UTFPR — UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ — CÂMPUS PATO BRANCO

Disciplina: Cálculo Diferencial e Integral I
Professores: Edinéia Zarpelon, Marieli Tumelero e Mateus Salomão
Monitores: Adrean Souza Rafael e Davi Cantu Messias

LISTA DE EXERCÍCIOS 01 - INTEGRAIS

PRIMITIVAS

1. Nos problemas a seguir, calcule a primitiva geral. Comprove as repostas obtidas, derivando-as.

(a) $f(x) = x^7$

(b) $g(x) = \dfrac{1}{x^9}$

(c) $h(x) = 3e^x - \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} + \dfrac{3}{x^3}$

(d) $t(x) = 3x^2 - \sqrt{5x} + \dfrac{1}{3x}$

(e) $f(x) = \sqrt{x}(x^2 - 1) + e^2$

(f) $f(x) = \dfrac{e^x}{2} + x\sqrt{x}$

(g) $h(x) = -\dfrac{3}{2x^2} + \dfrac{\sqrt{x}}{2}$

(h) $f(x) = 3\sqrt{x} - \dfrac{2}{x^5} + \dfrac{1}{x}$

(i) $r(x) = (x^3 - 2x^2)\left(\dfrac{2}{x} + 3\right)$

(j) $g(x) = \dfrac{x^3 - x + 6}{x^3}$

(k) $g(x) = 14$

(l) $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x^{-\frac{2}{3}} + 7}{\sqrt[5]{x^2}}$

2. Encontre uma primitiva F, da função $f(x) = x^{\frac{2}{3}} + x$, que satisfaça $F(1) = 1$.

3. Encontre uma primitiva F, da função $f(x) = x - \dfrac{1}{x}$, que satisfaça $F(1) = \dfrac{3}{2}$.

REGRAS BÁSICAS

4. Calcule as integrais abaixo.

(a) $\displaystyle\int_{-1}^{2} (x^3 - 2x)\, dx$

(b) $\displaystyle\int_{4}^{0} \sqrt{x}\, dx$

(c) $\displaystyle\int_{-2}^{5} 6\, dx$

(d) $\displaystyle\int_{\pi}^{2\pi} \cos\theta\, d\theta$

(e) $\displaystyle\int_{1}^{9} \frac{x-1}{\sqrt{x}}\, dx$

(f) $\displaystyle\int_{1}^{9} \frac{1}{2x}\, dx$

(g) $\displaystyle\int_{-1}^{1} e^{u+1}\, du$

(h) $\displaystyle\int_{1}^{2} (1 + 2y)^2\, dy$

(i) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{4}{t^2 + 1}\, dt$

(j) $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{4 + u^2}{u^3}\, du$

5. Nos problemas a seguir, calcule a integral indicada. Comprove as respostas obtidas, derivando-as.

(a) $\displaystyle\int x^5\, dx$

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2}\, dx$

(c) $\displaystyle\int 5\, dx$

(d) $\displaystyle\int (3t^2 - \sqrt{5t} + 2)\, dt$

(e) $\displaystyle\int \left(3\sqrt{y} - \frac{2}{y^3} + \frac{1}{y}\right)\, dy$

(f) $\displaystyle\int \left(\frac{e^x}{2} + x\sqrt{x}\right)\, dx$

(g) $\displaystyle\int \left(\frac{1}{3u} - \frac{3}{2u^2} + e^2 + \frac{\sqrt{u}}{2}\right)\, du$

(h) $\displaystyle\int \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2}\, dx$

(i) $\displaystyle\int (x^3 - 2x^2)\left(\frac{1}{x} - 5\right)\, dx$

(j) $\displaystyle\int \sqrt{t}(t^2 - 1)\, dx$

(k) $\displaystyle\int \frac{x^3 + 4x^{-\frac{1}{2}} + 4}{\sqrt[3]{x}}\, dx$

(l) $\displaystyle\int 2e^x - \frac{\text{sen}x}{\cos^2 x} + \frac{2}{x^7}\, dx$

(m) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x \ln x^2}\, dx$

(n) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx$

(o) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}\, dx$

6. Calcule $\displaystyle\int_{-2}^{2} f(x)dx$ sabendo que $f(x) = \begin{cases} 2, & se \quad -2 \leq x \leq 0 \\ 4 - x^2, & se \quad 0 < x \leq 2 \end{cases}$.

SUBSTITUIÇÃO, POR PARTES

7. Calcule as seguintes integrais utilizando substituição:

(a) $\displaystyle\int \sqrt{3x - 2}dx$

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{3x - 2}dx$

(c) $\displaystyle\int \frac{1}{(3x - 2)^2}dx$

(d) $\displaystyle\int x \cdot \sin x^2 dx$

(e) $\displaystyle\int x^2 \cdot e^{x^3} dx$

(f) $\displaystyle\int \sin 5x dx$

(g) $\displaystyle\int x^3 \cdot \cos x^4 dx$

(h) $\displaystyle\int \cos^3 x \cdot \sin x dx$

(i) $\displaystyle\int_{\pi}^{2\pi} \sin^5 x \cdot \cos x dx$

(j) $\displaystyle\int \frac{2}{x + 3}dx$

(k) $\displaystyle\int \frac{5}{4x + 3}dx$

(l) $\displaystyle\int \frac{3x}{5 + 6x^2}dx$

(m) $\displaystyle\int \frac{x}{(1 + 4x^2)^2}dx$

(n) $\displaystyle\int_{5}^{4} x \cdot \sqrt{1 + 3x^2}dx$

(o) $\displaystyle\int_{-1}^{1} e^x \cdot \sqrt{1 + e^x}dx$

(p) $\displaystyle\int_{2}^{3} \frac{1}{(x - 1)^3}dx$

(q) $\displaystyle\int_{0}^{1} x \cdot e^{-x^2} dx$

8. Calcule as integrais utilizando integrais por partes:

(a) $\int x \cdot e^x dx$

(b) $\int x^2 \cdot e^x dx$

(c) $\int x^2 \ln x dx$

(d) $\int x \cdot \sec^2 x dx$

(e) $\int x \cdot (lnx)^2 dx$

(f) $\int (\ln x)^2 dx$

(g) $\int x \cdot e^{2x} dx$

(h) $\int x^3 \cdot e^{x^2} dx$

(i) $\int x^3 \cdot \cos x^2 dx$

(j) $\int e^{-x} \cdot \cos 2x dx$

(k) $\int x^n \cdot \ln x dx$

(l) $\int_1^2 \ln x dx$

(m) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cdot \cos x dx$

(n) $\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x dx$

(o) $\int_{-2}^{4} 2x \cdot e^x \, dx$

(p) $\int_{-3}^{5} (x+1) \cdot e^x \, dx$

(q) $\int_1^2 (x+1) \cdot \ln x \, dx$

(r) $\int x \cdot \text{sen} x \, dx$

(s) $\int e^{-2x} \cdot \text{sen} x \, dx$

(t) $\int x^3 \cdot \cos(x^2) \, dx$

FRAÇÕES PARCIAIS

9. Calcule as integrais utilizando frações parciais:

(a) $\int \frac{1}{x^2-4} dx$

(b) $\int \frac{x}{x^2-4} dx$

(c) $\int \frac{5x^2+1}{x-1} dx$

(d) $\int \frac{x+3}{x^2-x} dx$

(e) $\int \frac{x^2+3}{x^2-9} dx$

(f) $\int \frac{x}{x^2-5x+6} dx$

(g) $\int \frac{x+3}{(x-1)^2} dx$

(h) $\int \frac{x^2+x+1}{x^2-x} dx$

(i) $\int \frac{x^3+x+1}{x^2-4x+3} dx$

(j) $\int \frac{1}{x^2-x-2} dx$

(k) $\int \frac{x+1}{x(x-1)(x-2)} dx$

(l) $\int \frac{x^4+x+1}{x^3-x} dx$

(m) $\int \frac{2}{(x-1)^2(x+2)} dx$

(n) $\int \frac{x+3}{x^3-2x^2-x+2} dx$

TRIGONOMÉTRICAS E SUBSTITUIÇÃO TRIGONOMÉTRICA

10. Calcule as integrais utilizando integrais trigonométricas:

(a) $\int sen^3 x \, cos^2 x dx$

(b) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} sen^5 x \, cos^3 x dx$

(c) $\int sen^2(\pi x) \, cos^5(\pi x) dx$

(d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^2 \theta d\theta$

(e) $\displaystyle\int cos^4 t dt$

(f) $\displaystyle\int (1+cos\theta)^2 d\theta$

(g) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^2 x\, cos^2 x dx$

(h) $\displaystyle\int cos^2 x\, tg^3 x dx$

(i) $\displaystyle\int sec^2 x\, tg\, x dx$

(j) $\displaystyle\int tg^2 x dx$

(k) $\displaystyle\int sec^6 x dx$

(l) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} tg^5 x\, sec^4 x dx$

(m) $\displaystyle\int tg^3 x\, sec\, x dx$

(n) $\displaystyle\int sen\, 8x\, cos\, 5x\, dx$

(o) $\displaystyle\int cos\, 7x\, cos\, 5x\, dx$

11. Calcule as integrais utilizando substituições trigonométricas:

(a) $\displaystyle\int_0^{2\sqrt{3}} \frac{x^3}{\sqrt{16-x^2}} dx$

(b) $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{1}{t^3\sqrt{t^2-1}} dt$

(c) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{25-x^2}} dx$

(d) $\displaystyle\int \frac{x^2-a^2}{x^4} dx$

(e) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+16}} dx$

(f) $\displaystyle\int \frac{x^5}{\sqrt{x^2+2}} dx$

(g) $\displaystyle\int \sqrt{1-4x^2} dx$

(h) $\displaystyle\int x\sqrt{x^2+4} dx$

(i) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^3} dx$

(j) $\displaystyle\int \frac{1}{u\sqrt{5-u^2}} du$

(k) $\displaystyle\int_{\sqrt{2}/3}^{2/3} \frac{1}{x^5\sqrt{9x^2-1}} dx$

(l) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x^2+1} dx$

(m) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-6x+13}} dx$

(n) $\displaystyle\int x\sqrt{1-x^4} dx$

IMPRÓPRIAS

12. Calcule, se possível, as integrais impróprias:

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{\sqrt{2-w}} dw$

(b) $\displaystyle\int_4^{\infty} e^{-y/2} dy$

(c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2} dx$

(d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2} dx$

(e) $\displaystyle\int_{2\pi}^{\infty} sen\,\theta\, d\theta$

(f) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{x+1}{x^2+2x} dx$

(g) $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} xe^{2x} dx$

(h) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{ln\, x}{x} dx$

(i) $\displaystyle\int_e^{\infty} \frac{1}{x(ln\, x)^3} dx$

(j) $\displaystyle\int_0^1 \frac{3}{x^5} dx$

(k) $\displaystyle\int_{-2}^{14} \frac{1}{\sqrt[4]{x+2}} dx$

(l) $\displaystyle\int_{-2}^{3} \frac{1}{x^4}dx$

(m) $\displaystyle\int_{0}^{33} (x-1)^{-\frac{1}{5}}dx$

(n) $\displaystyle\int_{0}^{3} \frac{dx}{x^2-6x+5}$

(o) $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{e^{1/x}}{x^3}dx$

(p) $\displaystyle\int_{0}^{2} z^2 ln\, z\, dz$

APLICAÇÕES

13. Calcule a área abaixo do gráfico das funções, no intervalo determinado.

(a) $y = xe^x$, $[0,1]$.

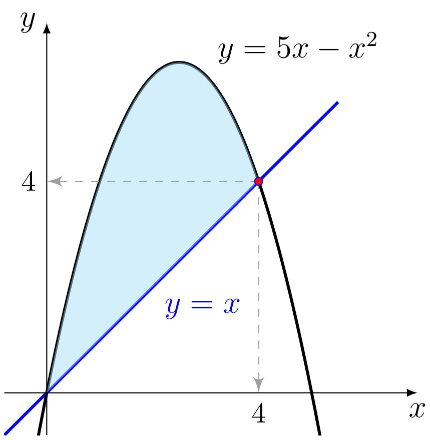
(b) $y = \cos x$, $\qquad [0, 2\pi]$.

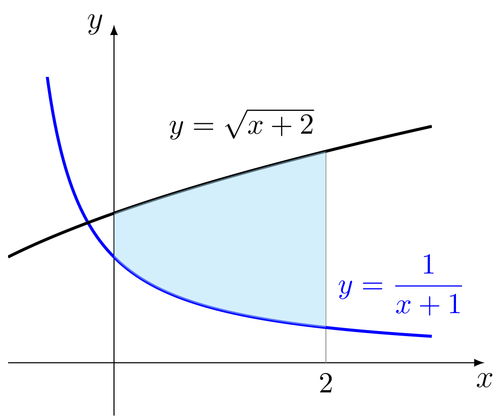
(c) $y = x + 1$, $[-2, 2]$.

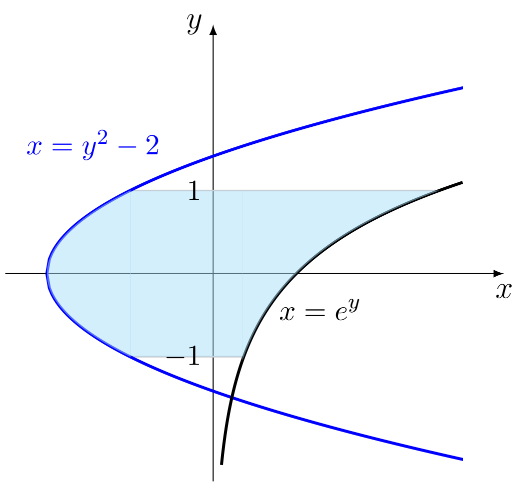
(d) $y = x\sqrt{x^2+1}$, $[-1,1]$.

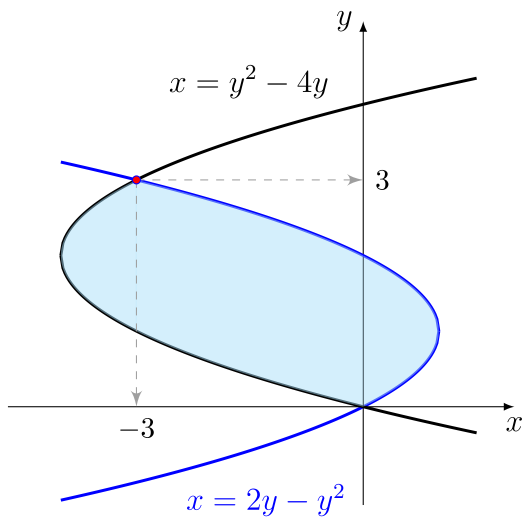
(e) $x = \sqrt{y}$, $y \in [0,1]$.

14. Encontre a área da região sombreada, em cada um dos gráficos abaixo:









15. Desenhe o conjunto A, limitato pelas retas $x = 1$, $x = 3$, pelo eixo Ox e pelo gráfico de $y = x^3$. Calcule a área de A.

16. Desenhe o conjunto A, limitato pelas retas $x = -1$, $x = 2$, $y = 0$ e pelo gráfico de $y = x^2+2x+5$. Calcule a área de A.

17. Esboce a região delimitada pelas curvas dadas. Decida quando integrar em relação a x ou a y. Calcule a área da região.

    (a) $y = x + 1$, $y = 9 - x^2$, $x = -1$ e $x = 2$.

    (b) $y = \text{sen}x$, $y = e^x$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$.

    (c) $x = 2y^2$, $x = 4 + y^2$.

    (d) $4x + y^2 = 12$, $x = y$.

    (e) $y = x^2$, $y = x^4$.

    (f) Entre $3x^2$ e $8x^2$, abaixo de $4x + y = 4$.

18. Encontre o valor médio das funções no intervalo dado.

    (a) $a(x) = \sqrt[3]{x}, \qquad [1, 8]$.

    (b) $b(x) = \cos^4(x)\text{sen}(x), \qquad [0, \pi]$.

    (c) $c(x) = x^2\sqrt{1 + x^3}, \qquad [0, 2]$.

19. Uma partícula está localizada a uma distância x metros da origem, uma força $\cos\left(\frac{\pi x}{3}\right)$ newtons atua sobre ela. Quanto trabalho é feito ao mover a partícula de $x = 0$ até $x = 1$?

20. Uma força age sobre uma partícula segundo a função abaixo. A partícula está localizada a uma distância de x metros da origem. Calcule o trabalho realizado pela força para mover um objeto da origem até 8 metros.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{15}{2}x & se\ x < 4 \\ 30 & se\ x \geq 4 \end{cases}$$

21. Ache o comprimento da curva, no intervalo determinado.

    (a) $y = 1 + 6\sqrt{x^3}, \qquad [0, 1]$.

    (b) $y^2 = 4(x + 4)^3, \qquad 0 \leq x \leq 2,\ y > 0$.

    (c) $y = ln(cos(x)), \qquad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$.

    (d) $y^2 = 4x, \qquad 0 \leq y \leq 2$.

22. Calcule a área da superfície obtida pela rotação da curva $y = \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{1}{2x}$, em torno do eixo x, no intervalo $[\frac{1}{2}, 1]$.

23. Calcule a área da superfície obtida pela rotação da curva $y = 1 - x^2$, em torno do eixo y, no intervalo $[0, 1]$.

24. Encontre o volume do sólido obtido pela rotação da região limitada pelas curvas dadas em torno do eixo especificado.

    (a) $y = 2 - \frac{1}{2}x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$, em torno do eixo x.

    (b) $y = \ln x$, $y = 1$, $y = 2$, $x = 0$, em torno do eixo y.

(c) $y = \frac{1}{x}$, $x = 1$, $x = 2$, $y = 0$, em torno do eixo x.

(d) $y = x^3$, $x = y$, $x \geq 0$, em torno do eixo x.

(e) $x = y^2$, $x = 1$, em torno do eixo $x = 1$.

(f) $y = x$, $y = \sqrt{x}$, em torno do eixo $y = 1$.

Referências

[1] GUIDORIZZI, H. L. **Um Curso de Cálculo**, vol.1. Rio de Janeiro: LTC, 2008.

[2] FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. **CÁlculo A: funções, limite, derivação, integração**. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006.

[3] STEWART, J. **Cálculo**, vol.1. São Paulo: Cengage Learning, 2010.