Rappels de logique des propositions

Objectif principal de la logique

L'objectif principal de la logique est *d'étudier la validité des raisonnements* : des raisonnements humains dans tous les domaines — des raisonnements en mathématiques aux raisonnements dans la vie quotidienne (raisonnements « naturels ») — ainsi que des raisonnements « artificiels » (calculs sur ordinateur).

On rappelle ci-dessous les fondements de la logique des propositions (ou logique d'ordre 0), qui manipule des expressions (appelées formules) construites à partir de **symboles propositionnels** pouvant prendre les valeurs *vrai* ou *faux,* et de **connecteurs logiques** (négation $\neg$, conjonction $\wedge$, disjonction $\vee$, implication $\rightarrow$, équivalence $\leftrightarrow$).

1. Syntaxe

On considère un ensemble de symboles propositionnels : {p, q, ………} et un symbole particulier $\perp$ (absurde, FAUX, ...). Les symboles propositionnels sont aussi appelés variables propositionnelles.

Définition. Les formules bien formées (**fbf**) sont définies par induction :

(base) Un symbole propositionnel est une fbf. On l'appelle aussi un atome (ou formule atomique).

(construction) si A et B sont des fbf , alors $\neg A$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$, $(A \leftrightarrow B)$ sont des fbf.

De nombreuses variantes syntaxiques existent. Notamment, on peut ne considérer que les deux connecteurs $\wedge$ et $\neg$, les autres étant des abréviations (des macros) :
$\perp$ pour $(A \wedge \neg A)$,
$(A \vee B)$ pour $\neg(\neg A \wedge \neg B)$,
$(A \rightarrow B)$ pour $(\neg A \vee B)$,
$(A \leftrightarrow B)$ pour $((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A))$, donc pour $((\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A))$

Quelques formes de fbf particulières :

Un **littéral** est un atome ou la négation d'un atome. Une **clause** est une disjonction de littéraux. Une fbf est sous **forme normale conjonctive** (CNF) si elle s'écrit comme une conjonction de clauses.

2. Sémantique

Pour pouvoir donner un « sens » à une fbf quelconque, c'est-à-dire une valeur prise dans dans l'ensemble {*vrai*, *faux*} (ou {0,1}, avec vrai=1 et faux=0), nous allons suivre la définition par induction des fbf.

Interprétation des symboles propositionnels

Etant donné Σ un ensemble de symboles propositionnels, une **interprétation** de Σ est une application I de Σ dans l'ensemble B ={0, 1} (B = {*vrai*, *faux*}).

Le symbole propositionnel particulier $\perp$ est toujours interprété par 0 (faux). De même, on interprète toujours de la même façon les connecteurs logiques. Ces interprétations ne sont pas arbitraires, elles ont été choisies de telle sorte qu'elles puissent être utilisées pour modéliser des raisonnements.

Interprétation des connecteurs

On interprète les connecteurs comme des applications de B dans B, ou de B x B dans B, suivant qu'ils sont d'arité 1 ou 2 (l'arité étant le nombre d'arguments d'un connecteur).

NON : l'interprétation de $\neg$, est l'application de B dans B qui échange 0 et 1,
ET : l'interprétation de $\wedge$, est l'application de B x B dans B qui vaut 1 ssi les deux arguments valent 1,
OU : l'interprétation de $\vee$, est l'application de B x B dans B qui vaut 0 ssi les deux arguments valent 0,
SI-ALORS : l'interprétation de $\rightarrow$, est l'application de B x B dans B qui vaut 0 ssi le premier argument vaut 1 et le second 0,
SSI : l'interprétation de $\leftrightarrow$, est l'application de B x B dans B qui vaut 1 ssi les deux arguments ont la même valeur.

Interprétation d'une fbf

Etant donnée une interprétation *I* des symboles propositionnels, on peut définir la valeur de vérité d'une fbf P selon *I*, que l'on note ***v(P, I)***. L'application v est définie ainsi :

- si P est un symbole propositionnel alors v(P, I) = I(P)
- si P = $\perp$ alors v(P, I) = 0 pour tout I
- si P = $\neg$ Q alors v(P, I) = NON (v(Q, I))
- si P = (Q$*$R) alors v(P, I) = OP(v(Q, I), v(R, I)) ; où OP = OU si $*$ = $\vee$, OP = ET si $*$ = $\wedge$, OP = SI-ALORS si $*$ = $\rightarrow$, et OP = SSI si $*$ = $\leftrightarrow$.

D'un point de vue intuitif, on peut voir une interprétation des symboles propositionnels comme un « monde possible » dans lequel chaque énoncé (représenté par une fbf) est vrai ou faux.
Une interprétation qui donne la valeur 1 à une fbf est aussi appelée un **modèle** de cette fbf (respectivement **contre-modèle** si la valeur est 0).

Table de vérité

P étant une fbf ayant pour ensemble de symboles $\Sigma = \{p_1, p_2, ..., p_k\}$, la table de vérité de P est un tableau qui associe aux 2^k interprétations possibles I_j de Σ les 2^k valeurs de v(P, I_j).

Définitions

- Une fbf est **satisfiable** s'il existe au moins une interprétation dans laquelle elle est vraie
- Une fbf est **contingente** s'il existe au moins une interprétation dans laquelle elle est vraie et une dans laquelle elle est fausse
- Une fbf est **valide** si elle est vraie dans toute interprétation
- Une fbf est **insatisfiable** si elle est fausse dans toute interprétation

Propriétés

P est satisfiable ssi ¬P n'est pas valide
P est insatisfiable ssi ¬P est valide
P est contingente ssi ¬P est contingente

3. Equivalence logique et formulaire de base

Définition. Deux fbf P et Q sont **logiquement équivalentes** ssi elles ont la même valeur pour **toute** interprétation : pour toute interprétation I, v(P, I) = v(Q, I). On utilise la notation P $\equiv$ Q.

Attention : P $\equiv$ Q n'est pas une fbf, il ne faut pas confondre P $\equiv$ Q et (P $\leftrightarrow$ Q).

Théorème : ***P ≡ Q ssi (P ↔ Q) est valide***

Formulaire de base (quelques équivalences à connaître)

Idempotence de $\wedge$ et $\vee$

$(A \wedge A) \equiv A$ $\quad$ $(A \vee A) \equiv A$

Associativité et commutativité de $\wedge$ et $\vee$

$((A \wedge B) \wedge C) \equiv (A \wedge (B \wedge C))$ $\quad$ $((A \vee B) \vee C) \equiv (A \vee (B \vee C))$

$(A \wedge B) \equiv (B \wedge A)$ $\quad$ $(A \vee B) \equiv (B \vee A)$

Distributivité

$((A \wedge (B \vee C) \equiv ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$ $\quad$ $((A \vee (B \wedge C) \equiv ((A \vee B) \wedge (A \vee C))$

Double négation

$\neg\neg A \equiv A$

Lois de DeMorgan

$\neg(A \wedge B) \equiv (\neg A \vee \neg B)$ $\quad$ $\neg(A \vee B) \equiv (\neg A \wedge \neg B)$

Implication

$(A \rightarrow B) \equiv (\neg A \vee B)$ $\quad$ $(A \leftrightarrow B) \equiv ((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A))$

$\neg A \equiv (A \rightarrow \bot)$

Absurde

$\bot \equiv (A \wedge \neg A)$

En particulier, toute fbf est équivalente à une fbf sous forme normale conjonctive (conjonction de clauses).

Définition. Un ensemble de fbf {P1, P2, ..., Pk} est **consistant** ssi $(P1 \wedge (P2 \wedge ...(Pk\text{-}1 \wedge Pk)...)$ est satisfiable. Il est **inconsistant**, ou contradictoire, ssi $(P1 \wedge (P2 \wedge ...(Pk\text{-}1 \wedge Pk)...)$ est insatisfiable.

On s'autorisera aussi à utiliser les termes satisfiable et insatisfiable pour un ensemble de fbf (au lieu de consistant et inconsistant).

4. Conséquence logique

On s'intéresse maintenant à la validité d'un raisonnement. De façon générale, un raisonnement consiste à obtenir une conclusion à partir d'un ensemble d'hypothèses. Imaginons que l'on formule les hypothèses $H_1, \ldots, H_k$ (chacune étant une fbf) et qu'on en conclut C (une fbf). Ce raisonnement est **correct** (ou **valide**) si C est une **conséquence logique** de $H_1, \ldots, H_k$: intuitivement, cela signifie que pour tout monde possible, si $H_1, \ldots, H_k$ sont vrais dans ce monde, alors C est aussi vrai dans ce monde. Il n'y donc aucun monde possible dans lequel $H_1, \ldots, H_k$ sont tous vrais et C est faux.
En d'autres termes, la fbf **$(H_1 \wedge ... \wedge H_k \wedge \neg C)$ est insatisfiable.**

Remarque : pour simplifier l'écriture, on écrit ici $H_1 \wedge ... \wedge H_k$ au lieu de $(H_1 \wedge (H_2 \wedge ...(H_{k-1} \wedge H_k)...)$.
De même, on écrit souvent $H_1 \vee ... \vee H_k$ au lieu de $(H_1 \wedge (H_2 \wedge ...(H_{k-1} \wedge H_k)...)$.

Définition. Une fbf C est une **conséquence logique** de l'ensemble de fbf $\{H_1, ..., H_k\}$ ssi pour toute interprétation I telle que $v(H_1 \wedge ... \wedge H_k, I) = 1$ (ou *vrai*), on a aussi $v(C, I) = 1$ (ou *vrai*). On utilise la notation **$\{H_1, ..., H_k\} \models C$**.

Attention : $\{H_1, ..., H_k\} \models C$ n'est pas une fbf mais une relation entre $\{H_1, ..., H_k\}$ et C.
On commettra souvent l'abus d'écriture qui consiste à omettre les {} : $H_1, ..., H_k \models C$

Théorème

$\{H_1, ..., H_k\} \models C$ ***ssi***

$(H_1 \wedge ... \wedge H_k \rightarrow C)$ ***est valide ssi***

$(H_1 \wedge ... \wedge H_k \wedge \neg C)$ ***est insatisfiable***