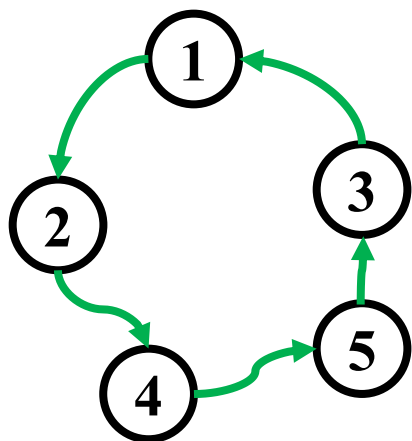


# 图算法篇：有向图中环路的存在性判断

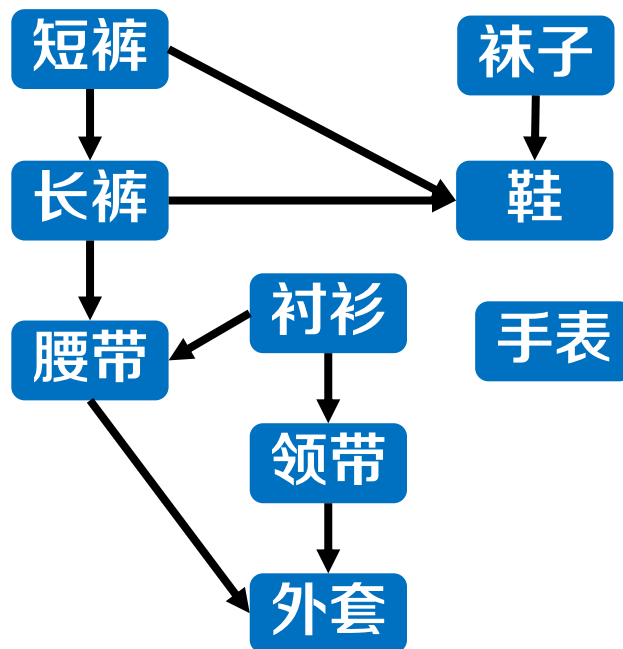
童咏昕

北京航空航天大学  
计算机学院

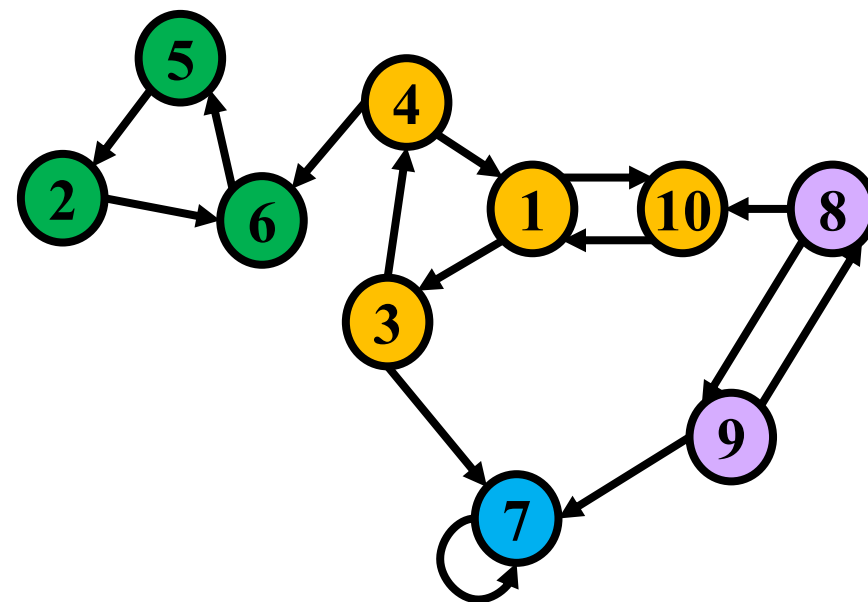
中国大学MOOC北航《算法设计与分析》



环路的存在性判断



拓扑排序



强连通分量

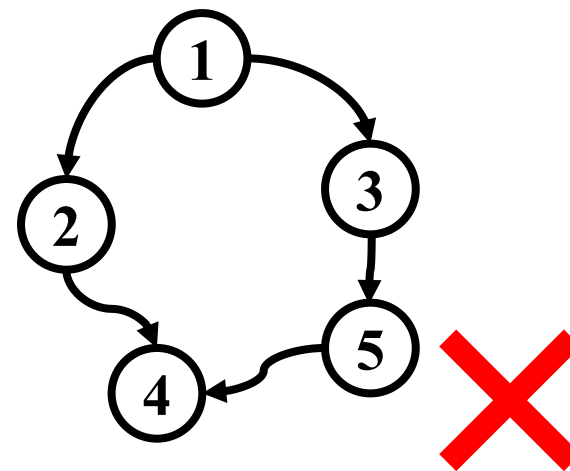
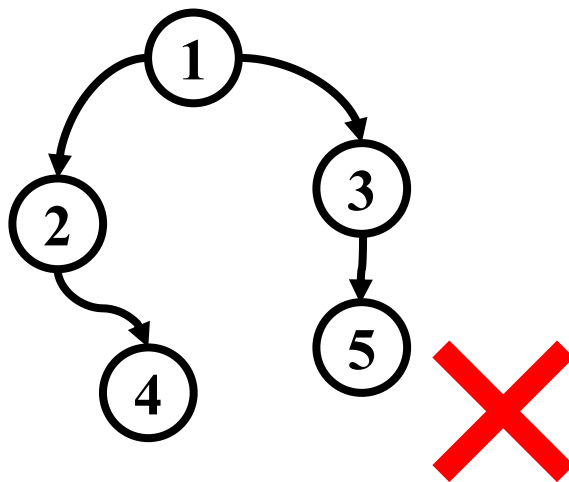
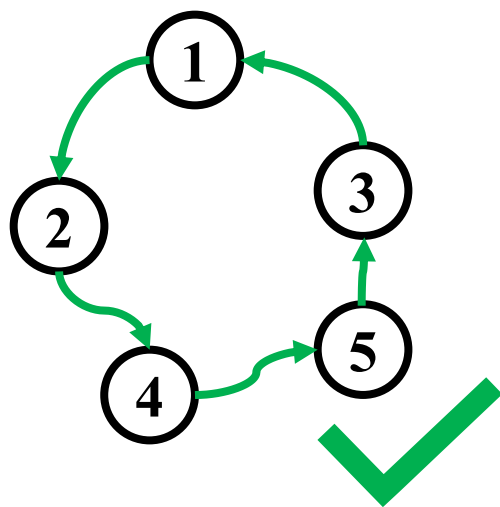
## 有向图中环路的存在性判断

输入

- 有向图  $G = \langle V, E \rangle$ ,  $V$  是顶点集合,  $E$  是边的集合

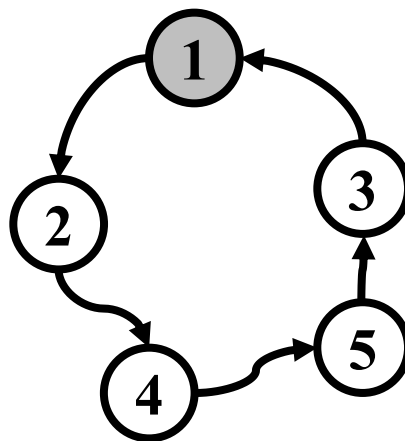
输出

- 图  $G$  是否存在环

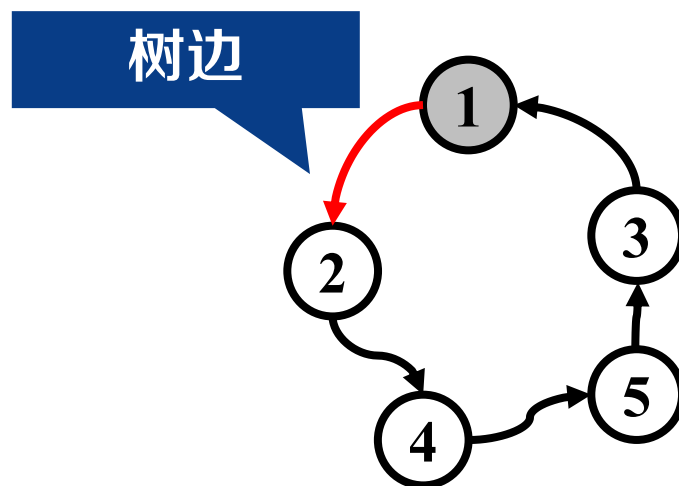


问题：深度优先搜索边的性质能否帮助解决问题？

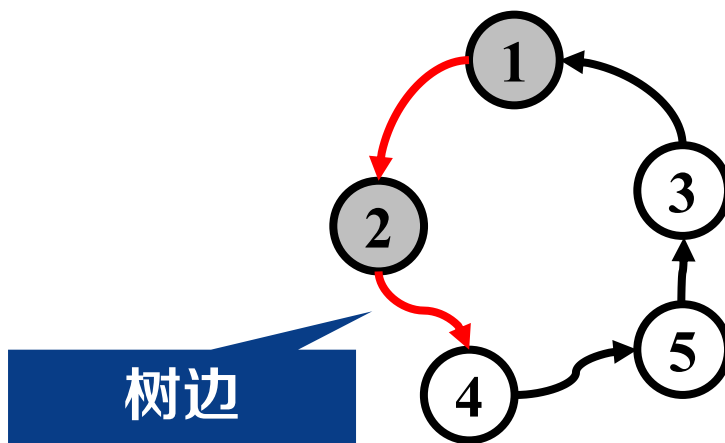
- 观察环路上深度优先搜索时边的种类
  - 树边：在深度优先树中的边
  - 前向边：不在深度优先树中，从祖先指向后代的边
  - 后向边：从后代指向祖先的边
  - 横向边：顶点不具有祖先后代关系的边



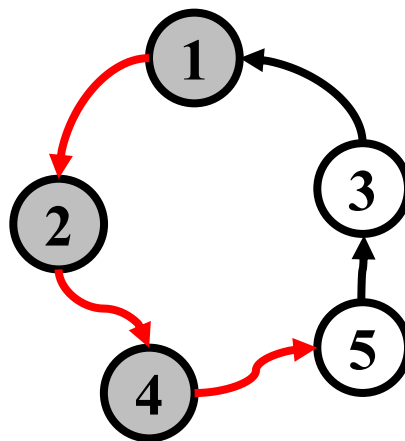
- 观察环路上深度优先搜索时边的种类
  - 树边：在深度优先树中的边
  - 前向边：不在深度优先树中，从祖先指向后代的边
  - 后向边：从后代指向祖先的边
  - 横向边：顶点不具有祖先后代关系的边



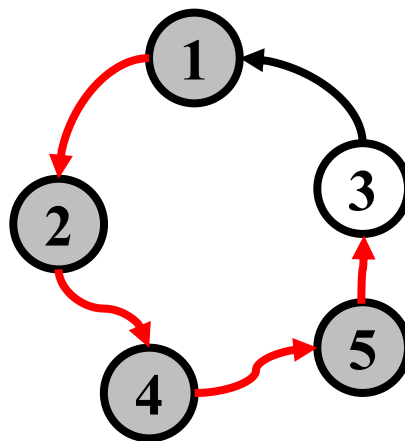
- 观察环路上深度优先搜索时边的种类
  - 树边：在深度优先树中的边
  - 前向边：不在深度优先树中，从祖先指向后代的边
  - 后向边：从后代指向祖先的边
  - 横向边：顶点不具有祖先后代关系的边



- 观察环路上深度优先搜索时边的种类
  - 树边：在深度优先树中的边
  - 前向边：不在深度优先树中，从祖先指向后代的边
  - 后向边：从后代指向祖先的边
  - 横向边：顶点不具有祖先后代关系的边

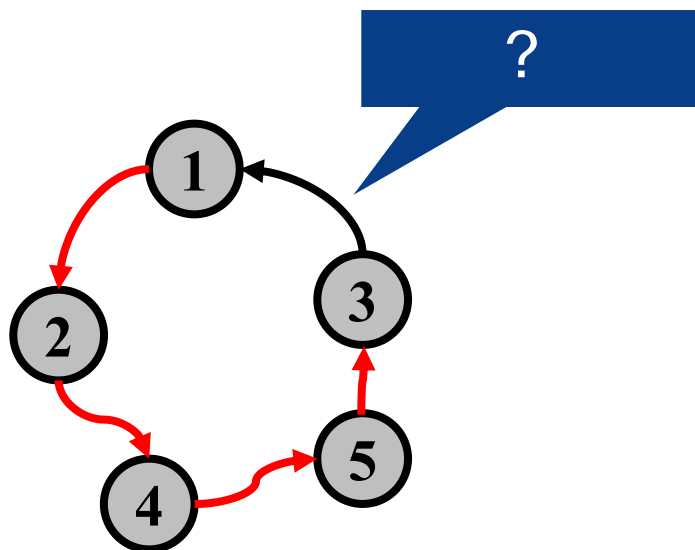


- 观察环路上深度优先搜索时边的种类
  - 树边：在深度优先树中的边
  - 前向边：不在深度优先树中，从祖先指向后代的边
  - 后向边：从后代指向祖先的边
  - 横向边：顶点不具有祖先后代关系的边

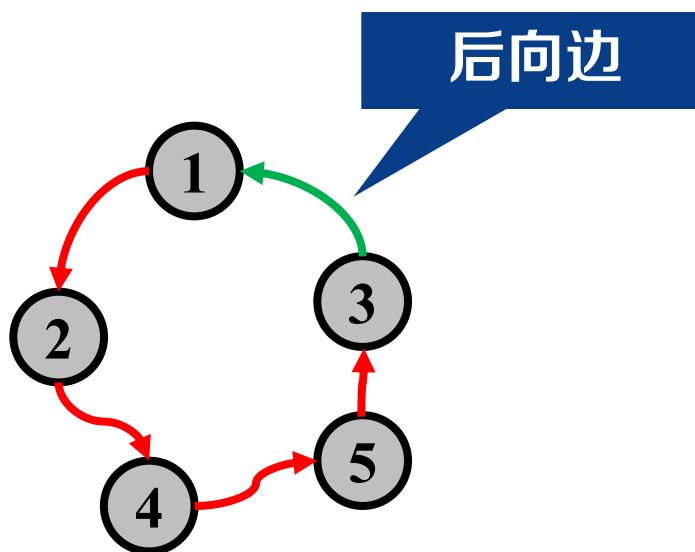




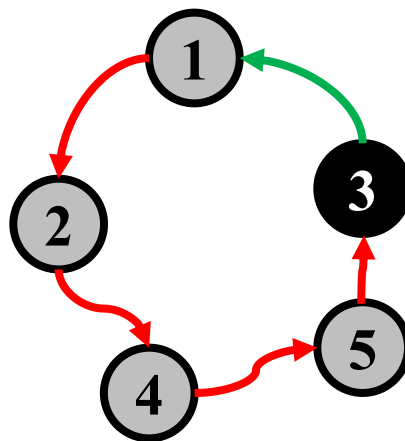
- 观察环路上深度优先搜索时边的种类
  - 树边：在深度优先树中的边
  - 前向边：不在深度优先树中，从祖先指向后代的边
  - 后向边：从后代指向祖先的边
  - 横向边：顶点不具有祖先后代关系的边



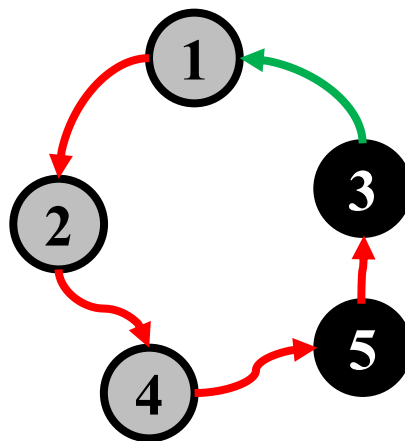
- 观察环路上深度优先搜索时边的种类
  - 树边：在深度优先树中的边
  - 前向边：不在深度优先树中，从祖先指向后代的边
  - 后向边：从后代指向祖先的边
  - 横向边：顶点不具有祖先后代关系的边



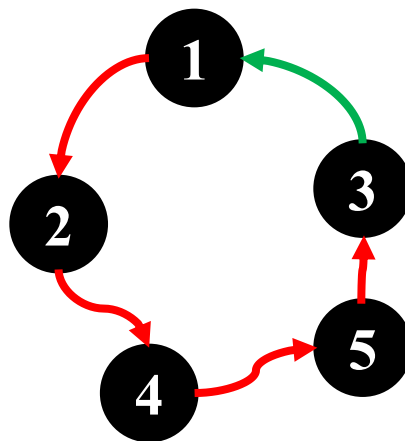
- 观察环路上深度优先搜索时边的种类
  - 树边：在深度优先树中的边
  - 前向边：不在深度优先树中，从祖先指向后代的边
  - 后向边：从后代指向祖先的边
  - 横向边：顶点不具有祖先后代关系的边



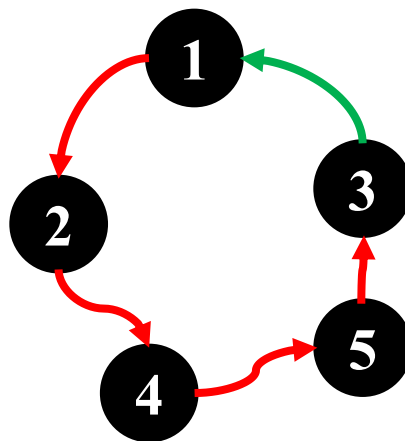
- 观察环路上深度优先搜索时边的种类
  - 树边：在深度优先树中的边
  - 前向边：不在深度优先树中，从祖先指向后代的边
  - 后向边：从后代指向祖先的边
  - 横向边：顶点不具有祖先后代关系的边



- 观察环路上深度优先搜索时边的种类
  - 树边：在深度优先树中的边
  - 前向边：不在深度优先树中，从祖先指向后代的边
  - 后向边：从后代指向祖先的边
  - 横向边：顶点不具有祖先后代关系的边



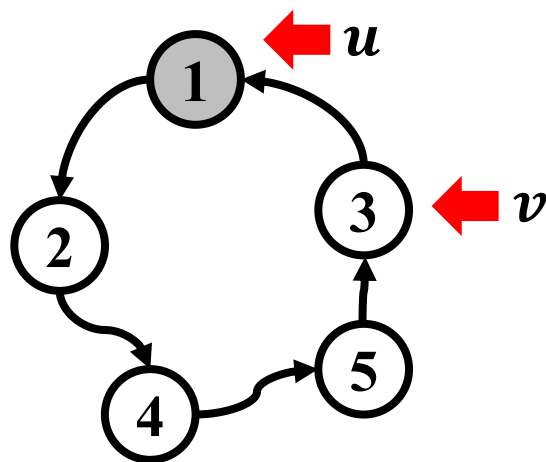
- 观察环路上深度优先搜索时边的种类
  - 树边：在深度优先树中的边
  - 前向边：不在深度优先树中，从祖先指向后代的边
  - 后向边：从后代指向祖先的边
  - 横向边：顶点不具有祖先后代关系的边
- 猜想：有向图存在环路 $\Leftrightarrow$ 搜索时出现后向边



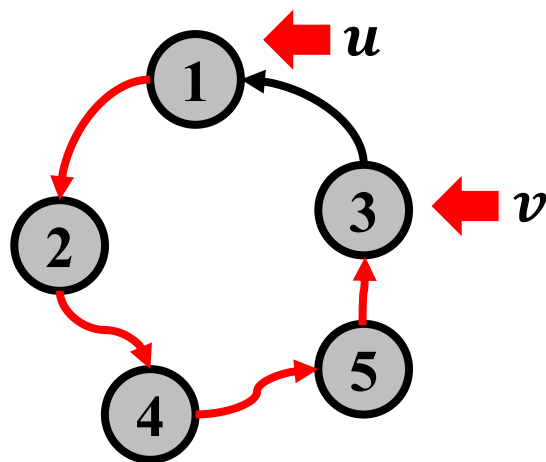
# 猜想证明



- 猜想：有向图存在环路 $\Leftrightarrow$ 搜索时出现后向边
- 证明：有向图存在环路 $\Rightarrow$ 搜索时出现后向边
  - 不妨设环路上被搜索的第一个点为 $u$ ， $v$ 是在环路上指向 $u$ 的点

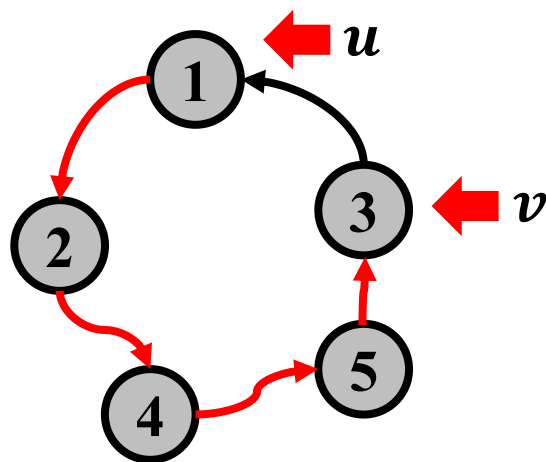


- 猜想：有向图存在环路 $\Leftrightarrow$ 搜索时出现后向边
- 证明：有向图存在环路 $\Rightarrow$ 搜索时出现后向边
  - 不妨设环路上被搜索的第一个点为 $u$ ， $v$ 是在环路上指向 $u$ 的点
  - $u$ 可达 $v$ ，深度优先搜索可以搜索到 $v$

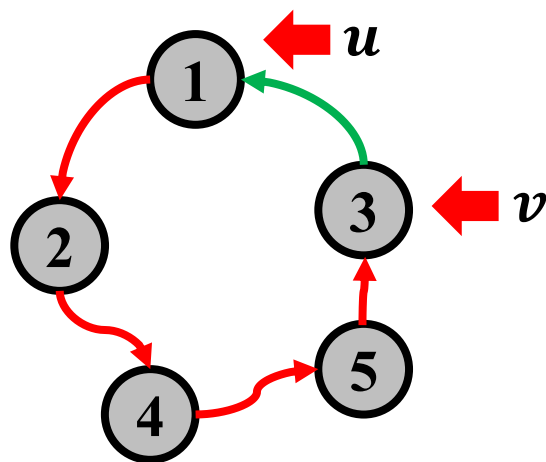




- 猜想：有向图存在环路 $\Leftrightarrow$ 搜索时出现后向边
- 证明：有向图存在环路 $\Rightarrow$ 搜索时出现后向边
  - 不妨设环路上被搜索的第一个点为 $u$ ， $v$ 是在环路上指向 $u$ 的点
  - $u$ 可达 $v$ ，深度优先搜索可以搜索到 $v$
  - 搜索 $v$ 时，由于 $v$ 指向 $u$ ，必能再次发现顶点 $u$



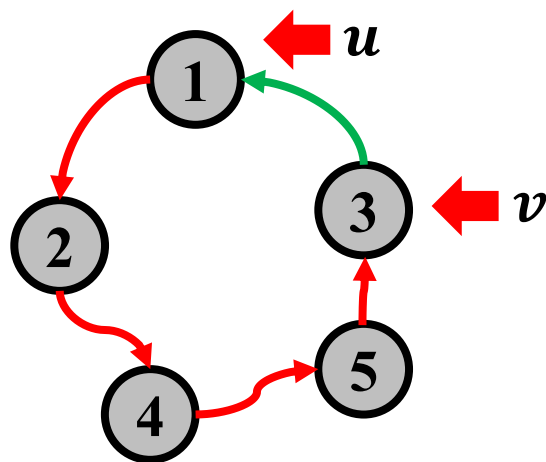
- 猜想：有向图存在环路 $\Leftrightarrow$ 搜索时出现后向边
- 证明：有向图存在环路 $\Rightarrow$ 搜索时出现后向边
  - 不妨设环路上被搜索的第一个点为 $u$ ， $v$ 是在环路上指向 $u$ 的点
  - $u$ 可达 $v$ ，深度优先搜索可以搜索到 $v$
  - 搜索 $v$ 时，由于 $v$ 指向 $u$ ，必能再次发现顶点 $u$
  - 从后代搜索祖先，出现后向边



# 猜想证明



- 猜想：有向图存在环路 $\Leftrightarrow$ 搜索时出现后向边
- 证明：有向图存在环路 $\Leftarrow$ 搜索时出现后向边
  - 深度优先树中祖先可达后代
  - 后向边从后代指向祖先
  - 后代和祖先之间存在环路



- DFS-Judge-Cycle( $G$ )

输入: 图 $G$

输出: 是否存在环路

新建数组  $color[1..V], pred[1..V]$

//初始化

for  $v \in V$  do

$pred[v] \leftarrow NULL$

$color[v] \leftarrow WHITE$

end

for  $v \in V$  do

    if  $color[v] = WHITE$  then

        if  $DFS\text{-}Visit\text{-}Judge\text{-}Cycle(G, v) = TRUE$  then

            return  $TRUE$

        end

    end

end

return  $FALSE$

发现环则返回True

- DFS-Visit-Judge-Cycle( $G, v$ )

输入: 图 $G$ , 顶点 $v$

输出: 顶点 $v$ 是否在某环路中

$color[v] \leftarrow GRAY$

for  $w \in G.Adj[v]$  do

    if  $color[w] = GRAY$  then

        return  $TRUE$

    end

    if  $color[w] = WHITE$  then

$pred[w] \leftarrow v$

        if  $DFS-Visit-Judge-Cycle(G, w) = TRUE$  then

            return  $TRUE$

        end

    end

end

$color[v] \leftarrow BLACK$

return  $FALSE$

搜索到灰色点  
(发现后向边)

- DFS-Visit-Judge-Cycle( $G, v$ )

输入: 图 $G$ , 顶点 $v$

输出: 顶点 $v$ 是否在某环路中

$color[v] \leftarrow GRAY$

for  $w \in G.Adj[v]$  do

    if  $color[w] = GRAY$  then

        return  $TRUE$

    end

    if  $color[w] = WHITE$  then

$pred[w] \leftarrow v$

        if  $DFS-Visit-Judge-Cycle(G, w) = TRUE$  then

            return  $TRUE$

        end

    end

end

$color[v] \leftarrow BLACK$

return  $FALSE$

递归发现环

- DFS-Visit-Judge-Cycle( $G, v$ )

输入: 图 $G$ , 顶点 $v$

输出: 顶点 $v$ 是否在某环路中

$color[v] \leftarrow GRAY$

for  $w \in G.Adj[v]$  do

    if  $color[w] = GRAY$  then

        return  $TRUE$

    end

    if  $color[w] = WHITE$  then

$pred[w] \leftarrow v$

        if  $DFS-Visit-Judge-Cycle(G, w) = TRUE$  then

            return  $TRUE$

        end

    end

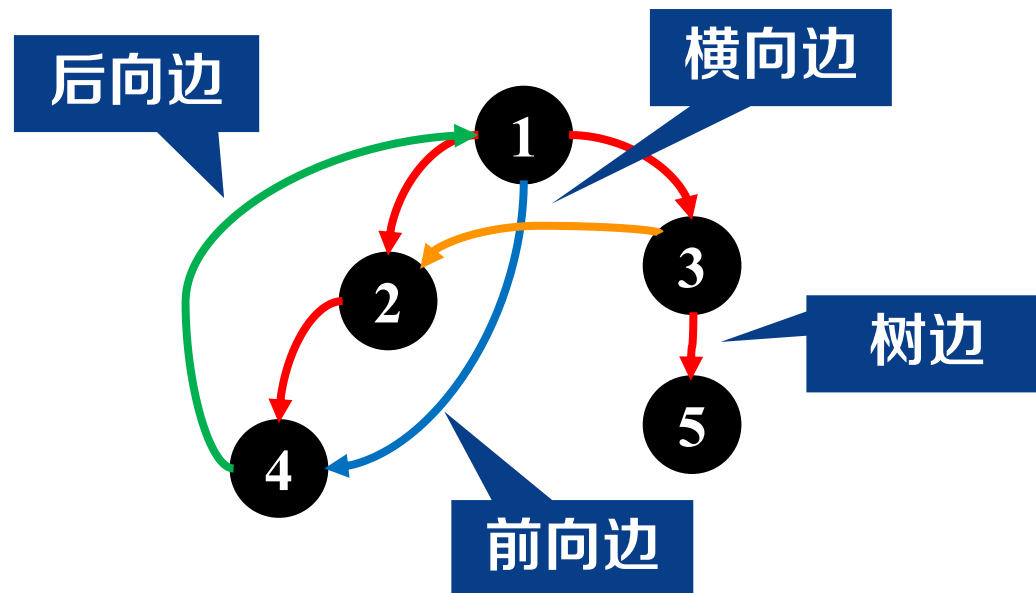
end

$color[v] \leftarrow BLACK$

return  $FALSE$

时间复杂度:  $O(|V| + |E|)$

- 有向图深度优先树中边的分类



- 树边和后向边的综合利用，使深度优先搜索可判断环的存在性

