

分而治之篇：归并排序

童咏昕

北京航空航天大学
计算机学院

中国大学MOOC北航《算法设计与分析》

- 2008年北京奥运会

- 中国举重健儿们刻苦训练、顽强拼搏、勇破纪录
- 北京航空航天大学为举重项目提供了支持与保障



龙清泉 男子举重56公斤级冠军



北航体育馆承办奥运举重项目

- 杠铃增重问题

- 每位参赛运动员向组委会提交**排好序**的三次试举重量

125	130	132
-----	-----	-----



123	127	129
-----	-----	-----



117	121	126
-----	-----	-----

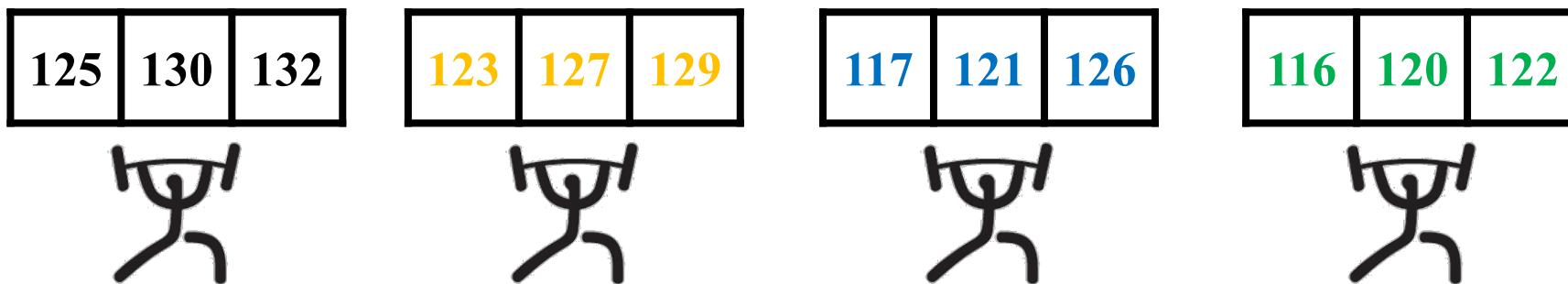


116	120	122
-----	-----	-----

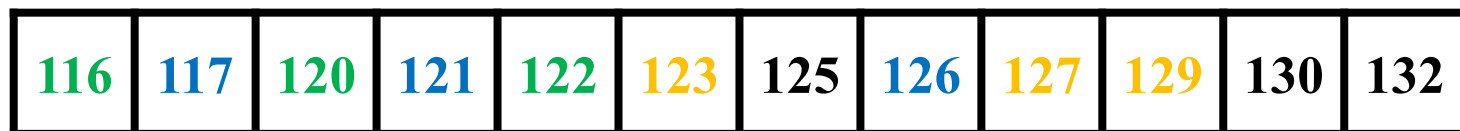


- 杠铃增重问题

- 每位参赛运动员向组委会提交**排好序**的三次试举重量
- 为便于杠铃拆卸，组委会需对**所有**试举重量**递增排序**

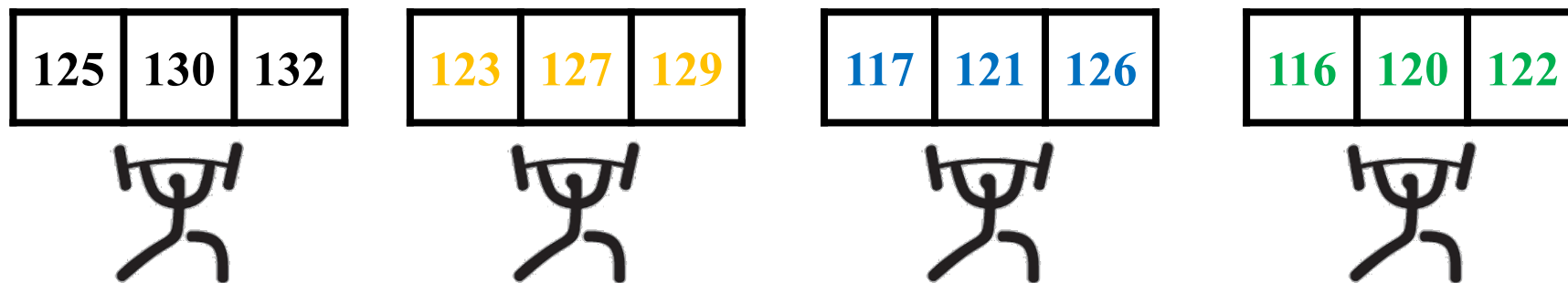


杠铃增重顺序:



- 杠铃增重问题

- 每位参赛运动员向组委会提交**排好序**的三次试举重量
- 为便于杠铃拆卸，组委会需对**所有**试举重量**递增排序**

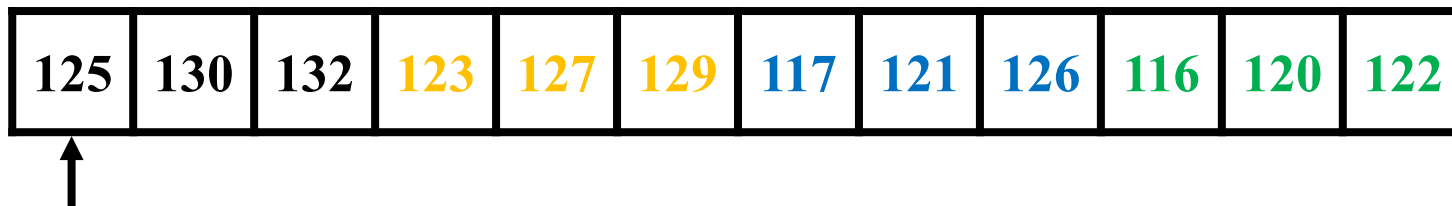


杠铃增重顺序:

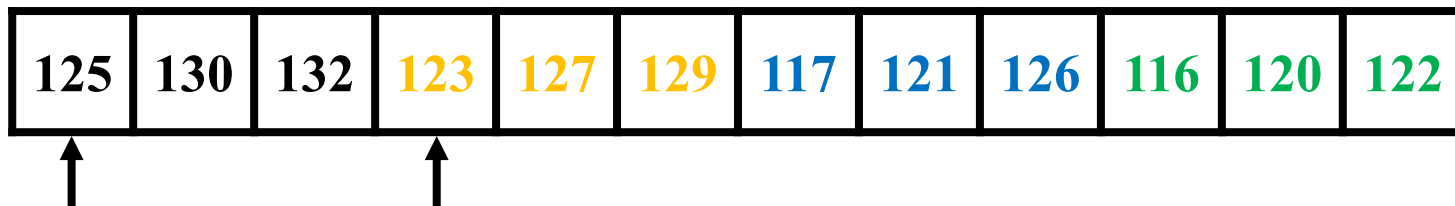
116	117	120	121	122	123	125	126	127	129	130	132
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

问题：组委会如何根据试举重量安排杠铃增重顺序？

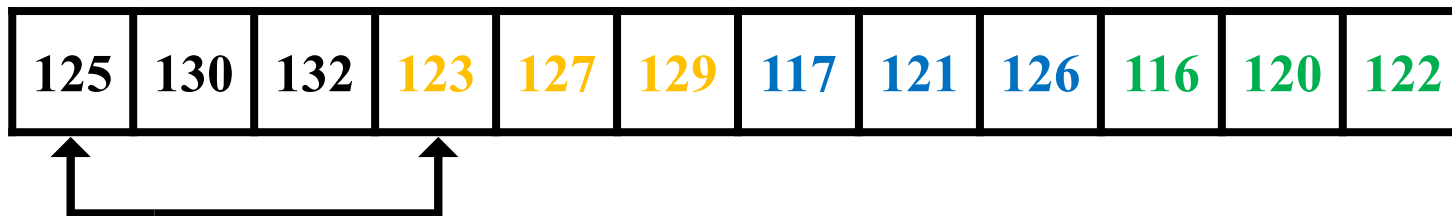
- 杠铃增重问题
 - 选择排序
 - 从待排序元素中迭代选出最小值并排序



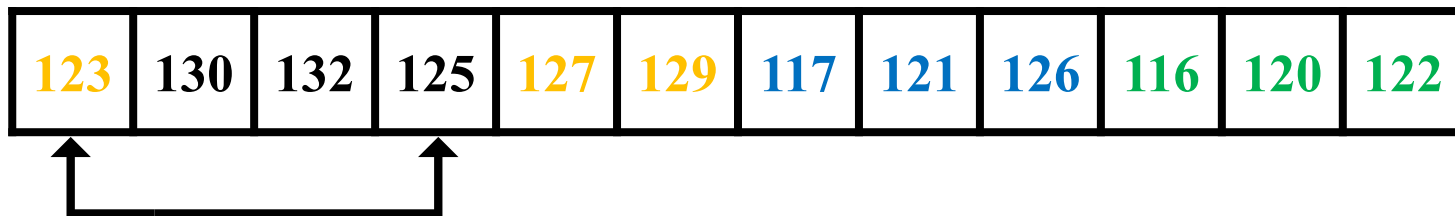
- 杠铃增重问题
 - 选择排序
 - 从待排序元素中迭代选出最小值并排序



- 杠铃增重问题
 - 选择排序
 - 从待排序元素中迭代选出最小值并排序

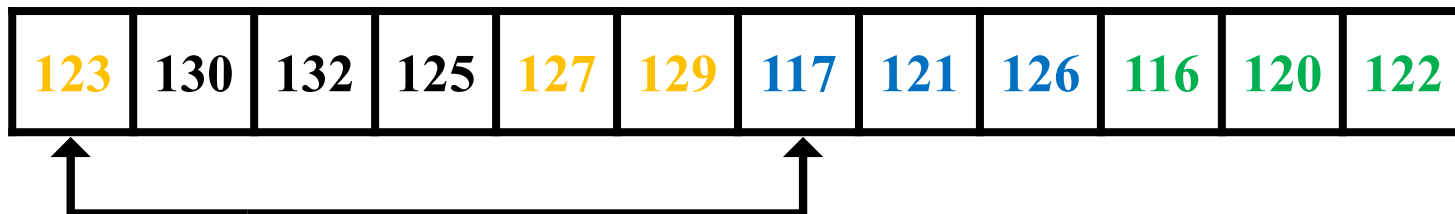


- 杠铃增重问题
 - 选择排序
 - 从待排序元素中迭代选出最小值并排序

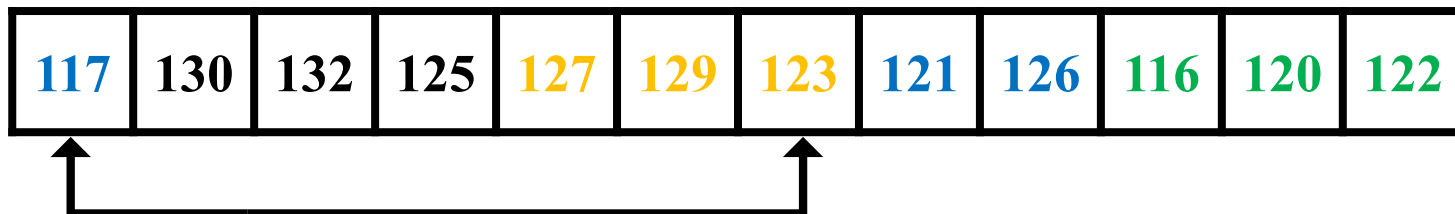


-
- | | | | | | | | | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 123 | 130 | 132 | 125 | 127 | 129 | 117 | 121 | 126 | 116 | 120 | 122 |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|

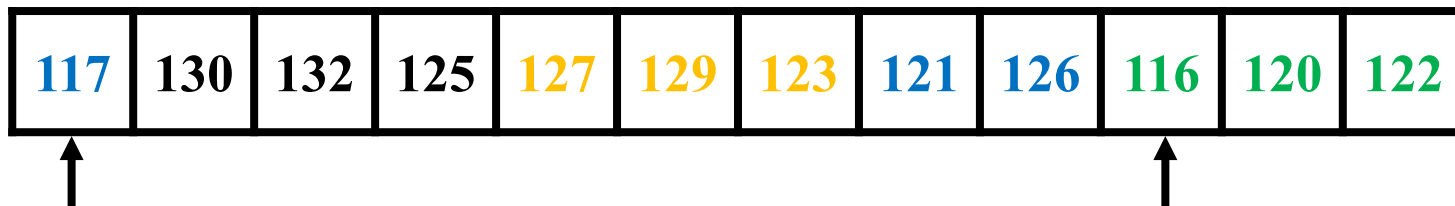
- 杠铃增重问题
 - 选择排序
 - 从待排序元素中迭代选出最小值并排序



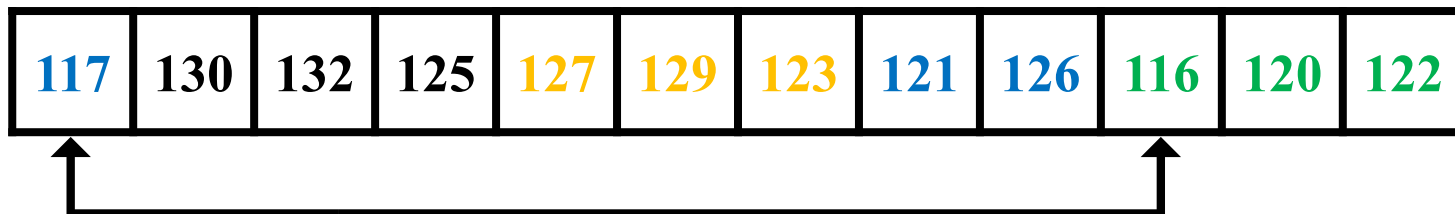
- 杠铃增重问题
 - 选择排序
 - 从待排序元素中迭代选出最小值并排序



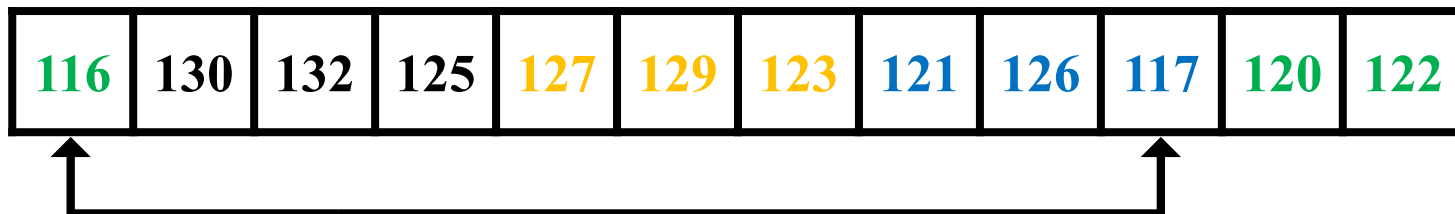
- 杠铃增重问题
 - 选择排序
 - 从待排序元素中迭代选出最小值并排序



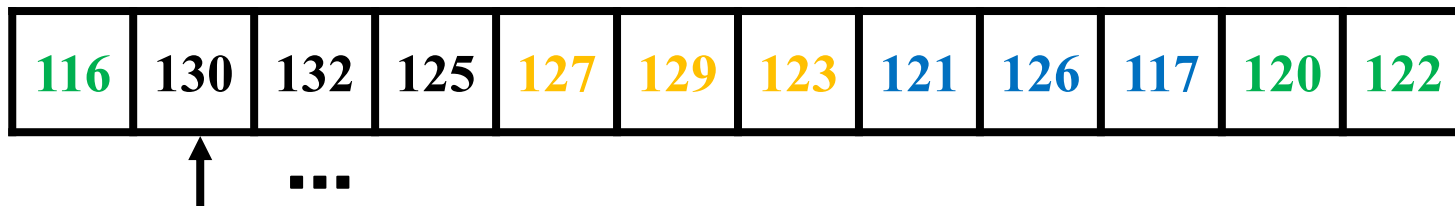
- 杠铃增重问题
 - 选择排序
 - 从待排序元素中迭代选出最小值并排序



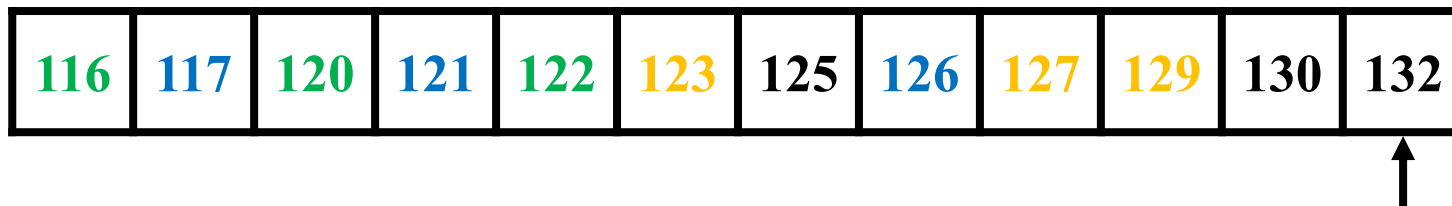
- 杠铃增重问题
 - 选择排序
 - 从待排序元素中迭代选出最小值并排序



- 杠铃增重问题
 - 选择排序
 - 从待排序元素中迭代选出最小值并排序



- 杠铃增重问题
 - 选择排序
 - 从待排序元素中迭代选出最小值并排序



- 杠铃增重问题

- 选择排序

- 从待排序元素中迭代选出最小值并排序
 - 比较次数：66次

116	117	120	121	122	123	125	126	127	129	130	132
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

- 杠铃增重问题

- 选择排序

- 从待排序元素中迭代选出最小值并排序
 - 比较次数：66次

116	117	120	121	122	123	125	126	127	129	130	132
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

- 插入排序

- 依次将每个元素插入到已排序序列之中

125	130	132	123	127	129	117	121	126	116	120	122
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

↑
key

- 杠铃增重问题

- 选择排序

- 从待排序元素中迭代选出最小值并排序
 - 比较次数：66次

116	117	120	121	122	123	125	126	127	129	130	132
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

- 插入排序

- 依次将每个元素插入到已排序序列之中

125	130	132	123	127	129	117	121	126	116	120	122
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

↑
key

- 杠铃增重问题

- 选择排序


- 从待排序元素中迭代选出最小值并排序
 - 比较次数：66次

116	117	120	121	122	123	125	126	127	129	130	132
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

- 插入排序

- 依次将每个元素插入到已排序序列之中

125	130	132	123	127	129	117	121	126	116	120	122
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----



- 杠铃增重问题

- 选择排序


- 从待排序元素中迭代选出最小值并排序
 - 比较次数：66次

116	117	120	121	122	123	125	126	127	129	130	132
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

- 插入排序

- 依次将每个元素插入到已排序序列之中

123	125	130	132	127	129	117	121	126	116	120	122
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----



- 杠铃增重问题

- 选择排序

- 从待排序元素中迭代选出最小值并排序
 - 比较次数：66次

116	117	120	121	122	123	125	126	127	129	130	132
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

- 插入排序

- 依次将每个元素插入到已排序序列之中

123	125	130	132	127	129	117	121	126	116	120	122
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

↑
key

- 杠铃增重问题

- 选择排序


- 从待排序元素中迭代选出最小值并排序
 - 比较次数：66次

116	117	120	121	122	123	125	126	127	129	130	132
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

- 插入排序

- 依次将每个元素插入到已排序序列之中

123	125	130	132	127	129	117	121	126	116	120	122
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----



- 杠铃增重问题

- 选择排序


- 从待排序元素中迭代选出最小值并排序
 - 比较次数：66次

116	117	120	121	122	123	125	126	127	129	130	132
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

- 插入排序

- 依次将每个元素插入到已排序序列之中

123	127	125	130	132	129	117	121	126	116	120	122
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----



- 杠铃增重问题

- 选择排序

- 从待排序元素中迭代选出最小值并排序
 - 比较次数：66次

116	117	120	121	122	123	125	126	127	129	130	132
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

- 插入排序

- 依次将每个元素插入到已排序序列之中

123	127	125	130	132	129	117	121	126	116	120	122
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

↑
key

- 杠铃增重问题

- 选择排序

- 从待排序元素中迭代选出最小值并排序
 - 比较次数：66次

116	117	120	121	122	123	125	126	127	129	130	132
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

- 插入排序

- 依次将每个元素插入到已排序序列之中

123	127	125	130	132	129	117	121	126	116	120	122
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

↑
key

...

- 杠铃增重问题

- 选择排序

- 从待排序元素中迭代选出最小值并排序
 - 比较次数：66次

116	117	120	121	122	123	125	126	127	129	130	132
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

- 插入排序

- 依次将每个元素插入到已排序序列之中

116	117	120	121	122	123	125	126	127	129	130	132
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

↑
key

- 杠铃增重问题

- 选择排序

- 从待排序元素中迭代选出最小值并排序
 - 比较次数：66次

116	117	120	121	122	123	125	126	127	129	130	132
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

- 插入排序

- 依次将每个元素插入到已排序序列之中
 - 比较次数：55次

116	117	120	121	122	123	125	126	127	129	130	132
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

- 杠铃增重问题

- 选择排序

- 从待排序元素中迭代选出最小值并排序
 - 比较次数：66次

116	117	120	121	122	123	125	126	127	129	130	132
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

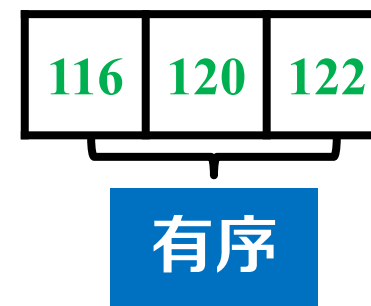
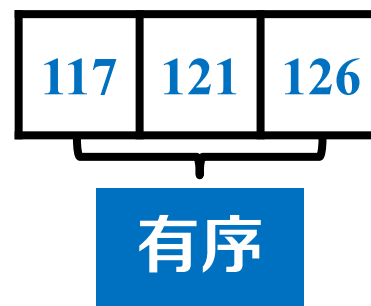
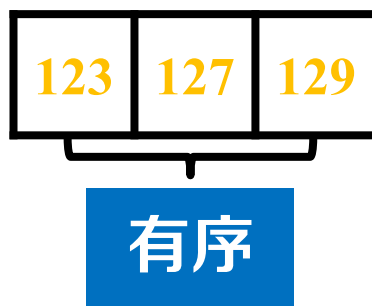
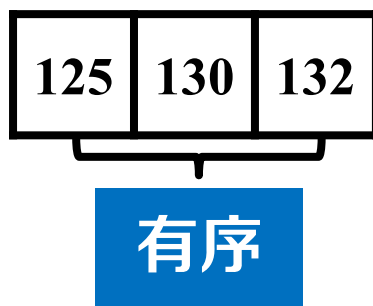
- 插入排序

- 依次将每个元素插入到已排序序列之中
 - 比较次数：55次

116	117	120	121	122	123	125	126	127	129	130	132
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

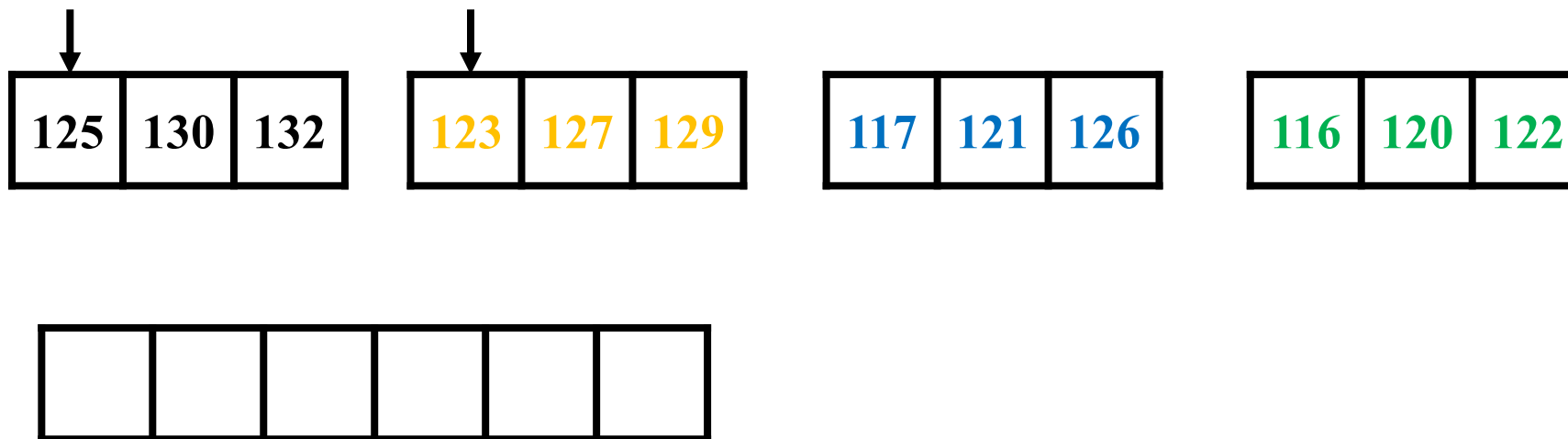
问题：是否还有更高效的算法？

- 杠铃增重问题
 - 问题特点：局部有序



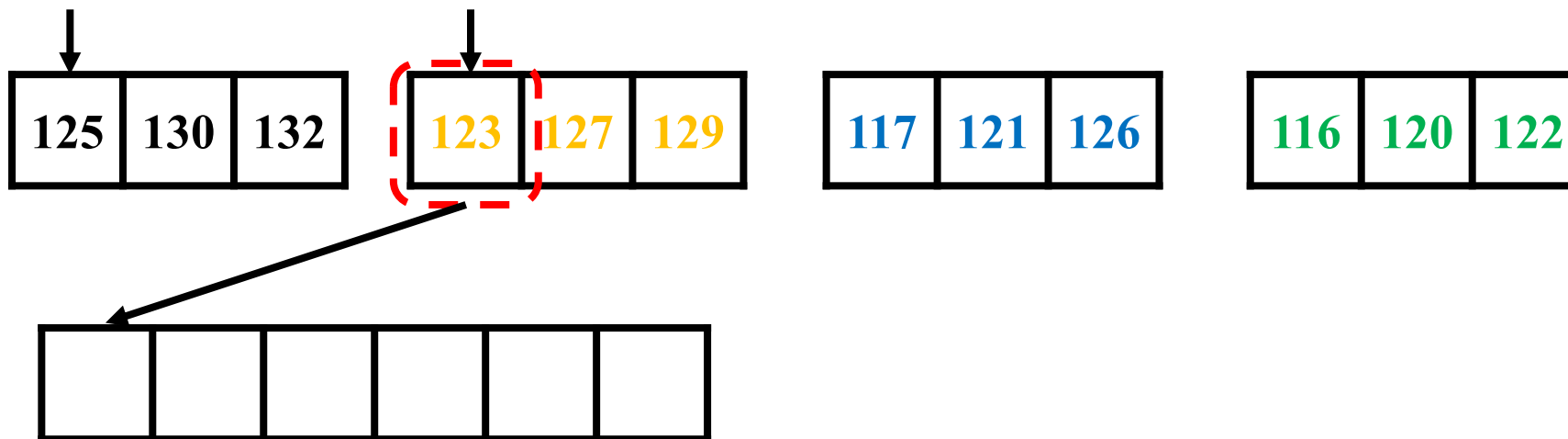
- 杠铃增重问题

- 问题特点：局部有序
- 快速合并：比较两有序数组当前最小元素，将较小者逐一合入新数组



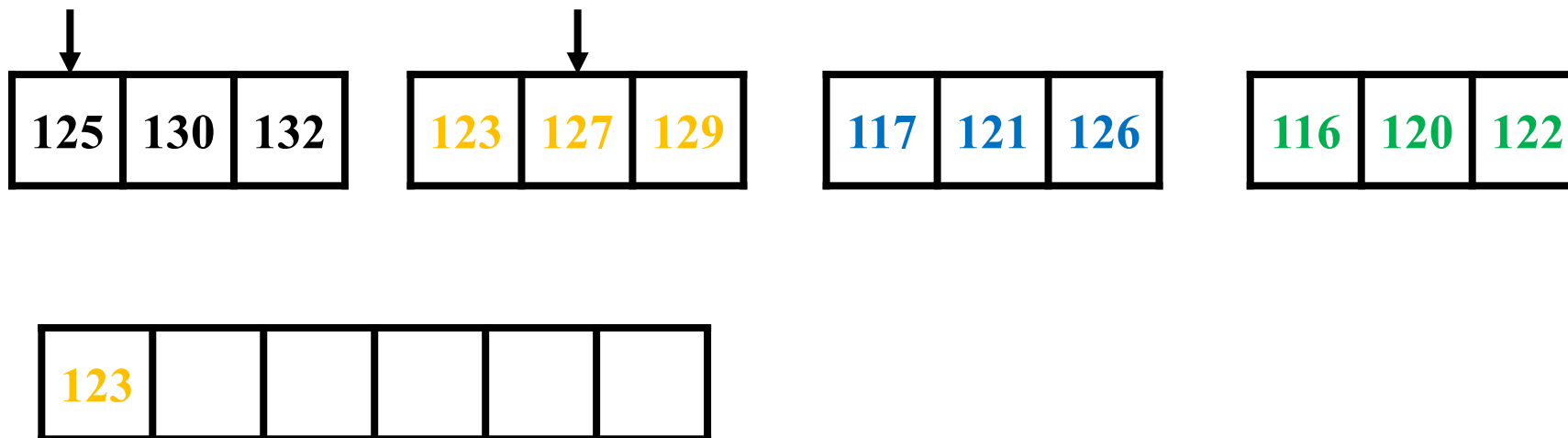
- 杠铃增重问题

- 问题特点：局部有序
- 快速合并：比较两有序数组当前最小元素，将较小者逐一合入新数组



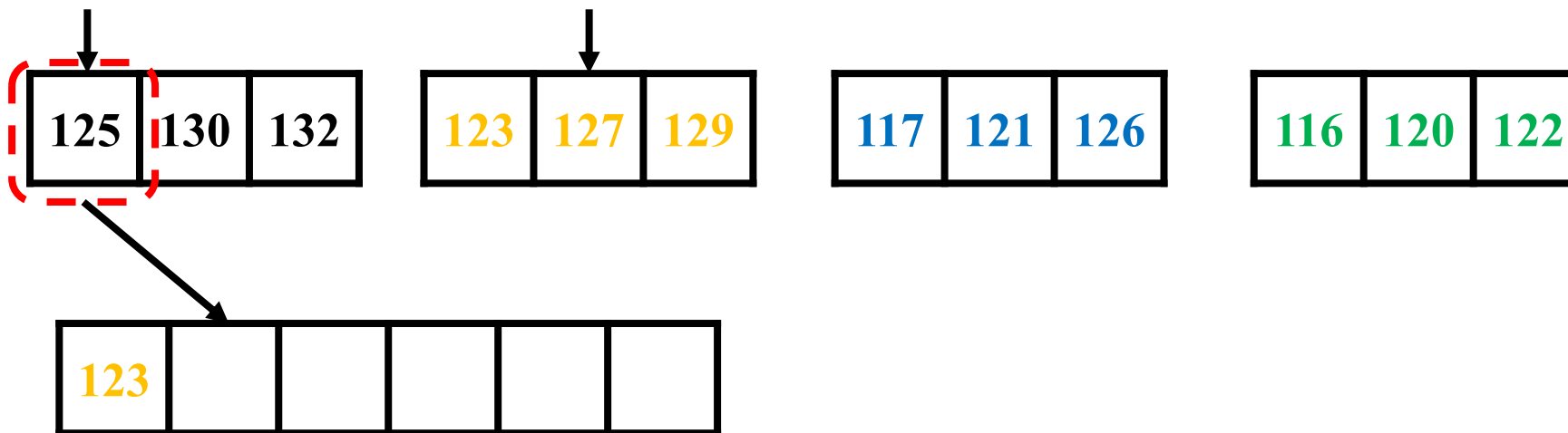
- 杠铃增重问题

- 问题特点：局部有序
- 快速合并：比较两有序数组当前最小元素，将较小者逐一合入新数组



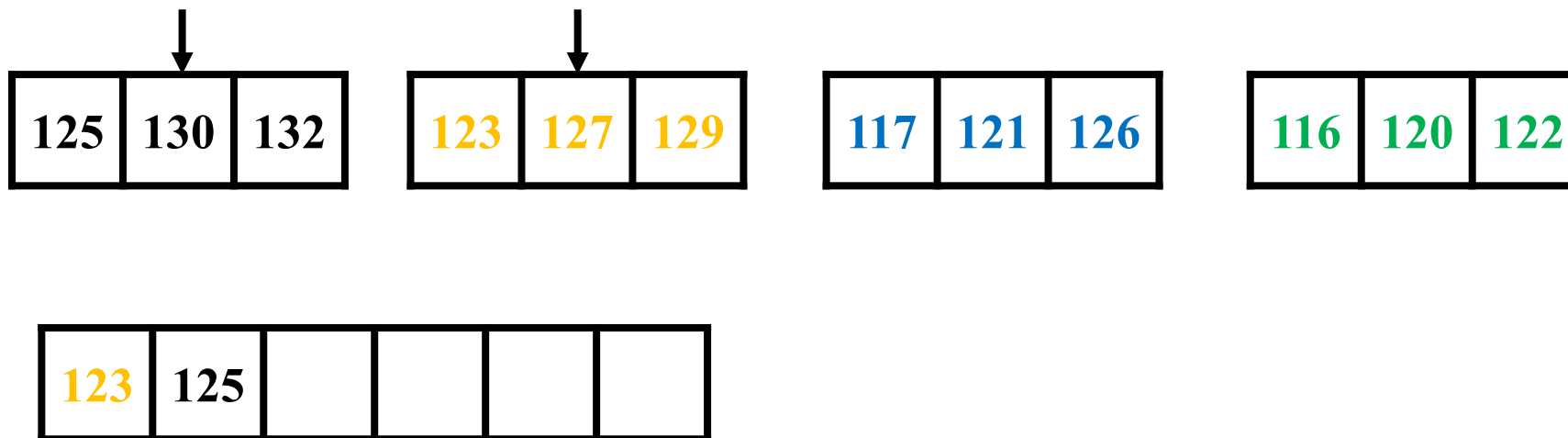
- 杠铃增重问题

- 问题特点：局部有序
- 快速合并：比较两有序数组当前最小元素，将较小者逐一合入新数组



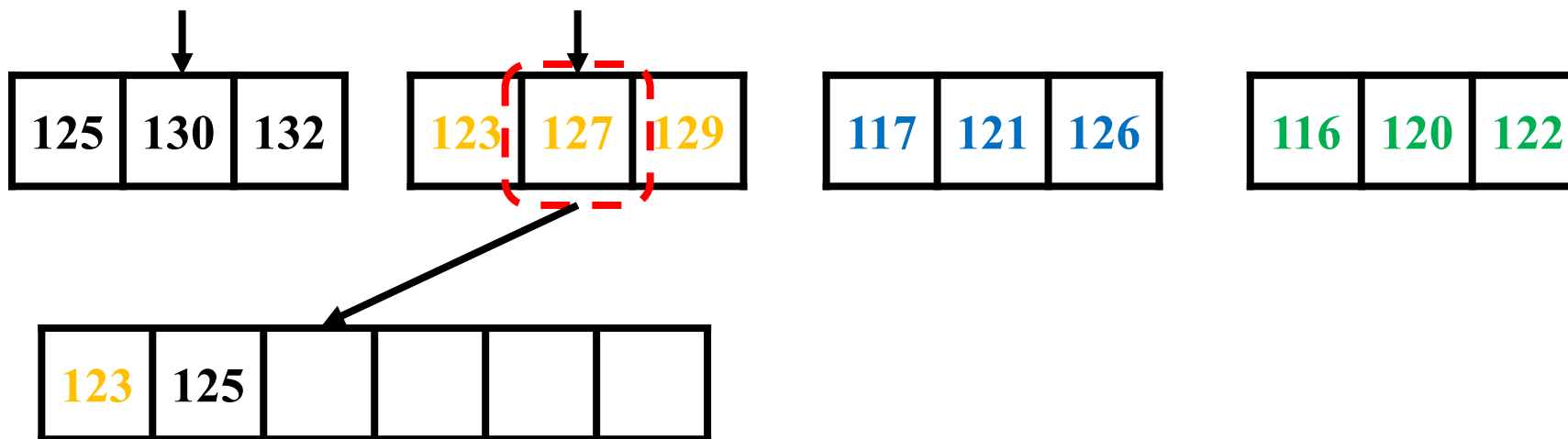
- 杠铃增重问题

- 问题特点：局部有序
- 快速合并：比较两有序数组当前最小元素，将较小者逐一合入新数组



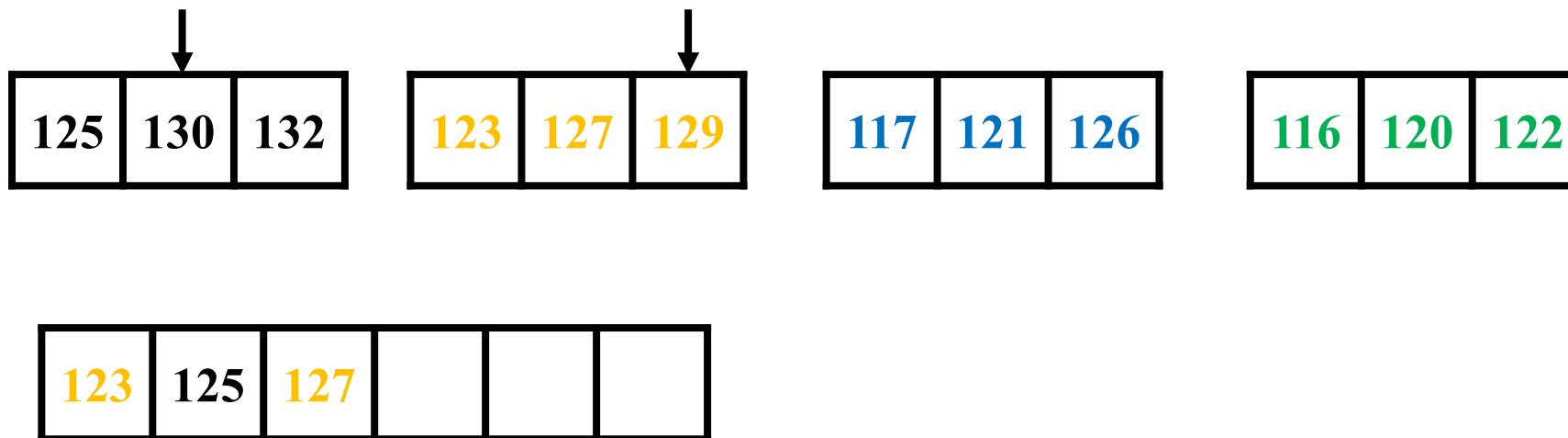
- 杠铃增重问题

- 问题特点：局部有序
- 快速合并：比较两有序数组当前最小元素，将较小者逐一合入新数组



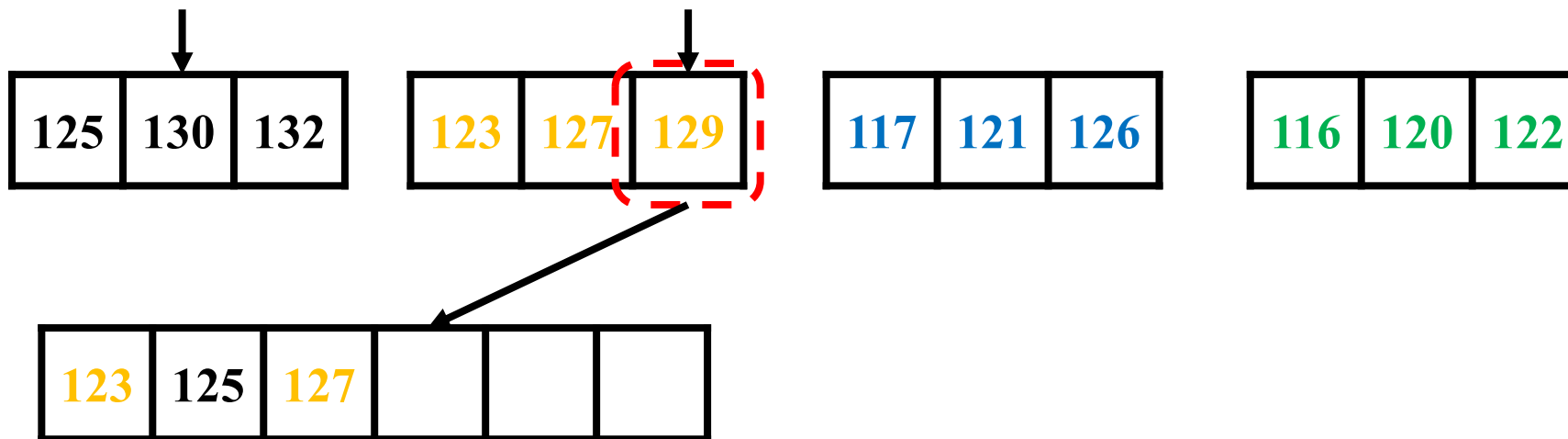
- 杠铃增重问题

- 问题特点：局部有序
- 快速合并：比较两有序数组当前最小元素，将较小者逐一合入新数组



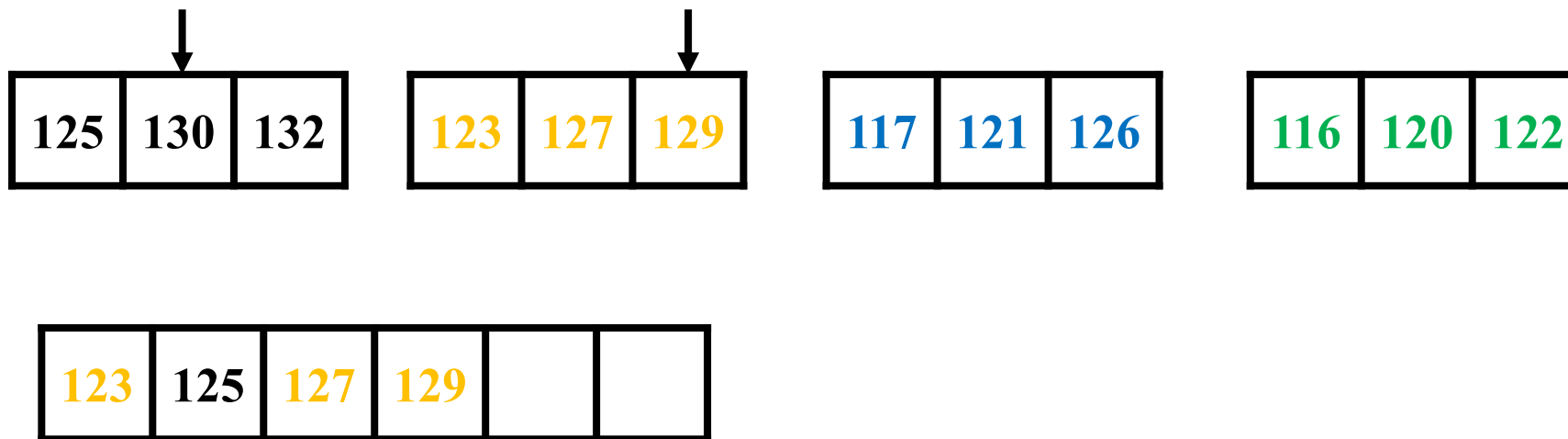
- 杠铃增重问题

- 问题特点：局部有序
- 快速合并：比较两有序数组当前最小元素，将较小者逐一合入新数组



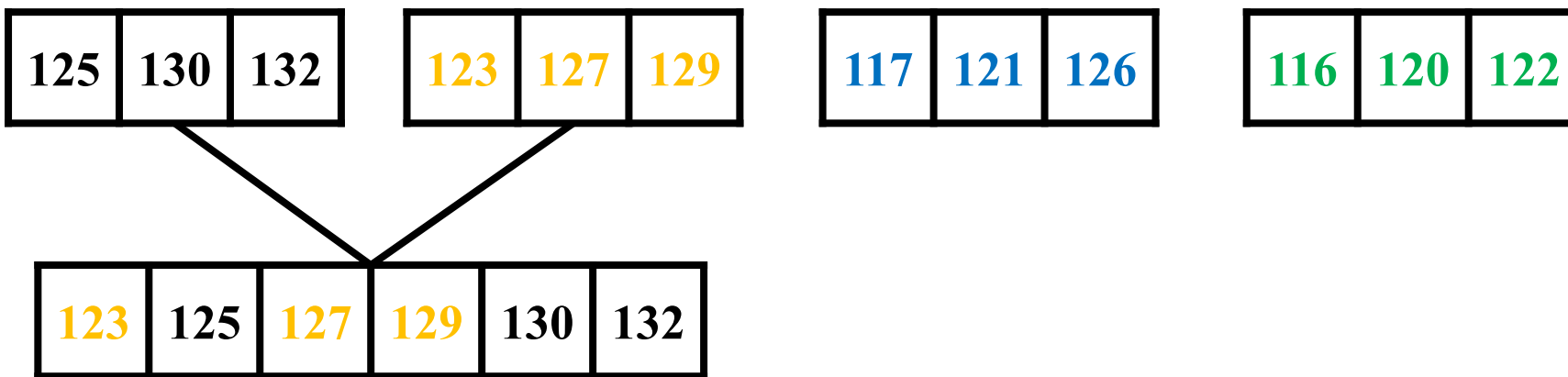
- 杠铃增重问题

- 问题特点：局部有序
- 快速合并：比较两有序数组当前最小元素，将较小者逐一合入新数组



● 杠铃增重问题

- **问题特点：局部有序**
- **快速合并：比较两有序数组当前最小元素，将较小者逐一合入新数组**



- 杠铃增重问题
 - 问题特点：局部有序
 - 快速合并：比较两有序数组当前最小元素，将较小者逐一合入新数组
 - 后续策略：
 - 逐一合并

- 杠铃增重问题

- 问题特点：局部有序
- 快速合并：比较两有序数组当前最小元素，将较小者逐一合入新数组
- 后续策略：
 - 逐一合并

125	130	132
-----	-----	-----

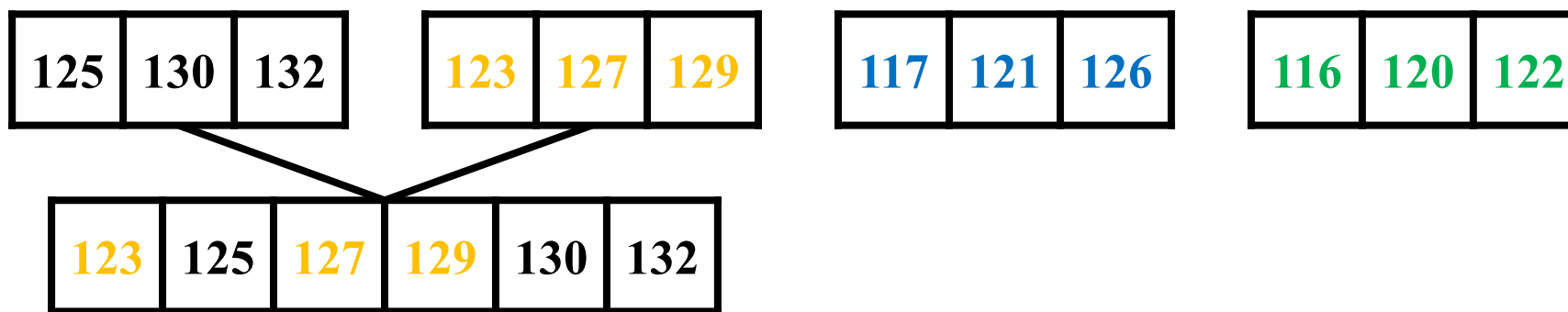
123	127	129
-----	-----	-----

117	121	126
-----	-----	-----

116	120	122
-----	-----	-----

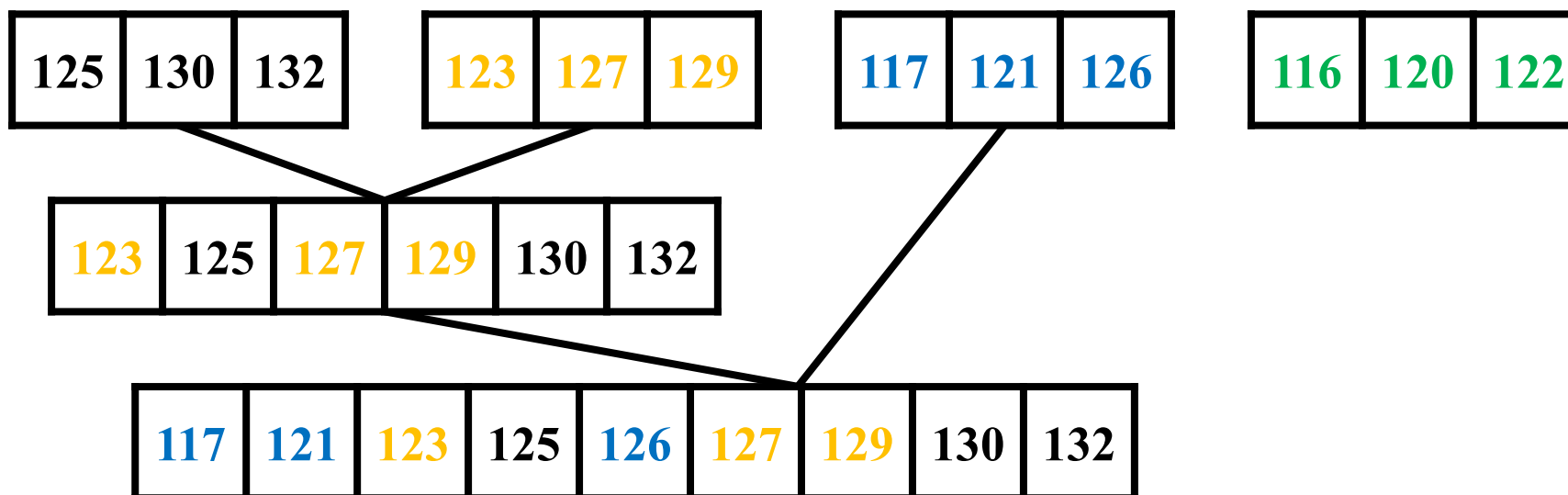
- 杠铃增重问题

- 问题特点：局部有序
- 快速合并：比较两有序数组当前最小元素，将较小者逐一合入新数组
- 后续策略：
 - 逐一合并



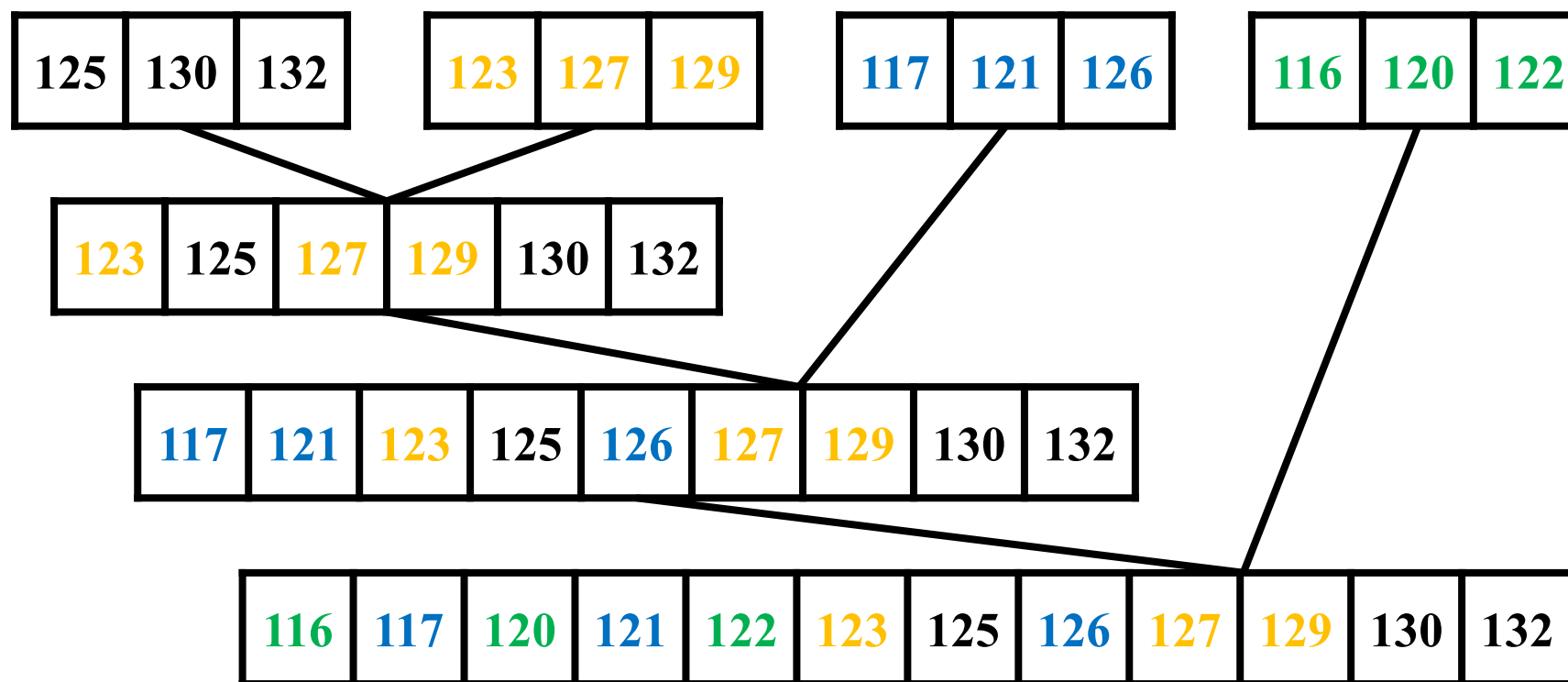
- 杠铃增重问题

- 问题特点：局部有序
- 快速合并：比较两有序数组当前最小元素，将较小者逐一合入新数组
- 后续策略：
 - 逐一合并



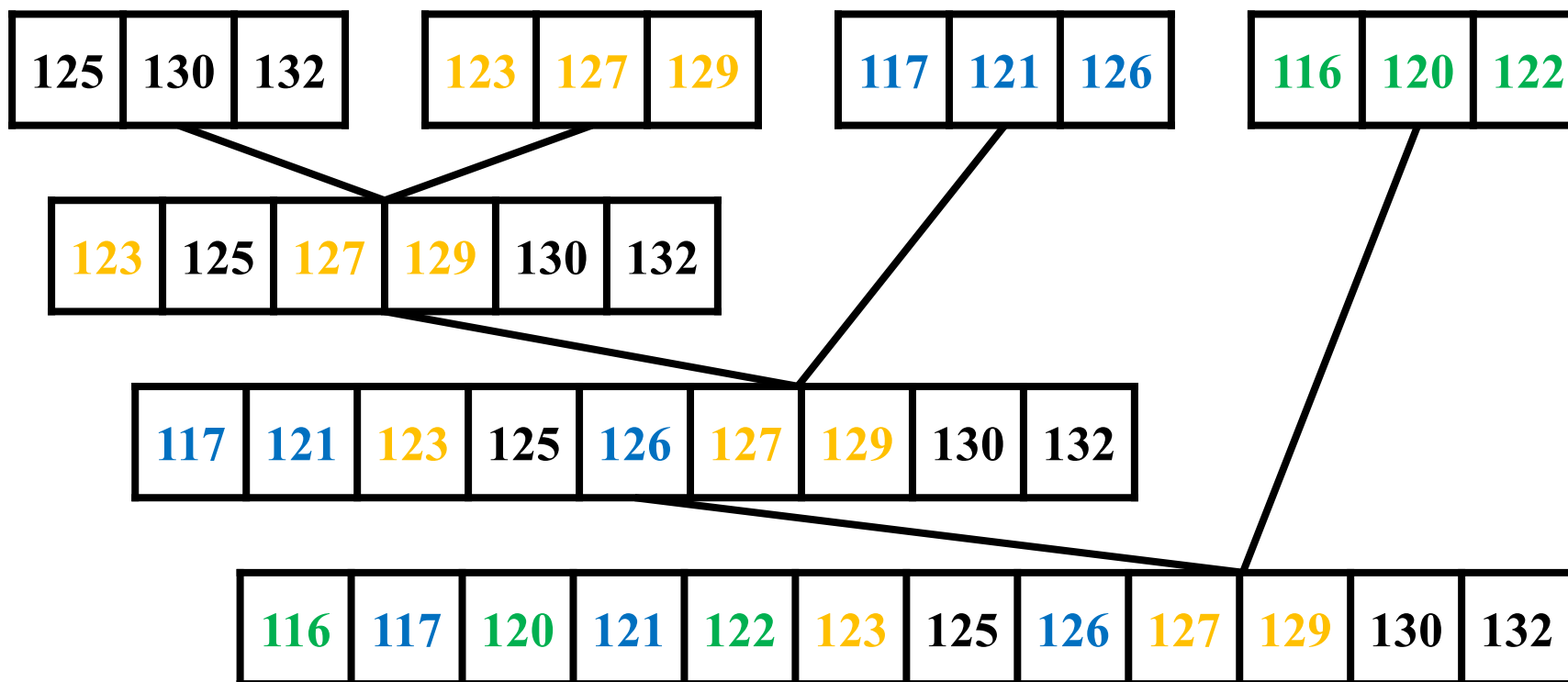
- 杠铃增重问题

- 问题特点：局部有序
- 快速合并：比较两有序数组当前最小元素，将较小者逐一合入新数组
- 后续策略：
 - 逐一合并



- 杠铃增重问题

- 问题特点：局部有序
- 快速合并：比较两有序数组当前最小元素，将较小者逐一合入新数组
- 后续策略：
 - 逐一合并，比较27次



- 杠铃增重问题

- 问题特点：局部有序
- 快速合并：比较两有序数组当前最小元素，将较小者逐一合入新数组
- 后续策略：
 - 逐一合并，比较27次
 - 两两合并

125	130	132
-----	-----	-----

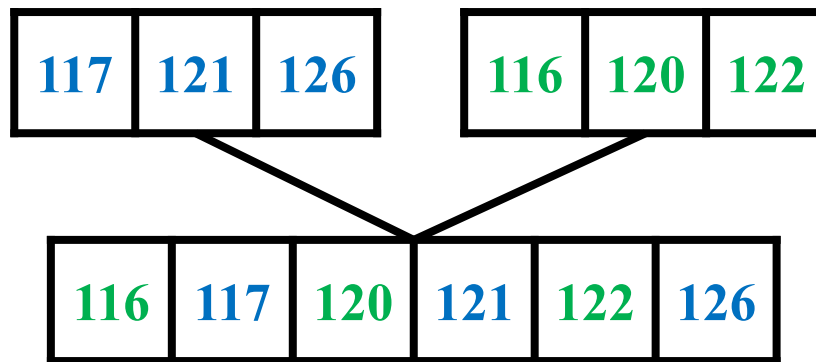
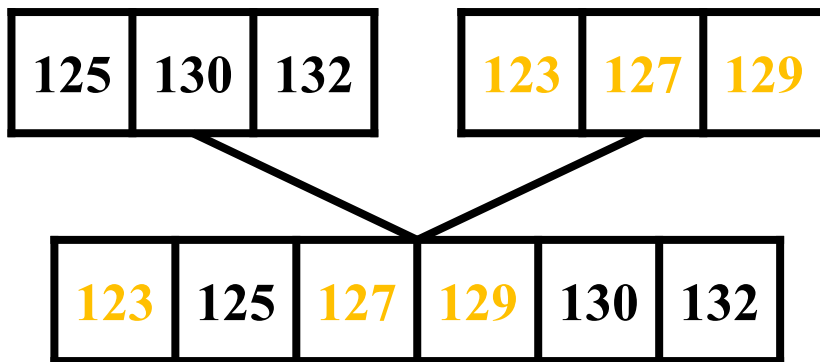
123	127	129
-----	-----	-----

117	121	126
-----	-----	-----

116	120	122
-----	-----	-----

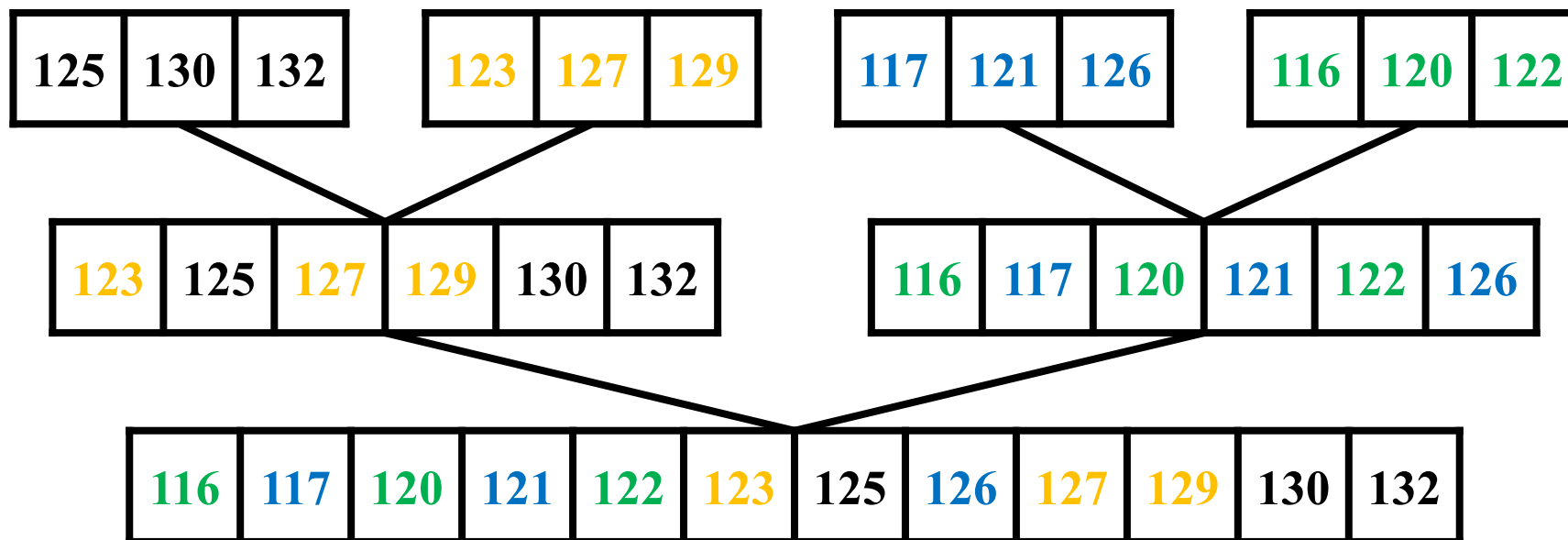
- 杠铃增重问题

- 问题特点：局部有序
- 快速合并：比较两有序数组当前最小元素，将较小者逐一合入新数组
- 后续策略：
 - 逐一合并，比较27次
 - 两两合并



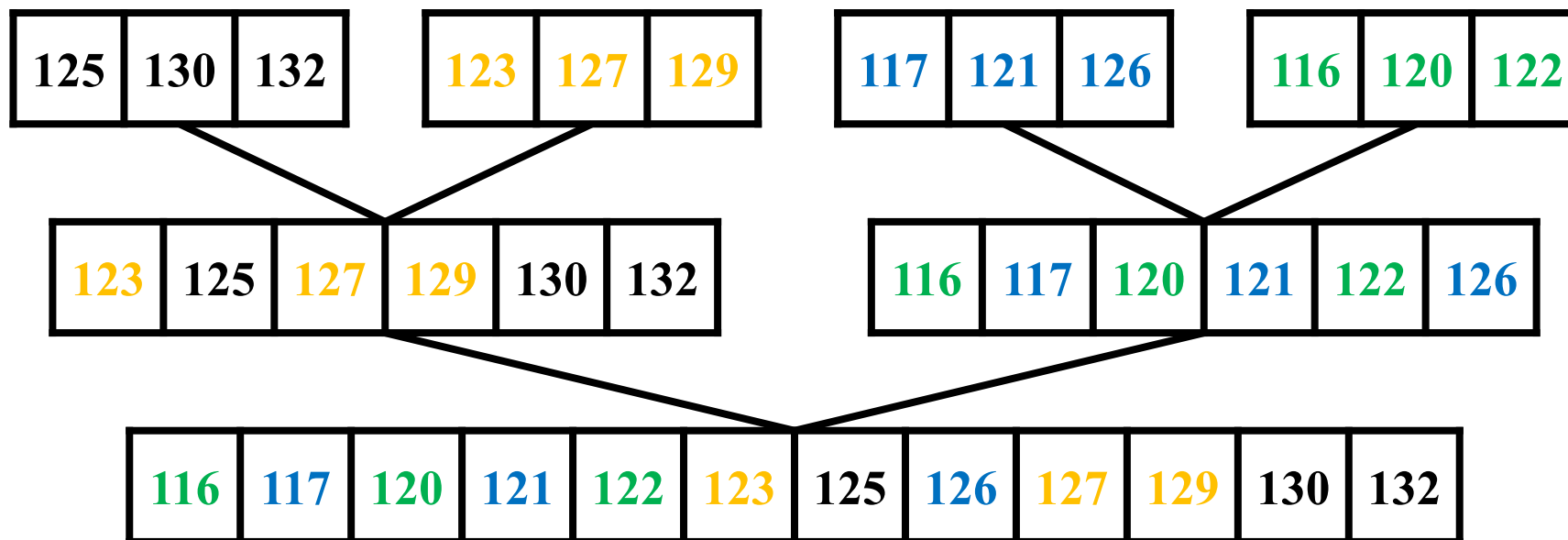
- 杠铃增重问题

- 问题特点：局部有序
- 快速合并：比较两有序数组当前最小元素，将较小者逐一合入新数组
- 后续策略：
 - 逐一合并，比较27次
 - 两两合并



- 杠铃增重问题

- 问题特点：局部有序
- 快速合并：比较两有序数组当前最小元素，将较小者逐一合入新数组
- 后续策略：
 - 逐一合并，比较27次
 - 两两合并，比较24次



- 杠铃增重问题

- 问题特点：局部有序
- 快速合并：比较两有序数组当前最小元素，将较小者逐一合入新数组
- 后续策略：
 - 逐一合并，比较27次
 - 两两合并，比较24次

策略名称	4位选手	8位选手	16位选手
逐一合并	27次	105次	405次
两两合并	24次	72次	192次

- 杠铃增重问题

- 问题特点：局部有序
- 快速合并：比较两有序数组当前最小元素，将较小者逐一合入新数组
- 后续策略：
 - 逐一合并，比较27次
 - 两两合并，比较24次

策略名称	4位选手	8位选手	16位选手
逐一合并	27次	105次	405次
两两合并	24次	72次	192次

求解杠铃增重问题的两两合并策略对排序问题有何启发？

- 排序问题回顾

排序问题

Sorting Problem

输入

- 包含 n 个数字的序列 $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$

输出

- 输入序列的升序

$$\langle a'_1, a'_2, \dots, a'_n \rangle$$

满足 $a'_1 \leq a'_2 \leq \dots \leq a'_n$

示例

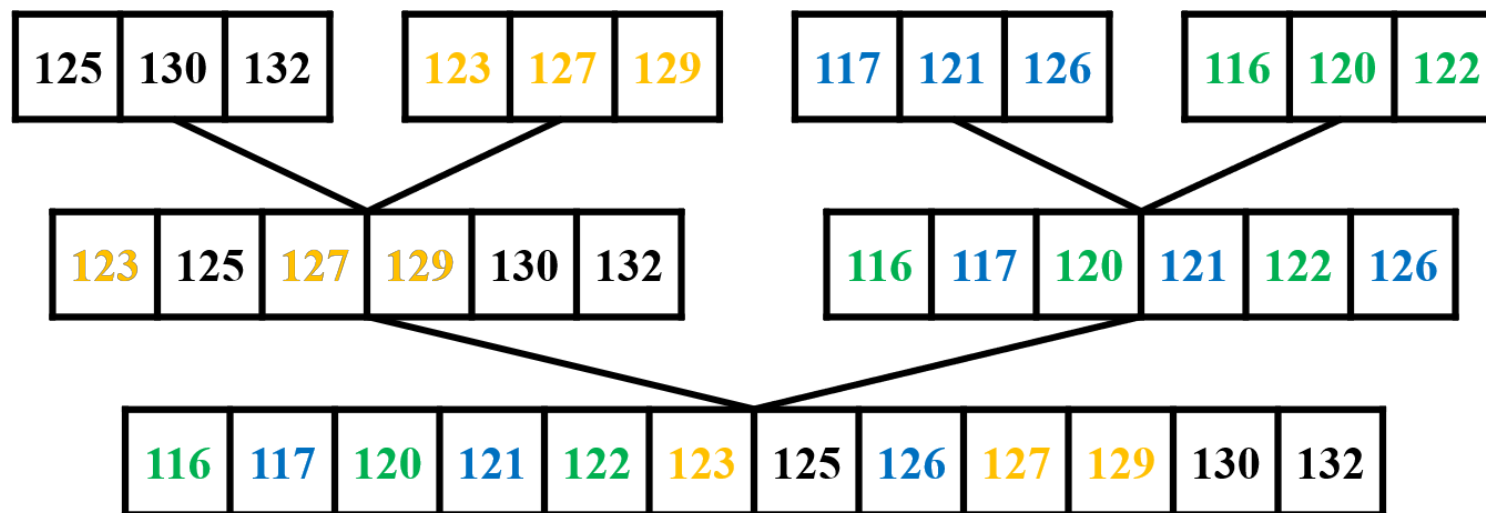
24	17	40	28	13	14	22	32	40	21	48	4	47	8	37	18
----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	---	----	---	----	----

从杠铃增重问题到排序问题



- 问题输入变化

杠铃增重问题



排序问题

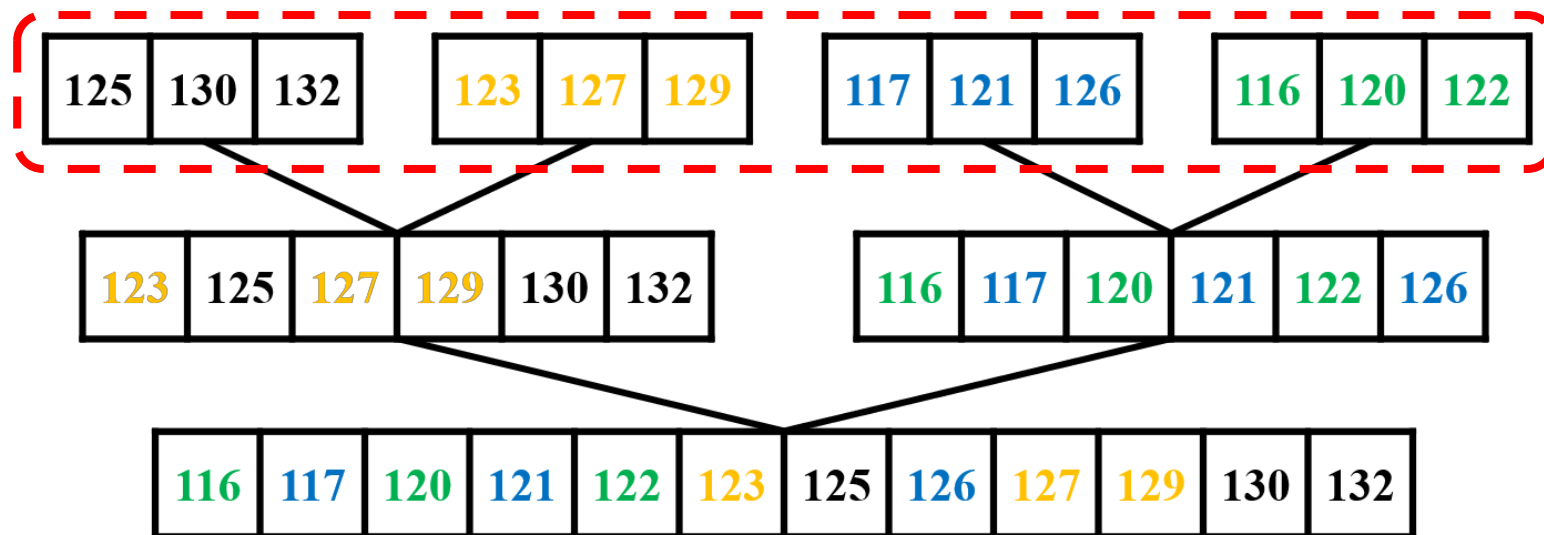
24	17	40	28	13	14	22	32	40	21	48	4	47	8	37	18
----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	---	----	---	----	----

从杠铃增重问题到排序问题

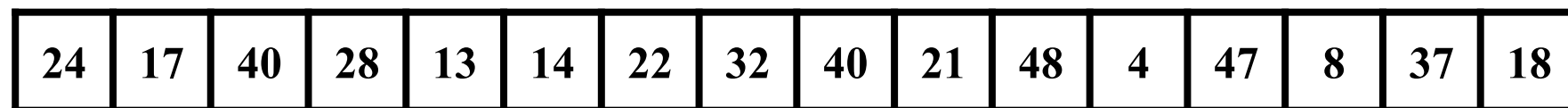


- 问题输入变化
 - 完整数组输入

杠铃增重问题



排序问题



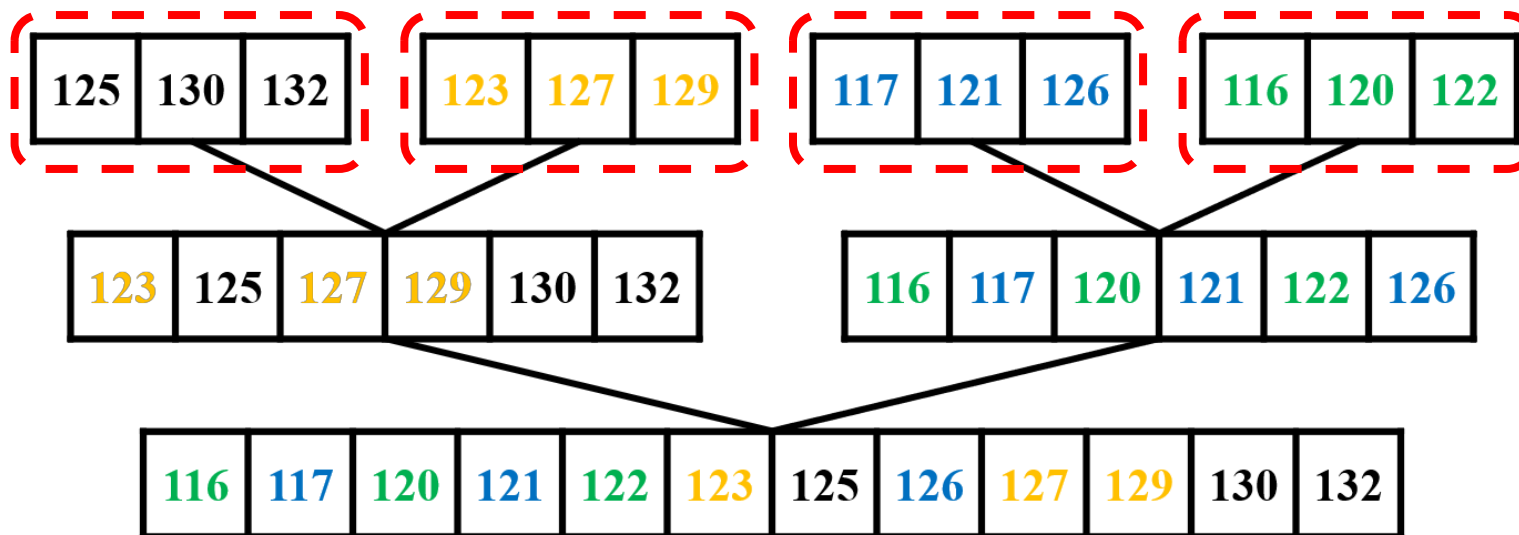
从杠铃增重问题到排序问题

问题输入变化

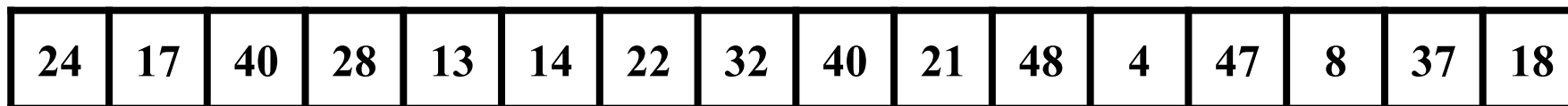
- 完整数组输入
- 局部有序缺失

从杠铃增重问题到排序问题的输入变化

杠铃增重问题



排序问题



从杠铃增重问题到排序问题

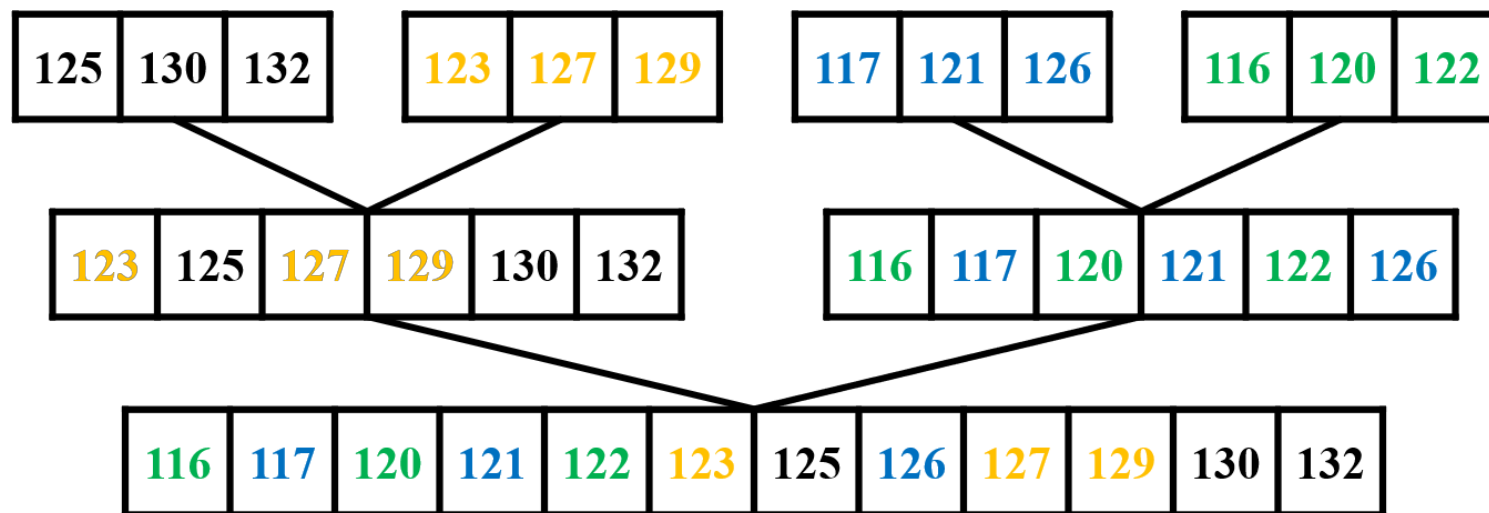


- 问题输入变化

- 完整数组输入
- 局部有序缺失

两两合并策略如何适应问题输入的变化？

杠铃增重问题



排序问题

24	17	40	28	13	14	22	32	40	21	48	4	47	8	37	18
----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	---	----	---	----	----

从杠铃增重问题到排序问题



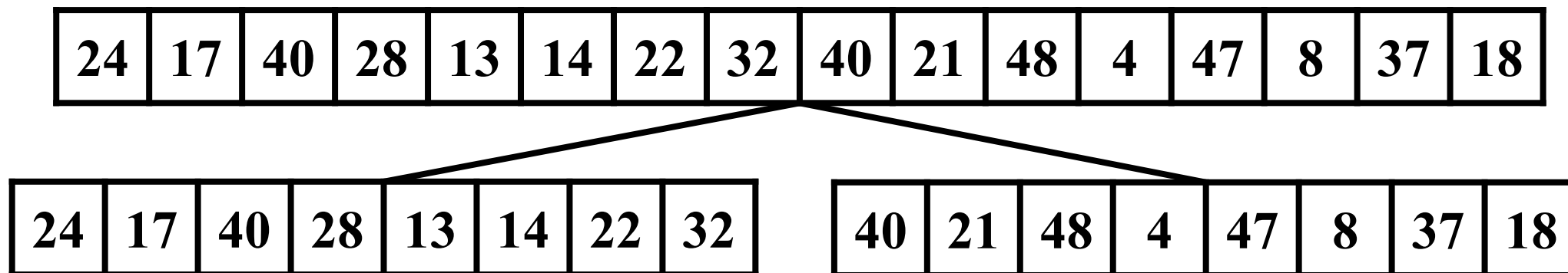
- 解决输入变化：分解输入

24	17	40	28	13	14	22	32	40	21	48	4	47	8	37	18
----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	---	----	---	----	----

从杠铃增重问题到排序问题



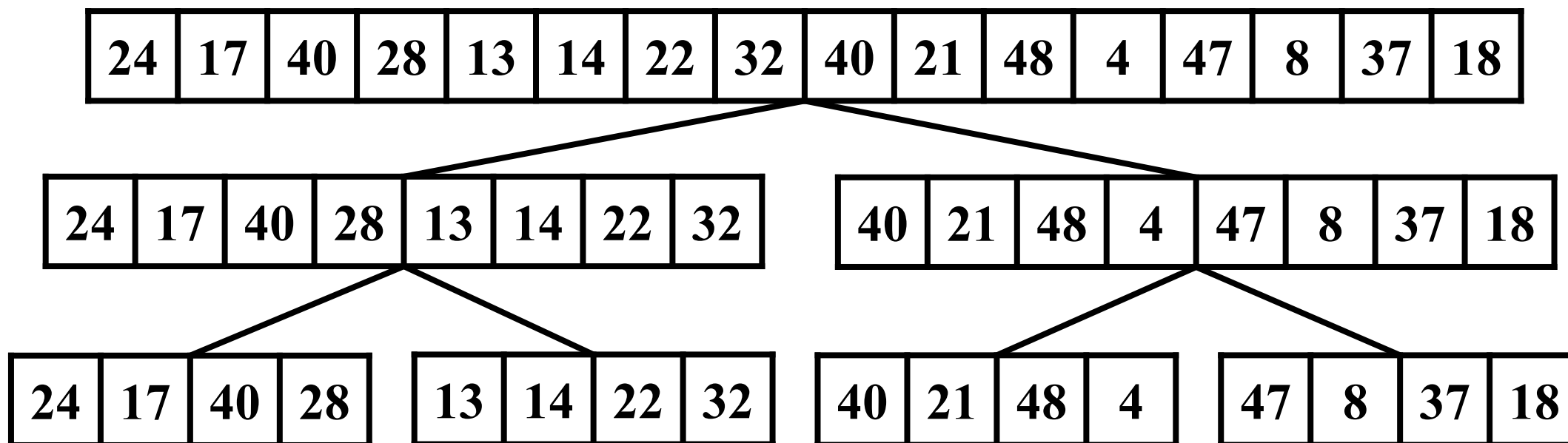
- 解决输入变化：分解输入



从杠铃增重问题到排序问题



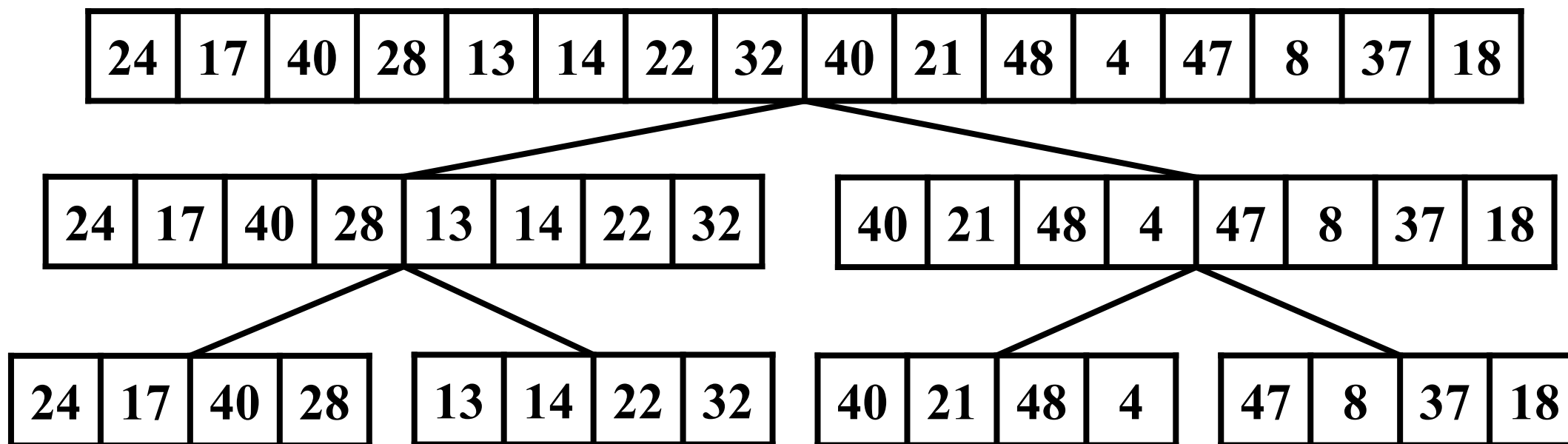
- 解决输入变化：分解输入



从杠铃增重问题到排序问题



- 解决输入变化：分解输入



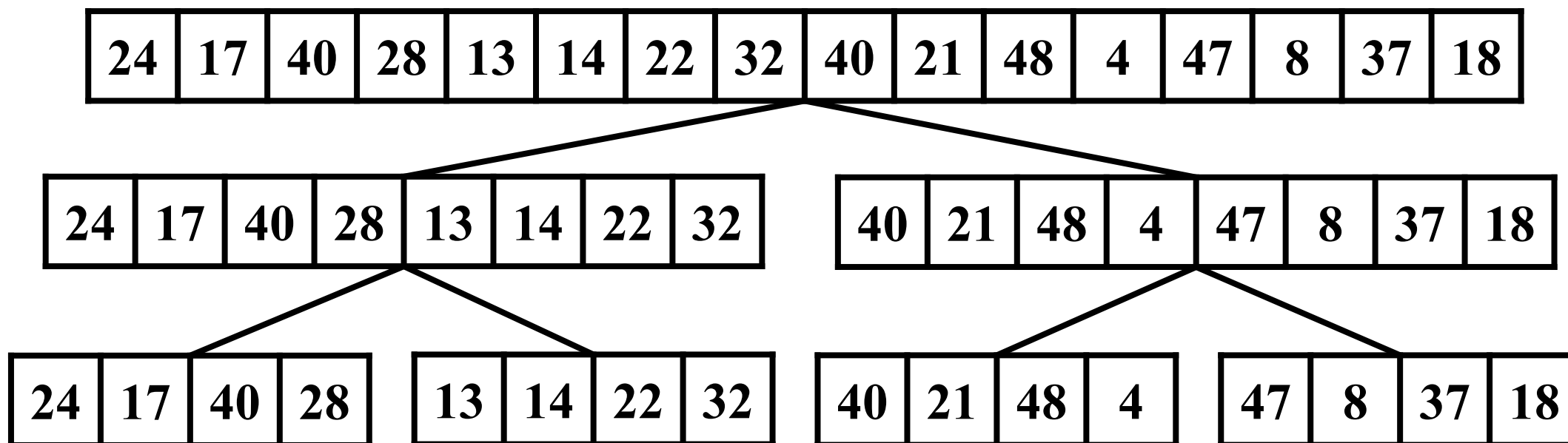
通过分解处理完整数组输入的变化

把大问题分解成小问题.

从杠铃增重问题到排序问题



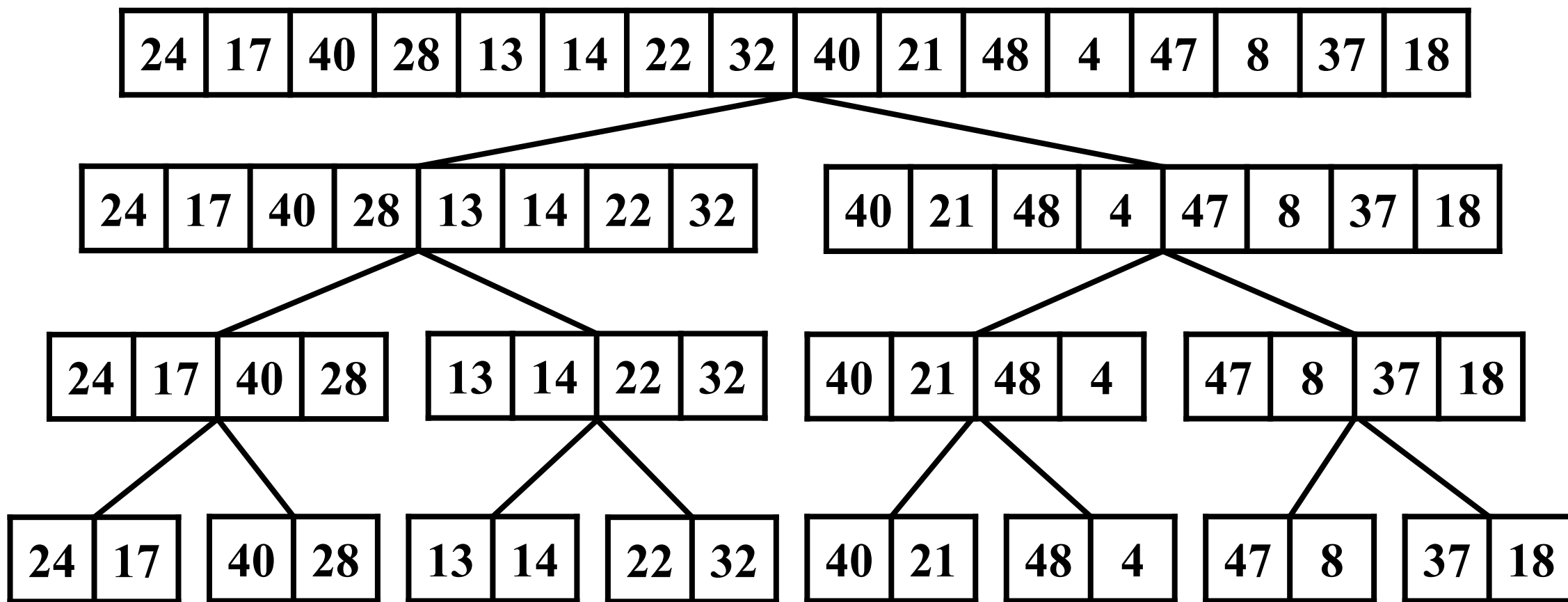
- 解决输入变化：分解输入



从杠铃增重问题到排序问题



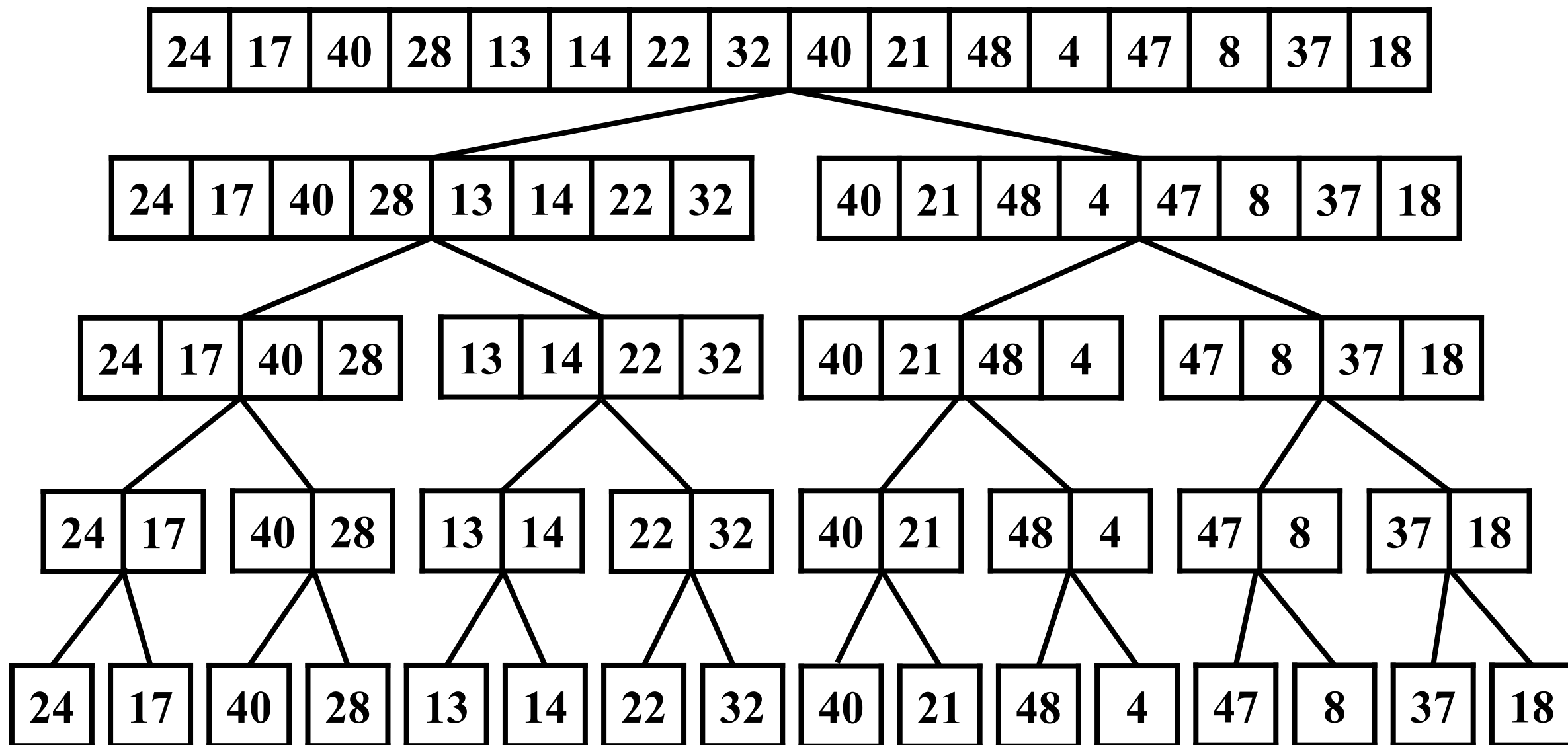
- 解决输入变化：分解输入



从杠铃增重问题到排序问题



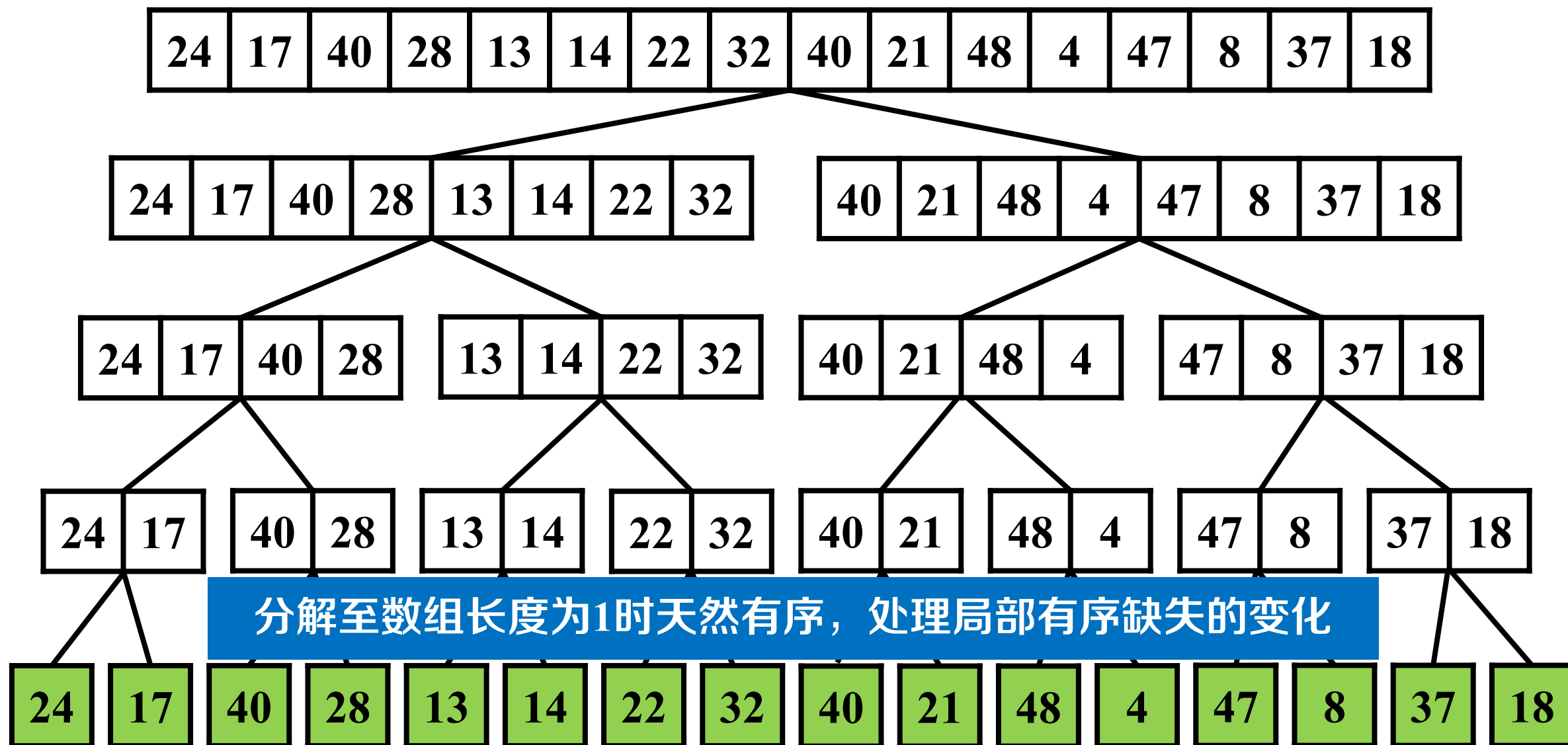
- 解决输入变化：分解输入



从杠铃增重问题到排序问题



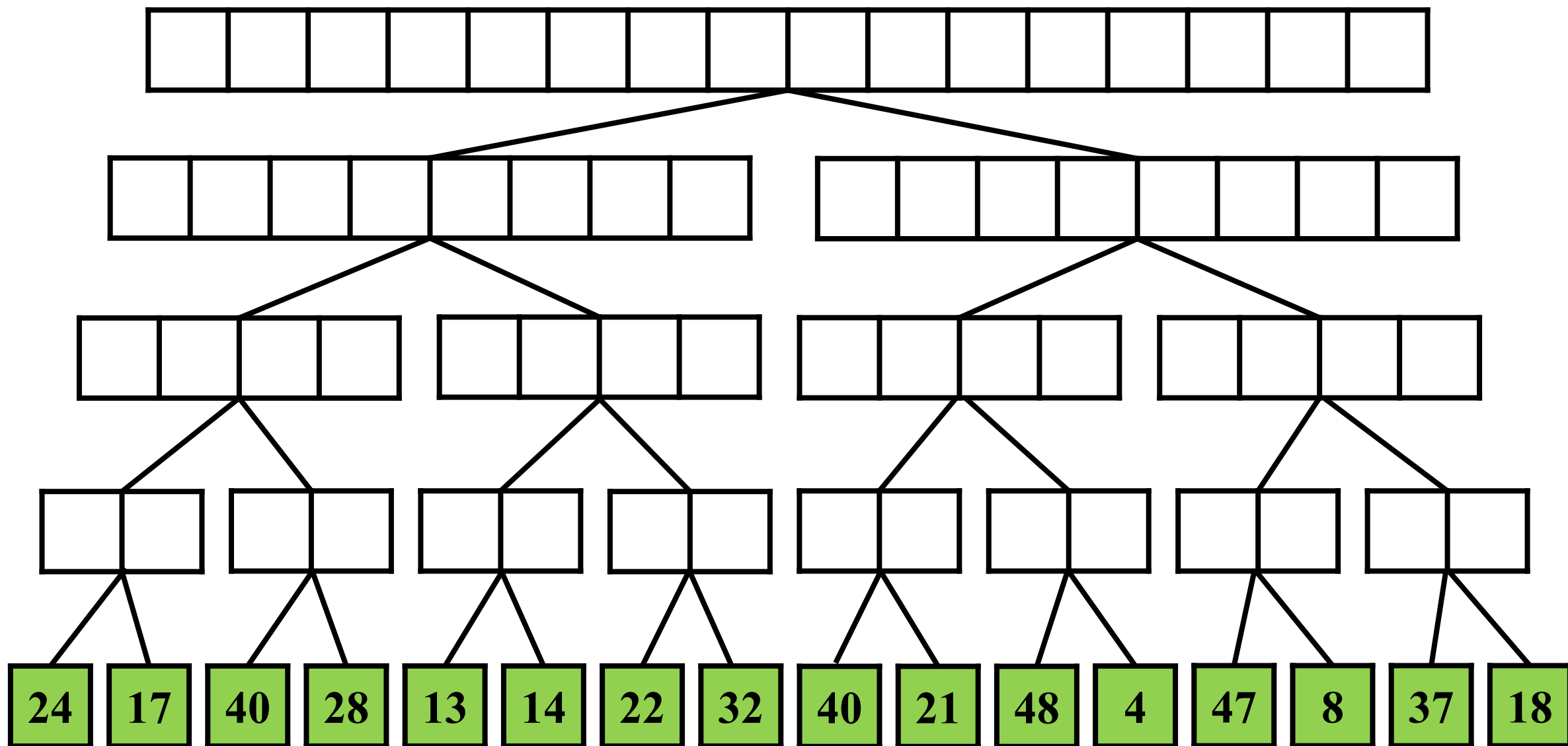
- 解决输入变化：分解输入



从杠铃增重问题到排序问题



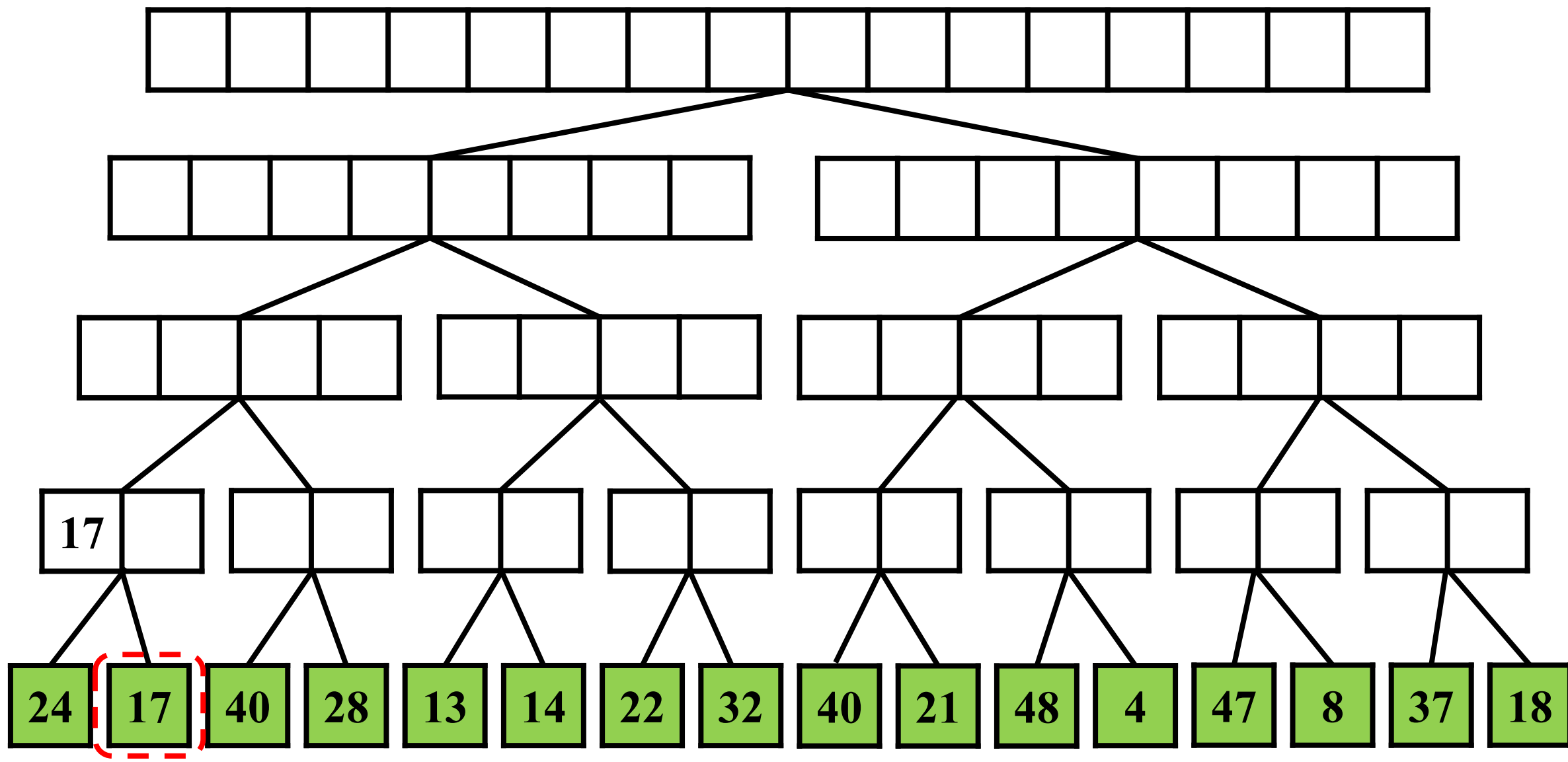
- 构建有序数组：两两合并



从杠铃增重问题到排序问题



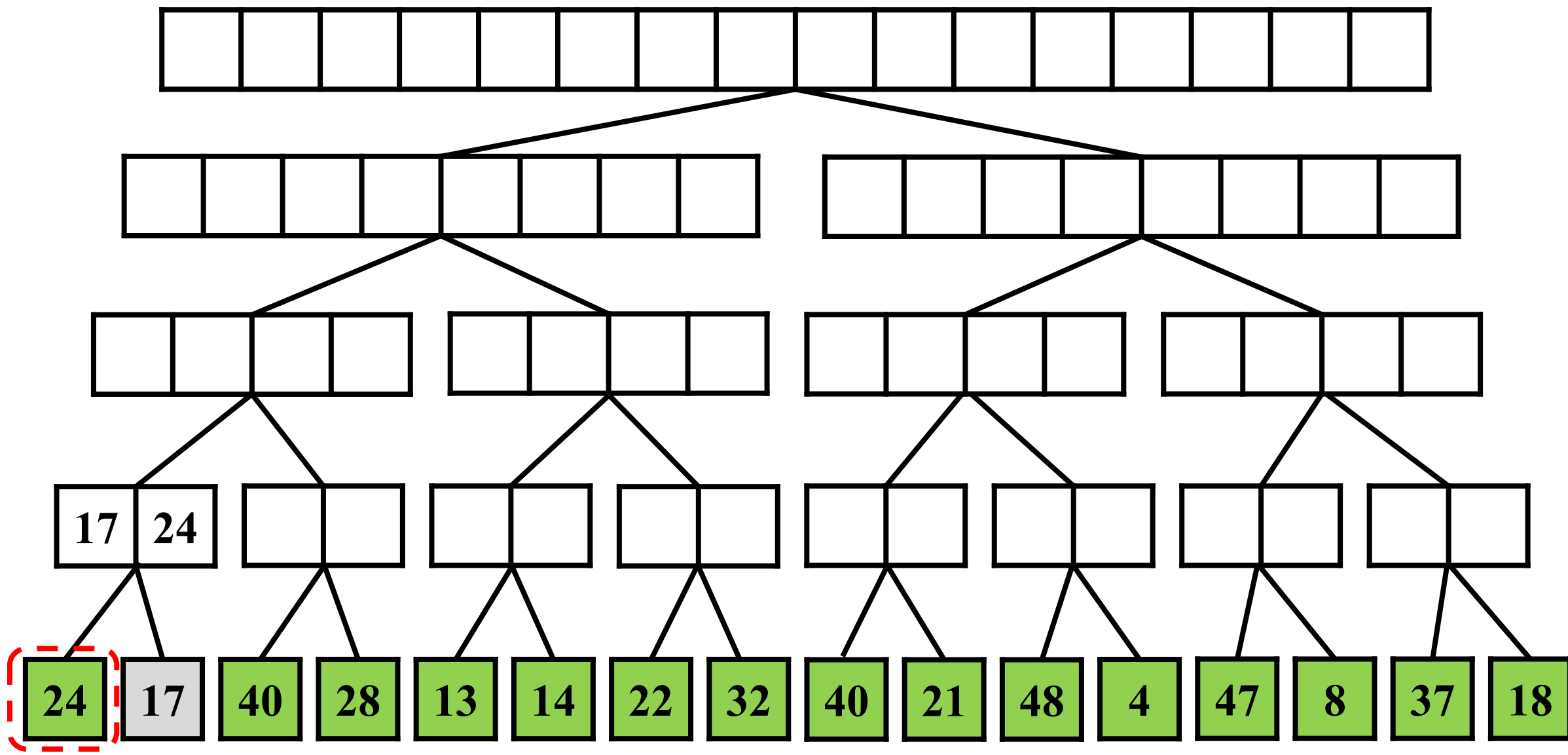
- 构建有序数组：两两合并



从杠铃增重问题到排序问题



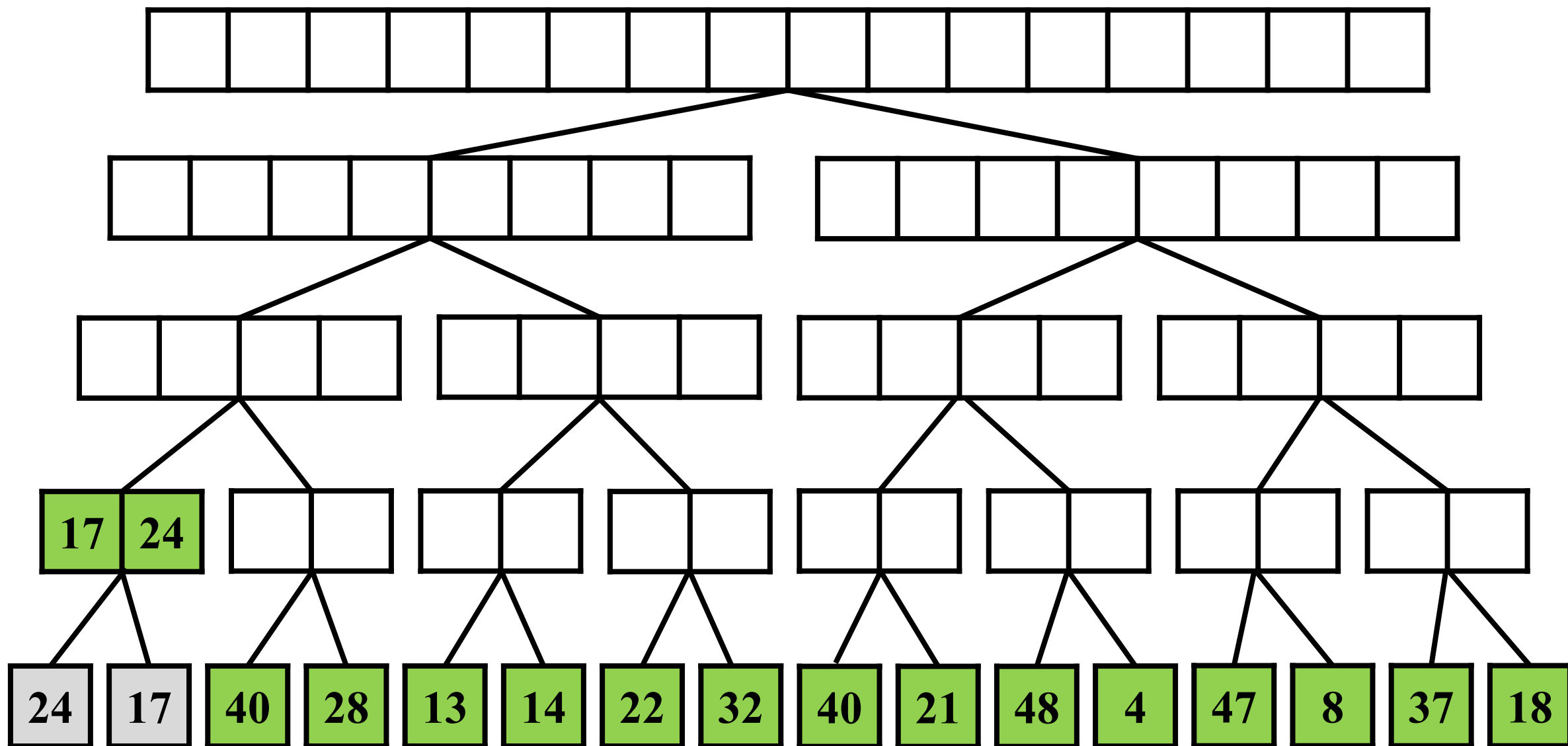
- 构建有序数组：两两合并



从杠铃增重问题到排序问题



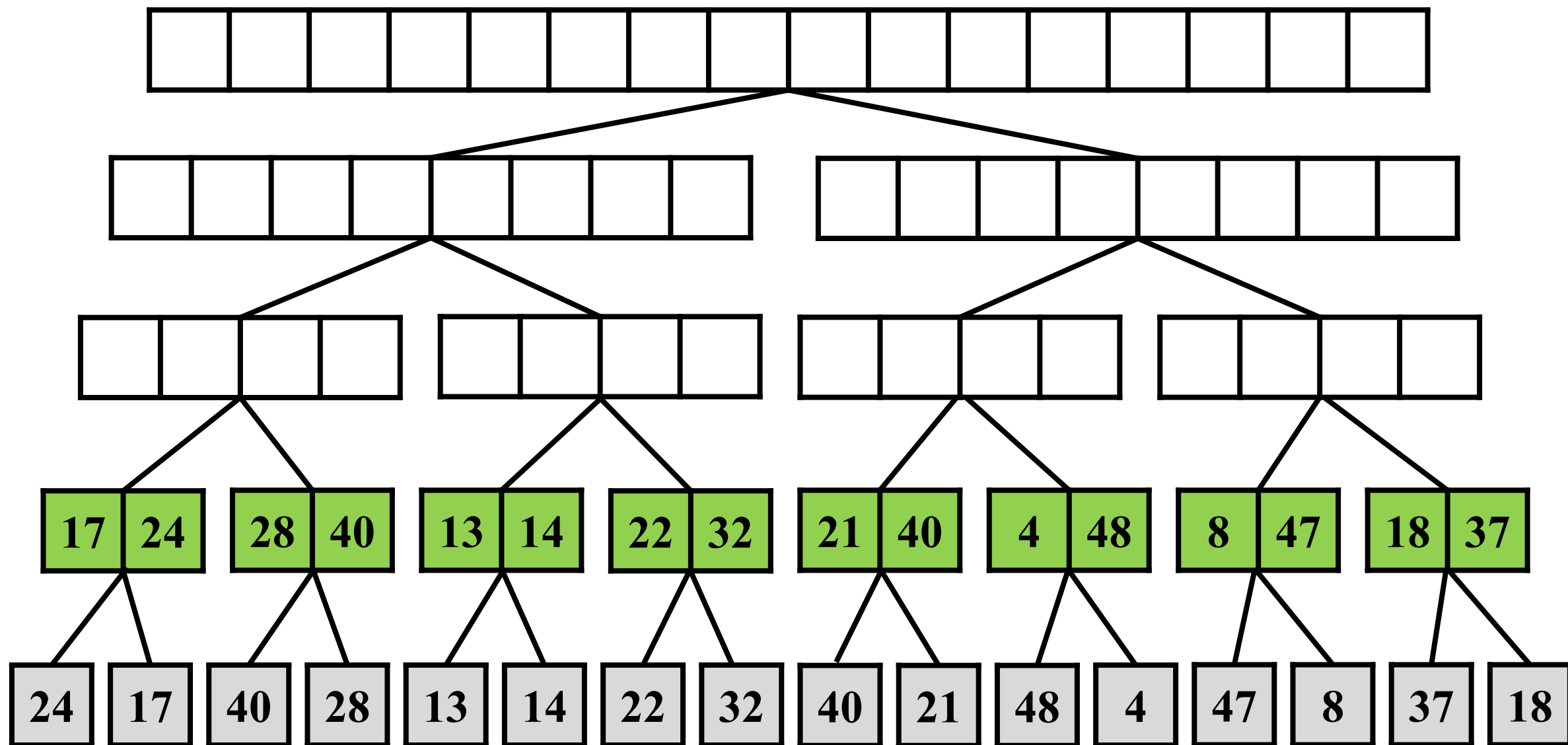
- 构建有序数组：两两合并



从杠铃增重问题到排序问题



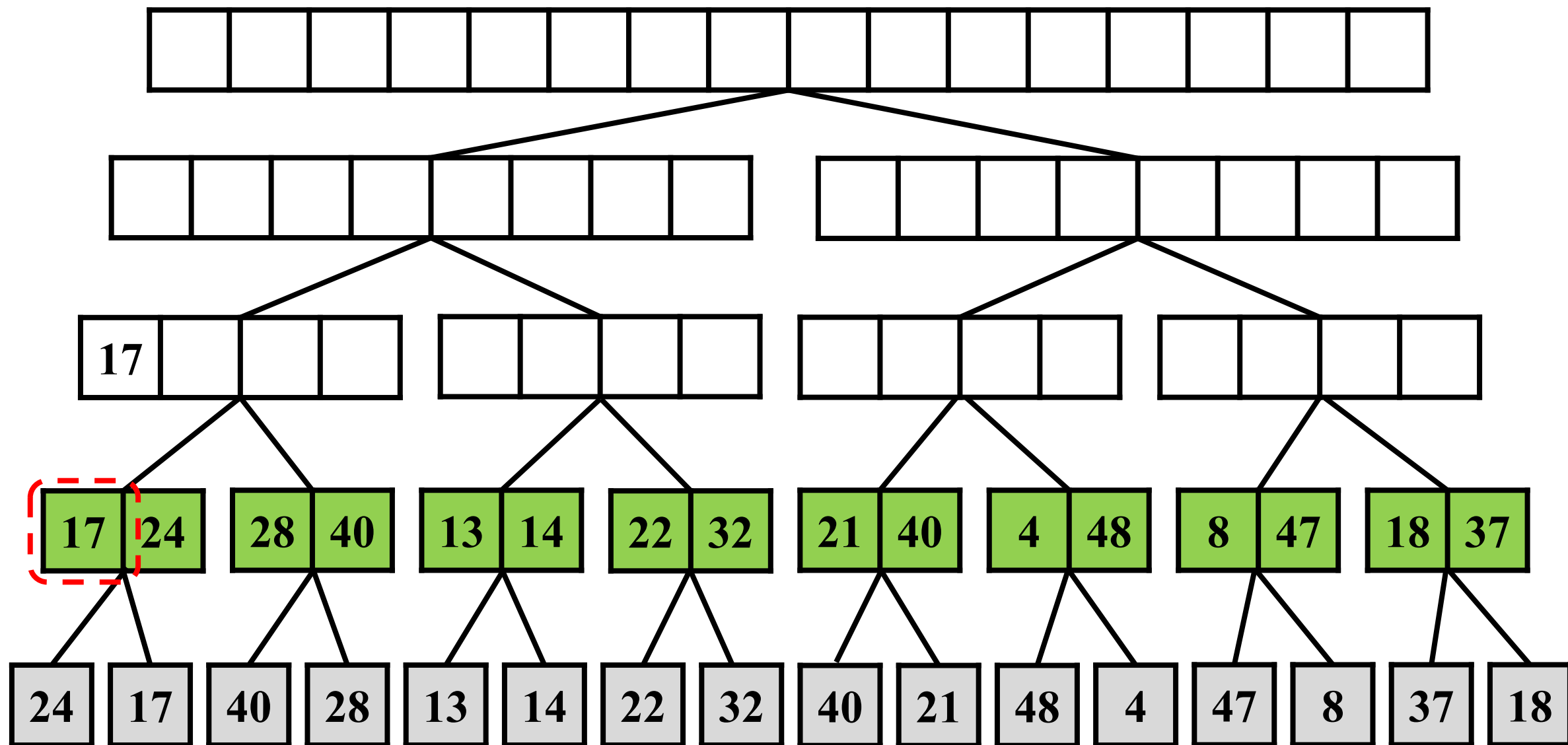
- 构建有序数组：两两合并



从杠铃增重问题到排序问题



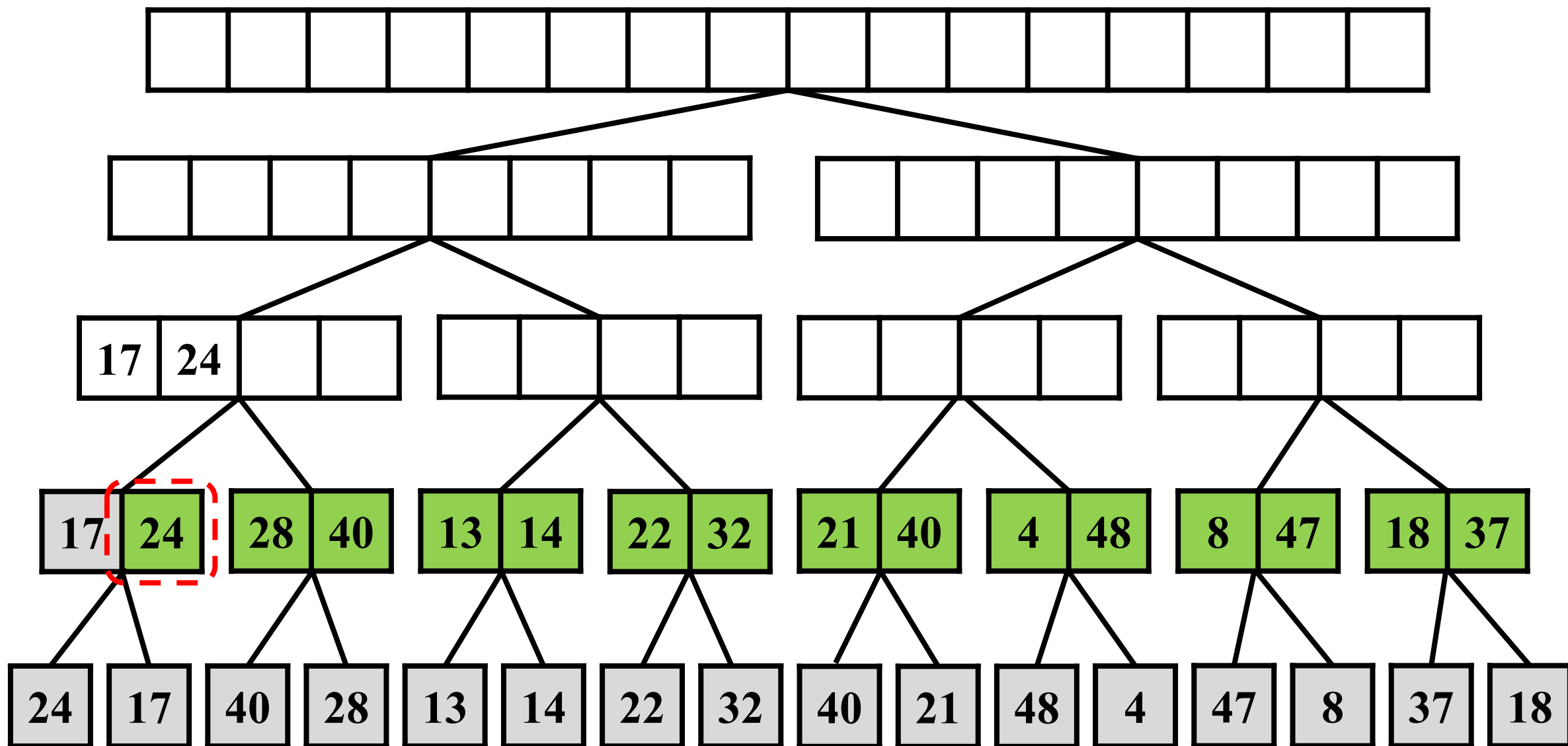
- 构建有序数组：两两合并



从杠铃增重问题到排序问题



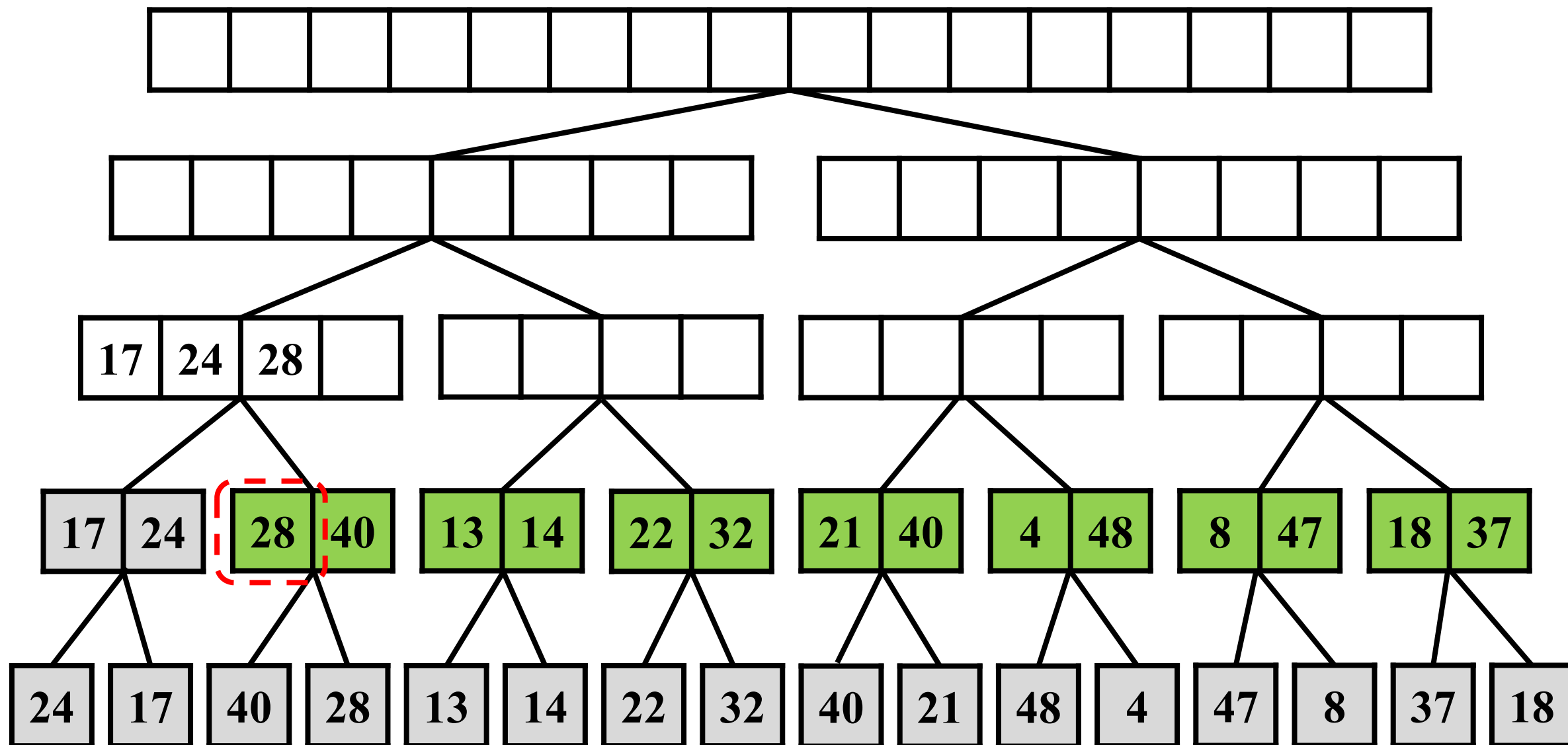
- 构建有序数组：两两合并



从杠铃增重问题到排序问题



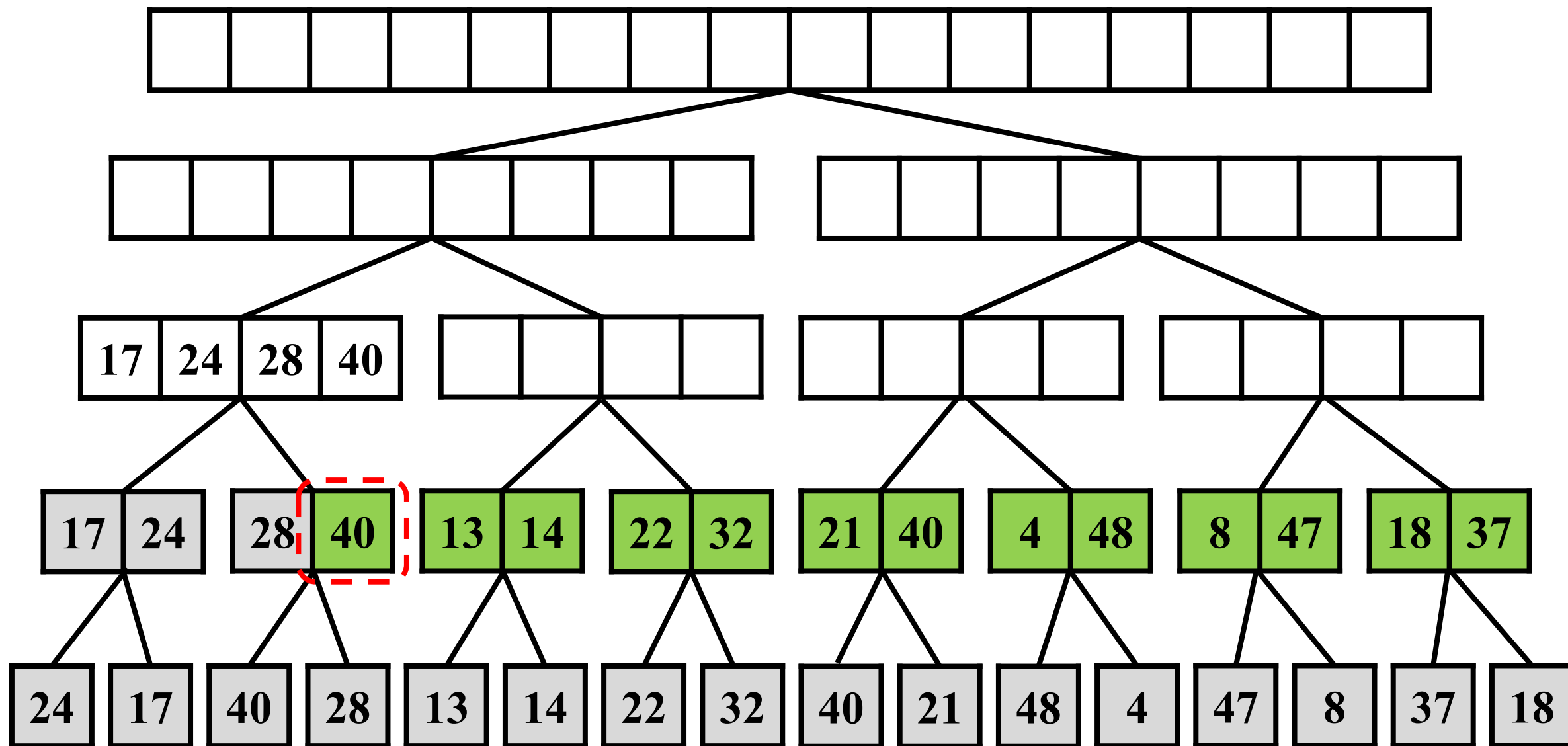
- 构建有序数组：两两合并



从杠铃增重问题到排序问题



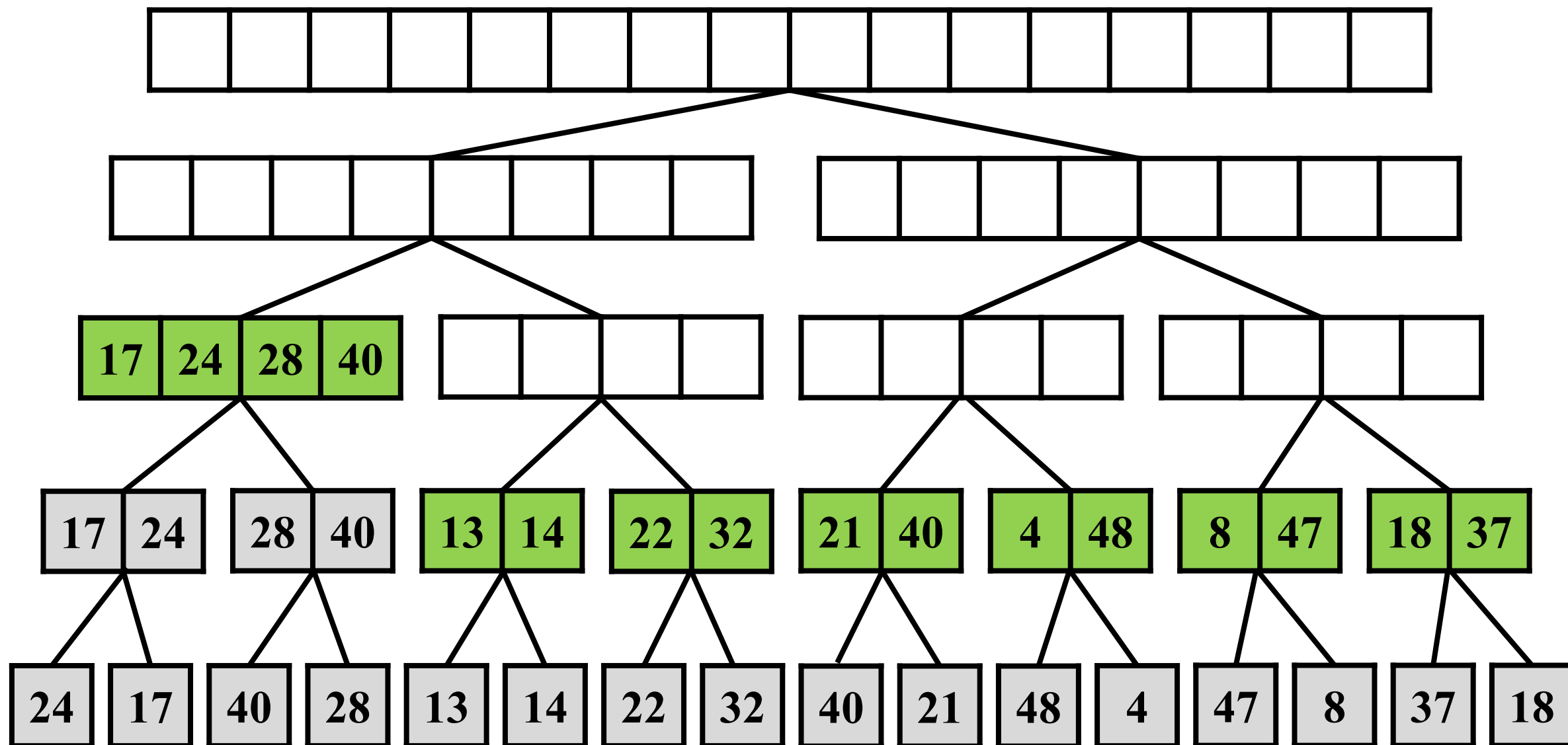
- 构建有序数组：两两合并



从杠铃增重问题到排序问题



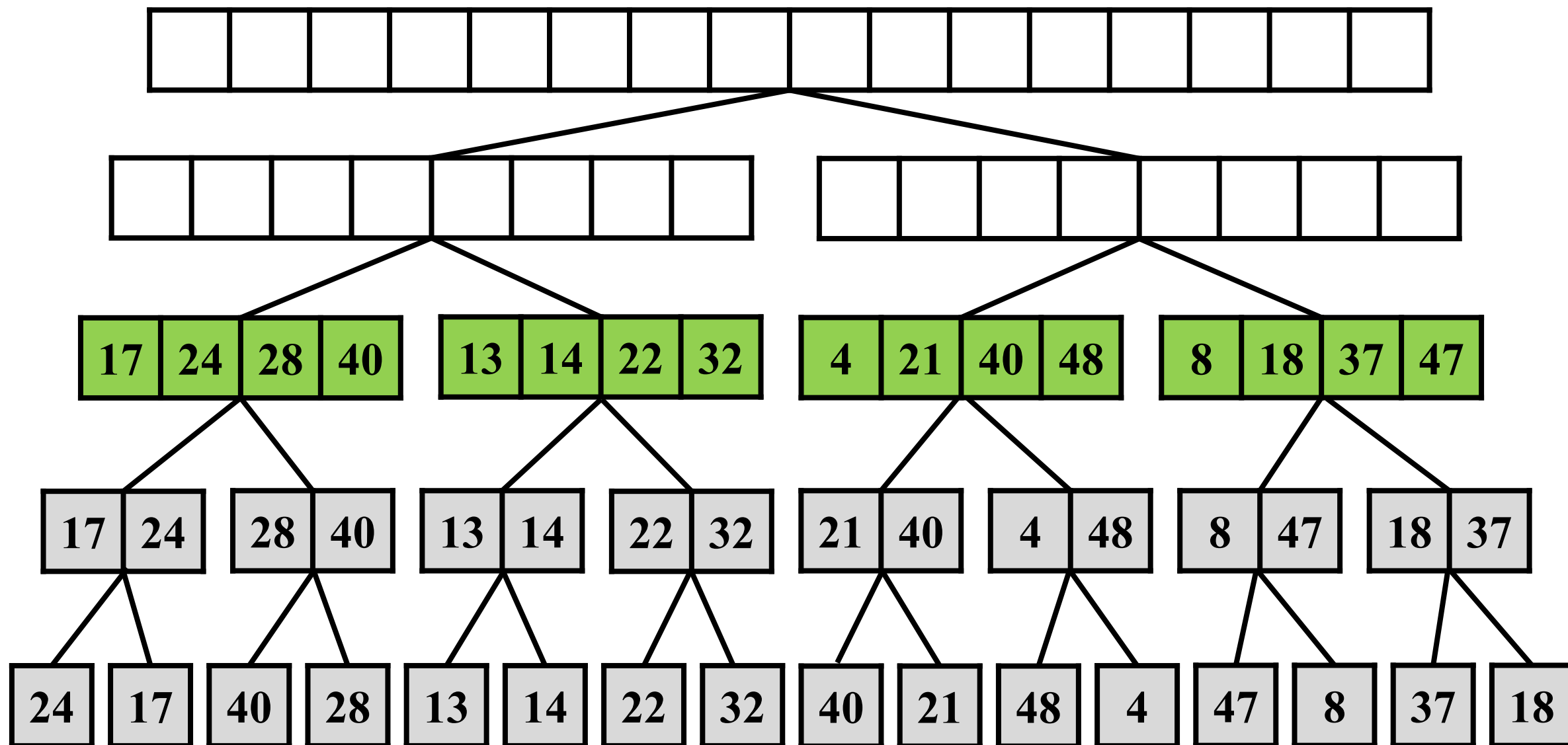
- 构建有序数组：两两合并



从杠铃增重问题到排序问题



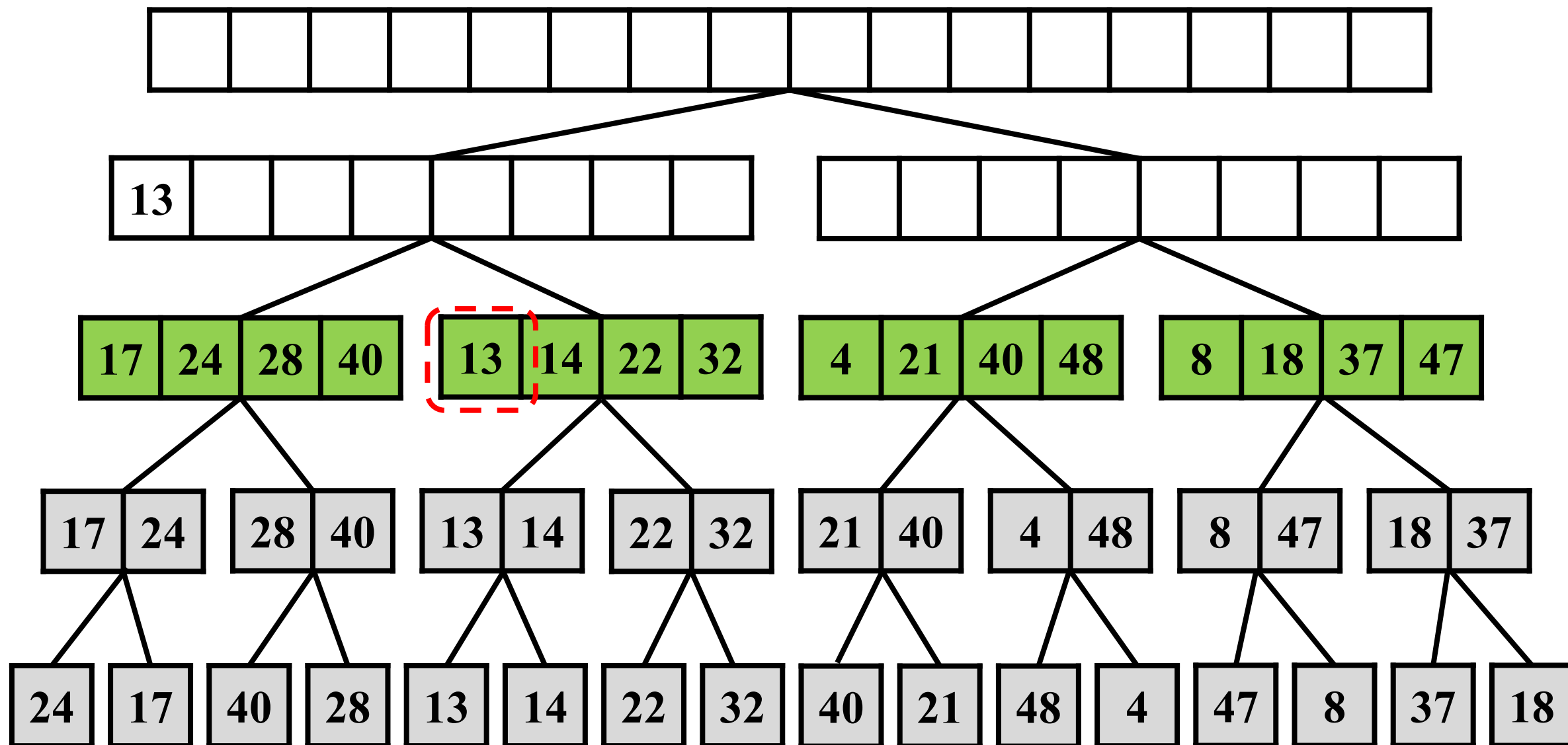
- 构建有序数组：两两合并



从杠铃增重问题到排序问题



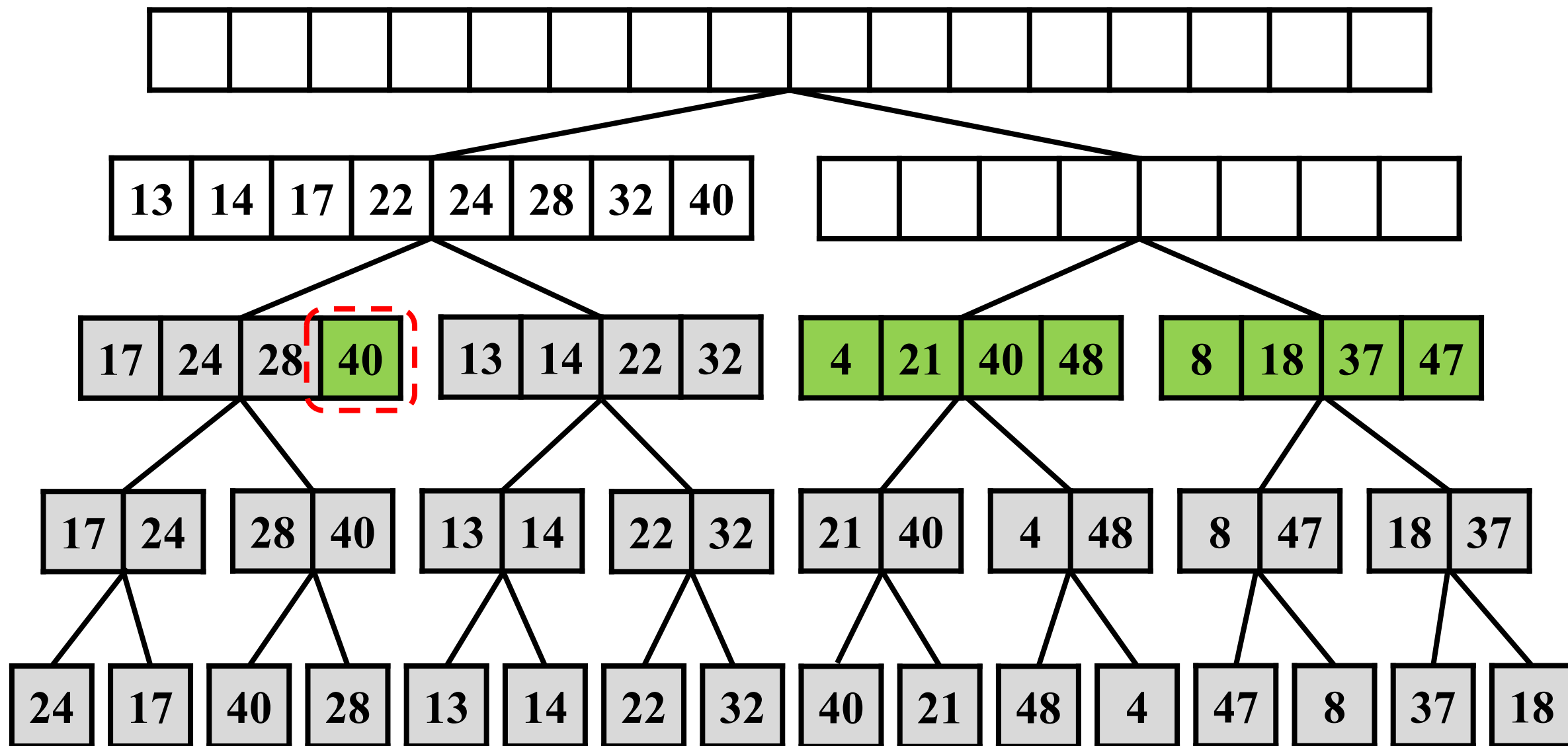
- 构建有序数组：两两合并



从杠铃增重问题到排序问题



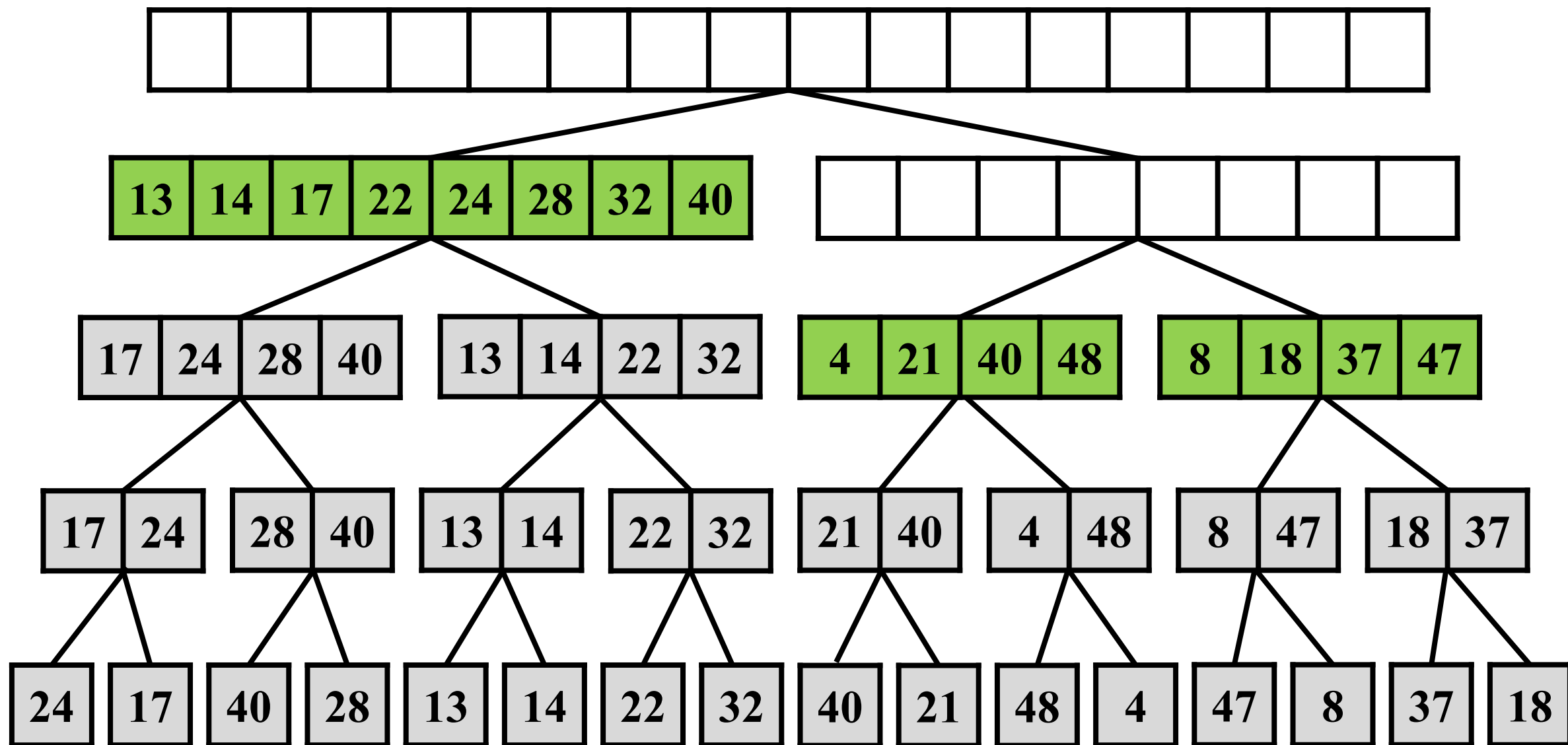
- 构建有序数组：两两合并



从杠铃增重问题到排序问题



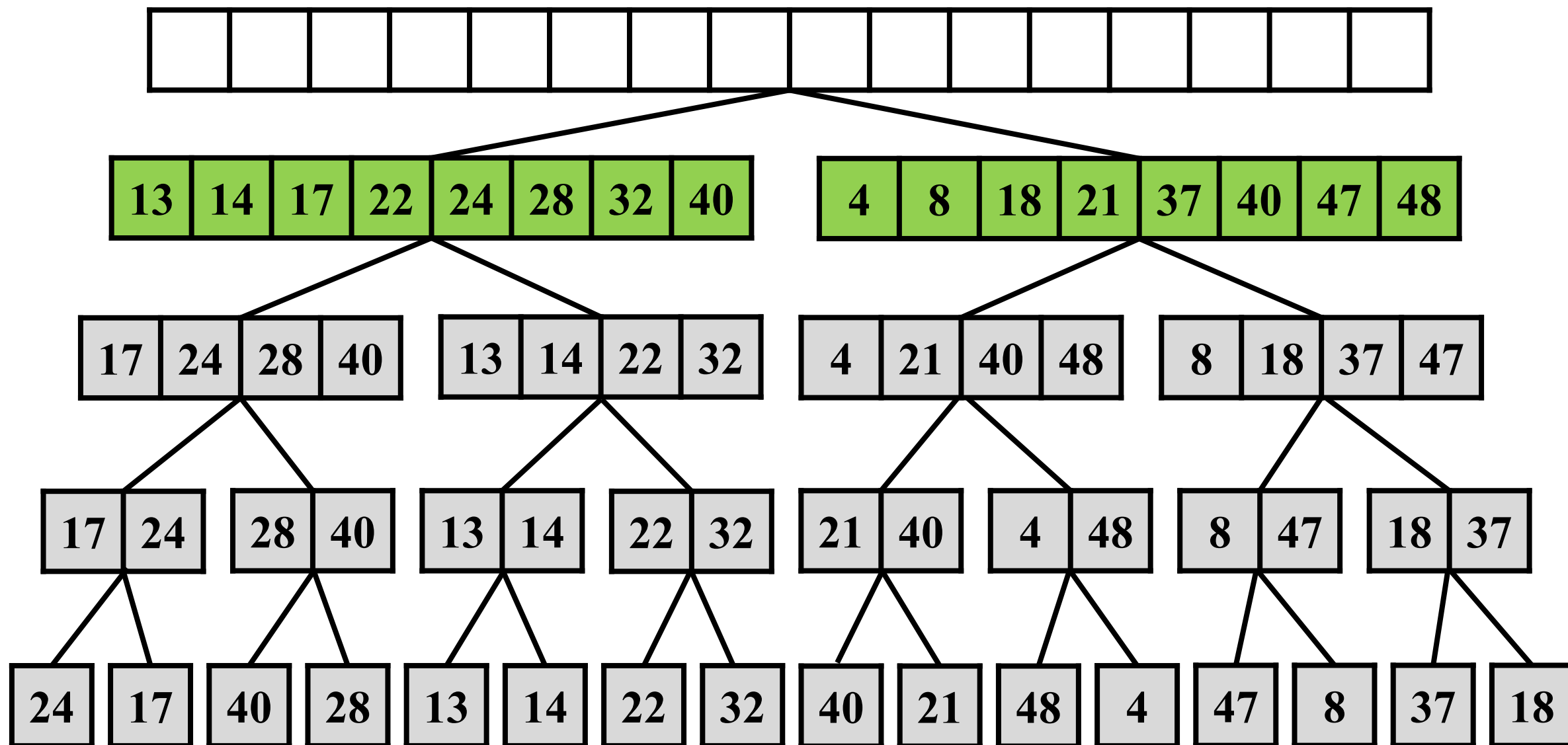
- 构建有序数组：两两合并



从杠铃增重问题到排序问题



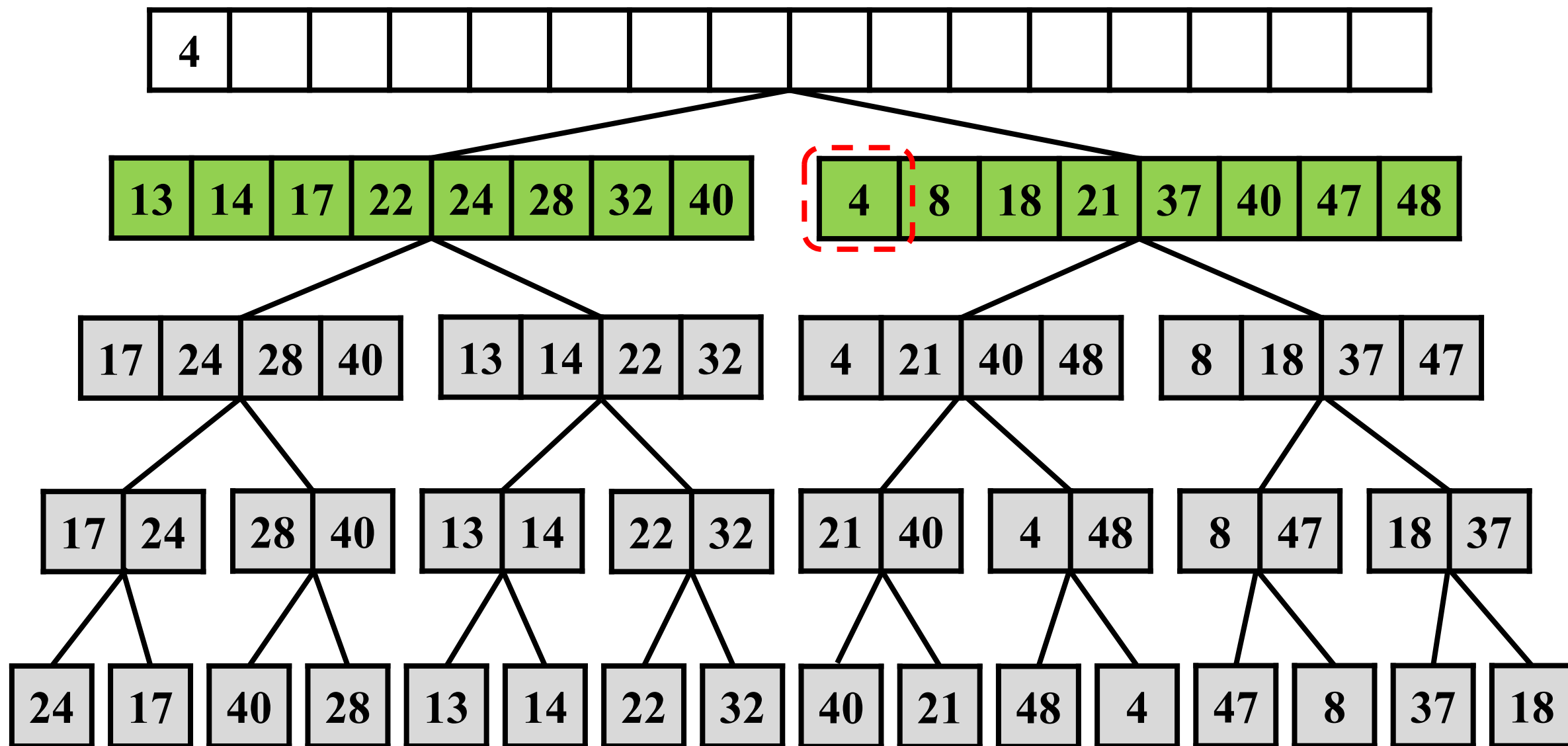
- 构建有序数组：两两合并



从杠铃增重问题到排序问题



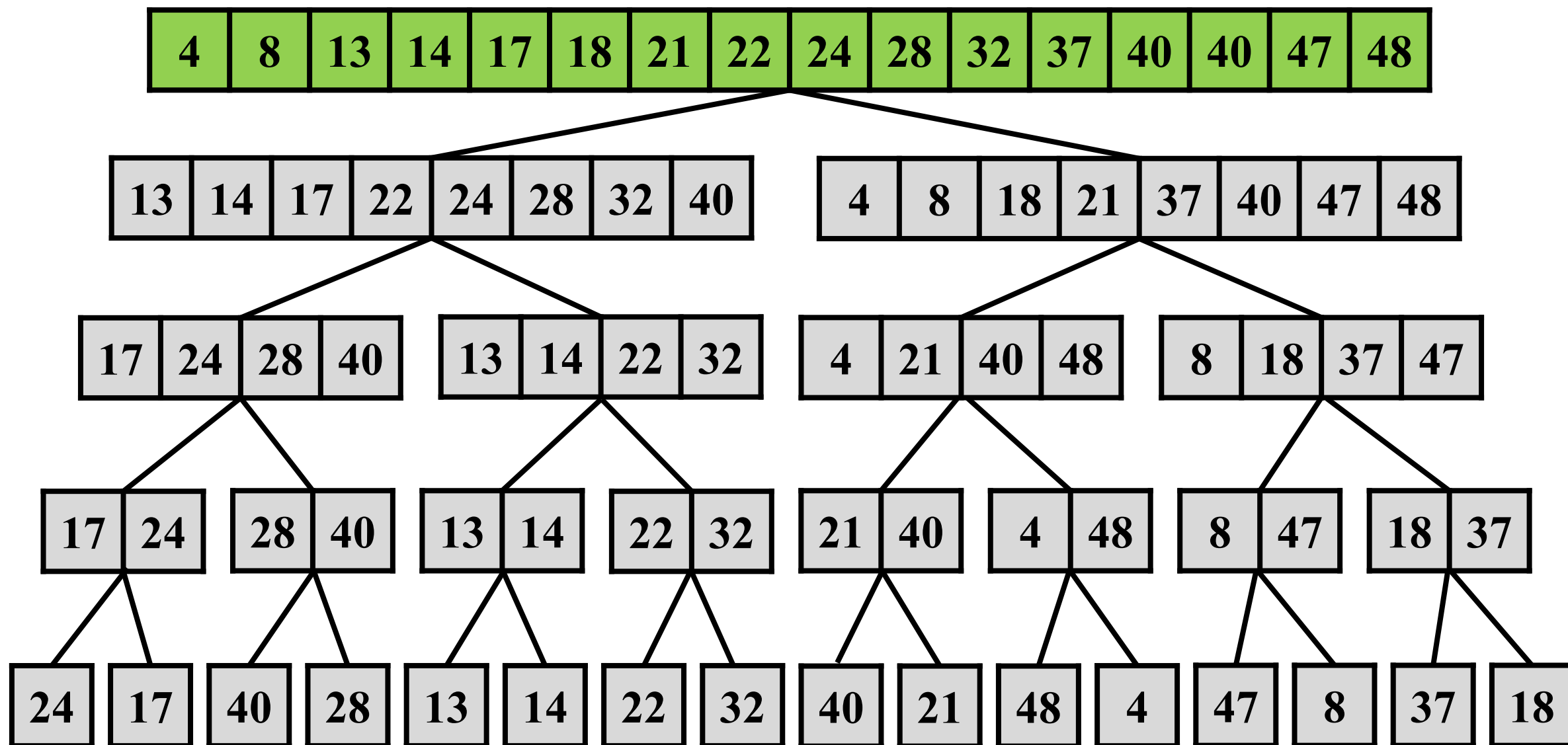
- 构建有序数组：两两合并



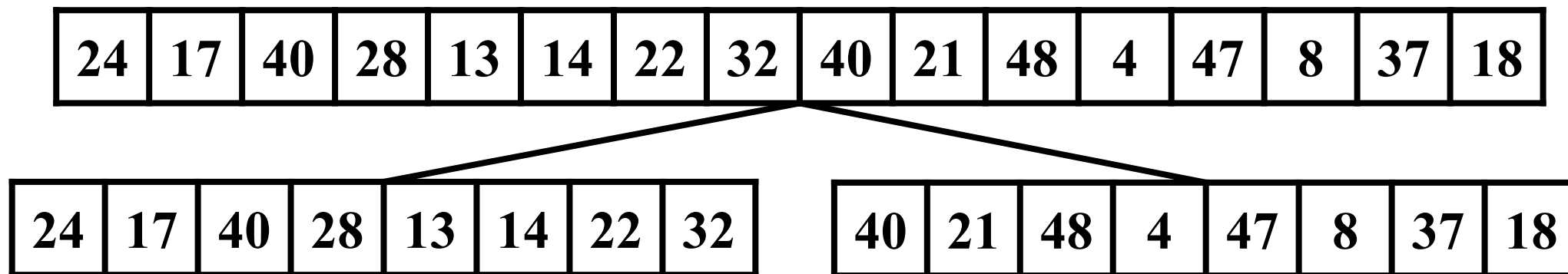
从杠铃增重问题到排序问题



- 构建有序数组：两两合并 归并排序的思想。



归并排序

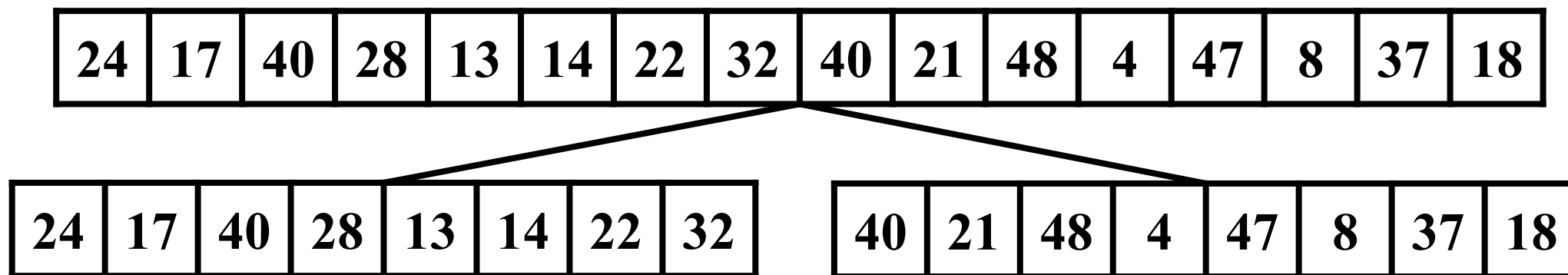


- 1945年, 冯·诺伊曼提出归并排序



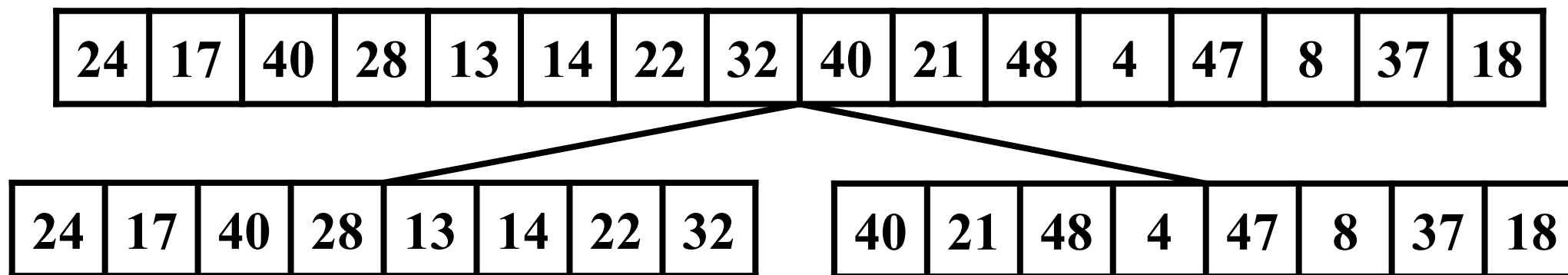
现代计算机之父
约翰·冯·诺伊曼
John von Neumann

归并排序



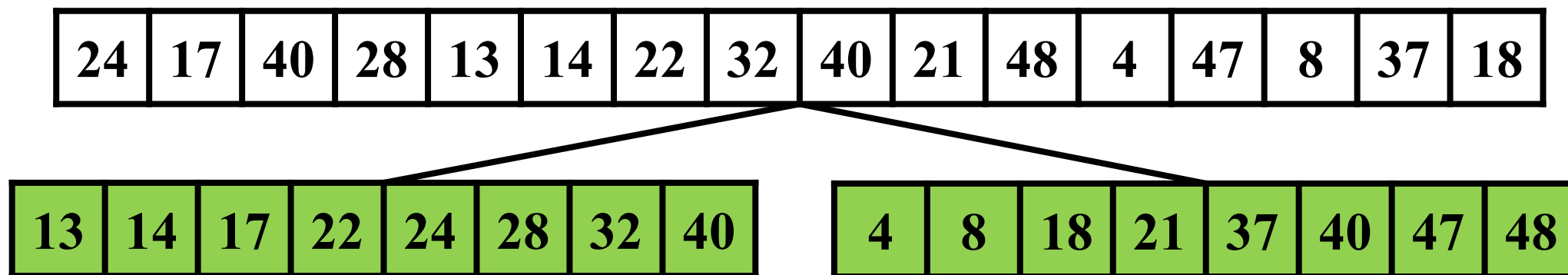
- 算法流程

归并排序



- 算法流程

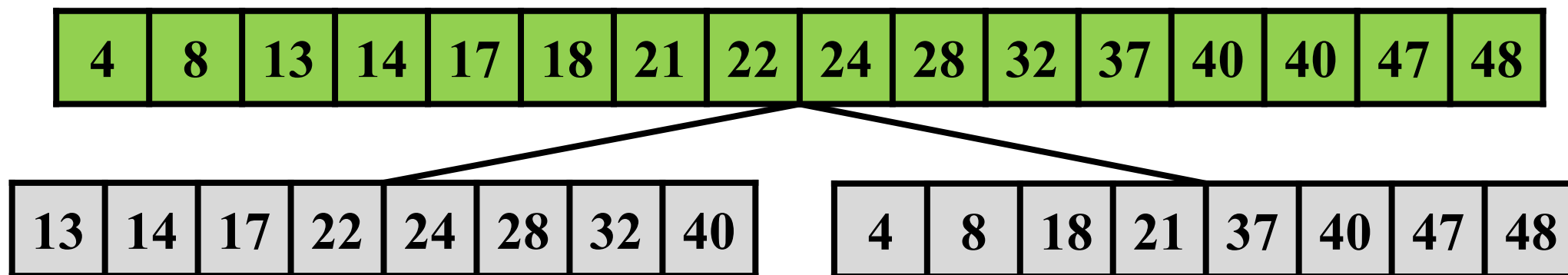
- 将数组 $A[1, n]$ 排序问题 **分解** 为 $A[1, \frac{n}{2}]$ 和 $A[\frac{n}{2} + 1, n]$ 排序问题 **分解原问题**



● 算法流程

- 将数组 $A[1, n]$ 排序问题**分解**为 $A[1, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor]$ 和 $A[\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1, n]$ 排序问题 ① 分解原问题
- **递归解决**子问题得到两个有序的子数组 ② 解决子问题

归并排序

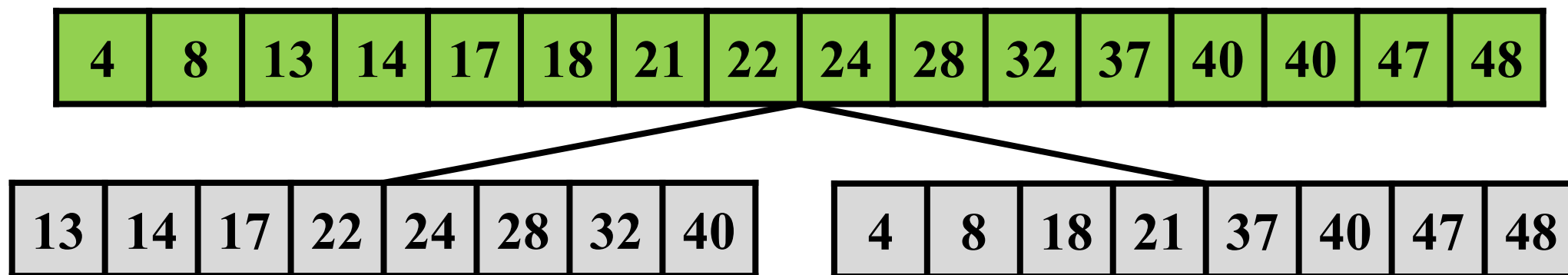


算法流程

- 将数组 $A[1, n]$ 排序问题**分解**为 $A[1, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor]$ 和 $A[\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1, n]$ 排序问题① **分解原问题**
- 递归解决**子问题得到两个有序的子数组② **解决子问题**
- 将两个有序子数组**合并**为一个有序数组③ **合并问题解**

递归
归并排序：分解数组，递归求解，合并排序
合并

归并排序



● 算法流程

- 将数组 $A[1, n]$ 排序问题**分解**为 $A[1, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor]$ 和 $A[\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1, n]$ 排序问题
- **递归解决**子问题得到两个有序的子数组
- 将两个有序子数组**合并**为一个有序数组

分解原问题

解决子问题

合并问题解

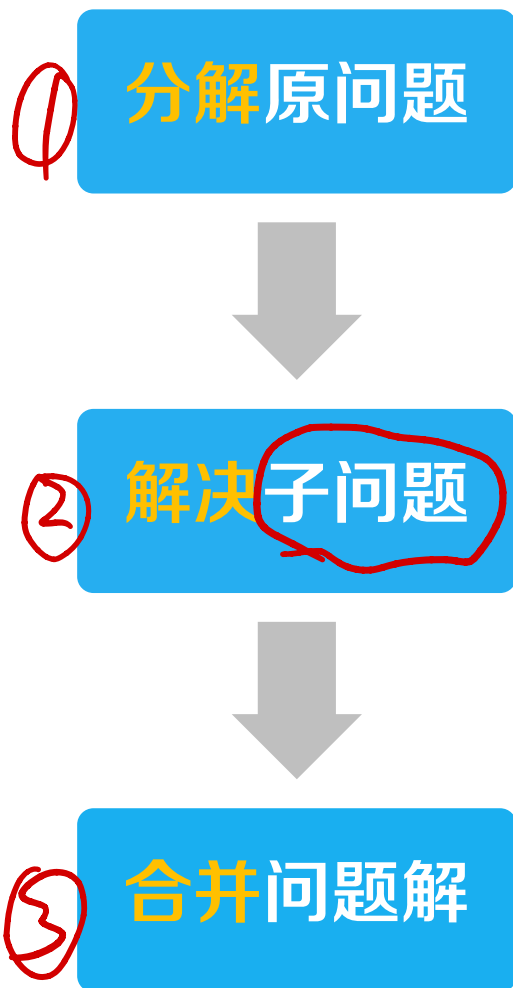
归并排序：分解数组，递归求解，合并排序

分而治之

分而治之：一般步骤



分而治之



大问题 $\xrightarrow{\text{拆解}}$ 小问题 $\xrightarrow{\text{合并}}$ 原问题的解

原问题分解成多个子问题

递归地求解各个子问题

将结果合并为原问题解

归并排序：伪代码



- MergeSort($A, left, right$)

初始调用：MergeSort($A, 1, n$)

输入：数组 $A[1..n]$, 数组下标 $left, right$

输出：递增数组 $A[left..right]$

if $left \geq right$ then
| return $A[left..right]$

end

$mid \leftarrow \lfloor \frac{left+right}{2} \rfloor$

MergeSort($A, left, mid$)

MergeSort($A, mid + 1, right$)

Merge($A, left, mid, right$)

return $A[left..right]$

归并排序：伪代码

- MergeSort($A, left, right$)

初始调用：MergeSort($A, 1, n$)

输入：数组 $A[1..n]$, 数组下标 $left, right$

输出：递增数组 $A[left..right]$

if $left \geq right$ **then**

return $A[left..right]$

end

$mid \leftarrow \lfloor \frac{left+right}{2} \rfloor$

MergeSort($A, left, mid$)

MergeSort($A, mid + 1, right$)

Merge($A, left, mid, right$)

return $A[left..right]$

递归终止：仅有一个元素



归并排序：伪代码

- MergeSort($A, left, right$)

初始调用：MergeSort($A, 1, n$)

输入：数组 $A[1..n]$, 数组下标 $left, right$

输出：递增数组 $A[left..right]$

if $left \geq right$ then

 | return $A[left..right]$

end

$mid \leftarrow \lfloor \frac{left+right}{2} \rfloor$

MergeSort($A, left, mid$)

MergeSort($A, mid + 1, right$)

Merge($A, left, mid, right$)

return $A[left..right]$

计算子问题规模



归并排序：伪代码

- MergeSort($A, left, right$)

初始调用：MergeSort($A, 1, n$)

输入：数组 $A[1..n]$, 数组下标 $left, right$

输出：递增数组 $A[left..right]$

if $left \geq right$ then

 | return $A[left..right]$

end

$mid \leftarrow \lfloor \frac{left+right}{2} \rfloor$

MergeSort($A, left, mid$)

MergeSort($A, mid + 1, right$)

Merge($A, left, mid, right$)

return $A[left..right]$

递归求解子问题

归并排序：伪代码

- MergeSort($A, left, right$)

初始调用：MergeSort($A, 1, n$)

输入：数组 $A[1..n]$, 数组下标 $left, right$

输出：递增数组 $A[left..right]$

if $left \geq right$ then

 | return $A[left..right]$

end

$mid \leftarrow \lfloor \frac{left+right}{2} \rfloor$

MergeSort($A, left, mid$)

MergeSort($A, mid + 1, right$)

Merge($A, left, mid, right$)

return $A[left..right]$

合并子问题解

归并排序：伪代码



- Merge($A, left, mid, right$)

输入: 数组 $A[1..n]$, 数组下标 $left, mid, right$

输出: 递增数组 $A[left..right]$

$A'[left..right] \leftarrow A[left..right]$

$i \leftarrow left, j \leftarrow mid + 1, k \leftarrow 0$

while $i \leq mid$ **and** $j \leq right$ **do**

if $A'[i] \leq A'[j]$ **then**

$A[left + k] \leftarrow A'[i]$

$k \leftarrow k + 1, i \leftarrow i + 1$

end

else

$A[left + k] \leftarrow A'[j]$

$k \leftarrow k + 1, j \leftarrow j + 1$

end

end

if $i \leq mid$ **then**

$A[left + k..right] \leftarrow A'[i..mid]$

end

else

$A[left + k..right] \leftarrow A'[j..right]$

end

return $A[left..right]$

初始化

归并排序：伪代码



- Merge($A, left, mid, right$)

输入: 数组 $A[1..n]$, 数组下标 $left, mid, right$

输出: 递增数组 $A[left..right]$

$A'[left..right] \leftarrow A[left..right]$

$i \leftarrow left, j \leftarrow mid + 1, k \leftarrow 0$

while $i \leq mid$ **and** $j \leq right$ **do**

if $A'[i] \leq A'[j]$ **then**

$A[left + k] \leftarrow A'[i]$

$k \leftarrow k + 1, i \leftarrow i + 1$

end

else

$A[left + k] \leftarrow A'[j]$

$k \leftarrow k + 1, j \leftarrow j + 1$

end

end

if $i \leq mid$ **then**

$A[left + k..right] \leftarrow A'[i..mid]$

end

else

$A[left + k..right] \leftarrow A'[j..right]$

end

return $A[left..right]$

遍历子数组，进行合并

归并排序：伪代码



- Merge($A, left, mid, right$)

输入: 数组 $A[1..n]$, 数组下标 $left, mid, right$

输出: 递增数组 $A[left..right]$

$A'[left..right] \leftarrow A[left..right]$

$i \leftarrow left, j \leftarrow mid + 1, k \leftarrow 0$

while $i \leq mid$ and $j \leq right$ **do**

if $A'[i] \leq A'[j]$ **then**

$A[left + k] \leftarrow A'[i]$

$k \leftarrow k + 1, i \leftarrow i + 1$

end

else

$A[left + k] \leftarrow A'[j]$

$k \leftarrow k + 1, j \leftarrow j + 1$

end

end

if $i \leq mid$ **then**

$A[left + k..right] \leftarrow A'[i..mid]$

end

else

$A[left + k..right] \leftarrow A'[j..right]$

end

return $A[left..right]$

添加剩余元素保证有序

归并排序：伪代码



- Merge($A, left, mid, right$)

输入: 数组 $A[1..n]$, 数组下标 $left, mid, right$

输出: 递增数组 $A[left..right]$

$A'[left..right] \leftarrow A[left..right]$

$i \leftarrow left, j \leftarrow mid + 1, k \leftarrow 0$

while $i \leq mid$ **and** $j \leq right$ **do**

if $A'[i] \leq A'[j]$ **then**

$A[left + k] \leftarrow A'[i]$

$k \leftarrow k + 1, i \leftarrow i + 1$

end

else

$A[left + k] \leftarrow A'[j]$

$k \leftarrow k + 1, j \leftarrow j + 1$

end

end

if $i \leq mid$ **then**

$A[left + k..right] \leftarrow A'[i..mid]$

end

else

$A[left + k..right] \leftarrow A'[j..right]$

end

return $A[left..right]$

时间复杂度: $O(n)$

归并排序：复杂度分析



- $T(n)$: 完成MergeSort($A, 1, n$) 的运行时间
 - 为便于分析, 假设 n 是2的幂

归并排序：复杂度分析

- $T(n)$: 完成MergeSort($A, 1, n$) 的运行时间
 - 为便于分析, 假设 n 是2的幂
- MergeSort($A, left, right$)

输入: 数组 $A[1..n]$, 数组下标 $left, right$

输出: 递增数组 $A[left..right]$

if $left \geq right$ then

 | return $A[left..right]$

end

$mid \leftarrow \lfloor \frac{left+right}{2} \rfloor$

MergeSort($A, left, mid$)

MergeSort($A, mid + 1, right$)

Merge($A, left, mid, right$)

return $A[left..right]$

归并排序：复杂度分析

- $T(n)$: 完成MergeSort($A, 1, n$) 的运行时间
 - 为便于分析, 假设 n 是2的幂
- MergeSort($A, left, right$)

输入: 数组 $A[1..n]$, 数组下标 $left, right$

输出: 递增数组 $A[left..right]$

if $left \geq right$ then

 | return $A[left..right]$

end

$mid \leftarrow \lfloor \frac{left+right}{2} \rfloor$

MergeSort($A, left, mid$)

MergeSort($A, mid + 1, right$)

Merge($A, left, mid, right$)

return $A[left..right]$

} $O(1)$

→ $T(n/2)$

→ $T(n/2)$

→ $O(n)$

$$T(n) = \begin{cases} 2T(n/2) + O(n), & \text{if } n > 1 \\ O(1), & \text{if } n = 1 \end{cases}$$



归并排序：复杂度分析

- $T(n)$: 完成MergeSort($A, 1, n$) 的运行时间
 - 为便于分析, 假设 n 是2的幂
- MergeSort($A, left, right$)

输入: 数组 $A[1..n]$, 数组下标 $left, right$

输出: 递增数组 $A[left..right]$

if $left \geq right$ then

 | return $A[left..right]$

end

$mid \leftarrow \lfloor \frac{left+right}{2} \rfloor$

MergeSort($A, left, mid$)

MergeSort($A, mid + 1, right$)

Merge($A, left, mid, right$)

return $A[left..right]$

} $O(1)$

→ $T(n/2)$

→ $T(n/2)$

→ $O(n)$

$$T(n) = \begin{cases} 2T(n/2) + O(n), & \text{if } n > 1 \\ O(1), & \text{if } n = 1 \end{cases} \quad ?$$

归并排序：复杂度分析



- 递归树法：用树的形式表示抽象递归

求解递归
时间复杂度

$$T(n) = \begin{cases} 2T(n/2) + O(n), & \text{if } n > 1 \\ O(1), & \text{if } n = 1 \end{cases}$$

归并排序：复杂度分析



- 递归树法：用树的形式表示抽象递归

$$T(n) = \begin{cases} 2T(n/2) + O(n), & \text{if } n > 1 \\ O(1), & \text{if } n = 1 \end{cases}$$

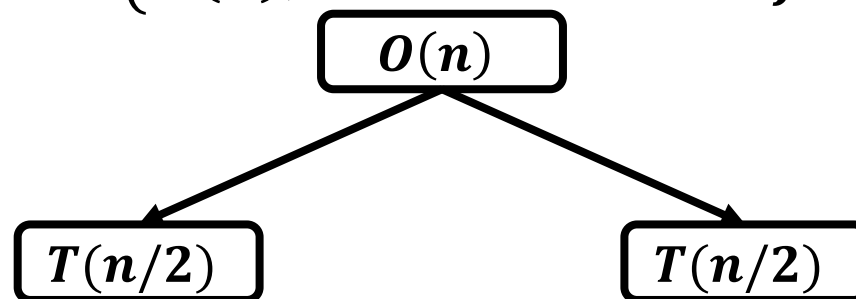
$T(n)$

归并排序：复杂度分析



- 递归树法：用树的形式表示抽象递归

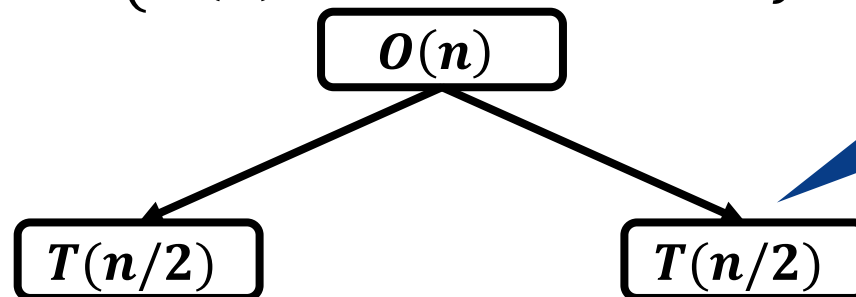
$$T(n) = \begin{cases} 2T(n/2) + O(n), & \text{if } n > 1 \\ O(1), & \text{if } n = 1 \end{cases}$$



归并排序：复杂度分析

- 递归树法：用树的形式表示抽象递归

$$T(n) = \begin{cases} 2T(n/2) + O(n), & \text{if } n > 1 \\ O(1), & \text{if } n = 1 \end{cases}$$



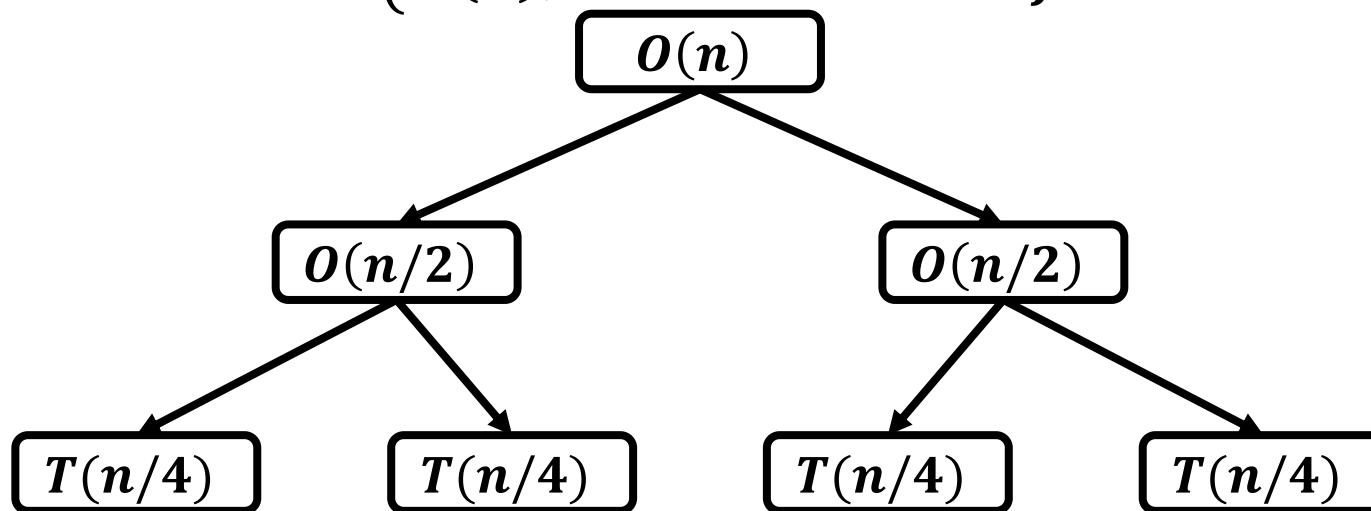
每个结点代表解决一个子问题的代价

归并排序：复杂度分析



- 递归树法：用树的形式表示抽象递归

$$T(n) = \begin{cases} 2T(n/2) + O(n), & \text{if } n > 1 \\ O(1), & \text{if } n = 1 \end{cases}$$

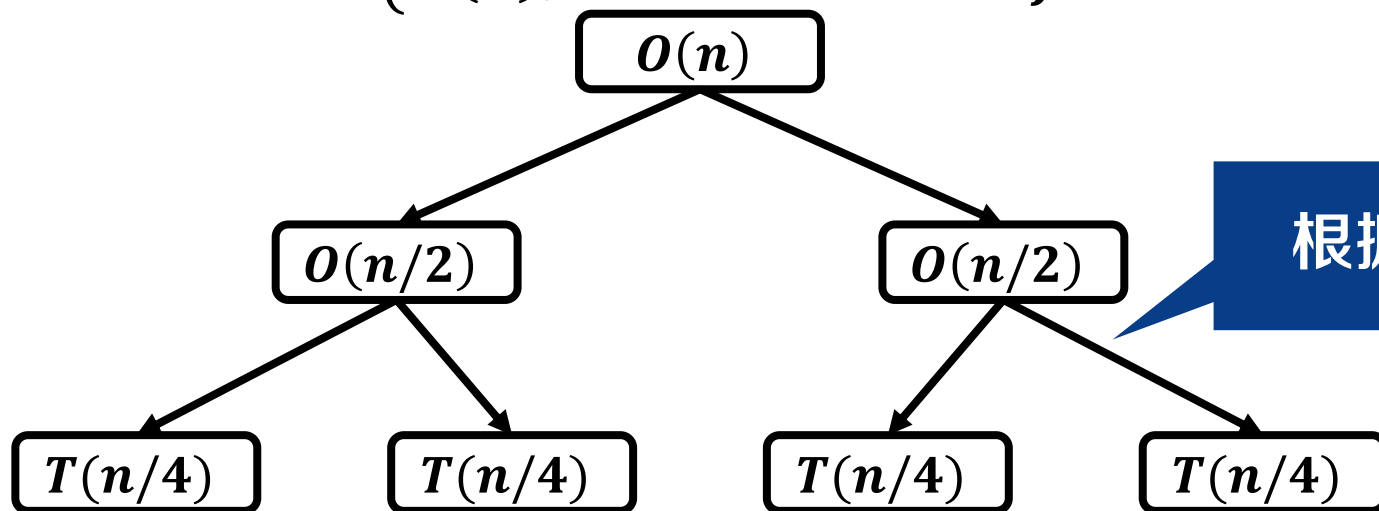


归并排序：复杂度分析



- 递归树法：用树的形式表示抽象递归

$$T(n) = \begin{cases} 2T(n/2) + O(n), & \text{if } n > 1 \\ O(1), & \text{if } n = 1 \end{cases}$$



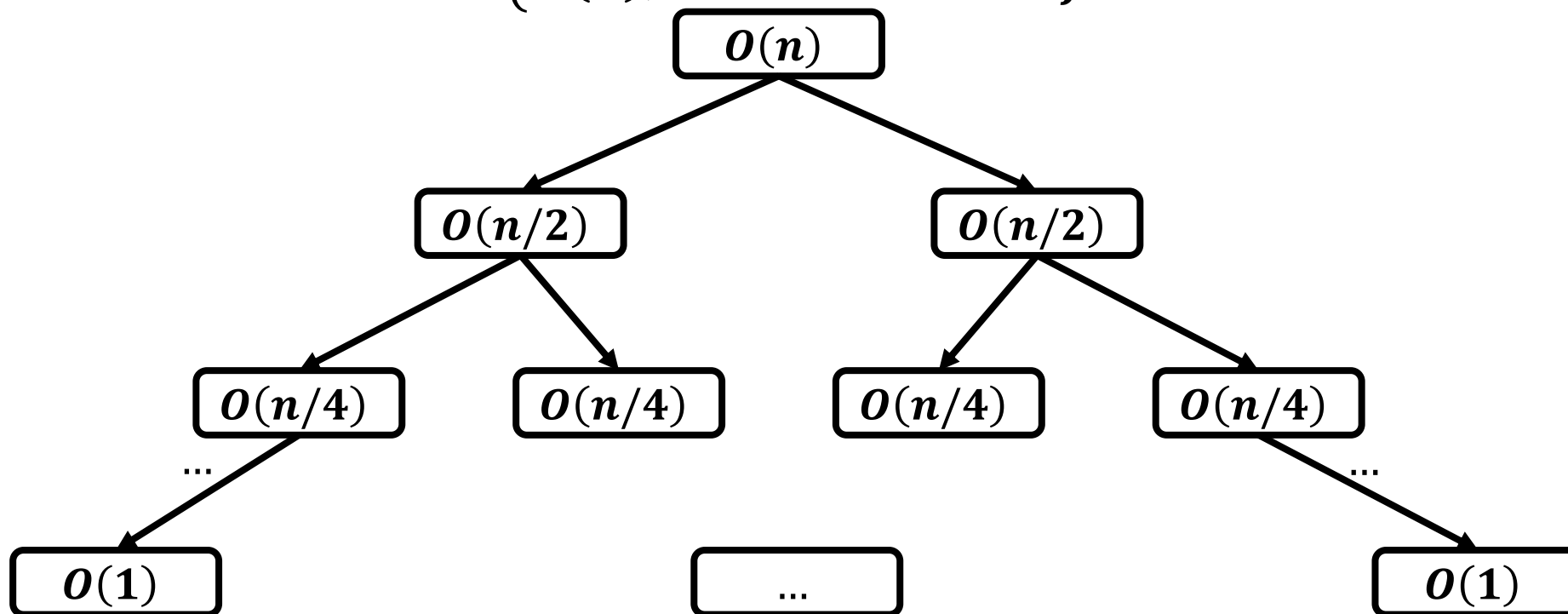
根据递归式向下分解

归并排序：复杂度分析



- 递归树法：用树的形式表示抽象递归

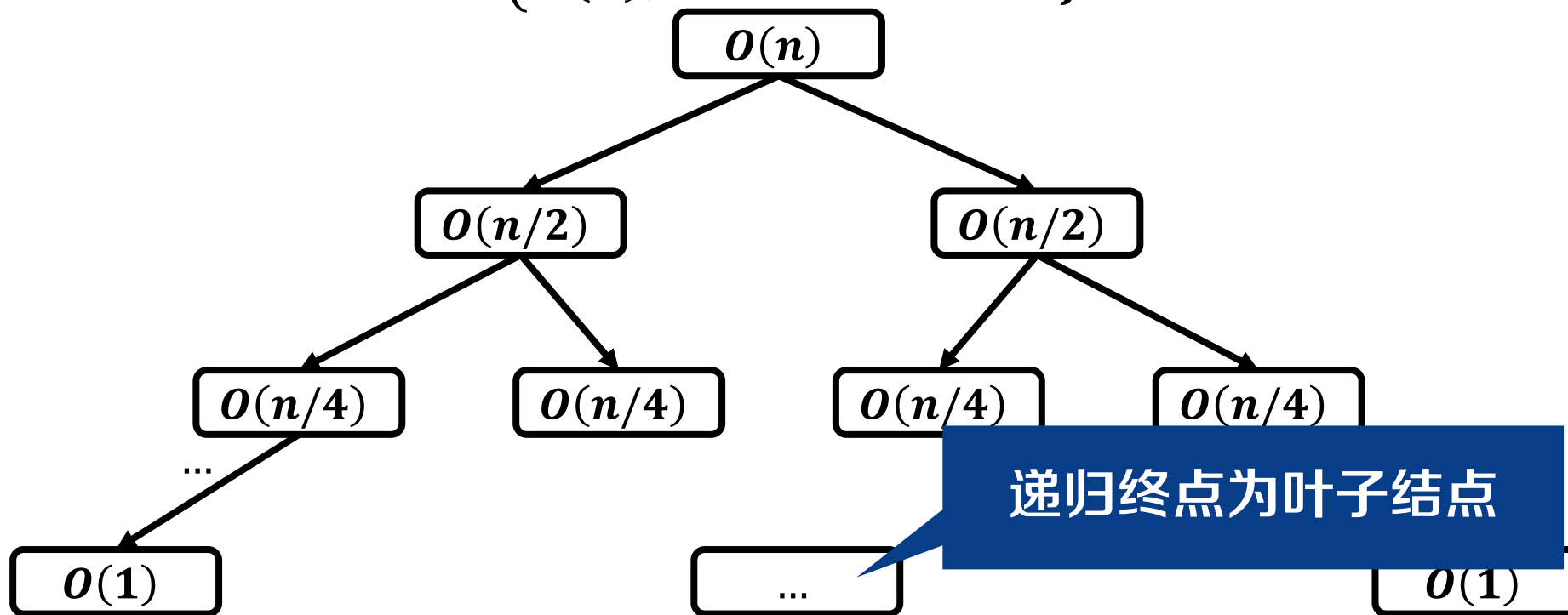
$$T(n) = \begin{cases} 2T(n/2) + O(n), & \text{if } n > 1 \\ O(1), & \text{if } n = 1 \end{cases}$$



归并排序：复杂度分析

- 递归树法：用树的形式表示抽象递归

$$T(n) = \begin{cases} 2T(n/2) + O(n), & \text{if } n > 1 \\ O(1), & \text{if } n = 1 \end{cases}$$

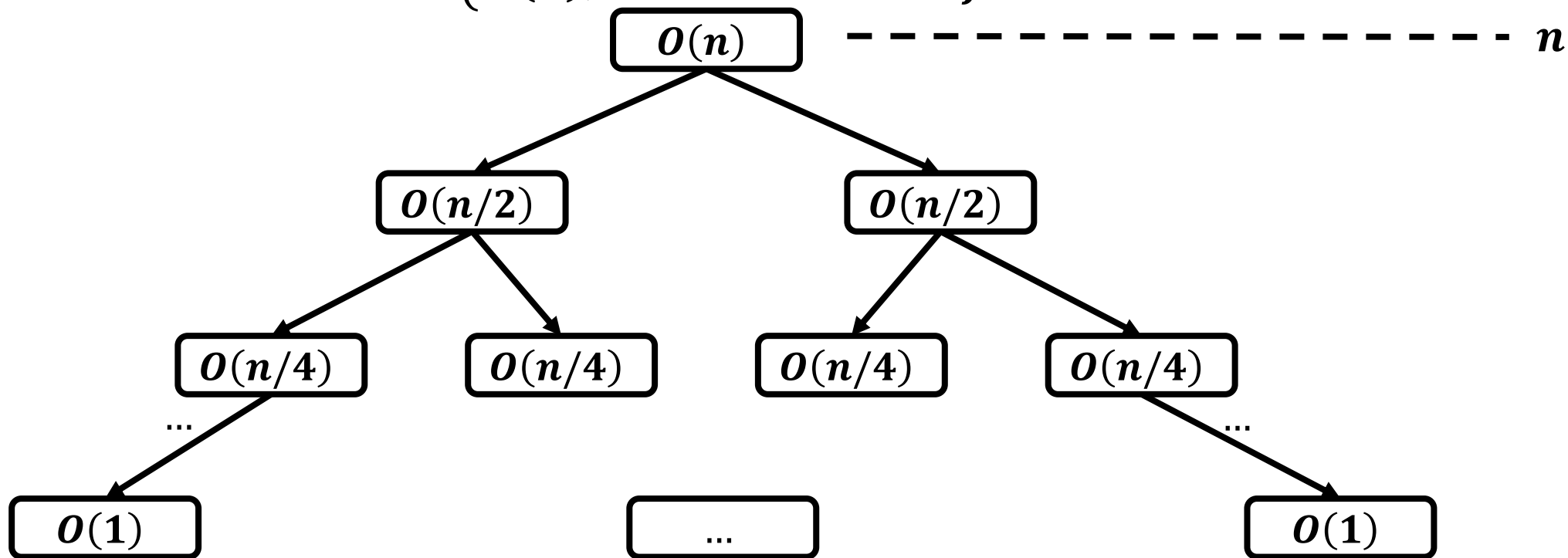


归并排序：复杂度分析



- 递归树法：用树的形式表示抽象递归

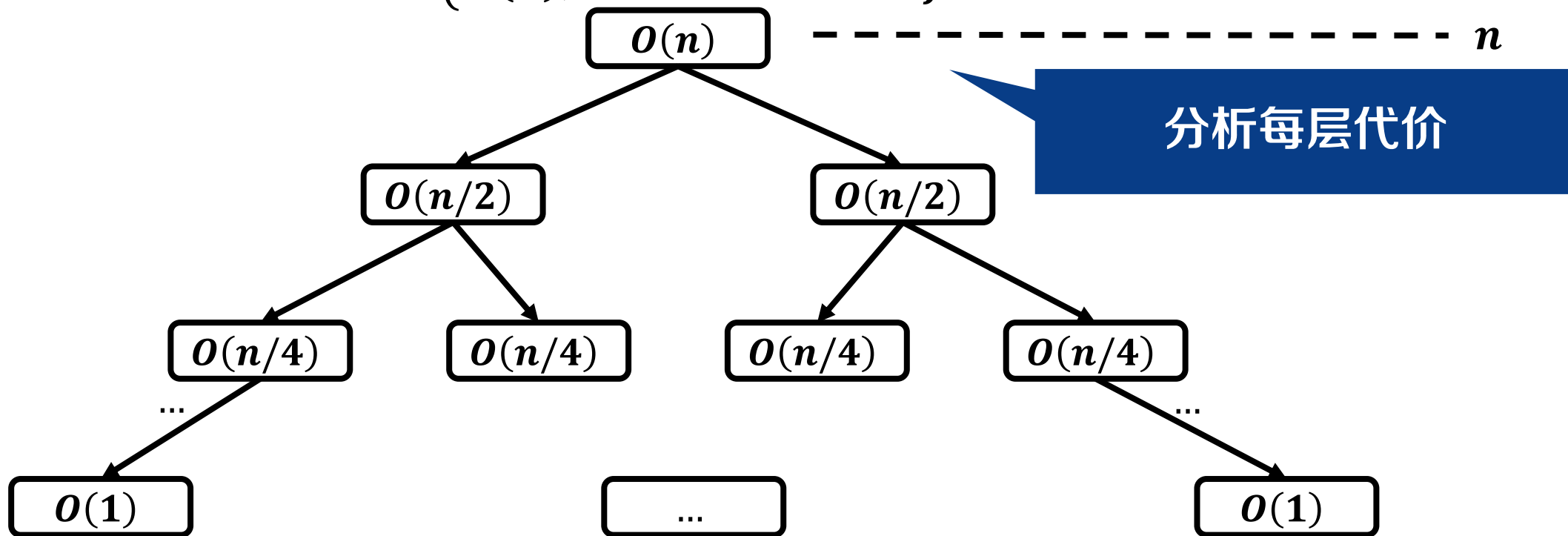
$$T(n) = \begin{cases} 2T(n/2) + O(n), & \text{if } n > 1 \\ O(1), & \text{if } n = 1 \end{cases}$$



归并排序：复杂度分析

- 递归树法：用树的形式表示抽象递归

$$T(n) = \begin{cases} 2T(n/2) + O(n), & \text{if } n > 1 \\ O(1), & \text{if } n = 1 \end{cases}$$

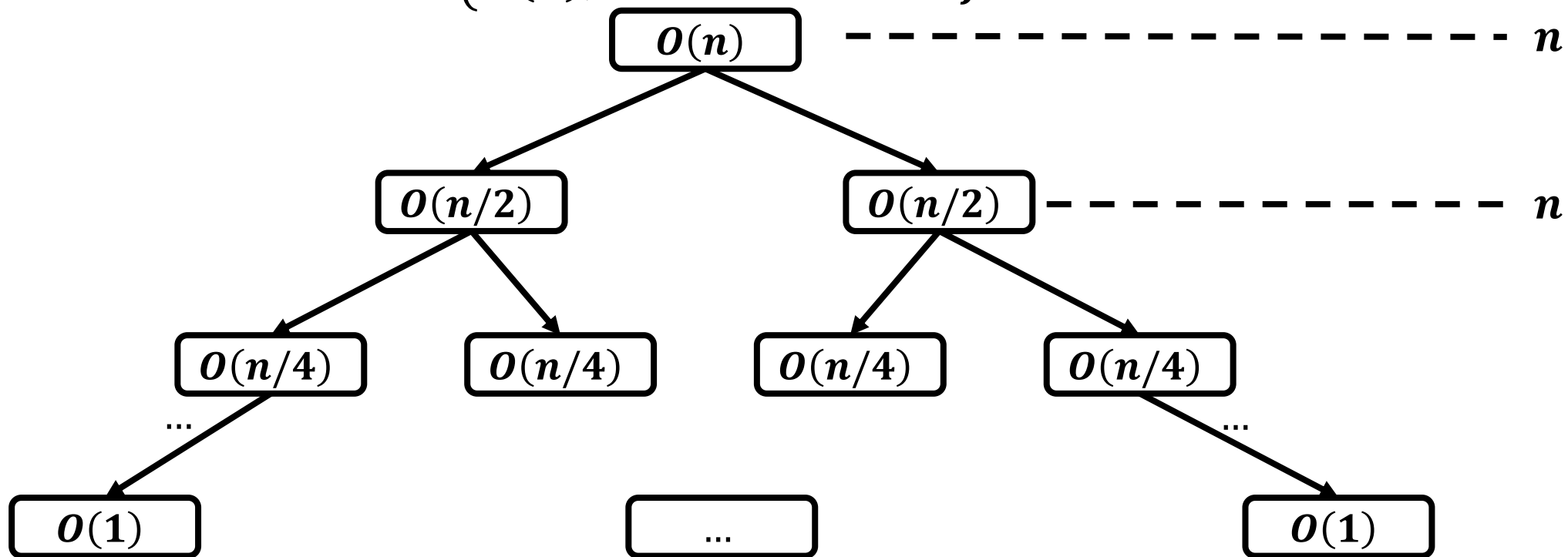


归并排序：复杂度分析



- 递归树法：用树的形式表示抽象递归

$$T(n) = \begin{cases} 2T(n/2) + O(n), & \text{if } n > 1 \\ O(1), & \text{if } n = 1 \end{cases}$$

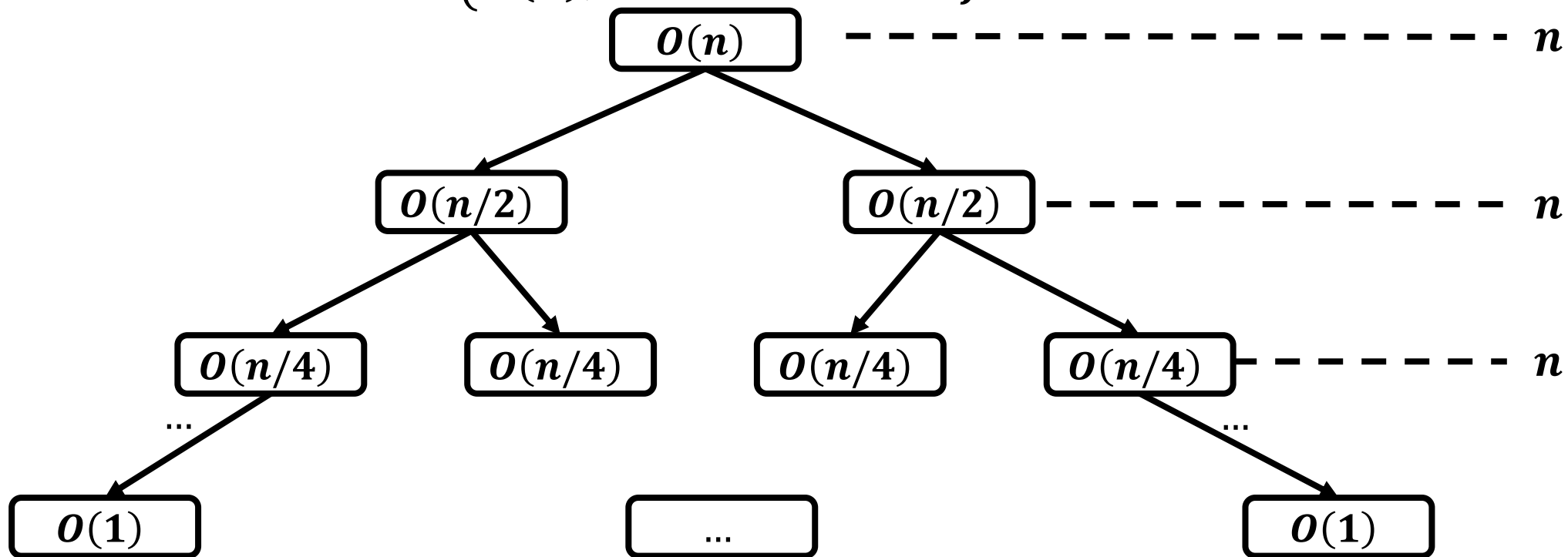


归并排序：复杂度分析



- 递归树法：用树的形式表示抽象递归

$$T(n) = \begin{cases} 2T(n/2) + O(n), & \text{if } n > 1 \\ O(1), & \text{if } n = 1 \end{cases}$$

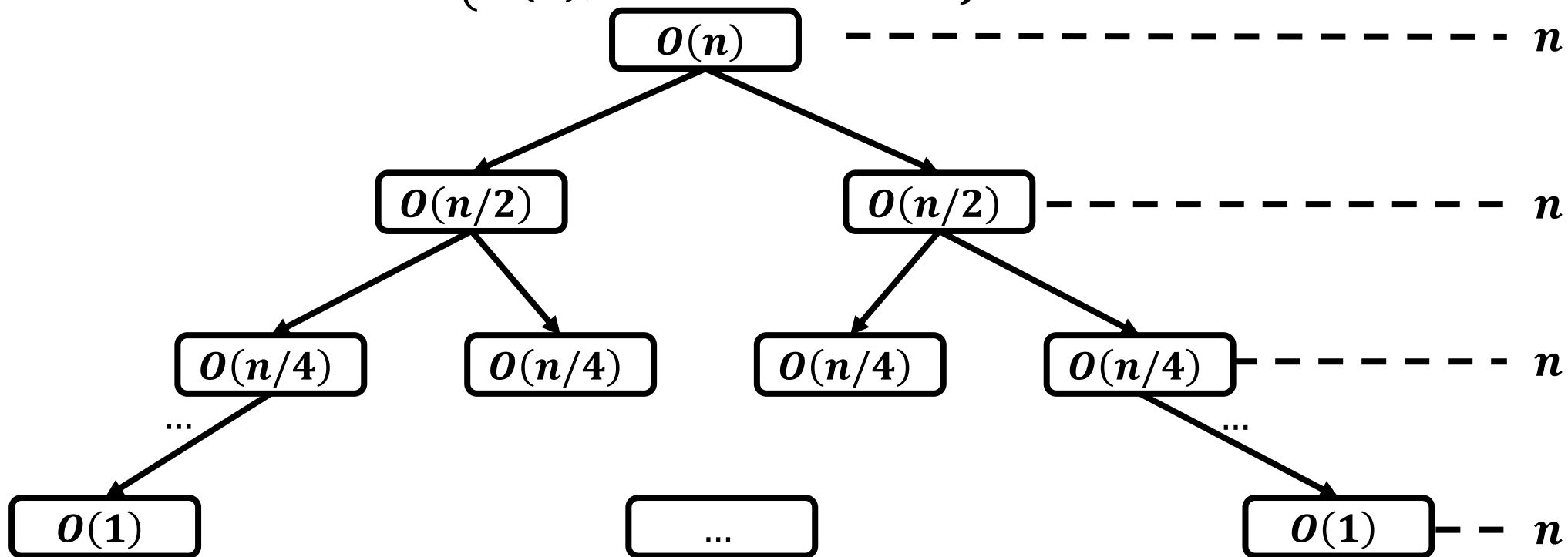


归并排序：复杂度分析



- 递归树法：用树的形式表示抽象递归

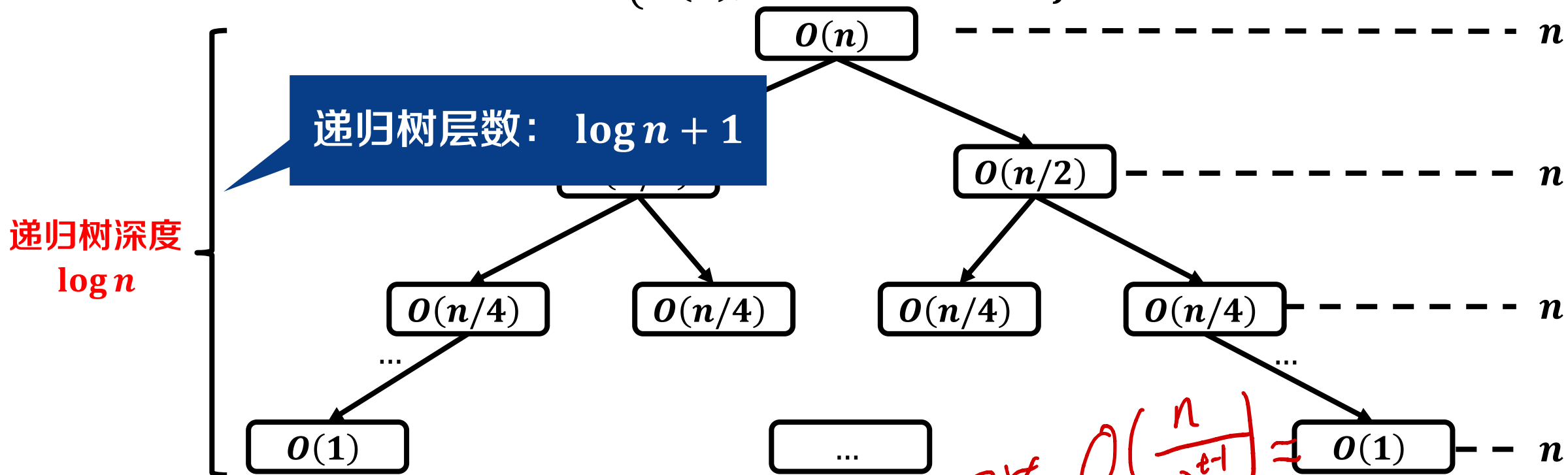
$$T(n) = \begin{cases} 2T(n/2) + O(n), & \text{if } n > 1 \\ O(1), & \text{if } n = 1 \end{cases}$$



归并排序：复杂度分析

- 递归树法：用树的形式表示抽象递归

$$T(n) = \begin{cases} 2T(n/2) + O(n), & \text{if } n > 1 \\ O(1), & \text{if } n = 1 \end{cases}$$



设高度为 t , 则有 $O\left(\frac{n}{2^{t-1}}\right) = O(1)$

$2^{t-1} = n$

$t-1 = \log n$

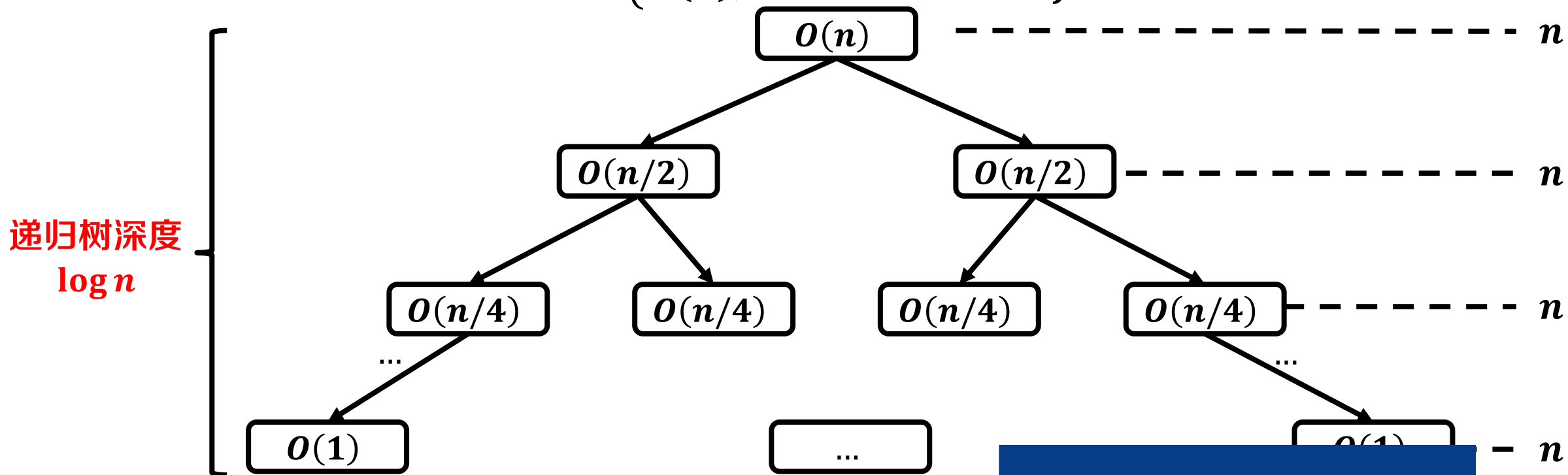
$t = \log n + 1$

由于树的深度通常由0开始计数，故层数=深度+1，后续统一用“深度”

归并排序：复杂度分析

- 递归树法：用树的形式表示抽象递归

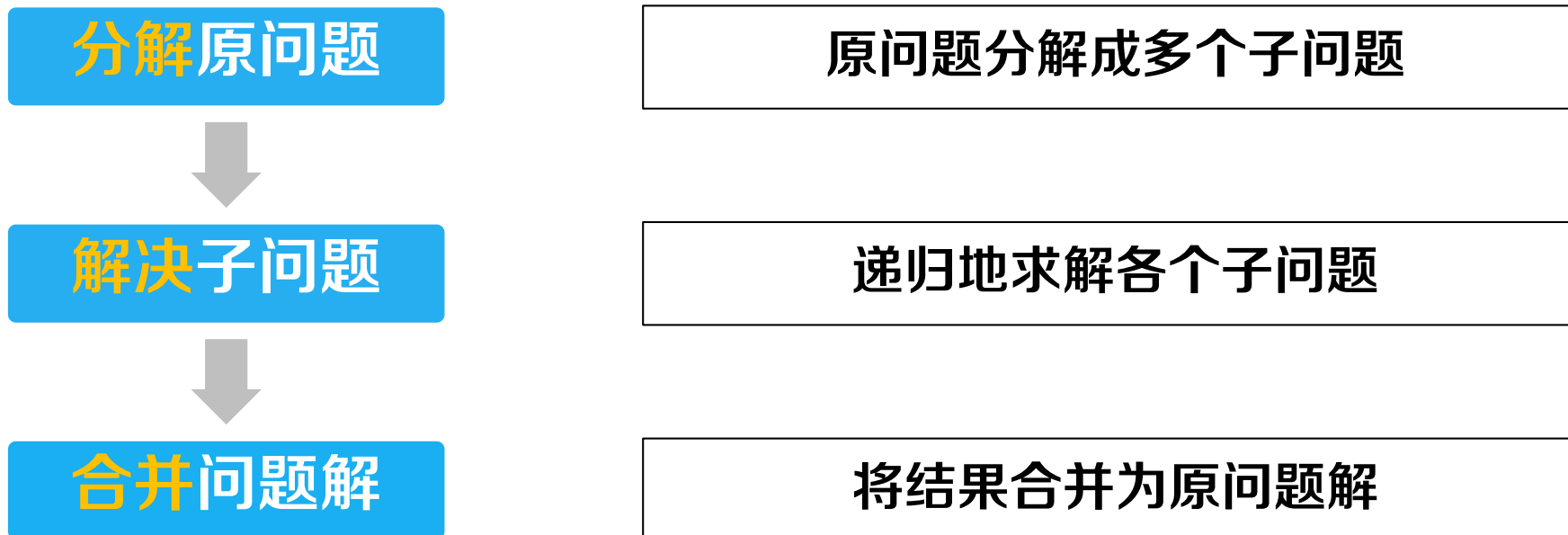
$$T(n) = \begin{cases} 2T(n/2) + O(n), & \text{if } n > 1 \\ O(1), & \text{if } n = 1 \end{cases}$$



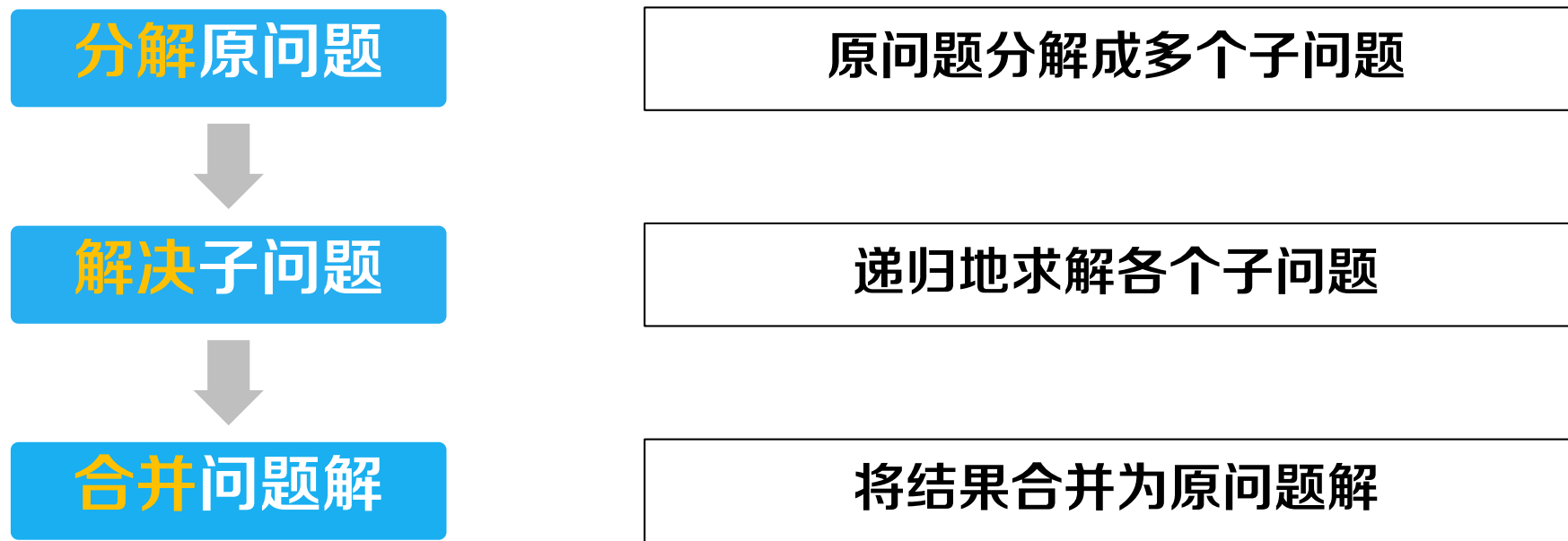
二者相乘为总代价

$$T(n) = O(n \log n)$$
$$n \times (\log n + 1) = O(n \log n)$$

- 分而治之框架



- 分而治之框架



- 归并排序算法分析

- 含递归式的时间复杂度

$$T(n) = \begin{cases} 2T(n/2) + O(n), & \text{if } n > 1 \\ O(1), & \text{if } n = 1 \end{cases} \rightarrow O(n \log n)$$