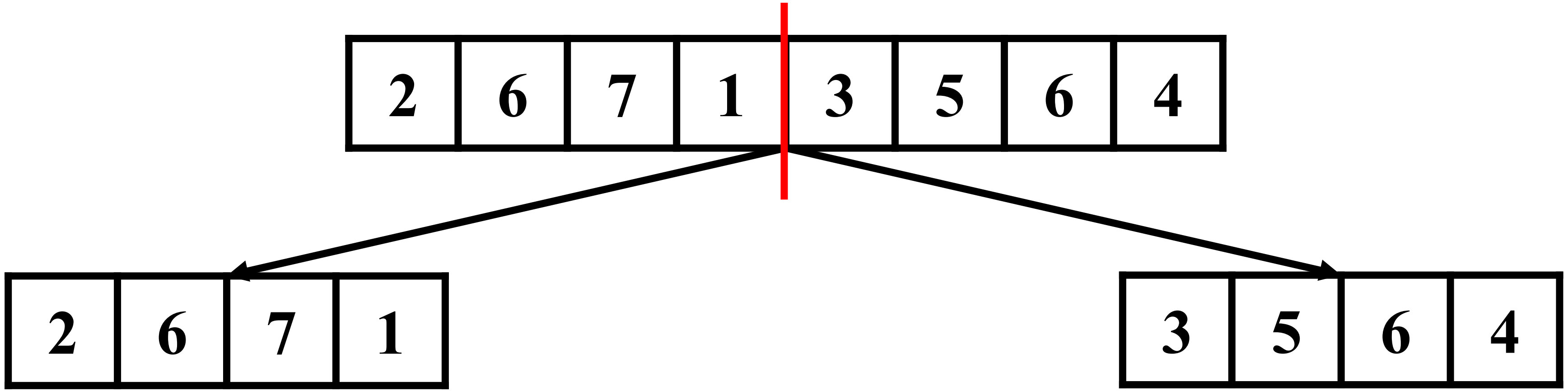
分而治之篇：快速排序

童咏昕

北京航空航天大学
计算机学院

中国大学MOOC北航《算法设计与分析》

算法回顾：归并排序



2	6	7	1	3	5	6	4

2	6	7	1

3	5	6	4

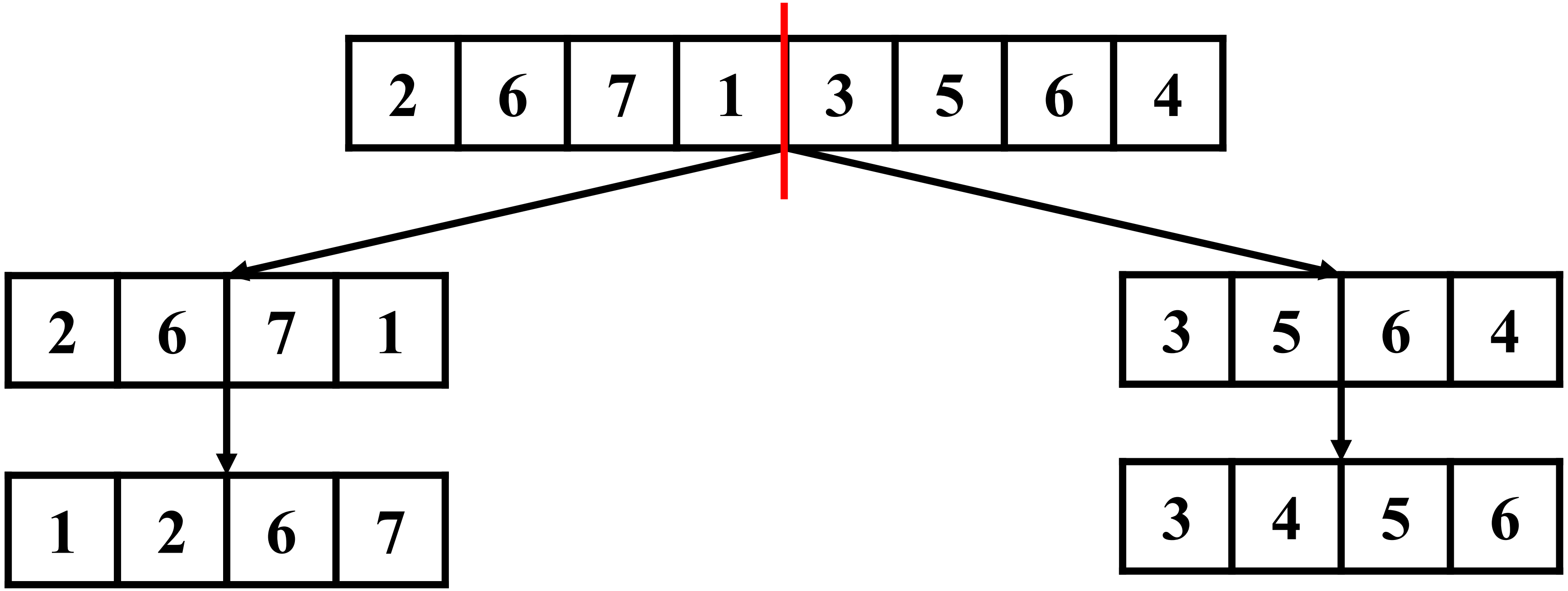
分而治之框架

分解原问题

解决子问题

合并问题解

算法回顾：归并排序



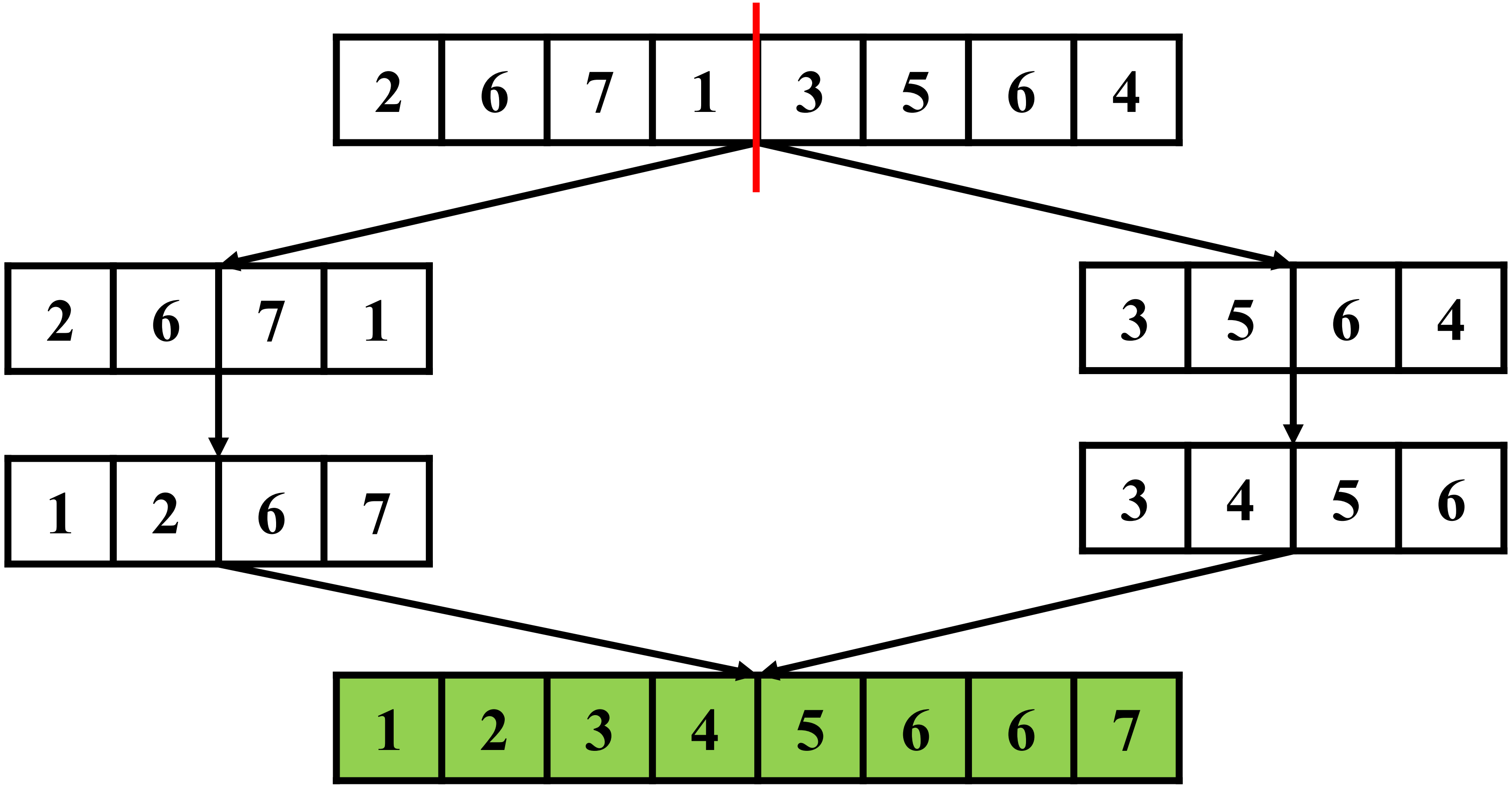
分而治之框架

分解原问题

解决子问题

合并问题解

算法回顾：归并排序



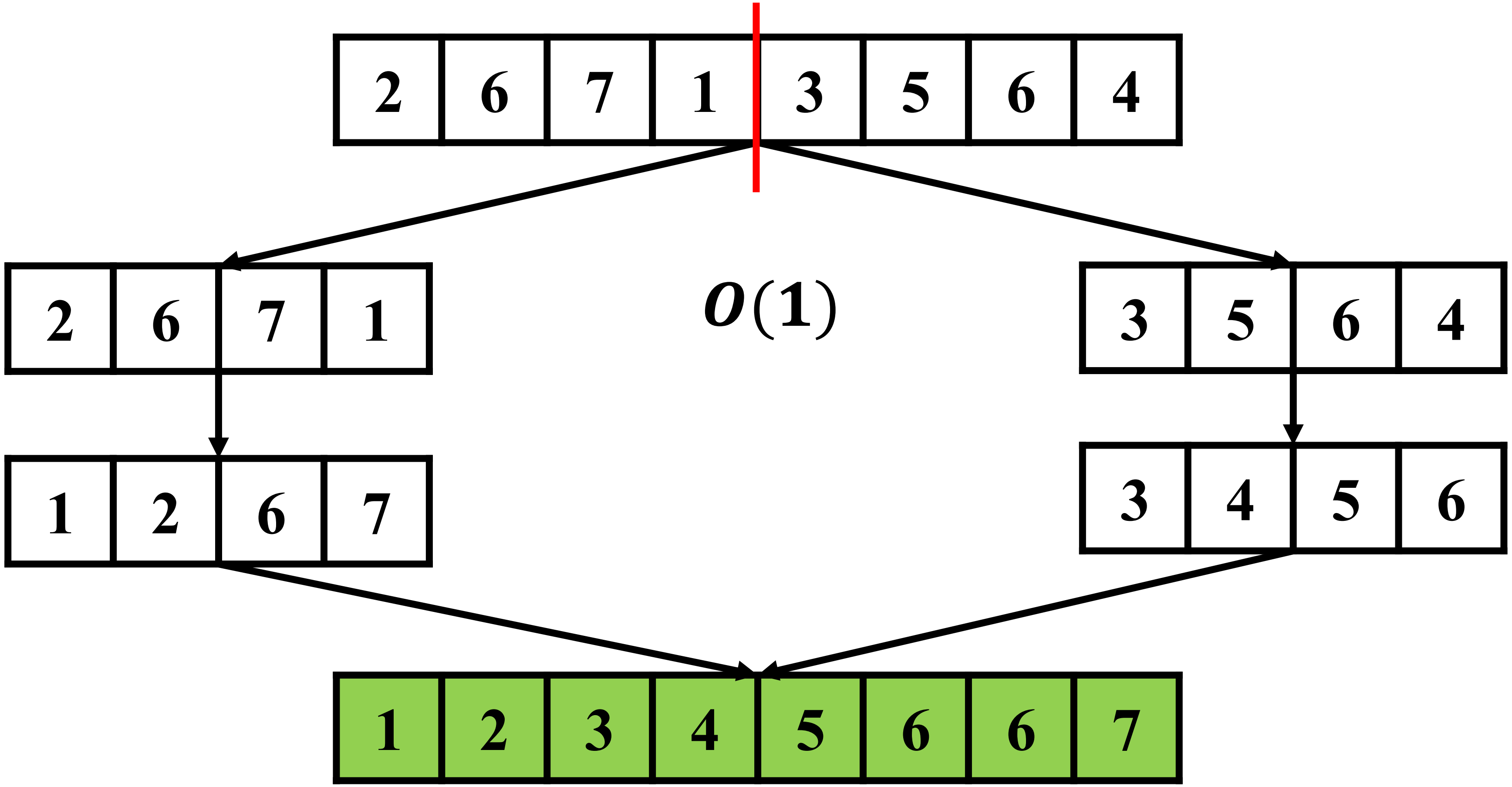
分而治之框架

分解原问题

解决子问题

合并问题解

算法回顾：归并排序



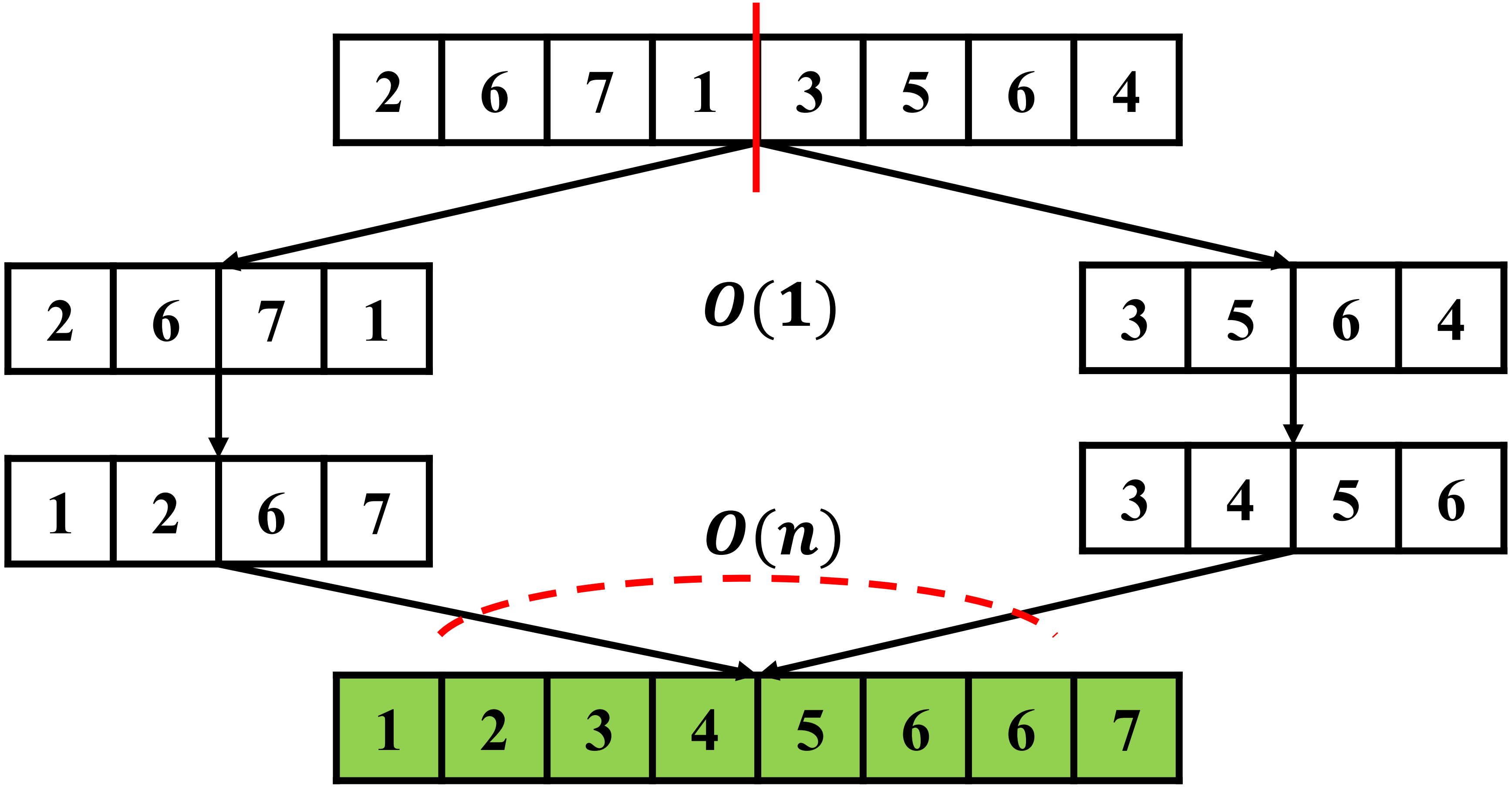
分而治之框架

分解原问题

解决子问题

合并问题解

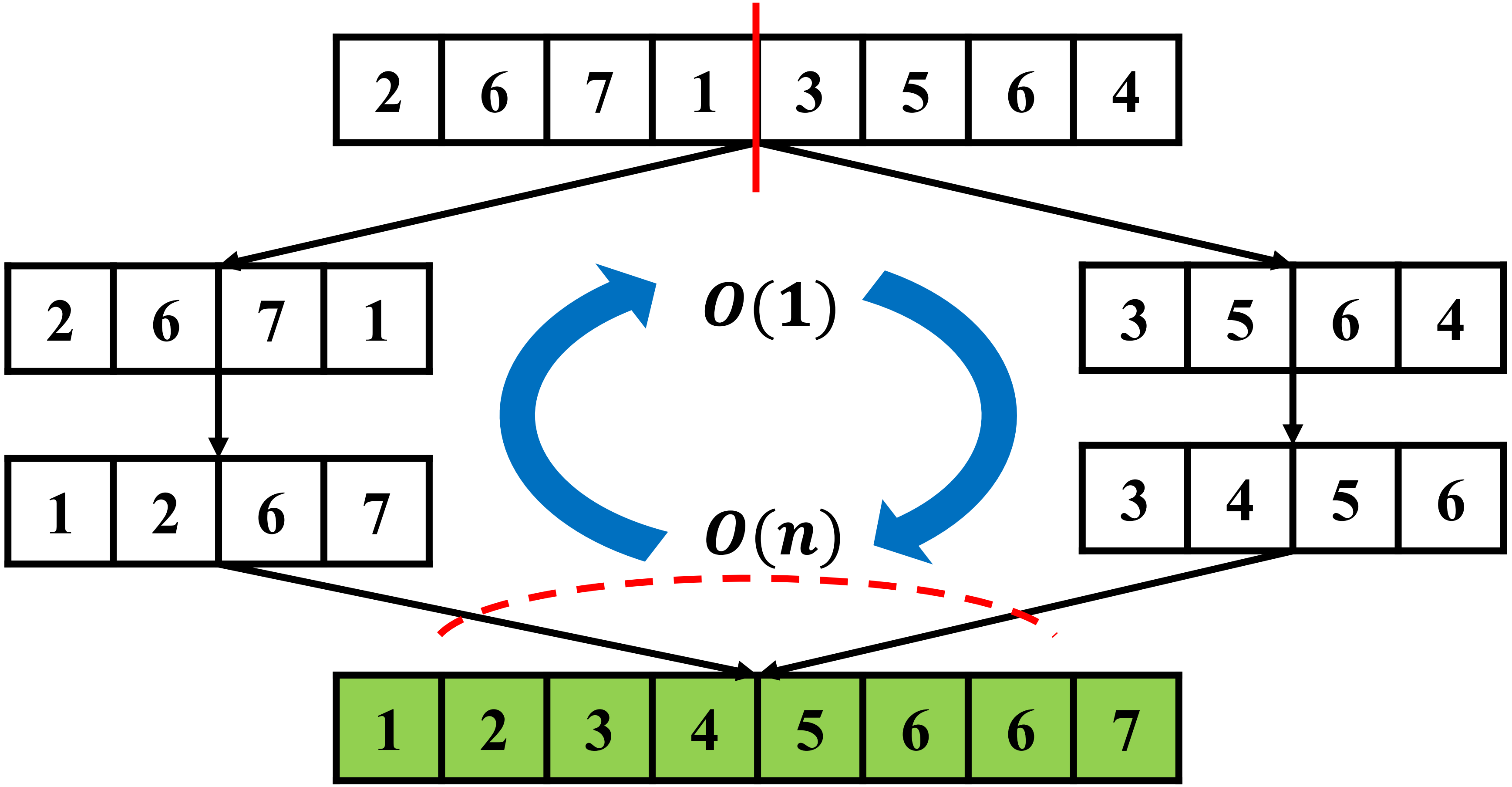
算法回顾：归并排序



归并排序：简化分解，侧重合并

二分

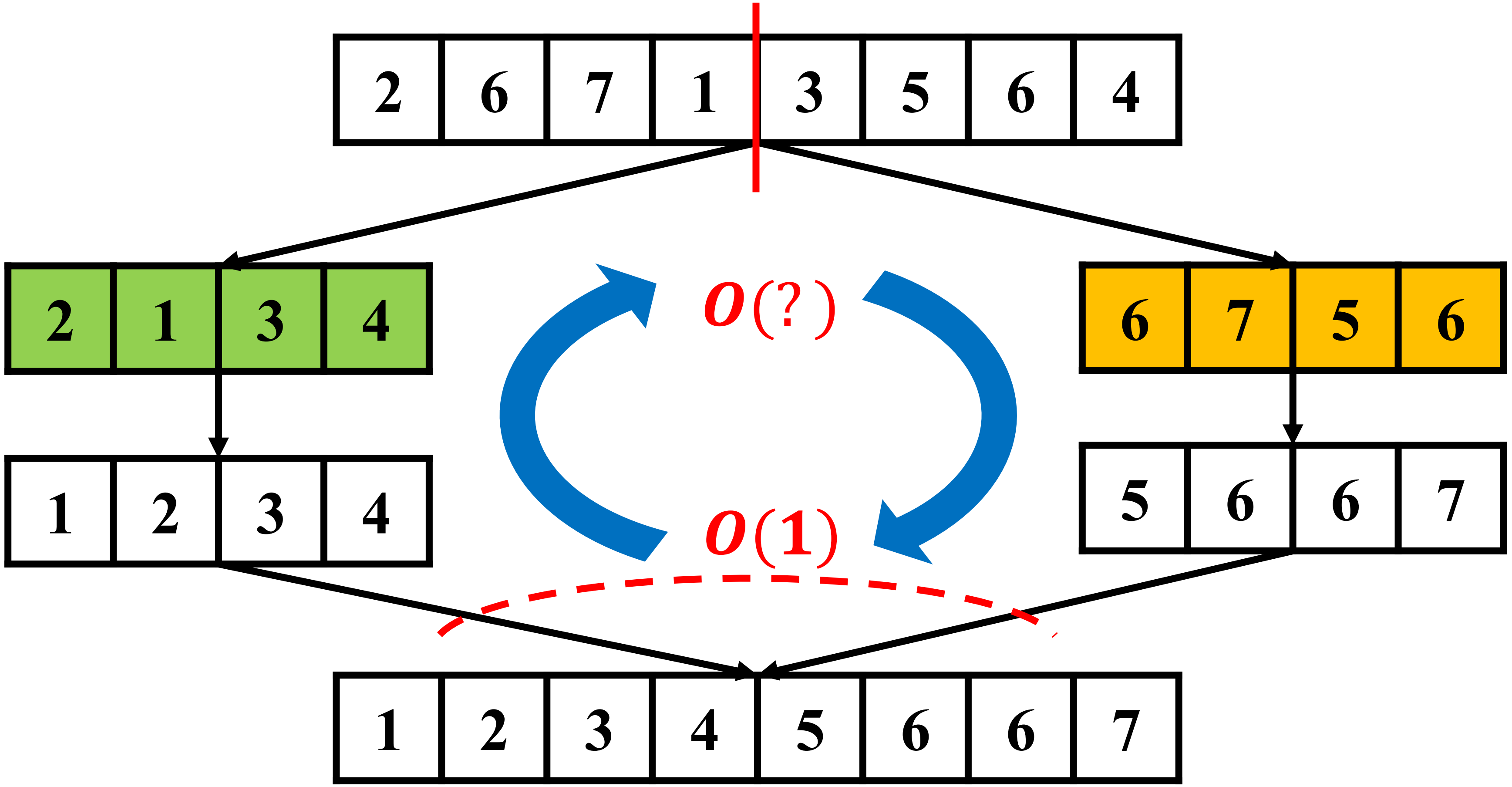
从归并排序到快速排序



分而治之框架

- 分解原问题
- 解决子问题
- 合并问题解

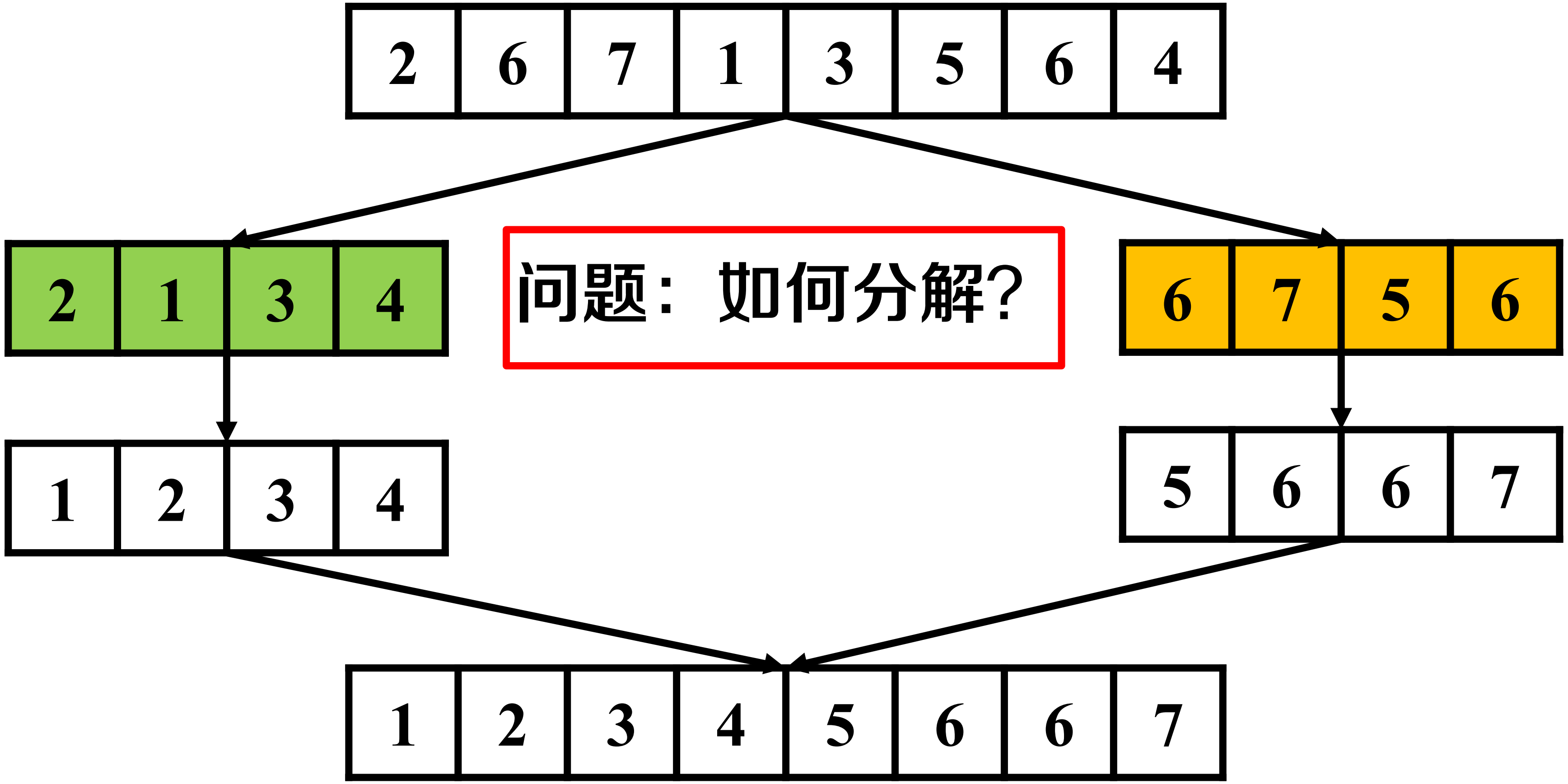
从归并排序到快速排序



分而治之框架

快速排序：侧重分解，简化合并

从归并排序到快速排序



问题：如何分解？

分而治之框架

分解原问题

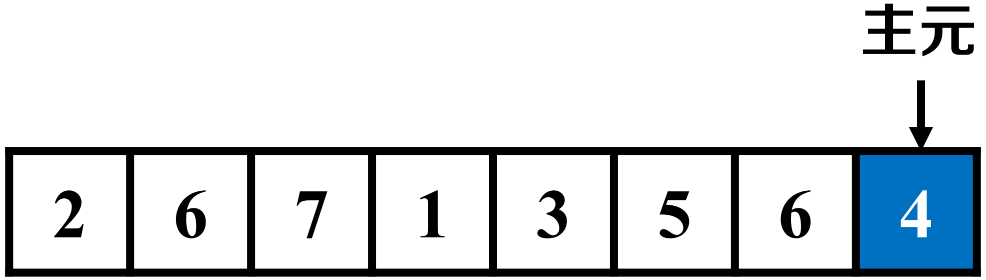
解决子问题

合并问题解

快速排序：侧重分解，简化合并

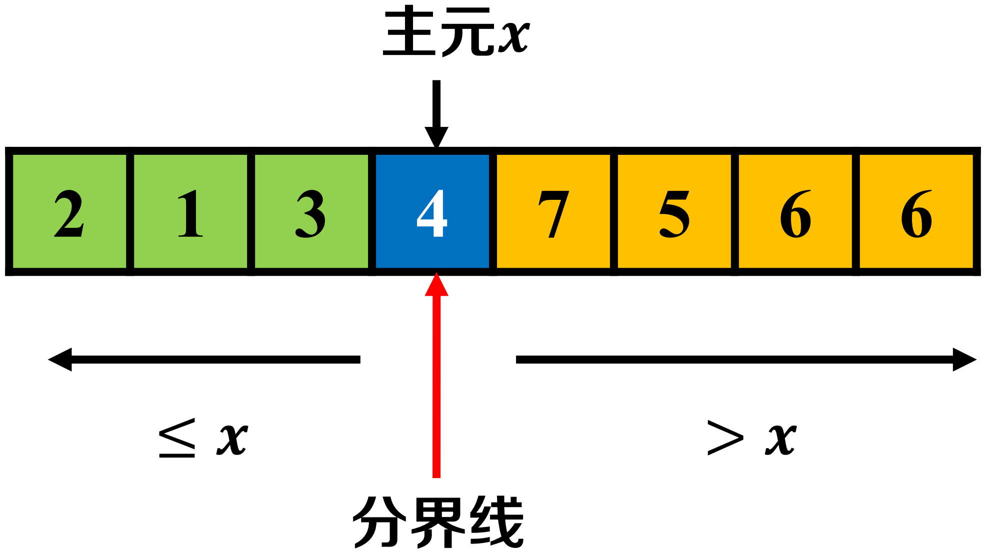
数组划分

- **基本思想**
  - 任选元素x作为分界线，称为主元(pivot)



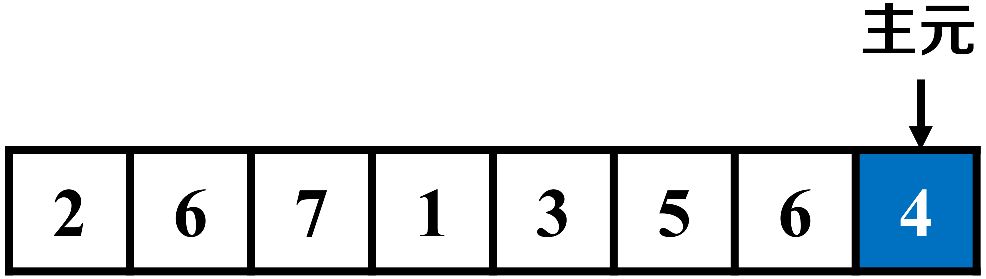
数组划分

- **基本思想**
  - 任选元素x作为分界线，称为主元(pivot)
  - 交换重排，满足x左侧元素小于右侧



数组划分

- 实现方法
  - 选取固定位置主元x（如尾元素）

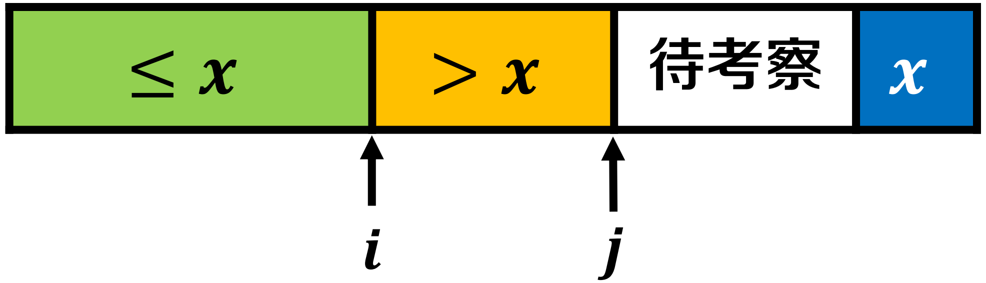


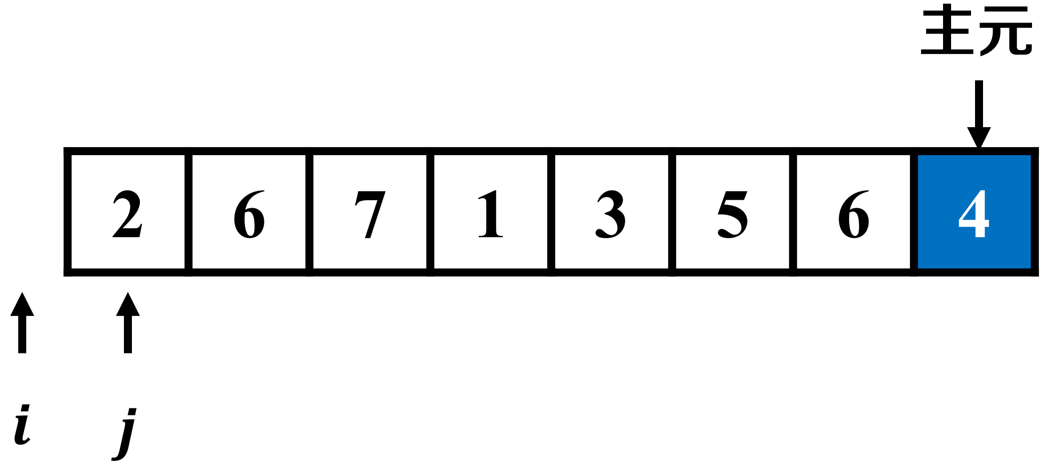
主元

2	6	7	1	3	5	6	4

数组划分

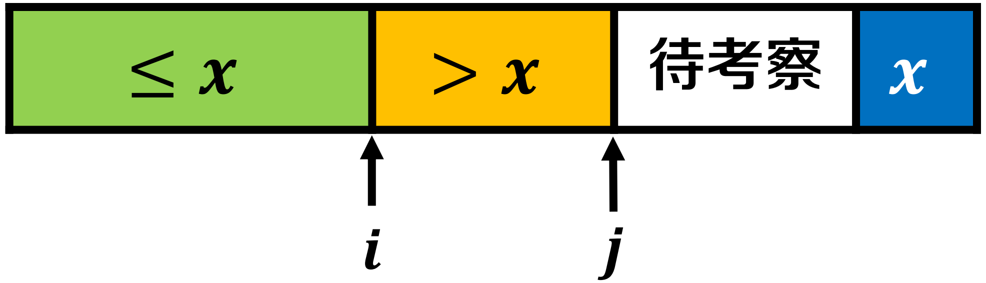
- 实现方法
  - 选取固定位置主元x（如尾元素）
  - 维护两个部分的右端点变量i, j
  - 考察数组元素$A[j]$，**只和主元比较**

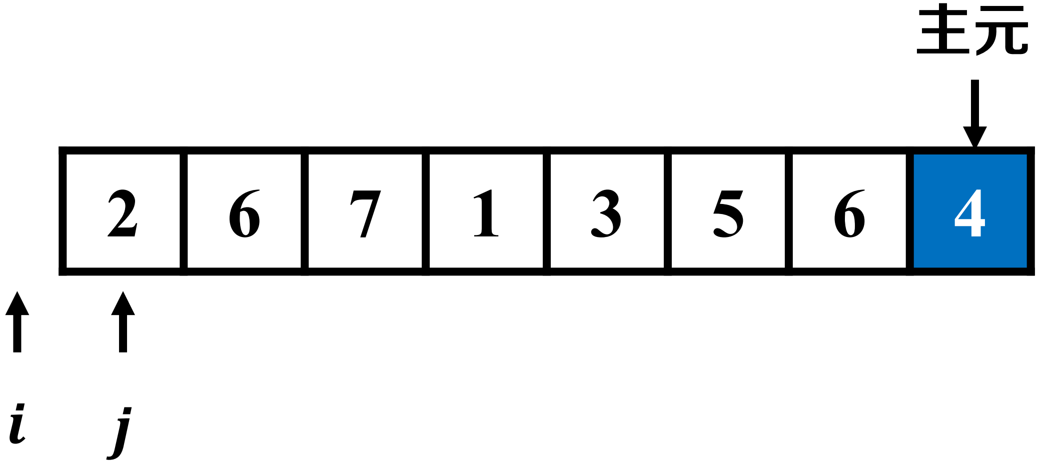




数组划分

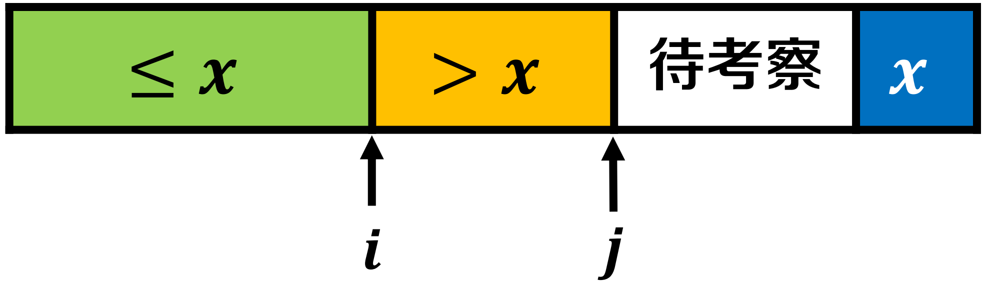
- **实现方法**
  - 选取固定位置主元x（如尾元素）
  - 维护两个部分的右端点变量i, j
  - 考察数组元素$A[j]$，**只和主元比较**
    - 若$A[j] \leq x$，则交换$A[j]$和$A[i+1]$，i, j右移
    - 若$A[j] > x$，则j右移

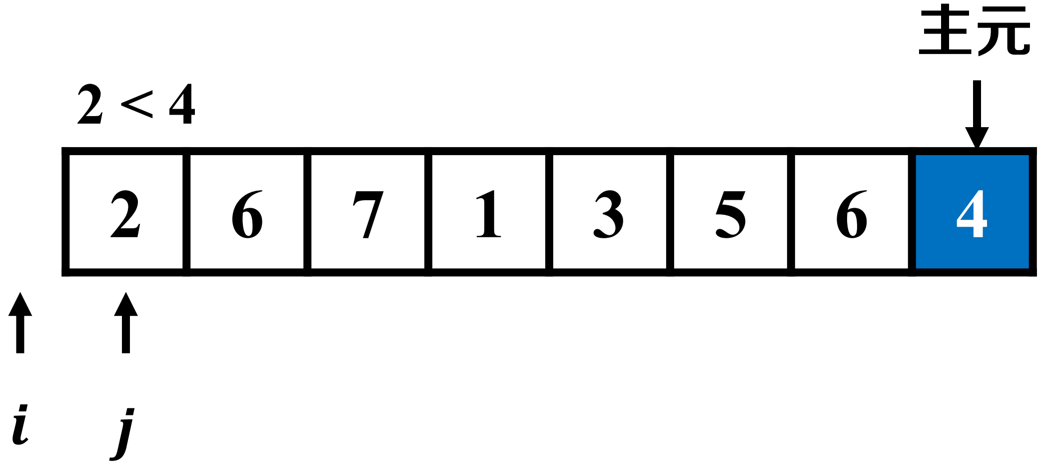




数组划分

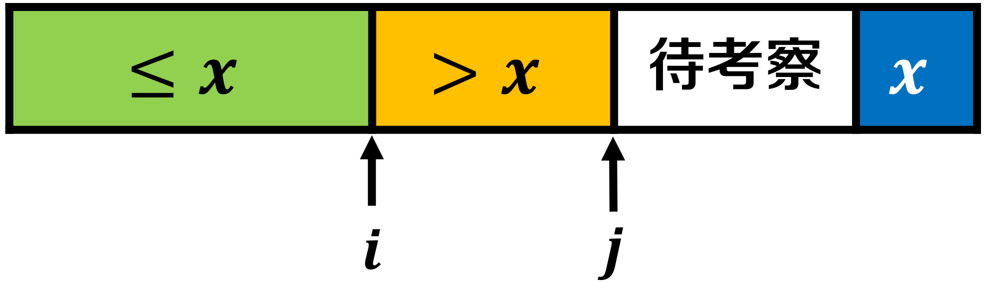
- **实现方法**
  - 选取固定位置主元x（如尾元素）
  - 维护两个部分的右端点变量i, j
  - 考察数组元素$A[j]$，只和主元比较
    - 若$A[j] \leq x$，则交换$A[j]$和$A[i+1]$，i, j右移
    - 若$A[j] > x$，则j右移

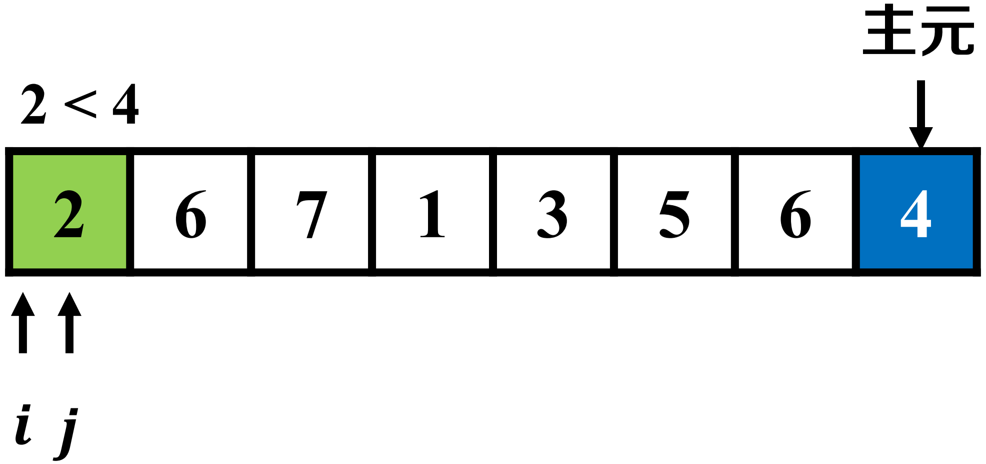




数组划分

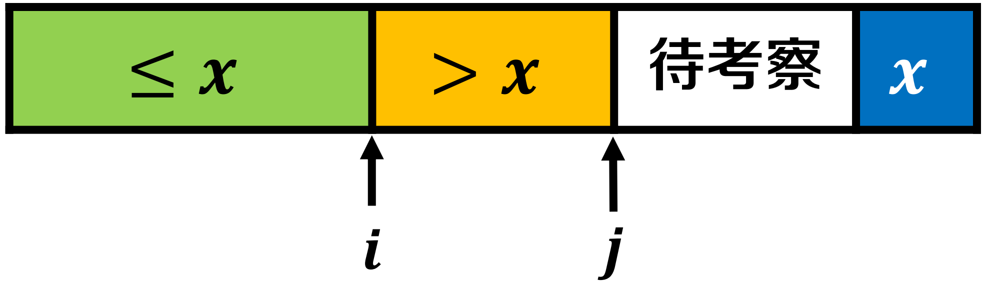
- 实现方法
  - 选取固定位置主元x（如尾元素）
  - 维护两个部分的右端点变量i,j
  - 考察数组元素$A[j]$，**只和主元比较**
    - 若$A[j] \le x$，则交换$A[j]$和$A[i+1]$，i,j右移
    - 若$A[j] > x$，则j右移

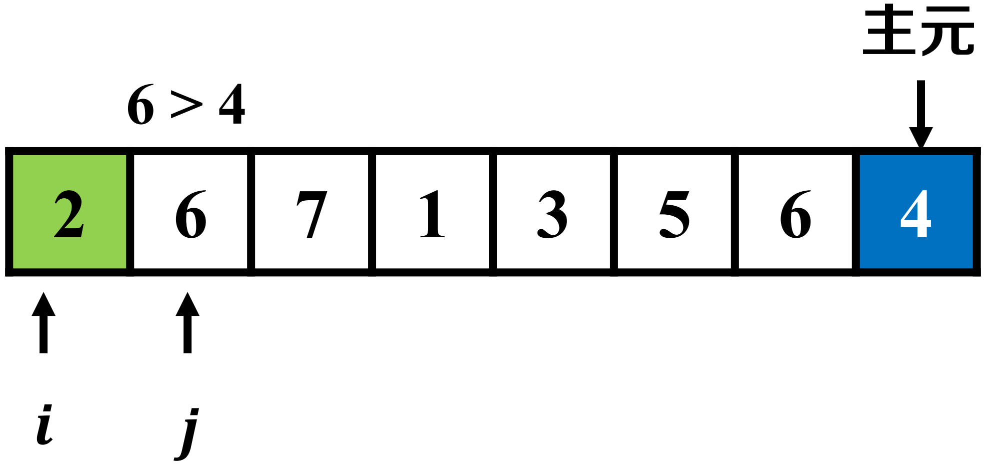




数组划分

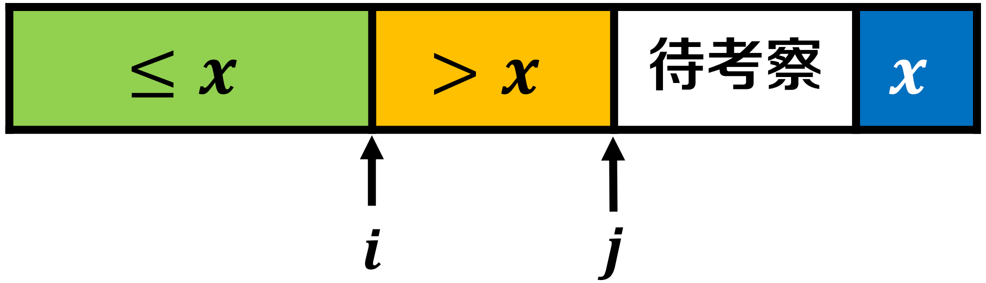
- 实现方法
  - 选取固定位置主元x（如尾元素）
  - 维护两个部分的右端点变量i,j
  - 考察数组元素$A[j]$，**只和主元比较**
    - 若$A[j] \le x$，则交换$A[j]$和$A[i+1]$，i,j右移
    - 若$A[j] > x$，则j右移





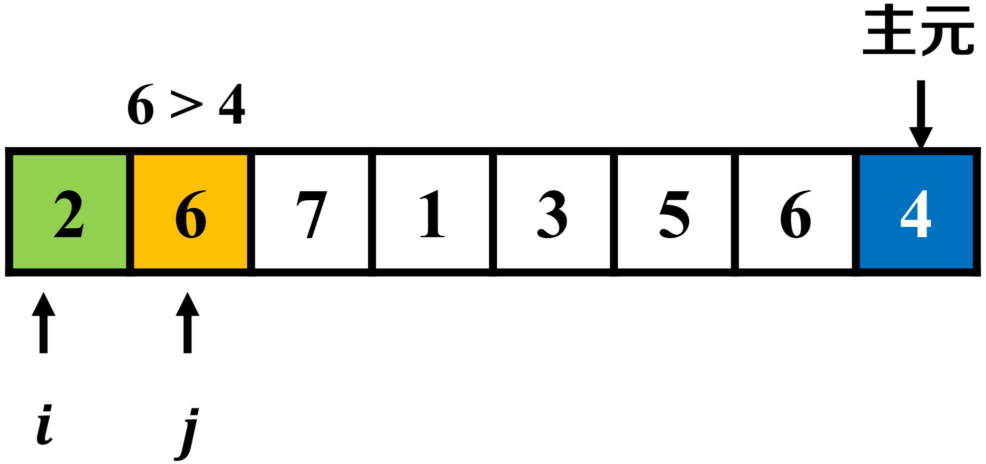
数组划分

- **实现方法**
  - 选取固定位置主元x（如尾元素）
  - 维护两个部分的右端点变量i, j
  - 考察数组元素$A[j]$，只和主元比较
    - 若$A[j] \leq x$，则交换$A[j]$和$A[i+1]$，i, j右移
    - 若$A[j] > x$，则j右移



$\leq x$	$> x$	待考察	x

i j



主元

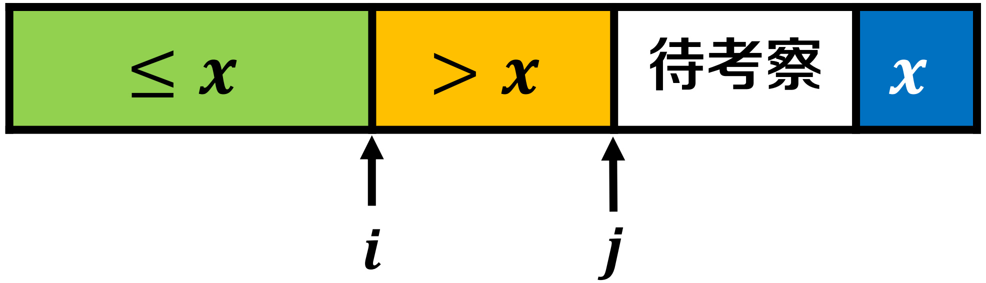
$6 > 4$

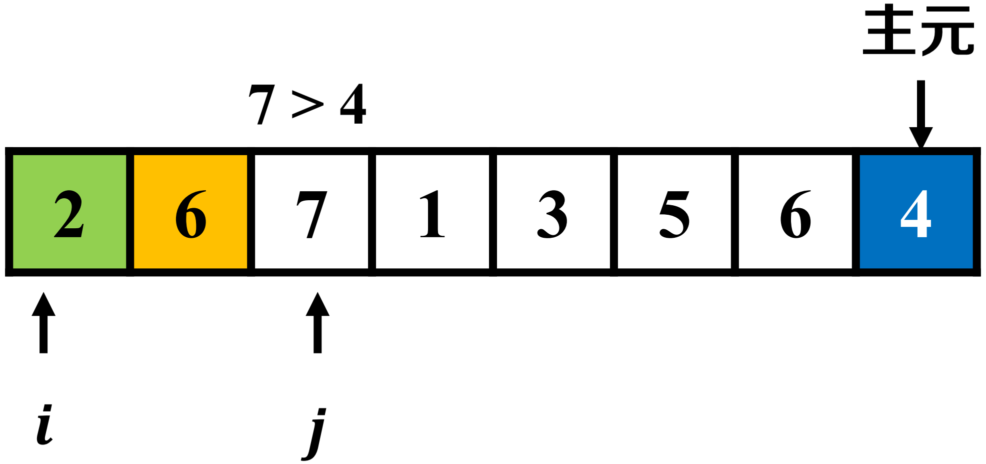
2	6	7	1	3	5	6	4

i j

数组划分

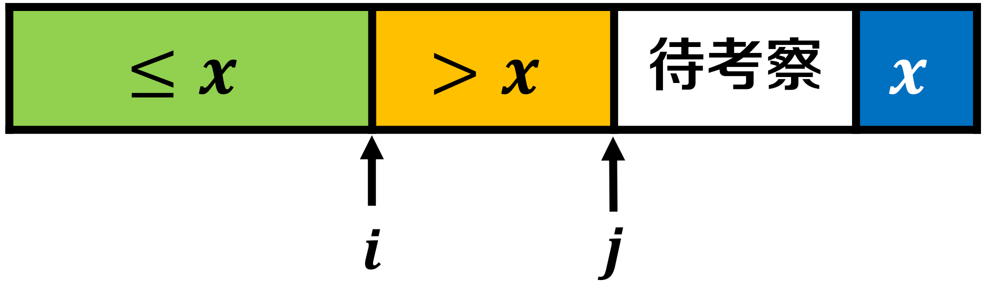
- **实现方法**
  - 选取固定位置主元x（如尾元素）
  - 维护两个部分的右端点变量i, j
  - 考察数组元素$A[j]$，**只和主元比较**
    - 若$A[j] \le x$，则交换$A[j]$和$A[i+1]$，i, j右移
    - 若$A[j] > x$，则j右移

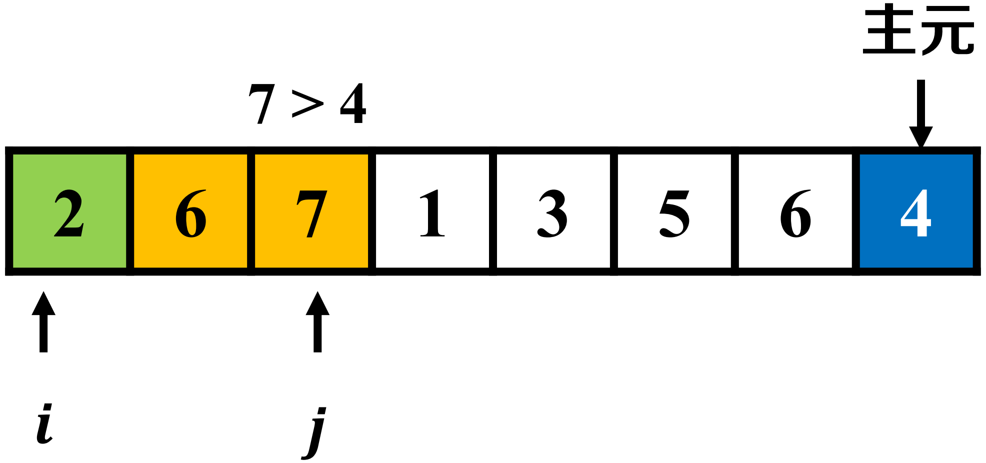




数组划分

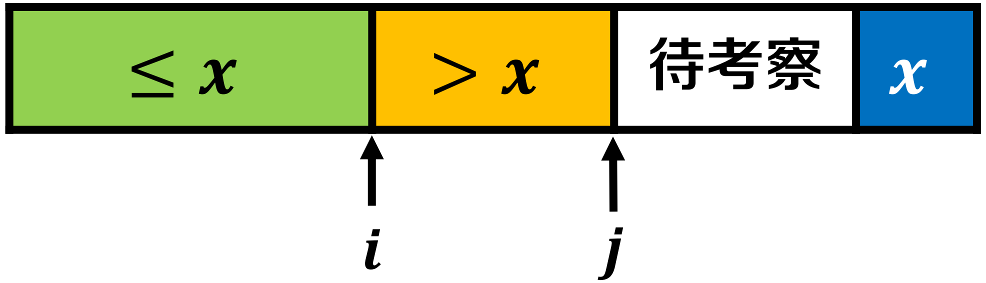
- 实现方法
  - 选取固定位置主元x（如尾元素）
  - 维护两个部分的右端点变量i, j
  - 考察数组元素$A[j]$，**只和主元比较**
    - 若$A[j] \leq x$，则交换$A[j]$和$A[i+1]$，i, j右移
    - 若$A[j] > x$，则j右移

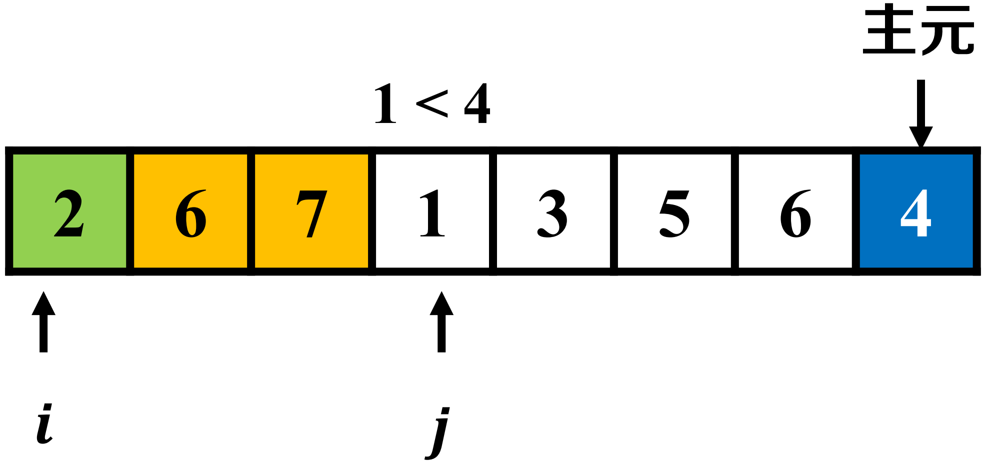




数组划分

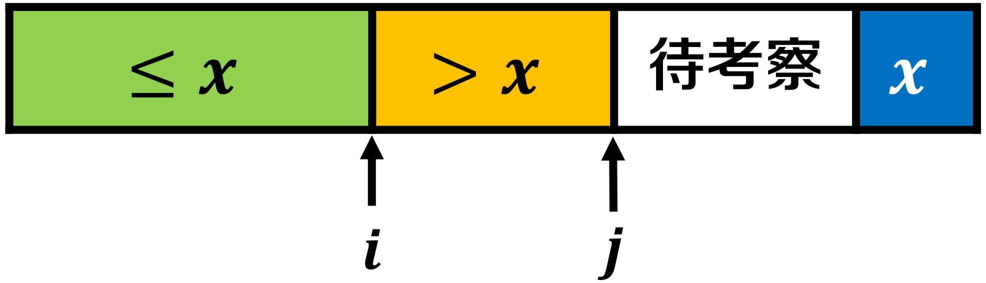
- **实现方法**
  - 选取固定位置主元x（如尾元素）
  - 维护两个部分的右端点变量i, j
  - 考察数组元素$A[j]$，只和主元比较
    - 若$A[j] \le x$，则交换$A[j]$和$A[i+1]$，i, j右移
    - 若$A[j] > x$，则j右移

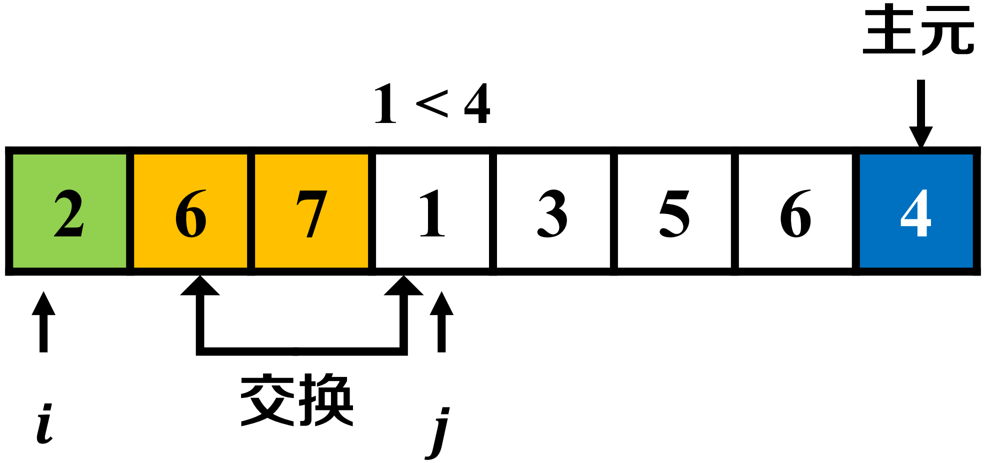




数组划分

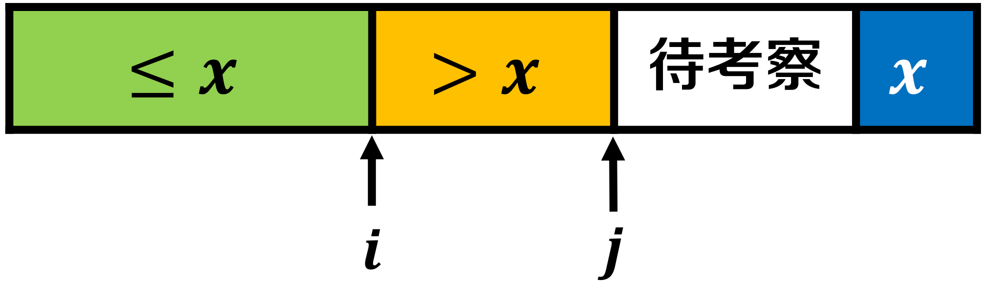
- 实现方法
  - 选取固定位置主元x（如尾元素）
  - 维护两个部分的右端点变量i, j
  - 考察数组元素$A[j]$，只和主元比较
    - 若$A[j] \le x$，则交换$A[j]$和$A[i+1]$，i, j右移
    - 若$A[j] > x$，则j右移

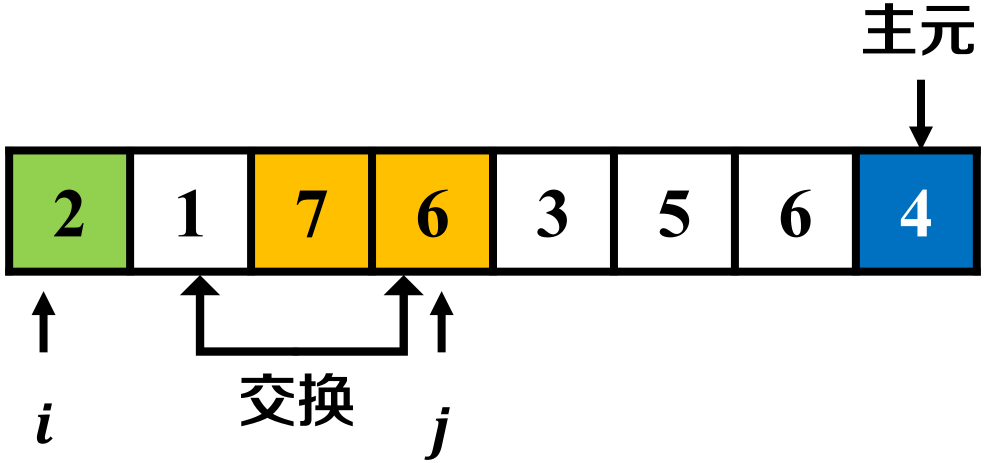




数组划分

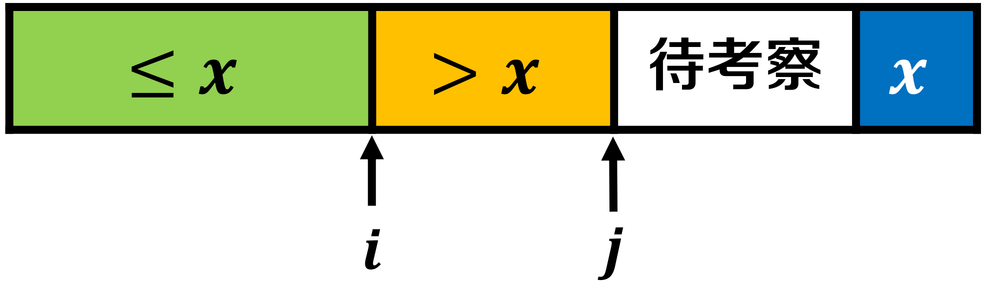
- **实现方法**
  - 选取固定位置主元x（如尾元素）
  - 维护两个部分的右端点变量i, j
  - 考察数组元素$A[j]$，**只和主元比较**
    - 若$A[j] \leq x$，则交换$A[j]$和$A[i+1]$，i, j右移
    - 若$A[j] > x$，则j右移

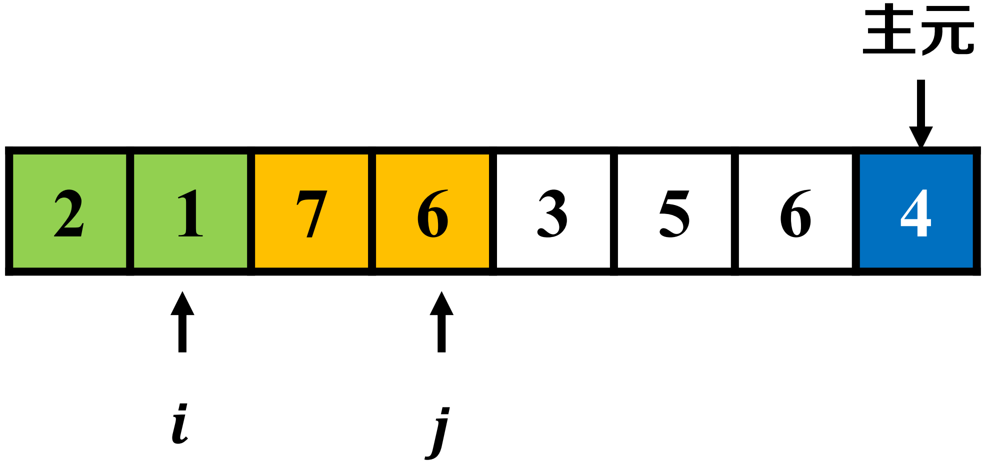




数组划分

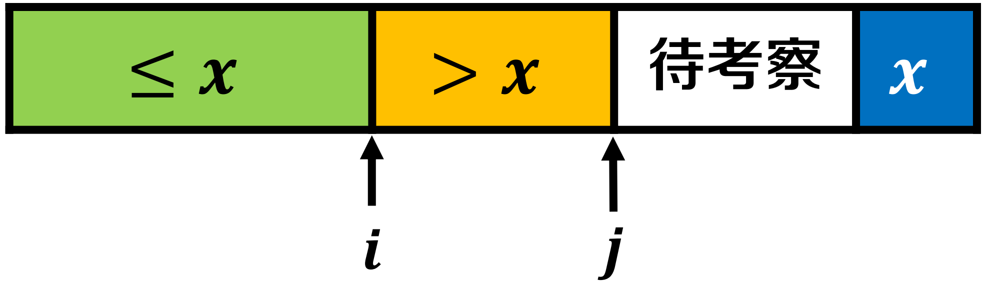
- 实现方法
  - 选取固定位置主元x（如尾元素）
  - 维护两个部分的右端点变量i, j
  - 考察数组元素$A[j]$，**只和主元比较**
    - 若$A[j] \leq x$，则交换$A[j]$和$A[i+1]$，i, j右移
    - 若$A[j] > x$，则j右移

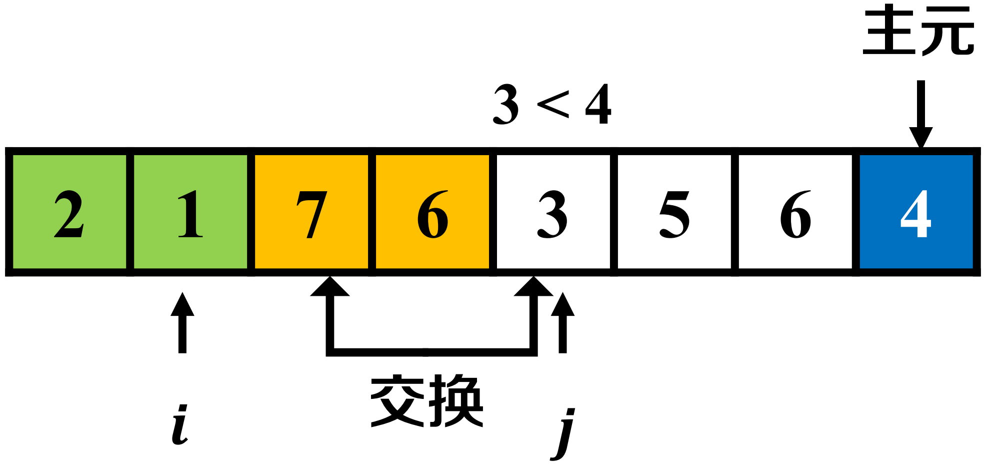




数组划分

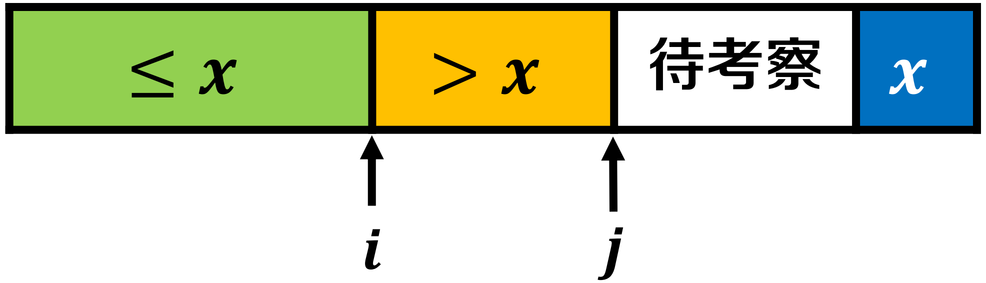
- 实现方法
  - 选取固定位置主元x（如尾元素）
  - 维护两个部分的右端点变量i, j
  - 考察数组元素$A[j]$，只和主元比较
    - 若$A[j] \le x$，则交换$A[j]$和$A[i+1]$，i, j右移
    - 若$A[j] > x$，则j右移

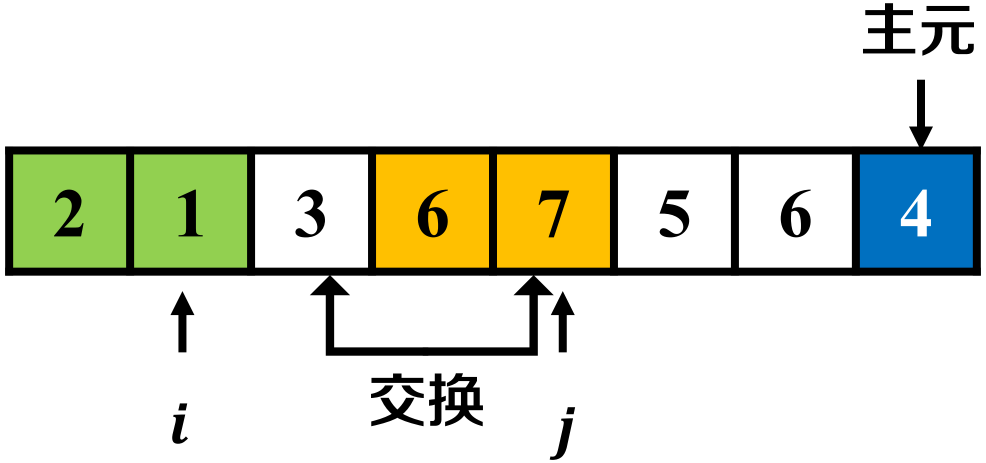




数组划分

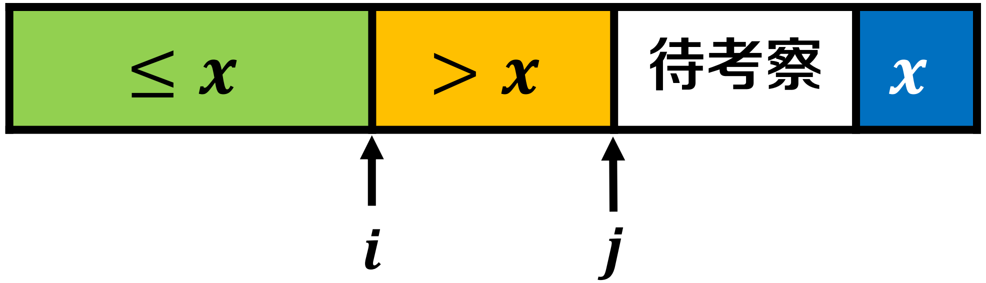
- **实现方法**
  - 选取固定位置主元x（如尾元素）
  - 维护两个部分的右端点变量i, j
  - 考察数组元素$A[j]$，只和主元比较
    - 若$A[j] \leq x$，则交换$A[j]$和$A[i+1]$，i, j右移
    - 若$A[j] > x$，则j右移

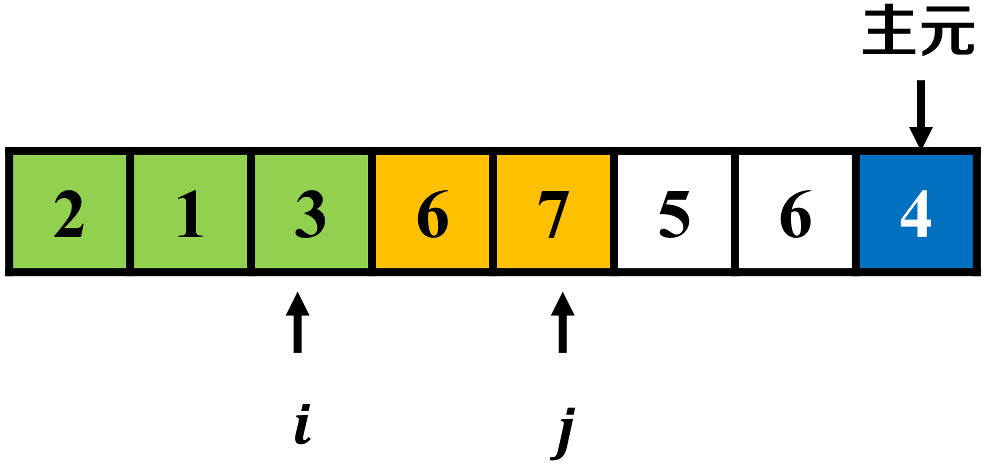




数组划分

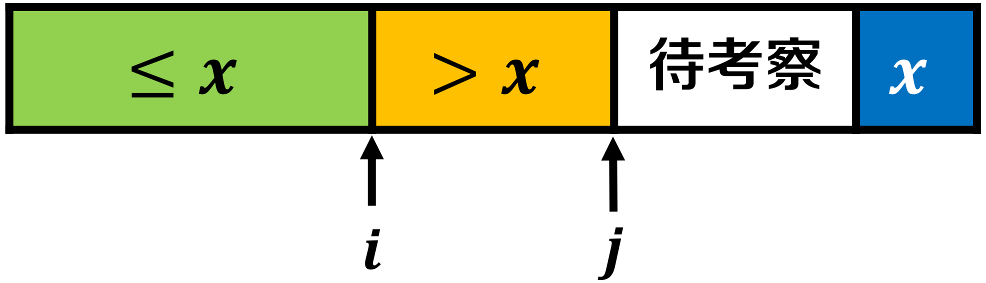
- 实现方法
  - 选取固定位置主元x（如尾元素）
  - 维护两个部分的右端点变量i, j
  - 考察数组元素$A[j]$，**只和主元比较**
    - 若$A[j] \leq x$，则交换$A[j]$和$A[i+1]$，i, j右移
    - 若$A[j] > x$，则j右移





数组划分

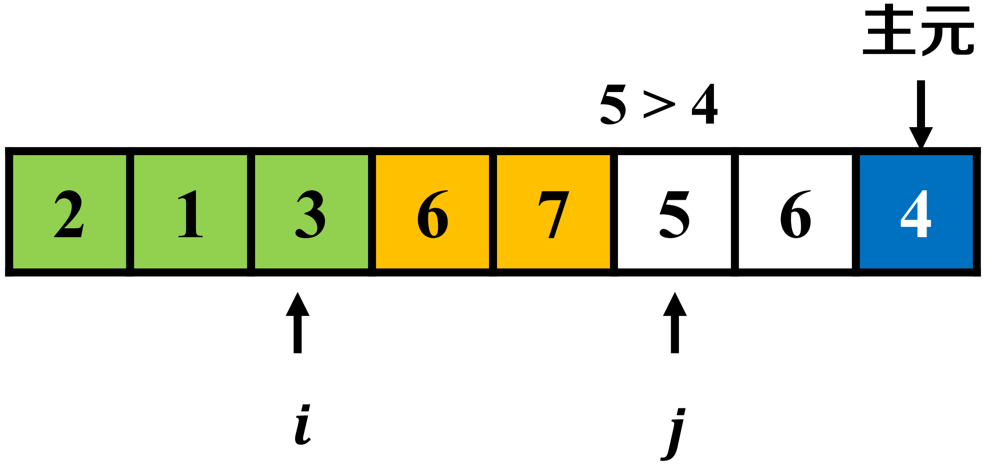
- 实现方法
  - 选取固定位置主元x（如尾元素）
  - 维护两个部分的右端点变量i,j
  - 考察数组元素$A[j]$，**只和主元比较**
    - 若$A[j] \le x$，则交换$A[j]$和$A[i+1]$，i,j右移
    - 若$A[j] > x$，则j右移



$\le x$	$> x$	待考察	x

i

j



主元

$5 > 4$

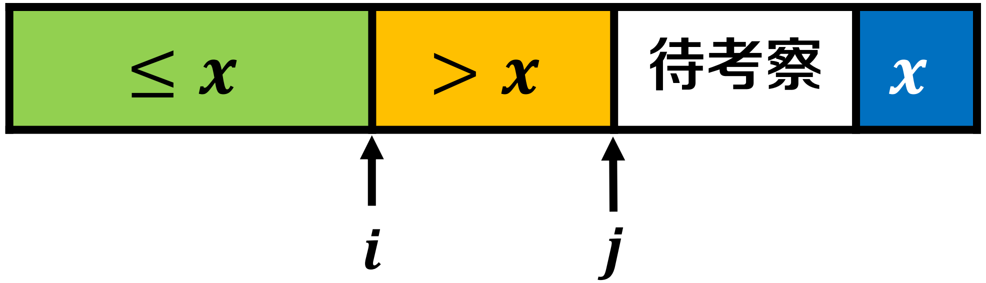
2	1	3	6	7	5	6	4

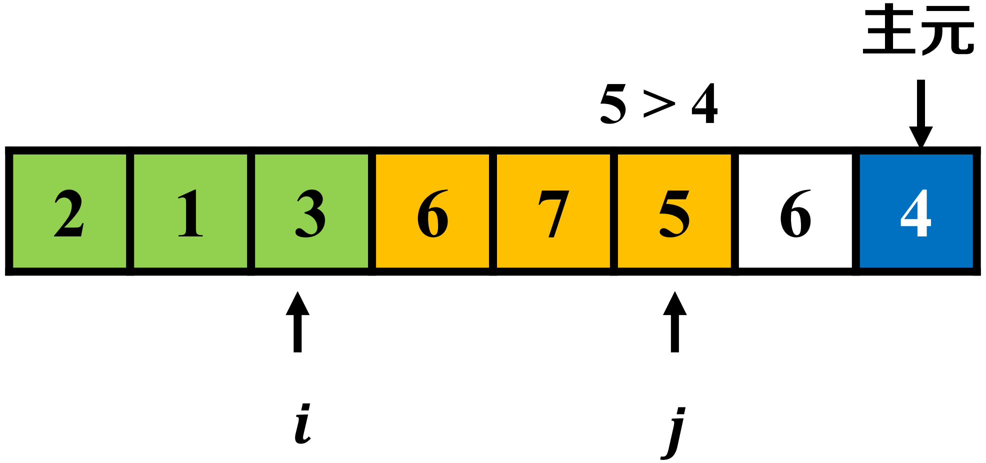
i

j

数组划分

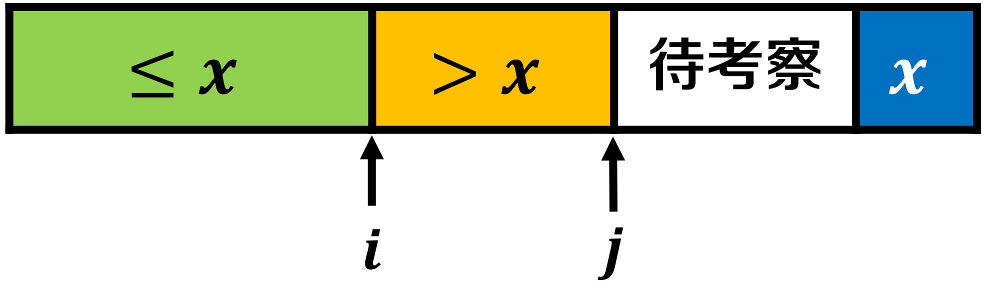
- 实现方法
  - 选取固定位置主元x（如尾元素）
  - 维护两个部分的右端点变量i, j
  - 考察数组元素$A[j]$，只和主元比较
    - 若$A[j] \le x$，则交换$A[j]$和$A[i+1]$，i, j右移
    - 若$A[j] > x$，则j右移

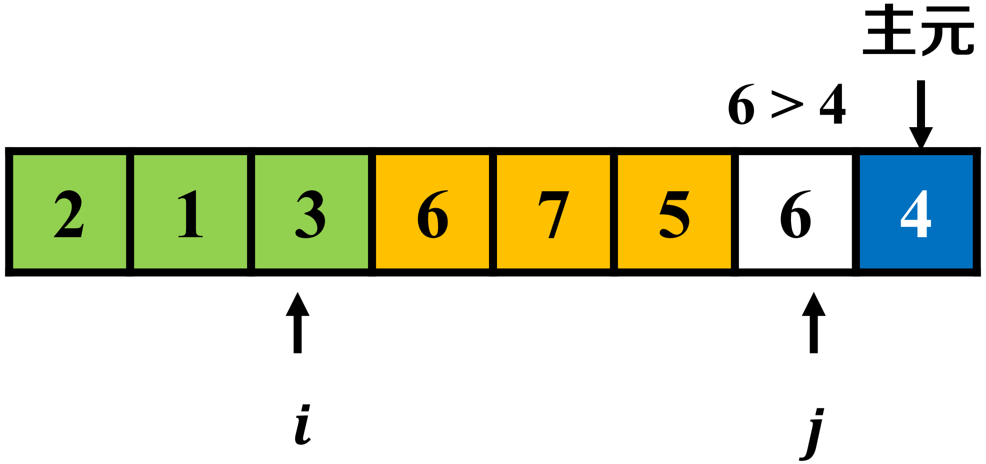




数组划分

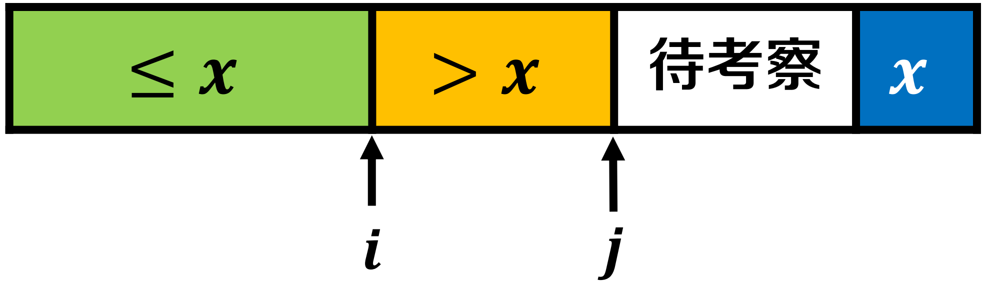
- 实现方法
  - 选取固定位置主元x（如尾元素）
  - 维护两个部分的右端点变量i, j
  - 考察数组元素$A[j]$，**只和主元比较**
    - 若$A[j] \le x$，则交换$A[j]$和$A[i+1]$，i, j右移
    - 若$A[j] > x$，则j右移

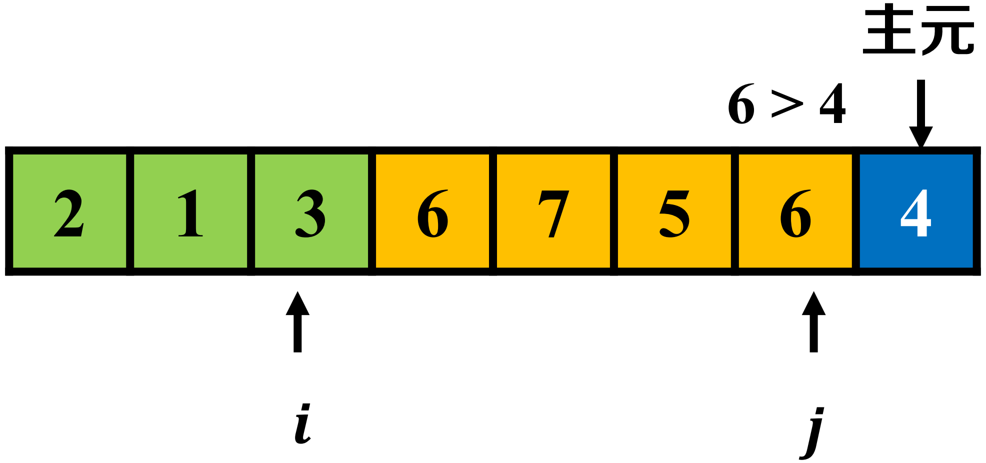




数组划分

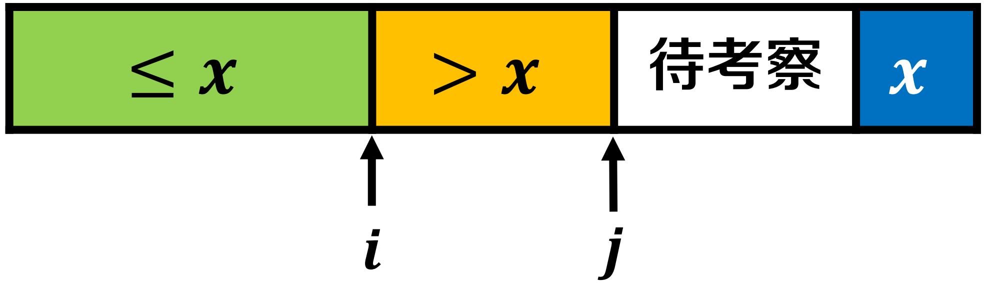
- 实现方法
  - 选取固定位置主元x（如尾元素）
  - 维护两个部分的右端点变量i, j
  - 考察数组元素$A[j]$，**只和主元比较**
    - 若$A[j] \leq x$，则交换$A[j]$和$A[i+1]$，i, j右移
    - 若$A[j] > x$，则j右移

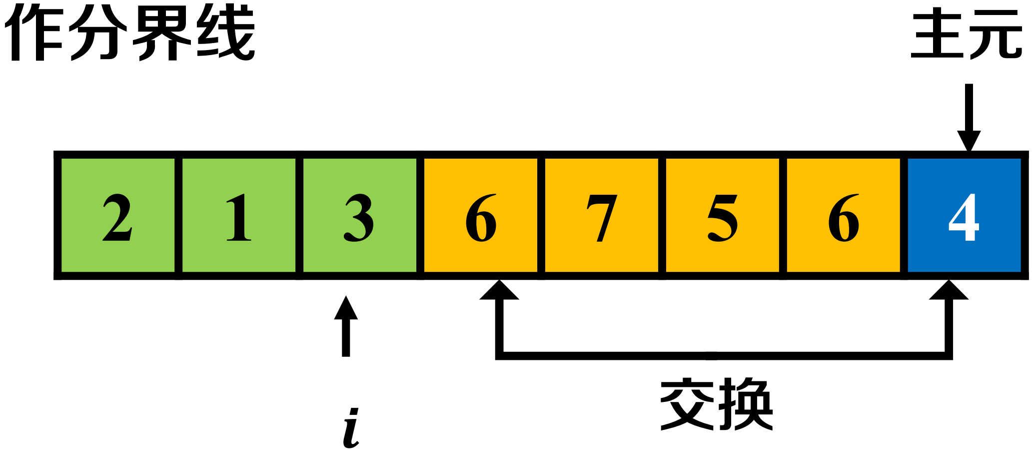




数组划分

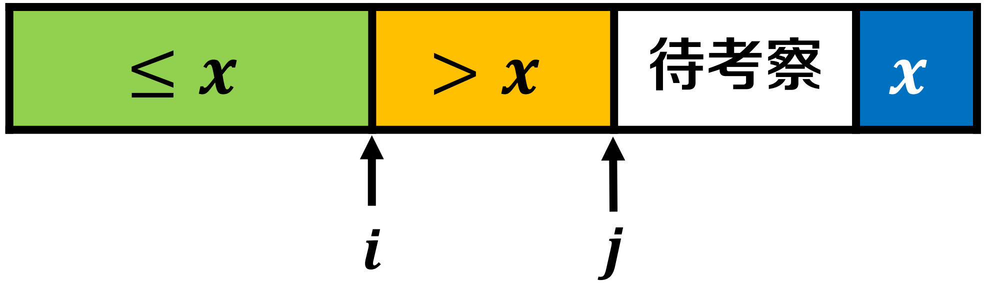
- 实现方法
  - 选取固定位置主元x（如尾元素）
  - 维护两个部分的右端点变量i, j
  - 考察数组元素$A[j]$，只和主元比较
    - 若$A[j] \le x$，则交换$A[j]$和$A[i+1]$，i, j右移
    - 若$A[j] > x$，则j右移
  - 把主元放在中间作分界线

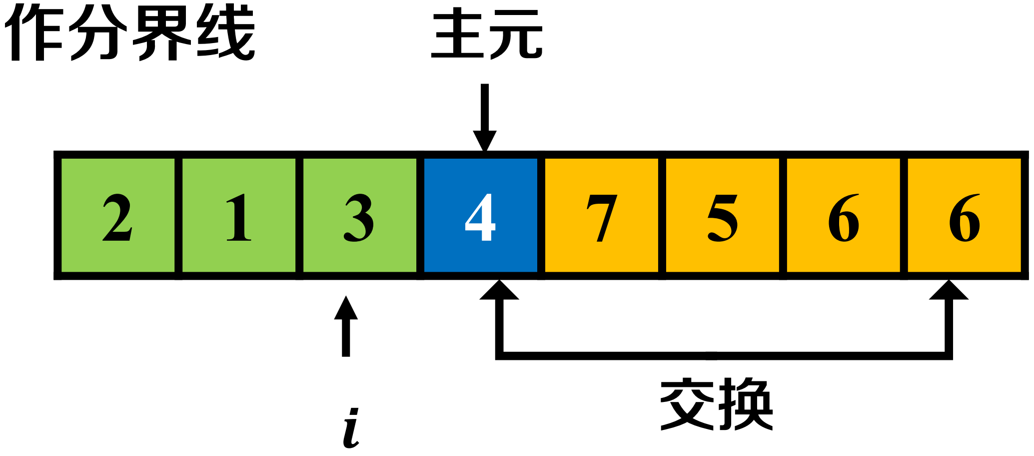




数组划分

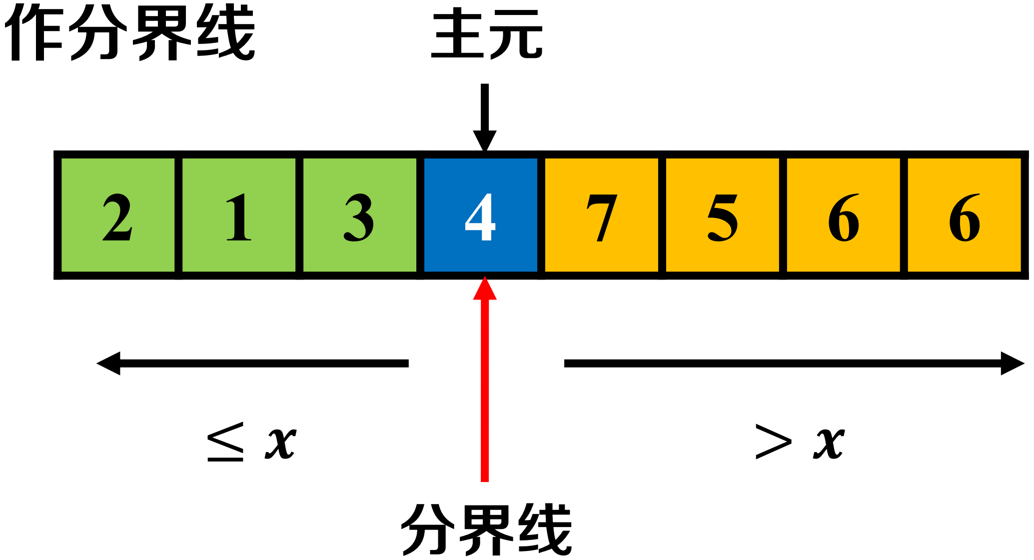
- 实现方法
  - 选取固定位置主元x（如尾元素）
  - 维护两个部分的右端点变量i, j
  - 考察数组元素$A[j]$，只和主元比较
    - 若$A[j] \le x$，则交换$A[j]$和$A[i+1]$，i, j右移
    - 若$A[j] > x$，则j右移
  - 把主元放在中间作分界线





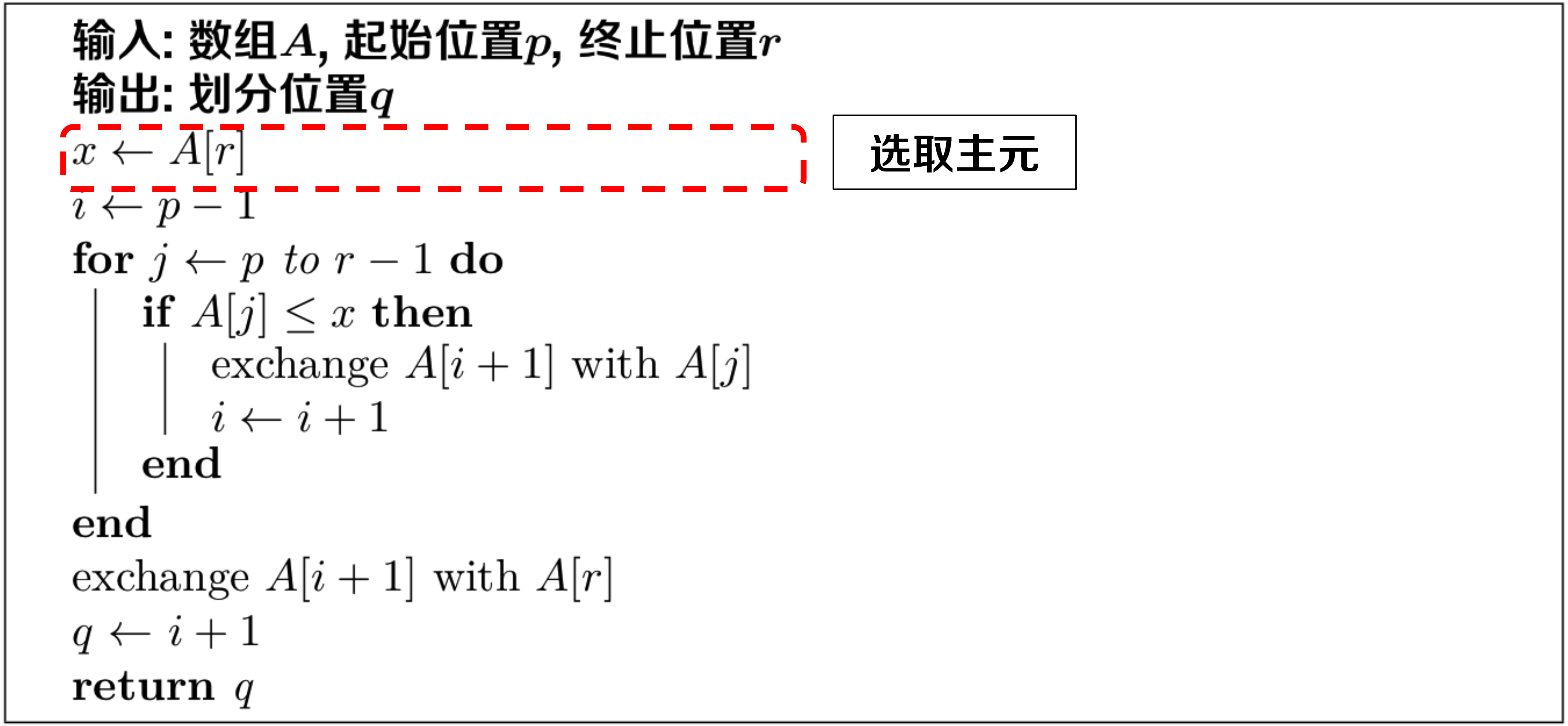
数组划分

- 实现方法
  - 选取固定位置主元x（如尾元素）
  - 维护两个部分的右端点变量i,j
  - 考察数组元素$A[j]$，只和主元比较
    - 若$A[j] \le x$，则交换$A[j]$和$A[i+1]$，i,j右移
    - 若$A[j] > x$，则j右移
  - 把主元放在中间作分界线



数组划分：伪代码

- **Partition(A, p, r)**

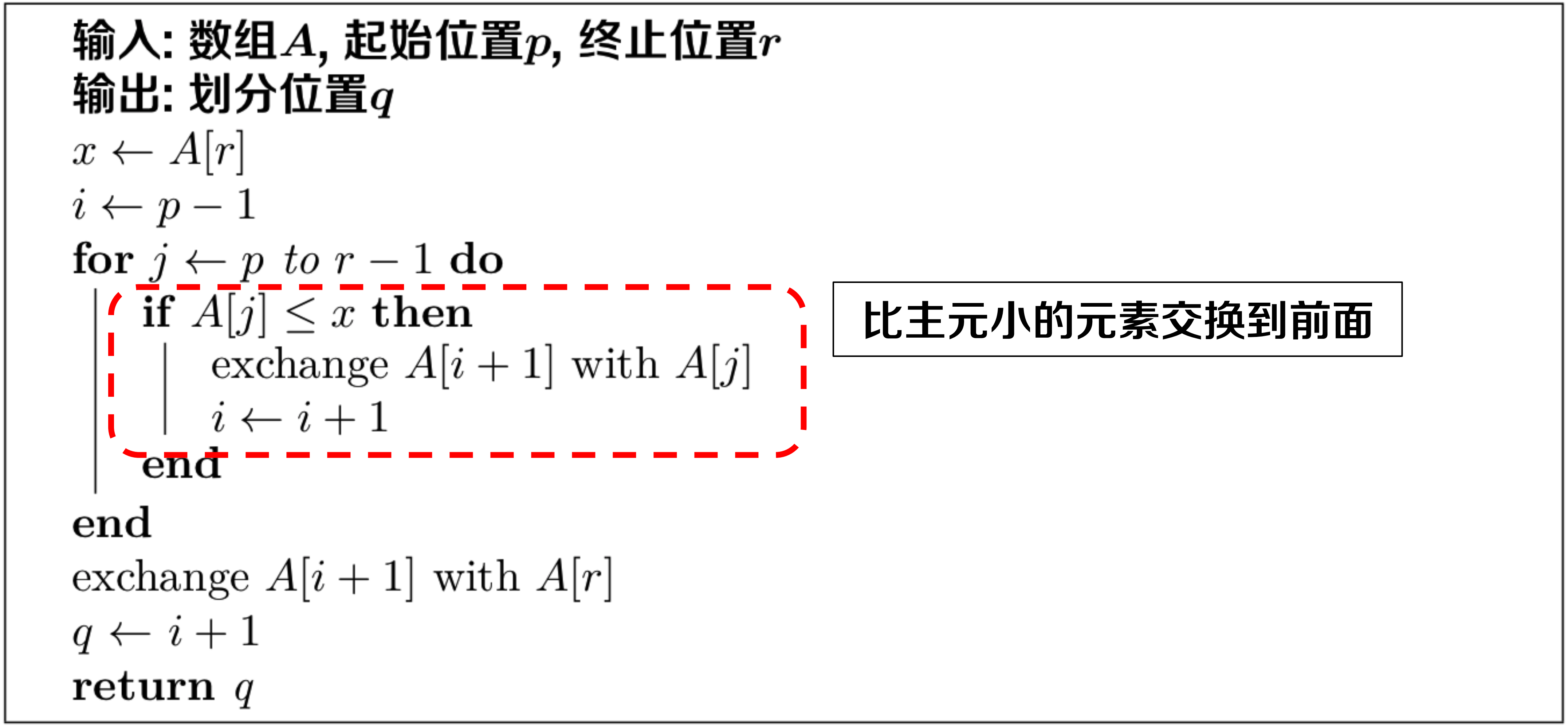


选取主元

```
输入: 数组$A$, 起始位置$p$, 终止位置$r$
输出: 划分位置$q$
$x \leftarrow A[r]$
$i \leftarrow p - 1$
for $j \leftarrow p$ to $r - 1$ do
    if $A[j] \leq x$ then
        exchange $A[i+1]$ with $A[j]$
        $i \leftarrow i + 1$
    end
end
exchange $A[i+1]$ with $A[r]$
$q \leftarrow i + 1$
return $q$
```

数组划分：伪代码

- **Partition(A, p, r)**

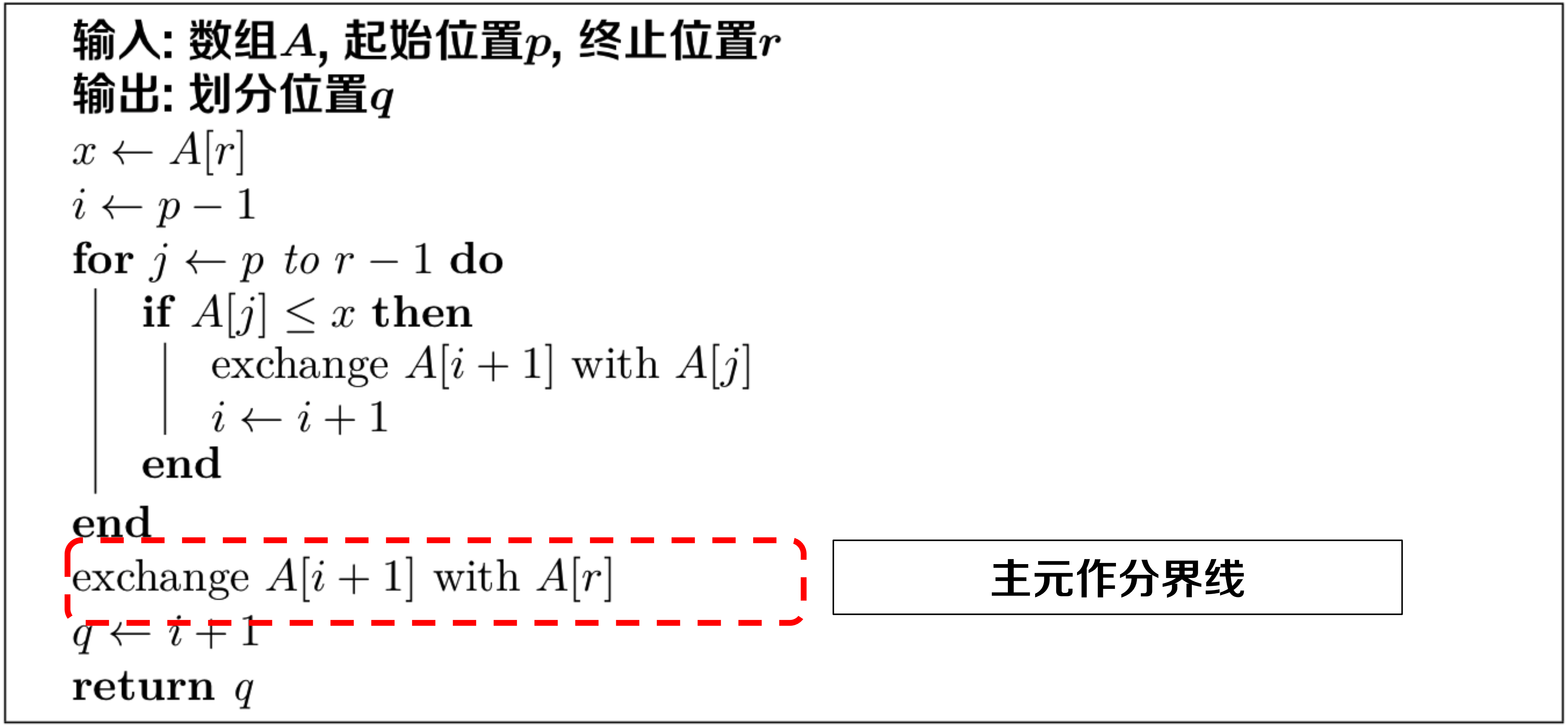


```
输入: 数组$A$, 起始位置$p$, 终止位置$r$
输出: 划分位置$q$
$x \leftarrow A[r]$
$i \leftarrow p - 1$
for $j \leftarrow p$ to $r - 1$ do
    if $A[j] \leq x$ then
        exchange $A[i+1]$ with $A[j]$
        $i \leftarrow i + 1$
    end
end
exchange $A[i+1]$ with $A[r]$
$q \leftarrow i + 1$
return $q$
```

比主元小的元素交换到前面

数组划分：伪代码

- **Partition(A, p, r)**



```
输入: 数组$A$, 起始位置$p$, 终止位置$r$
输出: 划分位置$q$
$x \leftarrow A[r]$
$i \leftarrow p - 1$
for $j \leftarrow p$ to $r - 1$ do
    if $A[j] \leq x$ then
        exchange $A[i+1]$ with $A[j]$
        $i \leftarrow i + 1$
    end
end
exchange $A[i+1]$ with $A[r]$
$q \leftarrow i + 1$
return $q$
```

主元作分界线

数组划分：复杂度分析

- **Partition(A, p, r)**

```
输入: 数组$A$, 起始位置$p$, 终止位置$r$
输出: 划分位置$q$
$x \leftarrow A[r]$
$i \leftarrow p - 1$
for $j \leftarrow p$ to $r - 1$ do
    if $A[j] \leq x$ then
        exchange $A[i + 1]$ with $A[j]$
        $i \leftarrow i + 1$
    end
end
exchange $A[i + 1]$ with $A[r]$
$q \leftarrow i + 1$
return $q$
```

$O(n)$

时间复杂度：$O(n)$

快速排序：算法框架

2	6	7	1	3	5	6	4

分解原问题

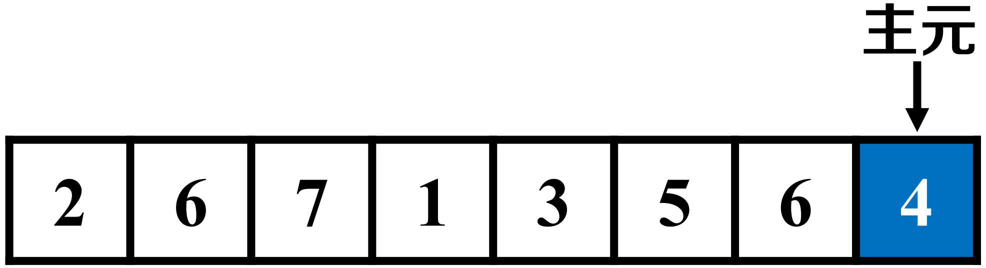
↓

解决子问题

↓

合并问题解

快速排序：算法框架



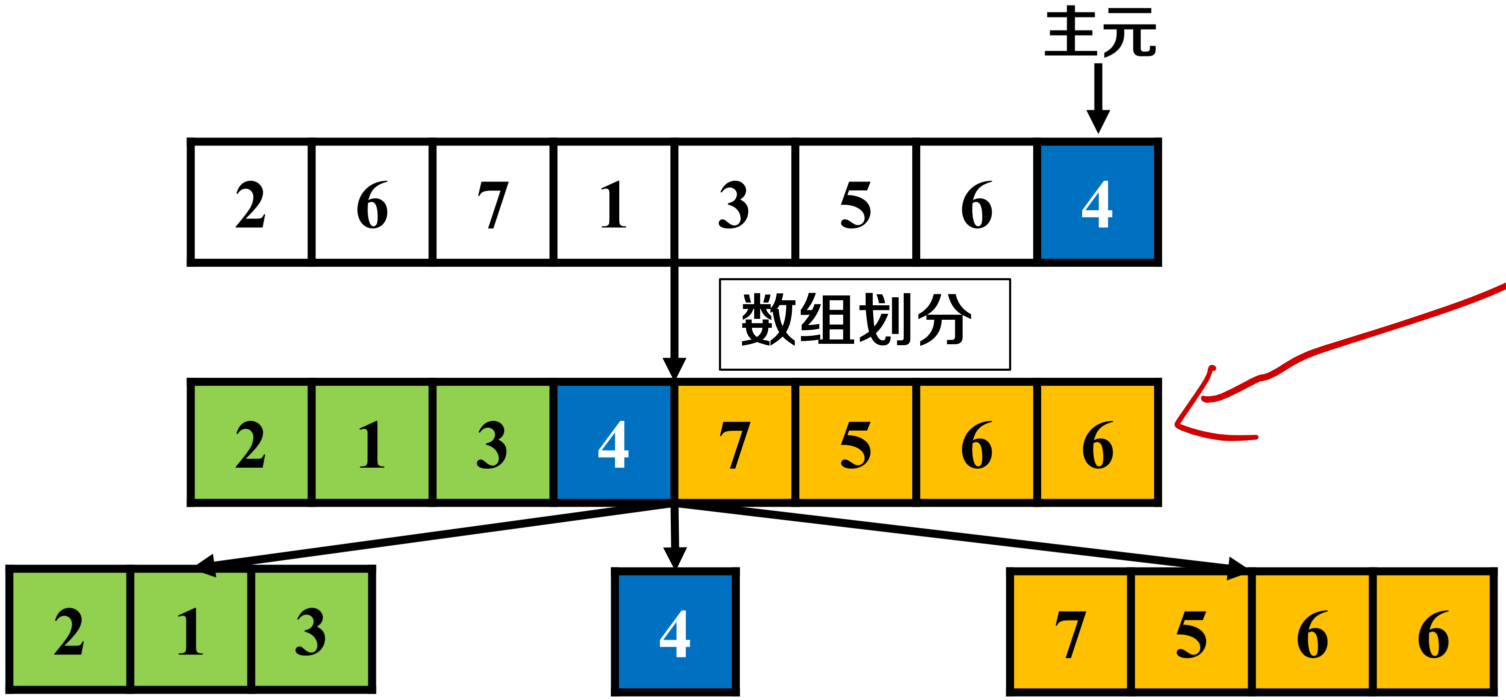
2	6	7	1	3	5	6	4

分解原问题

解决子问题

合并问题解

快速排序：算法框架

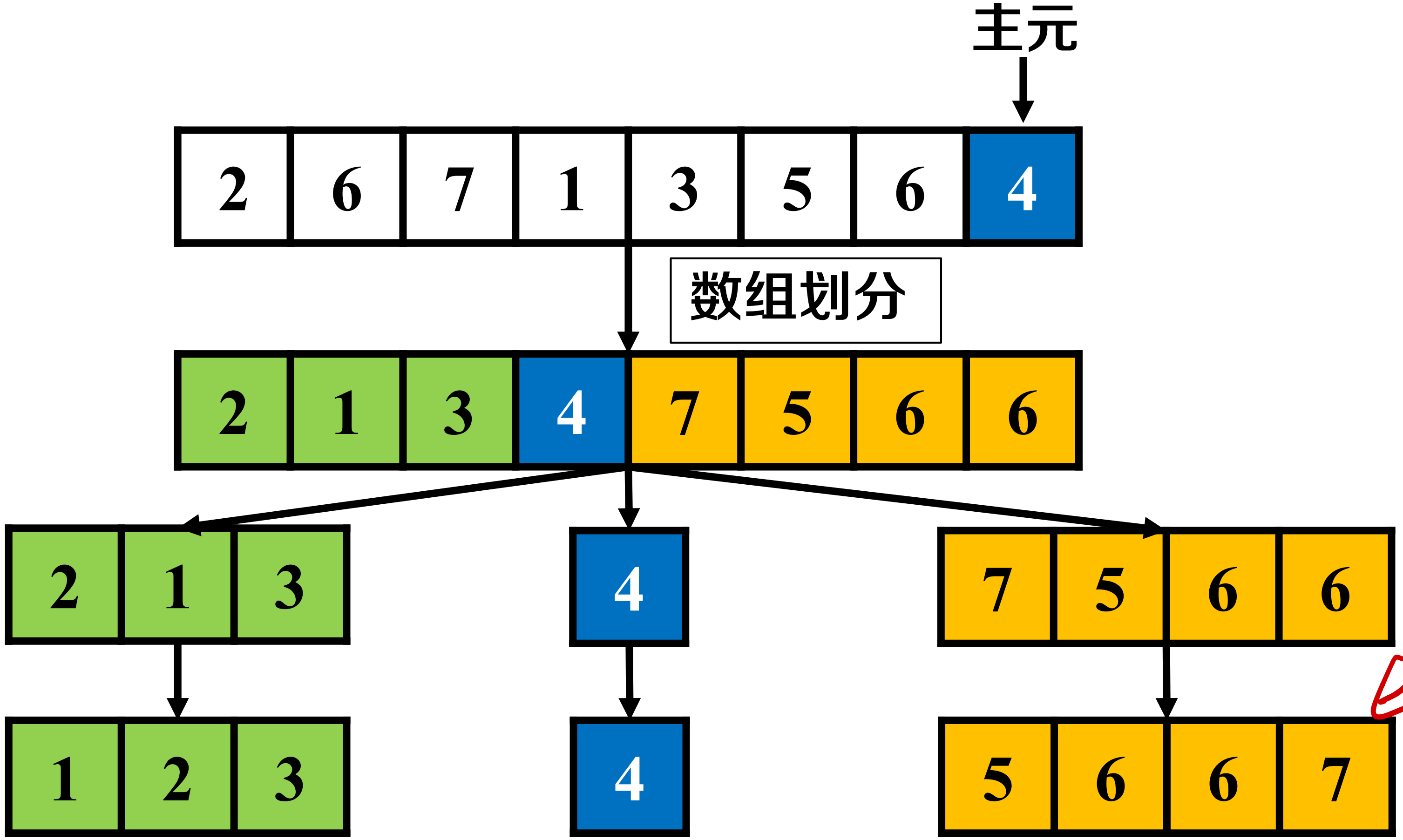


分解原问题

解决子问题

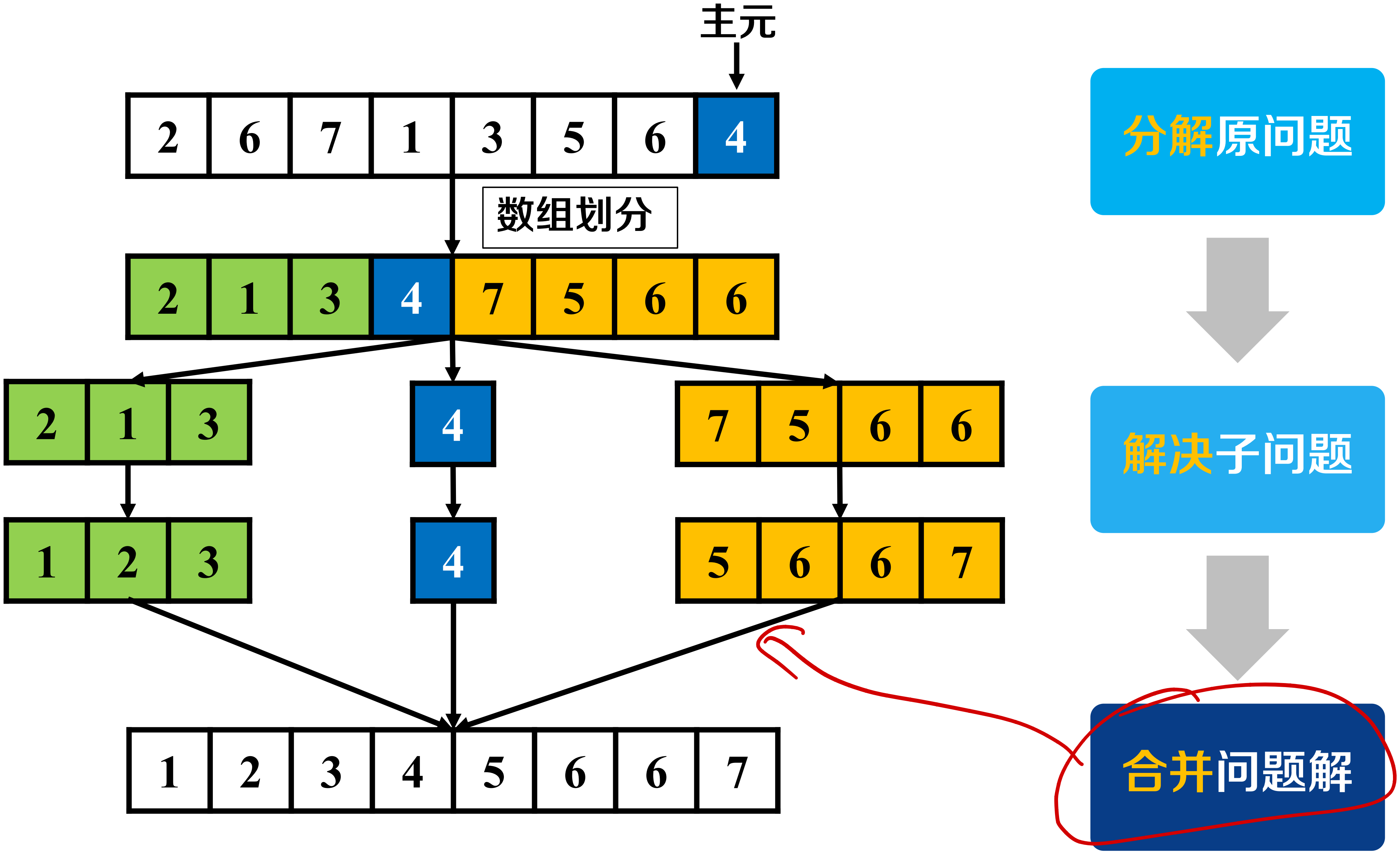
合并问题解

快速排序：算法框架


主元
2 6 7 1 3 5 6 4
数组划分
2 1 3 4 7 5 6 6
2 1 3
4
7 5 6 6
1 2 3
4
5 6 6 7


分解原问题
解决子问题
合并问题解

快速排序：算法框架



分解原问题

解决子问题

合并问题解

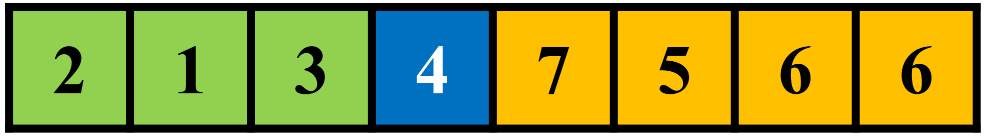
算法实例

2	6	7	1	3	5	6	4

算法实例

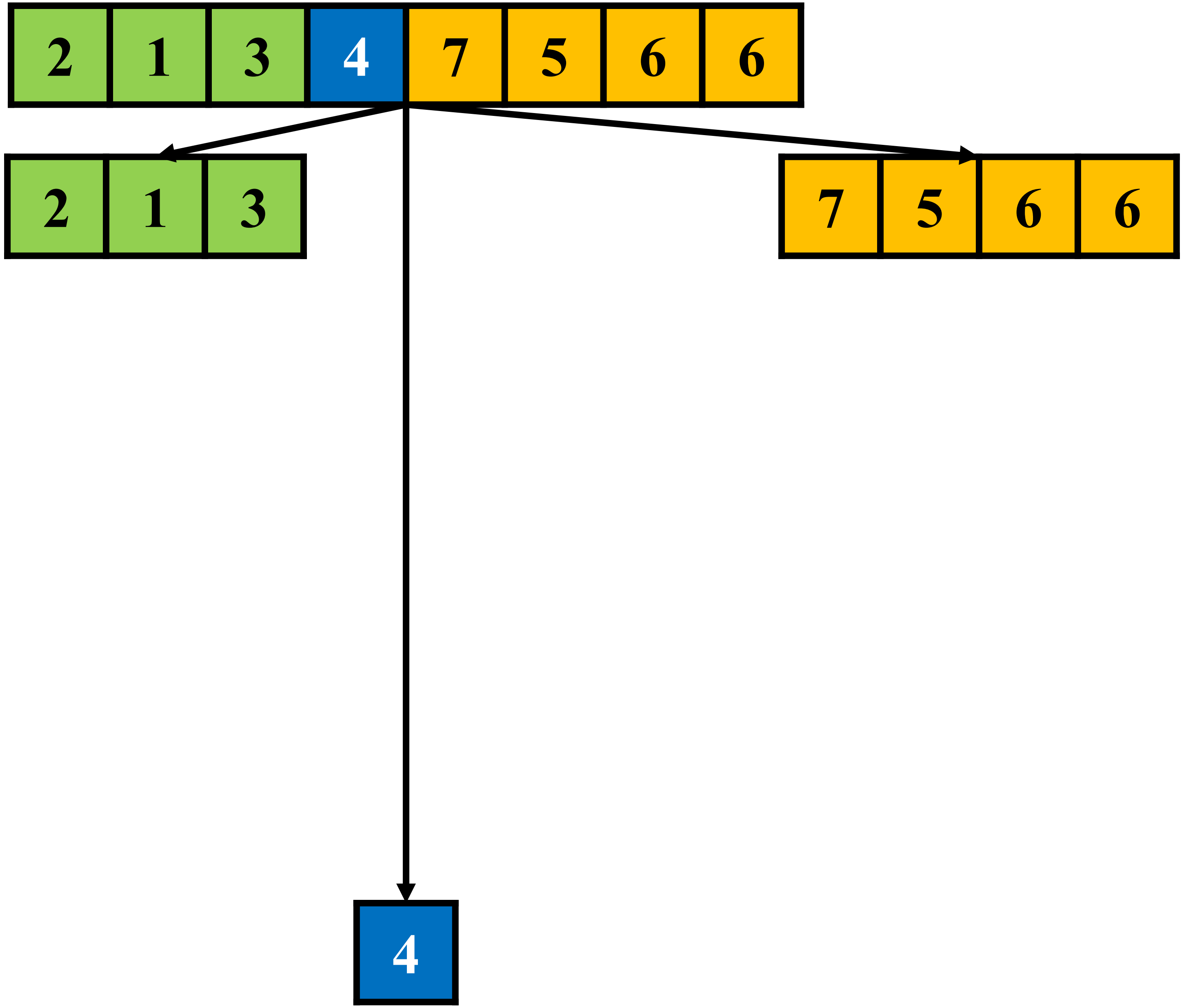
2	6	7	1	3	5	6	4

算法实例

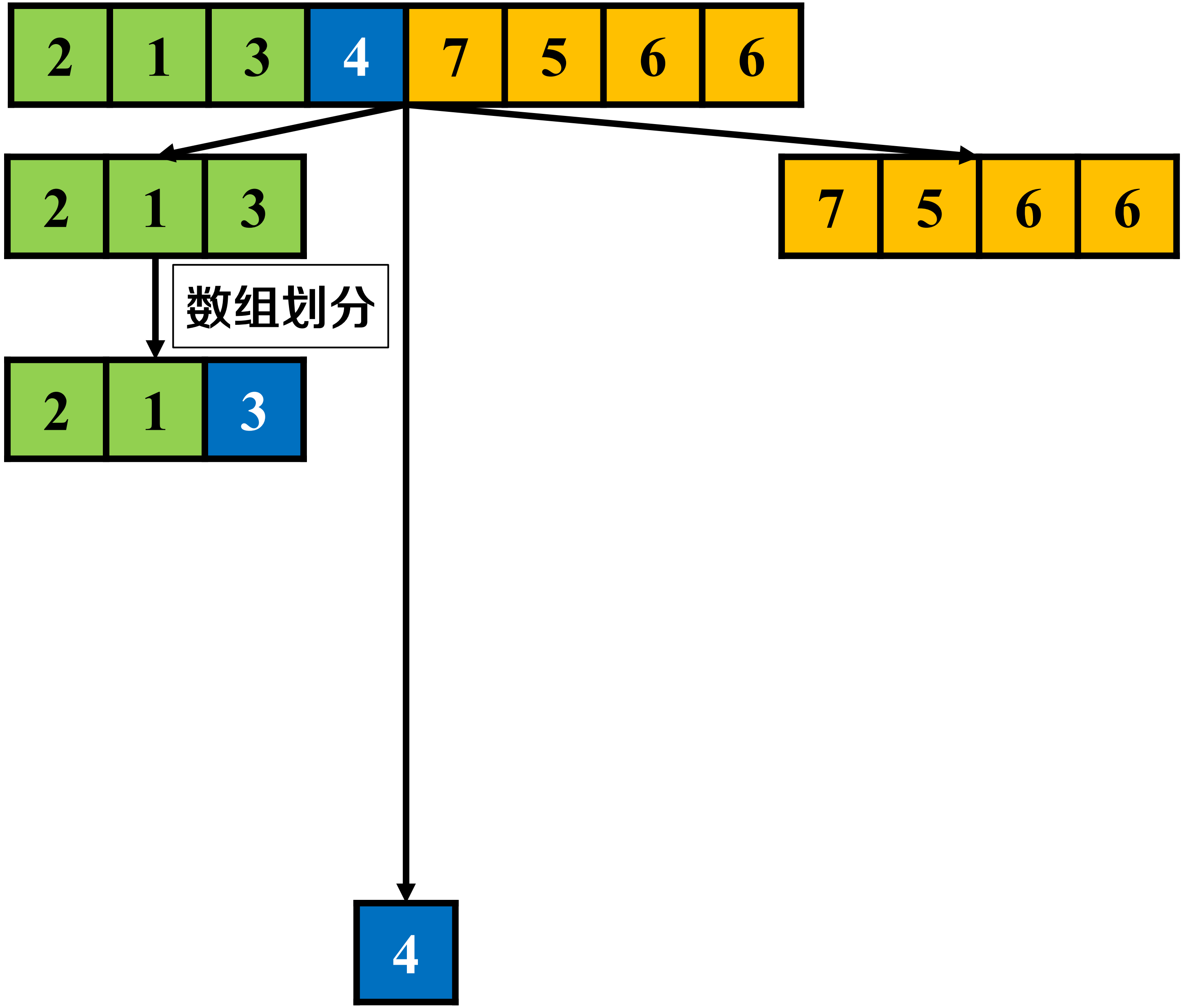


2	1	3	4	7	5	6	6

算法实例

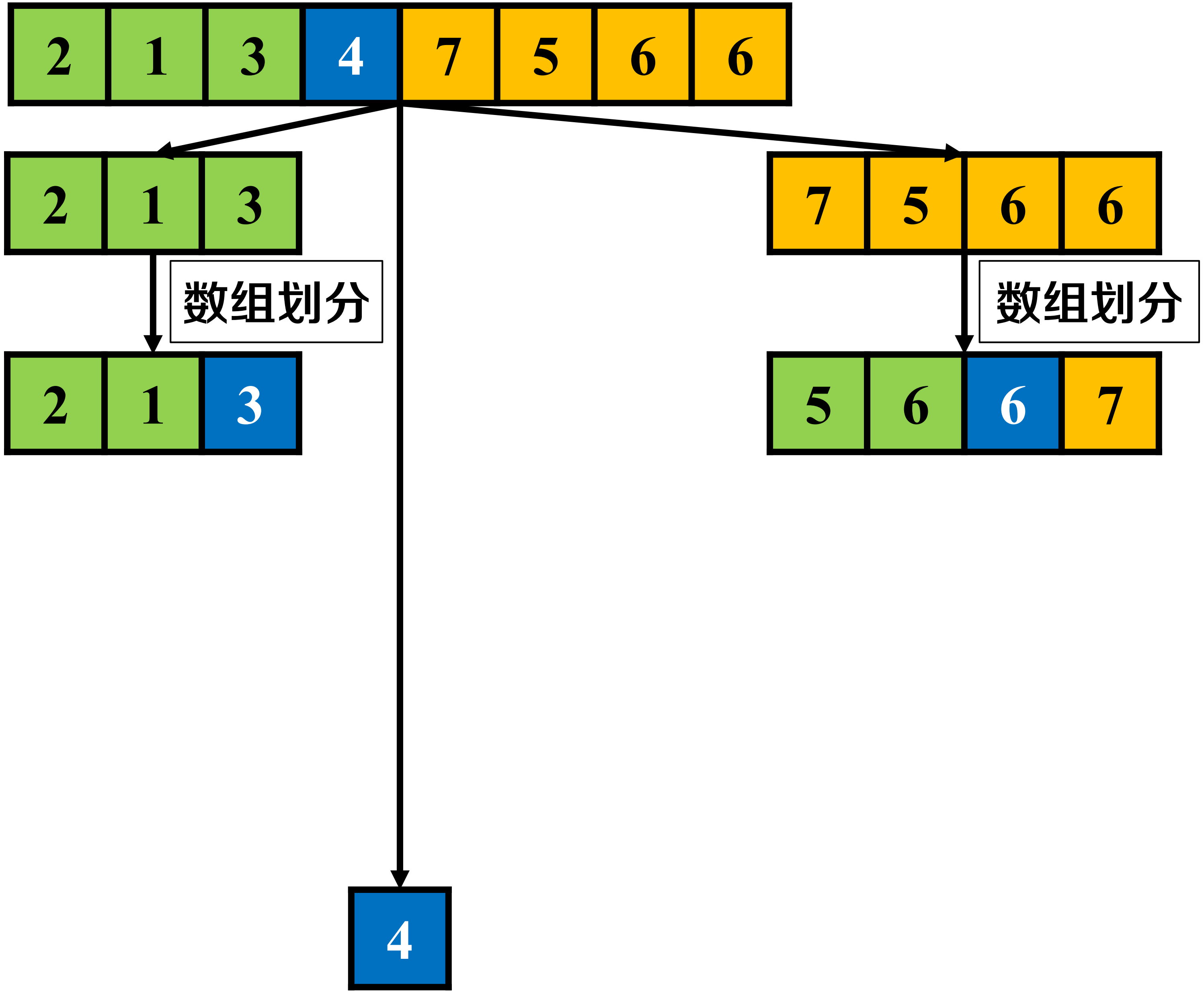


算法实例

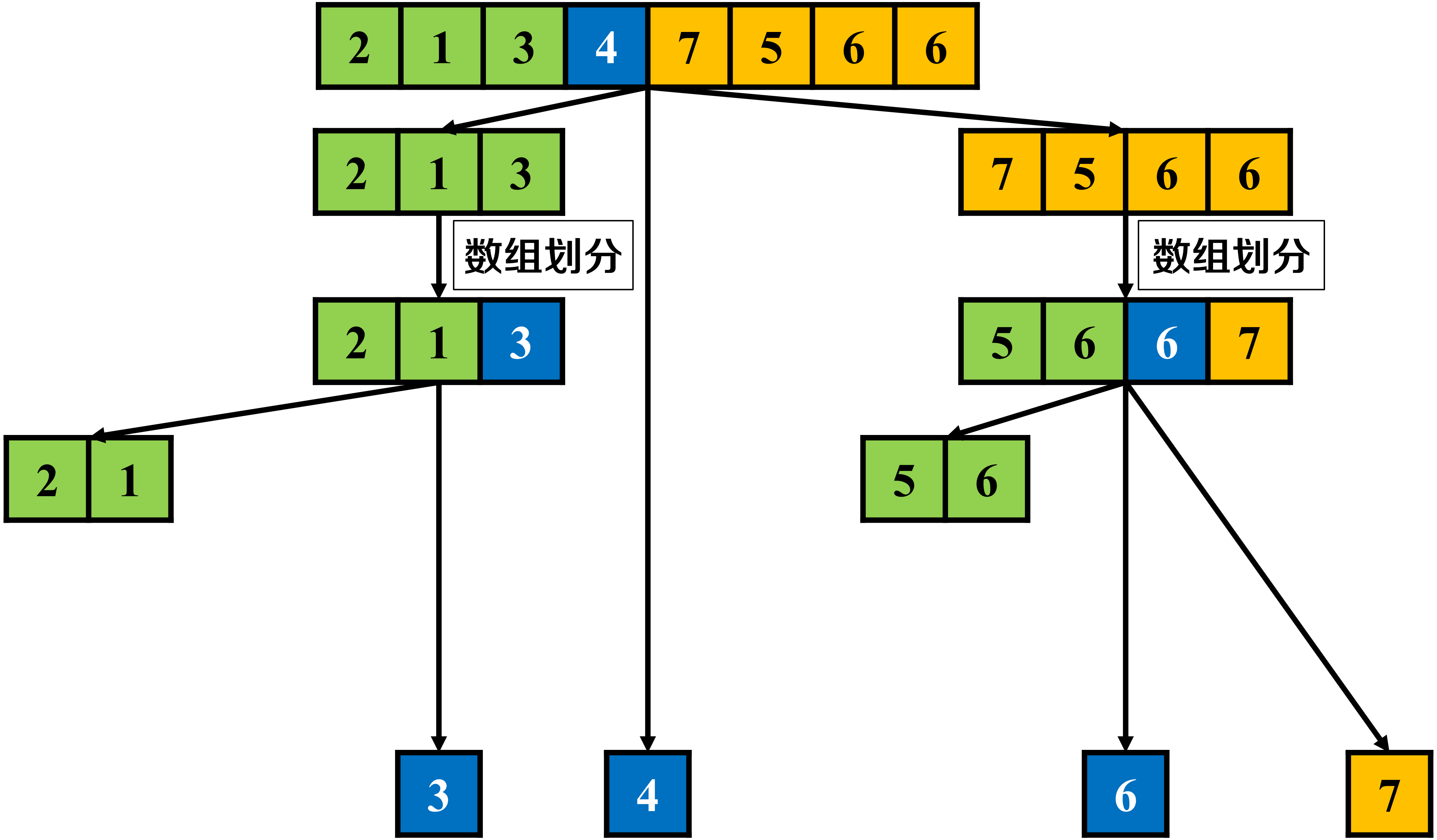


数组划分

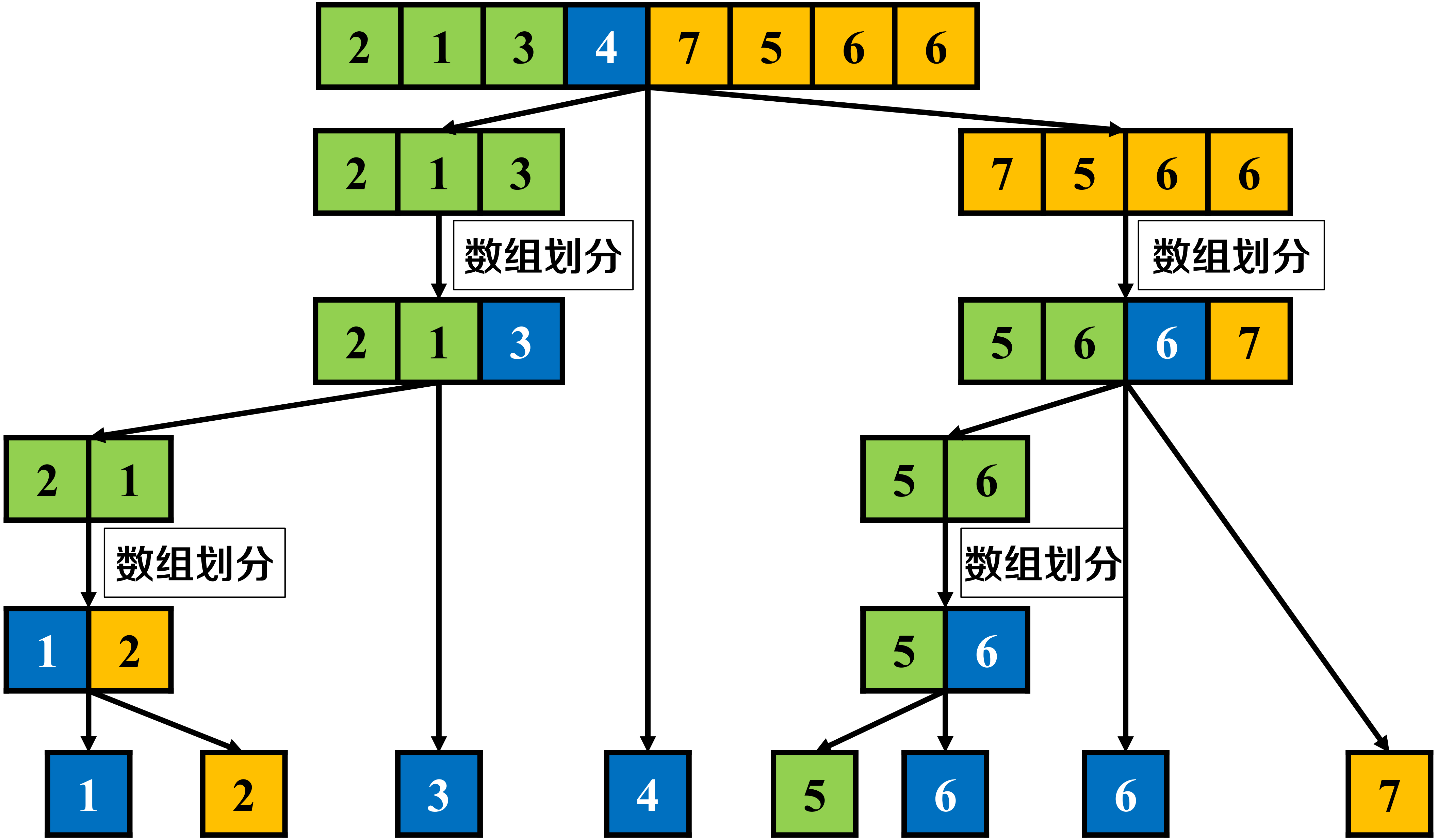
算法实例



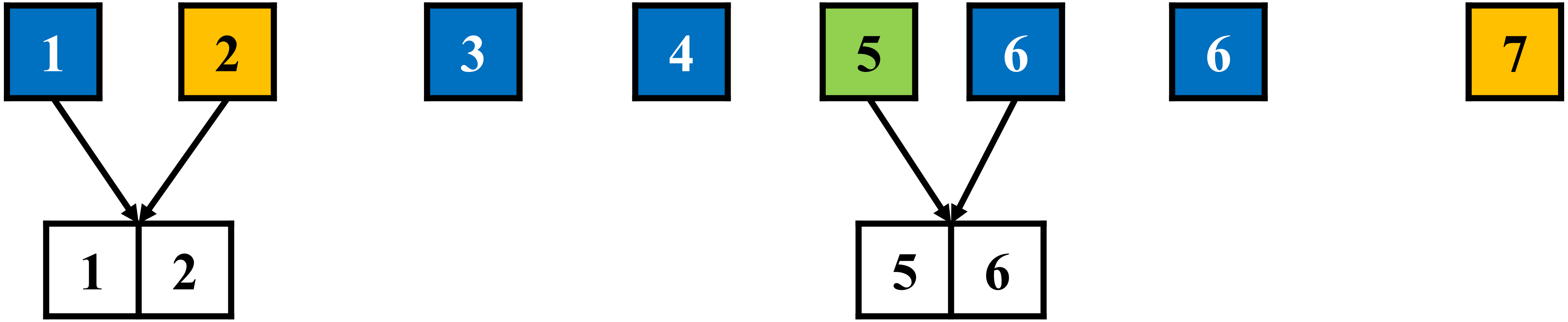
算法实例



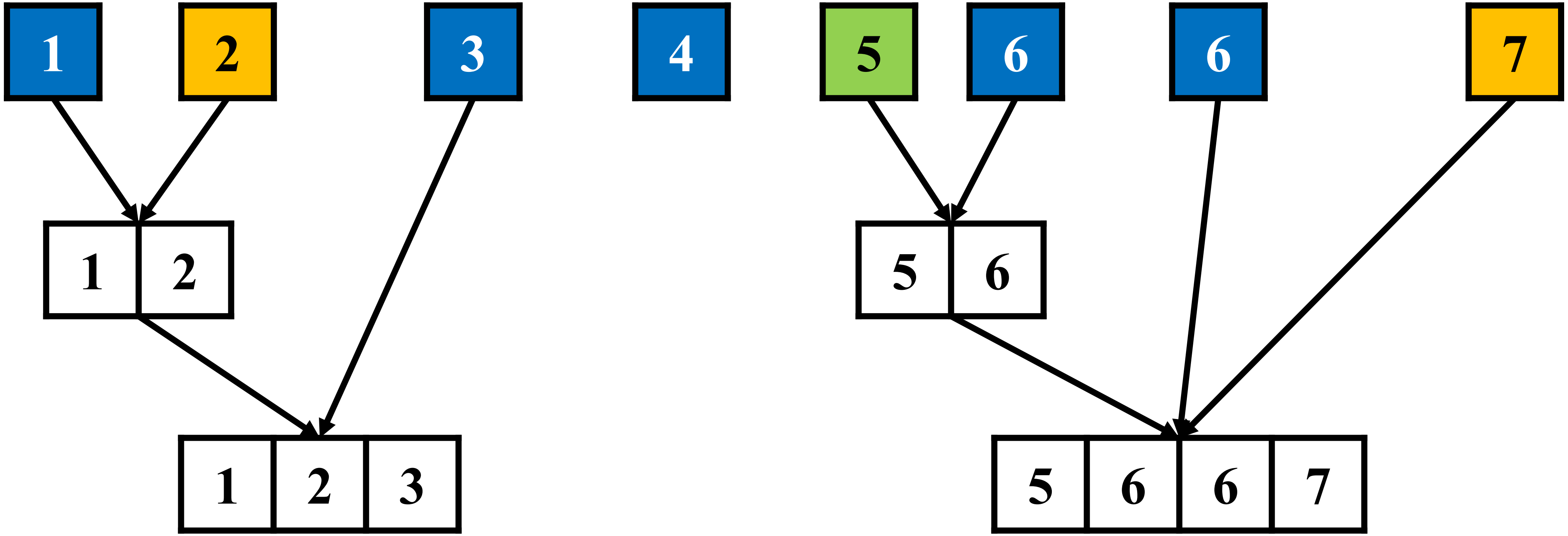
算法实例


2 1 3 4 7 5 6 6
2 1 3
7 5 6 6
数组划分
数组划分
2 1 3
5 6 6 7
2 1
5 6
数组划分
数组划分
1 2
5 6
1
2
3
4
5
6
6
7

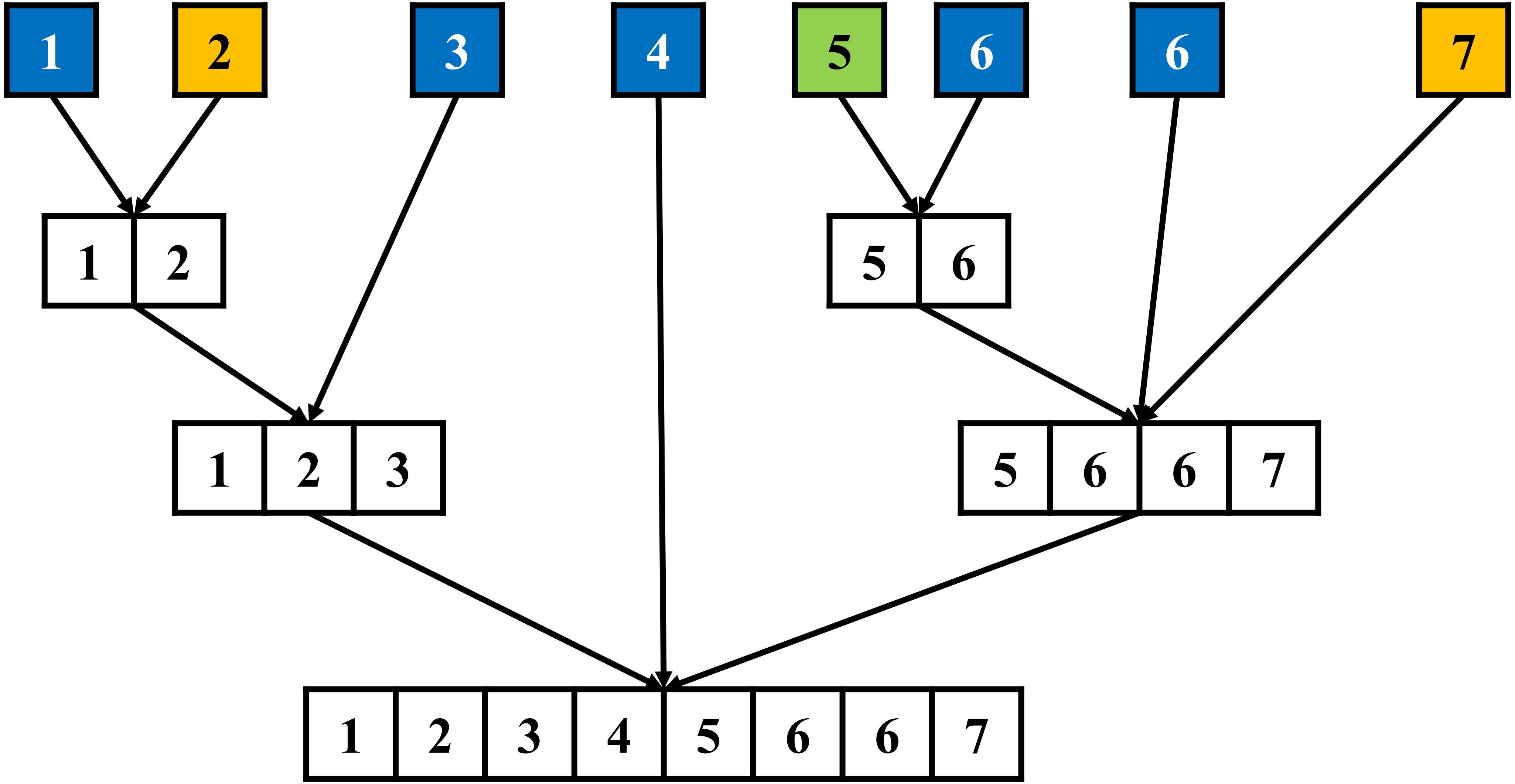
算法实例



算法实例



算法实例



快速排序：伪代码

- **QuickSort(A, p, r)**

初始调用：QuickSort($A, 1, n$)

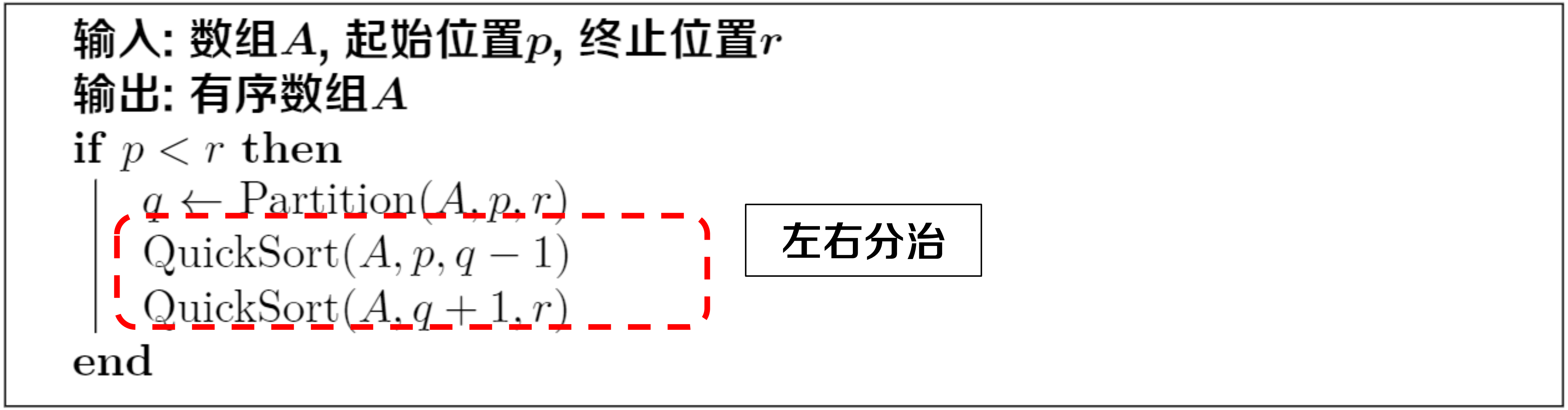
```
输入: 数组$A$, 起始位置$p$, 终止位置$r$
输出: 有序数组$A$
if $p < r$ then
    $q \leftarrow$ Partition($A, p, r$)
    QuickSort($A, p, q-1$)
    QuickSort($A, q+1, r$)
end
```

数组划分 $O(n)$

快速排序：伪代码

- **QuickSort(A, p, r)**

初始调用：QuickSort$(A, 1, n)$



```
输入: 数组$A$, 起始位置$p$, 终止位置$r$
输出: 有序数组$A$
if $p < r$ then
    $q \leftarrow$ Partition$(A, p, r)$
    QuickSort$(A, p, q - 1)$
    QuickSort$(A, q + 1, r)$
end
```

左右分治

快速排序：复杂度分析

- **QuickSort(A, p, r)**

初始调用：QuickSort$(A, 1, n)$

```
输入: 数组$A$, 起始位置$p$, 终止位置$r$
输出: 有序数组$A$
if $p < r$ then
    $q \leftarrow \text{Partition}(A, p, r)$
    $\text{QuickSort}(A, p, q-1)$
    $\text{QuickSort}(A, q+1, r)$
end
```

$O(n)$

快速排序：复杂度分析

- **QuickSort(A, p, r)**

初始调用：QuickSort($A, 1, n$)

```
输入: 数组 $A$, 起始位置 $p$, 终止位置 $r$
输出: 有序数组 $A$
if $p < r$ then
    $q \leftarrow$ Partition($A, p, r$)
    QuickSort($A, p, q - 1$)
    QuickSort($A, q + 1, r$)
end
```

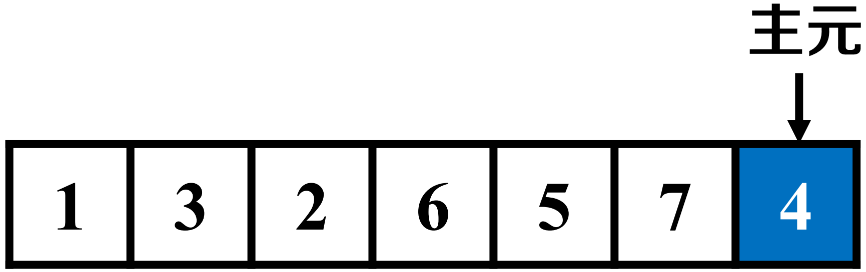
$O(n)$

?

问题：子问题规模不确定，如何分析时间复杂度?

快速排序：复杂度分析

- **最好情况**
  - 数组划分后，每次主元都在中间



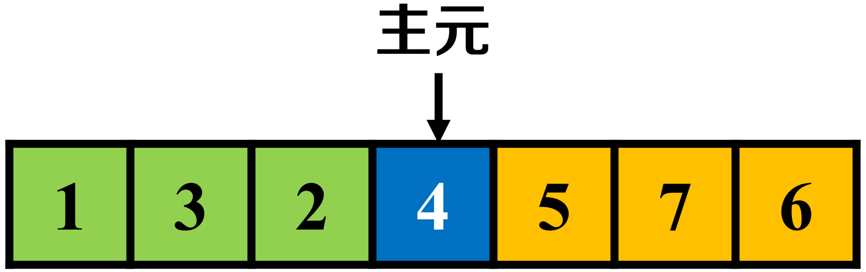
主元

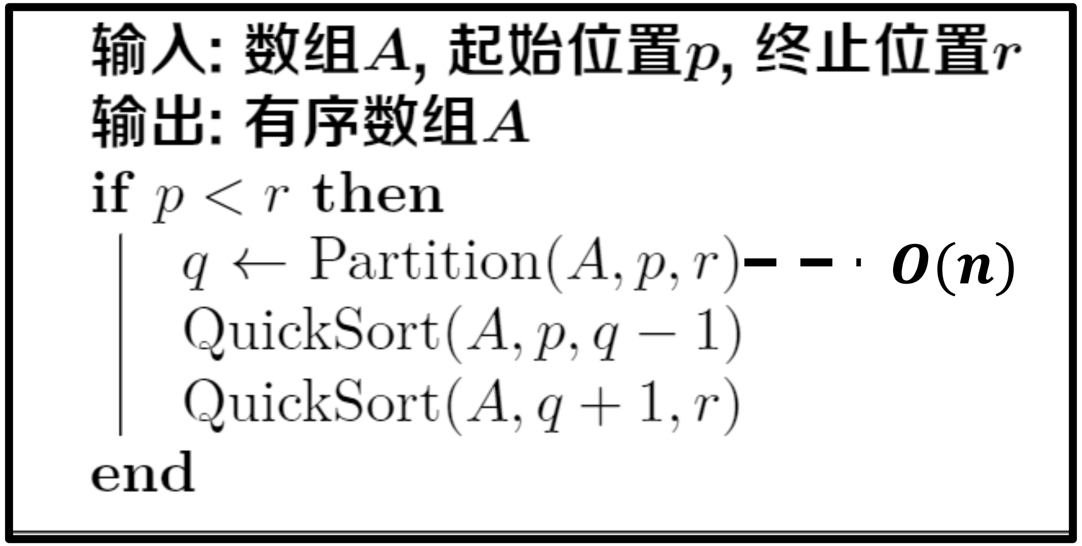
1	3	2	6	5	7	4

```
输入: 数组$A$, 起始位置$p$, 终止位置$r$
输出: 有序数组$A$
if $p < r$ then
    $q \leftarrow \text{Partition}(A, p, r)$ - - · $O(n)$
    $\text{QuickSort}(A, p, q-1)$
    $\text{QuickSort}(A, q+1, r)$
end
```

快速排序：复杂度分析

- 最好情况
    - 数组划分后，每次主元都在中间

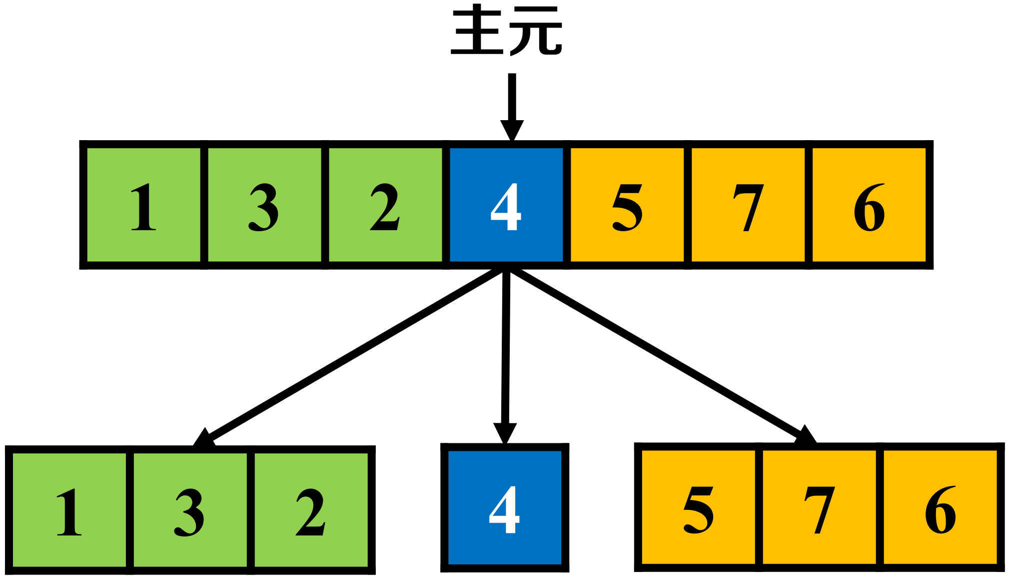




```
输入: 数组$A$, 起始位置$p$, 终止位置$r$
输出: 有序数组$A$
if $p < r$ then
    $q \leftarrow \mathrm{Partition}(A, p, r)$ - - · $O(n)$
    $\mathrm{QuickSort}(A, p, q-1)$
    $\mathrm{QuickSort}(A, q+1, r)$
end
```

快速排序：复杂度分析

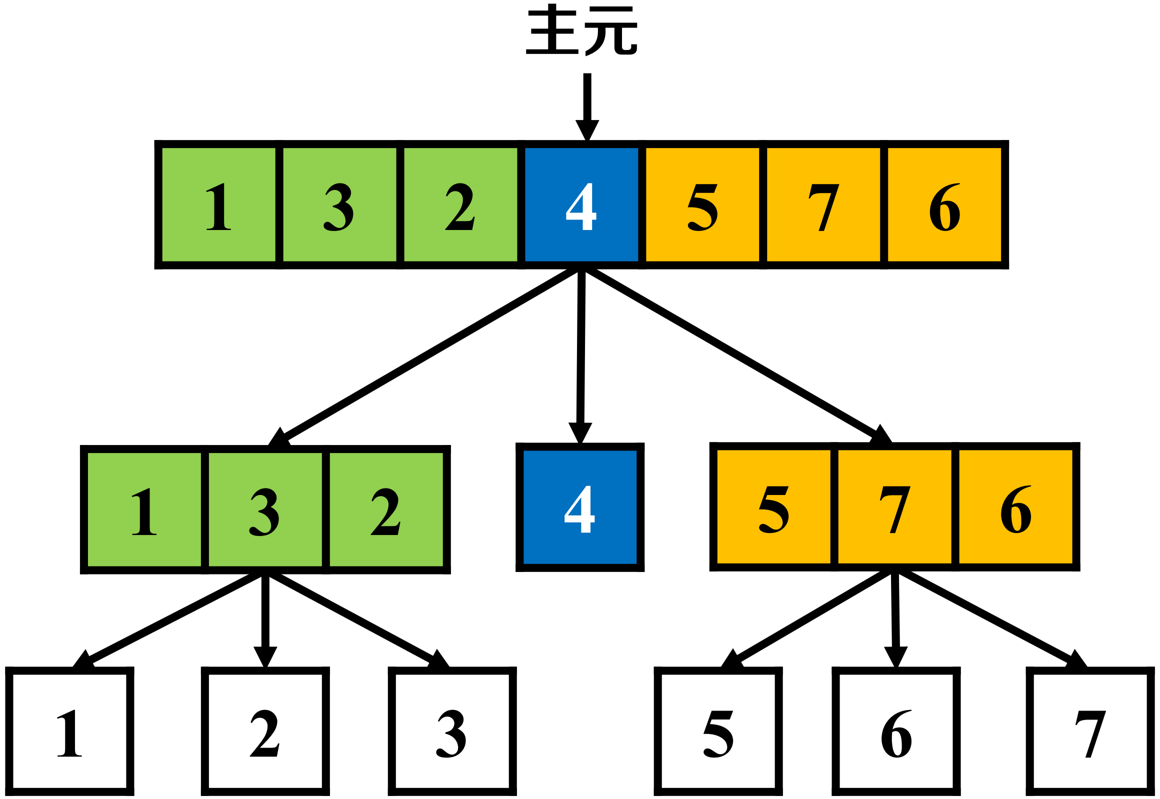
- 最好情况
  - 数组划分后，每次主元都在中间



```
输入: 数组$A$, 起始位置$p$, 终止位置$r$
输出: 有序数组$A$
if $p < r$ then
    $q \leftarrow \text{Partition}(A, p, r)$ - - · $\boldsymbol{O(n)}$
    $\text{QuickSort}(A, p, q-1)$
    $\text{QuickSort}(A, q+1, r)$
end
```

快速排序：复杂度分析

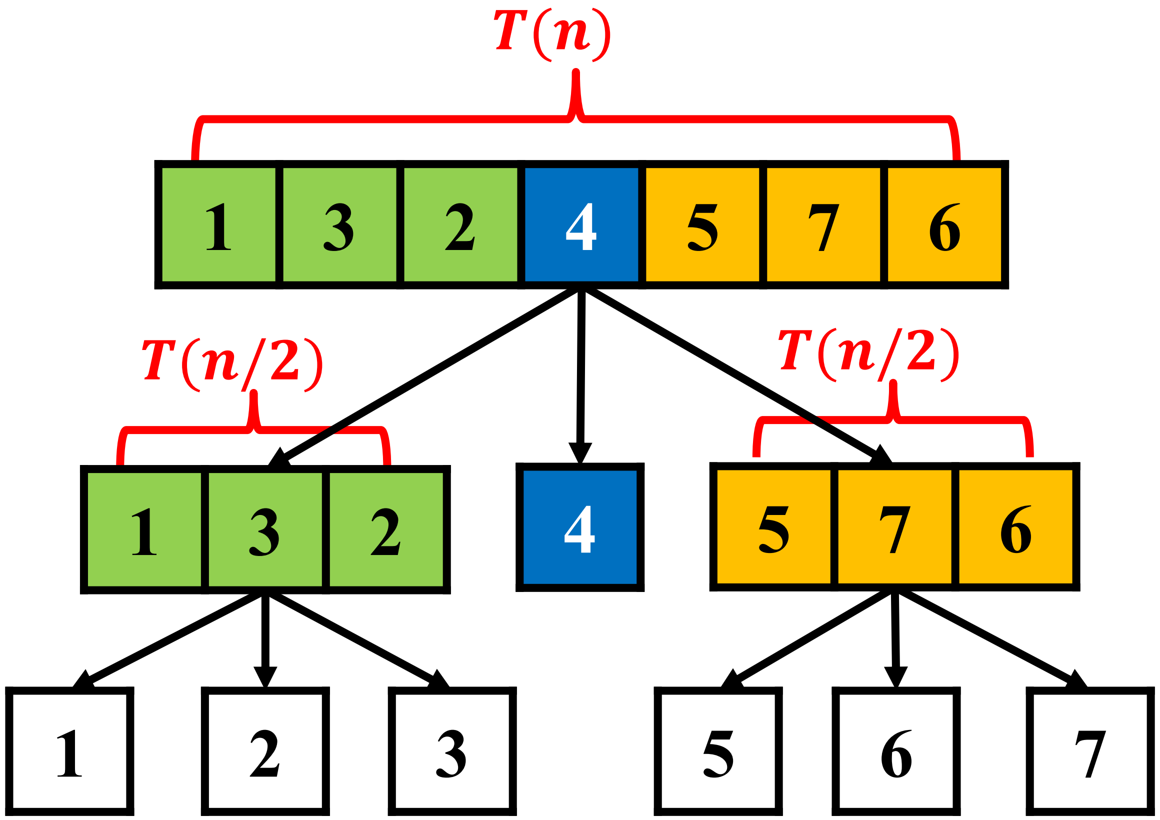
- 最好情况
  - 数组划分后，每次主元都在中间



```
输入: 数组$A$, 起始位置$p$, 终止位置$r$
输出: 有序数组$A$
if $p < r$ then
    $q \leftarrow \text{Partition}(A, p, r)$ - - · $O(n)$
    $\text{QuickSort}(A, p, q-1)$
    $\text{QuickSort}(A, q+1, r)$
end
```

快速排序：复杂度分析

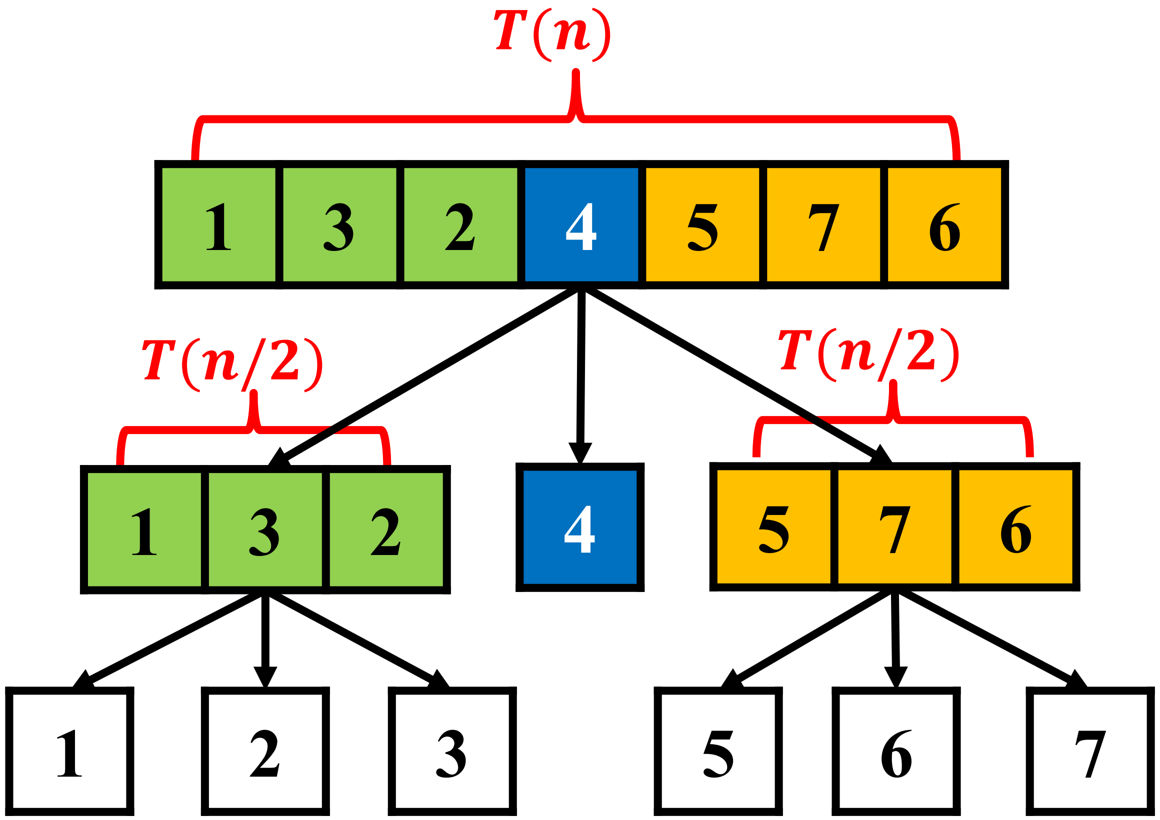
- 最好情况
  - 数组划分后，每次主元都在中间



```
输入: 数组$A$, 起始位置$p$, 终止位置$r$
输出: 有序数组$A$
if $p < r$ then
    $q \leftarrow \text{Partition}(A, p, r)$ - - · $O(n)$
    $\text{QuickSort}(A, p, q-1)$
    $\text{QuickSort}(A, q+1, r)$
end
```

快速排序：复杂度分析

- 最好情况
  - 数组划分后，每次主元都在中间

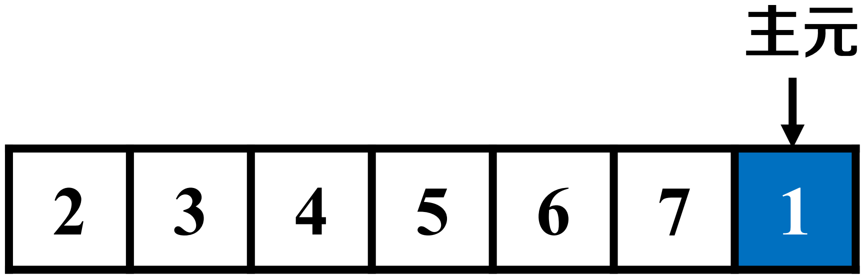


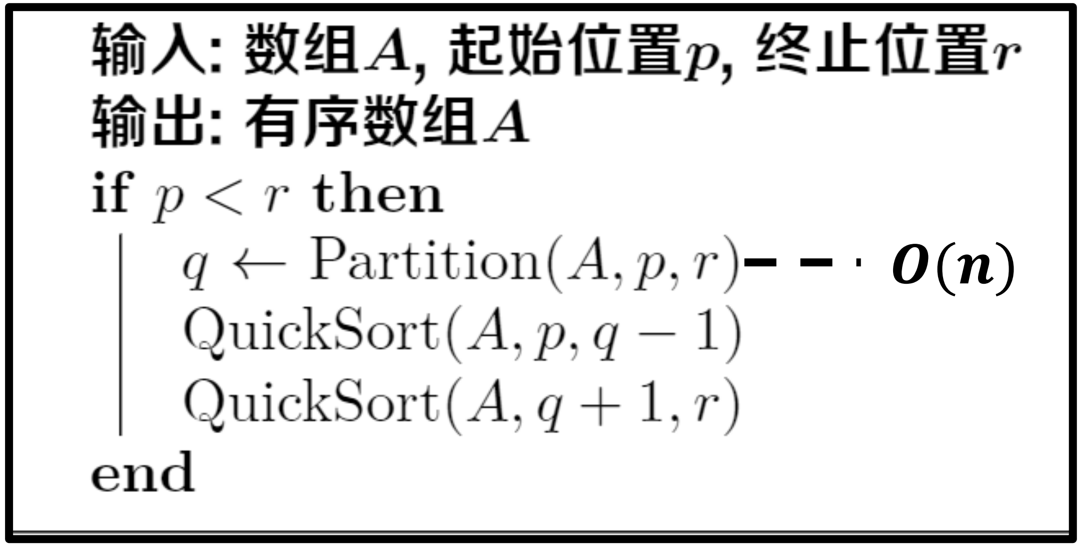
```
输入: 数组$A$, 起始位置$p$, 终止位置$r$
输出: 有序数组$A$
if $p < r$ then
    $q \leftarrow \text{Partition}(A, p, r)$ - - - $O(n)$
    $\text{QuickSort}(A, p, q-1)$ - - - $T(n/2)$
    $\text{QuickSort}(A, q+1, r)$ - - - $T(n/2)$
end
```

$$T(n) = 2T(n/2) + O(n) = O(n\log n)$$

快速排序：复杂度分析

- 最坏情况
  - 数组划分后，每次主元都在一侧

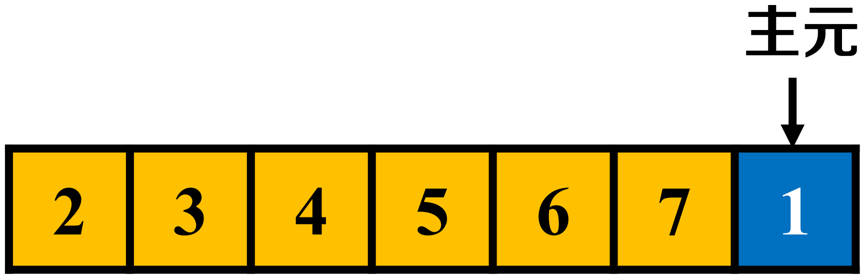




```
输入: 数组$A$, 起始位置$p$, 终止位置$r$
输出: 有序数组$A$
if $p < r$ then
    $q \leftarrow \text{Partition}(A, p, r)$ - - · $O(n)$
    $\text{QuickSort}(A, p, q-1)$
    $\text{QuickSort}(A, q+1, r)$
end
```

快速排序：复杂度分析

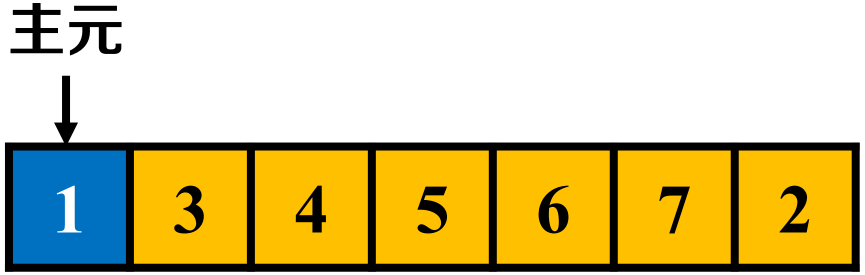
- 最坏情况
  - 数组划分后，每次主元都在一侧



```
输入: 数组$A$, 起始位置$p$, 终止位置$r$
输出: 有序数组$A$
if $p < r$ then
    $q \leftarrow \text{Partition}(A, p, r)$ - - · $O(n)$
    $\text{QuickSort}(A, p, q-1)$
    $\text{QuickSort}(A, q+1, r)$
end
```

快速排序：复杂度分析

- 最坏情况
  - 数组划分后，每次主元都在一侧

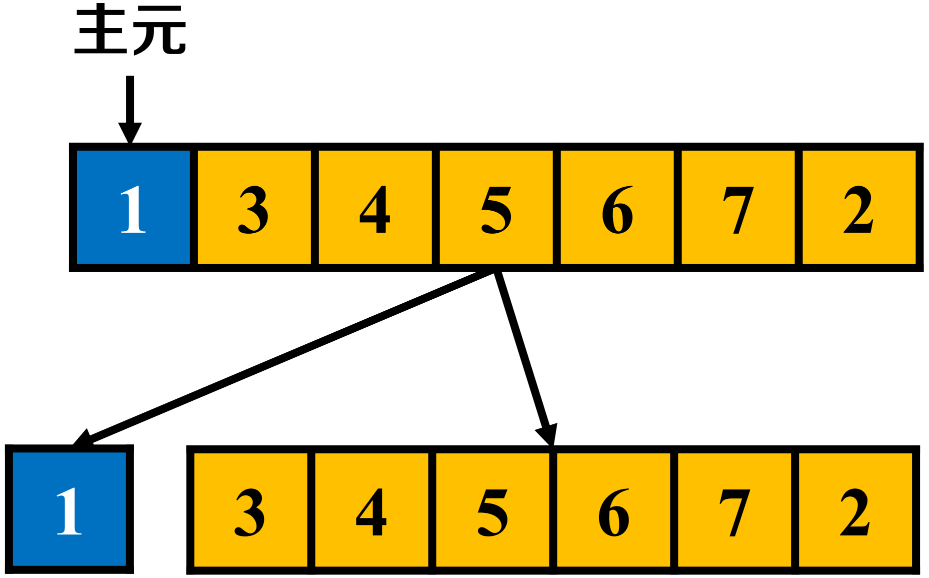


1	3	4	5	6	7	2

```
输入: 数组$A$, 起始位置$p$, 终止位置$r$
输出: 有序数组$A$
if $p < r$ then
    $q \leftarrow \mathrm{Partition}(A, p, r)$ - - · $O(n)$
    $\mathrm{QuickSort}(A, p, q-1)$
    $\mathrm{QuickSort}(A, q+1, r)$
end
```

快速排序：复杂度分析

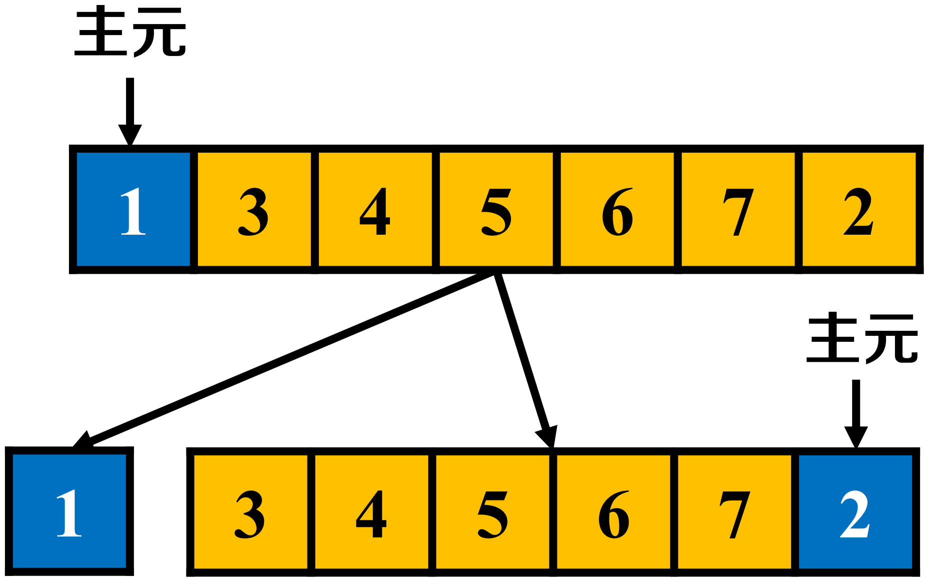
- 最坏情况
  - 数组划分后，每次主元都在一侧



```
输入: 数组$A$, 起始位置$p$, 终止位置$r$
输出: 有序数组$A$
if $p < r$ then
    $q \leftarrow \mathrm{Partition}(A, p, r)$ - - · $O(n)$
    $\mathrm{QuickSort}(A, p, q-1)$
    $\mathrm{QuickSort}(A, q+1, r)$
end
```

快速排序：复杂度分析

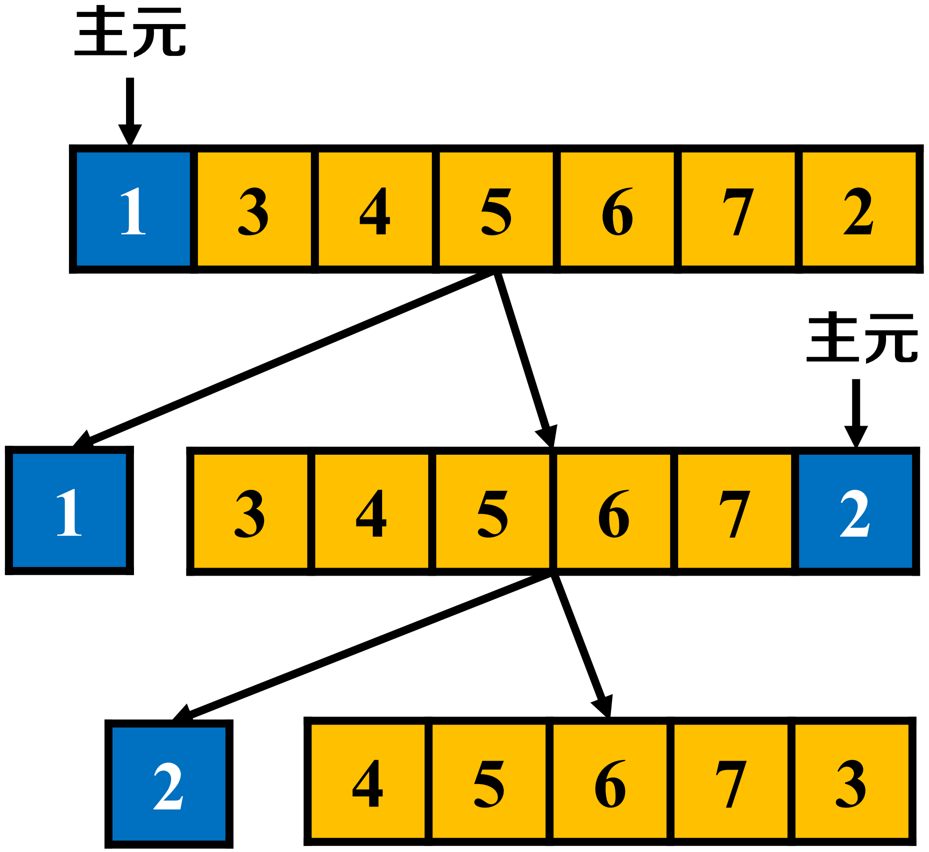
- 最坏情况
  - 数组划分后，每次主元都在一侧



```
输入: 数组$A$, 起始位置$p$, 终止位置$r$
输出: 有序数组$A$
if $p < r$ then
    $q \leftarrow \text{Partition}(A, p, r)$ - - · $O(n)$
    $\text{QuickSort}(A, p, q-1)$
    $\text{QuickSort}(A, q+1, r)$
end
```

快速排序：复杂度分析

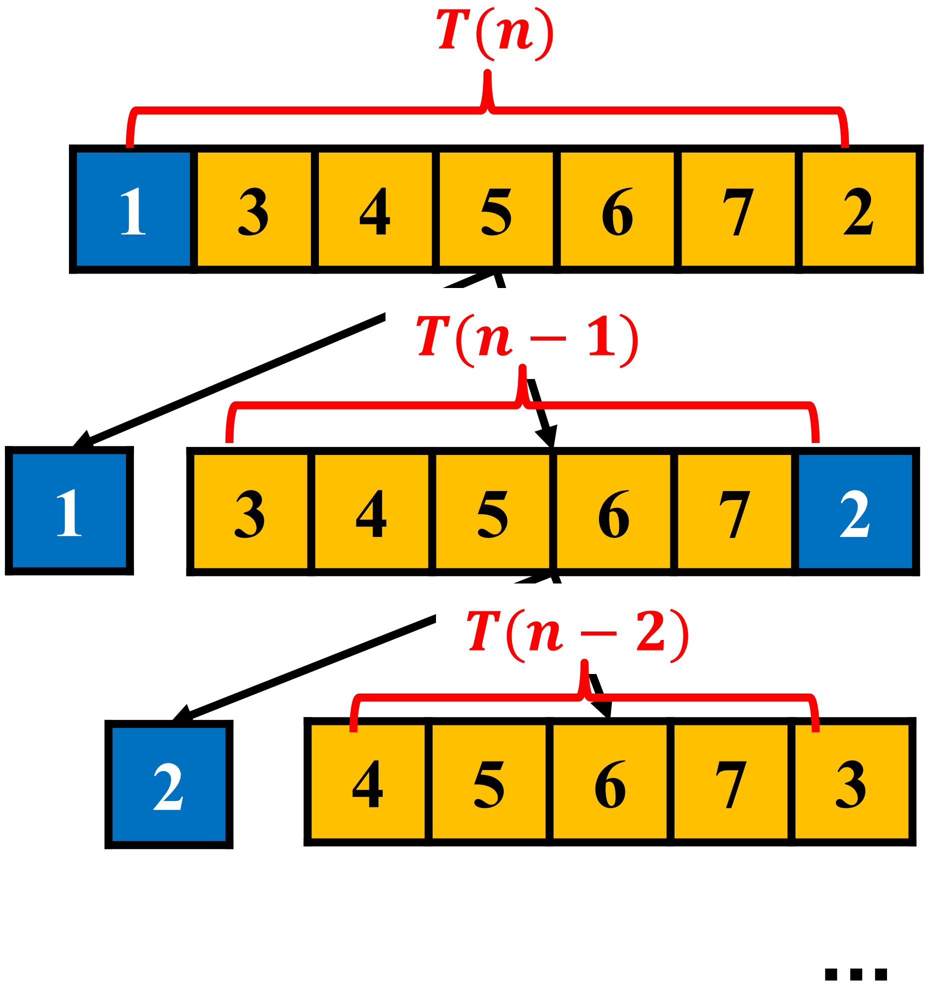
- 最坏情况
  - 数组划分后，每次主元都在一侧



```
输入: 数组$A$, 起始位置$p$, 终止位置$r$
输出: 有序数组$A$
if $p < r$ then
    $q \leftarrow \mathrm{Partition}(A, p, r)$ - - · $O(n)$
    $\mathrm{QuickSort}(A, p, q-1)$
    $\mathrm{QuickSort}(A, q+1, r)$
end
```

快速排序：复杂度分析

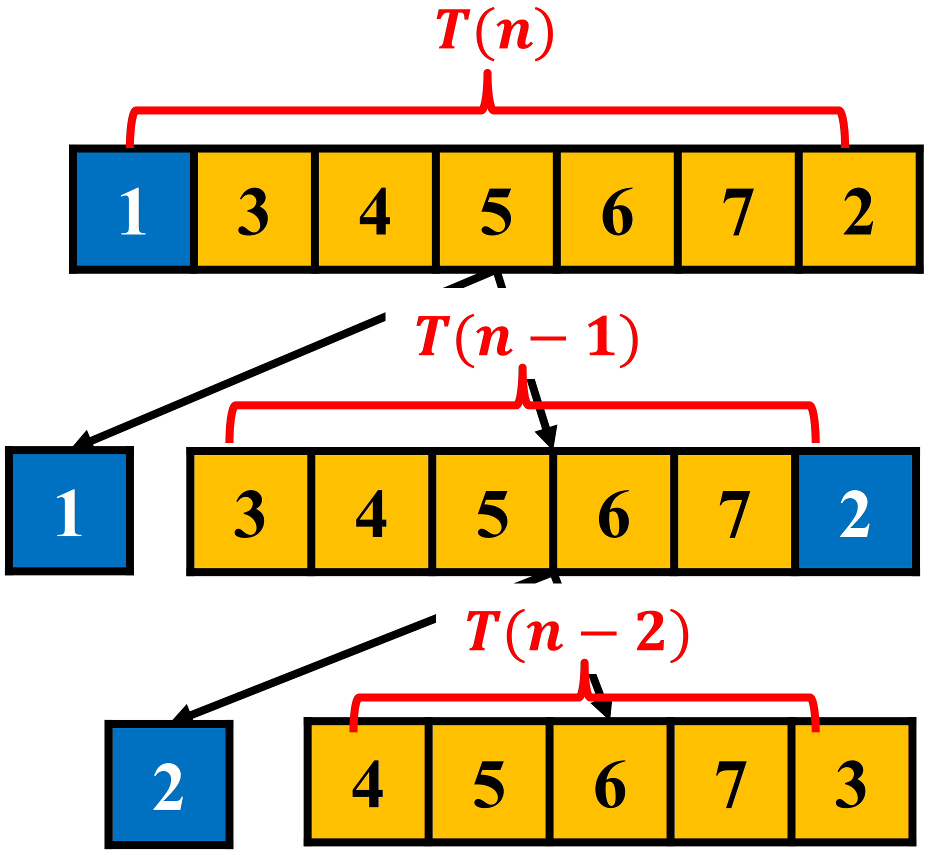
- 最坏情况
  - 数组划分后，每次主元都在一侧



```
输入: 数组$A$, 起始位置$p$, 终止位置$r$
输出: 有序数组$A$
if $p < r$ then
    $q \leftarrow \text{Partition}(A, p, r)$ - - · $O(n)$
    $\text{QuickSort}(A, p, q-1)$
    $\text{QuickSort}(A, q+1, r)$
end
```

快速排序：复杂度分析

- 最坏情况
  - 数组划分后，每次主元都在一侧



…

```
输入: 数组$A$, 起始位置$p$, 终止位置$r$
输出: 有序数组$A$
if $p < r$ then
    $q \leftarrow$ Partition($A, p, r$) - - $O(n)$
    QuickSort($A, p, q-1$) - - $T(0)$
    QuickSort($A, q+1, r$) - - $T(n-1)$
end
```

$$T(n) = T(n-1) + T(0) + O(n) = O(n^2)$$

快速排序：复杂度分析

- **QuickSort(A, p, r)**

初始调用：QuickSort$(A, 1, n)$

```
输入: 数组$A$, 起始位置$p$, 终止位置$r$
输出: 有序数组$A$
if $p < r$ then
    $q \leftarrow$ Partition$(A, p, r)$
    QuickSort$(A, p, q-1)$
    QuickSort$(A, q+1, r)$
end
```

- 最好情况：$O(n\log n)$
- 最坏情况：$O(n^2)$

平均情况：$O(n\log n)$

} 快排

快速排序：复杂度分析

- **QuickSort(A, p, r)**

初始调用：QuickSort$(A, 1, n)$

```
输入: 数组$A$, 起始位置$p$, 终止位置$r$
输出: 有序数组$A$
if $p < r$ then
    $q \leftarrow$ Partition$(A, p, r)$
    QuickSort$(A, p, q-1)$
    QuickSort$(A, q+1, r)$
end
```

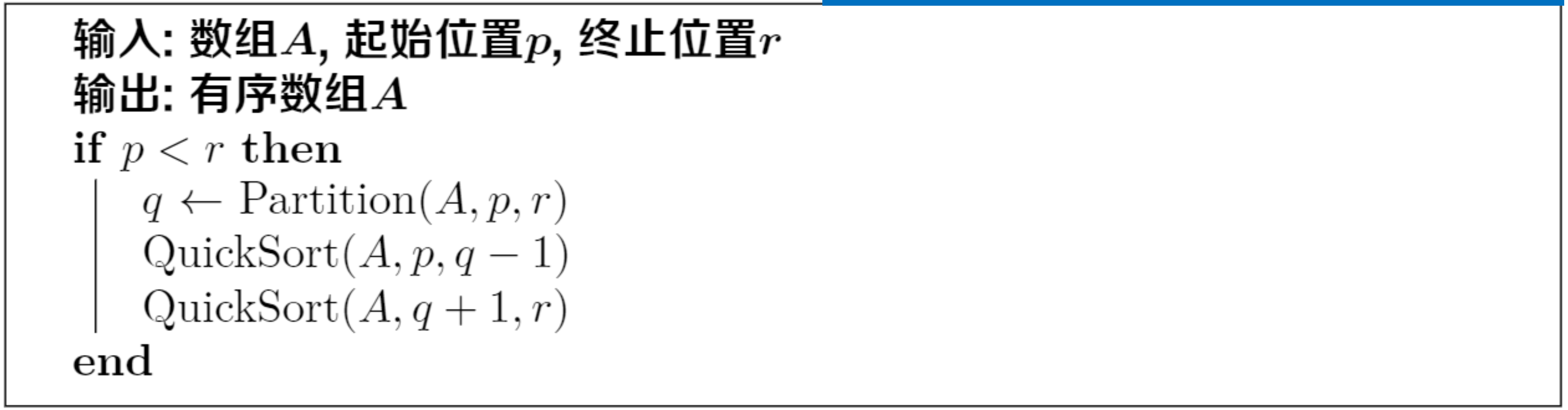
- 最好情况：$O(n\log n)$
- 最坏情况：$O(n^2)$ 比归并慢

快速排序看似不优于归并排序 ✓

快速排序：复杂度分析

- **QuickSort(A, p, r)**

初始调用：QuickSort($A, 1, n$)



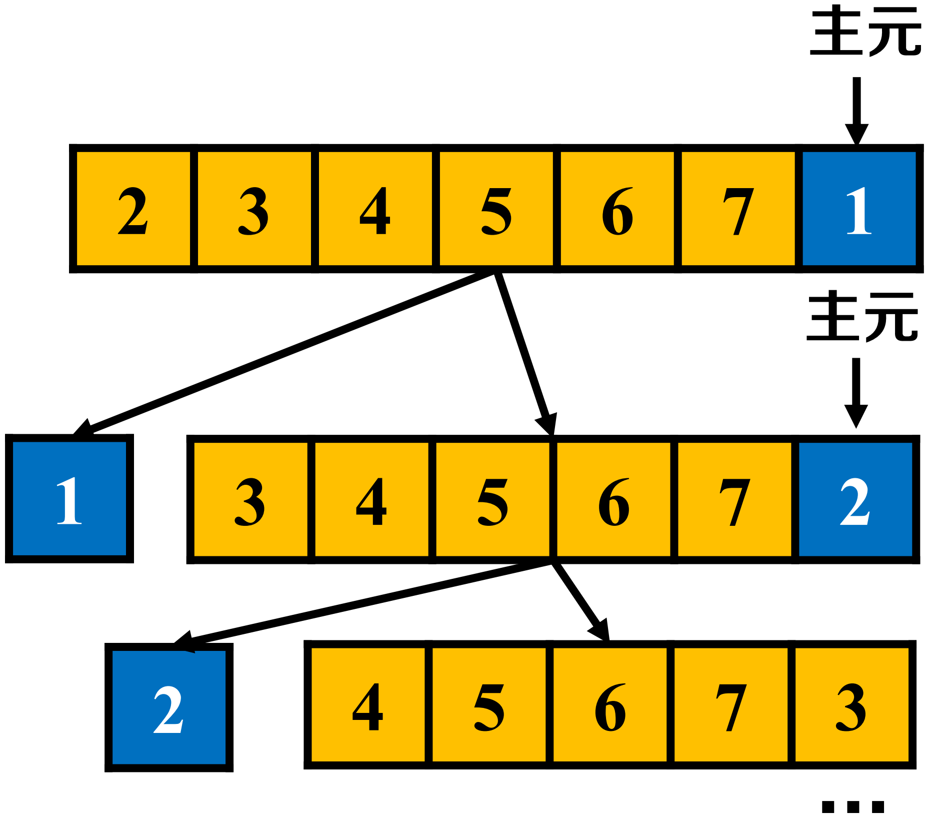
```
输入: 数组$A$, 起始位置$p$, 终止位置$r$
输出: 有序数组$A$
if $p < r$ then
    $q \leftarrow \text{Partition}(A, p, r)$
    $\text{QuickSort}(A, p, q-1)$
    $\text{QuickSort}(A, q+1, r)$
end
```

- 最好情况：$O(n \log n)$
- 最坏情况：$O(n^2)$

问题：如何摆脱输入导致最坏情况的困境?

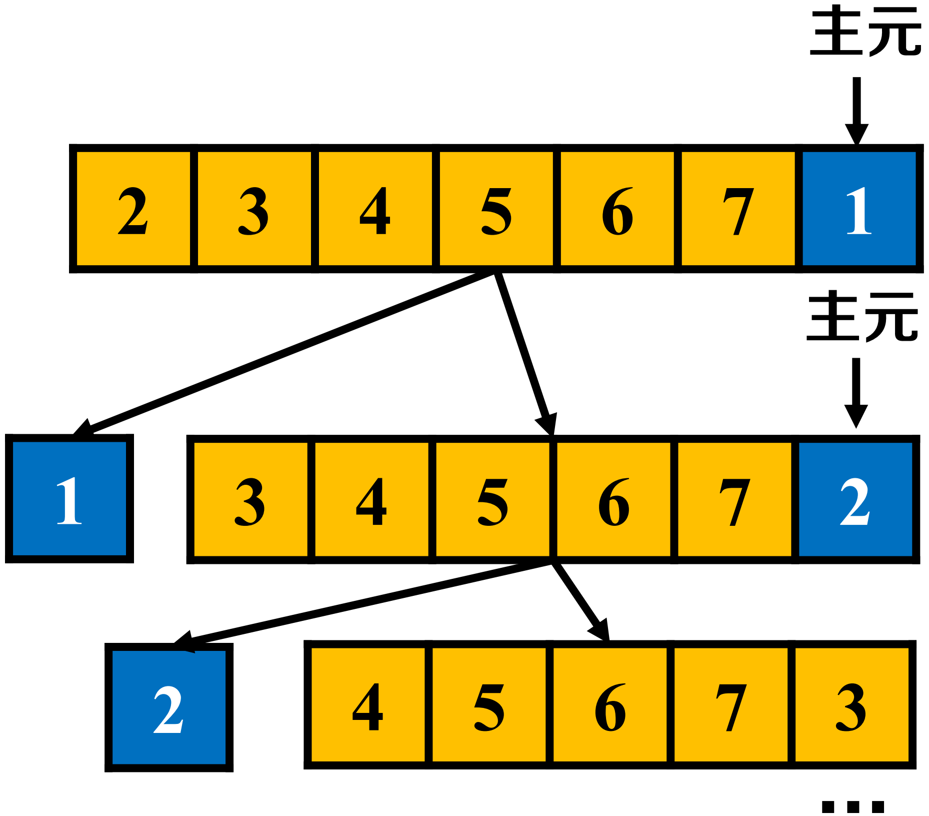
随机划分

- 反思最差情况



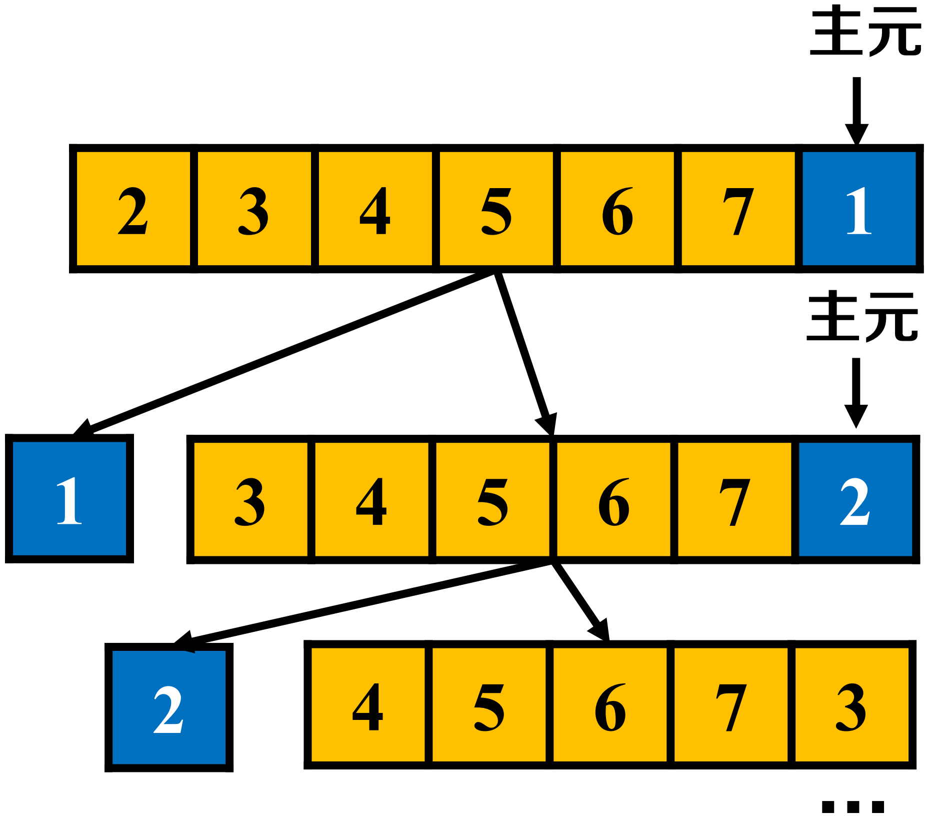
随机划分

- 反思最差情况
  - 数组划分时选取**固定**位置主元，可以针对性构造最差情况



随机划分

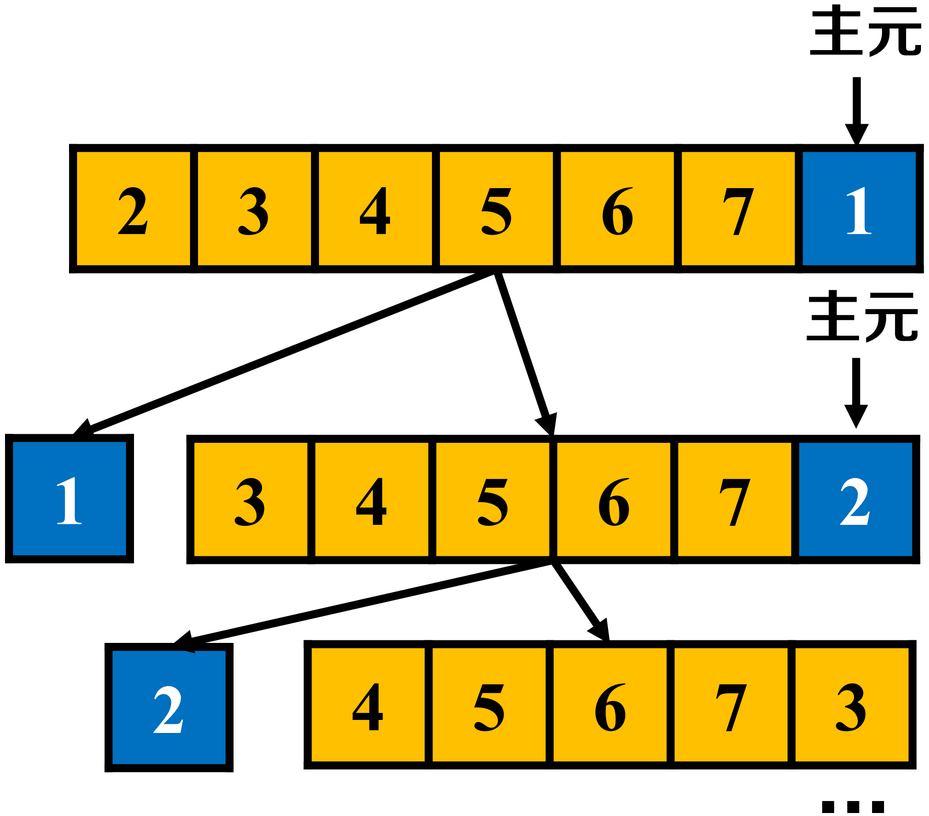
- 反思最差情况
  - 数组划分时选取**固定**位置主元，可以针对性构造最差情况
- 解决方案
  - 数组划分时选取**随机**位置主元，无法针对性构造最差情况

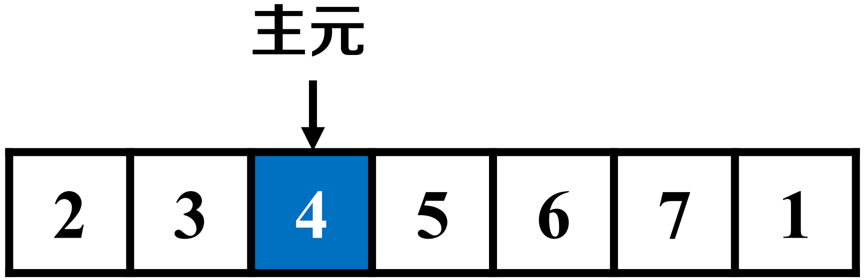


2	3	4	5	6	7	1

随机划分

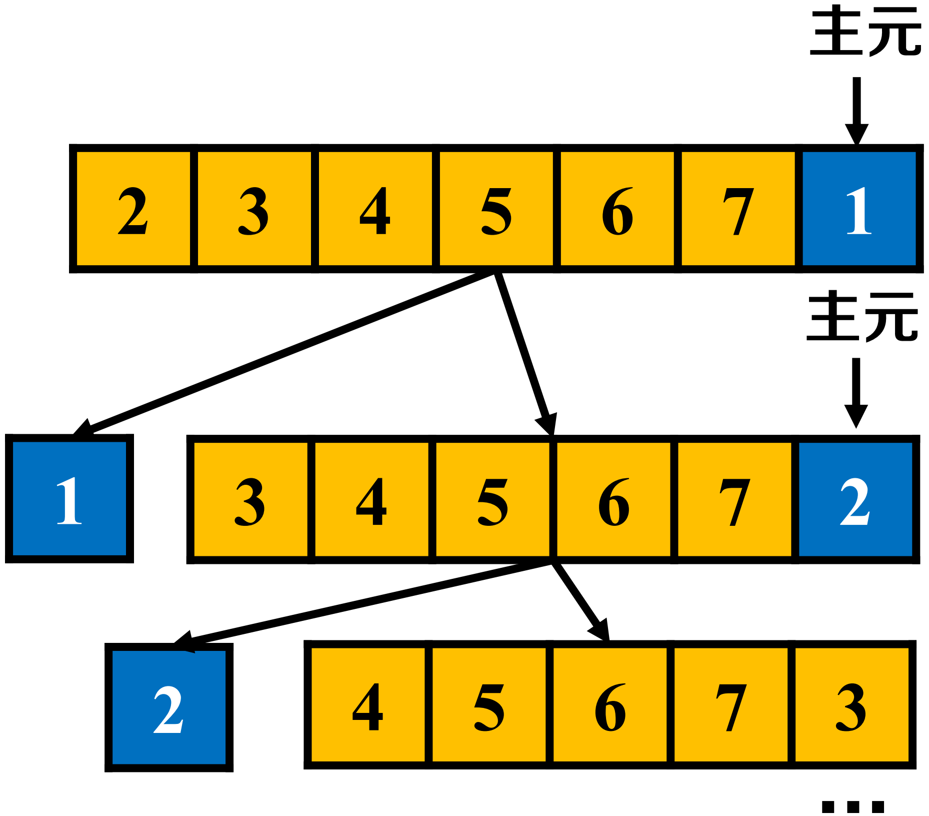
- 反思最差情况
  - 数组划分时选取**固定**位置主元，可以针对性构造最差情况
- 解决方案
  - 数组划分时选取**随机**位置主元，无法针对性构造最差情况

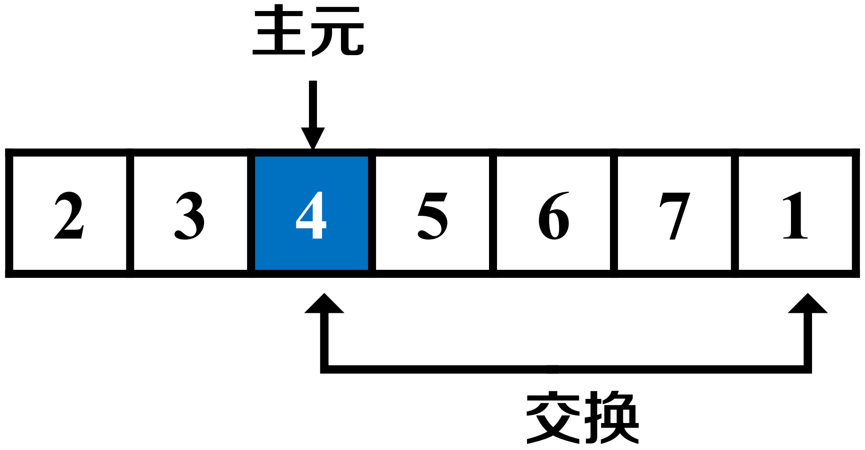




随机划分

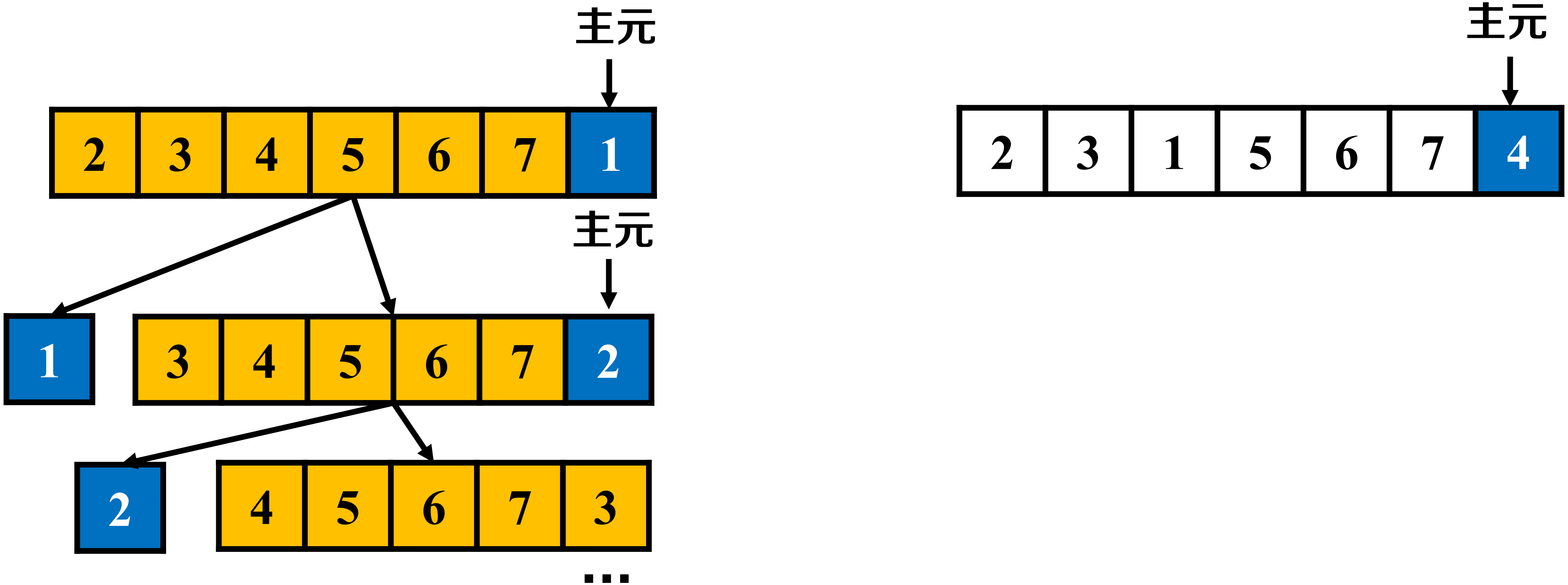
- 反思最差情况
  - 数组划分时选取**固定**位置主元，可以针对性构造最差情况
- 解决方案
  - 数组划分时选取**随机**位置主元，无法针对性构造最差情况





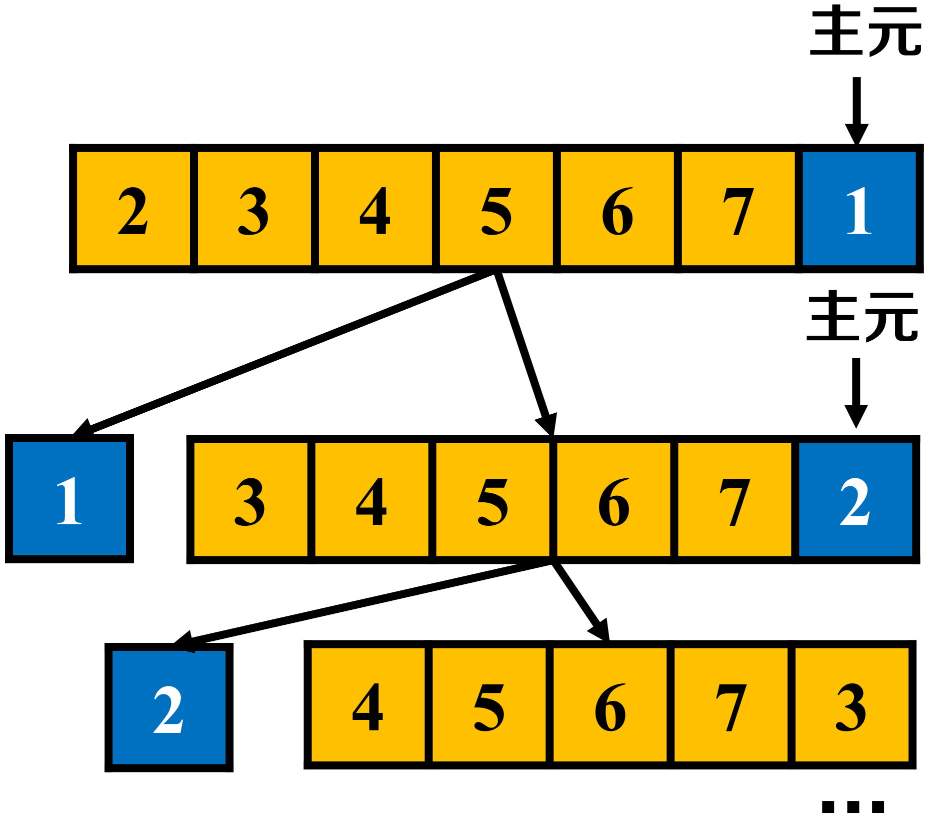
随机划分

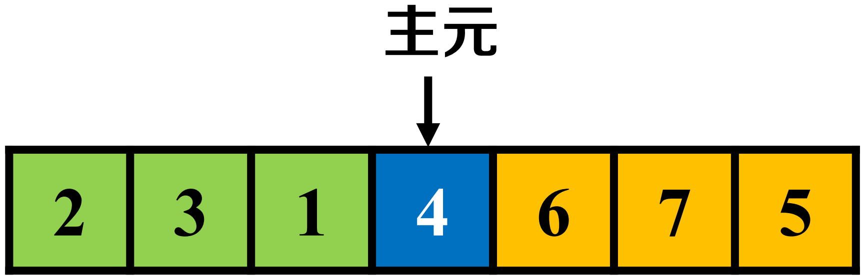
- 反思最差情况
  - 数组划分时选取**固定**位置主元，可以针对性构造最差情况
- 解决方案
  - 数组划分时选取**随机**位置主元，无法针对性构造最差情况



随机划分

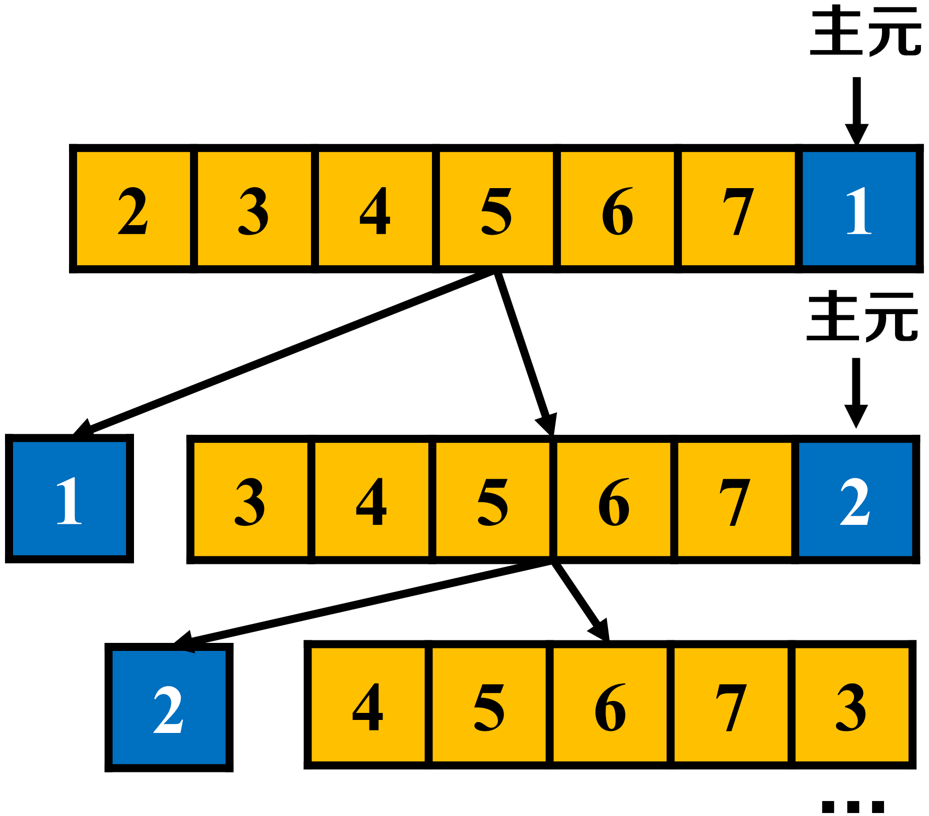
- 反思最差情况
  - 数组划分时选取**固定**位置主元，可以针对性构造最差情况
- 解决方案
  - 数组划分时选取**随机**位置主元，无法针对性构造最差情况

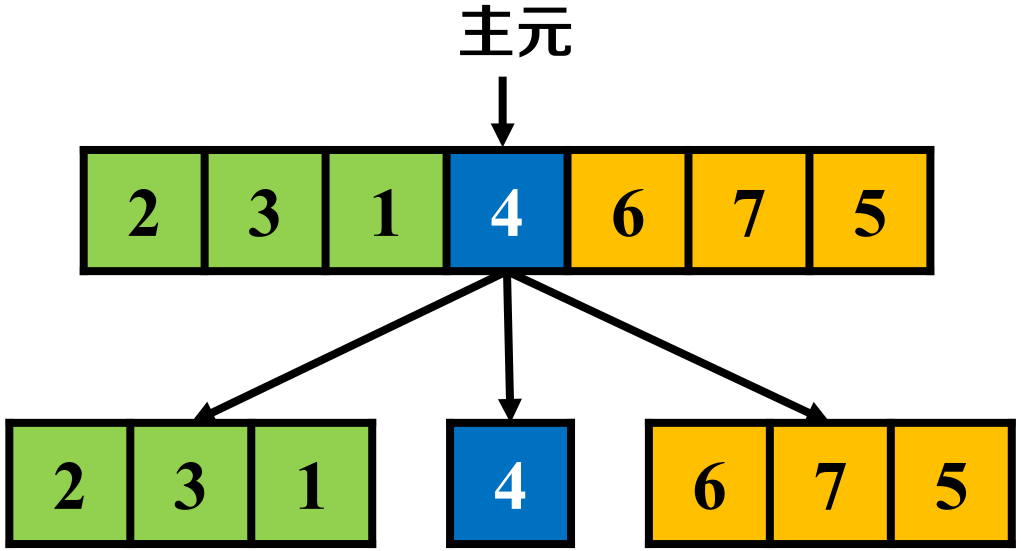




随机划分

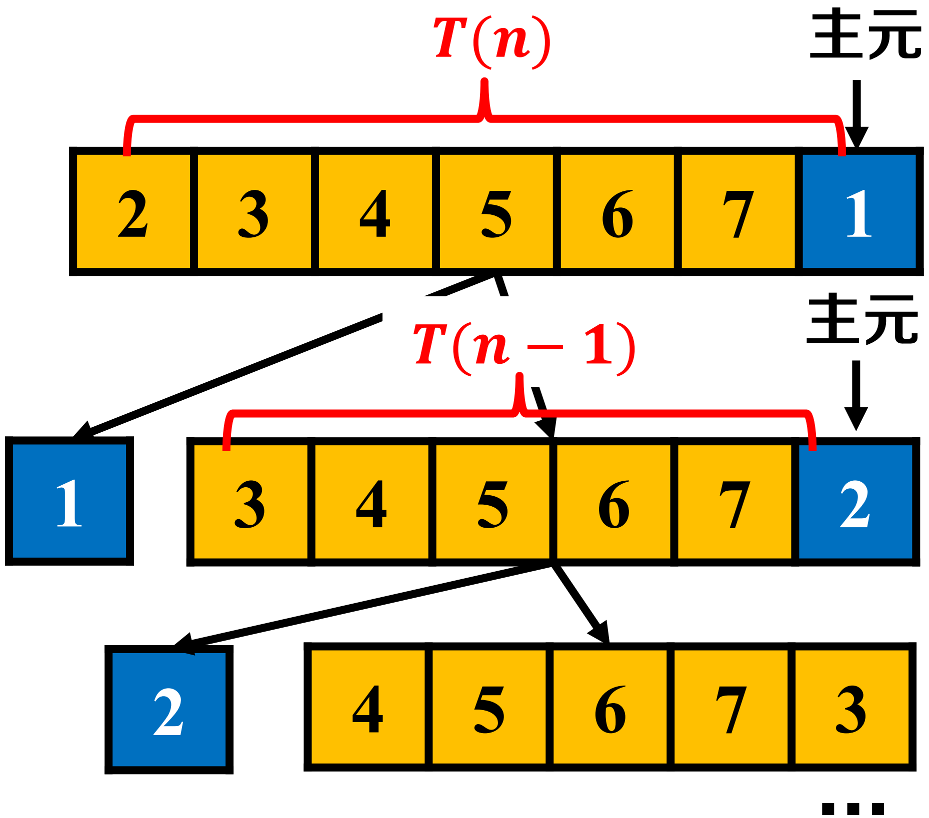
- 反思最差情况
  - 数组划分时选取**固定**位置主元，可以针对性构造最差情况
- 解决方案
  - 数组划分时选取**随机**位置主元，无法针对性构造最差情况

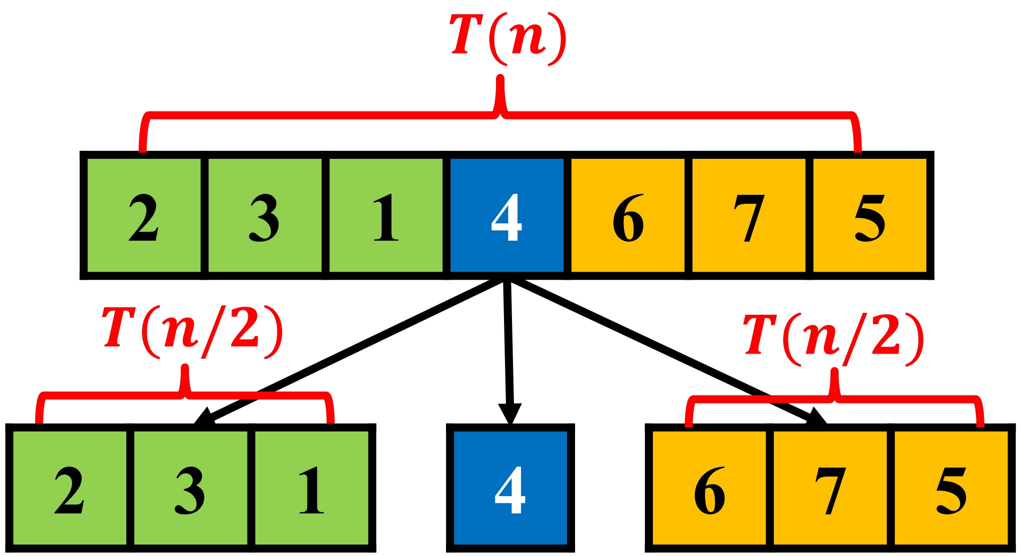




随机划分

- 反思最差情况
  - 数组划分时选取固定位置主元，可以针对性构造最差情况
- 解决方案
  - 数组划分时选取随机位置主元，无法针对性构造最差情况



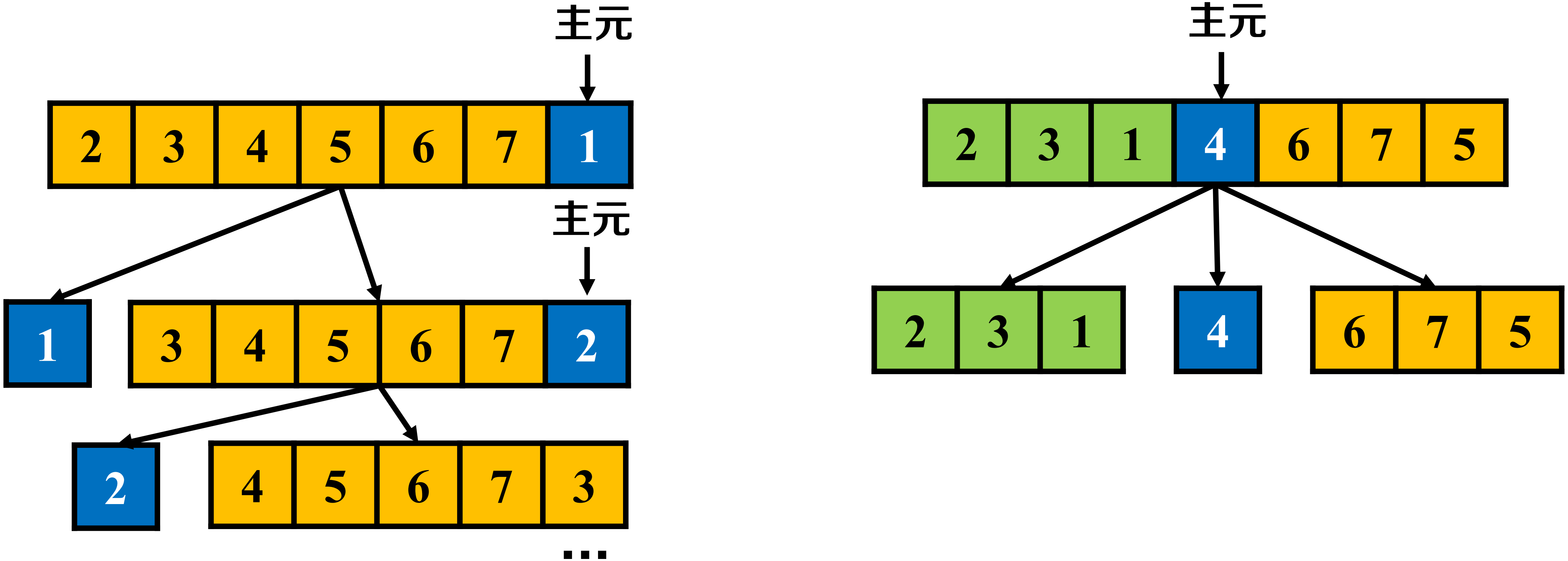


随机划分：伪代码

- **Randomized-Partition(A, p, r)**

```
输入: 数组$A$, 起始位置$p$, 终止位置$r$
输出: 划分位置$q$
$s \leftarrow \text{Random}(p, r)$
exchange $A[s]$ with $A[r]$
$q \leftarrow \text{Partition}(A, p, r)$
return $q$
```

随机选取主元

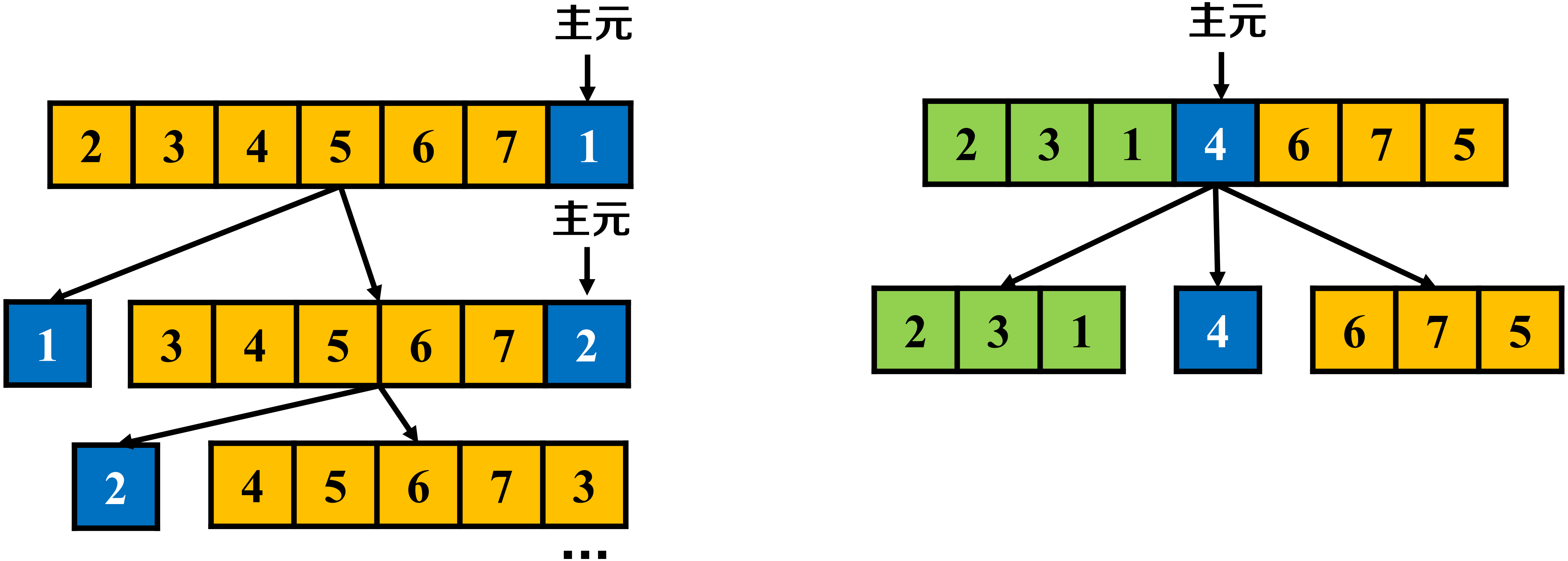


随机划分：伪代码

- **Randomized-Partition(A, p, r)**

```
输入: 数组$A$, 起始位置$p$, 终止位置$r$
输出: 划分位置$q$
$s \leftarrow \text{Random}(p, r)$
exchange $A[s]$ with $A[r]$
$q \leftarrow \text{Partition}(A, p, r)$
return $q$
```

交换到末尾

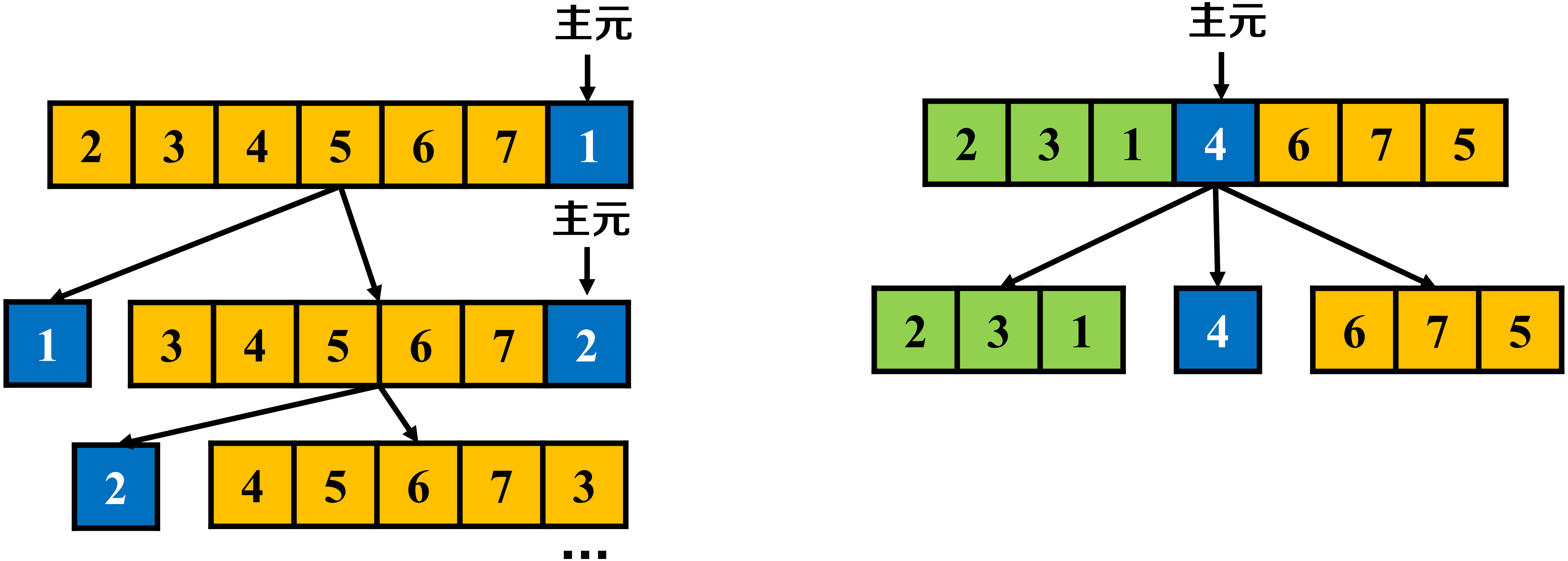


随机划分：伪代码

- **Randomized-Partition(A, p, r)**

```
输入: 数组A, 起始位置p, 终止位置r
输出: 划分位置q
$s \leftarrow \mathrm{Random}(p, r)$
exchange $A[s]$ with $A[r]$
$q \leftarrow \mathrm{Partition}(A, p, r)$
return $q$
```

执行数组划分



随机化快速排序：算法框架

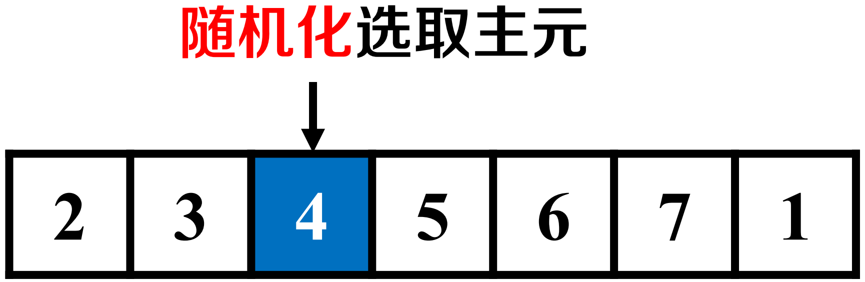
2	3	4	5	6	7	1

分解原问题

解决子问题

合并问题解

随机化快速排序：算法框架



随机化选取主元

2	3	4	5	6	7	1

分解原问题

解决子问题

合并问题解

随机化快速排序：算法框架

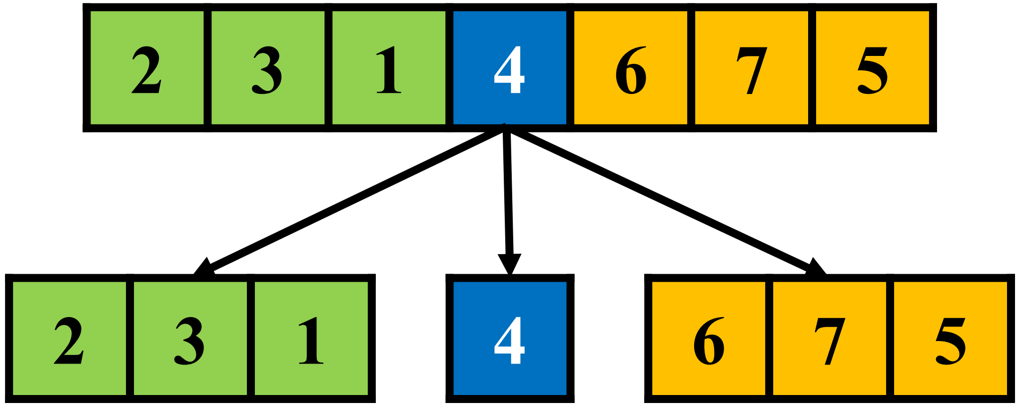
2	3	1	4	6	7	5

分解原问题

解决子问题

合并问题解

随机化快速排序：算法框架

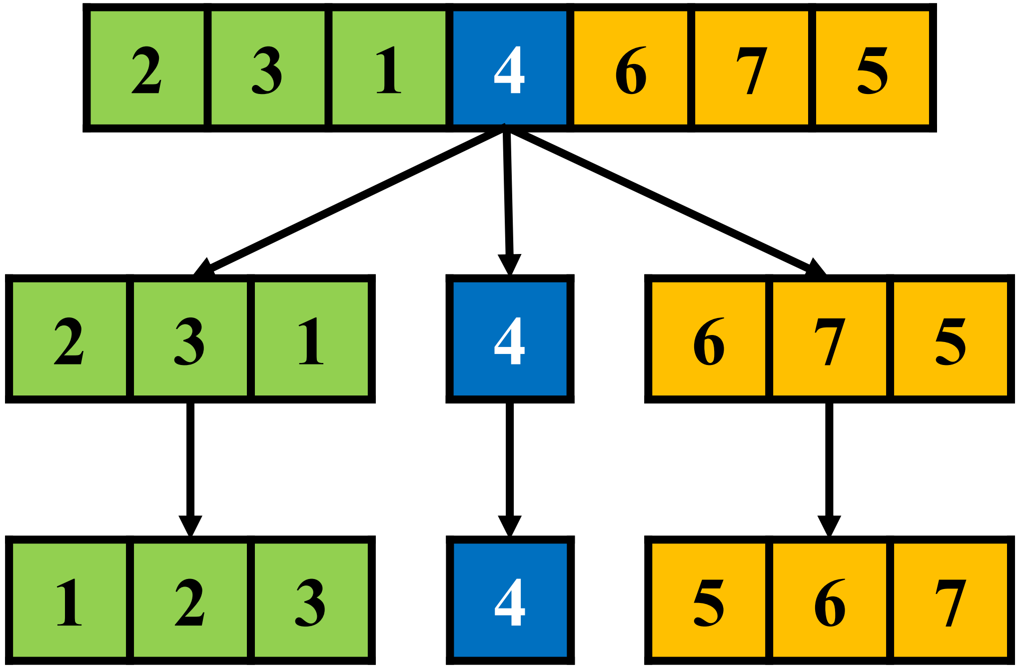


分解原问题

解决子问题

合并问题解

随机化快速排序：算法框架

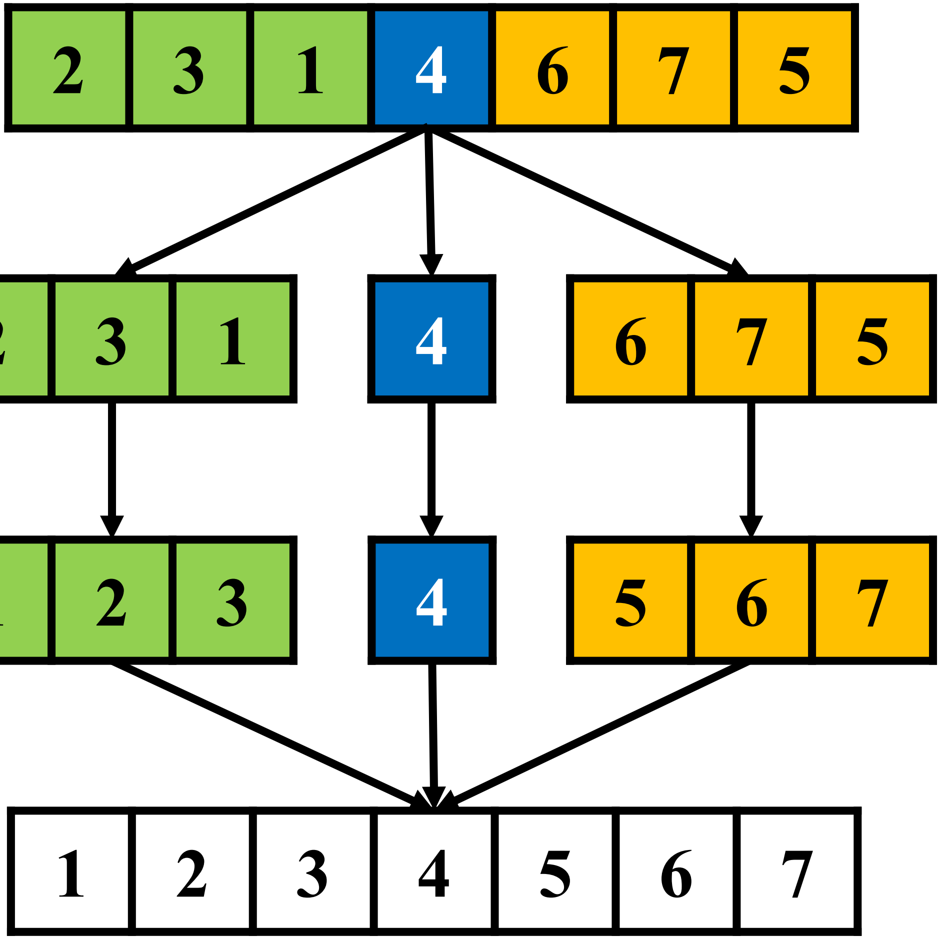


分解原问题

解决子问题

合并问题解

随机化快速排序：算法框架



分解原问题

解决子问题

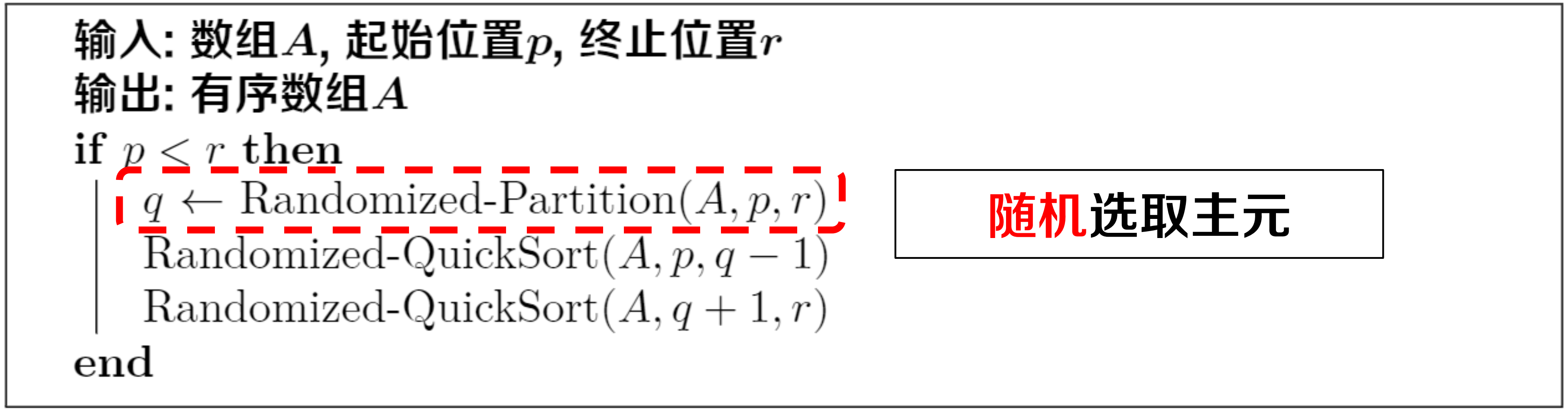
合并问题解

随机化快速排序：伪代码

- **Randomized-Partition(A, p, r)**

```
输入: 数组$A$, 起始位置$p$, 终止位置$r$
输出: 划分位置$q$
$s \leftarrow \text{Random}(p, r)$
exchange $A[s]$ with $A[r]$
$q \leftarrow \text{Partition}(A, p, r)$
return $q$
```

- **Randomized-QuickSort(A, p, r)**



```
输入: 数组$A$, 起始位置$p$, 终止位置$r$
输出: 有序数组$A$
if $p < r$ then
    $q \leftarrow \text{Randomized-Partition}(A, p, r)$
    Randomized-QuickSort($A, p, q - 1$)
    Randomized-QuickSort($A, q + 1, r$)
end
```

随机选取主元

随机化快速排序：伪代码

- **Randomized-Partition(A, p, r)**

```
输入: 数组$A$, 起始位置$p$, 终止位置$r$
输出: 划分位置$q$
$s \leftarrow \text{Random}(p, r)$
exchange $A[s]$ with $A[r]$
$q \leftarrow \text{Partition}(A, p, r)$
return $q$
```

- **Randomized-QuickSort(A, p, r)**

```
输入: 数组$A$, 起始位置$p$, 终止位置$r$
输出: 有序数组$A$
if $p < r$ then
    $q \leftarrow \text{Randomized-Partition}(A, p, r)$
    $\text{Randomized-QuickSort}(A, p, q-1)$
    $\text{Randomized-QuickSort}(A, q+1, r)$
end
```

左右分治

随机化快速排序：伪代码

- **Randomized-Partition(A, p, r)**

```
输入: 数组$A$, 起始位置$p$, 终止位置$r$
输出: 划分位置$q$
$s \leftarrow \mathrm{Random}(p, r)$
exchange $A[s]$ with $A[r]$
$q \leftarrow \mathrm{Partition}(A, p, r)$
return $q$
```

- **Randomized-QuickSort(A, p, r)**

```
输入: 数组$A$, 起始位置$p$, 终止位置$r$
输出: 有序数组$A$
if $p < r$ then
    $q \leftarrow \text{Randomized-Partition}(A, p, r)$
    $\text{Randomized-QuickSort}(A, p, q-1)$
    $\text{Randomized-QuickSort}(A, q+1, r)$
end
```

问题：如何分析时间复杂度?

随机化快速排序：复杂度分析

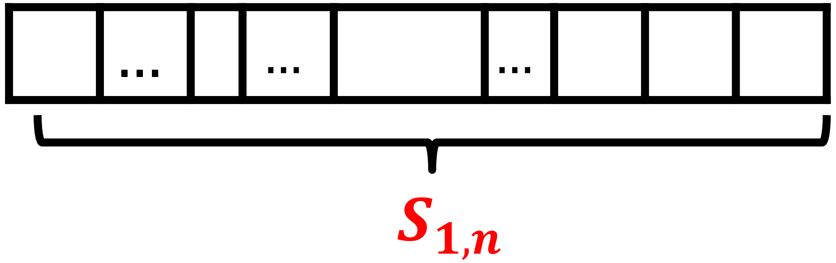
- 分析目标：期望复杂度
  - 计算元素期望比较次数$E[X]$

随机化快速排序：复杂度分析

- 分析目标：期望复杂度
  - 计算元素期望比较次数$E[X]$
- 符号表示
  - z_k：数组A中第k小的元素
  - 集合$S_{i,j}$：$\{z_i, \dots, z_j\}$

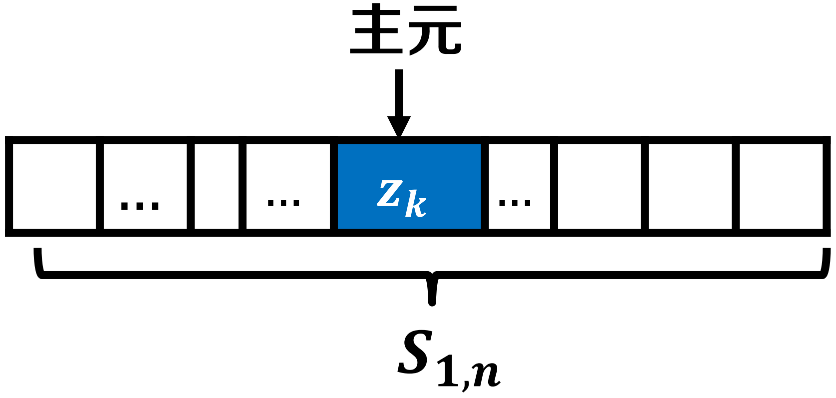
随机化快速排序：复杂度分析

- 分析目标：期望复杂度
  - 计算元素期望比较次数$E[X]$
- 符号表示
  - z_k：数组A中第k小的元素
  - 集合$S_{i,j}$：$\{z_i, \dots, z_j\}$



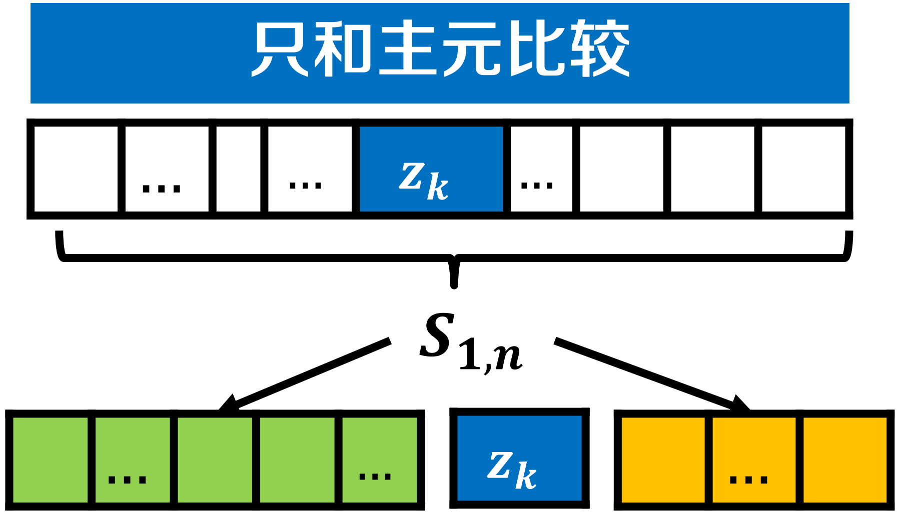
随机化快速排序：复杂度分析

- 分析目标：期望复杂度
  - 计算元素期望比较次数$E[X]$
- 符号表示
  - z_k：数组A中第k小的元素
  - 集合$S_{i,j}$：$\{z_i, \dots, z_j\}$



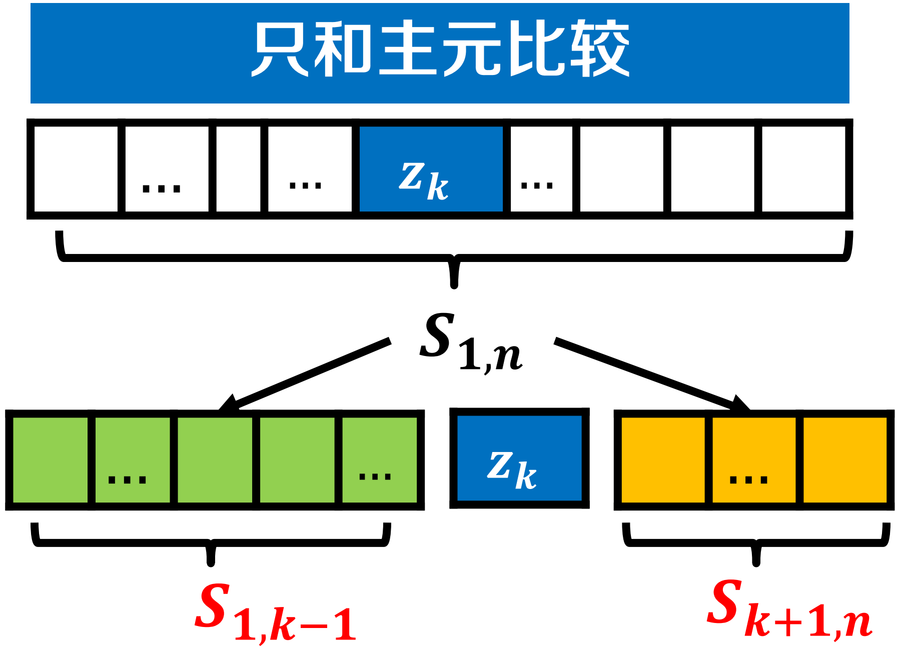
随机化快速排序：复杂度分析

- 分析目标：期望复杂度
  - 计算元素期望比较次数$E[X]$
- 符号表示
  - z_k：数组A中第k小的元素
  - 集合$S_{i,j}$：$\{z_i, \ldots, z_j\}$



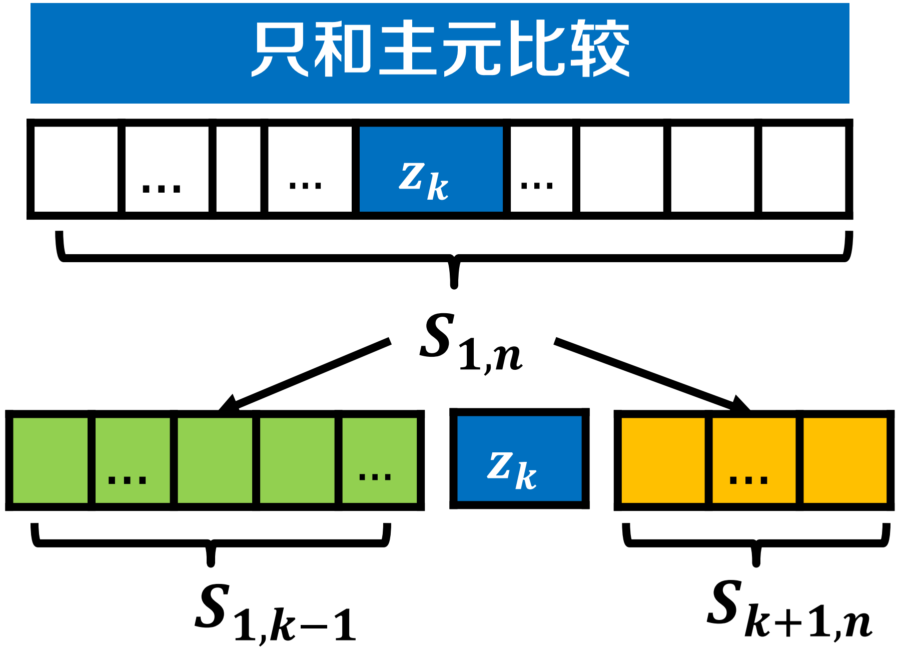
随机化快速排序：复杂度分析

- 分析目标：期望复杂度
  - 计算元素期望比较次数$E[X]$
- 符号表示
  - z_k：数组A中第k小的元素
  - 集合$S_{i,j}$：$\{z_i, \ldots, z_j\}$



随机化快速排序：复杂度分析

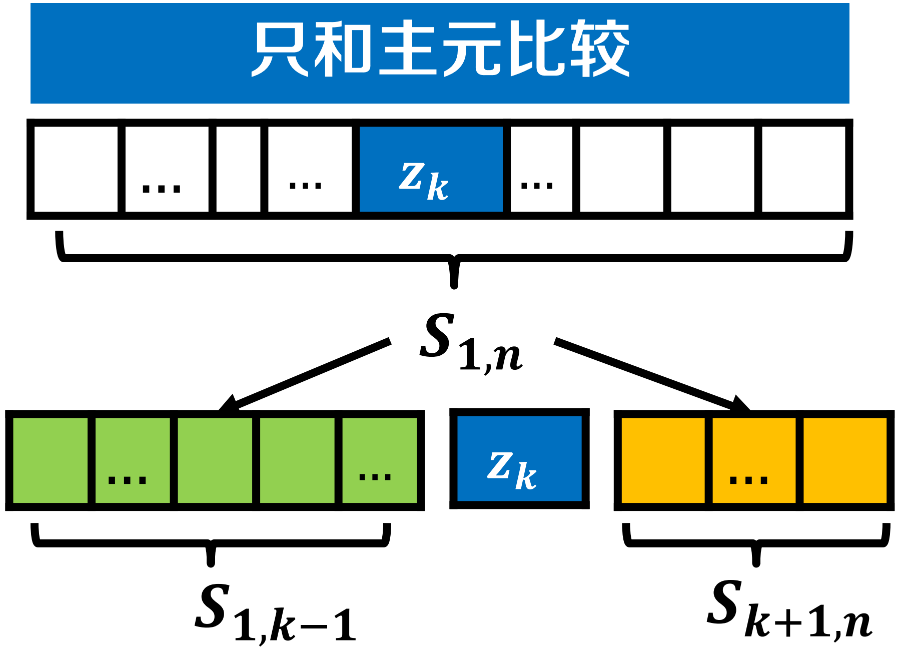
- **推导过程**
  - 随机变量X_{ij}：z_i和z_j比较的次数
  - $E[X] =$



只和主元比较

随机化快速排序：复杂度分析

- 推导过程
  - 随机变量X_{ij}：z_i和z_j比较的次数
  - $E[X] = E\left[\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} X_{ij}\right]$

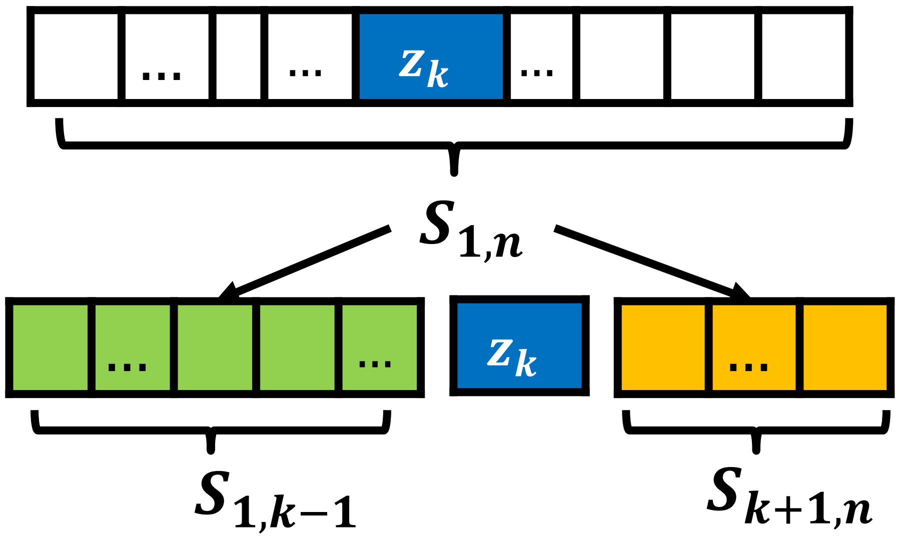


随机化快速排序：复杂度分析

- 推导过程
  - 随机变量X_{ij}：z_i和z_j比较的次数
  - $E[X] = E\left[\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} X_{ij}\right] = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} E[X_{ij}]$

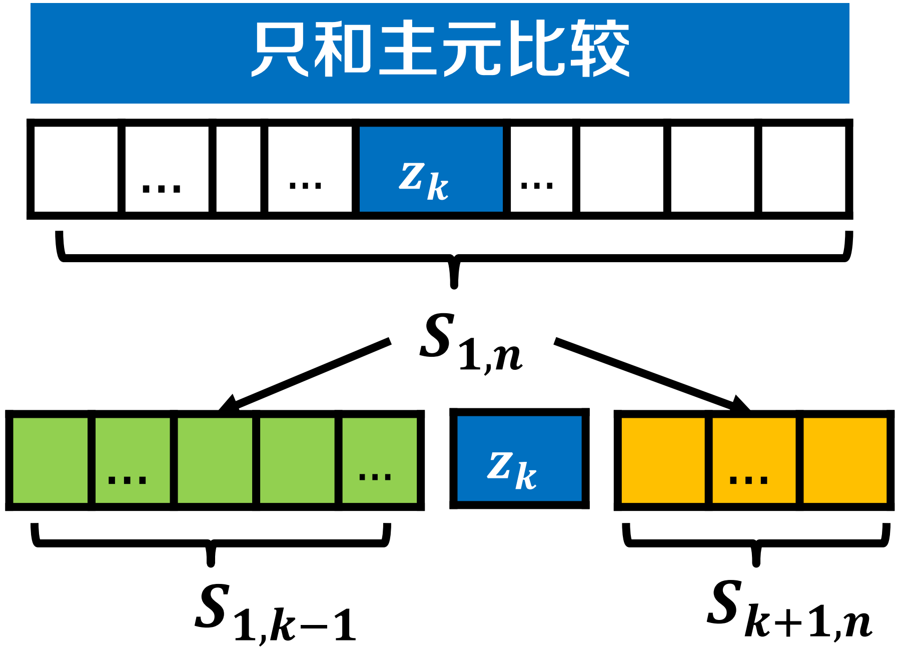
期望的线性特性

只和主元比较



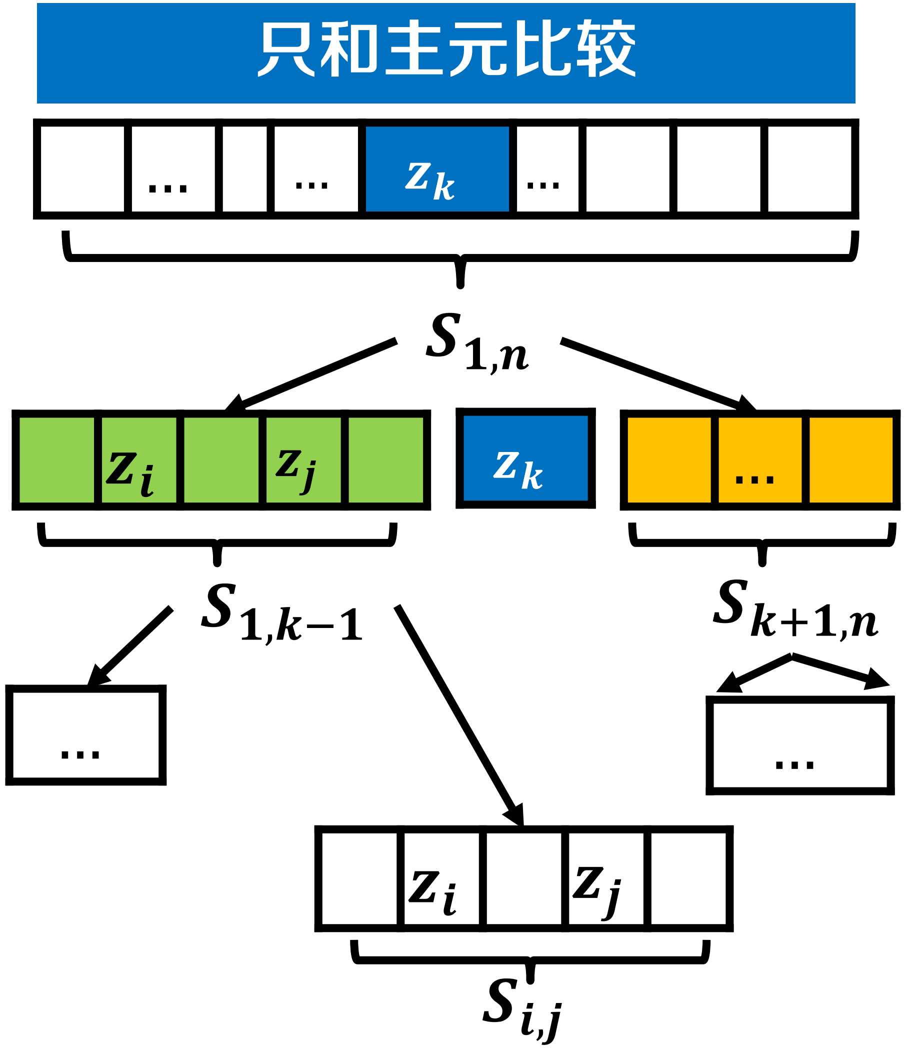
随机化快速排序：复杂度分析

- **推导过程**
  - 随机变量X_{ij}：z_i和z_j比较的次数
  - $E[X]=\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}E[X_{ij}]$
  - $E\left[X_{ij}\right]=$?



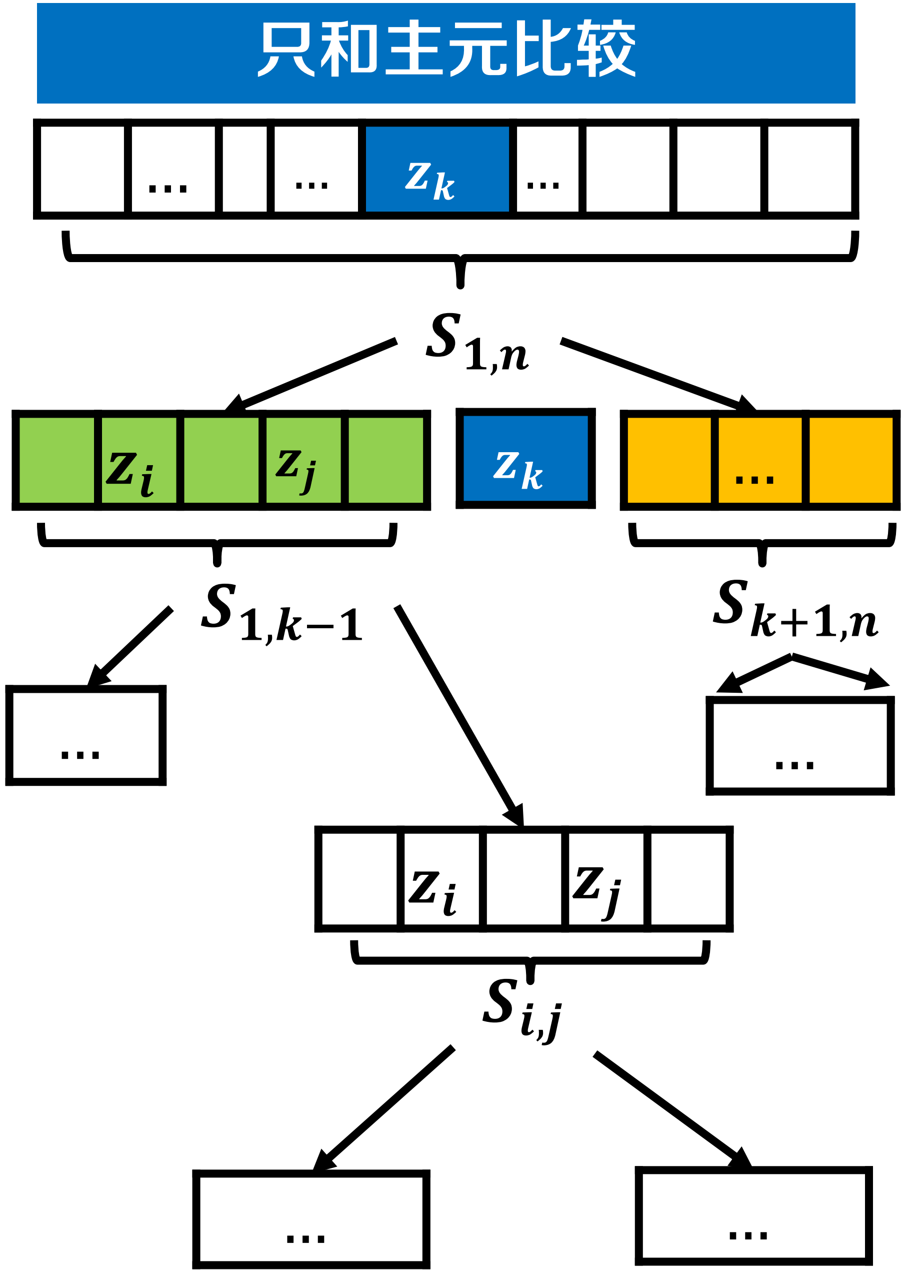
随机化快速排序：复杂度分析

- **推导过程**
  - 随机变量X_{ij}：z_i和z_j比较的次数
  - $E[X] = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} E[X_{ij}]$
  - $E\left[X_{ij}\right] =$?



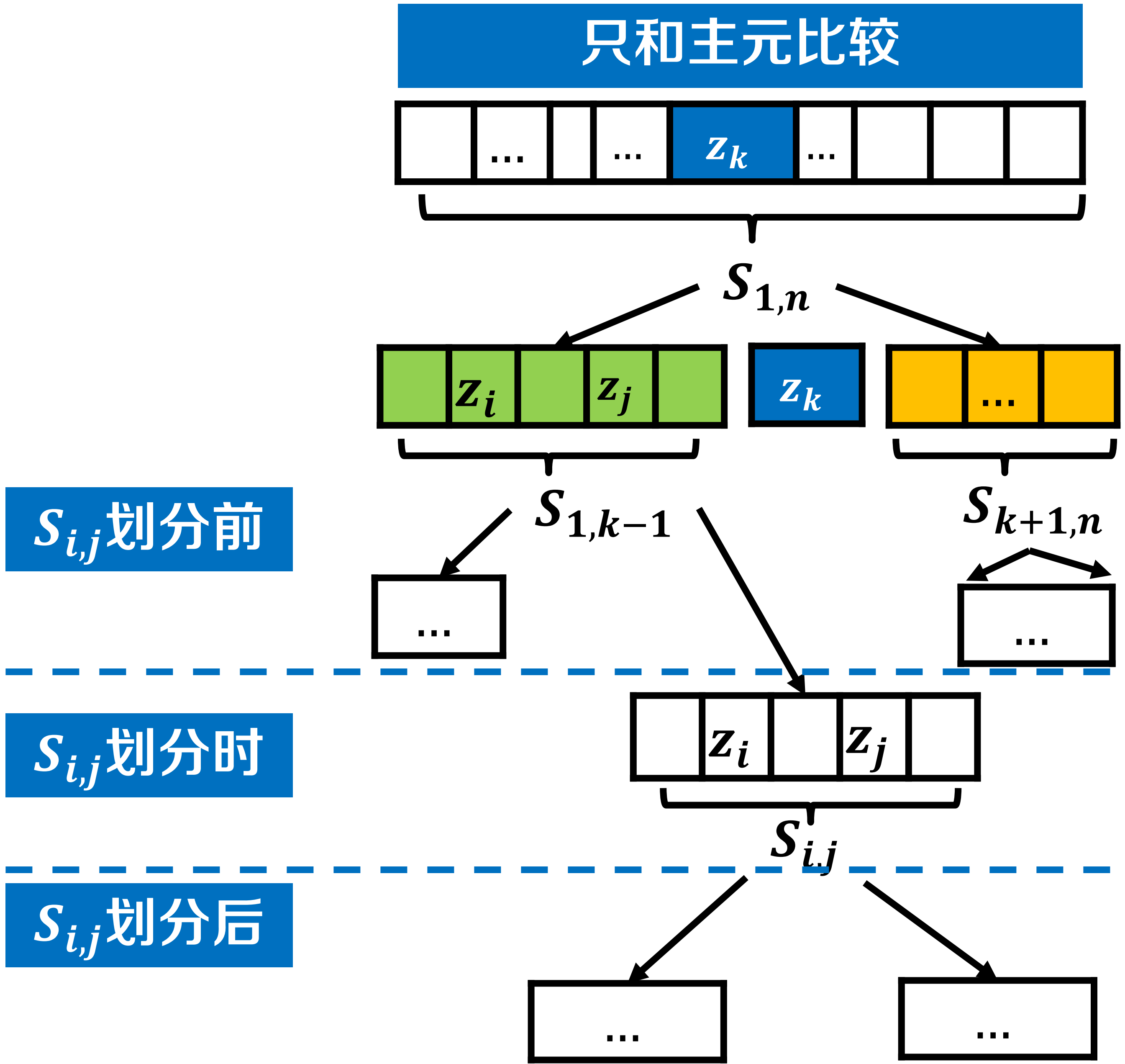
随机化快速排序：复杂度分析

- 推导过程
  - 随机变量X_{ij}：z_i和z_j比较的次数
  - $E[X] = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} E[X_{ij}]$
  - $E\left[X_{ij}\right] =$?



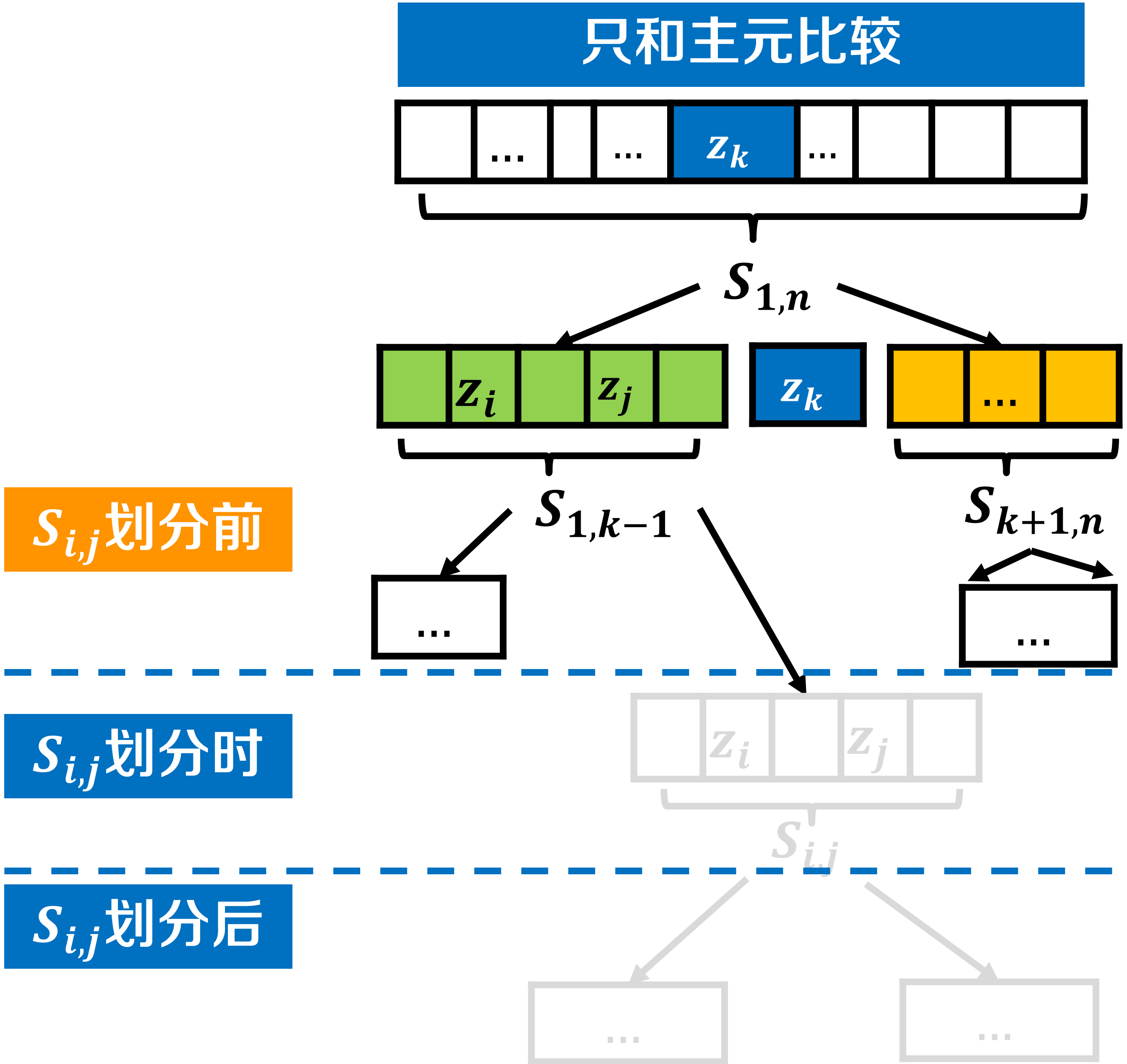
随机化快速排序：复杂度分析

- **推导过程**
  - 随机变量X_{ij}：z_i和z_j比较的次数
  - $E[X] = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} E[X_{ij}]$
  - $E\left[X_{ij}\right] =?$



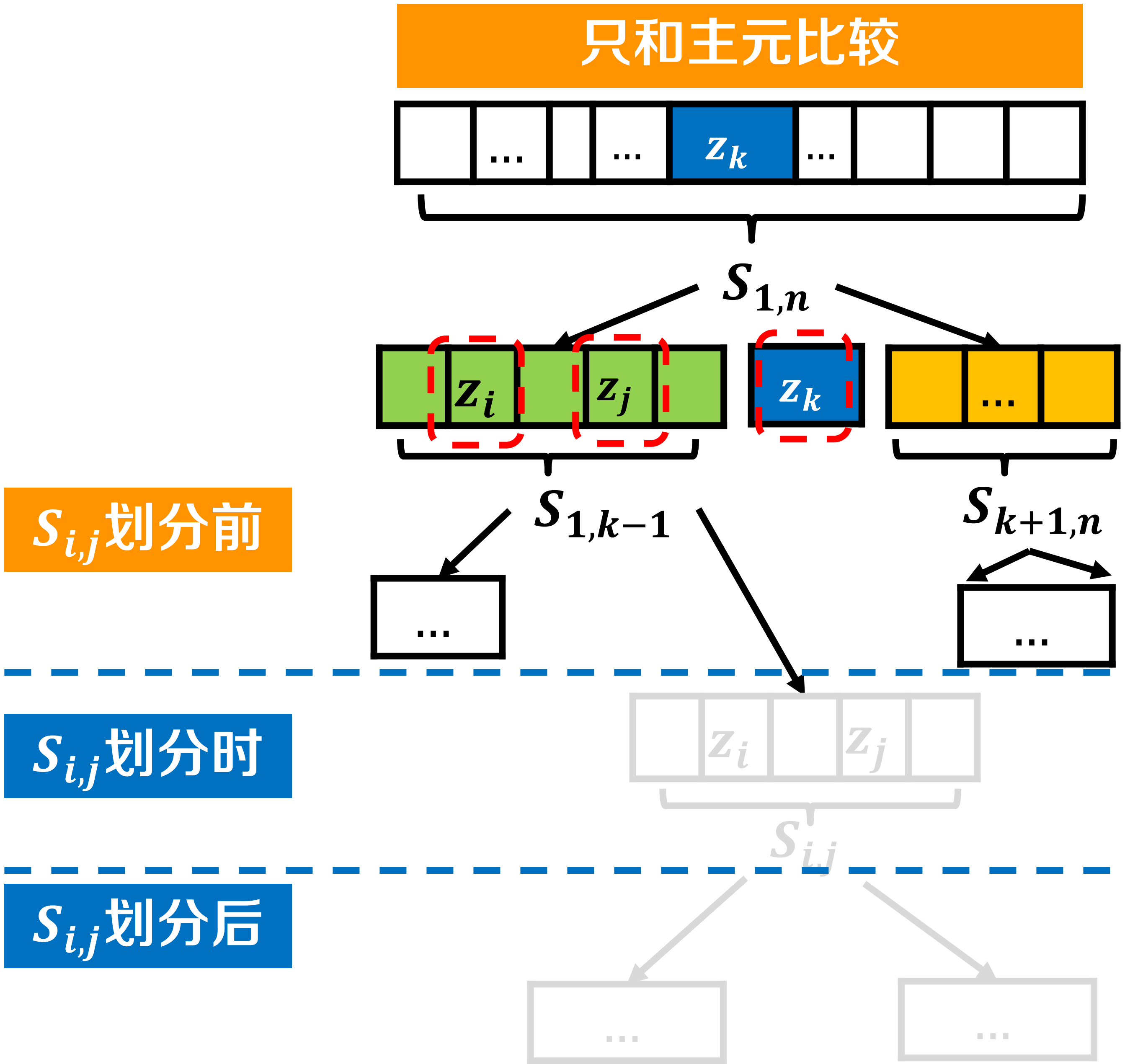
随机化快速排序：复杂度分析

- **推导过程**
  - 随机变量X_{ij}：z_i和z_j比较的次数
  - $E[X] = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} E[X_{ij}]$
  - $E\left[X_{ij}\right] = ?$



随机化快速排序：复杂度分析

- 推导过程
  - 随机变量X_{ij}：z_i和z_j比较的次数
  - $E[X]=\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}E[X_{ij}]$
  - $E\left[X_{ij}\right]=?$



只和主元比较

… … z_k …

$S_{1,n}$

z_i z_j z_k …

$S_{i,j}$划分前

$S_{1,k-1}$

$S_{k+1,n}$

…

…

$S_{i,j}$划分时

z_i z_j

$S_{i,j}$

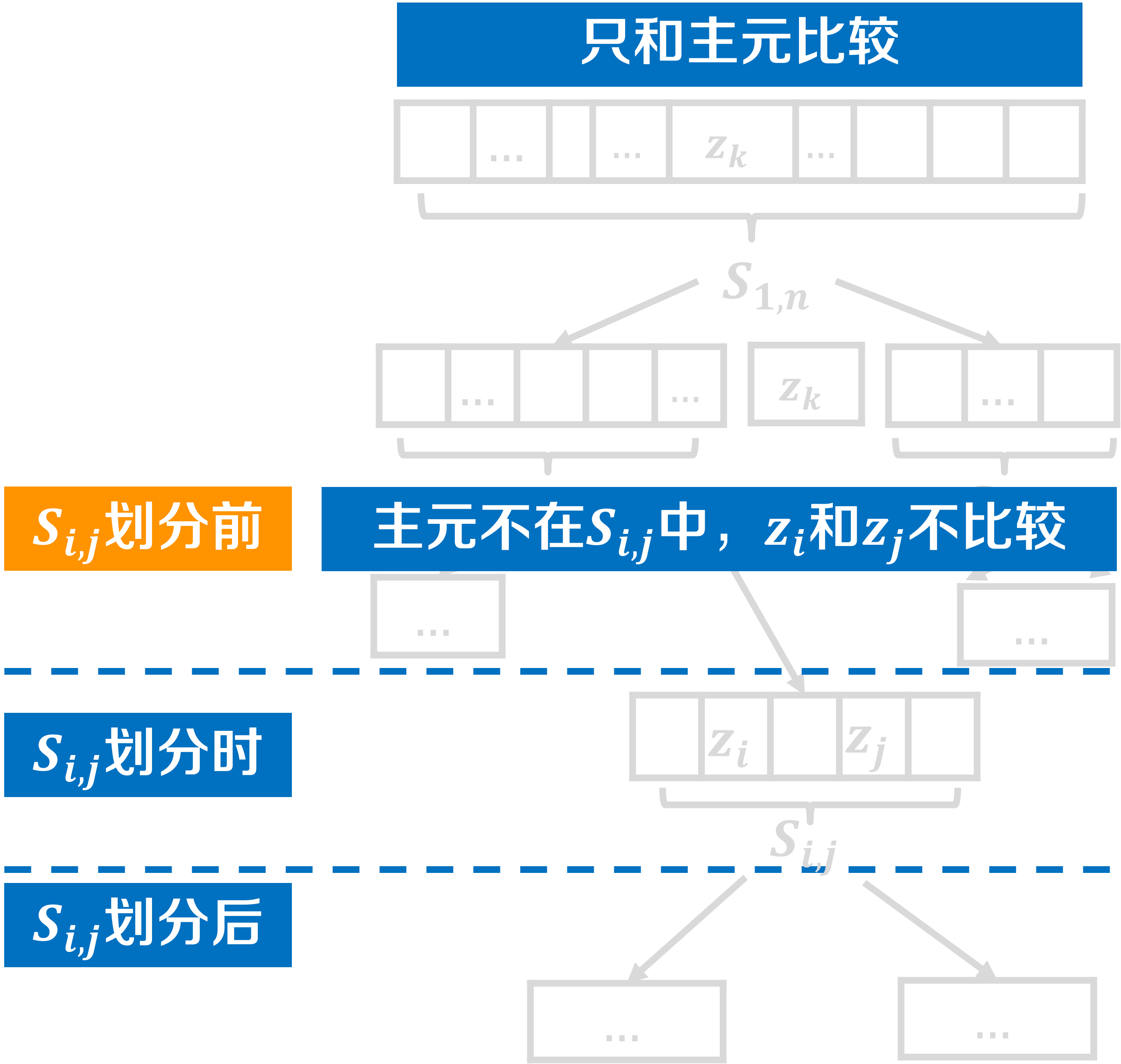
$S_{i,j}$划分后

…

…

随机化快速排序：复杂度分析

- **推导过程**
  - 随机变量X_{ij}：z_i和z_j比较的次数
  - $E[X] = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} E[X_{ij}]$
  - $E\left[X_{ij}\right] = ?$



只和主元比较

$S_{i,j}$划分前

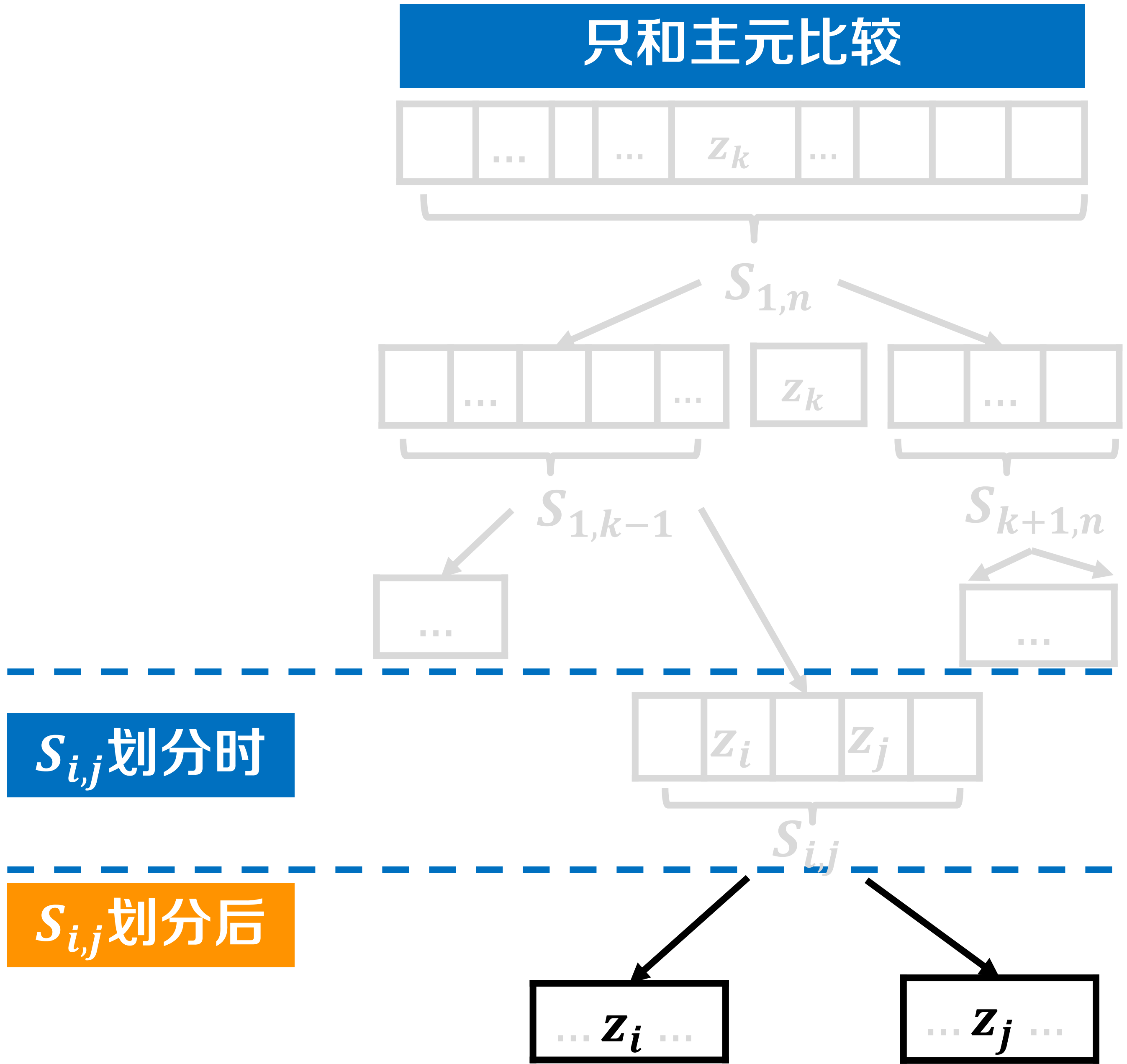
主元不在$S_{i,j}$中，z_i和z_j不比较

$S_{i,j}$划分时

$S_{i,j}$划分后

随机化快速排序：复杂度分析

- **推导过程**
  - 随机变量X_{ij}：z_i和z_j比较的次数
  - $E[X]=\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}E[X_{ij}]$
  - $E\left[X_{ij}\right]=?$



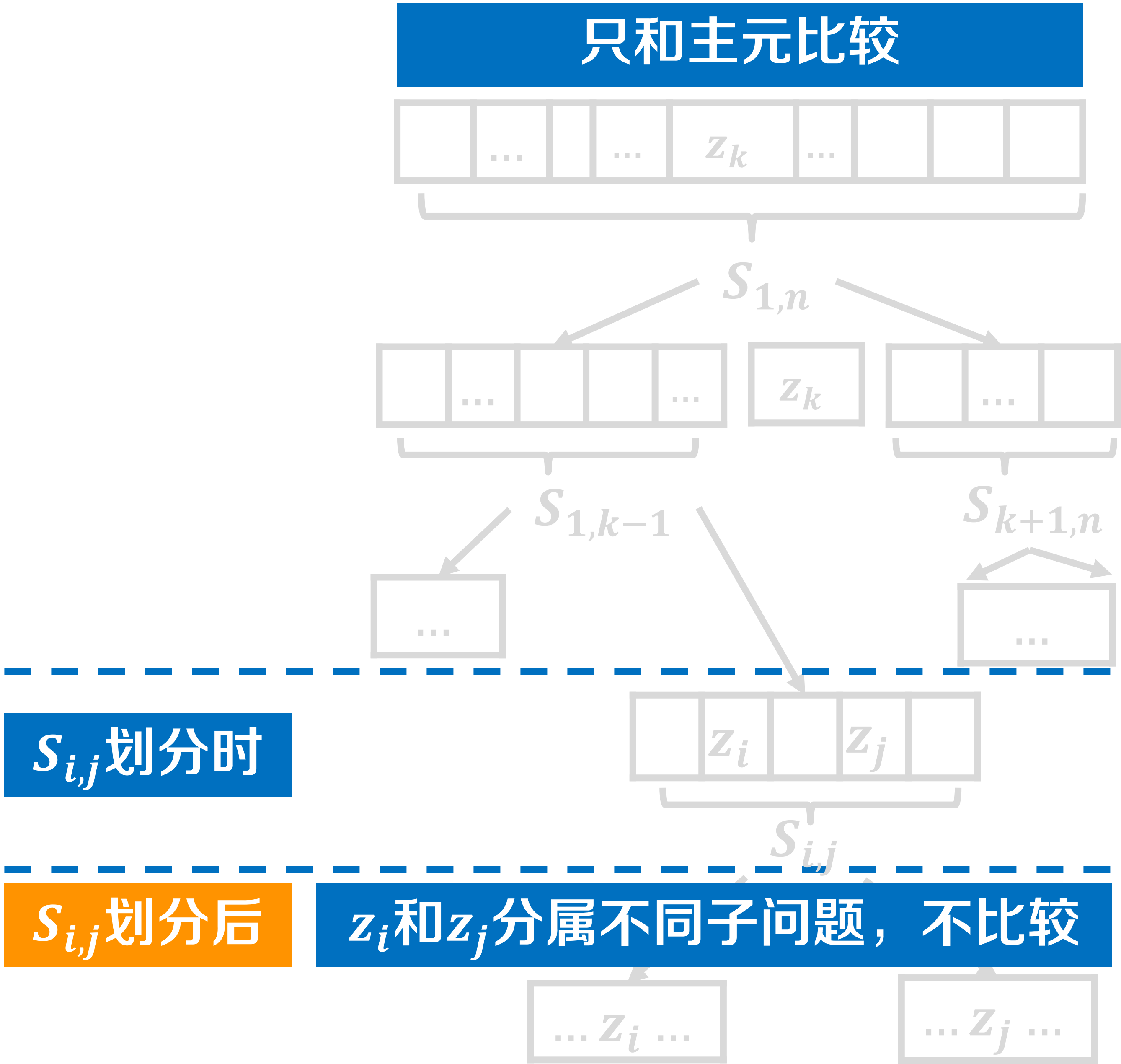
只和主元比较

$S_{i,j}$划分时

$S_{i,j}$划分后

随机化快速排序：复杂度分析

- **推导过程**
  - 随机变量X_{ij}：z_i和z_j比较的次数
  - $E[X] = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} E[X_{ij}]$
  - $E\left[X_{ij}\right] =?$



只和主元比较

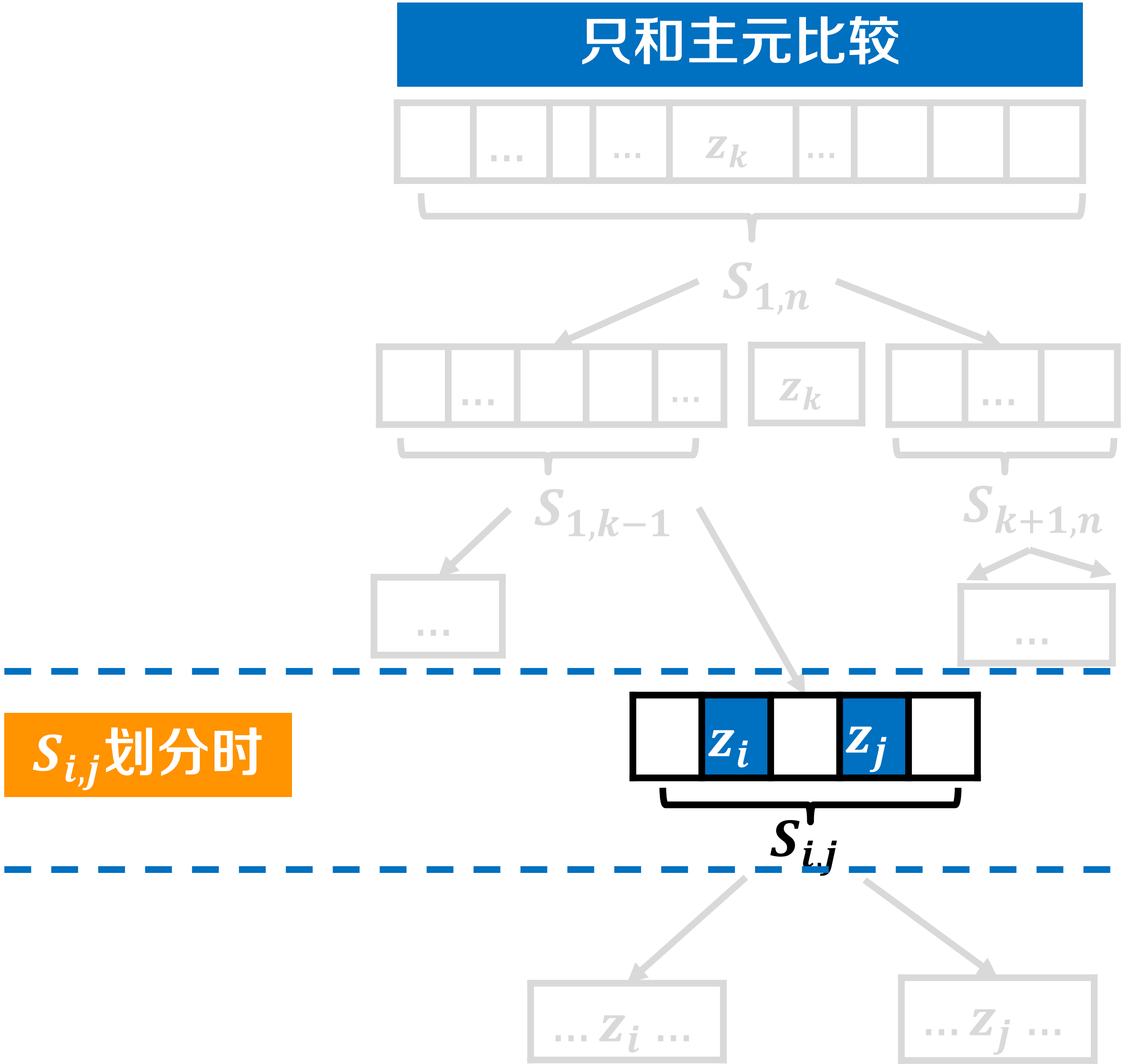
$S_{i,j}$划分时

$S_{i,j}$划分后

z_i和z_j分属不同子问题，不比较

随机化快速排序：复杂度分析

- **推导过程**
  - 随机变量X_{ij}：z_i和z_j比较的次数
  - $E[X]=\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}E[X_{ij}]$
  - $E\left[X_{ij}\right]=?$

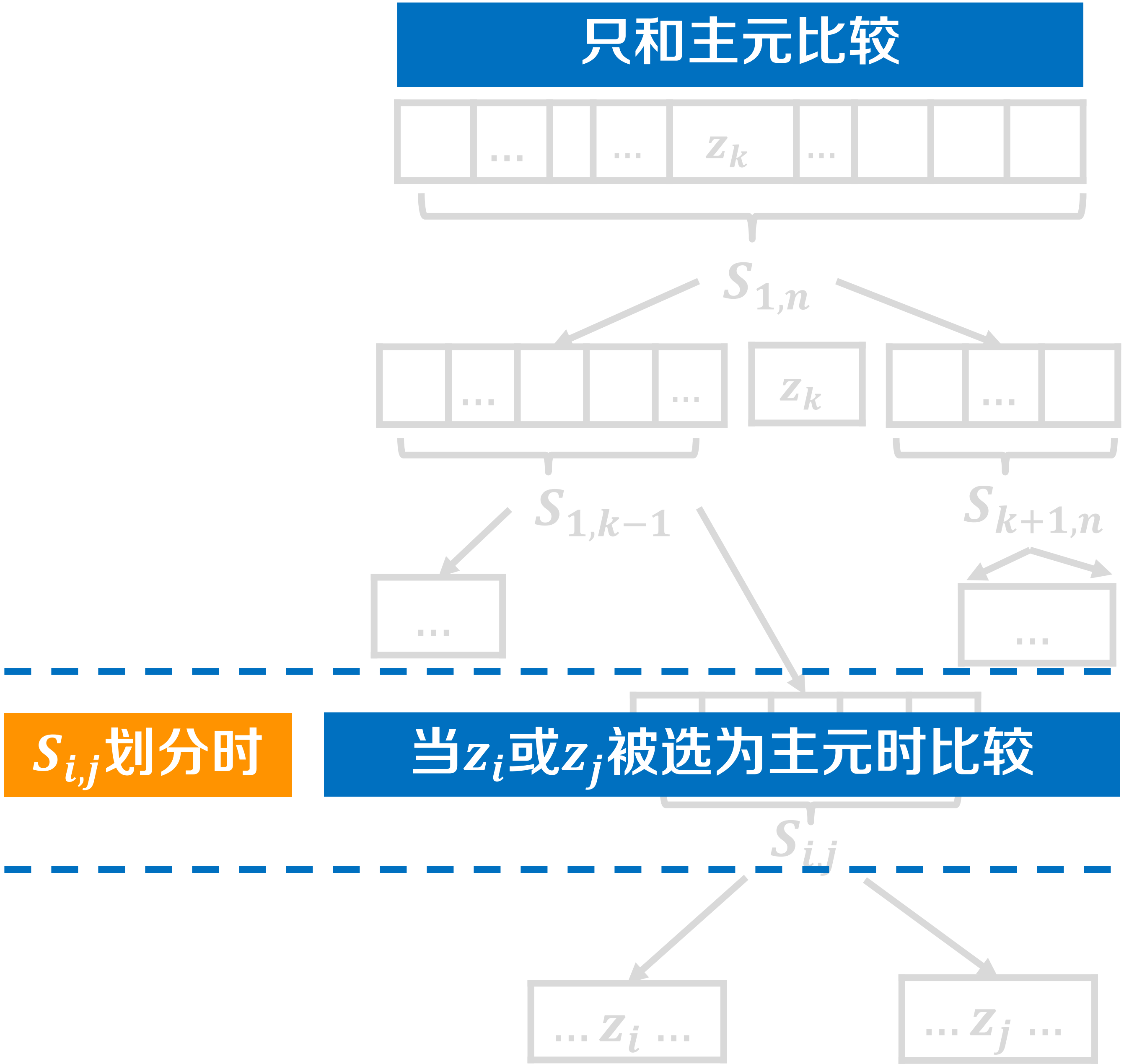


只和主元比较

$S_{i,j}$划分时

随机化快速排序：复杂度分析

- **推导过程**
  - 随机变量X_{ij}：z_i和z_j比较的次数
  - $E[X]=\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}E[X_{ij}]$
  - $E\left[X_{ij}\right]=?$

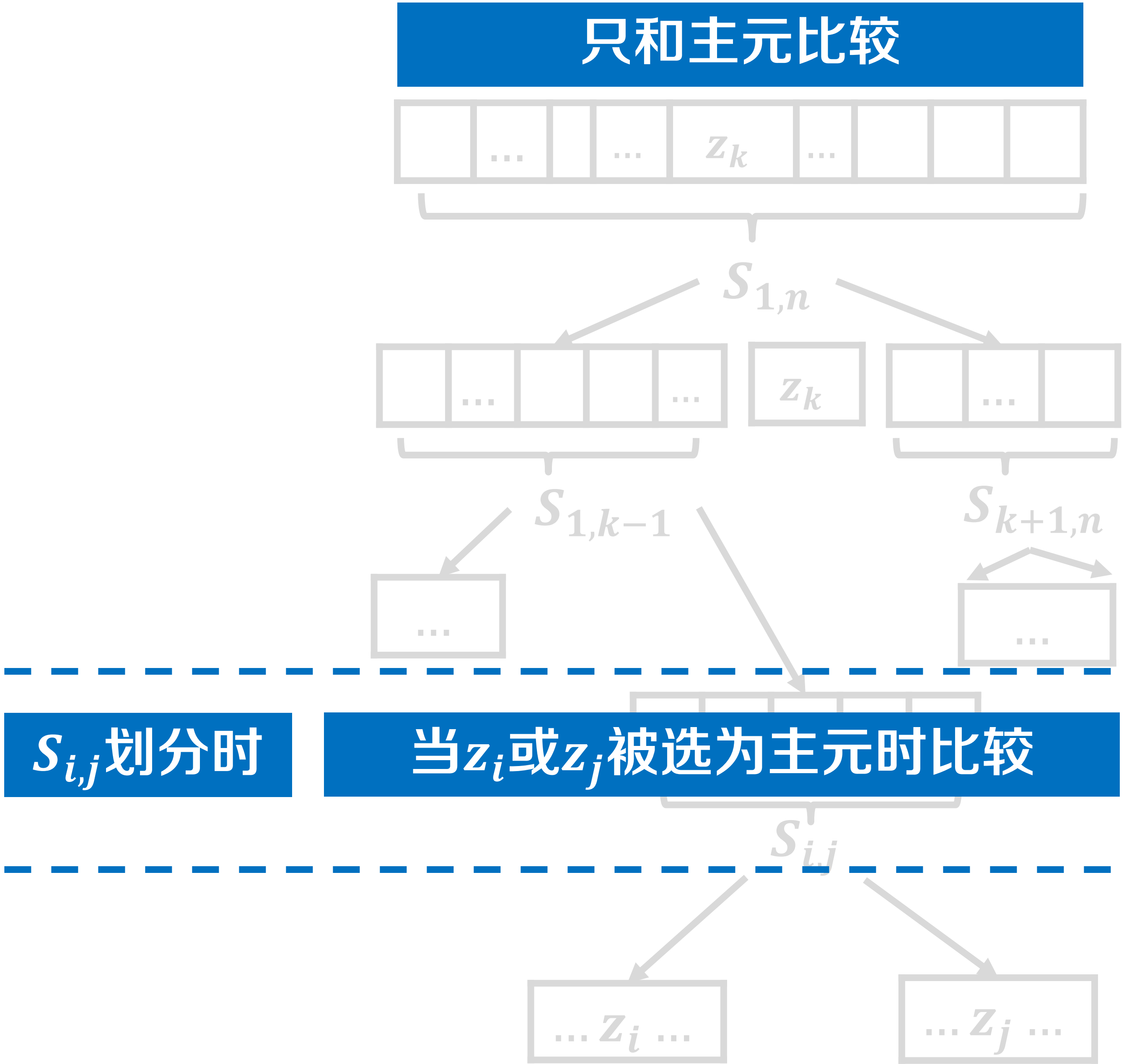

只和主元比较

$S_{i,j}$划分时

当z_i或z_j被选为主元时比较

随机化快速排序：复杂度分析

- 推导过程
  - 随机变量X_{ij}：z_i和z_j比较的次数
  - $E[X]=\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}E[X_{ij}]$
  - $E\left[X_{ij}\right]=\Pr\left\{z_i或z_j被选为主元\right\}$



只和主元比较

$S_{i,j}$划分时

当z_i或z_j被选为主元时比较

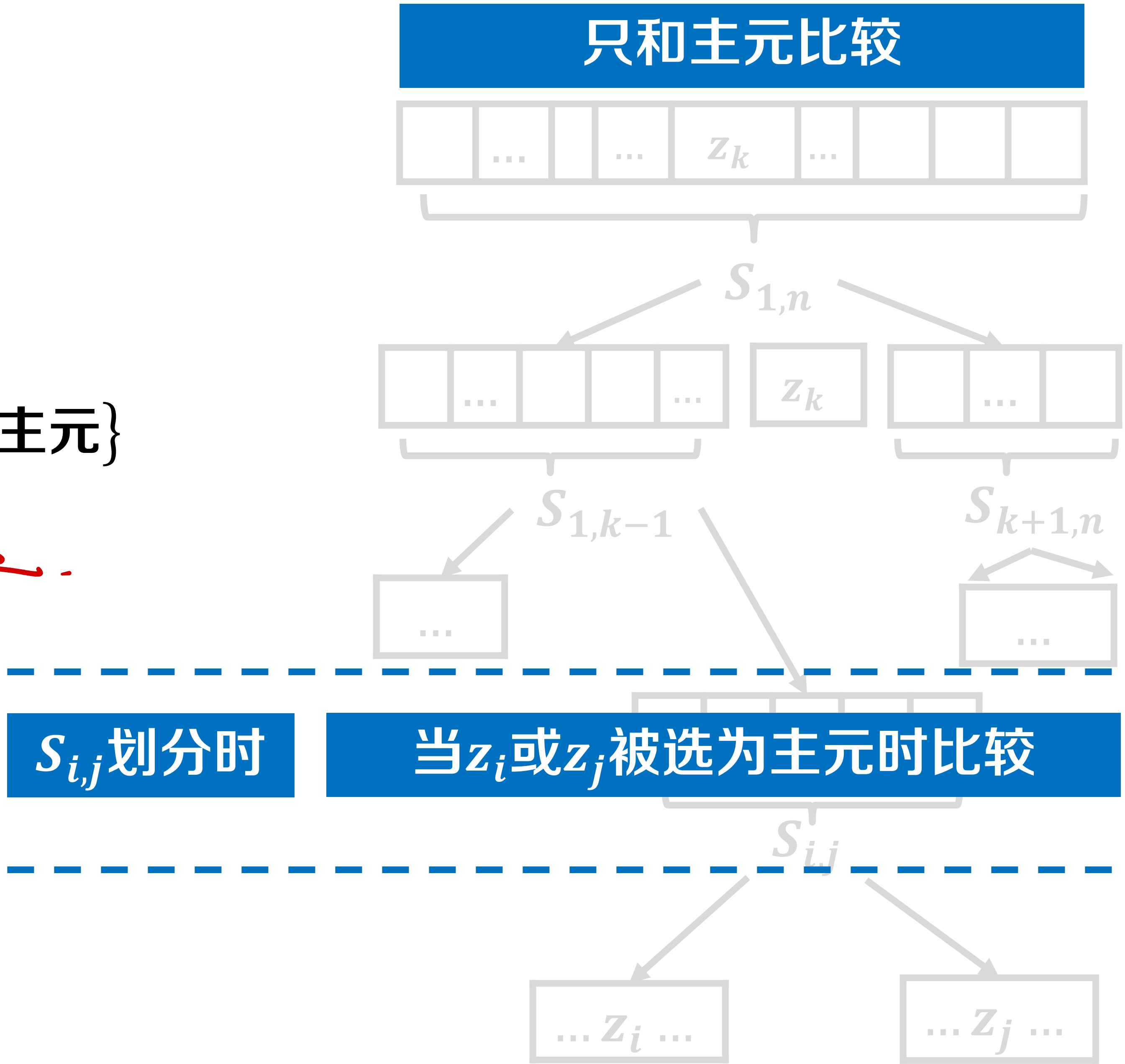
随机化快速排序：复杂度分析

- **推导过程**
  - 随机变量X_{ij}：z_i和z_j比较的次数
  - $E[X] = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} E[X_{ij}]$
  - $E\left[X_{ij}\right] = \Pr\{\underline{z_i\text{或}z_j\text{被选为主元}}\}$

$$= \Pr\{z_i\text{是主元}\} + \Pr\{z_j\text{是主元}\}$$

$$= \frac{1}{j-i+1} + \boxed{\frac{1}{j-i+1}}$$ 均匀选.

$$= \frac{2}{j-i+1}$$



只和主元比较

$S_{i,j}$划分时

当z_i或z_j被选为主元时比较

随机化快速排序：复杂度分析

- **推导过程**
  - 随机变量X_{ij}：z_i和z_j比较的次数
  - $E[X] = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} E[X_{ij}]$
  - $E\left[X_{ij}\right] = \frac{2}{j-i+1}$
  - $\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \frac{2}{j-i+1} =$

随机化快速排序：复杂度分析

- 推导过程
  - 随机变量X_{ij}：z_i和z_j比较的次数
  - $E[X]=\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}E[X_{ij}]$
  - $E[X_{ij}]=\frac{2}{j-i+1}$
  - $\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}\frac{2}{j-i+1}=\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{n-i}\frac{2}{k+1}$

$k=j-i$

随机化快速排序：复杂度分析

- **推导过程**
  - 随机变量X_{ij}：z_i和z_j比较的次数
  - $E[X] = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} E[X_{ij}]$
  - $E\left[X_{ij}\right] = \frac{2}{j-i+1}$
  - $\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}\frac{2}{j-i+1} = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{\color{red}{n-i}}\frac{2}{k+1} < \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{\color{red}{n}}\frac{2}{k}$

随机化快速排序：复杂度分析

- 推导过程
  - 随机变量X_{ij}：z_i和z_j比较的次数
  - $E[X] = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} E[X_{ij}]$
  - $E[X_{ij}] = \frac{2}{j-i+1}$
  - $\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}\frac{2}{j-i+1} = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{n-i}\frac{2}{k+1} < \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k}$

    $= \sum_{i=1}^{n-1} O(\log n)$

调和级数：$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = O(\log n)$

随机化快速排序：复杂度分析

- **推导过程**
  - 随机变量X_{ij}：z_i和z_j比较的次数
  - $E[X]=\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}E[X_{ij}]$
  - $E[X_{ij}]=\frac{2}{j-i+1}$
  - $\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}\frac{2}{j-i+1}=\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{n-i}\frac{2}{k+1}<\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k}$

$$=\sum_{i=1}^{n-1}O(\log n)=O(n\log n)$$

✓

随机化快速排序：复杂度分析

- **推导过程**
  - 随机变量X_{ij}：z_i和z_j比较的次数
  - $E[X] = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} E[X_{ij}]$
  - $E[X_{ij}] = \frac{2}{j-i+1}$
  - $\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \frac{2}{j-i+1} = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-i} \frac{2}{k+1} < \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k}$
    $= \sum_{i=1}^{n-1} O(\log n) = O(n \log n)$

期望时间复杂度：$O(n \log n)$

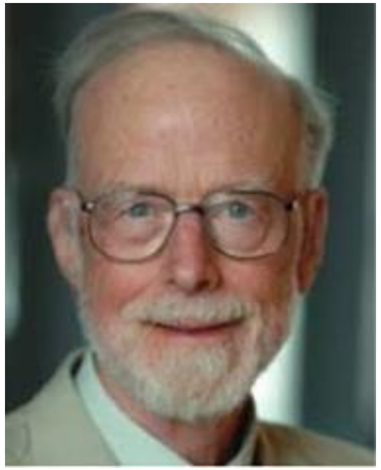
排序算法比较

约翰 · 冯 · 诺伊曼

John von Neumann

1945年提出

算法名称	时间复杂度
选择排序	$O(n^2)$
插入排序	$O(n^2)$
归并排序	$O(n\log n)$
快速排序	最差: $O(n^2)$
	期望: $O(n\log n)$



托尼 · 霍尔

Tony Hoare

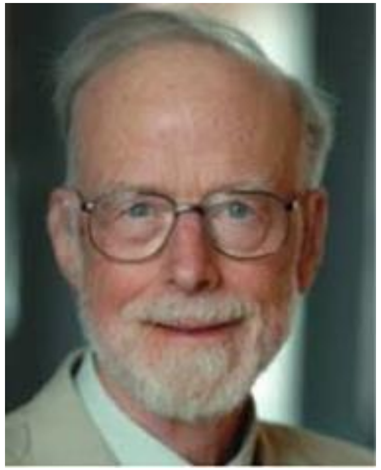
1961年提出

排序算法比较

约翰·冯·诺伊曼
John von Neumann
1945年提出

算法名称	时间复杂度
选择排序	$O(n^2)$
插入排序	$O(n^2)$
归并排序	$O(n\log n)$
快速排序	最差：$O(n^2)$ 期望：$O(n\log n)$

问题：能否突破$O(n\log n)$?



托尼·霍尔
Tony Hoare
1961年提出

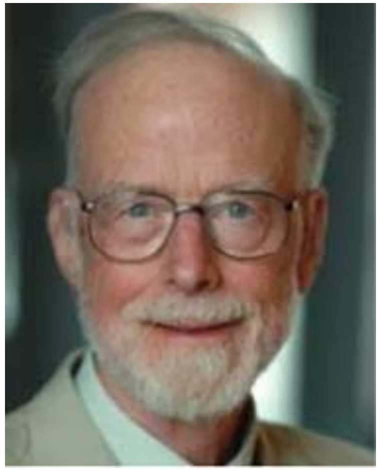
排序算法比较

约翰·冯·诺伊曼
John von Neumann

1945年提出

算法名称	时间复杂度
选择排序	$O(n^2)$
插入排序	$O(n^2)$
归并排序	$O(n\log n)$
快速排序	最差: $O(n^2)$
	期望: $O(n\log n)$

问题：能否突破$O(n\log n)$?



托尼·霍尔
Tony Hoare

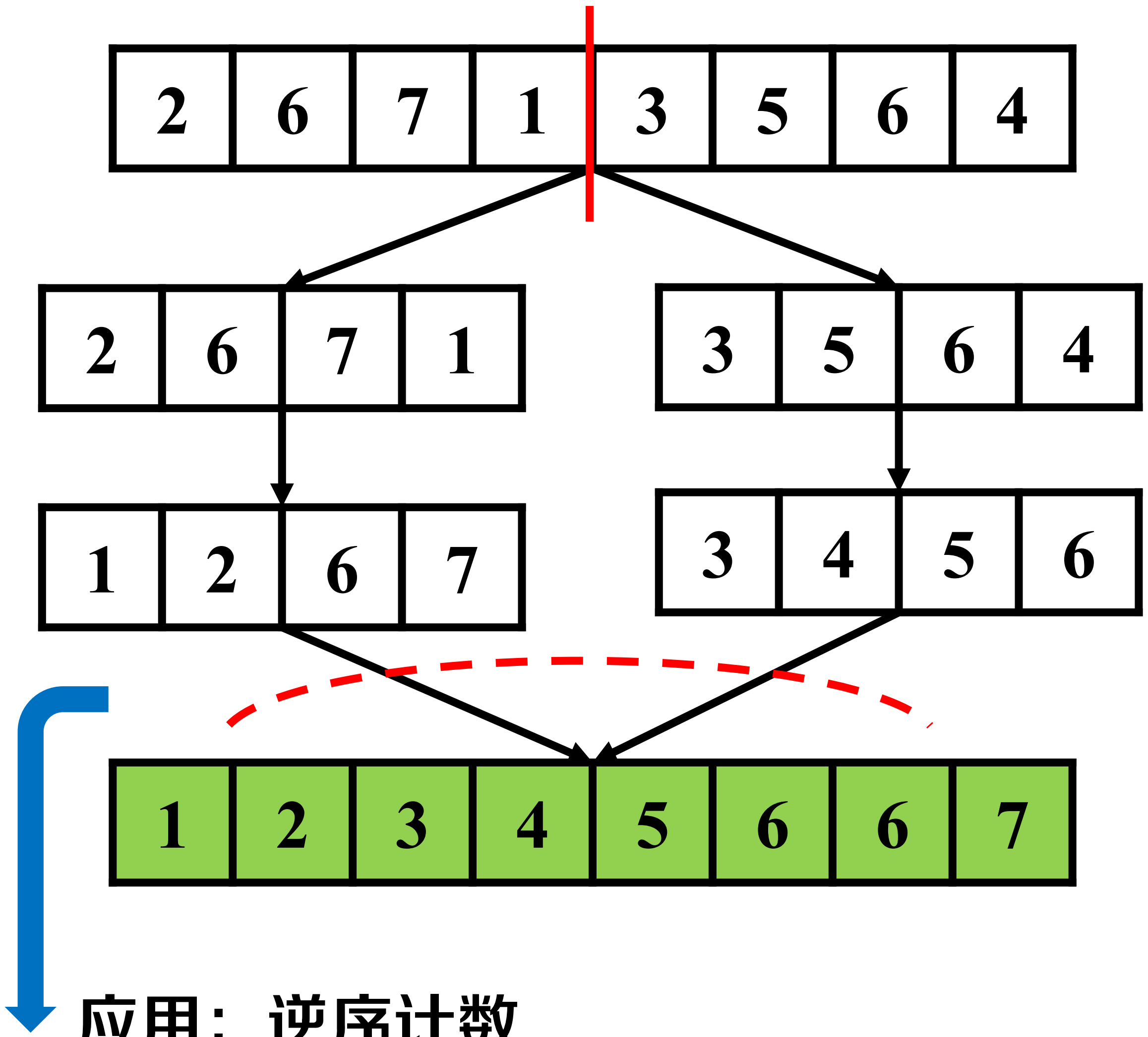
1961年提出

基于比较的排序，时间复杂度下界为$\Omega(n\log n)$

故$O(n\log n)$级排序是快速的.

小结

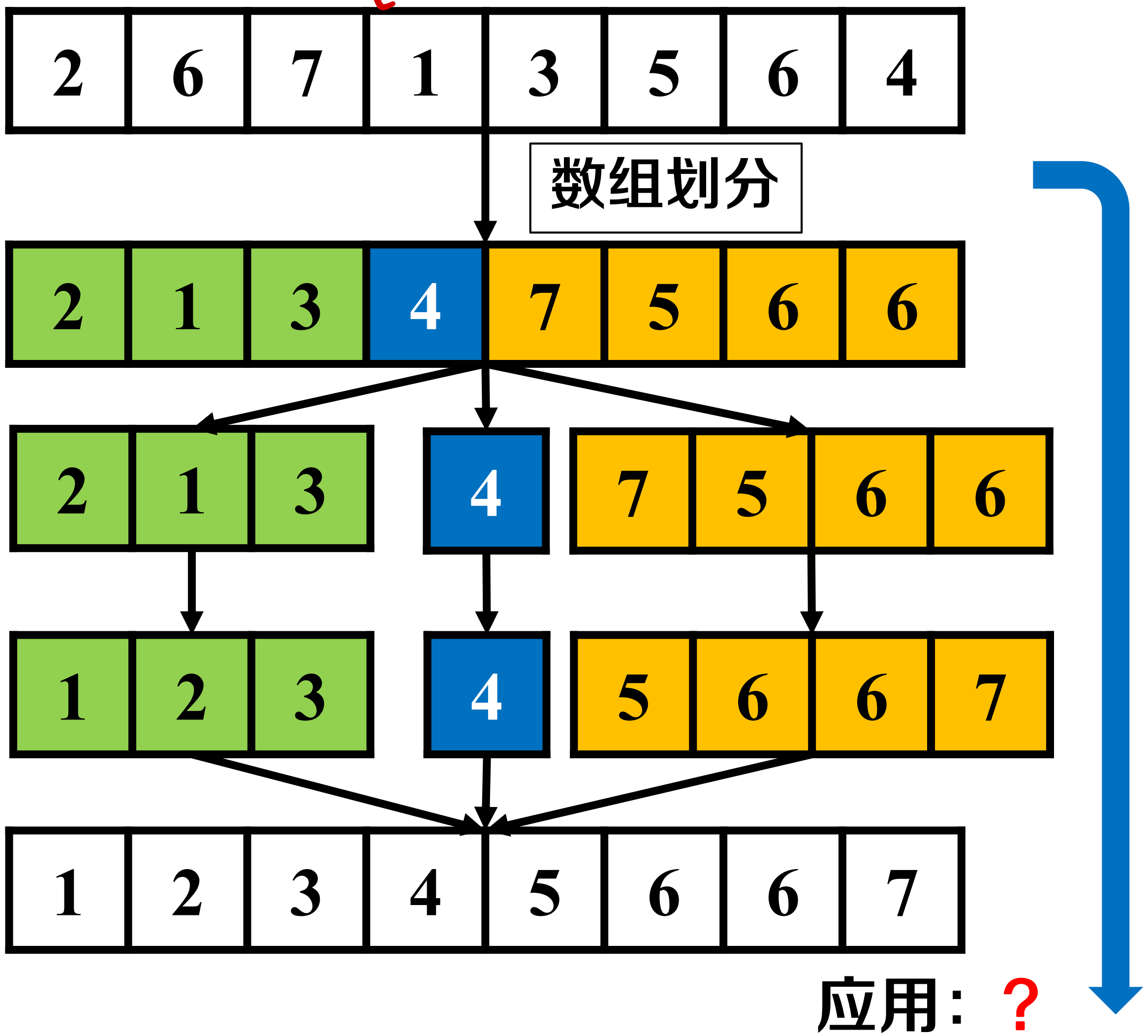
- 归并排序



应用：逆序计数

- 快速排序

侧重问题分解
简化问题合并



应用：？