CHUYÊN ĐỀ 1: GIỚI HẠN – LIÊN TỤC – ĐẠO HÀM

Vấn đề 1: GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

CẦN NHỚ: *Để tính giới hạn của hàm số ta cần nhớ một số công thức sau*

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x^n}=0(n>0)$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin x}=1 \Rightarrow \lim_{u(x)\to0}\frac{\sin u(x)}{u(x)}=\lim_{u(x)\to0}\frac{u(x)}{\sin u(x)}=1$$

$$\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e\Rightarrow\lim_{u(x)\to0}(1+u(x))^{\frac{1}{u(x)}}=e$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e\Rightarrow\lim_{u(x)\to\infty}\left(1+\frac{1}{u(x)}\right)^{\frac{1}{u(x)}}=e$$

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x}{e^x-1}=1 \Rightarrow \lim_{u(x)\to0}\frac{e^{u(x)}-1}{u(x)}=\lim_{u(x)\to0}\frac{u(x)}{e^{u(x)}-1}=1$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x}{\ln(1+x)}=1 \Rightarrow \lim_{u(x)\to0}\frac{\ln(1+u(x))}{u(x)}=\lim_{u(x)\to0}\frac{u(x)}{\ln(1+u(x))}=1$$

Các hằng đẳng thức đáng nhớ

BÀI TẬP

Bài 1: Tính các giới hạn sau

a) $\lim_{x\to3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}$ b) $\lim_{x\to1}\frac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1}$ c) $\lim_{x\to1}\frac{x^m-1}{x^n-1}$

Bài 2: Tính các giới hạn sau

a) $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$ b) $\lim_{x\to1}\frac{x^3-\sqrt[3]{x-2}}{x-1}$ c) $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x-2}+\sqrt[3]{x^2-x+1}}{x^2-1}$

Bài 3: Tính các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x+7}-\sqrt{x+3}}{x^2-3x+2}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{8-x}}{x}$ c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[4]{2x-1}+\sqrt[5]{x-2}}{x-1}$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^3+x^2+3x+4}-\sqrt[3]{6x^2+13x+8}}{x^3}$

Bài 4: Tính các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-3x^2+4x-1}{x^4-5x^3+7x^2+x-9}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^5-x^3+4x-1}{5x^5+6x^3+x^2+x-9}$ c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-x^7-x^3+4x-1}{5x^3+4x^3+x^2+x-9}$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}}$ e) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{x^5+8x^3+1}}$

Bài 5: Tính các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$ c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x+\sqrt[3]{3x^2-x^3}\right)$

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$

Bài 6: Tính các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos ax}{x^2}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos ax+\sin ax}{1-\cos bx+\sin bx}$ c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\sin(\sin x))}{x}$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\cos x\right)}{\sin(\tan x)}$ e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$ f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$

Bài 7: Tính các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{4-3x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x^2\right)^{\cot an^2 x}$ c) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+3}{x^2-2}\right)^{x^2}$

Bài 8: Tính các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{bx}}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin 2x}-e^{\sin x}}{\sin x}$ c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x^2}\cos^2 x-1}{x^2}$

Bài 9: Tính các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos 3x)}{\ln(\cos 4x)}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left[\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)\right]}{\sin x}$ c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-2x^2}-\sqrt[3]{x^2+1}}{\ln(1+x^2)}$

Bài 10: Tính $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)$ biết

a) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}, x>1\\ -\dfrac{x}{2}, \quad x<1\end{cases}, x_o=1$ b) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{2}, & x\le 0\\ \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt[3]{x+1}-1}, & x>0\end{cases}, x_o=0$

Bài 11: Tìm a để $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ tồn tại, với $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-1}{x-1}, & x<1\\ ax+2, & x>1\end{cases}$

Vấn đề 2: TÍNH LIÊN TỤC CỦA HÀM SỐ

<u>**CẦN NHỚ:**</u> *Trong phần này ta phải nhớ các kiến thức cơ bản sau*

(**i**) *Cho hàm* $y=f(x)$ *xác định trên tập D,* $x_o\in D$*. Khi đó.*

f liên tục tại $x_o \Leftrightarrow \begin{cases}\exists \lim\limits_{x\to x_o} f(x)\\ \lim\limits_{x\to x_o} f(x)=f(x_o)\end{cases}$

f liên tục trên D $\Leftrightarrow$ *f liên tục tại mọi* $x\in D$

(**ii**) Các *hàm sơ cấp cơ bản liên tục trên tập xác định của nó.*

(**iii**) *Tổng, hiệu, tích, thương các hàm liên tục là liên tục trên tập xác định*

BÀI TẬP

Bài 1: Xét tính liên tục của hàm số sau tại điểm đã cho

a) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\sqrt{2x-3}}{2-x}, x\neq 2\\ 1, \quad x=2\end{cases}, x_o=2$

b) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin \pi x}{x-1}, x\neq 1\\ -\pi, \quad x=1\end{cases}, x_o=1$

c) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{|x|}, x\neq 0\\ 1, \quad x=0\end{cases}, x_o=0$

d) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x^3-x+1}{x+1}, x<-1\\ 4x+9, \quad x\geq -1\end{cases}, x_o=-1$

Bài 2: Xét tính liên tục của hàm số sau

a) $f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, x\neq 0\\ 1, \quad x=0\end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{4-x^2}{\sqrt{x+2}-2}, x>2\\ 2x-20, \quad x\leq 2\end{cases}$

Bài 3: Tìm *a* để hàm sau liên tục trên tập xác định

a) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt[3]{2x^2+9}+2x-9}{2x-6}, x\neq 3\\ a, \quad x=3\end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt[3]{3x+2}-2}{x-2}, x>2\\ ax+\dfrac{1}{4}, \quad x\leq 2\end{cases}$

Bài 4: Cho hàm $f(x)=x\cos\dfrac{1}{x}$. Tìm $f(0)$ để hàm số liên tục với mọi x

Bài 5: Tìm các điểm gián đoạn của các hàm sau

a) $f(x)=\dfrac{x}{\sin x}$

b) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x-2}{x^2-3x+2}, x\neq 1\\ -2, \quad x=1\end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases}x+1, \quad x\leq 1\\ \dfrac{1}{x^3-3x}, x>1\end{cases}$

<u>CHÚ Ý:</u> *Hàm f*(x) *liên tục trên đoạn* [a;b] và $f(a)f(b)<0$ *thì phương trình* $f(x)=0$ *luôn có nghiệm thuộc khoảng* (a;b).

Bài 5: Chứng minh các phương trình sau luôn có nghiệm

a) $\cos x+m\cos 2x=0$

b) $a(x-b)(x-c)+b(x-a)(x-c)+c(x-a)(x-b)=0$

Bài 6: Chứng minh phương trình $x^3-3x+1=0$ luôn có ba nghiệm phân biệt

Bài 7: Cho f là hàm liên tục trên đoạn [a;b] và có miền giá trị cũng là [a;b]. Chứng minh phương trình $f(x)=x$ có nghiệm trong đoạn [a;b]

Bài 8: Chứng minh phương trình $x^4 - x - 3 = 0$ có nghiệm $x_o \in (1;2)$ và $x_o > \sqrt[7]{12}$

Bài 9: Cho *f* là hàm liên tục trên đoạn [*a*;*b*] và α, β là hai số dương bất kỳ. Chứng minh rằng phương trình $f(x) = \dfrac{\alpha f(a) + \beta f(b)}{\alpha + \beta}$ luôn có nghiệm trong đoạn [*a*;*b*].

CHÚ Ý: *Hàm f(x) liên tục trên đoạn [a;b] và f(x) không triệt tiêu trên [a;b] thì f(x) có một dấu nhất định trên (a;b).*

Bài 10: Xét dấu các biểu thức sau

a) $f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$

b) $f(x) = x - 1 + \sqrt{x^2 - 2x + 5}$

c) $f(x) = (2\sin x - 1)(\sqrt{2} + 2\cos x)$

d) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4} - 2x$

Vấn đề 3: ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ

CẦN NHỚ: *Ở phần này phải **Thuộc lòng** các qui tắc tính đạo hàm, đạo hàm của hàm hợp và bảng đạo hàm các hàm sơ cấp cơ bản.*

BÀI TẬP

Bài 1: Tính đạo hàm các hàm sau

a) $y = 3x^4 - 2x^2 + x - 1$

b) $y = \dfrac{2}{3}x^3 + x^2 - 3x + 3$

c) $y = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x^3}$

d) $y = \dfrac{2}{3}x\sqrt{x}$

e) $y = \dfrac{2}{x} + 5\sqrt{x}$

Bài 2: Tính đạo hàm các hàm sau

a) $y = (x^3 + 2)(x + 1)$

b) $y = \dfrac{x^2 + x + 1}{2x - 3}$

c) $y = \dfrac{x - 4}{3x + 5}$

d) $y = \dfrac{x^3}{x - 1}$

Bài 3: Tính đạo hàm các hàm sau

a) $y = (x^2 - 1)^6$

b) $y = x(x + 2)^4$

c) $y = \dfrac{1}{x^2 + 1}$

d) $y = \dfrac{x}{x^3 + 1}$

Bài 4: Tính đạo hàm các hàm sau

a) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$ b) $y = \sqrt{x^2+6x+7}$ c) $y = \sqrt{x+2} + \sqrt{4-x}$

d) $y = (x+1)\sqrt{x^2+x+1}$ e) $y = \dfrac{\sqrt{x^2+x+3}}{2x+1}$ f) $y = \sqrt[3]{x^3-3x+2}$

g) $y = x\sqrt{6-x}$ h) $y = (x^2-1)^2 + \sqrt{x^2+4}$ i) $y = \dfrac{-x+\sqrt{2x}}{\sqrt{x}}$

Bài 5: Tính đạo hàm các hàm sau

a) y = sinx – cosx b) y = xsinx c) y = $\sin^3$x d) $y = \dfrac{x}{1-\cos x}$

e) y = 3$\sin^2$x – sinx f) $y = \cos^5 x$ g) $y = \cos x - \cos^3 x$

h) $y = 3\sin^2 x - \sin^3 x$ i) $y = x\cos x - \sin x$ k) $y = \cos x \sin^2 x$

Bài 6: Tính đạo hàm các hàm sau

a) $y = \dfrac{1}{4}\tan^4 x$ b) $y = \dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}$ c) $y = \dfrac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$ d) $y = \dfrac{1}{3}\tan^3 x - \tan x + x$

Bài 7: Tính đạo hàm các hàm sau

a) $y = \sin(2x + \dfrac{\pi}{4})$ b) y = sin3x +cos2x c) y =$\sin^3$3x d) y = $\cos^5$(2x^2+x+1)

e) $y = \sin^3 4x$ f) $y = \cos^4\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right)$ g) $y = \sqrt{\tan 5x}$

h) $y = \sqrt{1+\cos^2 \dfrac{x}{2}}$ i) $y = \left(\dfrac{tan\dfrac{x}{2}}{1-\tan^2\dfrac{x}{2}}\right)^2$

<u>CHÚ Ý:</u> $\left(e^x\right)' = e^x$. *Tổng quát* $\left(a^x\right)' = a^x \ln a$

Bài 8: Tính đạo hàm các hàm sau

a) $y = x^2 e^x$ b) $y = \dfrac{e^x}{x}$ c) $y = e^x(\sin x - \cos x)$ d) $y = e^{\sin x}$ e) $y = e^{\sqrt{x}}$

f) $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ g) $y = 2^x + 3^x$ h) $y = 2^{\sin x} - 3^{e^x - \sin^2 x}$

CHÚ Ý: $(\ln x)' = \dfrac{1}{x} = (\ln|x|)'$. *Tổng quát* $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a} = (\log_a|x|)'$

Bài 9: Tính đạo hàm các hàm sau

a) $y = x\ln x$ b) $y = \dfrac{\ln x}{x}$ c) $y = \ln(x^2+1)$ d) $y = \ln|\sin x|$

e) $y = \ln^3|2x+1|$ f) $y = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ g) $y = \ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$

h) $y = \log_2(2x+1)$ i) $y = \log_3(x^2+1) + \dfrac{\log_2^2(3x-1)}{x}$

Bài 10: Tính đạo hàm các hàm sau

a) $y = \ln\left|\dfrac{\sin\frac{x-a}{2}}{\cos\frac{x+a}{2}}\right|$ b) $y = \ln\left|\dfrac{\sin\frac{x+a}{2}}{\cos\frac{x-a}{2}}\right|$ c) $y = \ln\left(\dfrac{x^2-\sqrt{2}x+1}{x^2+\sqrt{2}x+1}\right)$

Bài 11: Cho hàm $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ chứng minh rằng $y' = \dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$. Áp dụng tính đạo hàm của:

a) $y = \dfrac{x+3}{5x+4}$ b) $y = \dfrac{3x+1}{1-x}$

Bài 12: Cho hàm $y = \dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ chứng minh rằng $y' = \dfrac{amx^2+2anx+(bn-mc)}{(mx+n)^2}$. Áp dụng tính đạo hàm của:

a) $y = \dfrac{x^2-3x+3}{x-1}$ b) $y = \dfrac{x^2}{x+1}$ c) $y = \dfrac{2x^2+x+2}{1-x}$

CHÚ Ý: **(i)** $y = [u(x)]^{v(x)} \Rightarrow \ln y = v(x)\ln u(x) \Rightarrow [\ln y]' = [v(x)\ln u(x)]' \Leftrightarrow y' = y[v(x)\ln u(x)]'$

(ii) $y = \log_{u(x)} v(x) \Rightarrow y = \dfrac{\ln v(x)}{\ln u(x)} \Rightarrow y' = \left[\dfrac{\ln v(x)}{\ln u(x)}\right]'$

Bài 13: Tính các đạo hàm của hàm số sau

a) $y = \left(x^2+2\right)^{e^x}$ b) $y = (\sin x)^{\cos x}$ c) $y = \left(\sqrt{1+x^2}\right)^{2^x}$

d) $y = \dfrac{(x+5)^4(x+9)^7(x+11)^9}{(x-6)^5(x-8)^{11}}$ e) $y = \log_{x^2+1}\dfrac{2x-3}{x-1}$ f) $y = \log_{\cos^2 x}(\sin x + \cos x)$

CHÚ Ý: (**i**) $f'(x_o)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_o+\Delta x)-f(x_o)}{\Delta x}=\lim\limits_{x\to x_o}\dfrac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$

$$f'_+(x_o)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_o+\Delta x)-f(x_o)}{\Delta x}=\lim_{x\to x_o^+}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$$

$$f'_-(x_o)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_o+\Delta x)-f(x_o)}{\Delta x}=\lim_{x\to x_o^-}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$$

$$\exists f'(x_o)\Leftrightarrow\begin{cases}\exists f'_+(x_o),\exists f'_-(x_o)\\ f'_+(x_o)=f'_-(x_o)\end{cases}$$

(**ii**) *Khả vi* $\Rightarrow$ *Liên tục*; *Liên tục* $\not\Rightarrow$ *Khả vi*

Bài 14: Xét tính liên tục và sự tồn tại đạo hàm của hàm *f*(*x*) tại x_o biết:

a) $f(x)=|x|, x_o=0$

b) $f(x)=\dfrac{|x|}{x^2+1}, x_o=0$

c) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(x^2+1)}{x}, x\neq 0\\ 0, \quad x=0\end{cases}, x_o=0$

d) $f(x)=\begin{cases}x\ln|x|-2x, x\neq 0\\ 0, \quad x=0\end{cases}, x_o=0$

Bài 15: Cho hàm $f(x)=\begin{cases}xe^{-\frac{1}{nx}}, x>0\wedge n\in\mathbb{N}^*\\ x, \quad x=0\end{cases}$.

a) Chứng minh *f* liên tục trên $[0;+\infty)$

b) Xét tính khả vi của hàm *f* tại $x_o=0$

Bài 16: Tìm *a* để tồn tại $f'(x_o)$ biết:

a) $f(x)=\begin{cases}x^2+1, \quad x\le 1\\ ax-a+2, x>1\end{cases}, x_o=1$

b) $f(x)=\begin{cases}(x+1)e^{-x}, \quad x>0\\ -x^2-ax+1, x\le 0\end{cases}, x_o=0$

Bài 17: Cho hàm $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, x\neq 0\\ 0, \quad x=0\end{cases}$

a) Tính $f'(x)$

b) Chứng minh $f'(x)$ không liên tục tại $x=0$

CHÚ Ý: $f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)', n \in \mathbb{N}^*$

Bài 18: Cho hàm $y = \dfrac{x-3}{x+4}$, chứng minh rằng $2(y')^2 = (y-1)y''$

Bài 19: Cho hàm $y = \sqrt{2x - x^2}$, chứng minh rằng $y^3.y'' + 1 = 0$

Bài 20: Tìm đạo hàm cấp n($n \geq 2$) của hàm sau:

a) $y = x^{-1}$ b) $y = e^{ax}$ c) $y = \sin x$ d) $y = \cos ax$

Bài 21: Tìm đạo hàm cấp n của hàm $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$; $g(x) = \dfrac{1}{x-1}$. Từ đó suy ra đạo hàm cấp n của hàm $h(x) = \dfrac{2x}{x^2-1}$

Bài 22: Tìm đạo hàm cấp n($n \geq 2$) của hàm $y = \dfrac{x^2}{1-x}$.

CHÚ Ý: *Nếu $f'(x) = 0, \forall x \in D$ thì f là hàm hằng trên D*

Bài 23: Chứng minh rằng $\cos^2 x + \cos^2\left(\dfrac{2\pi}{3} + x\right) + \cos^2\left(\dfrac{2\pi}{3} - x\right) = \dfrac{2}{3}, \forall x \in \mathbb{R}$

Bài 24: Chứng minh rằng nếu $\sin^n x + \cos^n x = 1, \forall x \in \mathbb{R}$ thì $n = 2$

CHÚ Ý: (**i**) *Cho đường thẳng (d). Gọi φ là góc hợp bởi chiều dương của trục Ox với (d). Khi đó, ta định nghĩa hệ số góc của (d) là $k = \tan\varphi$*

(**ii**) *Nếu hàm $y = f(x):(C)$ có đạo hàm tại điểm x_o thì hệ số góc của tiếp tuyến với (C) tại tiếp điểm $M_o(x_o;y_o)$ là $f'(x_o)$. Do đó, phương trình tiếp tuyến với (C) tại tiếp điểm $M_o(x_o;y_o)$ là*

$$y - y_o = f'(x_o)(x - x_o)$$

Bài 25: Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x + 1\ (C)$. Lập phương trình tiếp tuyến với (C) biết

a) Hoành độ tiếp điểm $x_o = 3$

b) Tiếp tuyến song song với đường thẳng $(d): y = 9x + 2010$

c) Tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $(d'): x + 9y + 2010 = 0$

d) Tiếp tuyến đi qua điểm $A(\dfrac{2}{3}; -1)$

Bài 26: Cho $(C): y = x^2 - 2x + 3$. Lập phương trình tiếp tuyến với (*C*)

a) Tại điểm có tung độ $y_o = 1$

b) Song song với đường thẳng $(d): 4x - 2y + 5 = 0$

c) Vuông góc với phân giác góc phần tư thứ nhất của góc hợp bởi các trục tọa độ

Bài 27: Lập phương trình tiếp tuyến với $(H): y = \dfrac{4x-3}{x-1}$ biết tiếp tuyến hợp với trục hoành một góc 45^o.

Bài 28: Cho $(C): y = x - \ln x$. Tìm trên (*C*) những điểm mà tại đó tiếp tuyến với (*C*) cùng phương với trục hoành.

Bài 29: Cho $(C): y = \dfrac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 2$. Tìm *m* để (*C*) có tiếp tuyến với hệ số góc *m*.

Bài 30: Chứng minh rằng trên $(H): y = \dfrac{x^2 + x - 2}{x+1}$ không có điểm nào mà tại đó tiếp tuyến song song với đường thẳng $(d): y = -3x + 5$

Bài 31: Tìm *m* để đồ thị $(C): y = x^3 + x^2 - 2$ có ít ra một tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $(d): x + my + 2010 = 0 (m \neq 0)$.

CHUYÊN ĐỀ 2: KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

Vấn đề 1: Sự biến thiên - cực trị - giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số

CẦN NHỚ: *Để xét sự biến thiên của hàm số $y = f(x)$ ta thực hiện các bước sau:*

Bước 1: *Tìm tập xác định D của hàm số*

Bước 2: *Tìm điểm tới hạn của hàm số*

(+) *Giải phương trình* $y' = 0\ (x \in D)$

(+) *Tìm những điểm thuộc D mà tại đó* y' *không xác định*

Bước 3: *Lập bảng xét dấu* y' *từ đó đưa ra kết luận*

Chú ý: (**i**) $y' \ge 0$ *thì hàm đồng biến;* $y' \le 0$ *thì hàm nghịch biến*

(**ii**) *Dấu của tam thức*: *"**trong trái ngoài cùng**"*; *Dấu của nhị thức*: *"**phải cùng trái khác**"*

BÀI TẬP

Bài 1: Tìm các khoảng đơn điệu của các hàm số sau:

1) $y = -x^2 + 2x + 1$ 2) $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 5$ 3) $y = -x^3 + 6x^2 + 1$

4) $y = \frac{1}{4}x^4 + x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 3x$ 5) $y = x^{\frac{3}{4}}$ 6) $y = \frac{3}{4}x^4 + x^3 - 3x^2 + 1$ 7) $y = \frac{3x-2}{x-1}$

8) $y = \frac{x+1}{x-1}$ 9) $y = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$ 10) $y = \frac{x^2 + 3x + 3}{x+1}$ 11) $y = \frac{(x-2)^2}{1-x}$

12) $y = \frac{x^3}{4 - x^2}$ 13) $y = \frac{x^4 + 2x^2 - 3}{x^2}$ 14) $y = |x-1| + \frac{2}{x+1}$

15) $y = \frac{\sin x - \cos x}{\cos^2 x}, x \in [-\pi; \pi]$

CẦN NHỚ: *Để tìm cực trị của hàm số* $y = f(x)$ *ta làm như sau:*

Bước 1: Tìm tập xác định D

Bước 2: Lập bảng xét dấu y' *từ đó đó đưa ra kết luận*

Bài 2: Tìm cực trị của các hàm sau:

1) $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 5$ 2) $y = 2x^2 - x^4$ 3) $y = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$

4) $y = x^2 - \dfrac{16}{x}$ 5) $y = \dfrac{x^2}{x^3 + 1}$ 6) $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$ 7) $y = x + \sqrt{3x^2 + 6}$

8) $y = \sqrt[3]{x^3 - 3x - 2}$ 9) $y = x + \sqrt{2x^2 + 1}$ 10) $y = x + \sqrt{8 - x^2}$ 11) $y = x\sqrt{4 - x}$

12) $y = \dfrac{x}{\ln x}$ 13) $y = xe^x$ 14) $y = x - e^x$ 15) $y = x - \ln x$ 16) $y = \dfrac{\ln x}{x}$

17) $y = \left|x^2 - 4x + 3\right|$

CẦN NHỚ: *Cách khác tìm cực trị trị của hàm số* $y = f(x)$

Bước 1: Tìm tập xác định D

Bước 2: Giải phương trình $y' = 0\ (x \in D)$. *Giả sử* x_o *là nghiệm*

Bước 3: Tính $y''(x_o)$, *nếu:* (+) $y''(x_o) > 0$ *thì* x_o *là điểm cực tiểu*

(+) $y''(x_o) < 0$ *thì* x_o *là điểm cực đại*

Bài 3: Cho hàm $y = e^x \sin x$

a) Tìm cực trị của hàm số trên đoạn $[0; 2\pi]$

b) Tìm cực trị của hàm số trên tập xác định

Bài 4: Tìm cực trị của hàm sau

a) $y = \sin^2 x - \sqrt{3}\cos x,\ x \in [0;\pi]$ b) $y = 2\sin x + \cos 2x,\ x \in [0;\pi]$

CẦN NHỚ: *Để tìm GTLN, GTNN của hàm f(x) trên tập D, ta làm như sau:*

Bước 1: Lập bảng biến thiên của hàm f trên D

Bước 2: Từ bảng xét dấu kết luận

Bài 5: Tìm GTLN, GTNN của các hàm sau:

a) $f(x)=1+4x-x^2$ b) $f(x)=1+x^3-\dfrac{3x^4}{4}$ c) $f(x)=x^4+\dfrac{2}{x^2}$

d) $f(x)=\dfrac{x^2+4x+4}{x}(x>0)$ e) $f(x)=\dfrac{3(x^2+1)}{2x^2+x+2}$ f) $f(x)=\dfrac{8x-3}{x^2-x+1}$

g) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^4-x^2+1}$ h) $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x}$ i) $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-2x^2+4x-10$

Chú ý: *Nếu tìm GTLN, GTNN của hàm f(x) trên đoạn [a;b] thì ta làm đơn giản hơn:*

Bước 1: Tính $f'(x)$ và giải phương trình $f'(x)=0\ (x\in[a;b])$. Giả sử x_o là nghiệm

Bước 2: Tính $f(a), f(b), f(x_o)$ rồi so sánh các giá trị này. Từ đó kết luận

Bài 6: Tìm GTLN, GTNN của các hàm sau:

a) $f(x)=x^3-6x^2+9x, x\in[0;4]$ b) $f(x)=x^4-2x^2+5, x\in[-2;3]$

c) $f(x)=x^5-5x^4+5x^3+1, x\in[-1;2]$ d) $f(x)=3x+\sqrt{10-x^2}$

e) $f(x)=2x+\sqrt{5-x^2}$ f) $f(x)=\sqrt{x-2}+\sqrt{x+4}$ g) $f(x)=(x+2)\sqrt{4-x^2}$

Bài 7: Tìm GTLN, GTNN của các hàm sau:

a) $f(x)=2\sin x-\dfrac{4}{3}\sin^3 x, x\in[0;\pi]$ b) $f(x)=x+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos x, x\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$

Bài 8: Tìm kích thước của hình chữ nhật có chu vi lớn nhất nội tiếp trong nửa đường tròn bán kính R cho trước.

Bài 9: Tìm hình thang cân có diện tích nhỏ nhất ngoại tiếp đường tròn bán kính R cho trước

Bái 10: Cho hình thang cân $ABCD$ có đáy nhỏ AB và $AD=BC=1cm$. Tính góc $x=\widehat{DAB}$ sao cho hình thang có diện tích lớn nhất và tính diện tích đó.

Vấn đề 2: Điểm uốn và tiệm cận của đồ thị hàm số

CẦN NHỚ: *Để tìm điểm uốn của đồ thị $(C): y = f(x)$ ta làm như sau:*

Bước 1: Tìm tập xác định D

Bước 2: Giải phương trình $y'' = 0$

Bước 3: Lập bảng xét dấu y'' từ đó suy ra kết luận

Chú ý: $y'' >$ *thì đồ thị lõm*

$y'' < 0$ *thì đồ thị lồi*

y'' *đổi dấu khi x qua x_o thì $(x_o; f(x_o))$ là điểm uốn của đồ thị*

BÀI TẬP

Bài 1: Xác định khoảng lồi, lõm và điểm uốn (nếu có) của đồ thị các hàm sau

1) $y = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$ 2) $y = -x^3 + 3x^2 + 2x$ 3) $y = x^3 + 6x^2 + x - 12$

4) $y = x^3 - 3x^2 + 4$ 5) $y = x^3 + 3x^2 + 4x - 2$ 6) $y = 2x^2 + 3x - \frac{7}{8}$

7) $y = 2x^2 - x^4$ 8) $y = \frac{3x-2}{x-1}$ 9) $y = \frac{x^2+3x+3}{x+1}$

10) $y = x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 50$ 11) $y = x + \sin x$ 12) $y = \frac{x^3}{x^2+1}$

13) $y = \sqrt{1+x^2}$ 14) $y = x^4(12\ln x - 7)$ 15) $y = \ln(x^2 - 1)$

CẦN NHỚ: *Cách chứng minh ba điểm uốn của $(C): y = f(x)$ thẳng hàng*

Bước 1: Chứng minh (C) có ba điểm uốn

Bước 2: Tọa độ điểm uốn thỏa mãn hệ $\begin{cases} f''(x) = 0 \\ y = f(x) \end{cases} \to y = ax + b$

Bước 3: Vậy ba điểm uốn cùng nằm trên đường thẳng $y = ax + b$ nên chúng thẳng hàng

Bài 2: Chứng minh đồ thị của các hàm sau có ba điểm uốn và ba điểm uốn thẳng hàng

a) $y = \frac{x+1}{x^2+1}$ b) $y = \frac{2x+1}{x^2+1}$ c) $y = \frac{2x^2-3x}{x^2-3x+3}$ d) $y = \frac{x^3}{x^2-4x+5}$

<u>CẦN NHỚ:</u> *Để tìm tiệm cận của đồ thị* $(C): y = f(x)$ *ta làm như sau*:

Bước 1: *Tìm tập xác định D*

Bước 2: *Tính* $\lim f(x)$ *khi x tiến đến biên của tập xác định từ đó kết luận*

Chú ý: $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = \infty$ *thì* $x = x_o$ *là tiệm cận đứng*

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$ *thì* $y = b$ *là tiệm cận ngang*

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a \\ \lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - ax) = b \end{cases}$ *thì* $y = ax + b$ *là tiệm cận xiên*

Bài 3: Tìm tiệm cận ngang và đứng (nếu có) của các đồ thị hàm sau:

a) $y = \dfrac{x-1}{2-x}$ b) $y = \dfrac{1-2x}{3x+1}$ c) $y = \dfrac{x^2+2x+3}{3+2x-x^2}$ d) $y = \dfrac{x^6}{x^6 - x}$

Chú ý: *Cho hàm số* $y = f(x)$ *nếu* $\lim\limits_{x\to\infty}\big(f(x) - (ax+b)\big) = 0$ *thì* $y = ax + b$ *là tiệm cận xiên. Do đó, để tìm tiệm cận xiên của hàm dạng* $f(x) = \dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ *ta biến đổi* $f(x) = Ax + B + \dfrac{C}{mx+n}$. *Khi đó, đường* $y = Ax + B$ *là tiệm cận xiên.*

Bài 4: Tìm tiệm cận (nếu có) của các hàm sau

a) $y = \dfrac{x^2+x-1}{x-1}$ b) $y = \dfrac{x^2-2x-8}{x-1}$ c) $y = \dfrac{2x^4+x^2-2x+1}{x^3-1}$

Bài 5: Tìm tiệm cận của đồ thị các hàm sau:

a) $y = \sqrt{x^2+2x+3}$ b) $y = x + \sqrt{x^2-6x+6}$ c) $y = \sqrt[3]{x^3-3x}$

Vấn đề 3: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số

ĐƯỜNG LỐI TỔNG QUÁT ĐỂ KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

Bước 1: *Tìm tập xác định D của hàm số*

Bước 2: *Sự biến thiên*

(i) *Giới hạn – tiệm cận*

(+) *Tính* $\lim f(x)$ *khi x tiến đến biên của tập xác định*

(+)*Từ đó tìm tiệm cận nếu có*

(ii) *Sự biến thiên*

(+) *Tính* y' *và giải phương trình* $y' = 0$

(+) *Lập bảng biến thiên, từ đó suy ra khoảng tăng, giảm, cực trị* (*nếu có*)

Bước 3: *Vẽ đồ thị*

(i) *Tìm điểm đặc biệt*

(ii) *Vẽ đồ thị theo sơ đồ*: *hệ tọa độ* $\rightarrow$ *tiệm cận* (*nếu có*) $\rightarrow$ *điểm đặc biệt* $\rightarrow$ *đồ thị*

Bước 4: *Nhận xét tính chất đặc biệt của đồ thị*

HÀM BẬC BA $y = ax^3 + bx^2 + cx + d (a \neq 0)$

<u>CẦN NHỚ:</u> (**i**) *Đồ thị không có tiệm cận*

(**ii**) *Có một điểm uốn và là tâm đối xứng của đồ thị*

(**iii**) *Cho điểm đặc biệt bằng cách cho* $y = y_{ct}$

BÀI TẬP

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm sau:

1) $y = x^3 + 3x^2 - 2$ 2) $y = -x^3 - 3x^2 + 2$ 3) $y = -x^3 + 3x^2 - 1$

4) $y = x^3 - 3x^2 + 1$ 5) $y = x^3 + 3x^2 + 1$ 6) $y = -(x^3 + 3x^2 + 1)$

7) $y = 2x^3 + 6x^2 + 6x - 1$ 8) $y = -2x^3 - 6x^2 - 6x + 1$ 9) $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$

10) $y = -x^3 + 3x^2 - 3x - 1$ 11) $y = x^3 - 3x^2 + 4$ 12) $y = (1-x)(x+2)^2$

13) $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$ 14) $y = -x^3 + 3x^2 - 5x + 2$ 15) $y = x^3 - 3x + 2$

16) $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 27$ 17) $y = x^3 + x^2 - 16x + 16$ 18) $y = x^3 - 3x^2 + 4x$

19) $y = x^3 - 3x^2$ 20) $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 2x - 3$ 21) $y = \frac{1}{3}x^3 - x + \frac{2}{3}$

HÀM BẬC BỐN TRÙNG PHƯƠNG $y = ax^4 + bx^2 + c (a \neq 0)$

<u>CẦN NHỚ:</u> (**i**) *Đồ thị không có tiệm cận*

(**ii**) *Đồ thị đối xứng qua* Oy

(**iii**) *Cho điểm đặc biệt đối xứng nhau qua* Oy

BÀI TẬP

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm sau:

1) $y = x^4 - 2x^2 - 1$ 2) $y = -x^4 + 2x^2 + 1$ 3) $y = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + \frac{3}{2}$

4) $y = -\frac{1}{2}x^4 + 3x^2 - \frac{3}{2}$ 5) $y = \frac{x^4}{2} + x^2 - \frac{3}{2}$ 6) $y = -\frac{x^4}{2} - x^2 + \frac{3}{2}$

7) $y = x^4 + 2x^2 + 1$ 8) $y = -x^4 - 2x^2 - 1$ 9) $y = x^4 - 4x^2 + 3$

10) $y = x^4 - x^2 + 1$ 11) $y = x^4 - 4x^2 + 20$ 12) $y = x^4 + 2x^2 - 3$

HÀM HỮU TỶ BẬC NHẤT TRÊN BẬC NHẤT

$$y = \frac{ax+b}{cx+d}\ (c \neq 0, ad - bc \neq 0)$$

CẦN NHỚ: (**i**) $y' = \dfrac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{(cx+d)^2} = \dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$

(**ii**) *Đồ thị có hai tiệm cận: đứng và ngang*

(**iii**) *Đồ thị đối xứng qua giao hai tiệm cận*

(**iv**) *Điểm đặc biệt: giao với các trục tọa độ*

BÀI TẬP

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm sau:

1) $y = \dfrac{x+1}{x-1}$ 2) $y = \dfrac{2x-1}{x+3}$ 3) $y = \dfrac{x+2}{1-x}$ 4) $y = \dfrac{1-x}{2x+1}$

HÀM HỮU TỶ BẬC HAI TRÊN BẬC MỘT

$$y = \frac{ax^2+bx+c}{mx+n}\ (am \neq 0)$$

CẦN NHỚ: (**i**) *Chia tử cho mẫu trước khi khảo sát, ta được* $y = Ax + B + \dfrac{C}{mx+n}$

(**ii**) $y' = \dfrac{amx^2 + 2anx + (bn - mc)}{(mx+n)^2}$

(**iii**) *Đồ thị có hai tiệm cận: đứng và xiên; đồng thời đối xứng qua giao điểm hai tiệm cận*

BÀI TẬP

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm sau:

1) $y=\dfrac{x^2-3x+3}{x-1}$ 2) $y=\dfrac{x^2-3x+3}{1-x}$ 3) $y=\dfrac{x^2+x+1}{x+1}$ 4) $y=\dfrac{x^2-x+1}{x+1}$

5) $y=\dfrac{x^2-3x}{x-1}$ 6) $y=\dfrac{x^2-2x-3}{2-x}$ 7) $y=\dfrac{x^2+2x+2}{x+1}$ 8) $y=\dfrac{x^2-2}{x}$

9) $y=\dfrac{x^2+x-5}{x-2}$ 10) $y=\dfrac{x^2}{x-1}$ 11) $y=\dfrac{x^2+2x-1}{x-1}$ 12) $y=\dfrac{x^2+2x+3}{x-2}$

13) $y=\dfrac{x^2+4x+3}{x+2}$ 14) $y=\dfrac{x^2+1}{x+2}$ 15) $y=\dfrac{x^2+3}{x+1}$ 16) $y=\dfrac{x^2+3x+4}{x+2}$

MỘT VÀI HÀM KHÁC

<u>CẦN NHỚ:</u> (**i**) *Cách xét dấu của hàm liên tục*

(**ii**) *Nhìn vào bảng biến thiên để vẽ đồ thị*

BÀI TẬP

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm sau:

1) $y=x^4+\dfrac{4}{3}x^3-2x^2-4x+1$ 2) $y=\dfrac{1}{4}x^4-\dfrac{2}{3}x^3-\dfrac{5}{2}x^2+6x+2$

3) $y=\dfrac{x^2-5x+1}{x^2-x+1}$ 4) $y=\dfrac{x^2-2x+3}{x^2+2x-3}$

5) $y=\sqrt{x^2-2x+2}$ 6) $y=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$ 7) $y=\sqrt[3]{x^3-3x}$

8) $y=|x|^3+3x^2-2$ 9) $y=\left|-x^4+2x^2+1\right|$ 10) $y=\dfrac{x^2-3x+3}{|1-x|}$

CHUYÊN ĐỀ 3: MỘT SỐ BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN KHẢO SÁT HÀM SỐ

Vấn đề 1: TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ VÀ ỨNG DỤNG

CẦN NHỚ: 1) *Cho hàm f xác định trên tập D. Khi đó,*

(**i**) *Hàm f(x) đồng biến trên D* $\Leftrightarrow f'(x) \geq 0, \forall x \in D$

(**ii**) *Hàm f(x) nghịch biến trên D* $\Leftrightarrow f'(x) \leq 0, \forall x \in D$

(*Dấu '=' chỉ được phép xảy ra tại hữu hạn điểm. Tuy nhiên, đối với các hàm mà chúng ta xét trong tài liệu này thì điều kiện này không cần thiết*)

2) *Cho tam thức* $f(x) = ax^2 + bx + c$. *Khi đó,*

(**i**) $f(x) > 0 (f(x) \geq 0), \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 (\Delta \leq 0) \end{cases}$

$f(x) < 0 (f(x) \leq 0), \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 (\Delta \leq 0) \end{cases}$

(**ii**) $x_1 < 0 < x_2 \Leftrightarrow P < 0 \Leftrightarrow ac < 0$

$0 < x_1 \leq x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases}$ $x_1 \leq x_2 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases}$

(**iii**) $x_1 < \alpha < x_2 \Leftrightarrow af(\alpha) < 0$

$\alpha < x_1 \leq x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ af(\alpha) > 0 \\ S/2 > \alpha \end{cases}$ $x_1 \leq x_2 < \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ af(\alpha) > 0 \\ S/2 < \alpha \end{cases}$

BÀI TẬP

Bài 1: Tìm *m* để các hàm số sau đồng biến (nghịch biến) trên tập xác định

a) $y=\frac{1}{3}x^3-2x^2+mx-2$ b) $y=\frac{x+m}{x-m}$ c) $y=\frac{mx^2+2x+1}{x+1}$

Bài 2: Tùy theo *m*, khảo sát sự biến thiên của hàm $y=4x^3+(m+3)x^2+mx$

Bài 3: Cho hàm $y=\frac{1}{3}x^3+mx^2-mx+1$. Định *m* để hàm số:

a) Đồng biến trên tập xác định

b) Đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$

c) Nghịch biến trong khoảng $(-\infty;0)$

Bài 4: Cho hàm $y=\frac{x^2+mx-5}{3-x}$. Định *m* để hàm số:

a) Nghịch biến trong từng khoảng xác định

b) Giảm trong khoảng $(-1;0)$

c) Tăng trong khoảng $(-2;2)$

Bài 5: Cho hàm $y=-\frac{1}{3}x^3+(m-1)x^2+(m+3)x-4$. Định *m* để hàm số:

a) Giảm trên tập xác định

b) Giảm trong khoảng $(0;+\infty)$

c) Tăng trong khoảng $(0;3)$

CẦN NHỚ: *Để chứng minh bất đẳng thức* $A(x)>B(x),\forall x\in D$ *ta thường làm như sau:*

Bước 1: *Biến đổi* $A(x)>B(x)\Leftrightarrow A(x)-B(x)>0$ *và đặt* $f(x)=A(x)-B(x)$

Bước 2: *Xét sự biến thiên của hàm f. Từ đó chứng tỏ* $f(x)>0,\forall x\in D$

Chú ý: (**i**) *f tăng thì* $a<b\Rightarrow f(a)<f(b)$

(**ii**) *f giảm thì* $a<b\Rightarrow f(a)>f(b)$

Bài 5: Chứng minh các bất đẳng thức sau

a) $2\sin x + \tan x > 3x, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

b) $\tan x > x, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

c) $\tan x > x + \frac{x^3}{3}, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

d) $\sin x > \frac{2x}{\pi}, x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

Bài 6: Chứng minh:

a) Nếu $0 < a < b < \frac{\pi}{2}$ thì $b\tan a < a\tan b$

b) Nếu tam giác ABC có ba góc nhọn thì $\sin A + \sin B + \sin C + \tan A + \tan B + \tan C > 2\pi$

Bài 7: Chứng minh với $x > 0$ ta luôn có $x - \frac{x^3}{3!} < \sin < x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$

Vấn đề 2: CỰC TRỊ CÓ ĐIỀU KIỆN

CẦN NHỚ: *Tìm điều kiện để hàm f đạt cực trị tại* x_o*, ta làm như sau:*

Bước 1: *f đạt cực trị tại* $x_o \Rightarrow f'(x_o) = 0 \rightarrow$ *giá trị tham số*

Bước 2: *Thử lại rồi kết luận*

BÀI TẬP

Bài 1: Tìm *m* để hàm số $f(x) = \frac{x^2 + mx + 1}{xm}$ đạt cực trị tại $x_o = 2$

Bài 2: Tìm *m* để hàm số $f(x) = m\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x$ đạt cực trị tại $x_o = \frac{\pi}{3}$

Bài 3: Tìm *m* để hàm $f(x) = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^2 + 1$ đạt cực đại (cực tiểu) tại $x_o = 1$

CẦN NHỚ: *Hàm f có cực trị (n cực trị) khi và chỉ khi* $f' = 0$ *có nghiệm (n nghiệm) và* f' *đổi dấu khi x qua các nghiệm đó.*

Chú ý: *Đối với hàm bậc ba* $y = ax^2 + bx^2 + cx + d$ *và hàm hữu tỷ bậc hai trên một* $y = \frac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$ *thì*: ***có cực trị*** $\Leftrightarrow$ ***có hai cực trị*** $\Leftrightarrow$ ***có cực đại và cực tiểu*** $\Leftrightarrow$ $y' = 0$ ***có hai nghiệm phân biệt.***

Bài 4: Tìm *m* để hàm sau có cực trị

a) $y=\frac{1}{3}x^3+mx^2+(m+6)x-1$ b) $y=x^3-2x^2+mx-1$

c) $y=\frac{x^2-2x+m}{4-x}$ d) $y=\frac{x^2-mx+2}{x+1}$ e) $y=\frac{x^2+mx-2}{mx-1}$

Bài 5: Tìm α để hàm $y=\frac{x^2+2x\cos\alpha+1}{x+2\sin\alpha}$ có cực đại và cực tiểu

Bài 6: Cho hàm $y=x^4+4mx^3+3(m+1)x^2+1$. Tìm *m* để hàm số:

a) Chỉ có một cực tiểu

b) Chỉ có một cực đại

Chú ý: (**i**) *Xét hàm bậc ba* $y=ax^2+bx^2+cx+d$ *Ta có các nhận xét sau*:

➢ *Vì* y' *là tam thức bậc hai nên ta có thể sử dụng định lý Viet và định lý về dấu của tam thức cậc hai.*

➢ *Nếu* x_1,x_2 *là các điểm cực trị thì* x_1,x_2 *là nghiệm của* $y'=0$. *Do đó, để tính* y_1,y_2 *ta làm như sau*: (+) *Chia y cho* y' *ta được* $y=y'.P(x)+Ax+B$

(+) *Khi đó,* $y_1=y(x_1)=y'(x_1)P(x_1)+Ax_1+B=Ax_1+B$; $y_2=y(x_2)=Ax_2+B$

➢ *Ta thấy hai điểm cực trị* $M_1(x_1;y_1),M_2(x_2;y_2)$ *thỏa mãn phương trình* $y=Ax+B$ *nên phương trình đường thẳng qua hai điểm cực trị là* $y=Ax+B$.

(**ii**) *Xét hàm hữu tỷ bậc hai trên một* $y=\frac{ax^2+bx+c}{mx+n}$. *Ta có vài nhận xét sau*:

➢ *Vì* $y'=\frac{amx^2+2anx+(bn-mc)}{(mx+n)^2}$ *nên dấu của* y' *là dấu của tam thức bậc hai*

$$g(x)=amx^2+2anx+(bn-mc).$$

Do đó, ta vẫn có thể sử dụng định lý Viet và định lý về dấu của tam thức cậc hai.

➢ *Nếu* x_1,x_2 *là các điểm cực trị thì* x_1,x_2 *thì* $y_1=\frac{2ax_1+b}{m}$, $y_2=\frac{2ax_2+b}{m}$. *Do đó, phương trình đường thẳng qua các điểm cực trị là* $y=\frac{2ax+b}{m}$.

Bài 7: Cho hàm $y=\frac{1}{3}mx^3-(m-1)x^2+3(m-2)x+\frac{1}{3}$. Tìm m để hàm số

a) Đạt cực đại và cực tiểu

b) Có hai cực trị trái dấu

c) Đạt cực trị tại x_1,x_2 thỏa $x_1+2x_2=1$

Bài 8: Tìm m để đồ thị (C): $y=2x^3-3(3m+1)x^2+12(m^2+m)x+1$ có cực đại và cực tiểu. Viết phương trình đường thẳng qua hai điểm cực trị đó.

Bài 9: Định m để hàm $y=x^3-(m-3)x^2+(4m-1)x-m$ đạt cực trị tại x_1,x_2 thỏa $x_1<-2<x_2$

Bài 10: Cho hàm $y=\frac{x^2-2mx-m^2-1}{x-m}$. Định m để hàm số có:

a) Một cực đại và một cực tiểu

b) Hai cực trị và hai giá trị cùng dấu

c) Cực tiểu có hoành độ nhỏ hơn 1

Bài 11: Định m để hàm $y=\frac{mx+1}{1-x^2}$ có hai cực trị. Trong trường hợp đó, chứng minh hai cực trị của đồ thị hàm số ở về cùng một phía so với trục hoành.

Bài 12: Cho hàm $y=\frac{mx^2-2x+m}{x^2-x}$. Định m để hàm số;

a) Tăng trên từng khoảng xác định

b) Chỉ có một cực trị

c) Đạt cực đại và cực tiểu tại điểm có hoành độ dương

Bài 13: Cho hàm $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}(\sin\alpha+\cos\alpha)x^2+\frac{3}{4}(\sin 2\alpha)x+1$.

a) Định α để hàm có cực trị

b) Gọi x_1,x_2 là các điểm cực trị , tìm α để $x_1+x_2=x_1^2+x_2^2$

Bài 14: Cho hàm $y=x^3-3(m-10x^2+(2m^2-3m+2)x-m(m-1)$. Viết phương trình đường thẳng qua các điểm cực trị của đồ thị hàm số trong trường hợp hàm có hai cực trị

Bài 15: Tìm *m* để đồ thị (*H*): $y = \dfrac{x^2 + (m+1)x - m + 1}{x - m}$ có cực đại và cực tiểu. Viết phương trình đường thẳng qua hai điểm cực trị đó.

Bài 16: Định *p* để hàm số $y = \dfrac{-x^2 + 3x + p}{x - 4}$ có giá trị cực đại *M*, giá trị cực tiểu *m* thỏa $|M - m| = 4$

Bài 17: Định *m* để hàm số $y = \dfrac{2x^2 - 3x + m}{x - m}$ có cực đại, cực tiểu thỏa $|y_{cd} - y_{ct}| > 8$

Bài 18: Tìm *m* để đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{3}mx^3 - (m-1)x^2 + 3(m-2)x + \dfrac{1}{3}$ có cực đại, cực tiểu đồng thời đường thẳng qua các điểm cực trị

a) Song song với đường thẳng $(d): 2x - y + 2010 = 0$

b) Vuông góc với đường thẳng $(\Delta) x - 2y - 2010 = 0$

Bài 19: Chứng minh hàm $y = (x-a)(x-b)(x-c), a < b < c$ luôn đạt cực trị tại hai điểm x_1, x_2 thỏa

$$a < x_1 < b < x_2 < c$$

Bài 20: Xác định *m* để hàm $y = -x^4 - 8mx^3 - 3(2m+1)x - 4$ chỉ có cực đại mà không có cực tiểu.

Vấn đề 3: TÍNH ĐỐI XỨNG CỦA ĐỒ THỊ

CẦN NHỚ: *Tìm điều kiện để* $I(a;b)$ *là điểm uốn của đồ thị* $(C): y = f(x)$*, ta làm như sau:*

Bước 1: $I(a;b)$ *là điểm uốn của đồ thị* $(C): y = f(x) \Rightarrow \begin{cases} f''(a) = 0 \\ f(a) = b \end{cases} \rightarrow$ *tham số*

Bước 2: *Thử lại* $\rightarrow$ *kết luận*

BÀI TẬP

Bài 1: Tìm điều kiện của tham số để (*C*) nhận *I* làm điểm uốn, biết:

a) $(C): y = f(x) = \dfrac{-x^3}{m} + 3m^2 - 2, I(1;0)$ b) $(C): y = f(x) = ax^3 + bx^2 + x - 4, I(2;-6)$

c) $(C): y = f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d, I_1(1;1), I_2(3;-7)$

CẦN NHỚ: *Để chứng minh* $I(x_o; y_o)$ *là tâm đối xứng của đồ thị* $(C): y = f(x)$ *ta làm như sau:*

Bước 1: *Đặt* $\begin{cases} x = x_o + X \\ y = y_o + Y \end{cases}$, *thay vào phương trình* $y = f(x)$ *để được hàm* $Y = F(X)$

Bước 2: *Chứng minh* $Y = F(X)$ *là hàm lẻ*

Ngoài ra: $I(x_o; y_o)$ *là tâm đối xứng của* $(C): y = f(x) \Leftrightarrow f(x_o + x) + f(x_o - x) = 2y_o, \forall x_o \pm x \in D$

BÀI TẬP

Bài 1: Chứng minh rằng điểm uốn là tâm đối xứng của đồ thị hàm số sau:

a) $y = x^3 - 3x^2 + 1$ b) $y = -x^3 + 3x^2 - 2$

Bài 2: Chứng minh rằng giao hai tiệm cận là tâm đối xứng của đồ thị các hàm:

a) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$ b) $f(x) = \dfrac{2x-3}{x}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x-1}$ d) $f(x) = \dfrac{2x^2-x}{1-x}$

CẦN NHỚ: *Để chứng minh đường thẳng* $(\Delta): x = x_o$ *là trục đối xứng của đồ thị* $(C): y = f(x)$ *ta làm như sau:*

Bước 1: *Đặt* $\begin{cases} x = x_o + X \\ y = y_o + Y \end{cases}$, *thay vào phương trình* $y = f(x)$ *để được hàm* $Y = F(X)$

Bước 2: *Chứng minh* $Y = F(X)$ *là hàm chẵn*

Ngoài ra: $(\Delta): x = x_o$ *là trục đối xứng của* $(C): y = f(x) \Leftrightarrow f(x_o - x) = f(x_o + x), \forall x_o \pm x \in D$

BÀI TẬP

Bài 1: Chứng minh rằng đường thẳng $(d): x = 1$ là trục đối xứng của đồ thị các hàm

a) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 6x + 4$ b) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x$

c) $f(x) = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x - 1$

Bài 2: Tìm m để (C) có trục đối xứng song song với trục Oy, biết rằng:

a) $(C): f(x) = x^4 + 4x^3 + mx^2$ b) $(C): f(x) = x^4 + mx^3 + 2(m-2)x^2$

Vấn đề 4: TƯƠNG GIAO GIỮA HAI ĐỒ THỊ

Dạng 1: Tương giao giữa hai đồ thị $(F): y = f(x)$ và $(G): y = g(x)$

Phương pháp:

Bước 1: *Lập phương trình hoành độ giao điểm của* (*F*) *và* (*G*): $f(x) = g(x)$ (*)

Bước 2: *Số nghiệm của* (*) *bằng số điểm chung của* (*F*) *và* (*G*)

+) (*) *có n nghiệm đơn phân biệt*: (*F*) *và* (*G*) *cắt nhau tại n điểm phân biệt*

+) (*) *có n nghiệm bội phân biệt*: (*F*) *và* (*G*) *tiếp xúc nhau tại n điểm phân biệt*

+) (*) *vô nghiệm*: (*F*) *và* (*G*) *không có điểm chung*

Bài 1: Tìm *m* để đường thẳng (*d*) cắt hypebol (*H*) tại hai điểm phân biệt. Biết rằng:

a) (*d*): $y = mx + 1$ và (*H*): $y = \dfrac{x^2 + 4x + 3}{x + 2}$

b) (*d*): $y = mx - 2m + 2$ và $(H): y = \dfrac{x^2 - 2x + 4}{x - 2}$

c) $(d): y = mx + 1$ và $(H): y = \dfrac{x + 1}{x - 1}$

Bài 2: Tìm *m* để đường thẳng $y = -mx$ cắt $(C): y = x^3 + 3x^2 + 3m$ tại hai điểm phân biệt.

Bài 3: Cho đường cong $(C): y = x^3 - 4x^2 + 4$ và đường thẳng $(d): y = mx + 4$. Tìm *m* để (*C*) và (*d*):

a) Cắt nhau tại 3 điểm phân biệt

b) Cắt nhau tại 3 điểm phân biệt có hoành độ không âm

c) Có duy nhất một điểm chung

d) Không có điểm chung

Bài 4: Biện luận theo *m* vị trí tương đối giữa $(H): y = x + \dfrac{2}{x}$ và $(d): y = mx + 4m$

Bài 5: Cho hàm $y = x^3 - (m+1)x^2 + (m^2+m-3)x - m^2 + 3(C_m)$. Định *m* để (C_m) cắt *Ox* tại:

a) Ba điểm phân biệt

b) Ba điểm phân biệt có hoành độ dương

c) Ba điểm phân biệt trong đó có đúng hai điểm có hoành độ âm

Bài 6: Định *m* để $(C_m): y = x^3 - 3mx^2 + m$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt.

Chú ý: *Cho* $y = f(x)\,(C)$ *là hàm bậc ba. Trục hoành cắt (C) tại ba điểm phân biệt*

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \text{ co 2 nghiem phan biet } x_1, x_2 \\ f(x_1)f(x_2) < 0 \end{cases}$$

Bài 7: Định *m* để $(C_m): y = x^3 - x^2 + 18mx - 2m$ cắt *Ox* tại ba điểm phân biệt có hoành độ dương.

Chú ý: Cho $(C): y = ax^3 + bx^2 + cx + d\,(a \neq 0)$. Khi đó, *Ox* cắt (*C*) tại ba điểm phân biệt có hoành độ dương $\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \text{ co 2 nghiem phan biet } 0 < x_1 < x_2 \\ f(x_1)f(x_2) < 0 \\ af(0) < 0 \end{cases}$

Bài 8: Cho $(C): y = x^3 - 3x + 1$ và $(P): y = 3mx^2 - 3m^2x + m^2$. Định *m* để (*C*) và (*P*) cắt nhau tại ba điểm phân biệt có hoành độ dương.

Bài 9: Chứng minh rằng đường thẳng $(d): y = -x + m$ luôn cắt $(H): y = \dfrac{2x+1}{x+2}$ tại hai điểm *A*, *B* phân biệt. Tìm *m* để đoạn *AB* ngắn nhất.

Bài 10: Tìm *m* để $(H_m): y = \dfrac{mx^2 + x + m}{x-1}$ cắt *Ox* tại hai điểm phân biệt có hoành độ dương.

Bài 11: Tìm *m* để $(d): y = mx + 3$ cắt $(H): y = \dfrac{2x+1}{x-1}$ tại 2 điểm *A*, *B* sao cho ΔOAB vuông tại *O*.

Bài 12: Định *m* để $(d): y = m$ cắt $(H): y = \dfrac{-x^2 + 2x - 5}{x-1}$ tại hai điểm *A*, *B* sao cho ΔOAB có diện tích bằng 3 (đvdt)

Chú ý: Nếu x_1, x_2, x_3 là ba nghiệm của thì $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \dfrac{c}{a} \\ x_1x_2x_3 = -\dfrac{d}{a} \end{cases}$

Bài 13: Định m để $(C_m): y = x^3 - 3x^2 - 9x + m$ cắt Ox tại 3 điểm phân biệt có hoành độ lập thành một cấp số cộng.

Bài 14: Cho $(C_m): y = x^3 - 3mx^2 + 4m^3$. Tìm m để $(d): y = x$ cắt (C_m) tại ba điểm phân biệt A, B, C sao cho $AB = BC$.

Bài 15: Tìm m để $(C_m): y = x^4 - 2mx^2 + 2m - 1$ cắt Ox tại bốn điểm phân biệt có hoành độ lập thành một cấp số cộng.

Bài 15: Tìm m để hai đương cong $(C): y = x^4$ và $(P): y = 2(m+4)x^2 - m^2 - 8$ cắt nhau tại bốn điểm A, B, C, D sao cho $AB = BC = CD$.

Bài 16: Định m để phương trình $x^3 + mx^2 - 1 = 0$ có nghiệm duy nhất

Dạng 2: Sự tiếp xúc giữa hai đồ thị $(F): y = f(x)$ và $(G): y = g(x)$

Phương pháp:

***Cách* 1:** (F) *và* (G) *tiếp xúc* $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases}$ *(I) có nghiệm x*

***Cách* 2**: (F) *và* (G) *tiếp xúc* $\Leftrightarrow f(x) = g(x)(II)$ *có nghiệm kép (bội)*

Chú ý: ➢ Hoành độ tiếp điểm chính là nghiệm của (*I*) hoặc (*II*)

➢ Dùng cách 2 khi phương trình hoành độ là bậc 2 hoặc có thể đưa được về dạng bậc 2. Ngoài ra, dùng cách 1.

BÀI TẬP

Bài 1: Tìm m để sao cho:

a) $(d): y = m$ tiếp xúc với $(H): y = \dfrac{mx^2 + 3mx + 2m + 1}{x + 2}$

b) $(d): y = m + 4$ tiếp xúc với $(H): y = \dfrac{mx^2 + (2m+1)x + m + 3}{x + 2} (m \neq -1)$

c) $(C): y = x^3 - 2x^2 - (m-1)x + m$ tiếp xúc với Ox

d) $(C): y = x^3 - 9x$ và $(P): y = -mx^2 + 9m$ tiếp xúc nhau.

Bài 2: Tìm *m* để sao cho:

a) $(C): y = 2x^3 - 3(m+3)x^2 + 18mx - 8$ tiếp xúc với Ox

b) $(d): y = 1$ tiếp xúc với $(C_m): y = 4x^3 - 6(m+2)x^2 + 24mx - 9$

c) $(H): y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x - 1}$ và $(P): y = x^2 + m$ tiếp xúc nhau.

d) $(H): y = \dfrac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$ và $(P): y = -x^2 + m$ tiếp xúc nhau.

Vấn đề 5: BIỆN LUẬN SỐ NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH BẰNG ĐỒ THỊ

Bài toán: *Biện luận số nghiệm của phương trình* $F(x,m) = 0\,(*)$ *bằng đồ thị*

Hướng giải: *Ta đã biết "Số nghiệm của phương trình* $f(x) = g(x)$ *bằng số điểm chung của hai đồ thị* $(F): y = f(x)$ *và* $(G): y = g(x)$*", do đó, để giải bài loại này ta tìm cách biến đổi (*) về dạng phương trình hoành độ giao điểm của nhưng đồ thị thích hợp, sau đó vẽ các đồ thị này rồi từ đồ thị đưa ra kết luận.*

Dạng 1: $\boldsymbol{F(x,m) = 0 \Leftrightarrow f(x) = h(m)}$

Phương pháp:

Bước 1: Khẳng định số nghiệm của (*) bằng số điểm chung của đường thẳng $(d): y = h(m)$ *và đường* $(C): y = f(x)$

Bước 2: Vẽ $(C): y = f(x)$ *và* $(d): y = h(m)$ *trên cùng một hệ trục tọa độ*

Bước 3: Nhìn vào đồ thị để kết luận

BÀI TẬP

Bài 1: Cho hàm $y = x^3 - 3x + 1$ có đồ thị (*C*).

a) Khảo sát hàm số

b) Dùng (*C*) biện luận số nghiệm của phương trình : 1) $x^3 - 3x + 1 = m$ 2) $x^3 - 3x + 2m = 0$

Bài 2: Cho hàm $y=\dfrac{x^2}{x+1}$ có đồ thị (*H*).

a) Khảo sát hàm số

b) Dùng (*H*) biện luận số nghiệm của phương trình : $x^2-mx-m=0$

Bài 3: Tìm *m* để $x^4-x^2-2m+2=0$ có 3 nghiệm phân biệt.

Bài 4: Cho hàm $y=\dfrac{x^2-2x+1}{x+1}$ có đồ thị (*H*).

a) Vẽ đồ (*H*)

b) Tìm *m* để phương trình $\cos^2 t-(2+m)\cos t-m+1=0$ có nghiệm

Dạng 2: $F(x,m)=0 \Leftrightarrow f(x)=kx+m$, k là hằng số

Phương pháp:

Bước 1: Khẳng định số nghiệm của (*) bằng số điểm chung của đường thẳng $(d): y=kx+m$ *và đường* $(C): y=f(x)$

Bước 2: Vẽ $(C): y=f(x)$ *và các tiếp tuyến của (C) có hệ số góc k trên cùng một hệ trục tọa độ*

Bước 3: Nhìn vào đồ thị để kết luận

BÀI TẬP

Bài 1: Cho hàm $y=\dfrac{-x+3}{2x-1}$ (*H*)

a) Khảo sát hàm số

b) Lập phương trình tiếp tuyến với (*H*) biết tiếp tuyến song song với phân giác góc phần tư thứ 2 và thứ 4

c) Dựa vào (*H*) biện luận số nghiệm của phương trình $2x^2-2(m+1)x+m+3=0$

Bài 2: Cho hàm $y=x^3-2x^2+x$

a) Khảo sát hàm số

b) Biện luận theo *m* số nghiệm phương trinh $x^3-2x^2+m=0$

Vấn đề 6: ĐIỂM CỐ ĐỊNH CỦA HỌ ĐỒ THỊ

Phương pháp: *Cho họ đường cong* $(C_m): y = f(x,m)$ *với m là tham số và điểm* $A(x_o, y_o)$. *Ta có:*

$$A \in (C_m) \Leftrightarrow y_o = f(x_o, m) \ (*)$$

Xem (*) là phương trình ẩn m. Khi đó, ta kết luận:

➢ *(*) vô nghiệm m: Không có đồ thị nào của họ* (C_m) *qua A*

➢ *(*) có đúng n nghiệm: Có đúng n đường trong họ* (C_m) *qua A*

➢ *(*) nghiệm đúng với mọi m: Mọi đường cong trong họ* (C_m) *đều qua A. Ta gọi A là điểm **cố định** của họ* (C_m).

BÀI TẬP

Bài 1: Tìm điểm cố định của họ đồ thị sau:

a) $(C_m): y = mx^3 - (m-1)x^2 - (2+m)x + m - 1$

b) $(C_m): y = (1-m)x^2 - (3m-1)x + 5m - 2$

c) $(H_m): y = \dfrac{mx^2 + 3mx + 2m + 1}{x+2}$ d) $(H_m): y = \dfrac{mx^2 + (m+1)x + 1}{mx + 2}$

Bài 2: Chứng minh rằng:

a) $(C_m): y = x^3 + m^2x^2 + mx - 4m^2 - 2m$ luôn đi qua một điểm cố định

b) $(H_m): y = \dfrac{(m-1)x - 2}{x - m}$ luôn đi qua hai điểm cố định với mọi $m \neq -1$ và $m \neq 2$

Bài 3: Chứng minh rằng $(C_m): y = x^3 + (m-1)x^2 - 2mx + m$ luôn tiếp xúc với một điểm cố định tại một điểm cố định.

Bài 4: Chứng minh rằng $(H_m): y = \dfrac{2x^2 + (1-m)x + m + 1}{x - m}$ luôn tiếp xúc với một điểm cố định tại một điểm cố định với mọi $m \neq -1$.

Bài 5: Cho họ đường cong $(C_m): y = x^3 + (m^2+1)x^2 - 4m$. Tìm trên $(d): x = 2$ những điểm M mà:

a) Qua M có duy nhất một đường cong trong họ (C_m) đi qua

b) Qua M có hai đường cong trong họ (C_m) đi qua

c) Qua M không có đường cong nào trong họ (C_m) đi qua

Bài 6: Cho họ $(C_m): xy - 2my - 2mx + 2m^2 - 4m = 0$. Tìm những điểm M sao cho:

a) Có đúng một (C_m) đi qua

b) Có đúng hai (C_m) đi qua

c) Không có (C_m) nào đi qua.

Bài 7: Tìm trên $(d): x = 1$ những điểm mà không có đồ thị nào của họ $(H_m): y = \dfrac{(3m+1)x - m^2 + m}{x+m}$ đi qua.

Bài 8: Cho $(C_m): y = x^3 + m^2x - 2m + 1$. Tìm trên $(d): x = 1$ những điểm mà có ít nhất một đồ thị của họ (C_m) đi qua.

Bài 9: Chứng minh rằng họ parabol $(P_m): y = mx^2 - 2(m-1)x + m + 1$ luôn tiếp xúc nhau tại một điểm cố định.

Vấn đề 7: QUỸ TÍCH ĐẠI SỐ

Phương pháp: *để tìm quỹ tích điểm $M(x;y)$ thỏa điều kiện cho trước ta thực hiện các bước sau*:

Bước 1: *Từ điều kiện cho trước tìm tọa độ M theo tham số, chẳng hạn*

$$M: \begin{cases} x = f(m) \\ y = g(m) \end{cases}$$

Bước 2: *Khử tham số trong hệ trên ta được phương trình hai ẩn x, y độc lập với m, chẳng hạn $F(x,y) = 0$. Khi đó, $M \in (L): F(x,y)$*

Bước 3: *Tìm giới hạn* (*nếu có*)

Bước 4: *Kết luận*

Chú ý: ➢ I là trung điểm đoạn $AB \Leftrightarrow \begin{cases} x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_I = \dfrac{y_A + y_B}{2} \end{cases}$

➢ M chia đoạn AB theo tỷ số $k \neq 1 \Leftrightarrow MA = kMB \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = \dfrac{x_A - kx_B}{1-k} \\ y_M = \dfrac{y_A - ky_B}{1-k} \end{cases}$

➢ $M : \begin{cases} x = a \\ y = g(m) \end{cases}$ thì M nằm trên đường thẳng $x = a$

➢ $M : \begin{cases} x = f(m) \\ y = a \end{cases}$ thì M nằm trên đường thẳng $y = a$

BÀI TẬP

Bài 1: Cho hàm số $y = \dfrac{2x+4}{x+1}(H)$.

a) Khảo sát hàm số

b) Tìm m để đường thẳng $(d): y = -2x + m$ cắt (H) tại hai điểm phân biệt A, B. Khi đó, tìm quỹ tích trung điểm I của đoạn AB.

Bài 2: Cho hàm $y = \dfrac{x^2 - mx - 6}{x + 2m}(H)$. Tìm m để (H) là một hypebol và tìm quỹ tích tâm đối xứng của hypebol đó.

Bài 3: Tìm quỹ tích tâm đối xứng của $(C_m): y = 2x^3 - 3(m-2)x^2 - (m-1)x + m$

Bài 4: Cho hàm $y = \dfrac{x^2 - 3x + m}{x - 2}(H)$. Xác định m để hàm số có cực trị. Khi đó, tìm quỹ tích điểm cực đại của (H).

Bài 5: Cho hàm $y = \dfrac{x^2 + (m-2)x}{x-1}(H)$

a) Tìm m để hàm số có cực đại và cực tiểu.

b) Chứng minh rằng các cực trị của (H) chạy trên cùng một parabol cố định.

Vấn đề 8: KHOẢNG CÁCH

CẦN NHỚ: ➢ $AB=\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}$

➢ *Cho* $M_o(x_o;y_o)$ *và* $(\Delta):Ax+By+C=0$. *Khi đó,*

1) $d(M_o,\Delta)=\dfrac{|Ax_o+By_o+C=0|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

2) *Đặc biệt*: $d(M_o,Ox)=|x_o|,\ d(M_o,Oy)=|y_o|$

BÀI TẬP

Bài 1: Tìm *m* để $y=\dfrac{x^2+2mx+2}{x+1}$ có cực đại, cực tiểu và khoảng cách từ hai điểm đó tới đường thẳng $(\Delta):x+y+2=0$ bằng nhau.

Bài 2: Cho hàm $y=\dfrac{x+2}{x-3}(H)$. Tìm trên (*H*) những điểm sao cho khoảng cách từ nó đến hai tiệm cận bằng nhau.

Bài 3: Cho hàm $y=\dfrac{x^2+5x+15}{x+3}(H)$.

a) Tìm các tiệm cận của (*H*)

b) Chứng minh rằng tích khoảng cách từ một $M\in(H)$ bất kỳ đến hai tiệm cận là hằng số.

c) Tìm $M\in(H)$ sao cho tổng khoảng cách từ đó đến hai tiệm cận nhỏ nhất

d) Tìm $M\in(H)$ cách đều *Ox* và *Oy*.

e) Tìm các điểm trên (*H*) sao cho khoảng cách từ nó đến *Ox* gấp hai lần khoảng cách từ nó đến *Oy*.

Vấn đề 9: MỘT SỐ BÀI TRONG ĐỀ THI ĐẠI HỌC VÀ CAO ĐẲNG

Bài 1 (*Khối A – 2010 – 2 điểm*) Cho hàm $y = x^3 - 2x^2 + (1-m)x + m\ (C_m)$, *m* là tham số thực.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số khi *m* = 1

b) Tìm *m* để (C_m) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn điều kiện $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 4$.

Bài 2 (*Khối B – 2010 – 2 điểm*) Cho hàm $y = \dfrac{2x+1}{x+1}(H)$.

a) Khảo sát hàm số đã cho

b) Tìm *m* để đường thẳng $(d): y = -2x + m$ cắt (*H*) tại hai điểm phân biệt *A, B* sao cho tam giác *OAB* có diện tích bằng $\sqrt{3}$ (*O* là gốc tọa độ).

Bài 3 (*Khối D – 2010 – 2 điểm*) Cho hàm số $y = -x^4 - x^2 + 6(C)$

a) Khảo sát hàm số đã cho

b) Viết phương trình tiếp tuyến của (*C*), biết tiếp tuyến vuông góc với $(d): y = \dfrac{1}{6}x - 1$

Bài 4 (*CĐ – 2010 – 2 điểm*) Cho hàm $y = x^3 + 3x^2 - 1(C)$

a) Khảo sát hàm số đã cho

b)) Viết phương trình tiếp tuyến của (*C*) tại điểm có hoành độ bằng – 1

Bài 5 (*Khối A – 2009 – 2 điểm*) Cho hàm $y = \dfrac{x+2}{2x+3}(H)$

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ (*H*)

b) Viết phương trình tiếp tuyến với (*H*), biết tiếp tuyến đó cắt trục tung, trục hoành lần lượt tại hai điểm phân biệt *A, B* và tam giác *OAB* cân tại gốc tọa độ *O*.

Bài 6 (*Khối B – 2009 – 2 điểm*) Cho hàm $y = 2x^4 - 4x^2(C)$

a) Khảo sát hàm số

b) Với các giá trị nào của *m*, phương trình $x^2\left|x^2 - 2\right| = m$ có đúng 6 nghiệm thực phân biệt.

Bài 7 (*Khối D – 2009 – 2 điểm*) Cho hàm số $y = x^4 - (3m+2)x^2 + 2m\,(C_m)$, *m* là tham số thực.

a) Khảo sát hàm số kho $m = 0$

b) Tìm *m* để đường thẳng y = - 1 cắt (C_m) tại 4 điểm phân biệt đều có hoành độ nhỏ hơn 2

Bài 8 (*CĐ – 2009 – 2 điểm*) Cho hàm $y = x^3 - (2m-1)x^2 + (2-m)x + 2\,(C_m)$, *m* là tham số thực.

a) Khảo sát hàm số khi $m = 2$

b) Tìm *m* để hàm số có cực đại, cực tiểu và các điểm cực trị của (C_m) có hoành độ dương

Bài 9 (*Khối A – 2008 – 2 điểm*) Cho hàm $y = \dfrac{mx^2 + (3m^2-2)x - 2}{x+3m}(H_m)$, *m* là tham số thực

a) Khảo sát hàm số khi $m = 1$

b) Tìm các giá trị của *m* để góc giữa hai đường tiệm cận của (H_m) bằng 45^o

Bài 10 (*Khối B – 2008 – 2 điểm*) Cho hàm số $y = 4x^3 - 6x^2 + 1(C)$

a) Khảo sát hàm số

b) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (*C*), biết tiếp tuyến qua $M(-1;-9)$

Bài 11 (*Khối D – 2008 – 2 điểm*) Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4(C)$

a) Khảo sát hàm số

b) Chứng mih rằng mọi đường thẳng đi qua $I(1;2)$ với hệ số góc *k* (*k* > - 3) đều cắt (*C*) tại ba điểm phân biệt *I, A, B* đồng thời *I* là trung điểm *AB*.

Bài 12 (*CĐ – 2008 – 2 điểm*) Cho hàm số $y = \dfrac{x}{x-1}(H)$

a) Khảo sát hàm số

b) Tìm *m* để đường thẳng $(d): y = -x + m$ cắt (*H*) tại hai điểm phân biệt

Bài 13 (*Khối A – 2007 – 2 điểm*) Cho hàm $y = \dfrac{x^2 + 2(m+1)x + m^2 + 4m}{x+2}(H_m)$, *m* là tham số thực

a) Khảo sát hàm số khi m = - 1

b) Tìm *m* để hàm số có cực trị đồng thời các điểm cực trị của (H_m) cùng với gốc tọa độ *O* tạo thành một tam giác vuông tại *O*.

Bài 14 (*Khối B – 2007 – 2 điểm*) Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 3(m^2 - 1)x - 3m^2 - 1 (C_m)$, m là tham số

a) Khảo sát hàm số khi $m = 1$

b) Tìm m để hàm số có cực đại, cực tiểu và các điểm cực trị của (C_m) cách đều gốc tọa độ.

Bài 15 (*Khối D – 2007 – 2 điểm*) Cho hàm $y = \frac{2x}{x+1} (H)$

a) Khảo sát hàm số

b) Tìm $M \in (H)$, biết tiếp tuyến của (*H*) tại *M* cắt *Ox*, *Oy* tại *A*, *B* và tam giác *OAB* có diện tích bằng $\frac{1}{4}$.

Bài 16 (*Khối A – 2006 – 2 điểm*) Cho hàm số $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4 (C)$

a) Khảo sát hàm số

b) Tìm m để phương trình $2|x|^3 - 9x^2 + 12|x| = m$ có 6 nghiệm phân biệt

Bài 17 (*Khối B – 2006 – 2 điểm*) Cho hàm số $y = \frac{x^2 + x - 1}{x+2} (H)$

a) Khảo sát hàm số

b) Viết phương trình tiếp tuyến của (*H*), biết tiếp tuyến vuông góc với tiệm cận xiên của (*H*)

Bài 18 (*Khối D – 2006 – 2 điểm*) Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 2 (C)$

a) Khảo sát hàm số

b) Gọi (*d*) là đường thẳng qua *A*(3; 20) và có hệ số góc *m*. Tìm *m* để đường thẳng (*d*) cắt (*C*) tại 3 điểm phân biệt.

Bài 19 (*Khối A – 2005 – 2 điểm*) Cho hàm số $y = mx + \frac{1}{x} (H_m)$, m là tham số

a) Khảo sát hàm số khi $m = \frac{1}{4}$

b) Tìm m để hàm số có cực trị và khoảng cách từ điểm cực tiểu của (H_m) đến tiệm cận xiên của (H_m) bằng $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Bài 20 (*Khối B – 2005 – 2 điểm*) Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 + (m+1)x + m + 1}{x+1} (H_m)$, m là tham số

a) Khảo sát hàm số khi $m = 1$

b) Chứng minh rằng với mọi m, (H_m) luôn có cực đại, cực tiểu và khoảng cách giữa hai điểm đó bằng $\sqrt{20}$

Bài 21 (*Khối D – 2005 – 2 điểm*) Cho hàm $y = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{m}{2}x^2 + \dfrac{1}{3} (C_m)$, m là tham số

a) Khảo sát hàm số khi $m = 2$

b) Gọi M là điểm thuộc (C_m) có hoành độ bằng – 1. Tìm m để tiếp tuyến của (C_m) tại M song song với đường thẳng $(d): 5x - y = 0$

Bài 22 (*Khối A – 2004 – 2 điểm*) Cho hàm $y = \dfrac{-x^2 + 3x - 3}{2(x-1)} (H)$

a) Khảo sát hàm số

b) Tìm m để đường thẳng $y = m$ cắt (H) tại hai điểm A, B sao cho $AB = 1$

Bài 23 (*Khối B – 2004 – 2 điểm*) Cho hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x (C)$

a) Khảo sát hàm số

b) Viết phương trình tiếp tuyến (d) của (C) tại điểm uốn và chứng minh rằng (d) là tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất.

Bài 24 (*Khối D – 2004 – 2 điểm*) Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 9x + 1 (C_m)$, m là tham số

a) Khảo sát hàm số khi $m = 2$

b) Tìm m để điểm uốn của (C_m) thuộc đường thẳng $y = x + 1$

Bài 25 (*Khối A – 2003 – 2 điểm*) Cho hàm số $y = \dfrac{mx^2 + x + m}{x-1} (H_m)$

a) Khảo sát hàm số khi $m = - 1$

b) Tìm m để (H_m) cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt có hoành độ dương

Bài 26 (*Khối B – 2003 – 2 điểm*) Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + m (C_m)$, m là tham số

a) Khảo sát hàm số khi $m = 2$

b) Tìm m để (C_m) có hai điểm phân biệt đối xứng nhau qua gốc tọa độ

Bài 27 (*Khối D – 2003 – 2 điểm*) Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 - 2x + 4}{x - 2} (H)$

a) Khảo sát hàm số

b) Tìm m để đường thẳng $(d_m): y = mx + 2 - 2m$ cắt (H) tại hai điểm phân biệt

Bài 28 (*Khối A – 2002 – 2,5 điểm*) Cho hàm số $y = -x^3 + 3mx^2 + 3(1 - m^2)x + m^3 - m^2 (C_m)$

a) Khảo sát hàm số khi $m = 1$

b) Tìm k để phương trình $-x^3 + 3x^2 + k^3 - 3k^2 = 0$ có ba nghiệm phân biệt.

c) Viết phương trình đường thẳng qua hai điểm cực trị của (C_m)

Bài 29 (*Khối B – 2002 – 2 điểm*) Cho hàm số $y = mx^4 + (m^2 - 9)x^2 + 10 (C_m)$, m là tham số thực

a) Khảo sát hàm số khi $m = 1$

b) Tìm m để hàm số có ba điểm cực trị

Bài 30 (*Khối D – 2002 – 3 điểm*) Cho hàm số $y = \dfrac{(2m-1)x - m^2}{x - 1} (H_m)$

a) Khảo sát hàm số khi m = - 1

b) Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi (H_{-1}) và hai trục tọa độ

c) Tìm m để (H_m) tiếp xúc với đường thẳng $(d): y = x$