Logic mệnh đề

Mệnh đề là gì?

Mỗi câu phát biểu là đúng hay là sai được gọi là một mệnh đề.

(Definition proposition: Any statement that is either true or false is called a proposition)

- Ký hiệu: P, Q, và R.

Mệnh đề phức hợp.

- Định nghĩa :

  Mệnh đề chỉ có một giá trị đơn (luôn đúng hoặc sai) được gọi là mệnh đề nguyên từ (atomic proposition). Các mệnh đề không phải là mệnh đề nguyên từ được gọi là mệng đề phức hợp (compound propositions). Thông thường, tất cả mệnh đề phức hợp là mệnh đề liên kết (có chứa phép tính mệnh đề).

Các phép toán mệnh đề

<u>Bao gồm</u> :

- Phép phủ định ($\neg$)
- Phép hội($\wedge$)
- Phép tuyển ($\vee$)
- Phép XOR ($\oplus$)
- Phép kéo theo($\rightarrow$)
- Phép tương đương($\leftrightarrow$)

Phép phủ định (NEGATION)

Cho P là một mệnh đề, câu "không phải là P" là một mệnh đề khác được gọi là phủ định của mệnh đề P. Kí hiệu : ¬ P (*P*).

- Ví dụ : $P = " 2 > 0 "$

  $\neg P = " 2 \leq 0 "$

- Bảng chân trị (truth table)

p	¬p
T	F
F	T

- **Qui tắc**: Nếu P có giá trị là T thì phủ định P có giá trị là F.

Phép hội (CONJUNCTION)

Cho hai mệnh đề P, Q. Câu xác định "P và Q" là một mệnh đề mới được gọi là hội của 2 mệnh đề P và Q.

- Kí hiệu P $\wedge$ Q.

- **Qui tắc** : Hội của 2 mệnh đề **chỉ đúng** khi cả hai mệnh đề là đúng. Các trường hợp còn lại là sai.

- Bảng chân trị

P	Q	P $\wedge$ Q
Đ	Đ	Đ
Đ	S	S
S	Đ	S
S	S	S

Phép tuyển (DISJUNCTION)

- Cho hai mệnh đề P, Q. Câu xác định "P hay (hoặc) Q" là một mệnh đề mới được gọi là tuyển của 2 mệnh đề P và Q. -- Kí hiệu $P \vee Q$.

- **Qui tắc** : Tuyển của 2 mệnh đề **chỉ sai** khi cả hai mệnh đề là sai. Các trường hợp còn lại là đúng.

- Bảng chân trị

P	Q	$P \vee Q$
Đ	Đ	Đ
Đ	S	Đ
S	Đ	Đ
S	S	S

Phép XOR

- Cho hai mệnh đề P và Q. Câu xác định "loại trừ P hoặc lọai trừ Q", nghĩa là "hoặc là P đúng hoặc Q đúng nhưng không đồng thời cả hai là đúng" là một mệnh đề mới được gọi là P xor Q.
- Kí hiệu P $\oplus$ Q.

Qui tắc : Tuyển của 2 mệnh đề **chỉ sai** khi cả hai mệnh đề là sai. Các trường hợp còn lại là đúng.

- Bảng chân trị

P	Q	P $\oplus$ Q
Đ	Đ	S
Đ	S	Đ
S	Đ	Đ
S	S	S

Phép kéo theo (IMPLICATION)

- Cho P và Q là hai mệnh đề. Câu "Nếu P thì Q" là một mệnh đề mới được gọi là mệnh đề kéo theo của hai mệnh đề P,Q.
- Kí hiệu P → Q. P được gọi là giả thiết và Q được gọi là kết luận.
- **Qui tắc** : mệnh đề kéo theo **chỉ sai** khi giả thiết đúng và kết luận sai. Các trường hợp khác là đúng.

- Bảng chân trị

P	Q	P ⟶ Q
Đ	Đ	Đ
Đ	S	S
S	Đ	Đ
S	S	Đ

Phép tương đương (BICONDITIONAL)

- Cho P và Q là hai mệnh đề. Câu "P nếu và chỉ nếu Q" là một mệnh đề mới được gọi là P tương đương Q. Kí hiệu $P \leftrightarrow Q$. Mệnh đề tương đương là đúng khi P và Q có cùng chân trị.

$$P \leftrightarrow Q = (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$$

- Đọc là : P nếu và chỉ nếu Q P là cần và đủ đối với Q Nếu P thì Q và ngược lại.

Biểu thức mệnh đề (LOGICAL CONNECTIVES)

- Cho P, Q, R,... là các mệnh đề. Nếu các mệnh đề này liên kết với nhau bằng các phép toán thì ta được một biểu thức mệnh đề.
- Chú ý :

. *Một mệnh đề cũng là một biểu thức mệnh đề*

. *Nếu P là một biểu thức mệnh đề thì ¬P cũng là biểu thức mệnh đề*

- Chân trị của biểu thức mệnh đề là kết quả nhận được từ sự kết hợp giữa các phép toán và chân trị của các biến mệnh đề.

Biểu thức mệnh đề (LOGICAL CONNECTIVES)

Ví dụ : Tìm chân trị của biểu thức mệnh đề $\neg P \vee (Q \wedge R)$

P	¬ P	Q	R	Q ∧ R	¬ P ∨(Q ∧ R)
T	F	T	T	T	T
T	F	T	F	F	F
T	F	F	T	F	F
T	F	F	F	F	F
F	T	T	T	T	T
F	T	T	F	F	T
F	T	F	T	F	T
F	T	F	F	F	T

Biểu thức mệnh đề (LOGICAL CONNECTIVES)

Do biểu thức mệnh đề là sự liên kết của nhiều mệnh đề bằng các phép toán nên chúng ta có thể phân tích để biểu diễn các biểu thức mệnh đề này bằng một cây mệnh đề.

Ví dụ : Xét câu phát biểu sau :

" Nếu Michelle thắng trong kỳ thi Olympic, mọi người sẽ khâm phục cô ấy, và cô ta sẽ trở nên giàu có. Nhưng, nếu cô ta không thắng thì cô ta sẽ mất tất cả."

Đây là một biểu thức mệnh đề và phép toán chính là phép hội. Có thể viết lại như sau :

"Nếu Michelle thắng trong kỳ thi Olympic, mọi người sẽ khâm phục cô ấy, và cô ta sẽ trở nên giàu có.Nhưng, nếu cô ta không thắng thì cô ta sẽ mất tất cả. "

Biểu thức mệnh đề (LOGICAL CONNECTIVES)

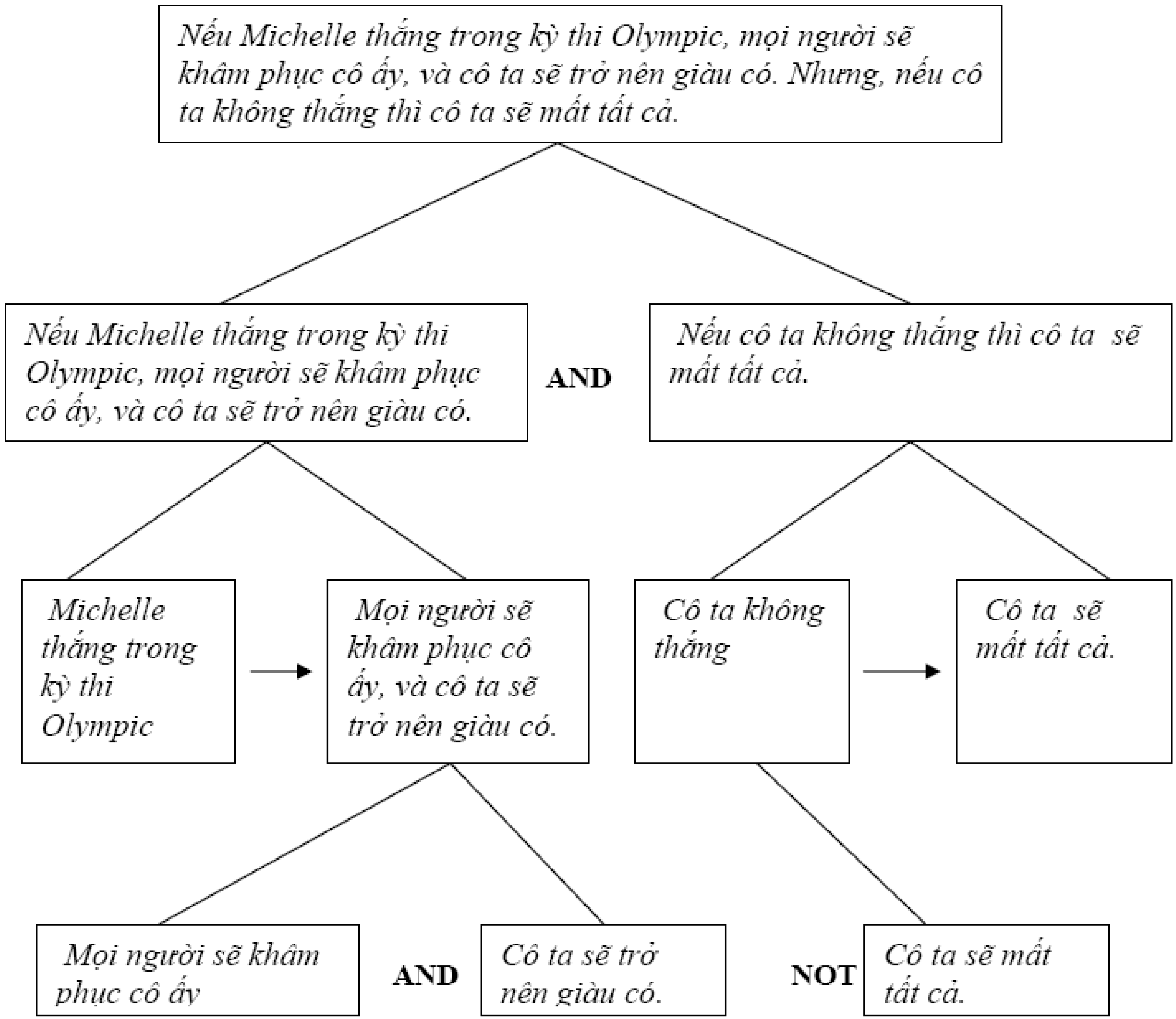
Cả hai mệnh đề chính trong biểu thức mệnh đề này là mệnh đề phức hợp. Có thể định nghĩa các biến mệnh đề như sau:

P: *Michelle thắng trong kỳ thi Olympic*
Q: *mọi người sẽ khâm phục cô ấy*
R: *cô ta sẽ trở nên giàu có*
S: *cô ta sẽ mất tất cả*

Biểu diễn câu phát biểu trên bằng các mệnh đề và các phép toán, ta có biểu thức mệnh đề sau :

$$(P \rightarrow (Q \wedge R)) \wedge (\neg P \rightarrow S)$$

Biểu diễn câu phát biểu trên thành một cây ngữ nghĩa như sau



Các thuật ngữ chuyên ngành (SOME TERMINOLOGY)

- Định nghĩa Hằng đúng (Tautologie):

Một hằng đúng là một mệnh đề luôn có chân trị là đúng.

Một hằng đúng cũng là một biểu thức mệnh đề luôn có chân trị là đúng bất chấp sự lựa chọn chân trị của biến mệnh đề.

- Ví dụ : xét chân trị của biểu thức mệnh đề $\neg P \vee P$

P	$\neg P$	$\neg P \vee P$
F	T	T
T	F	T

Vậy $\neg P \vee P$ là một hằng đúng.

Các thuật ngữ chuyên ngành (SOME TERMINOLOGY)

- Định nghĩa Hằng sai (Contradiction):

Một hằng sai là một mệnh đề luôn có chân trị là sai.

Một hằng sai cũng là một biểu thức mệnh đề luôn có chân trị là sai bất chấp sự lựa chọn chân trị của biến mệnh đề.

- Ví dụ : xét chân trị của biểu thức mệnh đề $\neg P \land P$

P	$\neg P$	$\neg P \land P$
F	T	F
T	F	F

Quine's Method

$P \rightarrow Q \wedge P$

P=true

P=false

$True \rightarrow Q \wedge true$

$false \rightarrow Q \wedge false$

$True \rightarrow Q$

true

Q

Q=true

Q=false

True

false

Hàm sự thật (Truth function)

- Là 1 hàm mà các đối số của nó chỉ có thể nhận giá trị hoặc true hoặc false
- Bất kỳ 1 wff nào cũng đều là 1 hàm truth
- Ví dụ: $g(P,Q) = P \wedge Q$
- Mỗi hàm truth có phải là 1 wff?

Hàm sự thật (Truth function)

- <u>Ví dụ:</u> cho 1 hàm truth f(P,Q), hàm có giá trị true khi P và Q có giá trị ngược nhau. Hãy tìm xem có 1 wff nào có cùng bảng chân trị với hàm f?

P	Q	f(P,Q)	wff
T	T	F	
T	F	T	Tạo $P \wedge \neg Q$
F	T	T	Tạo $\neg P \wedge Q$
F	F	F	

- Ứng với mỗi hàng trong bảng mà hàm f có giá trị true, ta tạo ra 1wff.
- Mỗi wff là phép hội của các ký tự đối số hoặc phép phủ định của các ký tự này theo 2 quy tắc sau:
  - Nếu P là true thì đặt P vào phép hội (conjunction)
  - Nếu P là false thì đặt $\neg$P vào phép hội

P	Q	f(P,Q)	$P \wedge \neg Q$	$\neg P \wedge Q$
T	T	F	F	F
T	F	T	T	F
F	T	T	F	T
F	F	F	F	F

Bảng chân trị của $P \wedge \neg Q$ và $\neg P \wedge Q$ có đúng 1 hàng có giá trị true, và các giá trị true này xảy ra cùng hàng với các giá trị true của hàm f

➔ $f(P,Q) \equiv (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$

Mệnh đề hệ quả

- Định nghĩa : Cho F và G là 2 biểu thức mệnh đề. Người ta nói rằng G là mệnh đề hệ quả của F hay G được suy ra từ F nếu F → G là hằng đúng.
- Kí hiệu F |→ G
- Ví dụ : Cho F = (P → Q) ∧ (Q → R)

  G = P → R

  Xét xem G có là mệnh đề hệ quả của F không ?

P	Q	R	P→Q	Q→R	F	G	F→G
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F	T
T	F	T	F	T	F	T	T
T	F	F	F	T	F	F	T
F	T	T	T	T	T	T	T

Mệnh đề hệ quả

P	Q	R	P→Q	Q→R	F	G	F→G
F	T	F	T	F	F	T	T
F	F	T	T	T	T	T	T
F	F	F	T	T	T	T	T

- Vậy G là mệnh đề hệ quả của F
- Nhận xét : Nếu G là hệ quả của F thì khi F là đúng thì bắt bắt buộc G phải đúng.

Ngược lại, nếu G là đúng thì chưa có kết luận gì về chân trị của F.

Tương đương Logic (LOGICALLY EQUIVALENT)

- Vậy F và G là tương đương logic hay F=G.
- **Ví dụ 2**: Cho F = $P \rightarrow Q$

  G = $\neg P \vee Q$
- Xét xem hai mệnh đề trên là có tương đương logic không ?

P	Q	$P \rightarrow Q$	$\neg P$	$\neg P \vee Q$
T	T	T	F	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

Vậy F $\Leftrightarrow$ G hay $P \rightarrow Q = \neg (P \vee Q)$

Bảng các tương đương logic thường dùng

Equivalence	Name
$p \lor T \Leftrightarrow T$ $p \land F \Leftrightarrow F$	Domination laws : luật nuốt
$p \land T \Leftrightarrow p$ $p \lor F \Leftrightarrow p$	Identity laws : luật đồng nhất
$p \lor p \Leftrightarrow p$ $p \land p \Leftrightarrow p$	Idempotent laws : luật lũy đẳng
$\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$	Double negation law : luật phủ định kép
$p \lor \neg p \Leftrightarrow T$ $p \land \neg p \Leftrightarrow F$	Cancellation laws : luật xóa bỏ

Bảng các tương đương logic thường dùng

Equivalence	Name
$p \lor q \Leftrightarrow q \lor p$ $p \land q \Leftrightarrow q \land p$	Commutative laws : luật giao hoán
$(p \lor q) \lor r \Leftrightarrow p \lor (q \lor r)$ $(p \land q) \land r \Leftrightarrow p \land (q \land r)$	Associative laws : luật kết hợp
$p \lor (q \land r) \Leftrightarrow (p \lor q) \land (p \lor r)$ $p \land (q \lor r) \Leftrightarrow (p \land q) \lor (p \land r)$	Distributive laws : luật phân bố
$\neg(p \land q) \Leftrightarrow \neg p \lor \neg q$ $\neg(p \lor q) \Leftrightarrow \neg p \land \neg q$	De Morgan's laws : luật De Morgan
$(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \lor q)$	Implication : luật kéo theo

Ví dụ

- **Ví dụ 1** : Không lập bảng chân trị, sử dụng các tương đương logic để chứng minh rằng

  $(P \wedge Q) \rightarrow Q$ là hằng đúng.

- $((p \wedge q) \rightarrow q) \Leftrightarrow \neg(p \wedge q) \vee q$ ←Implication law

  $\Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q) \vee q$ ←De Morgan's law

  $\Leftrightarrow \neg p \vee (\neg q \vee q)$ ←Associative law

  $\Leftrightarrow \neg p \vee T$ ←Cancellation Law

  $\Leftrightarrow T$ ←Domination Law

Ví dụ

- **Ví dụ 2** : Chứng minh rằng

$$\neg (q \rightarrow p) \vee (p \wedge q) = q$$

$$(\neg(q \rightarrow p)) \vee (p \wedge q)$$

$$\Leftrightarrow (\neg(\neg q \vee p)) \vee (p \wedge q) \quad \downarrow \text{Implication law}$$

$$\Leftrightarrow (q \wedge \neg p) \vee (p \wedge q) \quad \leftarrow \text{Commutative law}$$

$$\Leftrightarrow (q \wedge \neg p) \vee (q \wedge p) \quad \leftarrow \text{Distributive law}$$

$$\Leftrightarrow q \wedge (\neg p \vee p) \quad \leftarrow \text{Cancellation law}$$

$$\Leftrightarrow q \wedge T \quad \leftarrow \text{Identity law}$$

$$\Leftrightarrow q$$

- Định lý: “ Mỗi hàm truth đều tương đương với 1 wff mệnh đề”
- Một vài định nghĩa:
  - Literal: là 1 ký tự mệnh đề hay phủ định của nó, như P,Q, $\neg$Q,..
  - Hội sơ cấp (fundamental conjunction) là 1 literal hoặc hội của 2 hay nhiều literal
    - Ví dụ: P $\wedge \neg$Q
  - Tuyển sơ cấp (fundamental disjunction) là 1 literal hoặc tuyển của 2 hay nhiêu literal
    - Ví dụ: P v $\neg$Q

Dạng chuẩn tắc tuyển (Disjunctive normal form -DNF)

- DNF hoặc là 1 hội sơ cấp hay tuyển của 2 hay nhiều hội sơ cấp
- Ví dụ: $P \vee (\neg P \wedge Q)$,

  $$(P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R)$$
- Những wff dùng để xây dựng hàm truth đều ở dạng DNF

Dạng chuẩn tắc tuyển
(Disjunctive normal form -DNF)

- Dạng chuẩn tuyển có dạng :

  $(P_1 \wedge \ldots \wedge P_n)_1 \vee \ldots \vee (Q_1 \wedge \ldots \wedge Q_m)_p$, với n, m, p $\geq$ 1.
- Rút gọn DNF: tìm 1 DNF đơn giản hơn tương đương với DNF đang xét.

- Ví dụ: $(P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge R)$

  $\equiv (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (Q \wedge P \wedge R) \vee (P \wedge R)$

  $\equiv (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (Q \wedge P \wedge R) \vee (P \wedge R)$

  $\equiv (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge R)$

Dạng chuẩn tắc tuyển (Disjunctive normal form -DNF)

- Mỗi wff đều tương đương với 1 DNF
- Cách xây dựng 1 DNF tương đương với 1 wff:
  - Xoá tất cả các phép kéo theo → bằng phép tương đương $A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$
  - Chuyển phép phủ định vào trong ngoặc bằng định luật De Morgan

$$\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$$

$$\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$$

  - Áp dụng phép phân phối tương đương để có DNF

Dạng chuẩn tắc tuyển (Disjunctive normal form -DNF)

- Ví dụ: Xây dựng DNF cho wff sau:

$$((P \land Q) \rightarrow R) \land S$$

$$((P \land Q) \rightarrow R) \land S \equiv (\neg(P \land Q) \lor R) \land S$$

$$\equiv (\neg P \lor \neg Q \lor R) \land S$$

$$\equiv (\neg P \land S) \lor (\neg Q \land S) \lor (R \land S)$$

Dạng chuẩn tắc tuyển (Disjunctive normal form -DNF)

- Giả sử 1 wff W có n ký tự mệnh đề phân biệt, DNF cho W được gọi là DNF đầy đủ (Full DNF) nếu mỗi hội sơ cấp đều có n literal, mỗi literal tương ứng với 1 ký tự của W.
- Ví dụ:
  - $(P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \rightarrow$ DNF đầy đủ
  - $P \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \rightarrow$ không phải là DNF đầy đủ
- Định lý: mỗi wff mà không phải là mệnh đề mâu thuẫn (contradiction) đều tương đương với 1 DNF đầy đủ

Dạng chuẩn tắc hội (Conjunctive Normal Form – CNF)

- CNF là 1 tuyển sơ cấp hay hội của 2 hay nhiều tuyển sơ cấp
- Ví dụ: $P \wedge (\neg P \vee Q)$,

  $(P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R)$
- Gỉa sử wff W có n ký tự mệnh đề phân biệt. CNF cho W được gọi là đầy đủ nếu mỗi tuyển sơ cấp có n literal, mỗi literal tương ứng với 1 ký tự của W
- Ví dụ:
  - $(P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R)$ → CNF đầy đủ
  - $P \wedge (\neg P \vee Q \vee R)$ → không phải là CNF đầy đủ

Dạng chuẩn tắc hội

(Conjunctive Normal Form – CNF)

- Dạng chuẩn CNF có dạng :

$(P_1 \vee \ldots \vee P_n)_1 \wedge \ldots \wedge (Q_1 \vee \ldots \vee Q_m)_p$, với n, m, p $\geq$ 1.

- Định lý:
  - Mỗi wff đều tương đương với 1 CNF
  - Mỗi wff mà không phải là 1 mệnh đề hằng đúng đều tương đương với 1 CNF đầy đủ

Ví dụ xây dựng DNF đầy đủ

- Cho 1 wff P→ Q. Tìm DNF đầy đủ.

Ví dụ xây dựng CNF đầy đủ

- Cho 1 wff P→ Q. Tìm CNF đầy đủ.

Hệ thống suy diễn hình thức (Formal Reasoning System)

- Để tìm giá trị cho 1 mệnh đề, có thể dùng bảng chân trị
- Nếu mệnh đề có nhiều hơn 3 biến, việc xây dựng bảng chân trị khá phức tạp
- Nếu dùng phép chứng minh tương đương thay cho bảng chân trị ?

→ Cần hệ thống suy diễn hình thức

Hệ thống suy diễn hình thức (Formal Reasoning System)

- Tiên đề (Axiom): là 1 wff được dùng làm cơ sở để suy diễn
- Hệ thống suy diễn hình thức cần:
  - Một tập hợp các wff (well-formed formulas- wff) để biểu diễn các phát biểu, định nghĩa có liên quan.
  - Một tập hợp các tiên đề
  - Một số luật (rule) giúp kết luận các sự việc.
- Luật suy diễn (inference rule) sẽ ánh xạ 1 hay nhiều wff, được gọi giả thiết (premise, hypothese hay antecedent) thành 1 wff duy nhất gọi là kết lụân (conclusion, consequent)

Mô hình suy diễn (Modus ponens – MP)

- MP là tên gọi hình thức cho dạng suy diễn khẳng định rất thông dụng và thường có dạng như sau:
  - **If P, then Q.**
  - **P.**
  - **Therefore, Q.**
- **Ví dụ: Xét 1 MP như sau:**
  - **If today is Tuesday, then I will go to work.**
  - **Today is Tuesday.**
  - **Therefore, I will go to work.**

Mô hình suy diễn (Modus ponens – MP)

- Nếu MP ánh xạ 2 wff A và A→ B thành 1 wff B, ký hiệu:

$$MP(A, A \rightarrow B) = B$$

- Nếu R là 1 luật suy diễn, và C được suy diễn từ P1,..,Pk bởi R, được ký hiệu:
  - R(P1,…Pk)=C
  - Hoặc $\dfrac{P1,\ldots,Pk}{\therefore C}$

$\therefore$ *Có nghĩa là therefore, thus, hence, so,..*

- Luật suy diễn R(P1,..,Pk)= C được luôn duy trì giá trị nếu wff sau là hằng đúng (tautology):

$$P1 \wedge \ldots \wedge Pk \rightarrow C$$

Modus tollens - MT

- MT là tên gọi hình thức cho phương pháp chứng minh gián tiếp hay chứng minh bằng phản đảo(contrapositive proof), và thường có dạng như sau:
  - If P, then Q.
  - Q is false.
  - Therefore, P is false.
- Ví dụ về 1 MT:
  - *Con người thì phải chết.*
  - *Lizzy không chết.*
  - *Vì vậy, Lizzy không phải là con người.*

Modus tollens - MT

- Ký hiệu của MT

$$\frac{A \rightarrow B,\ \neg B}{\neg A}$$

Một số luật suy diễn thông dụng

- Conjunction (Conj): $\dfrac{A, B}{\therefore\ A \wedge B}$

- Simplification(Simp) : $\dfrac{A \wedge B}{\therefore A}$

- Addition (Add): $\dfrac{A}{\therefore A \vee B}$

- Disjunctive Syllogism (DS) : $\dfrac{A \vee B,\ \neg A}{\therefore B}$

- Hypothetical Syllogism (HS): $\dfrac{A \rightarrow B,\ B \rightarrow C}{\therefore A \rightarrow C}$

Một số luật suy diễn thông dụng

	Quy Tắc	Hằng đúng	Tên Luật
Add	$\dfrac{P}{\therefore P \vee Q}$	**P→(P∨Q)**	**Cộng**
Simp	$\dfrac{P \wedge Q}{\therefore P}$	**(P∧Q)→P**	**Rút gọn**
MP	$\dfrac{\begin{array}{l}P\\ P \to Q\end{array}}{\therefore Q}$	**(P∧(P→Q))→Q**	**Modus Ponens**
MT	$\dfrac{\begin{array}{l}\neg Q\\ P \to Q\end{array}}{\therefore \neg P}$	**(¬Q∧(P→Q)) → ¬P**	**Modus Tollens**
HS	$\dfrac{\begin{array}{l}P \to Q\\ Q \to R\end{array}}{\therefore P \to R}$	**((P→Q)∧(Q→R)) → (P→R)**	**Tam đoạn luận giả định**
DS	$\dfrac{P \vee Q}{\therefore Q}$	**(P∨Q) → Q**	**Tam đoạn luận tuyển**

- Mỗi luật trên đều có thể kiểm chứng bằng cách chỉ ra:

  C→ D là tautology (hằng đúng)

  với C là giả thiết và D là kết luận

Chứng minh là gì?
(What is a proof?)

- Chứng minh là 1 chuỗi hữu hạn các wff mà mỗi wff hoặc là 1 tiên đề hoặc được suy diễn từ 1 wff trước đó. Wff cuối cùng trong chứng minh được gọi là định lý (theorem)
- Ví dụ: giả sử chuỗi các wff sau là 1 proof:

W1,..,Wn

Sao cho cuối cùng Wn = W

- Có 2 kỹ thuật để chứng minh:
  - Chứng minh có điều kiện (conditional proof)
  - Chứng minh gián tiếp (indirect proof)

Chứng minh theo điều kiện

- Hầu hết các phát biểu cần chứng minh đều có dạng điều kiện như sau:

$$A \wedge B \wedge C \rightarrow D$$

- Quy luật chứng minh có điều kiện (conditional proof rule –CP): giả sử cần chứng minh $A1 \wedge A2 \wedge .. \wedge An \rightarrow B$
  - Bắt đầu chứng minh bằng cách viết mỗi giả thiết A1, A2, …,An trên các dòng riêng với ký tự P trong cột suy diễn
  - Dùng các giả thiết như các tiên đề, và các luật chứng minh dẫn đến kết luận B

Chứng minh theo điều kiện

- Cấu trúc của phép chứng minh có điều kiện:

Proof	1. A	P
	2. B	P
	3. C	P
	. .	.
	. .	.
	k. D	….
	QED	1,2,3,k,CP

QED viết-tắt của tiếng La tinh quod erat demonstrandum) điều đã được chứng minh

Ví dụ chứng minh theo điều kiện

- Chứng minh phát biểu sau:

$$(A \vee B) \wedge (A \vee C) \wedge \neg A \rightarrow B \wedge C$$

Proof		
	1. $A \vee B$	P
	2. $A \vee C$	P
	3. $\neg A$	P
	4. B	1,3,DS
	5. C	2,3,DS
	6. $B \wedge C$	4,5,Conj
	QED	1,2,3,6,CP

Subproof

- Chứng minh theo điều kiện thường là 1 phần của 1 phép chứng minh khác, và được gọi là subproof.
- Để chỉ ra là subproof, các dòng của nó nên thụt vào

Ví dụ về subproof

- Chứng minh phát biểu sau:

  $$((A \vee B) \rightarrow (B \wedge C)) \rightarrow (B \rightarrow C) \vee D$$

Nhận xét??

Kết luận của wff trên lại chứa điều kiện thứ 2 $B \rightarrow C$

Ví dụ về subproof

Proof: 1.	$(A \vee B) \rightarrow (B \wedge C)$	P
2.	B	P Bắt đầu subproof của $B \rightarrow C$
3.	$A \vee B$	2,Add
4.	$B \wedge C$	1,3,MP
5.	C	4,Simp
6.	$B \rightarrow C$	2,5,Simp k/thúc subproof
7.	$(B \rightarrow C) \vee D$	6, Add
	QED	1,7,CP

Subproof

- Quy tắc quan trọng dành cho Subproof:
  - Những dòng thụt vào dành cho chứng minh Subproof không được dùng để suy diễn cho 1 số dòng nằm sau subproof.
  - Ngoại lệ là khi những dòng thụt vào này không phụ thuộc, hoặc trực tiếp hoặc gián tiếp, vào các giả thiết của subproof.

Đơn giản hóa trong chứng minh theo điều kiện

- Nếu W là 1 định lý (theorem), ta có thể dùng nó để chứng minh các định lý khác
  - Đặt W vào 1 dòng của phép chứng minh và xử lý nó như 1 tiên đề (axiom)

  Hoặc
  - Không để W tham gia vào chuỗi chứng minh nhưng vẫn sử dụng nó trong cột suy diễn (reason) cho 1 số dòng của phép chứng minh (xem ví dụ)

Ví dụ

- Chứng minh phát biểu sau:

$$\neg(A \wedge B) \wedge (B \vee C) \wedge (C \rightarrow D) \rightarrow (A \rightarrow D)$$

Ví dụ

Proof:

1.	$\neg(A \wedge B)$	P
2.	$(B \vee C)$	P
3.	$(C \rightarrow D)$	P
4.	$\neg A \vee \neg B$	1, T
5.	A	P
6.	$\neg B$	4,5,DS
7.	C	2,6,DS
8.	D	3,7,MP
9.	$A \rightarrow D$	5,8,CP
	QED	1,2,3,9,CP

Dòng 4 là OK vì ta đã đưa định lý vào cột reason

Đơn giản hóa trong chứng minh theo điều kiện

- Thay vì phải viết ra 1 hằng đúng (tautology) hay định lý (theorem) trong cột reason, ta có thể viết đơn giản biểu tượng T để ngầm chỉ hằng đúng hoặc định lý đã được dùng
- Một số chứng minh dễ dàng, nhưng không ít chứng minh rất khó, và có thể sai ngay lúc khởi đầu trước khi chứng minh được nó

Ví dụ

- Chứng minh wff sau:

$$A \wedge ((A \rightarrow B) \vee (C \wedge D)) \rightarrow (\neg B -> C)$$

<u>Proof:</u>

1.	A	P
2.	$(A \rightarrow B) \vee (C \wedge D)$	P
3.	$\neg B$	P
4.	$A \wedge \neg B$	1,3,Conj
5.	$\neg \neg A \wedge \neg B$	4,T
6.	$\neg(\neg A \vee B)$	5,T
7.	$\neg(A \rightarrow B)$	6,T
8.	$C \wedge D$	2,7,DS
9.	C	8, Simp
10.	$\neg B -> C$	3,9,CP
	QED	1,2,10,CP

Ví dụ

- Xét nhóm câu sau: “ The team wins or I am sad. If the team wins, then I go to a movie. If I am sad, then my dog barks. My dog is quiet. Therefore I go to a movie”
- Đặt ký hiệu cho các mệnh đề sau:
  - W: The team wins
  - S: I am sad
  - M: I go to a movie
  - B: My dog barks
- Tạo biểu tượng cho nhóm câu trên

$$(W \vee S) \wedge (W \rightarrow M) \wedge (S \rightarrow B) \wedge \neg B \rightarrow M$$

Hãy chứng minh wff trên là 1 định lý

Ví dụ

Proof

1.	$W \vee S$	P
2.	$W \rightarrow M$	P
3.	$S \rightarrow B$	P
4.	$\neg B$	P
5.	$\neg S$	3,4,MT
6.	W	1,5,DS
7.	M	2,6,MP
	QED	1,2,3,4,7,CP

Chứng minh gián tiếp
(Indirect proof)

- Giả sử cần chứng minh $A \rightarrow B$, nhưng không tìm ra cách nào để chứng minh nếu dùng phương pháp chứng minh theo điều kiện
- Cách 1 (contrapositive method): Hãy tìm cách chứng minh sự tương phản của $A \rightarrow B$

$$A \rightarrow B \equiv \neg B \rightarrow \neg A$$

Nghĩa là bắt đầu với $\neg B$ như 1 giả thiết (premise) , tìm cách chứng minh $\neg A$

Chứng minh gián tiếp (Indirect proof)

- Cách 2 (proof by contradiction): chứng minh bằng sự phản đảo

$$A \rightarrow B \equiv A \wedge \neg B \rightarrow \text{false}$$

Nghĩa là có thêm 2 giả thiết (premise) A và $\neg B$

- Nên áp dụng cách này khi:
  - Không có đủ thông tin từ các giả thiết được cho
  - Không biết cách nào để chứng minh

Quy tắc chứng minh gián tiếp (Indirect proof rule IP)

- Giả sử muốn chứng minh gián tiếp cho biểu thức điều kiện

$$A1 \wedge A2 \wedge \ldots \wedge An \rightarrow B$$

- Viết mỗi giả thiết (premise) A1, … An trên mỗi dòng riêng biệt với P trong cột suy luận (reason)
- Đặt wff $\neg B$ vào dòng kế tiếp và viết " P for IP" vào cột reason để chỉ $\neg B$ là giả thiết của chứng minh gián tiếp
- Sử dụng các giả thiết này để dẫn đến kết quả false

Cấu trúc của chứng minh IP

- Giả sử cần chứng minh $A \land B \land C \rightarrow D$

Proof:

1.	A	P
2.	B	P
3.	C	P
4.	$\neg$ D	P for IP
5.	…	
k.	False	….
	QED	1,2,3,4,k,IP

Ví dụ

- Hãy chứng minh bài toán xem phim bằng IP

$(W \vee S) \wedge (W \rightarrow M) \wedge (S \rightarrow B) \wedge \neg B \rightarrow M$

1.	$W \vee S$	P
2.	$W \rightarrow M$	P
3.	$S \rightarrow B$	P
4.	$\neg B$	P
5.	$\neg M$	P for IP
6.	$\neg W$	2,5,MT
7.	$\neg S$	3,4,MT
8.	$\neg W \wedge \neg S$	6,7,Conj
9.	$\neg (W \vee S)$	8,T
10.	$\neg (W \vee S) \wedge (W \vee S)$	1,9,Conj
11.	False	10,T
	QED	1-4,5,11,IP

Một số chú ý khi chứng minh

- Không sử dụng các giả thiết dư thừa không cần thiết

    Ví dụ: để chứng minh A→C. Bắt đầu với giả thiết A, giả sử thêm giả thiết phụ B, rồi sử dụng A và B để suy diễn C bằng chứng minh trực tiếp hay gián tiếp

    Kết quả là chứng minh $A \wedge B \rightarrow C$ thay vì chứng minh $A \rightarrow C$

Một số chú ý khi chứng minh

- Không áp dụng quy luật suy diễn vào biểu thức con
  - Quy luật suy diễn chỉ áp dụng cho 1 wff, không áp dụng cho các biểu thức con của wff
- <u>Ví dụ</u>: giả sử có 1 wff như sau:

$$A \wedge ((A \rightarrow B) \vee C) \rightarrow B$$

Rõ ràng wff không phải là tautology.

(khi A= true, B=false, C=true, wff false)

Hãy thử chứng minh wff trên là 1 định lý (theorem)

Một số chú ý khi chứng minh

1.	A	P
2.	$(A \rightarrow B) \vee C$	P
3.	$\sim A \vee (B \vee C)$	2,T
4.	$(B \vee C)$	1,3,DS
5.	B	1,2, MP (sai khi dùng MP cho biểu thức con)
	QED	1,2,3,CP