

文献综述：价格跳跃^{*}

田亦庄

目录

1	模型引入	2
2	模型及假设	3
2.1	收益序列的模型假设	3
2.2	跳跃检验的构造	4
2.2.1	最简单情形： $\mu = 0$ 且无跳跃	5
2.2.2	最简单情形： $\mu = 0$ 且有跳跃	6
2.2.3	统计量的拒绝域 \mathcal{R} 选取和跳跃大小的相关关系	7
2.2.4	方法有效性检验：蒙特卡罗模拟	8
2.2.5	一般情形： σ 不为常数	8
3	跳跃到达动力学 (Dynamics of Jump Arrivals)	9
3.1	实证研究	9
3.2	跳跃聚集的经济学应用：风险管理	10
3.3	模型模拟：蒙特卡罗方法	10

本综述涉及的文献为：*Jumps in real time financial markets: A new nonparametric test and jump clustering*，作者为 Suzanne S.Lee 和 Per A. Mykland。这篇文献提出的内容是引入了一种适用于连续时间资产定价模型的跳跃非参数跳跃检验方法，对实际跳跃的

^{*}本文主要是对文献中重要内容的梳理和重新阐述，由于时间紧迫，因此在行文和句法上多有不严谨之处

出现和跳跃大小提供了鉴别。本文的主要工作是探索了动态跳跃强度检验框架，并从外汇市场的高频数据发现了跳跃聚集现象的实证证据。

1 模型引入

一般金融市场的渐进式发展进程总是会被预期外的突发事件打断（市场崩盘、企业违约、央行政策性调整、国际事件），这些极端的市場不确定性产生了金融变量的不连续性 (significant discontinuities)。这种不连续，实质上就是普遍存在的“跳跃”(Jump) 现象，已经有了许多的实证研究，其成果被广泛应用于资产组合、风险管理、债券定价和对冲。有利的是，将跳跃并入连续时间资产定价模型能够为收益率分布的过度峰值、偏度和隐含波动率微笑现象 (implied volatility smile) 提供有信服力的解释。另外在对冲的风险管理上，将跳跃从一般的风险扩散 (diffusive risk) 中提取出来是相当重要的。

由于能获取的数据实际意义上都是离散的，在连续资产定价模型中识别跳跃相当困难，因此必须通过计量经济学假设对连续模型中的跳跃做出设定，一般针对非连续的价格变化设定。显然，价格变化的一部分来自扩散过程，但扩散过程也可能产生与跳跃类似的不连续性。因为跳跃非连续，结合连续模型分析并辨别跳跃十分重要。本篇文献提出的跳跃检验方法目的是理清跳跃到达和跳跃分类（根据跳跃大小分类）。

对于跳跃大小 (jump size)，有一系列文献成果：探明跳跃大小和到达在动态对冲策略中很重要；跳跃散布 (variance of jumps) 越大，跳跃造成的影响越大；跳跃到达情况影响衍生对冲资产组合的动态平衡。对跳跃检验，也有一些新的研究工具，包括但不限于：一种扩散衡量标准，基于转移密度来监测跳跃存在；一种跳跃扩散模型的基于核估计方法的连续非参估计算子；一种新的给定时间间隔的幂变差和双幂变差波动的跳跃检验。同样，也有一些参数估计方法：隐含状态广义矩估计 (GMM)，有效矩估计 (EMM)，最大似然估计，贝叶斯方法，基于勒维过程（独立增量过程）的波动估计和跳跃类型检验。这些方法都存在着模型误设 (incorrect specification) 的风险，而非参

估计可以避免模型误设的风险，并且具有更好的鲁棒性。

文献中提出的检验，在对外汇市场的实证分析中得到了检验，证明其有效。检验不仅发现了外汇市场的跳跃聚集现象，而且结合风险价格 (VaR) 发现其在跳跃聚集时有着更大的值，也解释了收益率分布的厚尾产生原因——跳跃到来后市场波动的结果。

2 模型及假设

2.1 收益序列的模型假设

定义完全概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathcal{P})$, \mathcal{F}_t 右连续, \mathcal{P} 是数据生成测度 (data-generating measure)。连续的收益可以写为 $d\log S(t), t \geq 0$, $S(t)$ 是条件 \mathcal{P} 下 t 时刻的资产价格。本文提及的主要是对资产收益序列的跳跃检验。由此得到的对市场无跳跃的零假设为

$$d\log S(t) = \mu(t)dt + \sigma(t)dW(t) \quad (1)$$

$W(t)$ 是满足 \mathcal{F}_t 的标准布朗运动, 漂移项 $\mu(t)$ 和点波动 (spot volatility) $\sigma(t)$ 是 \mathcal{F}_t 下的连续函数, 使得上述过程为扩散过程。备择假设可表示为

$$d\log S(t) = \mu(t)dt + \sigma(t)dW(t) + Y(t)dJ(t) \quad (2)$$

$dJ(t)$ 是强度为 $\lambda(t)$ 的跳跃计数过程, $Y(t)$ 是均值为 $\mu_y(t)$ 、标准差为 $\sigma_y(t)$ 的跳跃大小。 $S(t)$ 的观测值是离散的, 其观测发生在给定的时间点 $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ 上。

假设 1

$$\sup_i \sup_{t_i \leq u \leq t_{i+1}} |\mu(u) - \mu(t_i)| = O_p(\sqrt{\Delta t})$$

$$\sup_i \sup_{t_i \leq u \leq t_{i+1}} |\sigma(u) - \sigma(t_i)| = O_p(\sqrt{\Delta t})$$

O_p 含义为对随机向量 $\{X(n)\}$ 和非负随机变量 $\{dn\}$,

$$P(|X_n| > M_\varepsilon a_n) < \varepsilon, \forall \varepsilon > 0, M_\varepsilon = Const \Rightarrow X_n = O_p(d_n)$$

假设满足的前提条件是漂移项和扩散项系数在任意时间间隔内不发生突变。

2.2 跳跃检验的构造

如果时间间隔足够小, 当一个跳跃出现时, 已实现收益 (realized return) 将远高于完全连续的随机情况 (purely continuous random innovations)。因为对波动更剧烈的连续过程的离散观测值也会在没有跳跃的情况下得到更高的已实现收益, 因此需要一种能将收益标准化的测度局部波动率的方法来衡量价格过程中连续部分的影响, 称为 local volatility。这种方法是通过比较已实现收益和连续局部波动估计值 (对应区间的收益变动) 来刻画。在此意义上, 需要对随机过程波动做出有效估计, 一般常用非参数积分方差估计, 将已实现二次幂波动定义为平方收益的加总

$$\text{plim}_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=2}^n (\log S(t_i) - \log S(t_{i-1}))^2 \quad (3)$$

上述估计方法在跳跃存在时不连续, 因此需要引入已实现双幂变差 (realized bipower variation), 定义为连续绝对回报乘积之和

$$\text{plim}_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=3}^n |\log S(t_i) - \log S(t_{i-1})| |\log S(t_{i-1}) - \log S(t_{i-2})| \quad (4)$$

上述估计方法是收益过程存在跳跃时对累积波动的连续估计。高度不稳定的市场环境显然会使得辨别跳跃更加困难。

在本文献研究中发现, 增加观测频率可以辨别出并不常见的泊松跳跃。由于使用高频数据分析, 在数值上扩散项 (\sqrt{dt}) 和跳跃项 (1) 远大于漂移项 (dt)。实际上, 漂移项估计值的标准差更大, 如果将其纳入方差估计, 会使得方差估计的准确度降低。因此在最开始可以研究 $\mu = 0$ 的情况, 对其他情况的研究在事实上也表明结果与零漂移项的情况一致。

对双幂变差测度，下一个已实现收益/局部波动估计值，能够揭示跳跃大小和跳跃是否出现。对给定的时间线 T 上，有 n 次观测，所以时间间隔 $\Delta t = \frac{T}{n}$ 。考虑窗口大小为 K 的观测窗口中的收益变动情况，窗口内存在 K 个观测值，时变的局部波动可以用双幂变差来估计。

定义 1 统计量 $T(t_i)$ ，在 t_i 时刻检测 t_{i-1} 到 t_i 是否存在跳跃

$$T(t_i) = \frac{\log S(t_i) - \log S(t_{i-1})}{\sqrt{\frac{1}{K-2} \sum_{j=i-K+2}^{i-1} |\log S(t_j) - \log S(t_{j-1})| |\log S(t_{j-1}) - \log S(t_{j-2})|}} \quad (5)$$

K 的大小选择有以下标准，即刚好使得跳跃对波动估计的影响消失时的值为最优。本文后续还说明了，无跳跃情况下，统计量 T 的值遵从正态分布，这为拒绝拟合分布上的扩散模型假设提供了检验标准。

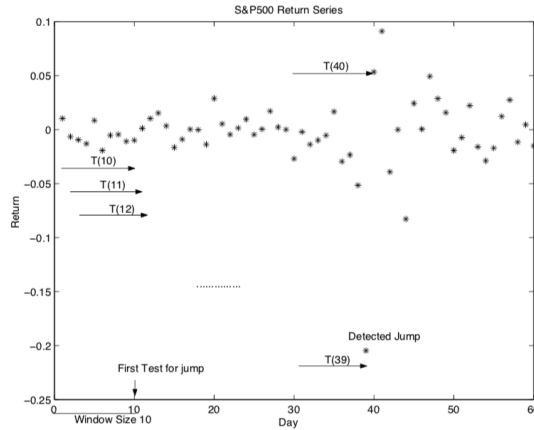


Figure 1: Formation of our new test with a window size $K = 10$

图 1: $K=10$ 的跳跃检验示例

2.2.1 最简单情形： $\mu = 0$ 且无跳跃

$$d\log S(t) = \sigma(t)dW(t) \quad (6)$$

对最简单情形的分布拟合由下列定理证明。

定理 1 (零假设检验定理) 满足[假设 1](#)条件, 且在零假设条件下, 当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时

$$\sup_i |T(t_i) - \hat{T}(t_i)| = O_p(\Delta t^{\frac{3}{2}-\delta+\alpha})$$

δ 满足 $0 < \delta < \frac{3}{2} + \alpha$, 且

$$\hat{T}(t_i) = \frac{U_i}{c}$$

其中 $U_i = \frac{1}{\sqrt{\Delta t}}(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})$, $c = E|U_i| = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \approx 0.7979$

显然 U_i 是标准正态随机变量, $\hat{T}(t_i)$ 遵循正态分布, 其均值为 0, 方差为 $\frac{1}{c^2}$ 。因此统计量 $T(t_i)$ 近似遵从 $\hat{T}(t_i)$ 同分布。

2.2.2 最简单情形: $\mu = 0$ 且有跳跃

$$d\log S(t) = \sigma(t)dW(t) + Y(t)dJ(t) \quad (7)$$

对此情形的分布拟合同样由定理得到。

定理 2 (备择假设检验定理) 满足[假设 1](#)条件, 且在备择条件下。如果 $K = O_p(\Delta t^\alpha)$, $-1 < \alpha < -0.5$, 则

$$T(t_i) \approx \frac{U_i}{c} + \frac{Y(\tau)}{c\sigma\sqrt{\Delta t}} I_{\tau \in (t_{i-1}, t_i]} \quad ^1$$

当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, $T(t_i) \rightarrow \infty$ 。

对观测窗口 K , 其大小必须满足: 使得收益过程中的跳跃部分对局部波动无影响。因此其取值必须足够大但又远小于总的观测数。实证研究表明, K 在有效范围内增大只会增加计算量而不会提高准确度, 因此 K^{opt} 应为有效范围内可取的最小整数值。

¹ I 的含义尚未弄清

2.2.3 统计量的拒绝域 \mathcal{R} 选取和跳跃大小的相关关系

有无跳跃情况下, 统计量 T 的形式有明显差异, 由[定理 1](#)、[定理 2](#)可知, 当跳跃存在时 T 近似为 ∞ , 因此可以观察无跳跃时的统计量 T 的最大值以得到拒绝域。

引理 1 (零假设统计量最大值分布) 对满足[定理 1](#)的零假设情形, 当 $\Delta t \rightarrow 0$

$$\frac{\max |T(t_i)| - C_n}{S_n} \rightarrow \xi$$

ξ 的累积分布函数 $P(\xi \leq x) = \exp(-e^{-x})$,

$$C_n = \frac{(2\log n)^{0.5}}{c} - \frac{\log \pi + \log(\log n)}{2c(2\log n)^{0.5}} \quad S_n = \frac{1}{c(2\log n)^{0.5}}$$

[引理 1](#)是对统计量最大可能值分布的拟合, 通过拟合分布可以近似地找到无跳跃的拒绝域。[引理 1](#) 表明如果统计量 T 的值落在置信区间外, 那么观测值来自无跳跃情形下的扩散过程的可能性很低 (很大可能存在跳跃)。

定理 3 (最大值分布完美定理) α_n 为置信水平, β_n 为对应地统计量最大值分布的 $(1 - \alpha_n)^{th}$ (分位点)。假定给定时间 $[0, T]$ 内有 N 个跳跃,

$$P(\text{correctly classify all jumps} | N \text{ jumps}) = 1 - \frac{2}{\sqrt{2\pi}} y_n N + o(y_n N)$$

$y_n = (\beta_n S_n + C_n) c \sigma \sqrt{\Delta t}$, 因此当 $\beta_n \rightarrow \infty$ 但小于 $\sqrt{n \log n}$ 时,

$$P(\text{correctly classify all jumps} | N \text{ jumps}) \rightarrow 1$$

由[定理 3](#), 有

推论 1 如果跳跃密度为 λ ，时间范围为 0 到 T ，则

$$E(P(\text{correctly classify all jumps})) = 1 - \frac{2}{\sqrt{2\pi}} y_n \lambda T + o(y_n \lambda T)$$

定理 4 (错误发现跳跃不可能定理) β_n 同定理 3， $\Delta t \rightarrow 0$ 时

$$P(\text{incorrectly reject any non-jumps} | N \text{ jumps}) = \exp(-\beta_n) + o(\exp(-\beta_n))$$

当 $\beta_n \rightarrow \infty$ 时， $P(\text{incorrectly reject any non-jumps} | N \text{ jumps}) \rightarrow 0$

定理 5 (跳跃数量错误不可能定理) $\hat{\Lambda}$ 是累积分布计算出的跳跃数量， Λ^{actual} 是真实跳跃数量，则

$$P(\hat{\Lambda} \neq \Lambda^{actual}) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} y_n N + \exp(-\beta_n) + \max(\exp(-\beta_n))$$

2.2.4 方法有效性检验：蒙特卡罗模拟

原文中，通过蒙特卡罗模拟，得到结论：增加观测频率会提高精度（时间尺度越小精度越高），时间间隔趋近于 0 时，准确度趋近于 1。

2.2.5 一般情形： σ 不为常数

前面小节讨论的情况是默认 $\sigma(t)$ 为常数值 σ 的简单情形。简单情形时能得到结论：增加观测频率能够降低第一类错误² 发生概率的（均值的）偏差和标准误；而在低频率情况下，想让模型发现比较小的跳跃就会变得很困难。

在 σ 不为常数时，当增加观测频率时，甚至能将对小跳跃的观测能力提高到 98% 以上。跳跃大小用 $y \times \sigma$ 定义， y 为给定的常数。

在本文中，假定点波动过程是两个独立的随机微分方程解的和，即

$$d\sigma_s^2(t) = -\theta_s \{\sigma_s^2(t) - \kappa_s\} dt + \omega_s \sigma_s(t) dB(\theta_s t) \quad (8)$$

²错误拒绝原假设

B 为布朗运动, $\theta_s > 0$ 。 $\kappa_s \geq \omega_s^2/2$ for $s = 1, 2$ 。为了模拟真实市场, 原文献采用了一篇文献的实证结论, 设定

$$E(\sigma_s^2) = p_s 0.509, \text{Var}(\sigma_s^2) = p_s 0.461, \text{ for } s = 1, 2 \quad (9)$$

$p_1 = 0.218, p_2 = 0.782, \theta_1 = 0.0429, \theta_2 = 3.74$ 。假设波动率中的两个布朗运动与回报过程中的随机项之间没有相关性, 以排除杠杆效应的干扰。跳跃大小满足的分布和泊松计数过程与常数波动率情况下相同。结果表明, 如果波动是变动的, 找出存在的跳跃会更加困难, 错误拒绝原假设的风险会更大, 模型失准。

3 跳跃到达动力学 (Dynamics of Jump Arrivals)

3.1 实证研究

原文提及在外汇市场中发现了跳跃聚集 (jump clustering) 现象的存在, 跳跃的到达可能会导致剧烈波动, 因为市场中的参与者对价格跳跃的反应并不一致。波动也会在 (参与者) 不连续观测的安全价格上带来不同影响, 因此一次跳跃可能会促成后续的跳跃出现。

定义扩散拒绝函数记录 t_i 时刻统计量 T 值在拒绝域上的情形

$$g(T(t_i)) = I(T(t_i) \in \mathcal{R}) \quad (10)$$

对生成的序列作自回归分析, 可以假设

$$g(T(t_i)) = \beta_{u,0} + \beta_{u,1}g(T(t_{i-1})) + \varepsilon_i \quad (11)$$

$u = DM, JY$ 意味着不同货币对美元的情形 (德国马克、日元)。因为 $E[g(T(t_i))] = E[I(T(t_i) \in \mathcal{R})] = \lambda(t_i)$, 可以将上式延拓为

$$\lambda(t_i) = \beta_{u,0} + \beta_{u,1}\lambda(t_{i-1}) \quad (12)$$

显然系数 $\beta_{u,1}$ 的大小意味着跳跃聚集现象的强度，也代表着当前跳跃到达对未来跳跃的正向影响。实证结果表明，当前跳跃确实增加了未来跳跃的密度。

3.2 跳跃聚集的经济学应用：风险管理

风险价格 VaR(value at risk) 定义为未来给定时间范围内给定置信水平 p 时的最大可能损失，

$$P(\Delta V \leq VaR) = 1 - p$$

由于 VaR 的大小与分布形状密切相关，偏度和峰度对 VaR 的大小影响极大，置信水平也决定着 VaR 的极端程度。因此跳跃会对 VaR 产生很大影响。

上一小节提出的动态跳跃结构（随机波动率）表明未来跳跃密度比静态波动率情况高，因此收益率分布厚尾特征明显，相同置信水平上的 VaR 更大。原文的实证研究也佐证了这一结果。

3.3 模型模拟：蒙特卡洛方法

文献中模型模拟的主要目的是为了研究不同观测频率对模型表现的影响和最优的观测窗口大小。在这一节中对辨别跳跃起到更加主要的决定性作用的，是跳跃大小的方差，而非波动率水平的变动。模型模拟使用的模型形式为

$$d\log S(t) = \mu dt + \sigma dW(t) + Y(t)dJ(t)$$

对模型效果的评价主要由其有效辨别真实跳跃的能力决定，因此定义总体误差为

$$\begin{aligned} \text{Total Error} &= \hat{\Lambda}(T) - \Lambda(T) \\ &= \hat{\Lambda}(T) - \Lambda^{\text{actual}}(T) + \Lambda^{\text{actual}}(T) - \Lambda(T) \\ &= \text{Err}_1 + \text{Err}_2 \end{aligned} \tag{13}$$

$\Lambda(T)$ 为正确识别的跳跃数量， $\hat{\Lambda}(T)$ 为跳跃数量的估计值， $\Lambda^{\text{actual}}(T)$ 为跳跃数量的实际值。模拟结果表明，增加观察频率可以明显降低 $E[\text{Err}_1^2]$ 并提高模型发现跳跃的

准确度，但降低跳跃大小的方差会增大 Err_1 。同时，扩大时间范围会降低总体误差， Err_1 和 Err_2 都会减小，因此更长的时间范围也会增加模型准确度。

模拟实验还进行了不同时间长度下的控制变量 K 的实验，结果表明 K 的最优值是有效值区间中的最小整数。 $K = O_p(\Delta t^\alpha)$, $-1 < \alpha < -0.5$ 。 α 的值域由最小均方误差约束给出。因此提高 K 值并不总会使得检验效率提高，特别是对跳跃密度的估计中，给定总观测数时提高 K 会减少总的检验次数，影响模型精度。