

动态规划篇：最长公共子序列问题

童咏昕

北京航空航天大学
计算机学院

中国大学MOOC北航《算法设计与分析》

- 子序列
 - 将给定序列中零个或多个元素（如字符）去掉后所得结果

问题背景：子序列



- 子序列
 - 将给定序列中零个或多个元素（如字符）去掉后所得结果
- 示例
 - 给定序列 X

X	A	B	C	B	D	A	B
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

问题背景：子序列

- 子序列
 - 将给定序列中零个或多个元素（如字符）去掉后所得结果
- 示例
 - 给定序列 X

X	A	B	C	B	D	A	B
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

- X 的子序列

X_1	A	B	C	B	D	A	B
-------	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

问题背景：子序列

- 子序列

- 将给定序列中零个或多个元素（如字符）去掉后所得结果

- 示例

- 给定序列 X

X	A	B	C	B	D	A	B
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

- X 的子序列

X_1	A	B	C	B	D	A	B
-------	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

X_2	A	B	C	B
-------	-----	-----	-----	-----

问题背景：子序列

- 子序列

- 将给定序列中零个或多个元素（如字符）去掉后所得结果

- 示例

- 给定序列 X

X	A	B	C	B	D	A	B
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

- X 的子序列

X_1	A	B	C	B	D	A	B
-------	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

X_2	A	B	C	B
-------	-----	-----	-----	-----

X_3	A	C	B	B
-------	-----	-----	-----	-----

↓
子序列可跳跃间隔
选择

问题背景：公共子序列



- 给定两个序列 X 和 Y

X	A	B	C	B	D	A	B
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

Y	B	D	C	A	B	A
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

问题背景：公共子序列



- 给定两个序列 X 和 Y

X	A	B	C	B	D	A	B
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

Y	B	D	C	A	B	A
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

- 公共子序列示例

X_1	C	A
-------	-----	-----

Y_1	C	A
-------	-----	-----

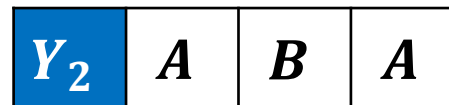
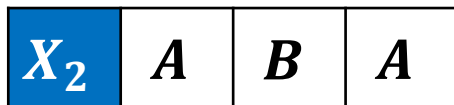
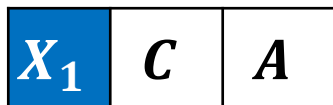
问题背景：公共子序列



- 给定两个序列 X 和 Y



- 公共子序列示例



问题背景：公共子序列



- 给定两个序列 X 和 Y

X	A	B	C	B	D	A	B
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

Y	B	D	C	A	B	A
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

- 公共子序列示例

X_1	C	A
-------	-----	-----

Y_1	C	A
-------	-----	-----

X_2	A	B	A
-------	-----	-----	-----

Y_2	A	B	A
-------	-----	-----	-----

X_3	B	C	A	B
-------	-----	-----	-----	-----

Y_3	B	C	A	B
-------	-----	-----	-----	-----

问题背景：公共子序列

- 给定两个序列 X 和 Y

X	A	B	C	B	D	A	B
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

Y	B	D	C	A	B	A
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

- 公共子序列示例

X_1	C	A
-------	-----	-----

Y_1	C	A
-------	-----	-----

X_2	A	B	A
-------	-----	-----	-----

Y_2	A	B	A
-------	-----	-----	-----

X_3	B	C	A	B
-------	-----	-----	-----	-----

Y_3	B	C	A	B
-------	-----	-----	-----	-----

问题：如何求两个给定序列的最长公共子序列？

- 形式化定义

最长公共子序列问题

Longest Common Subsequence Problem

输入

- 序列 $X = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$ 和序列 $Y = \langle y_1, y_2, \dots, y_m \rangle$

- 形式化定义

最长公共子序列问题

Longest Common Subsequence Problem

输入

- 序列 $X = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$ 和序列 $Y = \langle y_1, y_2, \dots, y_m \rangle$

输出

- 求解一个公共子序列 $Z = \langle z_1, z_2, \dots, z_l \rangle$, 令

$$\max |Z|$$

- 形式化定义

最长公共子序列问题

Longest Common Subsequence Problem

输入

- 序列 $X = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$ 和序列 $Y = \langle y_1, y_2, \dots, y_m \rangle$

输出

- 求解一个公共子序列 $Z = \langle z_1, z_2, \dots, z_l \rangle$, 令

$$\max |Z|$$

$$\begin{aligned} s. t. \quad & \langle z_1, z_2, \dots, z_l \rangle = \langle x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_l} \rangle = \langle y_{j_1}, y_{j_2}, \dots, y_{j_l} \rangle \\ & (1 \leq i_1 < i_2, \dots, i_l \leq n; 1 \leq j_1 < j_2, \dots, j_l \leq m) \end{aligned}$$

- 形式化定义

最长公共子序列问题

Longest Common Subsequence Problem

输入

- 序列 $X = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$ 和序列 $Y = \langle y_1, y_2, \dots, y_m \rangle$

输出

- 求解一个公共子序列 $Z = \langle z_1, z_2, \dots, z_l \rangle$, 令

$$\max |Z|$$

优化目标

$$\begin{aligned} s. t. \quad & \langle z_1, z_2, \dots, z_l \rangle = \langle x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_l} \rangle = \langle y_{j_1}, y_{j_2}, \dots, y_{j_l} \rangle \\ & (1 \leq i_1 < i_2, \dots, i_l \leq n; 1 \leq j_1 < j_2, \dots, j_l \leq m) \end{aligned}$$

- 形式化定义

最长公共子序列问题

Longest Common Subsequence Problem

输入

- 序列 $X = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$ 和序列 $Y = \langle y_1, y_2, \dots, y_m \rangle$

输出

- 求解一个公共子序列 $Z = \langle z_1, z_2, \dots, z_l \rangle$, 令

$$\max |Z|$$

优化目标

$$\begin{aligned} s. t. \quad & \langle z_1, z_2, \dots, z_l \rangle = \langle x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_l} \rangle = \langle y_{j_1}, y_{j_2}, \dots, y_{j_l} \rangle \\ & (1 \leq i_1 < i_2, \dots, i_l \leq n; 1 \leq j_1 < j_2, \dots, j_l \leq m) \end{aligned}$$

约束条件

- 枚举所有子序列

<i>X</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------

<i>Y</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>C</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>A</i>
----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------

<i>X</i>	<i>A</i>
----------	----------

枚举并检查长度为1的子序列

- 枚举所有子序列

<i>X</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------

<i>Y</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>C</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>A</i>
----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------

<i>X</i>	<i>A</i>
----------	----------

<i>X</i>	<i>B</i>
----------	----------

枚举并检查长度为1的子序列

- 枚举所有子序列

<i>X</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------

<i>Y</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>C</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>A</i>
----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------

<i>X</i>	<i>A</i>
----------	----------

<i>X</i>	<i>B</i>
----------	----------

<i>X</i>	<i>C</i>
----------	----------

枚举并检查长度为1的子序列

- 枚举所有子序列

<i>X</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------

<i>Y</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>C</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>A</i>
----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------

<i>X</i>	<i>A</i>
----------	----------

<i>X</i>	<i>B</i>
----------	----------

<i>X</i>	<i>C</i>
----------	----------

<i>X</i>	<i>B</i>
----------	----------

<i>X</i>	<i>D</i>
----------	----------

<i>X</i>	<i>A</i>
----------	----------

<i>X</i>	<i>B</i>
----------	----------

枚举并检查长度为1的子序列

- 枚举所有子序列

<i>X</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------

<i>Y</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>C</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>A</i>
----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------

<i>X</i>	<i>A</i>
----------	----------

<i>Y</i>	<i>B</i>
----------	----------

<i>X</i>	<i>B</i>
----------	----------

<i>Y</i>	<i>D</i>
----------	----------

<i>X</i>	<i>C</i>
----------	----------

<i>Y</i>	<i>C</i>
----------	----------

<i>X</i>	<i>B</i>
----------	----------

<i>Y</i>	<i>A</i>
----------	----------

<i>X</i>	<i>D</i>
----------	----------

<i>Y</i>	<i>B</i>
----------	----------

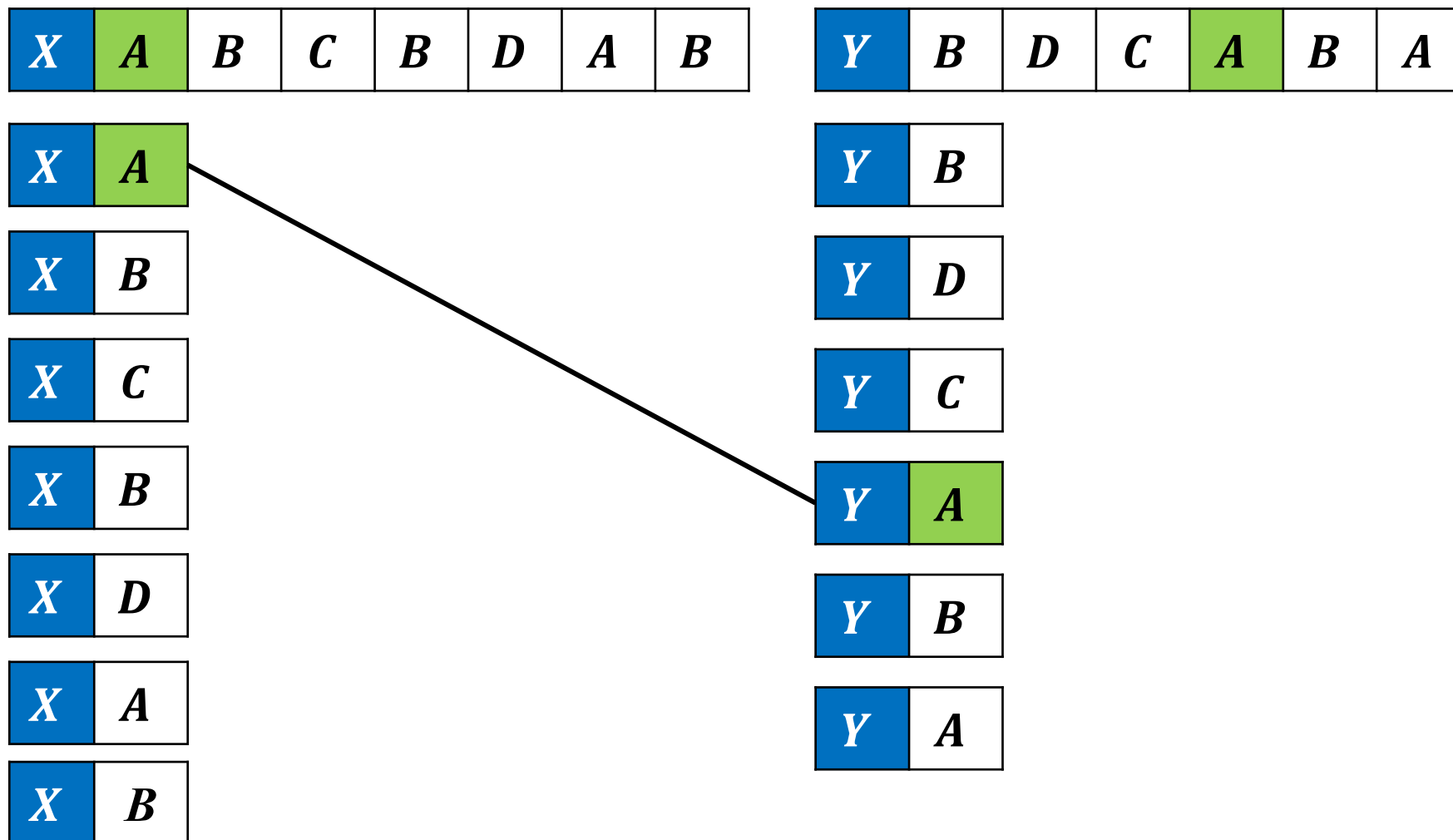
<i>X</i>	<i>A</i>
----------	----------

<i>Y</i>	<i>A</i>
----------	----------

<i>X</i>	<i>B</i>
----------	----------

枚举并检查长度为1的子序列

- 枚举所有子序列



枚举并检查长度为1的子序列

- 枚举所有子序列

<i>X</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------

<i>X</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------	----------	----------

<i>X</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>
----------	----------	----------	----------	----------

<i>X</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>A</i>
----------	----------	----------	----------	----------

...

<i>X</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------	----------	----------

...

<i>X</i>	<i>C</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------	----------	----------

<i>X</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------	----------	----------

<i>Y</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>C</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>A</i>
----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------

<i>Y</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>C</i>	<i>A</i>
----------	----------	----------	----------	----------

<i>Y</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>C</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------	----------	----------

...

<i>Y</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------	----------	----------

...

<i>Y</i>	<i>C</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>A</i>
----------	----------	----------	----------	----------

枚举并检查长度为4的子序列

- 枚举所有子序列

<i>X</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------

<i>Y</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>C</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>A</i>
----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------

<i>X</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------	----------	----------

<i>Y</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>C</i>	<i>A</i>
----------	----------	----------	----------	----------

<i>X</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>
----------	----------	----------	----------	----------

<i>Y</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>C</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------	----------	----------

<i>X</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>A</i>
----------	----------	----------	----------	----------

...

...

<i>X</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------	----------	----------

<i>Y</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------	----------	----------

...

...

<i>X</i>	<i>C</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------	----------	----------

<i>Y</i>	<i>C</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>A</i>
----------	----------	----------	----------	----------

<i>X</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------	----------	----------

枚举并检查长度为4的子序列

- 枚举所有子序列

<i>X</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------

<i>Y</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>C</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>A</i>
----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------

<i>X</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------	----------	----------

<i>Y</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>C</i>	<i>A</i>
----------	----------	----------	----------	----------

<i>X</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>
----------	----------	----------	----------	----------

<i>Y</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>C</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------	----------	----------

<i>X</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>A</i>
----------	----------	----------	----------	----------

...

...

<i>X</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------	----------	----------

<i>Y</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------	----------	----------

...

...

<i>X</i>	<i>C</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------	----------	----------

<i>Y</i>	<i>C</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>A</i>
----------	----------	----------	----------	----------

<i>X</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------	----------	----------

枚举并检查长度为4的子序列

- 枚举所有子序列

<i>X</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------

<i>X</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>B</i>	<i>D</i>
----------	----------	----------	----------	----------	----------

<i>X</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>B</i>	<i>A</i>
----------	----------	----------	----------	----------	----------

<i>X</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>B</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------	----------	----------	----------

<i>X</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>A</i>
----------	----------	----------	----------	----------	----------

<i>X</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------	----------	----------	----------

...

<i>X</i>	<i>C</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------	----------	----------	----------

<i>Y</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>C</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>A</i>
----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------

<i>Y</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>C</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------	----------	----------	----------

<i>Y</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>C</i>	<i>A</i>	<i>A</i>
----------	----------	----------	----------	----------	----------

<i>Y</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>C</i>	<i>B</i>	<i>A</i>
----------	----------	----------	----------	----------	----------

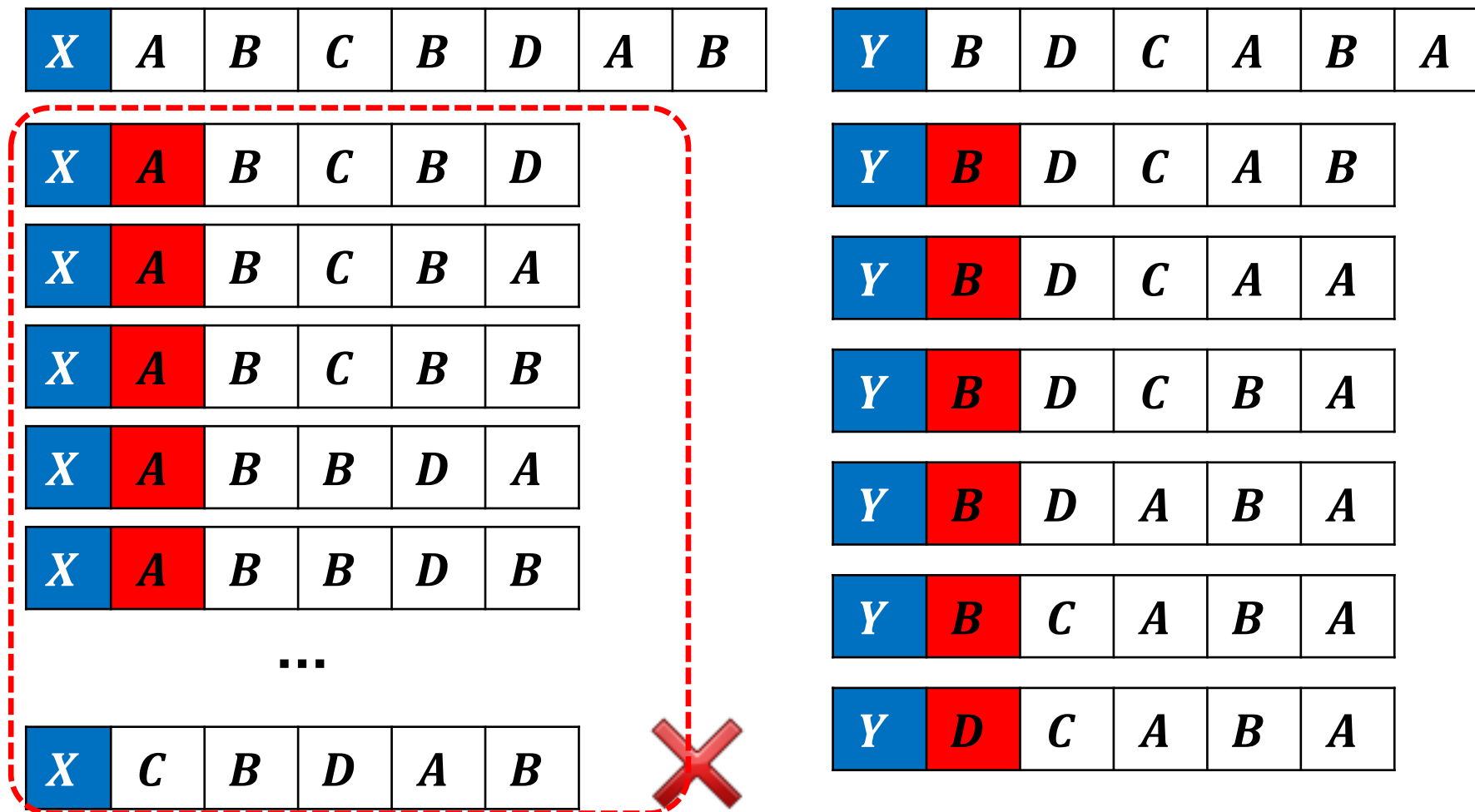
<i>Y</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>A</i>
----------	----------	----------	----------	----------	----------

<i>Y</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>A</i>
----------	----------	----------	----------	----------	----------

<i>Y</i>	<i>D</i>	<i>C</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>A</i>
----------	----------	----------	----------	----------	----------

枚举并检查长度为5的子序列

- 枚举所有子序列



<i>Y</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>C</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
<i>Y</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>C</i>	<i>A</i>	<i>A</i>
<i>Y</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>C</i>	<i>B</i>	<i>A</i>
<i>Y</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>A</i>
<i>Y</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>A</i>
<i>Y</i>	<i>D</i>	<i>C</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>A</i>

枚举并检查长度为5的子序列

蛮力枚举



- 枚举所有子序列

<i>X</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------

<i>Y</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>C</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>A</i>
----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------

<i>X</i>	<i>B</i>
----------	----------

<i>Y</i>	<i>B</i>
----------	----------

长度为1

<i>X</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------

<i>Y</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------

长度为2

<i>X</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>A</i>
----------	----------	----------	----------

<i>Y</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>A</i>
----------	----------	----------	----------

长度为3

<i>X</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------	----------	----------

<i>Y</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------	----------	----------

长度为4

<i>X</i>					
----------	--	--	--	--	--

<i>Y</i>					
----------	--	--	--	--	--

长度为5

<i>X</i>						
----------	--	--	--	--	--	--

<i>Y</i>						
----------	--	--	--	--	--	--

长度为6



蛮力枚举



- 枚举所有子序列

<i>X</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------

<i>Y</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>C</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>A</i>
----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------

<i>X</i>	<i>B</i>
----------	----------

<i>Y</i>	<i>B</i>
----------	----------

<i>X</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------

<i>Y</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------

<i>X</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>A</i>
----------	----------	----------	----------

<i>Y</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>A</i>
----------	----------	----------	----------

<i>X</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------	----------	----------

<i>Y</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------	----------	----------

长度为1

长度为2

长度为3

长度为4

蛮力枚举



- 枚举所有子序列

<i>X</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------

<i>Y</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>C</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>A</i>
----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------

<i>X</i>	<i>B</i>
----------	----------

<i>Y</i>	<i>B</i>
----------	----------

长度为1

<i>X</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------

<i>Y</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------

长度为2

<i>X</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>A</i>
----------	----------	----------	----------

<i>Y</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>A</i>
----------	----------	----------	----------

长度为3

<i>X</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------	----------	----------

<i>Y</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------	----------	----------

长度为4

最长公共子序列



枚举观察



<i>X</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
-----------------	-----------------	-----------------	-----------------	-----------------

<i>Y</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
-----------------	-----------------	-----------------	-----------------	-----------------

长度为4

枚举观察



<i>X</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------	----------	----------

<i>X</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------	----------

<i>Y</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------	----------	----------

<i>Y</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------	----------

长度为4

长度为3

枚举观察



<i>X</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------	----------	----------

<i>X</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------	----------

<i>X</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------

<i>Y</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------	----------	----------

<i>Y</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------	----------

<i>Y</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------

长度为4

长度为3

长度为2

枚举观察



<i>X</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------	----------	----------

<i>X</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------	----------

<i>X</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------

<i>X</i>	<i>B</i>
----------	----------

<i>Y</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------	----------	----------

<i>Y</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------	----------

<i>Y</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------

<i>Y</i>	<i>B</i>
----------	----------

长度为4

长度为3

长度为2

长度为1

枚举观察



<i>X</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------	----------	----------

<i>X</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------	----------

<i>X</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------

<i>X</i>	<i>B</i>
----------	----------

<i>Y</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------	----------	----------

<i>Y</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------	----------

<i>Y</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------

<i>Y</i>	<i>B</i>
----------	----------

长度为4

长度为3

长度为2

长度为1

- 可能存在**最优子结构**和**重叠子问题**

↓
大问题的最优值依赖小问题的最优值

<i>X</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------	----------	----------

<i>X</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------	----------

<i>X</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------

<i>X</i>	<i>B</i>
----------	----------

<i>Y</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------	----------	----------

<i>Y</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------	----------

<i>Y</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------

<i>Y</i>	<i>B</i>
----------	----------

长度为4

长度为3

长度为2

长度为1

- 可能存在**最优子结构**和**重叠子问题**

问题：如何利用动态规划求解？

- 给出问题表示

- $C[i, j]$: $X[1..i]$ 和 $Y[1..j]$ 的最长公共子序列长度

X	x_1	x_2	...	x_{i-1}	x_i
Y	y_1	y_2	...	y_{j-1}	y_j

问题结构分析



递推关系建立



自底向上计算



最优方案追踪

- 给出问题表示

- $C[i, j]$: $X[1..i]$ 和 $Y[1..j]$ 的最长公共子序列长度

X	x_1	x_2	...	x_{i-1}	x_i
Y	y_1	y_2	...	y_{j-1}	y_j

- 明确原始问题

- $C[n, m]$: $X[1..n]$ 和 $Y[1..m]$ 的最长公共子序列长度

问题结构分析



递推关系建立



自底向上计算



最优方案追踪

递推关系建立：分析最优（子）结构

- 考察末尾字符

- 情况1: $x_7 \neq y_6$

<i>X</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------

<i>Y</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>C</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>A</i>
----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------

- 情况2: $x_7 = y_6$

<i>X</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
		<i>Y</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>C</i>	<i>A</i>	<i>B</i>

问题结构分析



递推关系建立



自底向上计算



最优方案追踪

递推关系建立：分析最优（子）结构

- 考察末尾字符

- 情况1: $x_7 \neq y_6$

$C[7,6]$

<i>X</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
<i>Y</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>C</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>A</i>	<i>A</i>

不同时出现

问题结构分析

递推关系建立

自底向上计算

最优方案追踪

递推关系建立：分析最优（子）结构

- 考察末尾字符

- 情况1: $x_7 \neq y_6$

$C[7, 6]$

X	A	B	C	B	D	A	B
----------	---	---	---	---	---	---	----------

Y	B	D	C	A	B	A
----------	---	---	---	---	---	----------

$C[7, 6 - 1] + 0$							
X	A	B	C	B	D	A	B
Y	B	D	C	A	B	A	

问题结构分析

递推关系建立

自底向上计算

最优方案追踪

递推关系建立：分析最优（子）结构

考察末尾字符

情况1: $x_7 \neq y_6$

$C[7, 6]$

X	A	B	C	B	D	A	B
----------	---	---	---	---	---	---	----------

Y	B	D	C	A	B	A
----------	---	---	---	---	---	----------

$C[7, 6 - 1] + 0$

X	A	B	C	B	D	A	B
Y	B	D	C	A	B	A	

$C[7 - 1, 6] + 0$

X	A	B	C	B	D	A	B
Y	B	D	C	A	B	A	

问题结构分析

递推关系建立

自底向上计算

最优方案追踪

递推关系建立：分析最优（子）结构

- 考察末尾字符

- 情况1: $x_7 \neq y_6$

$C[7, 6]$

X	A	B	C	B	D	A	B
----------	---	---	---	---	---	---	----------

max

Y	B	D	C	A	B	A
----------	---	---	---	---	---	----------

$C[7, 6 - 1] + 0$

X	A	B	C	B	D	A	B
----------	---	---	---	---	---	---	---

Y	B	D	C	A	B	A
----------	---	---	---	---	---	---

$C[7 - 1, 6] + 0$

X	A	B	C	B	D	A	B
----------	---	---	---	---	---	---	---

Y	B	D	C	A	B	A
----------	---	---	---	---	---	---

问题结构分析

递推关系建立

自底向上计算

最优方案追踪

递推关系建立：分析最优（子）结构

- $x_i \neq y_j$

分解子问题

$C[i, j]$

X	x_1	x_2	...	x_{i-1}	x_i
Y	y_1	y_2	...	y_{j-1}	y_j

max

$C[i, j - 1] + 0$

X	x_1	x_2	...	x_{i-1}	x_i
Y	y_1	y_2	...	y_{j-1}	y_j

$C[i - 1, j] + 0$

X	x_1	x_2	...	x_{i-1}	x_i
Y	y_1	y_2	...	y_{j-1}	y_j

问题结构分析



递推关系建立



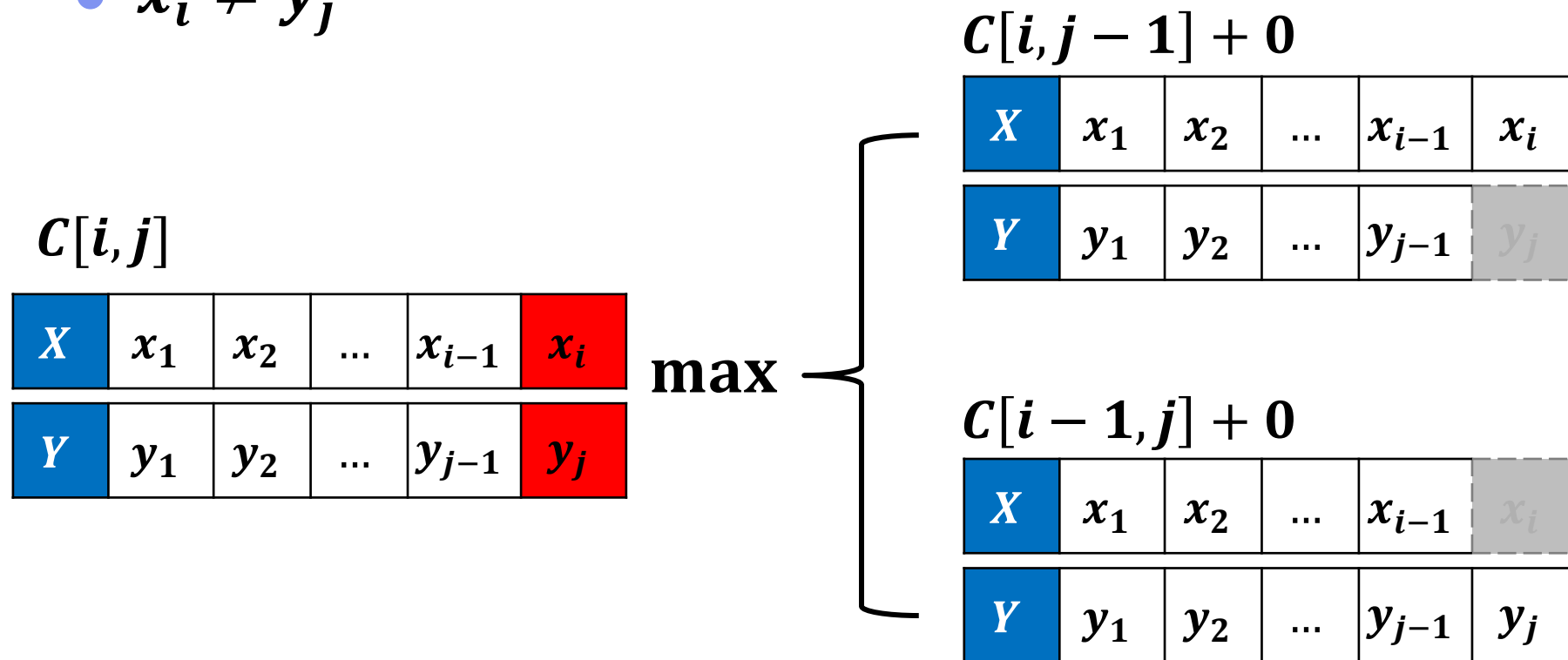
自底向上计算



最优方案追踪

递推关系建立：分析最优（子）结构

- $x_i \neq y_j$



问题结构分析

递推关系建立

自底向上计算

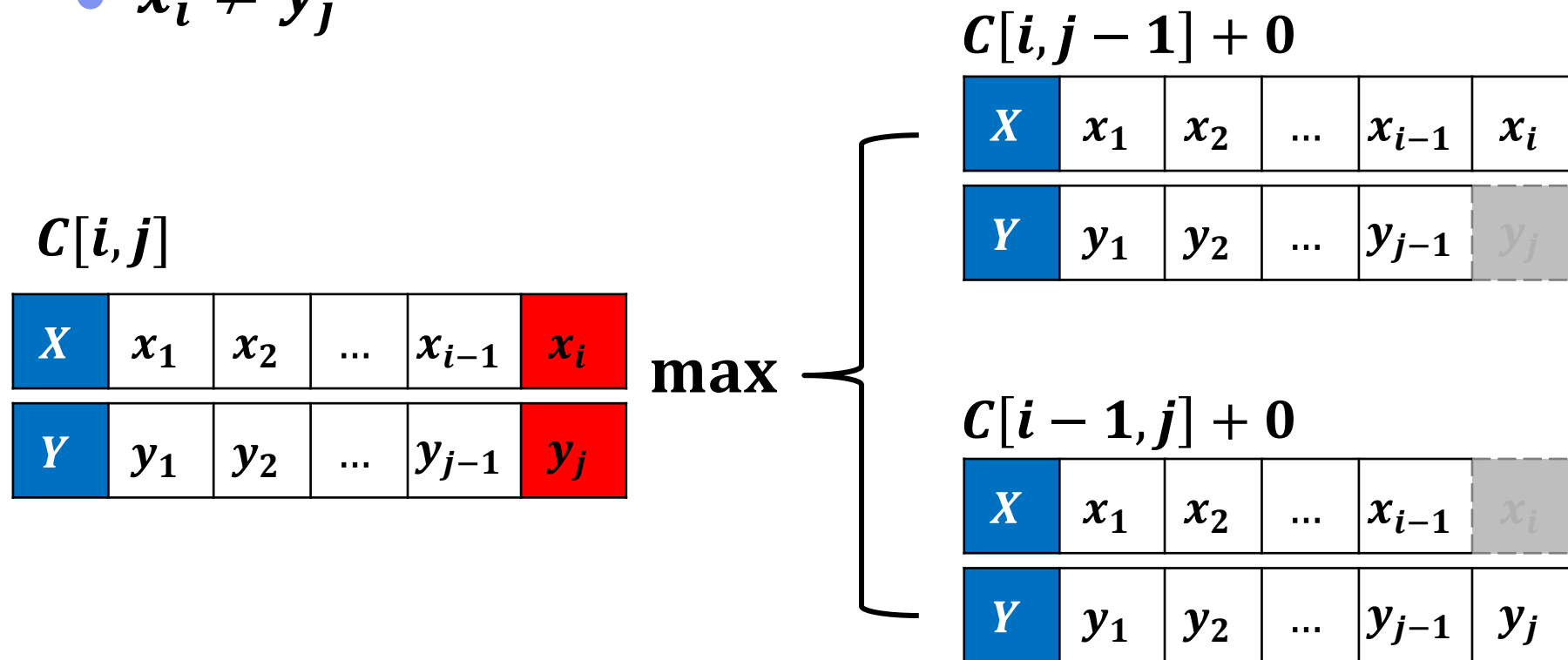
最优方案追踪

- $C[i, j] = \max\{C[i - 1, j], C[i, j - 1]\}$

递推关系

递推关系建立：分析最优（子）结构

- $x_i \neq y_j$



问题结构分析

递推关系建立

自底向上计算

最优方案追踪

- $C[i, j] = \max\{C[i - 1, j], C[i, j - 1]\}$

最优子结构

递推关系建立：分析最优（子）结构

- 考察末尾字符

- 情况2: $x_7 = y_6$

$C[7,6]$

<i>X</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------

<i>Y</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>C</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------

问题结构分析



递推关系建立



自底向上计算



最优方案追踪

递推关系建立：分析最优（子）结构

- 考察末尾字符

- 情况2: $x_7 = y_6$

$C[7,6]$

<i>X</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
<i>Y</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>C</i>	<i>A</i>	<i>B</i>		<i>B</i>

可同时出现

问题结构分析

递推关系建立

自底向上计算

最优方案追踪

递推关系建立：分析最优（子）结构

- 考察末尾字符

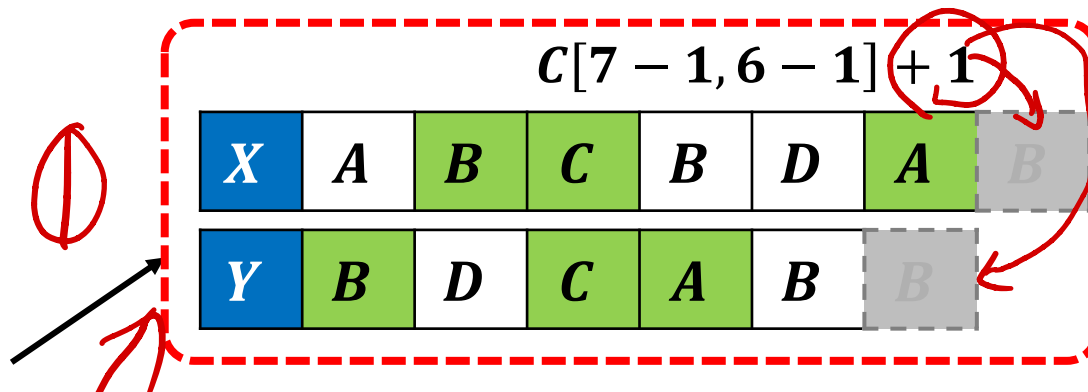
- 情况2: $x_7 = y_6$

$C[7, 6]$

<i>X</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------

<i>Y</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>C</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>B</i>
----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------

可同时出现



问题结构分析

递推关系建立

自底向上计算

最优方案追踪

递推关系建立：分析最优（子）结构

考察末尾字符

情况2: $x_7 = y_6$

$C[7, 6]$

X	A	B	C	B	D	A	B
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

Y	B	D	C	A	B	B
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

也可不同时出现

$C[7 - 1, 6 - 1] + 1$

<i>X</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
<i>Y</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>C</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>B</i>	

$C[7, 6 - 1] + 0$

<i>X</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
<i>Y</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>C</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>B</i>	

$C[7 - 1, 6] + 0$

X	A	B	C	B	D	A	B
Y	B	D	C	A	B	B	

问题结构分析

递推关系建立

自底向上计算

最优方案追踪

递推关系建立：分析最优（子）结构

考察末尾字符

情况2: $x_7 = y_6$

$C[7, 6]$

X	A	B	C	B	D	A	B
----------	---	---	---	---	---	---	----------

Y	B	D	C	A	B	B
----------	---	---	---	---	---	----------

max

只有三种情况 (不可能B都不出现)

$C[7 - 1, 6 - 1] + 1$

X	A	B	C	B	D	A	B
----------	---	---	---	---	---	---	----------

Y	B	D	C	A	B	B
----------	---	---	---	---	---	----------

$C[7, 6 - 1] + 0$

X	A	B	C	B	D	A	B
----------	---	---	---	---	---	---	----------

Y	B	D	C	A	B	B
----------	---	---	---	---	---	----------

$C[7 - 1, 6] + 0$

X	A	B	C	B	D	A	B
----------	---	---	---	---	---	---	----------

Y	B	D	C	A	B	B
----------	---	---	---	---	---	----------

问题结构分析

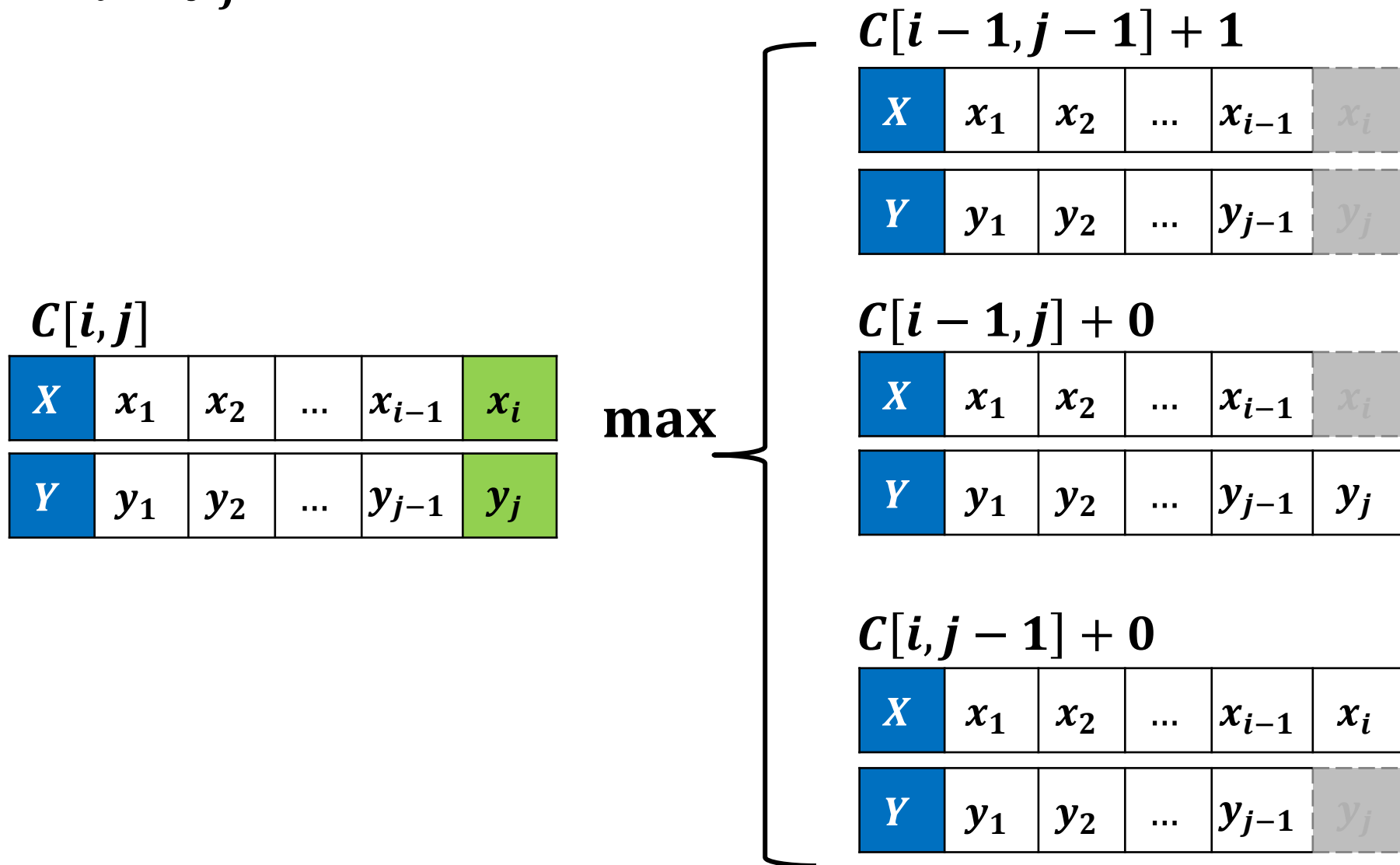
递推关系建立

自底向上计算

最优方案追踪

递推关系建立：分析最优（子）结构

- $x_i = y_j$



问题结构分析



递推关系建立



自底向上计算



最优方案追踪

递推关系建立：分析最优（子）结构

- $x_i = y_j$

$$C[i, j]$$

X	x_1	x_2	...	x_{i-1}	x_i
Y	y_1	y_2	...	y_{j-1}	y_j

max

$$C[i-1, j-1] + 1$$

X	x_1	x_2	...	x_{i-1}	x_i
Y	y_1	y_2	...	y_{j-1}	y_j

$$C[i-1, j] + 0$$

X	x_1	x_2	...	x_{i-1}	x_i
Y	y_1	y_2	...	y_{j-1}	y_j

$$C[i, j-1] + 0$$

X	x_1	x_2	...	x_{i-1}	x_i
Y	y_1	y_2	...	y_{j-1}	y_j

问题结构分析

递推关系建立

自底向上计算

最优方案追踪

问题：3个问题是否都需要求解？

递推关系建立：分析最优（子）结构

- $x_i = y_j$

- $C[i-1, j]$ 比 $C[i-1, j-1]$ 至多大1
- $C[i, j-1]$ 比 $C[i-1, j-1]$ 至多大1

$C[i, j]$

X	x_1	x_2	...	x_{i-1}	x_i
Y	y_1	y_2	...	y_{j-1}	y_j

max

$C[i-1, j-1] + 1$

X	x_1	x_2	...	x_{i-1}	x_i
-----	-------	-------	-----	-----------	-------

Y	y_1	y_2	...	y_{j-1}	y_j
-----	-------	-------	-----	-----------	-------

$C[i-1, j] + 0$

X	x_1	x_2	...	x_{i-1}	x_i
-----	-------	-------	-----	-----------	-------

Y	y_1	y_2	...	y_{j-1}	y_j
-----	-------	-------	-----	-----------	-------

$C[i, j-1] + 0$

X	x_1	x_2	...	x_{i-1}	x_i
-----	-------	-------	-----	-----------	-------

Y	y_1	y_2	...	y_{j-1}	y_j
-----	-------	-------	-----	-----------	-------

问题结构分析

递推关系建立

自底向上计算

最优方案追踪

递推关系建立：分析最优（子）结构

- $x_i = y_j$
 - $C[i-1, j]$ 比 $C[i-1, j-1]$ 至多大1
 - $C[i, j-1]$ 比 $C[i-1, j-1]$ 至多大1
 - $C[i-1, j-1] + 1$, 另外两个+0

$C[i, j]$

X	x_1	x_2	...	x_{i-1}	x_i
Y	y_1	y_2	...	y_{j-1}	y_j

max

$C[i-1, j-1] + 1$					
X	x_1	x_2	...	x_{i-1}	x_i
Y	y_1	y_2	...	y_{j-1}	y_j

$C[i-1, j] + 0$					
X	x_1	x_2	...	x_{i-1}	x_i
Y	y_1	y_2	...	y_{j-1}	y_j

$C[i, j-1] + 0$					
X	x_1	x_2	...	x_{i-1}	x_i
Y	y_1	y_2	...	y_{j-1}	y_j

问题结构分析

递推关系建立

自底向上计算

最优方案追踪

递推关系建立：分析最优（子）结构

- $x_i = y_j$
 - $C[i-1, j]$ 比 $C[i-1, j-1]$ 至多大1
 - $C[i, j-1]$ 比 $C[i-1, j-1]$ 至多大1
 - $C[i-1, j-1] + 1$, 另外两个+0

$C[i, j]$					
X	x_1	x_2	...	x_{i-1}	x_i
Y	y_1	y_2	...	y_{j-1}	y_j

max

$$C[i-1, j-1] + 1 \geq \max\{C[i, j-1], C[i-1, j]\}$$

✓ 只需考虑情况1.

$C[i-1, j-1] + 1$

X	x_1	x_2	...	x_{i-1}	x_i
Y	y_1	y_2	...	y_{j-1}	y_j

$C[i-1, j] + 0$

X	x_1	x_2	...	x_{i-1}	x_i
Y	y_1	y_2	...	y_{j-1}	y_j

$C[i, j-1] + 0$

X	x_1	x_2	...	x_{i-1}	x_i
Y	y_1	y_2	...	y_{j-1}	y_j

问题结构分析

递推关系建立

自底向上计算

最优方案追踪

递推关系建立：分析最优（子）结构

- $x_i = y_j$
 - $C[i-1, j]$ 比 $C[i-1, j-1]$ 至多大1
 - $C[i, j-1]$ 比 $C[i-1, j-1]$ 至多大1
 - $C[i-1, j-1] + 1$, 另外两个+0

$C[i, j]$

X	x_1	x_2	...	x_{i-1}	x_i
Y	y_1	y_2	...	y_{j-1}	y_j

max

$$C[i-1, j-1] + 1 \geq \max\{C[i, j-1], C[i-1, j]\}$$

$C[i-1, j-1] + 1$ 已充分

X	x_1	x_2	...	x_{i-1}	x_i
Y	y_1	y_2	...	y_{j-1}	y_j

$C[i-1, j] + 0$ 非必要

X	x_1	x_2	...	x_{i-1}	x_i
Y	y_1	y_2	...	y_{j-1}	y_j

$C[i, j-1] + 0$ 非必要

X	x_1	x_2	...	x_{i-1}	x_i
Y	y_1	y_2	...	y_{j-1}	y_j

问题结构分析

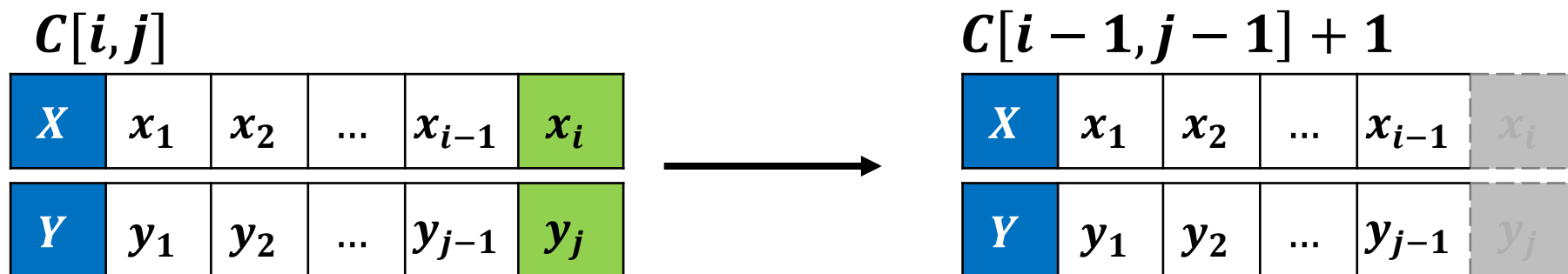
递推关系建立

自底向上计算

最优方案追踪

递推关系建立：分析最优（子）结构

- $x_i = y_j$



问题结构分析

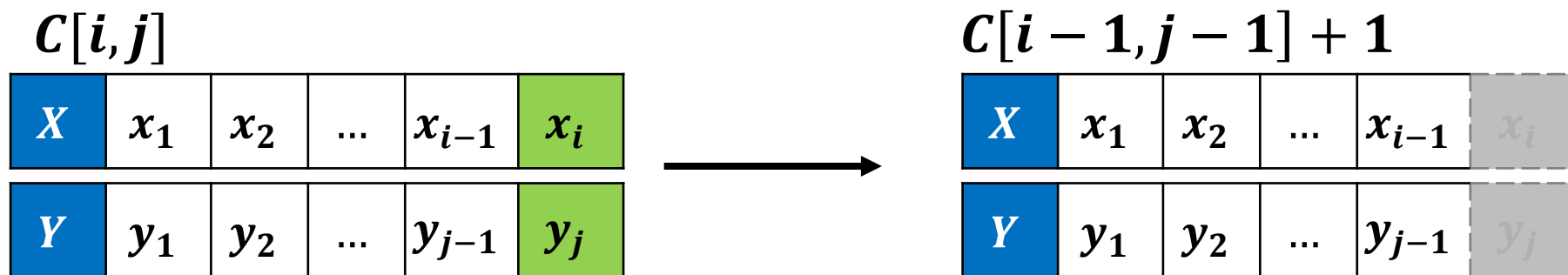
递推关系建立

自底向上计算

最优方案追踪

递推关系建立：分析最优（子）结构

- $x_i = y_j$



- $C[i, j] = C[i-1, j-1] + 1$

问题结构分析

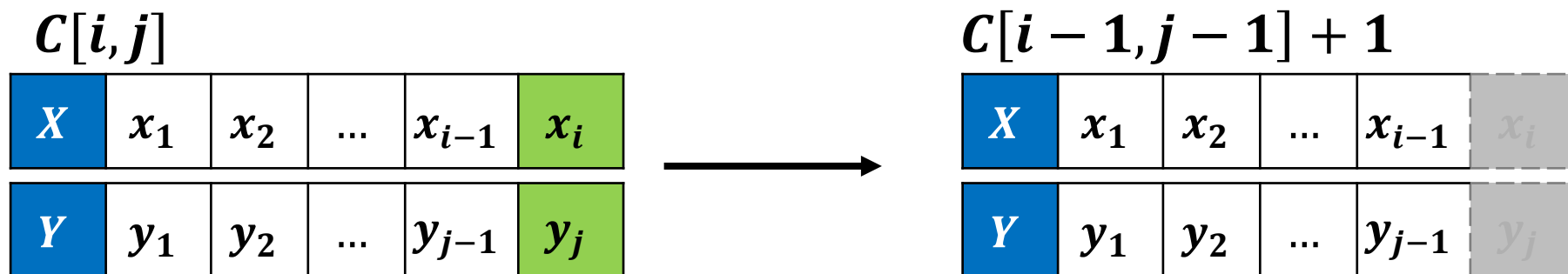
递推关系建立

自底向上计算

最优方案追踪

递推关系建立：分析最优（子）结构

- $x_i = y_j$



问题结构分析

递推关系建立

自底向上计算

最优方案追踪

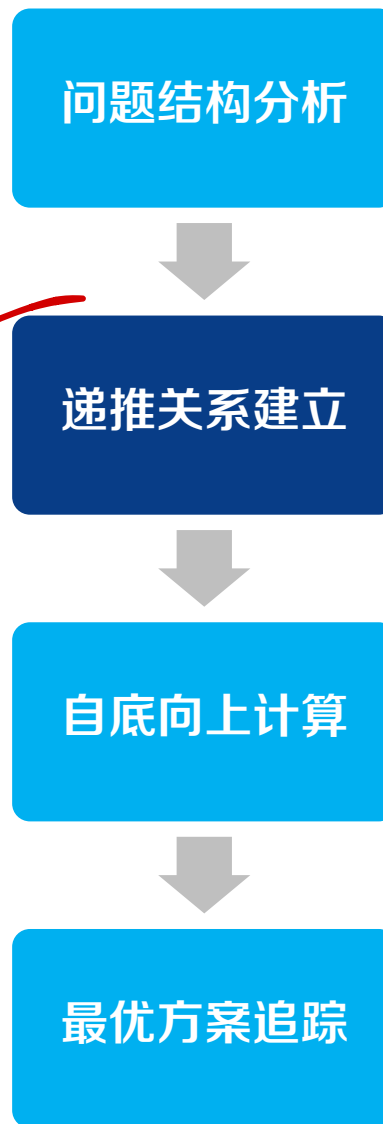
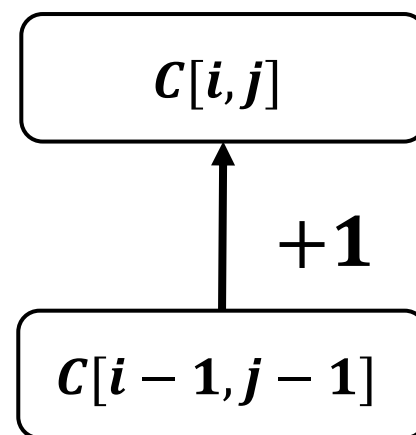
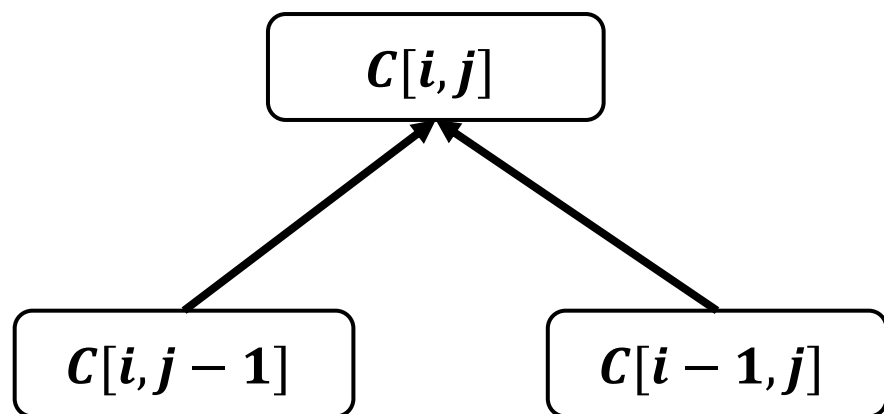
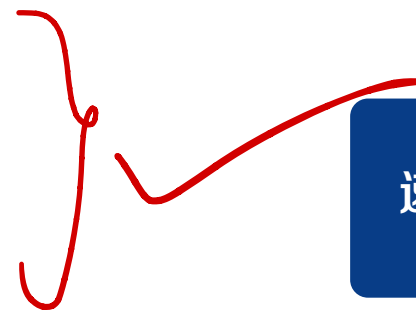
- $C[i, j] = C[i-1, j-1] + 1$

最优子结构

递推关系建立：构造递推公式



- $$C[i, j] = \begin{cases} \max\{C[i-1, j], C[i, j-1]\}, & x_i \neq y_j \\ C[i-1, j-1] + 1, & x_i = y_j \end{cases}$$



自底向上计算：确定计算顺序

- 初始化

- $C[i, 0] = C[0, j] = 0$
 - 某序列长度为0时，最长公共子序列长度为0

$C[i, j]$	$j = 0$	$j = 1$	$j = 2$	\dots	$j = m$
$i = 0$					
$i = 1$					
$i = 2$					
\dots					
$i = n$					

问题结构分析



递推关系建立



自底向上计算



最优方案追踪

自底向上计算：确定计算顺序

• 初始化

- $C[i, 0] = C[0, j] = 0$
 - 某序列长度为0时，最长公共子序列长度为0

$C[i, j]$	$j = 0$	$j = 1$	$j = 2$	\dots	$j = m$
$i = 0$	0	0	0	0	0
$i = 1$	0				
$i = 2$	0				
\dots	0				
$i = n$	0				

初始化

问题结构分析

递推关系建立

自底向上计算

最优方案追踪

自底向上计算：确定计算顺序

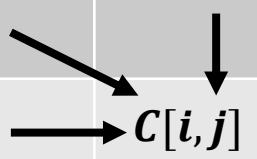
• 初始化

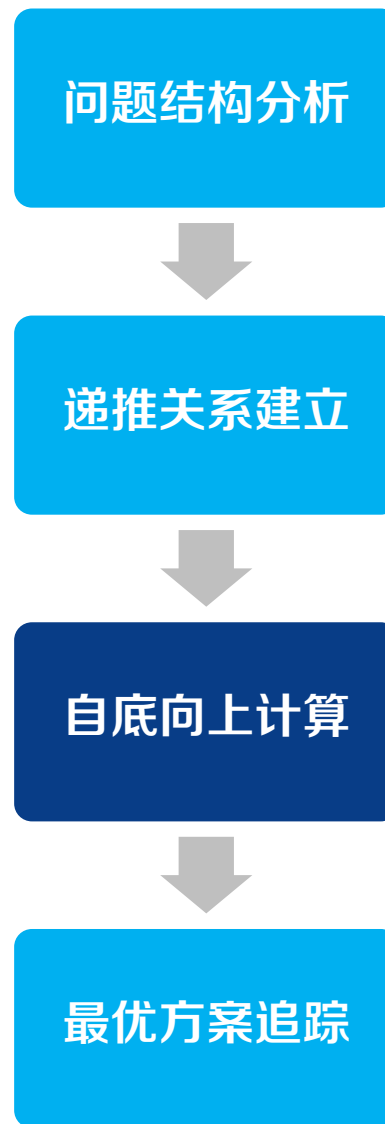
- $C[i, 0] = C[0, j] = 0$
 - 某序列长度为0时，最长公共子序列长度为0

• 递推公式

$$C[i, j] = \begin{cases} \max\{C[i-1, j], C[i, j-1]\}, & x_i \neq y_j \\ C[i-1, j-1] + 1, & x_i = y_j \end{cases}$$

$C[i, j]$	$j = 0$	$j = 1$	$j = 2$	\dots	$j = m$
$i = 0$	0	0	0	0	0
$i = 1$	0				
$i = 2$	0				
\dots	0				
$i = n$	0				





自底向上计算：确定计算顺序

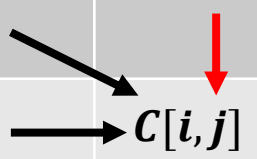
• 初始化

- $C[i, 0] = C[0, j] = 0$
 - 某序列长度为0时，最长公共子序列长度为0

• 递推公式

$$C[i, j] = \begin{cases} \max\{C[i-1, j], C[i, j-1]\}, & x_i \neq y_j \\ C[i-1, j-1] + 1, & x_i = y_j \end{cases}$$

$C[i, j]$	$j = 0$	$j = 1$	$j = 2$...	$j = m$
$i = 0$	0	0	0	0	0
$i = 1$	0				
$i = 2$	0				
...	0				
$i = n$	0				





自底向上计算：确定计算顺序

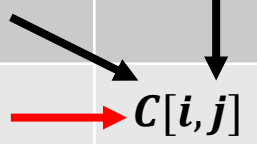
• 初始化

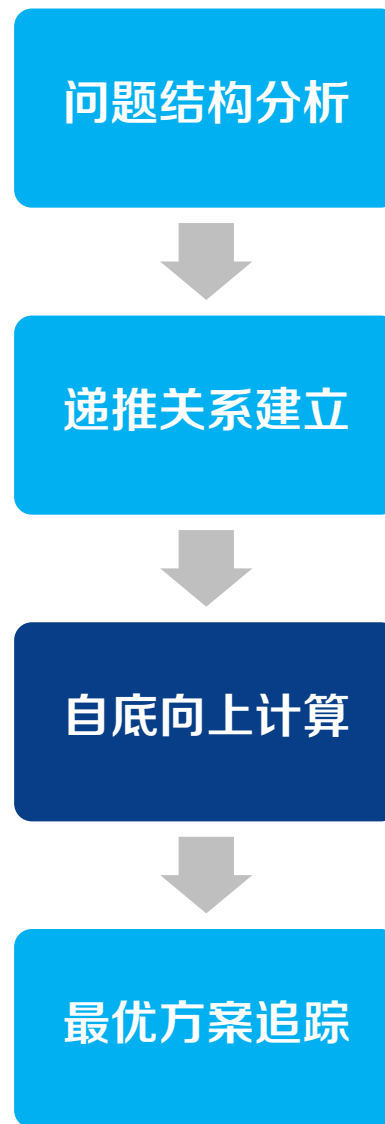
- $C[i, 0] = C[0, j] = 0$
 - 某序列长度为0时，最长公共子序列长度为0

• 递推公式

$$C[i, j] = \begin{cases} \max\{C[i-1, j], C[i, j-1]\}, & x_i \neq y_j \\ C[i-1, j-1] + 1, & x_i = y_j \end{cases}$$

$C[i, j]$	$j = 0$	$j = 1$	$j = 2$...	$j = m$
$i = 0$	0	0	0	0	0
$i = 1$	0				
$i = 2$	0				
...	0				
$i = n$	0				





自底向上计算：确定计算顺序

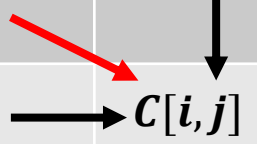
• 初始化

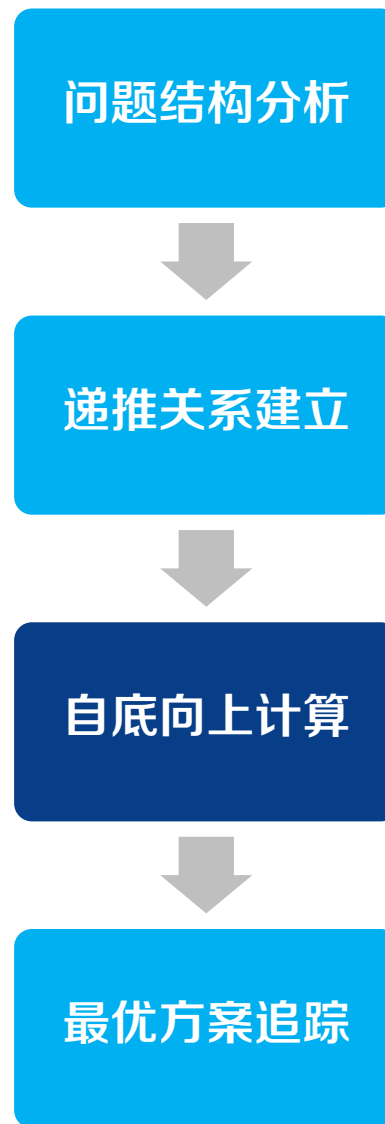
- $C[i, 0] = C[0, j] = 0$
 - 某序列长度为0时，最长公共子序列长度为0

• 递推公式

$$C[i, j] = \begin{cases} \max\{C[i-1, j], C[i, j-1]\}, & x_i \neq y_j \\ C[i-1, j-1] + 1, & x_i = y_j \end{cases}$$

$C[i, j]$	$j = 0$	$j = 1$	$j = 2$	\dots	$j = m$
$i = 0$	0	0	0	0	0
$i = 1$	0				
$i = 2$	0				
\dots	0				
$i = n$	0				





自底向上计算：依次求解问题

初始化

- $C[i, 0] = C[0, j] = 0$
 - 某序列长度为0时，最长公共子序列长度为0

递推公式

$$C[i, j] = \begin{cases} \max\{C[i-1, j], C[i, j-1]\}, & x_i \neq y_j \\ C[i-1, j-1] + 1, & x_i = y_j \end{cases}$$

$C[i, j]$	$j = 0$	$j = 1$	$j = 2$...	$j = m$
$i = 0$	0	0	0	0	0
$i = 1$	0	→			
$i = 2$	0	←	→	→	→
...	0	←	→	→	→
$i = n$	0	←	→	→	★

自底向上计算

问题结构分析



递推关系建立



自底向上计算



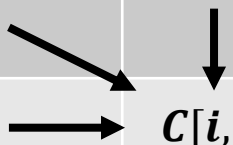
最优方案追踪

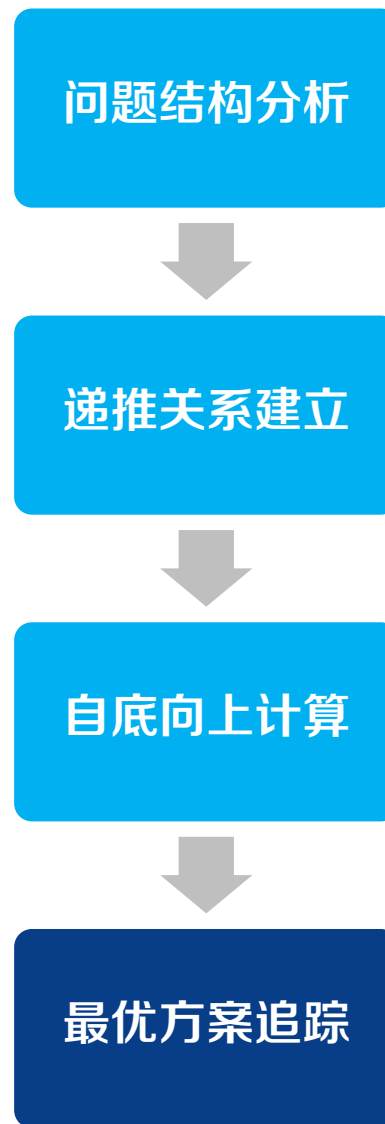
最优方案追踪：记录决策过程

- 构造追踪数组 $rec[1..n]$ ，记录子问题来源

$$rec[i, j] = \begin{cases} LU, & \text{if } C[i, j] = C[i-1, j-1] + 1 \\ U, & \text{if } C[i, j] = C[i-1, j] \\ L, & \text{if } C[i, j] = C[i, j-1] \end{cases}$$

$C[i, j]$	$j = 0$	$j = 1$	$j = 2$...	$j = m$
$i = 0$					
$i = 1$					
$i = 2$					
...					
$i = n$					



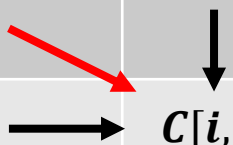


最优方案追踪：记录决策过程

- 构造追踪数组 $rec[1..n]$ ，记录子问题来源

$$rec[i, j] = \begin{cases} LU, & \text{if } C[i, j] = C[i-1, j-1] + 1 \\ U, & \text{if } C[i, j] = C[i-1, j] \\ L, & \text{if } C[i, j] = C[i, j-1] \end{cases}$$

$C[i, j]$	$j = 0$	$j = 1$	$j = 2$	$...$	$j = m$
$i = 0$					
$i = 1$					
$i = 2$					
$...$					
$i = n$					



问题结构分析



递推关系建立



自底向上计算



最优方案追踪

- 最长公共子序列末尾为 $X[i] = Y[j]$

最优方案追踪：记录决策过程

- 构造追踪数组 $rec[1..n]$ ，记录子问题来源

$$rec[i, j] = \begin{cases} LU, & \text{if } C[i, j] = C[i-1, j-1] + 1 \\ U, & \text{if } C[i, j] = C[i-1, j] \\ L, & \text{if } C[i, j] = C[i, j-1] \end{cases}$$

$C[i, j]$	$j = 0$	$j = 1$	$j = 2$...	$j = m$
$i = 0$					
$i = 1$					
$i = 2$					
...					
$i = n$					

Diagram illustrating the DP table structure. A red arrow points down to the cell $C[i, j]$ from the row $i = 2$. A black arrow points right to the cell $C[i, j]$ from the column $j = 2$.

问题结构分析



递推关系建立



自底向上计算



最优方案追踪

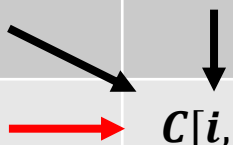
- 最长公共子序列在 $X[1..i-1]$ 和 $Y[1..j]$ 中

最优方案追踪：记录决策过程

- 构造追踪数组 $rec[1..n]$ ，记录子问题来源

$$rec[i, j] = \begin{cases} LU, & \text{if } C[i, j] = C[i-1, j-1] + 1 \\ U, & \text{if } C[i, j] = C[i-1, j] \\ L, & \text{if } C[i, j] = C[i, j-1] \end{cases}$$

$C[i, j]$	$j = 0$	$j = 1$	$j = 2$	$...$	$j = m$
$i = 0$					
$i = 1$					
$i = 2$					
$...$					
$i = n$					



问题结构分析



递推关系建立



自底向上计算



最优方案追踪

- 最长公共子序列在 $X[1..i]$ 和 $Y[1..j-1]$ 中

最优方案追踪：输出最优方案



- 输出最长公共子序列

- $$rec[i, j] = \begin{cases} LU, & \text{if } C[i, j] = C[i - 1, j - 1] + 1 \\ U, & \text{if } C[i, j] = C[i - 1, j] \\ L, & \text{if } C[i, j] = C[i, j - 1] \end{cases}$$

$C[i, j]$	$j = 0$	$j = 1$	$j = 2$	$...$	$j = m$
$i = 0$					
$i = 1$					
$i = 2$					
$...$					
$i = n$					

$rec[] = L$

问题结构分析



递推关系建立



自底向上计算



最优方案追踪

- 最长公共子序列在 $X[1..i]$ 和 $Y[1..j-1]$ 中

最优方案追踪：输出最优方案



- 输出最长公共子序列

- $$rec[i, j] = \begin{cases} LU, & \text{if } C[i, j] = C[i - 1, j - 1] + 1 \\ U, & \text{if } C[i, j] = C[i - 1, j] \\ L, & \text{if } C[i, j] = C[i, j - 1] \end{cases}$$

$C[i, j]$	$j = 0$	$j = 1$	$j = 2$...	$j = m$
$i = 0$					
$i = 1$					
$i = 2$					
...					
$i = n$				$rec[] = U$	

$rec[] = L$

问题结构分析



递推关系建立



自底向上计算



最优方案追踪

- 最长公共子序列在 $X[1..i - 1]$ 和 $Y[1..j]$ 中

最优方案追踪：输出最优方案



- 输出最长公共子序列

- $$rec[i, j] = \begin{cases} LU, & \text{if } C[i, j] = C[i - 1, j - 1] + 1 \\ U, & \text{if } C[i, j] = C[i - 1, j] \\ L, & \text{if } C[i, j] = C[i, j - 1] \end{cases}$$

$C[i, j]$	$j = 0$	$j = 1$	$j = 2$...	$j = m$
$i = 0$					
$i = 1$					
$i = 2$					
...					
$i = n$					

Diagram illustrating the backtracking process for the Longest Common Subsequence (LCS) problem. The table shows the DP table $C[i, j]$ and the corresponding backtracking path for the optimal solution. The path is marked by red dashed boxes and arrows, starting from the bottom-right cell (n, m) and moving towards the top-left. The labels $rec[] = LU$, $rec[] = U$, and $rec[] = L$ indicate the type of operation (match, deletion, or insertion) at each step.

问题结构分析



递推关系建立



自底向上计算



最优方案追踪

- 最长公共子序列末尾为 $X[i] = Y[j]$

最优方案追踪：输出最优方案



- 输出最长公共子序列

- $$rec[i, j] = \begin{cases} LU, & \text{if } C[i, j] = C[i - 1, j - 1] + 1 \\ U, & \text{if } C[i, j] = C[i - 1, j] \\ L, & \text{if } C[i, j] = C[i, j - 1] \end{cases}$$

$C[i, j]$	$j = 0$	$j = 1$	$j = 2$	$...$	$j = m$
$i = 0$					
$i = 1$					
$i = 2$					
$...$					
$i = n$					

$rec[] = LU$

$rec[] = U$

$rec[] = L$

问题结构分析



递推关系建立



自底向上计算



最优方案追踪

算法实例



	1	2	3	4	5	6	7
X_i	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
Y_j	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>C</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>A</i>	

$C[]$

$j \backslash i$	0	1	2	3	4	5	6
0							
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							

$rec[]$

$j \backslash i$	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						
7						

算法实例



	1	2	3	4	5	6	7
X_i	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
Y_j	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>C</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>A</i>	

$C[]$

$j \backslash i$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0						
2	0						
3	0						
4	0						
5	0						
6	0						
7	0						

初始化

$rec[]$

$j \backslash i$	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						
7						

算法实例



	1	2	3	4	5	6	7
X_i	A	B	C	B	D	A	B
Y_j	B	D	C	A	B	A	

$X_i \neq Y_j$

$C[]$

$j \backslash i$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0						
2	0						
3	0						
4	0						
5	0						
6	0						
7	0						

$rec[]$

$j \backslash i$	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						
7						

算法实例



	1	2	3	4	5	6	7
X_i	A	B	C	B	D	A	B
Y_j	B	D	C	A	B	A	

$X_i \neq Y_j$

$C[]$

$j \backslash i$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0						
2	0						
3	0						
4	0						
5	0						
6	0						
7	0						

$rec[]$

$j \backslash i$	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						
7						

算法实例



	1	2	3	4	5	6	7
X_i	A	B	C	B	D	A	B
Y_j	B	D	C	A	B	A	

$X_i \neq Y_j$

$C[]$

$rec[]$

$j \backslash i$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0						
2	0						
3	0						
4	0						
5	0						
6	0						
7	0						

$C[1, 1] = \max\{C[1, 0], C[0, 1]\}$

$j \backslash i$	1	2	3	4	5	6
1	U					
2						
3						
4						
5						
6						
7						

算法实例



	1	2	3	4	5	6	7
X_i	A	B	C	B	D	A	B
Y_j	B	D	C	A	B	A	

$C[]$

$j \backslash i$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0				
2	0						
3	0						
4	0						
5	0						
6	0						
7	0						

$rec[]$

$j \backslash i$	1	2	3	4	5	6
1	U	U				
2						
3						
4						
5						
6						
7						

算法实例



	1	2	3	4	5	6	7
X_i	A	B	C	B	D	A	B
Y_j	B	D	C	A	B	A	

$C[]$

$j \backslash i$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0			
2	0						
3	0						
4	0						
5	0						
6	0						
7	0						

$rec[]$

$j \backslash i$	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U			
2						
3						
4						
5						
6						
7						

算法实例



	1	2	3	4	5	6	7
X_i	A	B	C	B	D	A	B
Y_j	B	D	C	A	B	A	

$X_i = Y_j$ $rec[]$

$C[]$

$j \backslash i$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1		
2	0						
3	0						
4	0						
5	0						
6	0						
7	0						

$C[1, 4] = C[0, 3] + 1$

$j \backslash i$	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU		
2						
4						
5						
6						
7						

算法实例



	1	2	3	4	5	6	7
X_i	A	B	C	B	D	A	B
Y_j	B	D	C	A	B	A	

$C[]$

$j \backslash i$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1		
2	0						
3	0						
4	0						
5	0						
6	0						
7	0						

$rec[]$

$j \backslash i$	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	
2						
3						
4						
5						
6						
7						

算法实例



	1	2	3	4	5	6	7
X_i	A	B	C	B	D	A	B
Y_j	B	D	C	A	B	A	

$C[]$

$j \backslash i$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0						
3	0						
4	0						
5	0						
6	0						
7	0						

$rec[]$

$j \backslash i$	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2						
3						
4						
5						
6						
7						

算法实例



	1	2	3	4	5	6	7
X_i	A	B	C	B	D	A	B
Y_j	B	D	C	A	B	A	

$C[]$

$j \backslash i$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1					
3	0						
4	0						
5	0						
6	0						
7	0						

$rec[]$

$j \backslash i$	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU					
3						
4						
5						
6						
7						

算法实例



	1	2	3	4	5	6	7
X_i	A	B	C	B	D	A	B
Y_j	B	D	C	A	B	A	

$C[]$

$j \backslash i$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1				
3	0						
4	0						
5	0						
6	0						
7	0						

$rec[]$

$j \backslash i$	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L				
3						
4						
5						
6						
7						

算法实例



	1	2	3	4	5	6	7
X_i	A	B	C	B	D	A	B
Y_j	B	D	C	A	B	A	

$C[]$

$j \backslash i$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1	1			
3	0						
4	0						
5	0						
6	0						
7	0						

$rec[]$

$j \backslash i$	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L	L			
3						
4						
5						
6						
7						

算法实例



	1	2	3	4	5	6	7
X_i	A	B	C	B	D	A	B
Y_j	B	D	C	A	B	A	

$C[]$

$j \backslash i$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1	1	1		
3	0						
4	0						
5	0						
6	0						
7	0						

$rec[]$

$j \backslash i$	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L	L	U		
3						
4						
5						
6						
7						

算法实例



	1	2	3	4	5	6	7
X_i	A	B	C	B	D	A	B
Y_j	B	D	C	A	B	A	

$C[]$

$j \backslash i$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1	1	1	2	
3	0						
4	0						
5	0						
6	0						
7	0						

$rec[]$

$j \backslash i$	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L	L	U	LU	
3						
4						
5						
6						
7						

算法实例



	1	2	3	4	5	6	7
X_i	A	B	C	B	D	A	B
Y_j	B	D	C	A	B	A	

$C[]$

$j \backslash i$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1	1	1	2	2
3	0						
4	0						
5	0						
6	0						
7	0						

$rec[]$

$j \backslash i$	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L	L	U	LU	L
3						
4						
5						
6						
7						

算法实例



	1	2	3	4	5	6	7
X_i	A	B	C	B	D	A	B
Y_j	B	D	C	A	B	A	

$C[]$

$j \backslash i$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1	1	1	2	2
3	0	1					
4	0						
5	0						
6	0						
7	0						

$rec[]$

$j \backslash i$	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L	L	U	LU	L
3	U					
4						
5						
6						
7						

算法实例



	1	2	3	4	5	6	7
X_i	A	B	C	B	D	A	B
Y_j	B	D	C	A	B	A	

$C[]$

$j \backslash i$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1	1	1	2	2
3	0	1	1				
4	0						
5	0						
6	0						
7	0						

$rec[]$

$j \backslash i$	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L	L	U	LU	L
3	U	U				
4						
5						
6						
7						

算法实例



	1	2	3	4	5	6	7
X_i	A	B	C	B	D	A	B
Y_j	B	D	C	A	B	A	

$C[]$

$j \backslash i$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1	1	1	2	2
3	0	1	1	2			
4	0						
5	0						
6	0						
7	0						

$rec[]$

$j \backslash i$	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L	L	U	LU	L
3	U	U	LU			
4						
5						
6						
7						

算法实例



	1	2	3	4	5	6	7
X_i	A	B	C	B	D	A	B
Y_j	B	D	C	A	B	A	

$C[]$

$j \backslash i$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1	1	1	2	2
3	0	1	1	2	2		
4	0						
5	0						
6	0						
7	0						

$rec[]$

$j \backslash i$	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L	L	U	LU	L
3	U	U	LU	L		
4						
5						
6						
7						

算法实例



	1	2	3	4	5	6	7
X_i	A	B	C	B	D	A	B
Y_j	B	D	C	A	B	A	

$C[]$

$j \backslash i$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1	1	1	2	2
3	0	1	1	2	2	2	
4	0						
5	0						
6	0						
7	0						

$rec[]$

$j \backslash i$	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L	L	U	LU	L
3	U	U	LU	L	U	
4						
5						
6						
7						

算法实例



	1	2	3	4	5	6	7
X_i	A	B	C	B	D	A	B
Y_j	B	D	C	A	B	A	

$C[]$

$j \backslash i$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1	1	1	2	2
3	0	1	1	2	2	2	2
4	0						
5	0						
6	0						
7	0						

$rec[]$

$j \backslash i$	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L	L	U	LU	L
3	U	U	LU	L	U	U
4						
5						
6						
7						

算法实例



	1	2	3	4	5	6	7
X_i	A	B	C	B	D	A	B
Y_j	B	D	C	A	B	A	

$C[]$

$j \backslash i$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1	1	1	2	2
3	0	1	1	2	2	2	2
4	0	1					
5	0						
6	0						
7	0						

$rec[]$

$j \backslash i$	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L	L	U	LU	L
3	U	U	LU	L	U	U
4	LU					
5						
6						
7						

算法实例



	1	2	3	4	5	6	7
X_i	A	B	C	B	D	A	B
Y_j	B	D	C	A	B	A	

$C[]$

$j \backslash i$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1	1	1	2	2
3	0	1	1	2	2	2	2
4	0	1	1				
5	0						
6	0						
7	0						

$rec[]$

$j \backslash i$	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L	L	U	LU	L
3	U	U	LU	L	U	U
4	LU	U				
5						
6						
7						

算法实例



	1	2	3	4	5	6	7
X_i	A	B	C	B	D	A	B
Y_j	B	D	C	A	B	A	

$C[]$

$j \backslash i$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1	1	1	2	2
3	0	1	1	2	2	2	2
4	0	1	1	2			
5	0						
6	0						
7	0						

$rec[]$

$j \backslash i$	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L	L	U	LU	L
3	U	U	LU	L	U	U
4	LU	U	U			
5						
6						
7						

算法实例



	1	2	3	4	5	6	7
X_i	A	B	C	B	D	A	B
Y_j	B	D	C	A	B	A	

$C[]$

$j \backslash i$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1	1	1	2	2
3	0	1	1	2	2	2	2
4	0	1	1	2	2		
5	0						
6	0						
7	0						

$rec[]$

$j \backslash i$	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L	L	U	LU	L
3	U	U	LU	L	U	U
4	LU	U	U	U		
5						
6						
7						

算法实例



	1	2	3	4	5	6	7
X_i	A	B	C	B	D	A	B
Y_j	B	D	C	A	B	A	

$C[]$

$j \backslash i$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1	1	1	2	2
3	0	1	1	2	2	2	2
4	0	1	1	2	2	3	
5	0						
6	0						
7	0						

$rec[]$

$j \backslash i$	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L	L	U	LU	L
3	U	U	LU	L	U	U
4	LU	U	U	U	LU	
5						
6						
7						

算法实例



	1	2	3	4	5	6	7
X_i	A	B	C	B	D	A	B
Y_j	B	D	C	A	B	A	

$C[]$

$j \backslash i$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1	1	1	2	2
3	0	1	1	2	2	2	2
4	0	1	1	2	2	3	3
5	0						
6	0						
7	0						

$rec[]$

$j \backslash i$	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L	L	U	LU	L
3	U	U	LU	L	U	U
4	LU	U	U	U	LU	L
5						
6						
7						

算法实例



	1	2	3	4	5	6	7
X_i	A	B	C	B	D	A	B
Y_j	B	D	C	A	B	A	

$C[]$

$j \backslash i$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1	1	1	2	2
3	0	1	1	2	2	2	2
4	0	1	1	2	2	3	3
5	0	1					
6	0						
7	0						

$rec[]$

$j \backslash i$	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L	L	U	LU	L
3	U	U	LU	L	U	U
4	LU	U	U	U	LU	L
5	U					
6						
7						

算法实例



	1	2	3	4	5	6	7
X_i	A	B	C	B	D	A	B
Y_j	B	D	C	A	B	A	

$C[]$

$j \backslash i$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1	1	1	2	2
3	0	1	1	2	2	2	2
4	0	1	1	2	2	3	3
5	0	1	2				
6	0						
7	0						

$rec[]$

$j \backslash i$	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L	L	U	LU	L
3	U	U	LU	L	U	U
4	LU	U	U	U	LU	L
5	U	LU				
6						
7						

算法实例



	1	2	3	4	5	6	7
X_i	A	B	C	B	D	A	B
Y_j	B	D	C	A	B	A	

$C[]$

$j \backslash i$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1	1	1	2	2
3	0	1	1	2	2	2	2
4	0	1	1	2	2	3	3
5	0	1	2	2			
6	0						
7	0						

$rec[]$

$j \backslash i$	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L	L	U	LU	L
3	U	U	LU	L	U	U
4	LU	U	U	U	LU	L
5	U	LU	U			
6						
7						

算法实例



	1	2	3	4	5	6	7
X_i	A	B	C	B	D	A	B
Y_j	B	D	C	A	B	A	

$C[]$

$j \backslash i$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1	1	1	2	2
3	0	1	1	2	2	2	2
4	0	1	1	2	2	3	3
5	0	1	2	2	2		
6	0						
7	0						

$rec[]$

$j \backslash i$	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L	L	U	LU	L
3	U	U	LU	L	U	U
4	LU	U	U	U	LU	L
5	U	LU	U	U		
6						
7						

算法实例



	1	2	3	4	5	6	7
X_i	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
Y_j	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>C</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>A</i>	

$C[]$

$j \backslash i$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1	1	1	2	2
3	0	1	1	2	2	2	2
4	0	1	1	2	2	3	3
5	0	1	2	2	2	3	
6	0						
7	0						

$rec[]$

$j \backslash i$	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L	L	U	LU	L
3	U	U	LU	L	U	U
4	LU	U	U	U	LU	L
5	U	LU	U	U	U	
6						
7						

算法实例



	1	2	3	4	5	6	7
X_i	A	B	C	B	D	A	B
Y_j	B	D	C	A	B	A	

$C[]$

$j \backslash i$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1	1	1	2	2
3	0	1	1	2	2	2	2
4	0	1	1	2	2	3	3
5	0	1	2	2	2	3	3
6	0						
7	0						

$rec[]$

$j \backslash i$	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L	L	U	LU	L
3	U	U	LU	L	U	U
4	LU	U	U	U	LU	L
5	U	LU	U	U	U	U
6						
7						

算法实例



	1	2	3	4	5	6	7
X_i	A	B	C	B	D	A	B
Y_j	B	D	C	A	B	A	

$C[]$

$j \backslash i$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1	1	1	2	2
3	0	1	1	2	2	2	2
4	0	1	1	2	2	3	3
5	0	1	2	2	2	3	3
6	0	1					
7	0						

$rec[]$

$j \backslash i$	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L	L	U	LU	L
3	U	U	LU	L	U	U
4	LU	U	U	U	LU	L
5	U	LU	U	U	U	U
6	U					
7						

算法实例



	1	2	3	4	5	6	7
X_i	A	B	C	B	D	A	B
Y_j	B	D	C	A	B	A	

$C[]$

$j \backslash i$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1	1	1	2	2
3	0	1	1	2	2	2	2
4	0	1	1	2	2	3	3
5	0	1	2	2	2	3	3
6	0	1	2				
7	0						

$rec[]$

$j \backslash i$	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L	L	U	LU	L
3	U	U	LU	L	U	U
4	LU	U	U	U	LU	L
5	U	LU	U	U	U	U
6	U	U				
7						

算法实例



	1	2	3	4	5	6	7
X_i	A	B	C	B	D	A	B
Y_j	B	D	C	A	B	A	

$C[]$

$j \backslash i$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1	1	1	2	2
3	0	1	1	2	2	2	2
4	0	1	1	2	2	3	3
5	0	1	2	2	2	3	3
6	0	1	2	2			
7	0						

$rec[]$

$j \backslash i$	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L	L	U	LU	L
3	U	U	LU	L	U	U
4	LU	U	U	U	LU	L
5	U	LU	U	U	U	U
6	U	U	U			
7						

算法实例



	1	2	3	4	5	6	7
X_i	A	B	C	B	D	A	B
Y_j	B	D	C	A	B	A	

$C[]$

$j \backslash i$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1	1	1	2	2
3	0	1	1	2	2	2	2
4	0	1	1	2	2	3	3
5	0	1	2	2	2	3	3
6	0	1	2	2	3		
7	0						

$rec[]$

$j \backslash i$	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L	L	U	LU	L
3	U	U	LU	L	U	U
4	LU	U	U	U	LU	L
5	U	LU	U	U	U	U
6	U	U	U	LU		
7						

算法实例



	1	2	3	4	5	6	7
X_i	A	B	C	B	D	A	B
Y_j	B	D	C	A	B	A	

$C[]$

$j \backslash i$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1	1	1	2	2
3	0	1	1	2	2	2	2
4	0	1	1	2	2	3	3
5	0	1	2	2	2	3	3
6	0	1	2	2	3	3	
7	0						

$rec[]$

$j \backslash i$	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L	L	U	LU	L
3	U	U	LU	L	U	U
4	LU	U	U	U	LU	L
5	U	LU	U	U	U	U
6	U	U	U	LU	U	
7						

算法实例



	1	2	3	4	5	6	7
X_i	A	B	C	B	D	A	B
Y_j	B	D	C	A	B	A	

$C[]$

$j \backslash i$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1	1	1	2	2
3	0	1	1	2	2	2	2
4	0	1	1	2	2	3	3
5	0	1	2	2	2	3	3
6	0	1	2	2	3	3	4
7	0						

$rec[]$

$j \backslash i$	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L	L	U	LU	L
3	U	U	LU	L	U	U
4	LU	U	U	U	LU	L
5	U	LU	U	U	U	U
6	U	U	U	LU	U	LU
7						

算法实例



	1	2	3	4	5	6	7
X_i	A	B	C	B	D	A	B
Y_j	B	D	C	A	B	A	

$C[]$

$j \backslash i$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1	1	1	2	2
3	0	1	1	2	2	2	2
4	0	1	1	2	2	3	3
5	0	1	2	2	2	3	3
6	0	1	2	2	3	3	4
7	0	1					

$rec[]$

$j \backslash i$	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L	L	U	LU	L
3	U	U	LU	L	U	U
4	LU	U	U	U	LU	L
5	U	LU	U	U	U	U
6	U	U	U	LU	U	LU
7	LU					

算法实例



	1	2	3	4	5	6	7
X_i	A	B	C	B	D	A	B
Y_j	B	D	C	A	B	A	

$C[]$

$j \backslash i$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1	1	1	2	2
3	0	1	1	2	2	2	2
4	0	1	1	2	2	3	3
5	0	1	2	2	2	3	3
6	0	1	2	2	3	3	4
7	0	1	2				

$rec[]$

$j \backslash i$	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L	L	U	LU	L
3	U	U	LU	L	U	U
4	LU	U	U	U	LU	L
5	U	LU	U	U	U	U
6	U	U	U	LU	U	LU
7	LU	U				

算法实例



	1	2	3	4	5	6	7
X_i	A	B	C	B	D	A	B
Y_j	B	D	C	A	B	A	

$C[]$

$j \backslash i$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1	1	1	2	2
3	0	1	1	2	2	2	2
4	0	1	1	2	2	3	3
5	0	1	2	2	2	3	3
6	0	1	2	2	3	3	4
7	0	1	2	2			

$rec[]$

$j \backslash i$	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L	L	U	LU	L
3	U	U	LU	L	U	U
4	LU	U	U	U	LU	L
5	U	LU	U	U	U	U
6	U	U	U	LU	U	LU
7	LU	U	U			

算法实例



	1	2	3	4	5	6	7
X_i	A	B	C	B	D	A	B
Y_j	B	D	C	A	B	A	

$C[]$

$j \backslash i$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1	1	1	2	2
3	0	1	1	2	2	2	2
4	0	1	1	2	2	3	3
5	0	1	2	2	2	3	3
6	0	1	2	2	3	3	4
7	0	1	2	2	3		

$rec[]$

$j \backslash i$	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L	L	U	LU	L
3	U	U	LU	L	U	U
4	LU	U	U	U	LU	L
5	U	LU	U	U	U	U
6	U	U	U	LU	U	LU
7	LU	U	U	U		

算法实例



	1	2	3	4	5	6	7
X_i	A	B	C	B	D	A	B
Y_j	B	D	C	A	B	A	

$C[]$

$j \backslash i$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1	1	1	2	2
3	0	1	1	2	2	2	2
4	0	1	1	2	2	3	3
5	0	1	2	2	2	3	3
6	0	1	2	2	3	3	4
7	0	1	2	2	3	4	

$rec[]$

$j \backslash i$	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L	L	U	LU	L
3	U	U	LU	L	U	U
4	LU	U	U	U	LU	L
5	U	LU	U	U	U	U
6	U	U	U	LU	U	LU
7	LU	U	U	U	LU	

算法实例



	1	2	3	4	5	6	7
X_i	A	B	C	B	D	A	B
Y_j	B	D	C	A	B	A	

$C[]$

$j \backslash i$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1	1	1	2	2
3	0	1	1	2	2	2	2
4	0	1	1	2	2	3	3
5	0	1	2	2	2	3	3
6	0	1	2	2	3	3	4
7	0	1	2	2	3	4	4

$rec[]$

$j \backslash i$	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L	L	U	LU	L
3	U	U	LU	L	U	U
4	LU	U	U	U	LU	L
5	U	LU	U	U	U	U
6	U	U	U	LU	U	LU
7	LU	U	U	U	LU	U

算法实例



	1	2	3	4	5	6	7
X_i	A	B	C	B	D	A	B
Y_j	B	D	C	A	B	A	

$C[]$

$j \backslash i$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1	1	1	2	2
3	0	1	1	2	2	2	2
4	0	1	1	2	2	3	3
5	0	1	2	2	2	3	3
6	0	1	2	2	3	3	4
7	0	1	2	2	3	4	4

$rec[]$

$j \backslash i$	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L	L	U	LU	L
3	U	U	LU	L	U	U
4	LU	U	U	U	LU	L
5	U	LU	U	U	U	U
6	U	U	U	LU	U	LU
7	U	U	U	U	LU	U

最长公共子序列的长度

算法实例



	1	2	3	4	5	6	7
X_i	A	B	C	B	D	A	B
Y_j	B	D	C	A	B	A	

--	--	--	--

$C[]$

$j \backslash i$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1	1	1	2	2
3	0	1	1	2	2	2	2
4	0	1	1	2	2	3	3
5	0	1	2	2	2	3	3
6	0	1	2	2	3	3	4
7	0	1	2	2	3	4	4

$rec[]$

$j \backslash i$	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L	L	U	LU	L
3	U	U	LU	L	U	U
4	LU	U	U	U	LU	L
5	U	LU	U	U	U	U
6	U	U	U	LU	U	LU
7	LU	U	U	U	LU	U

算法实例



	1	2	3	4	5	6	7
X_i	A	B	C	B	D	A	B
Y_j	B	D	C	A	B	A	

			A
--	--	--	---

$C[]$

$j \backslash i$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1	1	1	2	2
3	0	1	1	2	2	2	2
4	0	1	1	2	2	3	3
5	0	1	2	2	2	3	3
6	0	1	2	2	3	3	4
7	0	1	2	2	3	4	4

$rec[]$

$j \backslash i$	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L	L	U	LU	L
3	U	U	LU	L	U	U
4	LU	U	U	U	LU	L
5	U	LU	U	U	U	U
6	U	U	U	LU	U	LU
7	LU	U	U	U	LU	U

算法实例



	1	2	3	4	5	6	7
X_i	A	B	C	B	D	A	B
Y_j	B	D	C	A	B	A	

			A
--	--	--	---

$C[]$

$j \backslash i$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1	1	1	2	2
3	0	1	1	2	2	2	2
4	0	1	1	2	2	3	3
5	0	1	2	2	2	3	3
6	0	1	2	2	3	3	4
7	0	1	2	2	3	4	4

$rec[]$

$j \backslash i$	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L	L	U	LU	L
3	U	U	LU	L	U	U
4	LU	U	U	U	LU	L
5	U	LU	U	U	U	U
6	U	U	U	LU	U	LU
7	LU	U	U	U	LU	U

算法实例



	1	2	3	4	5	6	7
X_i	A	B	C	B	D	A	B
Y_j	B	D	C	A	B	A	

		B	A
--	--	---	---

$C[]$

$j \backslash i$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1	1	1	2	2
3	0	1	1	2	2	2	2
4	0	1	1	2	2	3	3
5	0	1	2	2	2	3	3
6	0	1	2	2	3	3	4
7	0	1	2	2	3	4	4

$rec[]$

$j \backslash i$	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L	L	U	LU	L
3	U	U	LU	L	U	U
4	LU	U	U	U	LU	L
5	U	LU	U	U	U	U
6	U	U	U	LU	U	LU
7	LU	U	U	U	LU	U

算法实例



	1	2	3	4	5	6	7
X_i	A	B	C	B	D	A	B
Y_j	B	D	C	A	B	A	

		B	A
--	--	---	---

$C[]$

$j \backslash i$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1	1	1	2	2
3	0	1	1	2	2	2	2
4	0	1	1	2	2	3	3
5	0	1	2	2	2	3	3
6	0	1	2	2	3	3	4
7	0	1	2	2	3	4	4

$rec[]$

$j \backslash i$	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L	L	U	LU	L
3	U	U	LU	L	U	U
4	LU	U	U	U	LU	L
5	U	LU	U	U	U	U
6	U	U	U	LU	U	LU
7	LU	U	U	U	LU	U

算法实例



	1	2	3	4	5	6	7
X_i	A	B	C	B	D	A	B
Y_j	B	D	C	A	B	A	

	C	B	A
--	---	---	---

$C[]$

$j \backslash i$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1	1	1	2	2
3	0	1	1	2	2	2	2
4	0	1	1	2	2	3	3
5	0	1	2	2	2	3	3
6	0	1	2	2	3	3	4
7	0	1	2	2	3	4	4

$rec[]$

$j \backslash i$	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L	L	U	LU	L
3	U	U	LU	L	U	U
4	LU	U	U	U	LU	L
5	U	LU	U	U	U	U
6	U	U	U	LU	U	LU
7	LU	U	U	U	LU	U

算法实例



	1	2	3	4	5	6	7
X_i	A	B	C	B	D	A	B
Y_j	B	D	C	A	B	A	

	C	B	A
--	---	---	---

$C[]$

$j \backslash i$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1	1	1	2	2
3	0	1	1	2	2	2	2
4	0	1	1	2	2	3	3
5	0	1	2	2	2	3	3
6	0	1	2	2	3	3	4
7	0	1	2	2	3	4	4

$rec[]$

$j \backslash i$	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L	L	U	LU	L
3	U	U	LU	L	U	U
4	LU	U	U	U	LU	L
5	U	LU	U	U	U	U
6	U	U	U	LU	U	LU
7	LU	U	U	U	LU	U

算法实例



	1	2	3	4	5	6	7
X_i	A	B	C	B	D	A	B
Y_j	B	D	C	A	B	A	

B	C	B	A
---	---	---	---

$C[]$

$j \backslash i$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1	1	1	2	2
3	0	1	1	2	2	2	2
4	0	1	1	2	2	3	3
5	0	1	2	2	2	3	3
6	0	1	2	2	3	3	4
7	0	1	2	2	3	4	4

$rec[]$

$j \backslash i$	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L	L	U	LU	L
3	U	U	LU	L	U	U
4	LU	U	U	U	LU	L
5	U	LU	U	U	U	U
6	U	U	U	LU	U	LU
7	LU	U	U	U	LU	U

算法实例



	1	2	3	4	5	6	7
X_i	A	B	C	B	D	A	B
Y_j	B	D	C	A	B	A	

B	C	B	A
---	---	---	---

最长公共子序列

$C[]$

$j \backslash i$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
2	0	1	1	1	1	2	2
3	0	1	1	2	2	2	2
4	0	1	1	2	2	3	3
5	0	1	2	2	2	3	3
6	0	1	2	2	3	3	4
7	0	1	2	2	3	4	4

$rec[]$

$j \backslash i$	1	2	3	4	5	6
1	U	U	U	LU	L	LU
2	LU	L	L	U	LU	L
3	U	U	LU	L	U	U
4	LU	U	U	U	LU	L
5	U	LU	U	U	U	U
6	U	U	U	LU	U	LU
7	LU	U	U	U	LU	U

- Longest-Common-Subsequence(X, Y)

输入: 两个序列 X, Y

输出: X 和 Y 的最长公共子序列

$n \leftarrow \text{length}(X)$

$m \leftarrow \text{length}(Y)$

//初始化

新建二维数组 $C[0..n, 0..m]$ 和 $rec[0..n, 0..m]$

for $i \leftarrow 0$ to n do

$C[i, 0] \leftarrow 0$

end

for $j \leftarrow 0$ to m do

$C[0, j] \leftarrow 0$

end

序列长度

- Longest-Common-Subsequence(X, Y)

输入: 两个序列 X, Y

输出: X 和 Y 的最长公共子序列

$n \leftarrow \text{length}(X)$

$m \leftarrow \text{length}(Y)$

//初始化

新建二维数组 $C[0..n, 0..m]$ 和 $rec[0..n, 0..m]$

for $i \leftarrow 0$ to n do

$C[i, 0] \leftarrow 0$

end

for $j \leftarrow 0$ to m do

$C[0, j] \leftarrow 0$

end

初始化

- Longest-Common-Subsequence(X, Y)

//动态规划

```
for  $i \leftarrow 1$  to  $n$  do
  for  $j \leftarrow 1$  to  $m$  do
    if  $X_i = Y_j$  then
       $C[i, j] \leftarrow C[i - 1, j - 1] + 1$ 
       $rec[i, j] \leftarrow "LU"$ 
    end
    else if  $C[i - 1, j] \geq C[i, j - 1]$  then
       $C[i, j] \leftarrow C[i - 1, j]$ 
       $rec[i, j] \leftarrow "U"$ 
    end
    else
       $C[i, j] \leftarrow C[i, j - 1]$ 
       $rec[i, j] \leftarrow "L"$ 
    end
  end
end
return  $C, rec$ 
```

依次计算子问题

- Longest-Common-Subsequence(X, Y)

//动态规划

for $i \leftarrow 1$ to n do

for $j \leftarrow 1$ to m do

if $X_i = Y_j$ then

$C[i, j] \leftarrow C[i - 1, j - 1] + 1$

$rec[i, j] \leftarrow "LU"$

end

else if $C[i - 1, j] \geq C[i, j - 1]$ then

$C[i, j] \leftarrow C[i - 1, j]$

$rec[i, j] \leftarrow "U"$

end

else

$C[i, j] \leftarrow C[i, j - 1]$

$rec[i, j] \leftarrow "L"$

end

end

end

return C, rec

末尾相等

- Longest-Common-Subsequence(X, Y)

//动态规划

for $i \leftarrow 1$ to n do

 for $j \leftarrow 1$ to m do

 if $X_i = Y_j$ then

$C[i, j] \leftarrow C[i - 1, j - 1] + 1$

$rec[i, j] \leftarrow "LU"$

 end

 else if $C[i - 1, j] \geq C[i, j - 1]$ then

$C[i, j] \leftarrow C[i - 1, j]$

$rec[i, j] \leftarrow "U"$

 end

 else

$C[i, j] \leftarrow C[i, j - 1]$

$rec[i, j] \leftarrow "L"$

 end

 end

end

return C, rec

记录长度和决策

- Longest-Common-Subsequence(X, Y)

//动态规划

```
for  $i \leftarrow 1$  to  $n$  do
  for  $j \leftarrow 1$  to  $m$  do
    if  $X_i = Y_j$  then
       $C[i, j] \leftarrow C[i - 1, j - 1] + 1$ 
       $rec[i, j] \leftarrow "LU"$ 
    end
    else if  $C[i - 1, j] \geq C[i, j - 1]$  then
       $C[i, j] \leftarrow C[i - 1, j]$ 
       $rec[i, j] \leftarrow "U"$ 
    end
    else
       $C[i, j] \leftarrow C[i, j - 1]$ 
       $rec[i, j] \leftarrow "L"$ 
    end
  end
end
return  $C, rec$ 
```

末尾不等

- **Print-LCS(rec, X, i, j)**

输入: 追踪数组 rec , 序列 X , 当前位置 i 和 j

输出: $X[1..i]$ 和 $Y[1..j]$ 的最长公共子序列

if $i = 0$ or $j = 0$ then

 | return NULL

end

if $rec[i, j] = \text{"LU"}$ then

 | Print-LCS($rec, X, i - 1, j - 1$)

 | print x_i

end

else if $rec[i, j] = \text{"U"}$ then

 | Print-LCS($rec, X, i - 1, j$)

end

else

 | Print-LCS($rec, X, i, j - 1$)

end

倒序追踪方案

- Print-LCS(rec, X, i, j)

输入: 追踪数组 rec , 序列 X , 当前位置 i 和 j

输出: $X[1..i]$ 和 $Y[1..j]$ 的最长公共子序列

```
if  $i = 0$  or  $j = 0$  then  
| return NULL  
end
```

递归终止: 序列长度为0

```
if  $rec[i, j] = \text{"LU"}$  then  
| Print-LCS( $rec, X, i - 1, j - 1$ )  
| print  $x_i$   
end
```

```
else if  $rec[i, j] = \text{"U"}$  then  
| Print-LCS( $rec, X, i - 1, j$ )  
end
```

```
else  
| Print-LCS( $rec, X, i, j - 1$ )  
end
```

- Print-LCS(rec, X, i, j)

输入: 追踪数组 rec , 序列 X , 当前位置 i 和 j

输出: $X[1..i]$ 和 $Y[1..j]$ 的最长公共子序列

if $i = 0$ or $j = 0$ then

| return NULL

end

if $rec[i, j] = \text{"LU"}$ then

| Print-LCS($rec, X, i - 1, j - 1$)

| print x_i

end

else if $rec[i, j] = \text{"U"}$ then

| Print-LCS($rec, X, i - 1, j$)

end

else

| Print-LCS($rec, X, i, j - 1$)

end

追踪方案: 末尾相等

- **Print-LCS(rec, X, i, j)**

输入: 追踪数组 rec , 序列 X , 当前位置 i 和 j

输出: $X[1..i]$ 和 $Y[1..j]$ 的最长公共子序列

if $i = 0$ or $j = 0$ then

 | return NULL

end

if $rec[i, j] = \text{"LU"}$ then

 | Print-LCS($rec, X, i - 1, j - 1$)

 | print x_i

end

else if $rec[i, j] = \text{"U"}$ then

 | Print-LCS($rec, X, i - 1, j$)

end

else

 | Print-LCS($rec, X, i, j - 1$)

end

追踪方案: 末尾不等

- Longest-Common-Subsequence(X, Y)

//动态规划

```
for  $i \leftarrow 1$  to  $n$  do
  for  $j \leftarrow 1$  to  $m$  do
    if  $X_i = Y_j$  then
       $C[i, j] \leftarrow C[i - 1, j - 1] + 1$ 
       $rec[i, j] \leftarrow "LU"$ 
    end
    else if  $C[i - 1, j] \geq C[i, j - 1]$  then
       $C[i, j] \leftarrow C[i - 1, j]$ 
       $rec[i, j] \leftarrow "U"$ 
    end
    else
       $C[i, j] \leftarrow C[i, j - 1]$ 
       $rec[i, j] \leftarrow "L"$ 
    end
  end
end
return  $C, rec$ 
```

时间复杂度: $O(n \cdot m)$

远优于枚举法。