases} \end{cases}$$

D

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	1	2	3	3	4	5
2	2	1	2	3			
3	3						
4	4						
5	5						
6	6						
7	7						

Rec

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0		L	L	L	L	L	L
1	U	LU	LU	LU	LU	L	LU
2	U	LU	LU	LU			
3	U						
4	U						
5	U						
6	U						
7	U						

算法实例

	1	2	3	4	5	6	7
s	A	B	C	B	D	A	B
t	B	D	C	A	B	A	

$$D[i,j] = \min \begin{cases} D[i-1,j]+1 \\ D[i,j-1]+1 \\ D[i-1,j-1] + \begin{cases} 0, if\ s[i] = t[j] \\ 1, if\ s[i] \neq t[j] \end{cases} \end{cases}$$

D

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	1	2	3	3	4	5
2	2	1	2	3	4		
3	3						
4	4						
5	5						
6	6						
7	7						

Rec

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0		L	L	L	L	L	L
1	U	LU	LU	LU	LU	L	LU
2	U	LU	LU	LU	LU		
3	U						
4	U						
5	U						
6	U						
7	U						

算法实例

	1	2	3	4	5	6	7
s	A	B	C	B	D	A	B
t	B	D	C	A	B	A	

$$D[i,j] = \min \begin{cases} D[i-1,j]+1 \\ D[i,j-1]+1 \\ D[i-1,j-1] + \begin{cases} 0, if\ s[i] = t[j] \\ 1, if\ s[i] \neq t[j] \end{cases} \end{cases}$$

D

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	1	2	3	3	4	5
2	2	1	2	3	4	3	
3	3						
4	4						
5	5						
6	6						
7	7						

Rec

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0		L	L	L	L	L	L
1	U	LU	LU	LU	LU	L	LU
2	U	LU	LU	LU	LU	LU	
3	U						
4	U						
5	U						
6	U						
7	U						

算法实例

	1	2	3	4	5	6	7
s	A	B	C	B	D	A	B
t	B	D	C	A	B	A	

$$D[i,j] = \min \begin{cases} D[i-1,j]+1 \\ D[i,j-1]+1 \\ D[i-1,j-1] + \begin{cases} 0, if\ s[i] = t[j] \\ 1, if\ s[i] \neq t[j] \end{cases} \end{cases}$$

D

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	1	2	3	3	4	5
2	2	1	2	3	4	3	4
3	3						
4	4						
5	5						
6	6						
7	7						

Rec

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0		L	L	L	L	L	L
1	U	LU	LU	LU	LU	L	LU
2	U	LU	LU	LU	LU	LU	L
3	U						
4	U						
5	U						
6	U						
7	U						

算法实例

	1	2	3	4	5	6	7
s	A	B	C	B	D	A	B
t	B	D	C	A	B	A	

$$D[i,j] = \min \begin{cases} D[i-1,j]+1 \\ D[i,j-1]+1 \\ D[i-1,j-1] + \begin{cases} 0, if\ s[i] = t[j] \\ 1, if\ s[i] \neq t[j] \end{cases} \end{cases}$$

D

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	1	2	3	3	4	5
2	2	1	2	3	4	3	4
3	3	2					
4	4						
5	5						
6	6						
7	7						

Rec

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0		L	L	L	L	L	L
1	U	LU	LU	LU	LU	L	LU
2	U	LU	LU	LU	LU	LU	L
3	U	U					
4	U						
5	U						
6	U						
7	U						

算法实例

	1	2	3	4	5	6	7
s	A	B	C	B	D	A	B
t	B	D	C	A	B	A	

$$D[i,j] = \min \begin{cases} D[i-1,j]+1 \\ D[i,j-1]+1 \\ D[i-1,j-1] + \begin{cases} 0, if\ s[i] = t[j] \\ 1, if\ s[i] \neq t[j] \end{cases} \end{cases}$$

D

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	1	2	3	3	4	5
2	2	1	2	3	4	3	4
3	3	2	2				
4	4						
5	5						
6	6						
7	7						

Rec

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0		L	L	L	L	L	L
1	U	LU	LU	LU	LU	L	LU
2	U	LU	LU	LU	LU	LU	L
3	U	U	LU				
4	U						
5	U						
6	U						
7	U						

算法实例

	1	2	3	4	5	6	7
s	A	B	C	B	D	A	B
t	B	D	C	A	B	A	

$$D[i,j] = \min \begin{cases} D[i-1,j]+1 \\ D[i,j-1]+1 \\ D[i-1,j-1] + \begin{cases} 0, if\ s[i] = t[j] \\ 1, if\ s[i] \neq t[j] \end{cases} \end{cases}$$

D

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	1	2	3	3	4	5
2	2	1	2	3	4	3	4
3	3	2	2	2			
4	4						
5	5						
6	6						
7	7						

Rec

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0		L	L	L	L	L	L
1	U	LU	LU	LU	LU	L	LU
2	U	LU	LU	LU	LU	LU	L
3	U	U	LU	LU			
4	U						
5	U						
6	U						
7	U						

算法实例

	1	2	3	4	5	6	7
s	A	B	C	B	D	A	B
t	B	D	C	A	B	A	

$$D[i,j] = \min \begin{cases} D[i-1,j]+1 \\ D[i,j-1]+1 \\ D[i-1,j-1] + \begin{cases} 0, if\ s[i] = t[j] \\ 1, if\ s[i] \neq t[j] \end{cases} \end{cases}$$

D

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	1	2	3	3	4	5
2	2	1	2	3	4	3	4
3	3	2	2	2	3		
4	4						
5	5						
6	6						
7	7						

Rec

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0		L	L	L	L	L	L
1	U	LU	LU	LU	LU	L	LU
2	U	LU	LU	LU	LU	LU	L
3	U	U	LU	LU	L		
4	U						
5	U						
6	U						
7	U						

算法实例

	1	2	3	4	5	6	7
s	A	B	C	B	D	A	B
t	B	D	C	A	B	A	

$$D[i,j] = \min \begin{cases} D[i-1,j]+1 \\ D[i,j-1]+1 \\ D[i-1,j-1] + \begin{cases} 0, if\ s[i] = t[j] \\ 1, if\ s[i] \neq t[j] \end{cases} \end{cases}$$

D

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	1	2	3	3	4	5
2	2	1	2	3	4	3	4
3	3	2	2	2	3	4	
4	4						
5	5						
6	6						
7	7						

Rec

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0		L	L	L	L	L	L
1	U	LU	LU	LU	LU	L	LU
2	U	LU	LU	LU	LU	LU	L
3	U	U	LU	LU	L	L	
4	U						
5	U						
6	U						
7	U						

算法实例

	1	2	3	4	5	6	7
s	A	B	C	B	D	A	B
t	B	D	C	A	B	A	

$$D[i,j] = \min \begin{cases} D[i-1,j]+1 \\ D[i,j-1]+1 \\ D[i-1,j-1] + \begin{cases} 0, if\ s[i] = t[j] \\ 1, if\ s[i] \neq t[j] \end{cases} \end{cases}$$

D

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	1	2	3	3	4	5
2	2	1	2	3	4	3	4
3	3	2	2	2	3	4	4
4	4						
5	5						
6	6						
7	7						

Rec

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0		L	L	L	L	L	L
1	U	LU	LU	LU	LU	L	LU
2	U	LU	LU	LU	LU	LU	L
3	U	U	LU	LU	L	L	LU
4	U						
5	U						
6	U						
7	U						

算法实例

	1	2	3	4	5	6	7
s	A	B	C	B	D	A	B
t	B	D	C	A	B	A	

$$D[i,j] = \min \begin{cases} D[i-1,j]+1 \\ D[i,j-1]+1 \\ D[i-1,j-1] + \begin{cases} 0, if\ s[i] = t[j] \\ 1, if\ s[i] \neq t[j] \end{cases} \end{cases}$$

D

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	1	2	3	3	4	5
2	2	1	2	3	4	3	4
3	3	2	2	2	3	4	4
4	4	3					
5	5						
6	6						
7	7						

Rec

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0		L	L	L	L	L	L
1	U	LU	LU	LU	LU	L	LU
2	U	LU	LU	LU	LU	LU	L
3	U	U	LU	LU	L	L	LU
4	U	LU					
5	U						
6	U						
7	U						

算法实例

	1	2	3	4	5	6	7
s	A	B	C	B	D	A	B
t	B	D	C	A	B	A	

$$D[i,j] = \min \begin{cases} D[i-1,j]+1 \\ D[i,j-1]+1 \\ D[i-1,j-1] + \begin{cases} 0, if\ s[i] = t[j] \\ 1, if\ s[i] \neq t[j] \end{cases} \end{cases}$$

D

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	1	2	3	3	4	5
2	2	1	2	3	4	3	4
3	3	2	2	2	3	4	4
4	4	3	3				
5	5						
6	6						
7	7						

Rec

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0		L	L	L	L	L	L
1	U	LU	LU	LU	LU	L	LU
2	U	LU	LU	LU	LU	LU	L
3	U	U	LU	LU	L	L	LU
4	U	LU	LU				
5	U						
6	U						
7	U						

算法实例

	1	2	3	4	5	6	7
s	A	B	C	B	D	A	B
t	B	D	C	A	B	A	

$$D[i,j] = \min \begin{cases} D[i-1,j]+1 \\ D[i,j-1]+1 \\ D[i-1,j-1] + \begin{cases} 0, if\ s[i] = t[j] \\ 1, if\ s[i] \neq t[j] \end{cases} \end{cases}$$

D

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	1	2	3	3	4	5
2	2	1	2	3	4	3	4
3	3	2	2	2	3	4	4
4	4	3	3	3			
5	5						
6	6						
7	7						

Rec

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0		L	L	L	L	L	L
1	U	LU	LU	LU	LU	L	LU
2	U	LU	LU	LU	LU	LU	L
3	U	U	LU	LU	L	L	LU
4	U	LU	LU	LU			
5	U						
6	U						
7	U						

算法实例

	1	2	3	4	5	6	7
s	A	B	C	B	D	A	B
t	B	D	C	A	B	A	

$$D[i,j] = \min \begin{cases} D[i-1,j]+1 \\ D[i,j-1]+1 \\ D[i-1,j-1] + \begin{cases} 0, if\ s[i] = t[j] \\ 1, if\ s[i] \neq t[j] \end{cases} \end{cases}$$

D

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	1	2	3	3	4	5
2	2	1	2	3	4	3	4
3	3	2	2	2	3	4	4
4	4	3	3	3	3		
5	5						
6	6						
7	7						

Rec

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0		L	L	L	L	L	L
1	U	LU	LU	LU	LU	L	LU
2	U	LU	LU	LU	LU	LU	L
3	U	U	LU	LU	L	L	LU
4	U	LU	LU	LU	LU		
5	U						
6	U						
7	U						

算法实例

	1	2	3	4	5	6	7
s	A	B	C	B	D	A	B
t	B	D	C	A	B	A	

$$D[i,j] = \min \begin{cases} D[i-1,j]+1 \\ D[i,j-1]+1 \\ D[i-1,j-1] + \begin{cases} 0, if\ s[i] = t[j] \\ 1, if\ s[i] \neq t[j] \end{cases} \end{cases}$$

D

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	1	2	3	3	4	5
2	2	1	2	3	4	3	4
3	3	2	2	2	3	4	4
4	4	3	3	3	3	3	
5	5						
6	6						
7	7						

Rec

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0		L	L	L	L	L	L
1	U	LU	LU	LU	LU	L	LU
2	U	LU	LU	LU	LU	LU	L
3	U	U	LU	LU	L	L	LU
4	U	LU	LU	LU	LU	LU	
5	U						
6	U						
7	U						

算法实例

	1	2	3	4	5	6	7
s	A	B	C	B	D	A	B
t	B	D	C	A	B	A	

$$D[i,j] = \min \begin{cases} D[i-1,j]+1 \\ D[i,j-1]+1 \\ D[i-1,j-1] + \begin{cases} 0, if\ s[i] = t[j] \\ 1, if\ s[i] \neq t[j] \end{cases} \end{cases}$$

D

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	1	2	3	3	4	5
2	2	1	2	3	4	3	4
3	3	2	2	2	3	4	4
4	4	3	3	3	3	3	4
5	5						
6	6						
7	7						

Rec

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0		L	L	L	L	L	L
1	U	LU	LU	LU	LU	L	LU
2	U	LU	LU	LU	LU	LU	L
3	U	U	LU	LU	L	L	LU
4	U	LU	LU	LU	LU	LU	L
5	U						
6	U						
7	U						

算法实例

	1	2	3	4	5	6	7
s	A	B	C	B	D	A	B
t	B	D	C	A	B	A	

$$D[i,j] = \min \begin{cases} D[i-1,j]+1 \\ D[i,j-1]+1 \\ D[i-1,j-1] + \begin{cases} 0, if\ s[i] = t[j] \\ 1, if\ s[i] \neq t[j] \end{cases} \end{cases}$$

D

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	1	2	3	3	4	5
2	2	1	2	3	4	3	4
3	3	2	2	2	3	4	4
4	4	3	3	3	3	3	4
5	5	4	3				
6	6						
7	7						

Rec

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0		L	L	L	L	L	L
1	U	LU	LU	LU	LU	L	LU
2	U	LU	LU	LU	LU	LU	L
3	U	U	LU	LU	L	L	LU
4	U	LU	LU	LU	LU	LU	L
5	U	U	LU				
6	U						
7	U						

算法实例

	1	2	3	4	5	6	7
s	A	B	C	B	D	A	B
t	B	D	C	A	B	A	

$$D[i,j] = \min \begin{cases} D[i-1,j]+1 \\ D[i,j-1]+1 \\ D[i-1,j-1] + \begin{cases} 0, if\ s[i] = t[j] \\ 1, if\ s[i] \neq t[j] \end{cases} \end{cases}$$

D

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	1	2	3	3	4	5
2	2	1	2	3	4	3	4
3	3	2	2	2	3	4	4
4	4	3	3	3	3	3	4
5	5	4	3	4			
6	6						
7	7						

Rec

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0		L	L	L	L	L	L
1	U	LU	LU	LU	LU	L	LU
2	U	LU	LU	LU	LU	LU	L
3	U	U	LU	LU	L	L	LU
4	U	LU	LU	LU	LU	LU	L
5	U	U	LU	LU			
6	U						
7	U						

算法实例

	1	2	3	4	5	6	7
s	A	B	C	B	D	A	B
t	B	D	C	A	B	A	

$$D[i,j] = \min \begin{cases} D[i-1,j]+1 \\ D[i,j-1]+1 \\ D[i-1,j-1] + \begin{cases} 0, if\ s[i] = t[j] \\ 1, if\ s[i] \neq t[j] \end{cases} \end{cases}$$

D

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	1	2	3	3	4	5
2	2	1	2	3	4	3	4
3	3	2	2	2	3	4	4
4	4	3	3	3	3	3	4
5	5	4	3	4	4		
6	6						
7	7						

Rec

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0		L	L	L	L	L	L
1	U	LU	LU	LU	LU	L	LU
2	U	LU	LU	LU	LU	LU	L
3	U	U	LU	LU	L	L	LU
4	U	LU	LU	LU	LU	LU	L
5	U	U	LU	LU	LU		
6	U						
7	U						

算法实例

	1	2	3	4	5	6	7
s	A	B	C	B	D	A	B
t	B	D	C	A	B	A	

$$D[i,j] = \min \begin{cases} D[i-1,j]+1 \\ D[i,j-1]+1 \\ D[i-1,j-1] + \begin{cases} 0, if\ s[i] = t[j] \\ 1, if\ s[i] \neq t[j] \end{cases} \end{cases}$$

D

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	1	2	3	3	4	5
2	2	1	2	3	4	3	4
3	3	2	2	2	3	4	4
4	4	3	3	3	3	3	4
5	5	4	3	4	4	4	
6	6						
7	7						

Rec

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0		L	L	L	L	L	L
1	U	LU	LU	LU	LU	L	LU
2	U	LU	LU	LU	LU	LU	L
3	U	U	LU	LU	L	L	LU
4	U	LU	LU	LU	LU	LU	L
5	U	U	LU	LU	LU	LU	
6	U						
7	U						

算法实例

	1	2	3	4	5	6	7
s	A	B	C	B	D	A	B
t	B	D	C	A	B	A	

$$D[i,j] = \min \begin{cases} D[i-1,j]+1 \\ D[i,j-1]+1 \\ D[i-1,j-1] + \begin{cases} 0, if\ s[i] = t[j] \\ 1, if\ s[i] \neq t[j] \end{cases} \end{cases}$$

D

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	1	2	3	3	4	5
2	2	1	2	3	4	3	4
3	3	2	2	2	3	4	4
4	4	3	3	3	3	3	4
5	5	4	3	4	4	4	4
6	6						
7	7						

Rec

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0		L	L	L	L	L	L
1	U	LU	LU	LU	LU	L	LU
2	U	LU	LU	LU	LU	LU	L
3	U	U	LU	LU	L	L	LU
4	U	LU	LU	LU	LU	LU	L
5	U	U	LU	LU	LU	LU	LU
6	U						
7	U						

算法实例

	1	2	3	4	5	6	7
s	A	B	C	B	D	A	B
t	B	D	C	A	B	A	

$$D[i,j] = \min \begin{cases} D[i-1,j]+1 \\ D[i,j-1]+1 \\ D[i-1,j-1] + \begin{cases} 0, if\ s[i] = t[j] \\ 1, if\ s[i] \neq t[j] \end{cases} \end{cases}$$

D

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	1	2	3	3	4	5
2	2	1	2	3	4	3	4
3	3	2	2	2	3	4	4
4	4	3	3	3	3	3	4
5	5	4	3	4	4	4	4
6	6	5					
7	7						

Rec

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0		L	L	L	L	L	L
1	U	LU	LU	LU	LU	L	LU
2	U	LU	LU	LU	LU	LU	L
3	U	U	LU	LU	L	L	LU
4	U	LU	LU	LU	LU	LU	L
5	U	U	LU	LU	LU	LU	LU
6	U	U					
7	U						

算法实例

	1	2	3	4	5	6	7
s	A	B	C	B	D	A	B
t	B	D	C	A	B	A	

$$D[i,j] = \min \begin{cases} D[i-1,j]+1 \\ D[i,j-1]+1 \\ D[i-1,j-1] + \begin{cases} 0, if\ s[i] = t[j] \\ 1, if\ s[i] \neq t[j] \end{cases} \end{cases}$$

D

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	1	2	3	3	4	5
2	2	1	2	3	4	3	4
3	3	2	2	2	3	4	4
4	4	3	3	3	3	3	4
5	5	4	3	4	4	4	4
6	6	5	4				
7	7						

Rec

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0		L	L	L	L	L	L
1	U	LU	LU	LU	LU	L	LU
2	U	LU	LU	LU	LU	LU	L
3	U	U	LU	LU	L	L	LU
4	U	LU	LU	LU	LU	LU	L
5	U	U	LU	LU	LU	LU	LU
6	U	U	U				
7	U						

算法实例

	1	2	3	4	5	6	7
s	A	B	C	B	D	A	B
t	B	D	C	A	B	A	

$$D[i,j] = \min \begin{cases} D[i-1,j]+1 \\ D[i,j-1]+1 \\ D[i-1,j-1] + \begin{cases} 0, if\ s[i] = t[j] \\ 1, if\ s[i] \neq t[j] \end{cases} \end{cases}$$

D

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	1	2	3	3	4	5
2	2	1	2	3	4	3	4
3	3	2	2	2	3	4	4
4	4	3	3	3	3	3	4
5	5	4	3	4	4	4	4
6	6	5	4	4			
7	7						

Rec

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0		L	L	L	L	L	L
1	U	LU	LU	LU	LU	L	LU
2	U	LU	LU	LU	LU	LU	L
3	U	U	LU	LU	L	L	LU
4	U	LU	LU	LU	LU	LU	L
5	U	U	LU	LU	LU	LU	LU
6	U	U	U	LU			
7	U						

算法实例

	1	2	3	4	5	6	7
s	A	B	C	B	D	A	B
t	B	D	C	A	B	A	

$$D[i,j] = \min \begin{cases} D[i-1,j]+1 \\ D[i,j-1]+1 \\ D[i-1,j-1] + \begin{cases} 0, if\ s[i] = t[j] \\ 1, if\ s[i] \neq t[j] \end{cases} \end{cases}$$

D

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	1	2	3	3	4	5
2	2	1	2	3	4	3	4
3	3	2	2	2	3	4	4
4	4	3	3	3	3	3	4
5	5	4	3	4	4	4	4
6	6	5	4	4	4		
7	7						

Rec

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0		L	L	L	L	L	L
1	U	LU	LU	LU	LU	L	LU
2	U	LU	LU	LU	LU	LU	L
3	U	U	LU	LU	L	L	LU
4	U	LU	LU	LU	LU	LU	L
5	U	U	LU	LU	LU	LU	LU
6	U	U	U	LU	LU		
7	U						

算法实例

	1	2	3	4	5	6	7
s	A	B	C	B	D	A	B
t	B	D	C	A	B	A	

$$D[i,j] = \min \begin{cases} D[i-1,j]+1 \\ D[i,j-1]+1 \\ D[i-1,j-1] + \begin{cases} 0, if\ s[i] = t[j] \\ 1, if\ s[i] \neq t[j] \end{cases} \end{cases}$$

D

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	1	2	3	3	4	5
2	2	1	2	3	4	3	4
3	3	2	2	2	3	4	4
4	4	3	3	3	3	3	4
5	5	4	3	4	4	4	4
6	6	5	4	4	4	5	
7	7						

Rec

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0		L	L	L	L	L	L
1	U	LU	LU	LU	LU	L	LU
2	U	LU	LU	LU	LU	LU	L
3	U	U	LU	LU	L	L	LU
4	U	LU	LU	LU	LU	LU	L
5	U	U	LU	LU	LU	LU	LU
6	U	U	U	LU	LU	LU	
7	U						

算法实例

	1	2	3	4	5	6	7
s	A	B	C	B	D	A	B
t	B	D	C	A	B	A	

$$D[i,j] = \min \begin{cases} D[i-1,j]+1 \\ D[i,j-1]+1 \\ D[i-1,j-1] + \begin{cases} 0, if\ s[i] = t[j] \\ 1, if\ s[i] \neq t[j] \end{cases} \end{cases}$$

D

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	1	2	3	3	4	5
2	2	1	2	3	4	3	4
3	3	2	2	2	3	4	4
4	4	3	3	3	3	3	4
5	5	4	3	4	4	4	4
6	6	5	4	4	4	5	4
7	7						

Rec

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0		L	L	L	L	L	L
1	U	LU	LU	LU	LU	L	LU
2	U	LU	LU	LU	LU	LU	L
3	U	U	LU	LU	L	L	LU
4	U	LU	LU	LU	LU	LU	L
5	U	U	LU	LU	LU	LU	LU
6	U	U	U	LU	LU	LU	LU
7	U						

算法实例

	1	2	3	4	5	6	7
s	A	B	C	B	D	A	B
t	B	D	C	A	B	A	

$$D[i,j] = \min \begin{cases} D[i-1,j]+1 \\ D[i,j-1]+1 \\ D[i-1,j-1] + \begin{cases} 0, if\ s[i] = t[j] \\ 1, if\ s[i] \neq t[j] \end{cases} \end{cases}$$

D

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	1	2	3	3	4	5
2	2	1	2	3	4	3	4
3	3	2	2	2	3	4	4
4	4	3	3	3	3	3	4
5	5	4	3	4	4	4	4
6	6	5	4	4	4	5	4
7	7	6					

Rec

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0		L	L	L	L	L	L
1	U	LU	LU	LU	LU	L	LU
2	U	LU	LU	LU	LU	LU	L
3	U	U	LU	LU	L	L	LU
4	U	LU	LU	LU	LU	LU	L
5	U	U	LU	LU	LU	LU	LU
6	U	U	U	LU	LU	LU	LU
7	U	LU					

算法实例

	1	2	3	4	5	6	7
s	A	B	C	B	D	A	B
t	B	D	C	A	B	A	

$$D[i,j] = \min \begin{cases} D[i-1,j]+1 \\ D[i,j-1]+1 \\ D[i-1,j-1] + \begin{cases} 0, if\ s[i] = t[j] \\ 1, if\ s[i] \neq t[j] \end{cases} \end{cases}$$

D

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	1	2	3	3	4	5
2	2	1	2	3	4	3	4
3	3	2	2	2	3	4	4
4	4	3	3	3	3	3	4
5	5	4	3	4	4	4	4
6	6	5	4	4	4	5	4
7	7	6	5				

Rec

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0		L	L	L	L	L	L
1	U	LU	LU	LU	LU	L	LU
2	U	LU	LU	LU	LU	LU	L
3	U	U	LU	LU	L	L	LU
4	U	LU	LU	LU	LU	LU	L
5	U	U	LU	LU	LU	LU	LU
6	U	U	U	LU	LU	LU	LU
7	U	LU	U				

算法实例

	1	2	3	4	5	6	7
s	A	B	C	B	D	A	B
t	B	D	C	A	B	A	

$$D[i,j] = \min \begin{cases} D[i-1,j]+1 \\ D[i,j-1]+1 \\ D[i-1,j-1] + \begin{cases} 0, if\ s[i] = t[j] \\ 1, if\ s[i] \neq t[j] \end{cases} \end{cases}$$

D

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	1	2	3	3	4	5
2	2	1	2	3	4	3	4
3	3	2	2	2	3	4	4
4	4	3	3	3	3	3	4
5	5	4	3	4	4	4	4
6	6	5	4	4	4	5	4
7	7	6	5	5			

Rec

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0		L	L	L	L	L	L
1	U	LU	LU	LU	LU	L	LU
2	U	LU	LU	LU	LU	LU	L
3	U	U	LU	LU	L	L	LU
4	U	LU	LU	LU	LU	LU	L
5	U	U	LU	LU	LU	LU	LU
6	U	U	U	LU	LU	LU	LU
7	U	LU	U	LU			

算法实例

	1	2	3	4	5	6	7
s	A	B	C	B	D	A	B
t	B	D	C	A	B	A	

$$D[i,j] = \min \begin{cases} D[i-1,j]+1 \\ D[i,j-1]+1 \\ D[i-1,j-1] + \begin{cases} 0, if\ s[i] = t[j] \\ 1, if\ s[i] \neq t[j] \end{cases} \end{cases}$$

D

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	1	2	3	3	4	5
2	2	1	2	3	4	3	4
3	3	2	2	2	3	4	4
4	4	3	3	3	3	3	4
5	5	4	3	4	4	4	4
6	6	5	4	4	4	5	4
7	7	6	5	5	5		

Rec

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0		L	L	L	L	L	L
1	U	LU	LU	LU	LU	L	LU
2	U	LU	LU	LU	LU	LU	L
3	U	U	LU	LU	L	L	LU
4	U	LU	LU	LU	LU	LU	L
5	U	U	LU	LU	LU	LU	LU
6	U	U	U	LU	LU	LU	LU
7	U	LU	U	LU	LU		

算法实例

	1	2	3	4	5	6	7
s	A	B	C	B	D	A	B
t	B	D	C	A	B	A	

$$D[i,j] = \min \begin{cases} D[i-1,j]+1 \\ D[i,j-1]+1 \\ D[i-1,j-1] + \begin{cases} 0, if\ s[i] = t[j] \\ 1, if\ s[i] \neq t[j] \end{cases} \end{cases}$$

D

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	1	2	3	3	4	5
2	2	1	2	3	4	3	4
3	3	2	2	2	3	4	4
4	4	3	3	3	3	3	4
5	5	4	3	4	4	4	4
6	6	5	4	4	4	5	4
7	7	6	5	5	5	4	

Rec

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0		L	L	L	L	L	L
1	U	LU	LU	LU	LU	L	LU
2	U	LU	LU	LU	LU	LU	L
3	U	U	LU	LU	L	L	LU
4	U	LU	LU	LU	LU	LU	L
5	U	U	LU	LU	LU	LU	LU
6	U	U	U	LU	LU	LU	LU
7	U	LU	U	LU	LU	LU	

算法实例

	1	2	3	4	5	6	7
s	A	B	C	B	D	A	B
t	B	D	C	A	B	A	

$$D[i,j] = \min \begin{cases} D[i-1,j]+1 \\ D[i,j-1]+1 \\ D[i-1,j-1] + \begin{cases} 0, if\ s[i] = t[j] \\ 1, if\ s[i] \neq t[j] \end{cases} \end{cases}$$

D

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	1	2	3	3	4	5
2	2	1	2	3	4	3	4
3	3	2	2	2	3	4	4
4	4	3	3	3	3	3	4
5	5	4	3	4	4	4	4
6	6	5	4	4	4	5	4
7	7	6	5	5	5	4	5

Rec

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0		L	L	L	L	L	L
1	U	LU	LU	LU	LU	L	LU
2	U	LU	LU	LU	LU	LU	L
3	U	U	LU	LU	L	L	LU
4	U	LU	LU	LU	LU	LU	L
5	U	U	LU	LU	LU	LU	LU
6	U	U	U	LU	LU	LU	LU
7	U	LU	U	LU	LU	LU	L

算法实例

	1	2	3	4	5	6	7
s	A	B	C	B	D	A	B
t	B	D	C	A	B	A	

$$D[i,j] = \min \begin{cases} D[i-1,j]+1 \\ D[i,j-1]+1 \\ D[i-1,j-1] + \begin{cases} 0, if\ s[i] = t[j] \\ 1, if\ s[i] \neq t[j] \end{cases} \end{cases}$$

D

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	1	2	3	3	4	5
2	2	1	2	3	4	3	4
3	3	2	2	2	3	4	4
4	4	3	3	3	3	3	4
5	5	4	3				4
6	6	5	4	4	4	5	4
7	7	6	5	5	5	4	5

最优解

Rec

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0		L	L	L	L	L	L
1	U	LU	LU	LU	LU	L	LU
2	U	LU	LU	LU	LU	LU	L
3	U	U	LU	LU	L	L	LU
4	U	LU	LU	LU	LU	LU	L
5	U	U	LU	LU	LU	LU	LU
6	U	U	U	LU	LU	LU	LU
7	U	LU	U	LU	LU	LU	L

算法实例

	1	2	3	4	5	6	7
s	A	B	C	B	D	A	B
t	B	D	C	A	B	A	

$$D[i,j] = \min \begin{cases} D[i-1,j]+1 \\ D[i,j-1]+1 \\ D[i-1,j-1] + \begin{cases} 0, if\ s[i] = t[j] \\ 1, if\ s[i] \neq t[j] \end{cases} \end{cases}$$

操作：

插入A

Rec

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0		L	L	L	L	L	L
1	U	LU	LU	LU	LU	L	LU
2	U	LU	LU	LU	LU	LU	L
3	U	U	LU	LU	L	L	LU
4	U	LU	LU	LU	LU	LU	L
5	U	U	LU	LU	LU	LU	LU
6	U	U	U	LU	LU	LU	LU
7	U	LU	U	LU	LU	LU	L

算法实例

	1	2	3	4	5	6	7
s	A	B	C	B	D	A	B
t	B	D	C	A	B	A	

$$D[i,j] = \min \begin{cases} D[i-1,j]+1 \\ D[i,j-1]+1 \\ D[i-1,j-1] + \begin{cases} 0, if\ s[i] = t[j] \\ 1, if\ s[i] \neq t[j] \end{cases} \end{cases}$$

操作：

无需操作
插入A

Rec

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0		L	L	L	L	L	L
1	U	LU	LU	LU	LU	L	LU
2	U	LU	LU	LU	LU	LU	L
3	U	U	LU	LU	L	L	LU
4	U	LU	LU	LU	LU	LU	L
5	U	U	LU	LU	LU	LU	LU
6	U	U	U	LU	LU	LU	LU
7	U	LU	U	LU	LU	LU	L

算法实例

	1	2	3	4	5	6	7
s	A	B	C	B	D	A	B
t	B	D	C	A	B	A	

$$D[i,j] = \min \begin{cases} D[i-1,j]+1 \\ D[i,j-1]+1 \\ D[i-1,j-1] + \begin{cases} 0, if\ s[i] = t[j] \\ 1, if\ s[i] \neq t[j] \end{cases} \end{cases}$$

操作：

无需操作
无需操作
插入A

Rec

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0		L	L	L	L	L	L
1	U	LU	LU	LU	LU	L	LU
2	U	LU	LU	LU	LU	LU	L
3	U	U	LU	LU	L	L	LU
4	U	LU	LU	LU	LU	LU	L
5	U	U	LU	LU	LU	LU	LU
6	U	U	U	LU	LU	LU	LU
7	U	LU	U	LU	LU	LU	L

算法实例

	1	2	3	4	5	6	7
s	A	B	C	B	D	A	B
t	B	D	C	A	B	A	

$$D[i,j] = \min \begin{cases} D[i-1,j]+1 \\ D[i,j-1]+1 \\ D[i-1,j-1] + \begin{cases} 0, if\ s[i] = t[j] \\ 1, if\ s[i] \neq t[j] \end{cases} \end{cases}$$

操作：

用C替换D
无需操作
无需操作
插入A

Rec

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0		L	L	L	L	L	L
1	U	LU	LU	LU	LU	L	LU
2	U	LU	LU	LU	LU	LU	L
3	U	U	LU	LU	L	L	LU
4	U	LU	LU	LU	LU	LU	L
5	U	U	LU	LU	LU	LU	LU
6	U	U	U	LU	LU	LU	LU
7	U	LU	U	LU	LU	LU	L

算法实例

	1	2	3	4	5	6	7
s	A	B	C	B	D	A	B
t	B	D	C	A	B	A	

$$D[i,j] = \min \begin{cases} D[i-1,j]+1 \\ D[i,j-1]+1 \\ D[i-1,j-1] + \begin{cases} 0, if\ s[i]=t[j] \\ 1, if\ s[i] \neq t[j] \end{cases} \end{cases}$$

操作：

用D替换B
用C替换D
无需操作
无需操作
插入A

Rec

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0		L	L	L	L	L	L
1	U	LU	LU	LU	LU	L	LU
2	U	LU	LU	LU	LU	LU	L
3	U	U	LU	LU	L	L	LU
4	U	LU	LU	LU	LU	LU	L
5	U	U	LU	LU	LU	LU	LU
6	U	U	U	LU	LU	LU	LU
7	U	LU	U	LU	LU	LU	L

算法实例

	1	2	3	4	5	6	7
s	A	B	C	B	D	A	B
t	B	D	C	A	B	A	

$$D[i,j] = \min \begin{cases} D[i-1,j]+1 \\ D[i,j-1]+1 \\ D[i-1,j-1] + \begin{cases} 0, if\ s[i] = t[j] \\ 1, if\ s[i] \neq t[j] \end{cases} \end{cases}$$

操作：

删除C
用D替换B
用C替换D
无需操作
无需操作
插入A

Rec

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0		L	L	L	L	L	L
1	U	LU	LU	LU	LU	L	LU
2	U	LU	LU	LU	LU	LU	L
3	U	U	LU	LU	L	L	LU
4	U	LU	LU	LU	LU	LU	L
5	U	U	LU	LU	LU	LU	LU
6	U	U	U	LU	LU	LU	LU
7	U	LU	U	LU	LU	LU	L

算法实例

	1	2	3	4	5	6	7
s	A	B	C	B	D	A	B
t	B	D	C	A	B	A	

$$D[i,j] = \min \begin{cases} D[i-1,j]+1 \\ D[i,j-1]+1 \\ D[i-1,j-1] + \begin{cases} 0, if\ s[i] = t[j] \\ 1, if\ s[i] \neq t[j] \end{cases} \end{cases}$$

操作：

无需操作
删除C
用D替换B
用C替换D
无需操作
无需操作
插入A

Rec

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0		L	L	L	L	L	L
1	U	LU	LU	LU	LU	L	LU
2	U	LU	LU	LU	LU	LU	L
3	U	U	LU	LU	L	L	LU
4	U	LU	LU	LU	LU	LU	L
5	U	U	LU	LU	LU	LU	LU
6	U	U	U	LU	LU	LU	LU
7	U	LU	U	LU	LU	LU	L

算法实例

	1	2	3	4	5	6	7
s	A	B	C	B	D	A	B
t	B	D	C	A	B	A	

$$D[i,j] = \min \begin{cases} D[i-1,j]+1 \\ D[i,j-1]+1 \\ D[i-1,j-1] + \begin{cases} 0, if\ s[i] = t[j] \\ 1, if\ s[i] \neq t[j] \end{cases} \end{cases}$$

操作：
删除A
无需操作
删除C
用D替换B
用C替换D
无需操作
无需操作
插入A

Rec

i \ j	0	1	2	3	4	5	6
0		L	L	L	L	L	L
1	U	LU	LU	LU	LU	L	LU
2	U	LU	LU	LU	LU	LU	L
3	U	U	LU	LU	L	L	LU
4	U	LU	LU	LU	LU	LU	L
5	U	U	LU	LU	LU	LU	LU
6	U	U	U	LU	LU	LU	LU
7	U	LU	U	LU	LU	LU	L

动态规划算法：伪代码

- **Minimum-Edit-Distance(s, t)**

输入: 字符串s和t
输出: s和t的最小编辑距离
$n \leftarrow \text{length}(s)$
$m \leftarrow \text{length}(t)$
新建$D[0..n, 0..m], Rec[0..n, 0..m]$两个二维数组
//初始化
for $i \leftarrow 0$ *to* n **do**
  $D[i, 0] \leftarrow i$
  $Rec[i, 0] \leftarrow$ "U"
end
for $j \leftarrow 0$ *to* m **do**
  $D[0, j] \leftarrow j$
  $Rec[0, j] \leftarrow$ "L"
end

初始化

动态规划算法：伪代码

- **Minimum-Edit-Distance(s, t)**

```
//动态规划
for i ← 1 to n do
    for j ← 1 to m do
        c ← 0
        if s_i ≠ t_j then
            c ← 1
        end
        replace ← D[i − 1, j − 1] + c
        delete ← D[i − 1, j] + 1
        insert ← D[i, j − 1] + 1
        if replace = min{delete, insert, replace} then
            D[i, j] ← D[i − 1, j − 1] + c
            Rec[i, j] ← "LU"
        end
        else if insert = min{delete, insert, replace} then
            D[i, j] ← D[i, j − 1] + 1
            Rec[i, j] ← "L"
        end
        else
            D[i, j] ← D[i − 1, j] + 1
            Rec[i, j] ← "U"
        end
    end
end
```

依次计算子问题

动态规划算法：伪代码

- **Minimum-Edit-Distance(s, t)**

```
//动态规划
for i ← 1 to n do
    for j ← 1 to m do
        c ← 0
        if s_i ≠ t_j then
            c ← 1
        end
        replace ← D[i − 1, j − 1] + c
        delete ← D[i − 1, j] + 1
        insert ← D[i, j − 1] + 1
        if replace = min{delete, insert, replace} then
            D[i, j] ← D[i − 1, j − 1] + c
            Rec[i, j] ← "LU"
        end
        else if insert = min{delete, insert, replace} then
            D[i, j] ← D[i, j − 1] + 1
            Rec[i, j] ← "L"
        end
        else
            D[i, j] ← D[i − 1, j] + 1
            Rec[i, j] ← "U"
        end
    end
end
```

替换/无需操作

动态规划算法：伪代码

- **Minimum-Edit-Distance(s, t)**

```
//动态规划
for i ← 1 to n do
    for j ← 1 to m do
        c ← 0
        if s_i ≠ t_j then
            c ← 1
        end
        replace ← D[i − 1, j − 1] + c
        delete ← D[i − 1, j] + 1
        insert ← D[i, j − 1] + 1
        if replace = min{delete, insert, replace} then
            D[i, j] ← D[i − 1, j − 1] + c
            Rec[i, j] ← "LU"
        end
        else if insert = min{delete, insert, replace} then
            D[i, j] ← D[i, j − 1] + 1
            Rec[i, j] ← "L"
        end
        else
            D[i, j] ← D[i − 1, j] + 1
            Rec[i, j] ← "U"
        end
    end
end
```

采用替换操作

动态规划算法：伪代码

- **Minimum-Edit-Distance(s, t)**

```
//动态规划
for i ← 1 to n do
    for j ← 1 to m do
        c ← 0
        if s_i ≠ t_j then
            c ← 1
        end
        replace ← D[i − 1, j − 1] + c
        delete ← D[i − 1, j] + 1
        insert ← D[i, j − 1] + 1
        if replace = min{delete, insert, replace} then
            D[i, j] ← D[i − 1, j − 1] + c
            Rec[i, j] ← "LU"
        end
        else if insert = min{delete, insert, replace} then
            D[i, j] ← D[i, j − 1] + 1
            Rec[i, j] ← "L"
        end
        else
            D[i, j] ← D[i − 1, j] + 1
            Rec[i, j] ← "U"
        end
    end
end
```

记录编辑距离和操作

动态规划算法：伪代码

- **Minimum-Edit-Distance(s, t)**

```
//动态规划
for i ← 1 to n do
    for j ← 1 to m do
        c ← 0
        if s_i ≠ t_j then
            c ← 1
        end
        replace ← D[i − 1, j − 1] + c
        delete ← D[i − 1, j] + 1
        insert ← D[i, j − 1] + 1
        if replace = min{delete, insert, replace} then
            D[i, j] ← D[i − 1, j − 1] + c
            Rec[i, j] ← "LU"
        end
        else if insert = min{delete, insert, replace} then
            D[i, j] ← D[i, j − 1] + 1
            Rec[i, j] ← "L"
        end
        else
            D[i, j] ← D[i − 1, j] + 1
            Rec[i, j] ← "U"
        end
    end
end
```

采取插入操作

动态规划算法：伪代码

- **Minimum-Edit-Distance(s, t)**

```
//动态规划
for i ← 1 to n do
    for j ← 1 to m do
        c ← 0
        if s_i ≠ t_j then
            c ← 1
        end
        replace ← D[i − 1, j − 1] + c
        delete ← D[i − 1, j] + 1
        insert ← D[i, j − 1] + 1
        if replace = min{delete, insert, replace} then
            D[i, j] ← D[i − 1, j − 1] + c
            Rec[i, j] ← "LU"
        end
        else if insert = min{delete, insert, replace} then
            D[i, j] ← D[i, j − 1] + 1
            Rec[i, j] ← "L"
        end
        else
            D[i, j] ← D[i − 1, j] + 1
            Rec[i, j] ← "U"
        end
    end
end
```

采取删除操作

最优方案追踪：伪代码

- **Print-MED(Rec, s, t, i, j)**

```
输入: 矩阵Rec, 字符串s,t, 位置索引i和j
输出: 操作序列
if i = 0 and j = 0 then
    return NULL
end
if Rec[i, j] = "LU" then
    Print-MED(Rec, s, t, i − 1, j − 1)
    if s_i = t_j then
        print "无需操作"
    end
    else
        print "用t_j替换s_i"
    end
end
else if Rec[i, j] = "U" then
    Print-MED(Rec, s, t, i − 1, j)
    print "删除s_i"
end
else
    Print-MED(Rec, s, t, i, j − 1)
    print "插入t_j"
end
```

采取替换操作

最优方案追踪：伪代码

- **Print-MED(Rec, s, t, i, j)**

```
输入: 矩阵Rec, 字符串s,t, 位置索引i和j
输出: 操作序列
if i = 0 and j = 0 then
  | return NULL
end
if Rec[i, j] = "LU" then
  | Print-MED(Rec, s, t, i − 1, j − 1)
  | if s_i = t_j then
  |   | print "无需操作"
  | end
  | else
  |   | print "用t_j替换s_i"
  | end
end
else if Rec[i, j] = "U" then
  | Print-MED(Rec, s, t, i − 1, j)
  | print "删除s_i"
end
else
  | Print-MED(Rec, s, t, i, j − 1)
  | print "插入t_j"
end
```

递归输出子问题方案

最优方案追踪：伪代码

- **Print-MED(Rec, s, t, i, j)**

```
输入: 矩阵Rec, 字符串s,t, 位置索引i和j
输出: 操作序列
if i = 0 and j = 0 then
  | return NULL
end
if Rec[i,j] = "LU" then
  | Print-MED(Rec, s, t, i − 1, j − 1)
  | if s_i = t_j then
  |   | print "无需操作"
  | end
  | else
  |   | print "用t_j替换s_i"
  | end
end
else if Rec[i,j] = "U" then
  | Print-MED(Rec, s, t, i − 1, j)
  | print "删除s_i"
end
else
  | Print-MED(Rec, s, t, i, j − 1)
  | print "插入t_j"
end
```

替换/无操作

最优方案追踪：伪代码

- **Print-MED(Rec, s, t, i, j)**

```
输入: 矩阵Rec, 字符串s,t, 位置索引i和j
输出: 操作序列
if i = 0 and j = 0 then
  | return NULL
end
if Rec[i,j] = "LU" then
  | Print-MED(Rec, s, t, i − 1, j − 1)
  | if s_i = t_j then
  |   | print "无需操作"
  | end
  | else
  |   | print "用t_j替换s_i"
  | end
end
else if Rec[i,j] = "U" then
  | Print-MED(Rec, s, t, i − 1, j)
  | print "删除s_i"
end
else
  | Print-MED(Rec, s, t, i, j − 1)
  | print "插入t_j"
end
```

采取删除操作

最优方案追踪：伪代码

- **Print-MED(Rec, s, t, i, j)**

```
输入: 矩阵Rec, 字符串s,t, 位置索引i和j
输出: 操作序列
if i = 0 and j = 0 then
  | return NULL
end
if Rec[i,j] = "LU" then
  | Print-MED(Rec, s, t, i − 1, j − 1)
  | if s_i = t_j then
  |   | print "无需操作"
  | end
  | else
  |   | print "用t_j替换s_i"
  | end
end
else if Rec[i,j] = "U" then
  | Print-MED(Rec, s, t, i − 1, j)
  | print "删除s_i"
end
else
  | Print-MED(Rec, s, t, i, j − 1)
  | print "插入t_j"
end
```

采取插入操作

时间复杂度分析

```
//动态规划
for i ← 1 to n do
    for j ← 1 to m do
        c ← 0
        if s_i ≠ t_j then
            c ← 1
        end
        replace ← D[i − 1, j − 1] + c
        delete ← D[i − 1, j] + 1
        insert ← D[i, j − 1] + 1
        if replace = min{delete, insert, replace} then
            D[i, j] ← D[i − 1, j − 1] + c
            Rec[i, j] ← "LU"
        end
        else if insert = min{delete, insert, replace} then
            D[i, j] ← D[i, j − 1] + 1
            Rec[i, j] ← "L"
        end
        else
            D[i, j] ← D[i − 1, j] + 1
            Rec[i, j] ← "U"
        end
    end
end
```

$O(m)$

$O(mn)$

时间复杂度：$O(mn)$

小结

最长公共子序列

如果$s_i \neq t_j$

s	A	B	C	B	D	A	B
	t	B	D	C	A	B	A

如果$s_i = t_j$

s	A	B	C	B	D	A	B
		t	B	D	C	A	B

$$C[i,j] = \begin{cases} \max\{C[i-1,j], C[i,j-1]\}, & x_i \neq y_j \\ C[i-1,j-1]+1 & , x_i = y_j \end{cases}$$

最小编辑距离

删除

s	A	B	C	B	D	A	B
t	B	D	C	A	B	A	

插入

s	A	B	C	B	D	A	B	?
t	B	D	C	A	B	A		

替换

s	A	B	C	B	D	A	B	?
t	B	D	C	A	B	A		

$$D[i,j] = \min \begin{cases} D[i-1,j]+1 \\ D[i,j-1]+1 \\ D[i-1,j-1] + \begin{cases} 0, if\ s[i] = t[j] \\ 1, if\ s[i] \neq t[j] \end{cases} \end{cases}$$