

Università degli Studi di Napoli

“Federico II”



Appunti del Corso Di Strumentazione  
Avanzata per La Diagnosi e Terapia

A.A. 2019/2020

Docente: Mario Sansone

(Beppe Vessicchio)

A cura di

*Abagnale Francesca M54000961*

*Ausilio Antonio M54000985*

*Senese Cristian M54000955*

# Indice

<b>1</b>	<b>Meccanica classica</b>	<b>7</b>
1.1	Cenni di meccanica classica . . . . .	8
1.2	Meccanica newtoniana . . . . .	8
1.3	Meccanica lagrangiana . . . . .	11
1.3.1	Lemma 1: Principio di Azione Stazionaria di Hamilton . . . . .	11
1.3.2	Lemma 2: equazione di Eulero-Lagrange . . . . .	12
1.3.3	Lemma 3: energia cinetica in generalizzate . . . . .	16
1.3.4	Lemma 4: energia potenziale in coordinate generalizzate . . . . .	17
1.3.5	Lemma 5: forma della lagrangiana . . . . .	17
1.3.6	Lemma 6: legame tra lagrangiana ed equazioni di Newton . . . . .	18
1.3.7	Principio di conservazione . . . . .	20
1.3.8	Lemma 7: conservazione dell'energia . . . . .	21
1.3.9	Lemma 8: conservazione della quantità di moto . . . . .	23
1.3.10	Lemma 9: conservazione del momento angolare . . . . .	24
1.3.11	Lagrangiana per pendolo . . . . .	26
1.3.12	Lagrangiana per il doppio pendolo . . . . .	28
1.4	Descrizione hamiltoniana . . . . .	31
1.4.1	Lemma 9: equazione di Hamilton . . . . .	31
1.4.2	Parentesi di Poisson . . . . .	34
1.4.3	Hamiltoniana per sistema con un grado di libertà . . . . .	34
1.5	Metodo di Eulero-Cauchy . . . . .	35
1.5.1	Risoluzione sistema con MatLab . . . . .	36
<b>2</b>	<b>Meccanica relativistica</b>	<b>42</b>
2.1	Discordanza tra meccanica ed elettromagnetismo . . . . .	43
2.1.1	Trasformazioni galileiane . . . . .	43
2.2	Relatività ristretta . . . . .	43
2.2.1	Composizione delle velocità . . . . .	48
2.2.2	Fattore di Lorentz . . . . .	50
2.2.3	Dilatazione dei tempi . . . . .	51
2.2.4	Contrazione delle lunghezze . . . . .	53

2.2.5	Energia e quantità di moto relativistiche . . . . .	55
2.3	Quadrivettori . . . . .	60
2.3.1	Legge di trasformazione dei quadrivettori . . . . .	63
2.4	Urto anelastico . . . . .	65
2.5	Conservazione dell'energia . . . . .	67
2.6	Esempio carica in moto in campo elettrico . . . . .	68
<b>3</b>	<b>Elettromagnetismo</b>	<b>72</b>
3.1	Cenni di elettromagnetismo . . . . .	73
3.2	Equazioni di Maxwell nel vuoto in forma locale . . . . .	73
3.2.1	Equazione di continuità della carica . . . . .	74
3.2.2	Risoluzione delle equazioni di Maxwell omogenee . . . . .	75
3.2.3	Risoluzione delle equazioni di Maxwell in presenza di sorgenti . . . . .	76
3.2.4	Equazioni di Maxwell nel vuoto in forma globale . . . . .	78
3.3	Equazioni di Maxwell nel mezzo . . . . .	78
3.4	Forza di Lorentz . . . . .	81
3.5	Parallelismo tra campo elettrico e magnetico . . . . .	81
3.6	Forza e coppia su una piccola spira . . . . .	83
3.6.1	Momento magnetico di un anello rotante . . . . .	86
3.6.2	Momento magnetico per un guscio sferico . . . . .	87
3.6.3	Momento magnetico per una sfera . . . . .	89
3.7	Forza su piccola spira in un campo disomogeneo . . . . .	93
3.7.1	Esperimento di Stern-Gerlach . . . . .	94
3.7.2	Concetto di spin . . . . .	97
3.8	Campo magnetico prodotto da un momento magnetico . . . . .	98
3.9	Moto del momento magnetico in campo magnetico . . . . .	100
3.10	Diamagnetismo . . . . .	102
3.11	Paramagnetismo . . . . .	106
<b>4</b>	<b>Meccanica quantistica</b>	<b>109</b>
4.1	Incongruenze del modello fisico del '900 . . . . .	111
4.1.1	Stabilità dell'atomo . . . . .	111
4.1.2	Corpo nero . . . . .	112
4.1.3	Effetto fotoelettrico . . . . .	113
4.1.4	Double slit . . . . .	114
4.1.5	Esperimento di Stern e Gerlach . . . . .	115
4.1.6	Spettro di assorbimento . . . . .	116
4.2	Teoria della meccanica quantistica . . . . .	117
4.2.1	Quantizzazione della materia . . . . .	117
4.2.2	Dualismo onda-particella . . . . .	118
4.2.3	Funzione d'onda associata alla particella . . . . .	119

4.3	Principio di indeterminazione di Heisenberg . . . . .	120
4.4	Equazione di Schrödinger . . . . .	121
4.5	Operatori in meccanica quantistica . . . . .	123
4.6	Equazione di Schrödinger per stati stazionari . . . . .	125
4.6.1	Buco di potenziale . . . . .	129
4.6.2	Gradino di potenziale . . . . .	134
4.6.3	Effetto tunnel . . . . .	135
4.7	Meccanica quantistica con notazione di Dirac . . . . .	136
4.7.1	Autovalori dell'operatore hamiltoniano . . . . .	138
4.7.2	Risultato dell'operatore di misura . . . . .	138
4.7.3	Evoluzione libera degli stati . . . . .	141
4.7.4	Notazione di Dirac per lo spin . . . . .	142
4.7.5	Split dei livelli energetici . . . . .	145
4.7.6	Energia media di un nucleo in base allo spin . . . . .	148
4.7.7	Evoluzione temporale dello stato spin up . . . . .	150
4.7.8	Valore medio del momento magnetico sull'asse longitudinale . . . . .	151
4.7.9	Andamento temporale dello stato momento magnetico lungo l'asse trasversale . . . . .	151
4.7.10	Transizioni di stato . . . . .	154
<b>5</b>	<b>Meccanica statistica</b>	<b>158</b>
5.1	Cenni di meccanica statistica . . . . .	159
5.2	Possibili stati di un sistema in base allo spin . . . . .	159
5.3	Approssimazione di Stirling . . . . .	162
5.3.1	Probabilità con approssimazione di Stirling . . . . .	163
5.4	Stati ammissibili . . . . .	167
5.5	Entropia . . . . .	168
5.6	Distribuzione di Boltzmann . . . . .	171
5.6.1	Magnetizzazione macroscopica . . . . .	174
5.6.2	Legge di Planck . . . . .	176
5.6.3	Rumore termico o di Johnson-Nyquist . . . . .	179
5.7	Distribuzione di Gibbs . . . . .	181
5.7.1	Distribuzione di Fermi-Dirac . . . . .	184
5.7.2	Distribuzione di Bose-Einstein . . . . .	185
<b>6</b>	<b>Introduzione alla risonanza magnetica</b>	<b>188</b>
6.1	Diverse metodiche di imaging . . . . .	189
6.1.1	Storia della risonanza magnetica . . . . .	191
6.1.2	Introduzione al principio di risonanza magnetica . . . . .	191
6.1.3	Risonanza magnetica come tecnica spettroscopica . . . . .	195
6.1.4	Momento di precessione . . . . .	197
6.1.5	Vettore di magnetizzazione . . . . .	213

6.1.6	Equazioni di Bloch . . . . .	229
	<b>Bibliografia</b>	<b>246</b>



# Capitolo 1

## Meccanica classica

### Sommario

<b>1.1</b>	<b>Cenni di meccanica classica</b>	<b>8</b>
<b>1.2</b>	<b>Meccanica newtoniana</b>	<b>8</b>
<b>1.3</b>	<b>Meccanica lagrangiana</b>	<b>11</b>
1.3.1	Lemma 1: Principio di Azione Stazionaria di Hamilton	11
1.3.2	Lemma 2: equazione di Eulero-Lagrange	12
1.3.3	Lemma 3: energia cinetica in generalizzate	16
1.3.4	Lemma 4: energia potenziale in coordinate generalizzate	17
1.3.5	Lemma 5: forma della lagrangiana	17
1.3.6	Lemma 6: legame tra lagrangiana ed equazioni di Newton	18
1.3.7	Principio di conservazione	20
1.3.8	Lemma 7: conservazione dell'energia	21
1.3.9	Lemma 8: conservazione della quantità di moto	23
1.3.10	Lemma 9: conservazione del momento angolare	24
1.3.11	Lagrangiana per pendolo	26
1.3.12	Lagrangiana per il doppio pendolo	28
<b>1.4</b>	<b>Descrizione hamiltoniana</b>	<b>31</b>
1.4.1	Lemma 9: equazione di Hamilton	31
1.4.2	Parentesi di Poisson	34
1.4.3	Hamiltoniana per sistema con un grado di libertà	34
<b>1.5</b>	<b>Metodo di Eulero-Cauchy</b>	<b>35</b>
1.5.1	Risoluzione sistema con MatLab	36

## 1.1 Cenni di meccanica classica

La **meccanica** è la branca della fisica che studia il moto dei corpi materiali [landau1994meccanica]. In base alle caratteristiche fisiche della materia considerata, sono state sviluppate diverse teorie meccaniche, suddivise principalmente in:

- **Meccanica classica:** descrive sistemi di dimensioni macroscopiche che si muovono a velocità molto inferiori rispetto a quella della luce;
- **Meccanica statistica:** applicabile a sistemi costituiti da un numero elevato di particelle, delle quali si analizzano le proprietà medie;
- **Meccanica relativistica:** tratta sistemi non quantistici che si muovono a velocità prossime a quella della luce;
- **Meccanica quantistica:** si occupa di sistemi su scala atomica e subatomica, dove gli effetti quantistici risultano predominanti.

## 1.2 Meccanica newtoniana

La **meccanica classica** si fonda sulla descrizione dei fenomeni fisici secondo l'approccio introdotto da Newton nel XVII secolo. Essa interpreta il moto della natura in termini di forze  $\vec{F}$  e accelerazioni  $\vec{a}$ . Il punto di vista **newtoniano è di tipo locale**: conoscendo le forze agenti su una particella e il loro andamento temporale, è possibile determinare il moto di quest'ultima.

L'equazione fondamentale della meccanica newtoniana è:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

dove  $m$  è la massa della particella (assunta costante) e  $\vec{a}$  è la sua accelerazione. L'accelerazione è definita come la derivata della velocità rispetto al tempo:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Si definisce la **quantità di moto** (o **momento lineare**)  $\vec{p}$  come il prodotto tra la massa e la velocità della particella:

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Il vettore  $\vec{p}$  ha la stessa direzione e verso del vettore velocità  $\vec{v}$ . L'equazione fondamentale della meccanica può essere riscritta in termini di quantità di moto:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{d\vec{p}}{dt}$$



Questa forma è valida anche nel caso in cui la massa  $m$  non sia costante nel tempo, ad esempio, nel caso di corpi che perdono massa come una navetta spaziale.

L'equazione può essere estesa a un sistema di  $n$  particelle, con masse  $\{m_1, m_2, \dots, m_n\}$  e forze  $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots, \vec{f}_n\}$ , ottenendo:

$$\vec{F}_{\text{tot}} = \sum_{k=1}^n \vec{f}_k = \sum_{k=1}^n \frac{d\vec{p}_k}{dt}$$

Questa espressione rappresenta il teorema della **dinamica dei sistemi di particelle**, il quale afferma che la somma delle forze agenti su un sistema di particelle è uguale alla derivata temporale della somma delle quantità di moto delle singole particelle.

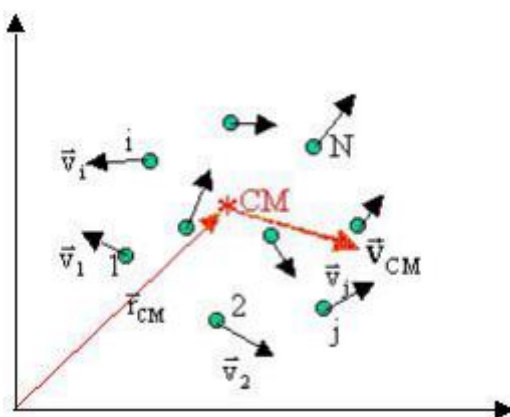


Figura 1.1: Sistema di particelle soggetto a forze esterne

Per una particella soggetta a una forza  $\vec{F}$ , si definisce **momento torcente** (o **momento della forza**)  $\vec{N}$  (talvolta indicato anche con  $\vec{\tau}$ ):

$$\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F}$$

dove  $\vec{r}$  è il vettore posizione della particella rispetto a un polo (origine del sistema di riferimento).

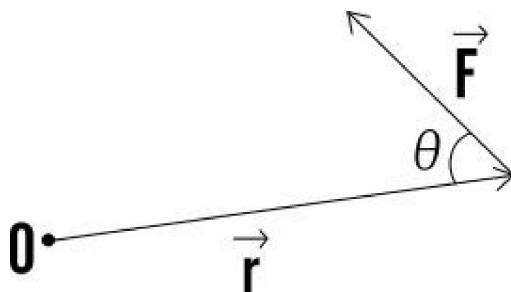


Figura 1.2: Definizione del momento torcente rispetto a un punto fisso

Analogamente, si definisce **momento angolare** (o **quantità di moto angolare**)  $\vec{L}$ :

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

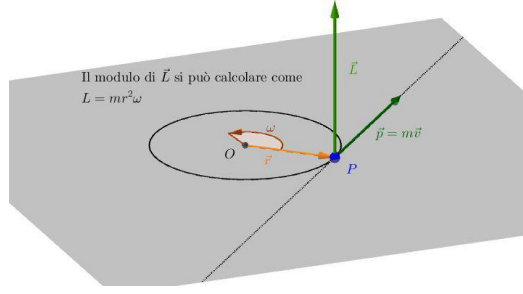


Figura 1.3: *Momento angolare di una particella rispetto a un'origine fissa*

Sostituendo la definizione di quantità di moto:

$$\vec{L} = \vec{r} \times (m\vec{v}) = m(\vec{r} \times \vec{v})$$

Applicando la derivata rispetto al tempo:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Nel caso in cui il polo sia fisso:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} = \vec{v} \times \vec{p} = \vec{0}$$

perché  $\vec{v}$  e  $\vec{p}$  sono paralleli. Resta quindi:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{N}$$

Questa equazione prende il nome di **teorema del momento angolare**.

Per un sistema di particelle, il momento torcente totale è:

$$\vec{N}_{\text{tot}} = \sum_{k=1}^n \vec{r}_k \times \vec{f}_k = \sum_{k=1}^n \vec{r}_k \times \frac{d\vec{p}_k}{dt} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Conoscendo le forze agenti, è possibile determinare il moto della particella integrando l'equazione fondamentale:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Integrando nel tempo tra un istante iniziale  $t_0$  e un istante generico  $t$ , si ottiene:

$$\int_{t_0}^t \vec{F} dt = \vec{p}(t) - \vec{p}(t_0) = m[\vec{v}(t) - \vec{v}(t_0)]$$

Assumendo  $\vec{v}(t_0) = \vec{0}$ , si ha:

$$\int_{t_0}^t \vec{F} dt = m\vec{v}(t)$$

Integrando una seconda volta, si ottiene lo spostamento:

$$\int_{t_0}^t \left( \int_{t_0}^{t'} \vec{F} dt'' \right) dt' = m[\vec{s}(t) - \vec{s}(t_0)]$$

dove  $\vec{s}(t)$  è il vettore spostamento.

Il modello newtoniano descrive accuratamente molti fenomeni osservati nella sua epoca, come il moto dei pianeti, il comportamento dei corpi sotto l'azione di forze, e le interazioni meccaniche quotidiane.

## 1.3 Meccanica lagrangiana

La **meccanica lagrangiana** è una formulazione matematica della meccanica introdotta nel XVIII secolo da Joseph-Louis Lagrange, come riformulazione della meccanica newtoniana [arnold1992matematici, landau1994meccanica].

Questa descrizione parte da un punto di vista globale e si propone di determinare il moto di un sistema minimizzando una funzione chiamata *azione*, che dipende dall'intero percorso del sistema. Il modello lagrangiano è particolarmente utile, poiché consente di descrivere non solo fenomeni della meccanica classica, ma anche situazioni della **meccanica quantistica**.

Consideriamo un sistema composto da  $N$  particelle. La descrizione del loro moto secondo la meccanica newtoniana richiede l'uso di uno spazio tridimensionale cartesiano: a ciascuna particella  $m_i$  è associata una terna di coordinate  $(x_i, y_i, z_i)$ , che variano nel tempo. Questo approccio porta alla necessità di risolvere  $3N$  equazioni differenziali per determinare il moto di tutte le particelle.

Tuttavia, spesso le particelle sono soggette a vincoli che limitano il loro moto a determinate traiettorie o superfici. In questi casi, è possibile descrivere il sistema utilizzando *coordinate generalizzate*  $q_i$ , con  $i = 1, 2, \dots, s$ , dove  $s$  rappresenta il numero dei *gradi di libertà* del sistema.

Tra tutte le curve che collegano un punto  $\vec{A}$  al tempo  $t_0$  con un altro punto  $\vec{B}$  al tempo  $t_1$ , esiste una traiettoria unica che rende stazionaria l'azione, ovvero l'integrale della funzione lagrangiana nel tempo.

### 1.3.1 Lemma 1: Principio di Azione Stazionaria di Hamilton

Il moto della particella, ovvero la traiettoria  $q_i(t)$  e la velocità con cui essa viene percorsa  $\dot{q}_i(t)$ , deve rendere stazionario l'integrale [arnold1992matematici]:

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt$$

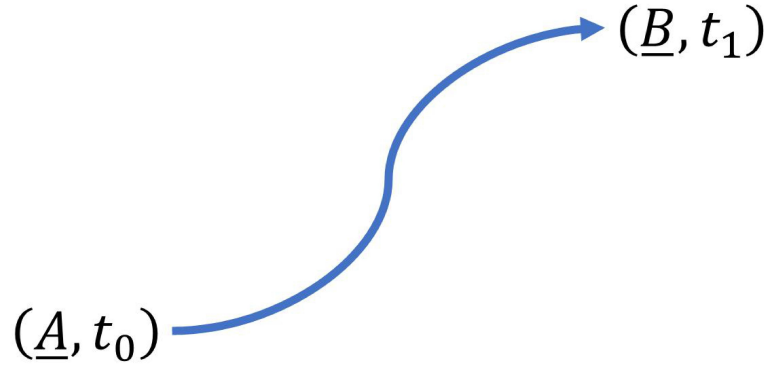


Figura 1.4: Esempio di moto su traiettoria a azione stazionaria tra due punti nel tempo.

L'integrale  $S$  è detto *azione*,  $t$  è la variabile temporale, mentre  $L$  è la funzione *lagrangiana*, o semplicemente *lagrangiana*, del sistema di particelle. Dal punto di vista dimensionale, la lagrangiana è omogenea all'energia, e quindi ha le stesse dimensioni del joule:

$$[L] = [J]$$

dove  $[L]$  indica le dimensioni fisiche della lagrangiana e  $[J]$  quelle dell'energia, ovvero:

$$[J] = kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}$$

### 1.3.2 Lemma 2: equazione di Eulero-Lagrange

Per descrivere il moto di una particella o di un sistema di particelle, la lagrangiana deve soddisfare l'equazione di Eulero-Lagrange [landau1994meccanica]:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, s$$

Poiché l'azione  $S$  deve essere stazionaria, una sua variazione  $\delta S$ , dovuta a una perturbazione dello spostamento  $\delta \vec{q}$  e della velocità  $\delta \dot{\vec{q}}$ , è tale che:

$$S + \delta S = \int_{t_0}^{t_1} L(\vec{q} + \delta \vec{q}, \dot{\vec{q}} + \delta \dot{\vec{q}}) dt$$

Dove  $\vec{q}$  è una traiettoria che rende stazionaria l'azione  $S$ . Il Principio di Hamilton (o di Minima Azione) stabilisce che la traiettoria rende l'azione stazionaria o un estremo (ovvero  $\delta S = 0$ ). Non è garantito che sia un minimo poiché può essere un massimo o un punto di sella.

Siccome le variazioni di spostamento e velocità sono molto minori delle rispettive qualità:

$$\delta q \ll q, \quad \delta \dot{q} \ll \dot{q}$$

è possibile sviluppare la lagrangiana in serie di Taylor, arrestando lo sviluppo al primo ordine, nell'intorno del punto  $(\vec{q}, \dot{\vec{q}})$ :

$$L(\vec{q} + \delta\vec{q}, \dot{\vec{q}} + \delta\dot{\vec{q}}) \simeq L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) + \vec{\nabla} L \cdot (\delta\vec{q}, \delta\dot{\vec{q}}) =$$

Per definizione di gradiente si ha:

$$= L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) + \left( \frac{\partial L}{\partial \vec{q}}, \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} \right) \cdot (\delta\vec{q}, \delta\dot{\vec{q}}) =$$

Svolgendo l'operazione di prodotto scalare si ha:

$$= L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) + \frac{\partial L}{\partial \vec{q}} \delta\vec{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} \delta\dot{\vec{q}}$$

Dove il gradiente è un vettore colonna mentre le coordinate generalizzate dei vettori riga. Sostituendo nell'espressione della variazione dell'azione, si ottiene:

$$S + \delta S = \int_{t_0}^{t_1} \left[ L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) + \frac{\partial L}{\partial \vec{q}} \delta\vec{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} \delta\dot{\vec{q}} \right] dt$$

Per la linearità dell'integrale si scrive:

$$S + \delta S = \int_{t_0}^{t_1} L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) dt + \int_{t_0}^{t_1} \left( \frac{\partial L}{\partial \vec{q}} \delta\vec{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} \delta\dot{\vec{q}} \right) dt$$

Dove:

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) dt$$

Da cui si ottiene:

$$S + \delta S = S + \int_{t_0}^{t_1} \left( \frac{\partial L}{\partial \vec{q}} \delta\vec{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} \delta\dot{\vec{q}} \right) dt$$

Semplificando  $S$ , si ottiene un'espressione per la variazione dell'azione  $\delta S$ :

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} \left( \frac{\partial L}{\partial \vec{q}} \delta\vec{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} \delta\dot{\vec{q}} \right) dt$$

La traiettoria perturbata  $\delta\vec{q}$  ha in comune con la traiettoria  $\vec{q}$  il punto iniziale  $\vec{A}$  all'istante  $t_0$  e il punto di fine  $\vec{B}$  all'istante  $t_1$ , ne discende che:

$$\begin{cases} \vec{q}(t_0) = \vec{q}(t_0) + \delta\vec{q}(t_0) = \vec{A} \\ \vec{q}(t_1) = \vec{q}(t_1) + \delta\vec{q}(t_1) = \vec{B} \end{cases}$$

Non variando il punto iniziale, risulta che nei punti iniziali non vi sono perturbazioni:

$$\delta \vec{q}(t_0) = \vec{0}, \quad \delta \vec{q}(t_1) = \vec{0}$$

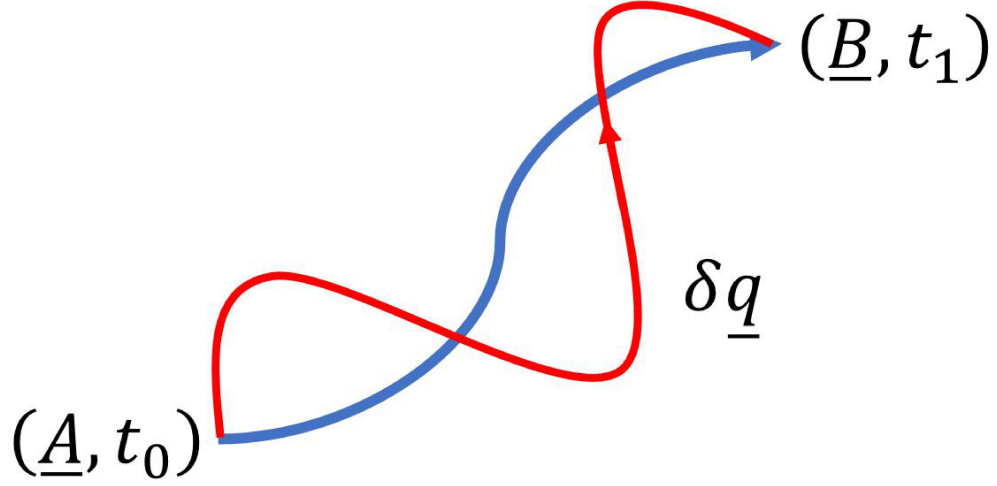


Figura 1.5: *Perturbazione della traiettoria*

Se risulta che:

$$\dot{\vec{q}} = \frac{d\vec{q}}{dt}$$

Allora, deve accadere che:

$$\delta \dot{\vec{q}} = \frac{d}{dt} (\delta \vec{q})$$

Dunque, la variazione di azione può essere espressa come:

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} \left( \frac{\partial L}{\partial \vec{q}} \delta \vec{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} \delta \dot{\vec{q}} \right) dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial L}{\partial \vec{q}} \delta \vec{q} dt + \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} \frac{d}{dt} (\delta \vec{q}) dt$$

Si considera la quantità:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} \delta \vec{q} \right)$$

Questa può essere riscritta ricorrendo alle proprietà del prodotto:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} \delta \vec{q} \right) = \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} \right) \delta \vec{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} \frac{d}{dt} (\delta \vec{q})$$

Da cui è possibile ricavare:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} \frac{d}{dt} (\delta \vec{q}) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} \delta \vec{q} \right) - \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} \right) \delta \vec{q}$$

Sostituendo nel secondo integrale della variazione dell'azione si ottiene:

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} \left[ \frac{\partial L}{\partial \vec{q}} \delta \vec{q} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} \delta \vec{q} \right) - \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} \right) \delta \vec{q} \right] dt$$

Raccogliendo  $\delta \vec{q}$  tra il primo e l'ultimo termine, si ha:

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} \left[ \left( \frac{\partial L}{\partial \vec{q}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} \right) \delta \vec{q} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} \delta \vec{q} \right) \right] dt = \int_{t_0}^{t_1} \left( \frac{\partial L}{\partial \vec{q}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} \right) \delta \vec{q} dt + \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} \delta \vec{q} \right) dt$$

Si considera l'ultimo integrale. Risulta che:

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} \delta \vec{q} \right) dt = \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} \delta \vec{q} \right|_{t_0}^{t_1}$$

Ma, poiché  $\delta \vec{q}(t_0) = \delta \vec{q}(t_1) = \vec{0}$ , l'integrale è nullo. In definitiva, si ottiene:

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} \left( \frac{\partial L}{\partial \vec{q}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} \right) \delta \vec{q} dt$$

Dato che l'azione deve essere stazionaria, la sua variazione deve essere nulla  $\delta S = 0$ . Per cui si ha:

$$\int_{t_0}^{t_1} \left( \frac{\partial L}{\partial \vec{q}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} \right) \delta \vec{q} dt = 0$$

Se l'integrale è nullo, allora la funzione integranda deve essere nulla:

$$\left( \frac{\partial L}{\partial \vec{q}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} \right) \delta \vec{q} = 0$$

Se la variazione della traiettoria,  $\delta \vec{q}$ , è non nulla, si ritrova l'equazione di Eulero-Lagrange.

### 1.3.2.1 Particella in coordinate cartesiane

Per una **particella libera** (cioè in assenza di forze conservative, dove l'energia potenziale è nulla) in moto in uno spazio cartesiano, la lagrangiana  $L$  è data da:

$$L = \frac{1}{2} m v^2$$

Dove

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$$

In altre parole, in questo caso la lagrangiana coincide con l'energia cinetica della particella. Inoltre, la descrizione lagrangiana si riduce alla modellazione newtoniana, dato che il sistema di riferimento corrisponde con quello cartesiano.

Tuttavia, nella pratica non è sempre conveniente descrivere il moto in coordinate cartesiane. In presenza di vincoli o geometrie particolari, è utile ricorrere alle coordinate generalizzate  $\vec{q}$  e  $\dot{\vec{q}}$ . È quindi necessario esprimere l'energia del sistema in funzione di queste coordinate.

### 1.3.3 Lemma 3: energia cinetica in generalizzate

Per un sistema di  $N$  particelle nelle coordinate generalizzate  $\vec{q}$  e  $\dot{\vec{q}}$ , l'energia cinetica è:

$$T = T(q_i, \dot{q}_i), \quad i = 1, \dots, N$$

Ovvero l'energia cinetica è una funzione anche delle coordinate generalizzate  $q_i$  oltre che della velocità  $\dot{q}_i$ .

Si considerano  $N$  funzioni  $f_i$  che legano le coordinate cartesiane  $(x_i, y_i, z_i)$  con le coordinate generalizzate  $(q_1, q_2, \dots, q_s)$ . Ad esempio, si considera:

$$x_i = f_i(q_1, q_2, \dots, q_s), \quad i = 1, 2, \dots, N$$

Dove:

$$q_k = q_k(t), \quad k = 1, 2, \dots, s$$

Si deriva  $x_i$  rispetto al tempo al fine da ottenere la velocità:

$$\dot{x}_i = \frac{d}{dt} f_i(q_1, q_2, \dots, q_s), \quad i = 1, 2, \dots, N$$

Per la derivata della funzione composta si ha:

$$\dot{x}_i = \frac{d}{dt} f_i(q_1, q_2, \dots, q_s) = \sum_{k=1}^s \frac{\partial f_i}{\partial q_k} \frac{dq_k}{dt} = \sum_{k=1}^s \frac{\partial f_i}{\partial q_k} \dot{q}_k$$

Si eleva al quadrato  $\dot{x}_i$ , ottenendo:

$$\dot{x}_i^2 = \left( \sum_{k=1}^s \frac{\partial f_i}{\partial q_k} \dot{q}_k \right)^2 = \sum_{k=1}^s \frac{\partial f_i}{\partial q_k} \dot{q}_k \sum_{j=1}^s \frac{\partial f_i}{\partial q_j} \dot{q}_j$$

È possibile esprimere il secondo membro come doppia sommatoria sugli indici  $k$  e  $j$ :

$$\dot{x}_i^2 = \sum_{k=1}^s \sum_{j=1}^s \frac{\partial f_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \frac{\partial f_i}{\partial q_k} \dot{q}_k = \sum_{k=1}^s \sum_{j=1}^s \frac{\partial f_i}{\partial q_j} \frac{\partial f_i}{\partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k$$

L'energia cinetica totale del sistema è:



$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{x}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \sum_{k=1}^s \sum_{j=1}^s \frac{\partial f_i}{\partial q_j} \frac{\partial f_i}{\partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k$$

Si definiscono coefficienti metrici:

$$a_{kj}(q) = \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial f_i}{\partial q_j} \frac{\partial f_i}{\partial q_k}$$

Allora l'energia cinetica può essere scritta come forma quadratica nelle velocità generalizzate:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^s \sum_{j=1}^s a_{kj}(q) \dot{q}_k \dot{q}_j$$

Dato che  $a_{kj}$  è un parametro dipendente dalla posizione generalizzata  $q$ , l'energia cinetica totale dipende dalla velocità e dalla posizione generalizzate.

### 1.3.4 Lemma 4: energia potenziale in coordinate generalizzate

È conveniente esprimere anche l'energia potenziale in funzione delle coordinate generalizzate. Si considera un sistema di  $N$  particelle. L'energia di interazione tra le particelle è indicata con  $U(q_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  ed è denotata come energia potenziale. In meccanica classica questa quantità dipende solamente dalla posizione.

In particolare, se le coordinate generalizzate  $q_i$  descrivono completamente la configurazione del sistema, allora l'energia potenziale può essere scritta come:

$$U = U(q_1, q_2, \dots, q_s)$$

dove  $s$  è il numero di coordinate generalizzate.

La meccanica classica assume che le interazioni tra le particelle avvengano istantaneamente, ovvero non considera gli effetti di propagazione dei cambiamenti nei campi di forza. Tuttavia, secondo la teoria della relatività di Einstein, le interazioni si propagano attraverso campi con velocità finita, non superiore alla velocità della luce  $c$ . Questo implica che la descrizione classica è un'approssimazione valida solo quando le velocità coinvolte sono molto inferiori a  $c$  e gli effetti di ritardo possono essere trascurati.

### 1.3.5 Lemma 5: forma della lagrangiana

La lagrangiana può essere espressa come funzione dell'energia cinetica  $T$  e dell'energia potenziale  $U$ , secondo la relazione [arnold1992matematici, landau1994meccanica]:

$$L(q_i, \dot{q}_i) = T(q_i, \dot{q}_i) - U(q_i), \quad i = 1, \dots, N$$

La lagrangiana  $L(q_i, \dot{q}_i)$  è, dunque, una funzione delle coordinate generalizzate posizione e velocità, che a loro volta dipendono dal tempo:

$$L : TQ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

Dove  $TQ$  indica il **fibrato tangente** dello spazio delle configurazioni  $Q$ , dove:

- Un elemento di  $Q$  è semplicemente una configurazione  $\vec{q}$ ;
- Un elemento di  $TQ$  è una coppia  $(\vec{q}, \dot{\vec{q}})$ , ovvero traiettoria e velocità della particella.

Si considera l'azione  $S$ , data per definizione da:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i) dt$$

L'azione dipende dalle coordinate generalizzate, funzioni del tempo, dunque, è un funzionale poiché associa a ogni funzione  $\vec{q}(t)$  un valore numerico. Dunque, l'azione è definita nello spazio vettoriale delle traiettorie generalizzate  $\mathbb{V} = \{\vec{q}(t)\}$  a valori in  $\mathbb{R}$ :

$$S : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$$

### 1.3.6 Lemma 6: legame tra lagrangiana ed equazioni di Newton

Per individuare una correlazione tra la meccanica newtoniana e quella lagrangiana si scrive l'equazione di Eulero-Lagrange in coordinate cartesiane. In generale, l'equazione di Eulero-Lagrange può essere espressa come:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

È noto che la lagrangiana è data da:

$$L(q_i, \dot{q}_i) = T(q_i, \dot{q}_i) - U(q_i)$$

Per cui, è possibile scrivere:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} [T(q_i, \dot{q}_i) - U(q_i)] - \frac{\partial}{\partial q_i} [T(q_i, \dot{q}_i) - U(q_i)] = 0$$

Passando alle coordinate cartesiane si ha:

$$\frac{\partial}{\partial q_i} = \frac{\partial x_i}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Questa semplificazione è vera solo se si assume che la  $i$ -esima coordinata generalizzata  $q_i$  coincida con la  $i$ -esima coordinata cartesiana  $x_i$ . Analogo procedimento può essere eseguito per passare da  $\dot{q}_i$  a  $\dot{x}_i$ .

In coordinate cartesiane, l'energia cinetica dipende solamente dalla velocità  $\dot{x}_i$  mentre l'energia potenziale solamente dalla posizione  $x_i$ . L'equazione di Eulero-Lagrange è:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} [T(\dot{x}_i) - U(x_i)] - \frac{\partial}{\partial x_i} [T(\dot{x}_i) - U(x_i)] = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} T(\dot{x}_i) + \frac{\partial}{\partial x_i} U(x_i) = 0$$

Da cui si ottiene:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} T(\dot{x}_i) = - \frac{\partial}{\partial x_i} U(x_i)$$

Siccome l'energia cinetica dipende solo dalla velocità, risulta:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} T(\dot{x}_i) = 0$$

È possibile scrivere:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} U(x_i) = \frac{\partial}{\partial x_i} [T(\dot{x}_i) - U(x_i)] = - \frac{\partial L}{\partial x_i}$$

L'energia cinetica per un sistema di  $N$  particelle, in coordinate cartesiane, è:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{x}_i^2$$

Applicando la derivata rispetto a  $\dot{x}_i$  si ottiene:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{x}_i^2 \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} (m_1 \dot{x}_1^2 + m_2 \dot{x}_2^2 + \dots + m_i \dot{x}_i^2 + \dots + m_N \dot{x}_N^2) = m_i \dot{x}_i$$

Derivando tale quantità rispetto al tempo si ottiene il primo membro dell'equazione di Eulero-Lagrange in coordinate cartesiane:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} = \frac{d}{dt} (m_i \dot{x}_i) = m_i \ddot{x}_i$$

Dunque, poiché:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} T(\dot{x}_i) + \frac{\partial}{\partial x_i} U(x_i) = 0$$

risulta:

$$m_i \ddot{x}_i = - \frac{\partial}{\partial x_i} U(x_i)$$

Dalla relazione:

$$L(q_i, \dot{q}_i) = T(q_i, \dot{q}_i) - U(q_i)$$

È possibile scrivere che:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} U(x_i) = \frac{\partial}{\partial x_i} [T(\dot{x}_i) - L(x_i, \dot{x}_i)] = -\frac{\partial L}{\partial x_i}$$

Per cui si ottiene:

$$m_i \ddot{x}_i = -\frac{\partial}{\partial x_i} U(x_i) = -\frac{\partial L}{\partial x_i}$$

Dal secondo principio della dinamica è noto che:

$$m_i \ddot{x}_i = f_i = \frac{dp_i}{dt}$$

Dove  $f_i$  è la forza agente mentre  $p_i$  la quantità di moto.

Ne discende che la quantità di moto  $p_i$  e la forza  $f_i$  sono legate all'energia potenziale  $U$  e alla lagrangiana  $L$  dalle relazioni [arnold1992matematici, landau1994meccanica]:

$$\begin{cases} p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \\ f_i = -\frac{\partial L}{\partial q_i} \end{cases}$$

Le due relazioni sono note come definizioni fondamentali della meccanica lagrangiana. La prima è detta momento coniugato o generalizzato, mentre la seconda forza generalizzata.

Si considera l'equazione di Eulero-Lagrange e si sostituisce la relazione per il momento coniugato generalizzato:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt} p_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

Da cui risulta:

$$\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

### 1.3.7 Principio di conservazione

Le leggi di conservazione dell'energia, del momento lineare e del momento angolare sono una conseguenza delle simmetrie fondamentali dello spazio e del tempo.

In particolare, queste leggi di conservazione sono connesse all'invarianza delle leggi fisiche del sistema rispetto a determinate trasformazioni. Questo legame profondo fu dimostrato da Emmy Noether nel 1915 [arnold1992matematici]. Secondo il suo teorema, a ogni simmetria continua e differenziabile delle leggi fisiche corrisponde una quantità conservata:

- Dall'omogeneità temporale discende la conservazione dell'energia. L'omogeneità temporale implica che le leggi fisiche non cambiano se un fenomeno viene traslato nel tempo;
- Dall'omogeneità spaziale deriva la conservazione del momento lineare (o quantità di moto). L'omogeneità spaziale implica che le leggi fisiche non variano se il sistema viene traslato nello spazio;
- Dall'isotropia dello spazio discende la conservazione del momento angolare. L'isotropia spaziale implica che le leggi fisiche non cambiano se il sistema viene ruotato nello spazio.

### 1.3.8 Lemma 7: conservazione dell'energia

L'energia totale  $E = T + U$  si conserva grazie alla proprietà di omogeneità temporale. Infatti, se il tempo è omogeneo e il sistema isolato, per definizione la lagrangiana non dipende esplicitamente dal tempo; invece, tale dipendenza è presente nelle coordinate generalizzate [landau1994meccanica]:

$$L = L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}), \quad \vec{q} = \vec{q}(t), \dot{\vec{q}} = \dot{\vec{q}}(t)$$

La derivata rispetto al tempo della lagrangiana, per la derivata delle funzioni composte, può essere espressa come:

$$\frac{d}{dt}L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) = \frac{\partial L}{\partial \vec{q}} \frac{d\vec{q}}{dt} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} \frac{d\dot{\vec{q}}}{dt}$$

Dove i prodotti tra vettori sono da intendersi come prodotti scalari. Dunque, ricorrendo alla simbologia sulle derivate temporali, si può scrivere:

$$\frac{d}{dt}L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) = \frac{\partial L}{\partial \vec{q}} \dot{\vec{q}} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} \ddot{\vec{q}}$$

Si considera la quantità:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} \dot{\vec{q}} \right)$$

Svolgendo la derivata si ottiene:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} \dot{\vec{q}} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} \right) \dot{\vec{q}} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} \frac{d\dot{\vec{q}}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} \right) \dot{\vec{q}} + \frac{\partial L}{\partial \vec{q}} \ddot{\vec{q}}$$

Si isola il termine contenente  $\ddot{\vec{q}}$ :

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{q}} \ddot{\vec{q}} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} \dot{\vec{q}} \right) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} \right) \dot{\vec{q}}$$

Si sostituisce questo risultato nella derivata temporale della lagrangiana:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial \vec{q}} \dot{\vec{q}} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} \ddot{\vec{q}} = \frac{\partial L}{\partial \vec{q}} \dot{\vec{q}} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} \dot{\vec{q}} \right) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} \right) \dot{\vec{q}}$$

Si porta il termine  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} \dot{\vec{q}} \right)$  al primo membro:

$$\frac{dL}{dt} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} \dot{\vec{q}} \right) = \frac{\partial L}{\partial \vec{q}} \dot{\vec{q}} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} \right) \dot{\vec{q}} \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left( L - \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} \dot{\vec{q}} \right) = \left[ \frac{\partial L}{\partial \vec{q}} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} \right) \right] \dot{\vec{q}}$$

Per l'equazione di Eulero-Lagrange, il secondo membro è nullo:

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{q}} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} \right) = \vec{0}$$

Dunque:

$$\frac{d}{dt} \left( L - \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} \dot{\vec{q}} \right) = 0$$

Integrando rispetto al tempo si ottiene:

$$L - \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} \dot{\vec{q}} = cost$$

Per definizione di lagrangiana, risulta che:

$$L = T - U$$

Inoltre, l'energia potenziale non dipende dalla velocità, dunque:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} = \frac{\partial}{\partial \dot{\vec{q}}} (T - U) = \frac{\partial T}{\partial \dot{\vec{q}}}$$

Dalle relazioni tra meccanica lagrangiana e newtoniana è possibile scrivere:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} = \vec{p}^T = m \dot{\vec{q}}^T$$

Moltiplicando ambo i membri per  $\dot{\vec{q}}$ , si ha:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} \dot{\vec{q}} = m \dot{\vec{q}}^T \dot{\vec{q}} = m \dot{q}^2$$

Per sistemi dove l'energia cinetica è una funzione omogenea di secondo grado rispetto alle velocità, è possibile affermare che:

$$m \dot{q}^2 = 2T$$

Per cui:

$$L - \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} \dot{\vec{q}} = cost \Leftrightarrow T - U - 2T = cost$$

A meno di un segno, risulta:

$$T + U = cost$$

In definitiva, si è dimostrato che la conservazione dell'energia totale (T+U) è una diretta conseguenza della simmetria temporale delle leggi fisiche.

### 1.3.9 Lemma 8: conservazione della quantità di moto

Il momento lineare:

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i = \sum_{i=1}^N m \vec{v}_i$$

Si conserva lungo la direzione per cui l'energia potenziale resta invariata, quindi lungo traiettorie equipotenziali.

Si suppone che lo spazio sia omogeneo, dunque, una qualsiasi traslazione  $\delta \vec{r}$  del sistema non deve cambiare la lagrangiana; in altre parole, deve risultare che  $\delta L = 0$ .

La variazione della lagrangiana può essere espressa come:

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} \delta \vec{r}$$

Si considera l'equazione di Eulero-Lagrange [**landau1994meccanica**]:

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{q}} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} \right) = \vec{0}$$

Passando a coordinate cartesiane,  $\vec{q}$  coincide con la posizione  $\vec{r}$ , mentre  $\dot{\vec{q}}$  con la velocità  $\vec{v}$ . L'equazione di Eulero-Lagrange può essere scritta come:

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} \right) = \vec{0} \Leftrightarrow \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} \right)$$

Per la proprietà di omogeneità spaziale, la derivata rispetto alla posizione della lagrangiana è nulla:

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = \vec{0}$$

Per cui risulta che:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} \right) = \vec{0}$$

Integrando rispetto al tempo si ottiene:

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \text{const}$$

In altre parole, il gradiente della lagrangiana rispetto alla velocità è costante.

In coordinate cartesiane, è possibile scrivere che:

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_i^2 - U(x_1, x_2, \dots, x_N) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i - U(x_1, x_2, \dots, x_N)$$

Derivando rispetto a  $\vec{v}$ , si ottiene:

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_i^2 - U(x_1, x_2, \dots, x_N) \right) = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i = \text{const}$$

La quantità di moto o momento lineare, in definitiva, si conserva in ipotesi di omogeneità spaziale.

### 1.3.10 Lemma 9: conservazione del momento angolare

La proiezione del momento angolare [landau1994meccanica]:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$

si conserva lungo direzioni in cui il potenziale  $U$  presenta delle simmetrie. Ad esempio, se il potenziale ha simmetria cilindrica, la proiezione del momento angolare lungo quest'asse si conserva.

Si suppone che lo spazio sia isotropo, dunque, una rotazione  $\delta \vec{r} = d\vec{\varphi} \times \vec{r}$  non deve modificare la lagrangiana. Il termine  $\varphi$  rappresenta l'asse di una simmetria parziale del potenziale.

Anche la velocità  $\vec{v}$  subisce una rotazione  $\delta \vec{v} = d\vec{\varphi} \times \vec{v}$  dovuta a  $d\vec{\varphi}$ . La variazione  $\delta L$  della lagrangiana, dovuta alla rotazione  $d\vec{\varphi}$ , può essere espressa come differenziale:

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} \cdot \delta \vec{v} + \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} \cdot \delta \vec{r}$$

Per l'ipotesi di isotropia, la variazione  $\delta L = 0$ , per cui si ha:

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} \cdot \delta \vec{v} + \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} \cdot \delta \vec{r} = 0$$

Si sostituiscono le relazioni per le variazioni di spostamento e velocità in termini di  $d\vec{\varphi} \times \vec{r}$ :

$$\delta \vec{r} = d\vec{\varphi} \times \vec{r}, \quad \delta \vec{v} = d\vec{\varphi} \times \vec{v}$$

Si ottiene:



$$\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} \cdot (d\vec{\varphi} \times \vec{v}) + \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} \cdot (d\vec{\varphi} \times \vec{r}) = 0$$

Esplicitando le derivate, si ha:

$$\sum_{i=1}^N \left[ \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i} \cdot (d\vec{\varphi} \times \vec{v}_i) + \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} \cdot (d\vec{\varphi} \times \vec{r}_i) \right] = 0$$

Dati tre vettori generici  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  e  $\vec{c}$ , si dimostra:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}$$

Applicando tale relazione, è possibile scrivere  $d\vec{\varphi}$  in prodotto scalare con l'operazione di prodotto vettoriale tra gli altri due vettori:

$$\sum_{i=1}^N \left[ \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i} \cdot (d\vec{\varphi} \times \vec{v}_i) + \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} \cdot (d\vec{\varphi} \times \vec{r}_i) \right] = \sum_{i=1}^N \left[ d\vec{\varphi} \cdot \left( \vec{v}_i \times \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i} \right) + d\vec{\varphi} \cdot \left( \vec{r}_i \times \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} \right) \right] = 0$$

Dall'equivalenza con la meccanica classica, è noto che:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i} = \vec{p}_i \\ \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} = \vec{f}_i = \frac{d\vec{p}_i}{dt} \end{cases}$$

Dunque, si ha:

$$\sum_{i=1}^N \left( \vec{v}_i \times \vec{p}_i + \vec{r}_i \times \frac{d\vec{p}_i}{dt} \right) \cdot d\vec{\varphi} = 0$$

Poiché  $\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i$ , la quantità di moto è parallela alla velocità, dunque, il loro prodotto vettoriale è nullo:

$$\vec{v}_i \times \vec{p}_i = \vec{0}$$

Resta, dunque:

$$\sum_{i=1}^N \left( \vec{r}_i \times \frac{d\vec{p}_i}{dt} \right) \cdot d\vec{\varphi} = 0$$

Si considera la quantità:

$$\frac{d}{dt} (\vec{r}_i \times \vec{p}_i)$$

Applicando le proprietà delle derivate, si ha:

$$\frac{d}{dt} (\vec{r}_i \times \vec{p}_i) = \frac{d\vec{r}_i}{dt} \times \vec{p}_i + \vec{r}_i \times \frac{d\vec{p}_i}{dt}$$

La derivata temporale della posizione coincide con la velocità istantanea:

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{v}_i$$

Siccome  $\vec{v}_i \times \vec{p}_i = \vec{0}$ , risulta:

$$\frac{d}{dt} (\vec{r}_i \times \vec{p}_i) = \vec{r}_i \times \frac{d\vec{p}_i}{dt}$$

Sostituendo questo risultato nella relazione:

$$\sum_{i=1}^N \left( \vec{r}_i \times \frac{d\vec{p}_i}{dt} \right) \cdot d\vec{\varphi} = 0$$

Si ha:

$$\sum_{i=1}^N \left( \vec{r}_i \times \frac{d\vec{p}_i}{dt} \right) \cdot d\vec{\varphi} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N (\vec{r}_i \times \vec{p}_i) \cdot d\vec{\varphi} = 0$$

Da questa relazione discende la conservazione del momento angolare lungo la direzione  $d\vec{\varphi}$  di simmetria del potenziale  $U$ .

### 1.3.11 Lagrangiana per pendolo

Si considera un corpo di massa  $m$  sospeso a un filo di lunghezza  $l$  nel campo gravitazionale con accelerazione  $g$ .

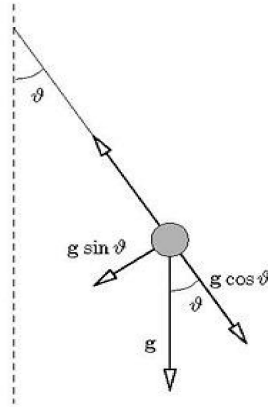


Figura 1.6: Pendolo semplice

Il pendolo possiede un solo grado di libertà, ovvero la rotazione intorno al proprio polo. Sia  $\vartheta$  l'angolo di cui la massa  $m$  è inclinata rispetto la verticale. La funzione lagrangiana data da:

$$L(\vartheta, \dot{\vartheta}) = T - U$$

Nel moto del pendolo, la velocità  $v$  è legata alla velocità angolare  $\dot{\vartheta}$ , dovuta allo spostamento angolare, dalla relazione:

$$v = l\dot{\vartheta}$$

L'energia cinetica del sistema si scrive, quindi, come:

$$T = \frac{1}{2}m \left( l\dot{\vartheta} \right)^2$$

Per l'energia potenziale,  $U$ , la componente verticale è data dalla proiezione della posizione della massa rispetto alla verticale, ovvero  $l \cos \vartheta$ . La differenza di altezza rispetto al punto di equilibrio è data da:

$$\Delta h = l - l \cos \vartheta = l(1 - \cos \vartheta)$$

Dunque, l'energia potenziale è data da:

$$U = mgl(1 - \cos \vartheta)$$

Esplicitando l'energia potenziale e cinetica, la lagrangiana è data da:

$$L(\vartheta, \dot{\vartheta}) = T - U = \frac{1}{2}m \left( l\dot{\vartheta} \right)^2 - mgl(1 - \cos \vartheta)$$

La funzione lagrangiana deve soddisfare l'equazione di Eulero-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} - \frac{\partial L}{\partial \vartheta} = 0$$

Sostituendo l'equazione ottenuta per  $L$ , si ha:

$$\frac{d}{dt} \left( ml^2 \dot{\vartheta} \right) + mgl \sin \vartheta = 0$$

$$ml^2 \ddot{\vartheta} + mgl \sin \vartheta = 0$$

Semplificando  $m$  ed  $l$  si ha:

$$\ddot{\vartheta} + \frac{g}{l} \sin \vartheta = 0$$

Si definisce pulsazione naturale del sistema:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Con questa definizione, l'equazione può essere scritta come:

$$\ddot{\vartheta} + \omega^2 \sin \vartheta = 0$$

Tale equazione non ammette soluzione in forma chiusa a meno di considerare l'approssimazione per piccole oscillazioni:

$$\vartheta \ll 1$$

In questo caso, l'equazione si scrive come:

$$\ddot{\vartheta} + \omega^2 \vartheta = 0$$

In definitiva, si ottiene l'equazione dell'oscillatore armonico.

### 1.3.12 Lagrangiana per il doppio pendolo

Si vuole scrivere la lagrangiana per un doppio pendolo, costituito da due masse,  $m_1$  e  $m_2$  connesse tra loro. La prima massa è collegata al fulcro mediante un cavo di lunghezza  $l_1$ ; la seconda è connessa a  $m_1$  mediante un cavo di lunghezza  $l_2$

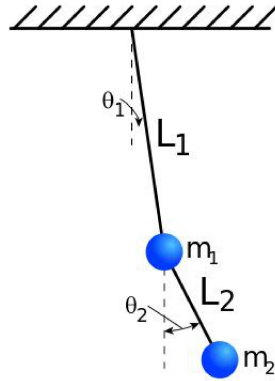


Figura 1.7: *Doppio pendolo*

Si proiettano le componenti delle lunghezze  $l_1$  e  $l_2$  sugli assi cartesiani:

$$l_1 : \begin{cases} x_1 = l_1 \sin \vartheta_1 \\ y_1 = -l_1 \cos \vartheta_1 \end{cases}$$

$$l_2 : \begin{cases} x_2 = x_1 + l_2 \sin \vartheta_2 \\ y_2 = y_1 - l_2 \cos \vartheta_2 \end{cases}$$

Le componenti della velocità possono essere valutate, derivando rispetto al tempo le equazioni ottenute:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = l_1 \frac{d}{dt} \sin \vartheta_1 = l_1 \cos \vartheta_1 \frac{d\vartheta_1}{dt} \\ \dot{y}_1 = -l_1 \frac{d}{dt} \cos \vartheta_1 = l_1 \sin \vartheta_1 \frac{d\vartheta_1}{dt} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = l_1 \cos \vartheta_1 \frac{d\vartheta_1}{dt} + l_2 \cos \vartheta_2 \frac{d\vartheta_2}{dt} \\ \dot{y}_2 = l_1 \sin \vartheta_1 \frac{d\vartheta_1}{dt} + l_2 \sin \vartheta_2 \frac{d\vartheta_2}{dt} \end{cases}$$

La configurazione del sistema può essere determinata noti i parametri  $\vartheta_1$  e  $\vartheta_2$ , dunque, il sistema presenta 2 gradi di libertà. Infatti, rispetto al fulcro, le due masse possono ruotare relativamente, dunque, l'energia cinetica comprende sia la velocità di transizione che rotazione:

$$T = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

La velocità al quadrato della massa  $m_1$  è data da:

$$v_1^2 = \dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 = \left( l_1 \cos \vartheta_1 \frac{d\vartheta_1}{dt} \right)^2 + \left( l_1 \sin \vartheta_1 \frac{d\vartheta_1}{dt} \right)^2 = l_1^2 \dot{\vartheta}_1^2 (\cos^2 \vartheta_1 + \sin^2 \vartheta_1) \Leftrightarrow v_1^2 = l_1^2 \dot{\vartheta}_1^2$$

La velocità al quadrato della massa  $m_2$  è data da:

$$\begin{aligned} v_2^2 &= \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 = \left( l_1 \cos \vartheta_1 \dot{\vartheta}_1 + l_2 \cos \vartheta_2 \dot{\vartheta}_2 \right)^2 + \left( l_1 \sin \vartheta_1 \dot{\vartheta}_1 + l_2 \sin \vartheta_2 \dot{\vartheta}_2 \right)^2 \\ &= l_1^2 \dot{\vartheta}_1^2 (\cos^2 \vartheta_1 + \sin^2 \vartheta_1) + l_2^2 \dot{\vartheta}_2^2 (\cos^2 \vartheta_2 + \sin^2 \vartheta_2) + 2l_1 l_2 \dot{\vartheta}_1 \dot{\vartheta}_2 (\cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2 + \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2) \\ &= l_1^2 \dot{\vartheta}_1^2 + l_2^2 \dot{\vartheta}_2^2 + 2l_1 l_2 \dot{\vartheta}_1 \dot{\vartheta}_2 \cos(\vartheta_1 - \vartheta_2) \end{aligned}$$

Ricorrendo alle identità trigonometriche, è possibile scrivere:

$$v_2^2 = l_1^2 \dot{\vartheta}_1^2 + l_2^2 \dot{\vartheta}_2^2 + 2l_1 l_2 \dot{\vartheta}_1 \dot{\vartheta}_2 \cos(\vartheta_1 - \vartheta_2)$$

L'energia cinetica si scrive come:

$$T = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\vartheta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \left[ l_1^2 \dot{\vartheta}_1^2 + l_2^2 \dot{\vartheta}_2^2 + 2l_1 l_2 \dot{\vartheta}_1 \dot{\vartheta}_2 \cos(\vartheta_1 - \vartheta_2) \right]$$

Bisogna valutare anche l'energia potenziale. Quest'ultima è data dalla somma delle energie potenziali delle due masse:

$$U = m_1 g \Delta h_1 + m_2 g \Delta h_2$$

Dove:

$$\Delta h_1 = l_1 - l_1 \cos \vartheta_1 = l_1 (1 - \cos \vartheta_1), \quad \Delta h_2 = l_1 + l_2 - l_1 \cos \vartheta_1 - l_2 \cos \vartheta_2 = l_1 (1 - \cos \vartheta_1) + l_2 (1 - \cos \vartheta_2)$$

Sostituendo, si ottiene:

$$U = m_1 g l_1 (1 - \cos \vartheta_1) + m_2 g l_1 (1 - \cos \vartheta_1) + m_2 g l_2 (1 - \cos \vartheta_2)$$

La lagrangiana per questo sistema è data da:

$$\begin{aligned} L(\vartheta_1, \vartheta_2, \dot{\vartheta}_1, \dot{\vartheta}_2) &= \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\vartheta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \left( l_1^2 \dot{\vartheta}_1^2 + l_2^2 \dot{\vartheta}_2^2 + 2 l_1 l_2 \dot{\vartheta}_1 \dot{\vartheta}_2 \cos(\vartheta_1 - \vartheta_2) \right) + \\ &\quad - m_1 g l_1 (1 - \cos \vartheta_1) - m_2 g l_1 (1 - \cos \vartheta_1) - m_2 g l_2 (1 - \cos \vartheta_2) \end{aligned}$$

La funzione lagrangiana deve soddisfare l'equazione di Eulero-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{\vartheta}}} - \frac{\partial L}{\partial \vec{\vartheta}} = \vec{0}$$

L'equazione si traduce in due equazioni, relative a  $\vartheta_1$  e  $\vartheta_2$ :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial \vartheta_1} = 0 \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial \vartheta_2} = 0 \end{cases}$$

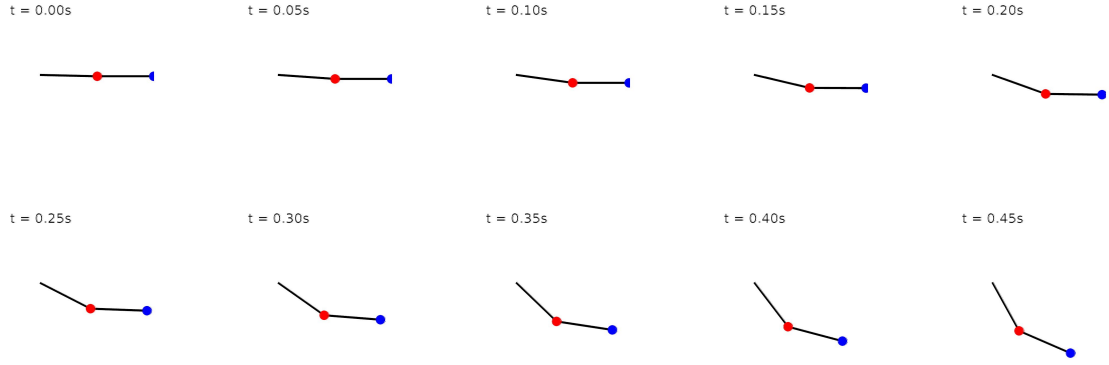
Dove le derivate sono:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}_1} = (m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\vartheta}_1 + m_2 l_1 l_2 \dot{\vartheta}_2 \cos(\vartheta_1 - \vartheta_2) \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}_2} = m_2 l_2^2 \dot{\vartheta}_2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\vartheta}_1 \cos(\vartheta_1 - \vartheta_2) \\ \frac{\partial L}{\partial \vartheta_1} = -m_2 l_1 l_2 \dot{\vartheta}_1 \dot{\vartheta}_2 \sin(\vartheta_1 - \vartheta_2) + (m_1 + m_2) g l_1 \sin \vartheta_1 \\ \frac{\partial L}{\partial \vartheta_2} = m_2 l_1 l_2 \dot{\vartheta}_1 \dot{\vartheta}_2 \sin(\vartheta_1 - \vartheta_2) + m_2 g l_2 \sin \vartheta_2 \end{cases}$$

Eseguendo le derivate temporali e riarrangiando i termini, si ottengono le due equazioni:

$$\begin{cases} (m_1 + m_2) l_1^2 \ddot{\vartheta}_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\vartheta}_2 \cos(\vartheta_1 - \vartheta_2) + m_2 l_1 l_2 \dot{\vartheta}_2^2 \sin(\vartheta_1 - \vartheta_2) + (m_1 + m_2) g l_1 \sin \vartheta_1 = 0 \\ m_2 l_2 \ddot{\vartheta}_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\vartheta}_1 \cos(\vartheta_1 - \vartheta_2) - m_2 l_1 l_2 \dot{\vartheta}_1^2 \sin(\vartheta_1 - \vartheta_2) + m_2 g l_2 \sin \vartheta_2 = 0 \end{cases}$$

Risolte le due equazioni, si ottiene la traiettoria, descritta da  $\vartheta_1$  e  $\vartheta_2$ , del doppio pendolo.



La Figura 1.8 mostra una sequenza di fotogrammi che rappresentano l'evoluzione temporale del doppio pendolo. Ogni riquadro corrisponde a un istante successivo, e le posizioni delle due masse sono tracciate in base agli angoli  $\vartheta_1(t)$  e  $\vartheta_2(t)$ .

Il comportamento del sistema è altamente non lineare e sensibile alle condizioni iniziali: anche piccole variazioni iniziali possono produrre traiettorie molto diverse. Questo fenomeno è noto come **caos deterministico**.

La traiettoria delle masse non segue un percorso regolare, ma mostra oscillazioni complesse e interazioni dinamiche tra i due bracci del pendolo. Questo rende il doppio pendolo un sistema ideale per lo studio della dinamica non lineare.

## 1.4 Descrizione hamiltoniana

La descrizione hamiltoniana privilegia le variabili momento lineare o quantità di moto  $\vec{p}$  e la posizione generalizzata della particella  $\vec{q}$  [landau1994meccanica]. Questa teoria sfrutta una funzione  $H$  detta hamiltoniana, data da:

$$H(\vec{p}, \vec{q}) = E = T + U$$

Questa relazione è valida se:

- Nel sistema vi sono solo forze conservative;
- La Lagrangiana non dipende esplicitamente dal tempo, dunque, il sistema è isolato;
- L'energia cinetica è una funzione quadratica omogenea delle velocità generalizzate.

Privilegiando la quantità di moto e la posizione generalizzata della particella, l'approccio hamiltoniano permette di descrivere l'evoluzione del sistema nel tempo come una traiettoria nello spazio posizione-quantità di moto, detto spazio delle fasi.

### 1.4.1 Lemma 9: equazione di Hamilton

Si considera il differenziale della funzione hamiltoniana:

$$dH(\vec{p}, \vec{q}) = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i \right)$$

Si differenzia anche la lagrangiana:

$$dL(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \right)$$

Combinando l'equazione del momento coniugato generalizzato con quella di Eulero-Lagrange, si ottiene:

$$\begin{cases} p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \\ \dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} \end{cases}$$

Sostituendo le relazioni precedenti, il differenziale della lagrangiana può essere scritto come:

$$dL(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) = \sum_{i=1}^N (\dot{p}_i dq_i + p_i d\dot{q}_i)$$

Si considera la quantità:

$$d(p_i \dot{q}_i) = p_i d\dot{q}_i + dp_i \dot{q}_i$$

Da cui si ottiene:

$$p_i d\dot{q}_i = d(p_i \dot{q}_i) - dp_i \dot{q}_i$$

Si sostituisce questo risultato nel differenziale della lagrangiana:

$$dL(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) = \sum_{i=1}^N (\dot{p}_i dq_i + p_i d\dot{q}_i) = \sum_{i=1}^N [\dot{p}_i dq_i + d(p_i \dot{q}_i) - \dot{q}_i dp_i] = \sum_{i=1}^N (\dot{p}_i dq_i - \dot{q}_i dp_i) + \sum_{i=1}^N d(p_i \dot{q}_i)$$

Riordinando i termini, si scrive:

$$dL - \sum_{i=1}^N d(p_i \dot{q}_i) = \sum_{i=1}^N (\dot{p}_i dq_i - \dot{q}_i dp_i)$$

Grazie alla proprietà di linearità del differenziale, si può scrivere:

$$d \left( L - \sum_{i=1}^N p_i \dot{q}_i \right) = \sum_{i=1}^N (\dot{p}_i dq_i - \dot{q}_i dp_i)$$

Moltiplicando per  $-1$ , si ottiene:



$$d \left( \sum_{i=1}^N p_i \dot{q}_i - L \right) = \sum_{i=1}^N (\dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i)$$

Risulta che:

$$\sum_{i=1}^N p_i \dot{q}_i = \sum_{i=1}^N m_i \dot{q}_i \dot{q}_i = \sum_{i=1}^N m_i \dot{q}_i^2 = 2T$$

Di conseguenza:

$$\sum_{i=1}^N p_i \dot{q}_i - L = 2T - T + U = E$$

Con questo risultato, è possibile scrivere:

$$dE = \sum_{i=1}^N (\dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i)$$

Per definizione di hamiltoniana, è possibile scrivere:

$$dE = dH = \sum_{i=1}^N (\dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i)$$

Confrontando questo risultato con il differenziale dell'hamiltoniana:

$$dH(\vec{p}, \vec{q}) = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i \right)$$

Si ottiene:

$$\sum_{i=1}^N (\dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i) = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i \right)$$

Confrontati i coefficienti dei due polinomi, si ottengono le equazioni, note come **equazioni canoniche di Hamilton** [arnold1992matematici]:

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases}$$

A meno di un segno, queste equazioni sono simmetriche rispetto a quelle relative alla lagrangiana.

### 1.4.2 Parentesi di Poisson

Si considera una qualunque grandezza  $f$ , funzione delle coordinate generalizzate  $\vec{q}$  e del momento lineare  $\vec{p}$ :

$$f = f(\vec{q}, \vec{p})$$

La sua derivata temporale è valutata mediante la proprietà delle derivate dalle funzioni composte:

$$\frac{df}{dt} = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} \right) = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i \right)$$

Per le proprietà della funzione di Hamilton:

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases}$$

La derivata temporale della funzione  $f$ , può essere scritta come:

$$\frac{df}{dt} = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} \right) = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right)$$

Per semplificare la notazione si introduce la **\*\*parentesi di Poisson\*\*** [**arnold1992matematici**]:

$$\{f, H\} = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right)$$

### 1.4.3 Hamiltoniana per sistema con un grado di libertà

Si vuole valutare la funzione di Hamilton per un sistema con un grado di libertà immerso in un potenziale quadratico, come la forza di richiamo elastica. Questa condizione si applica anche nei punti di minimo del potenziale  $U$ , in cui vale un'approssimazione del secondo ordine. Per definizione, l'hamiltoniana è data da:

$$H = E = T + U$$

Dove:

$$T = \frac{1}{2}mv^2$$

Si scrive l'energia cinetica  $T$  in funzione della quantità di moto. Risulta:

$$p = mv$$

Elevando al quadrato, si ottiene:

$$p^2 = m^2 v^2$$

Isolando la velocità:

$$v^2 = \frac{p^2}{m^2}$$

Si sostituisce questo risultato nell'energia cinetica:

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \frac{p^2}{m^2} = \frac{p^2}{2m}$$

Il potenziale, invece, dipende solamente dalla posizione, per cui è dato da:

$$U = \frac{1}{2} k q^2$$

L'hamiltoniana può essere scritta come:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} k q^2$$

Si applicano le proprietà dell'hamiltoniana, dunque, si eseguono le derivate parziali:

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{q} = \frac{p}{m} \\ \dot{p} = -kq \end{cases}$$

Risolvendo il sistema, si ottiene l'andamento della traiettoria generalizzata  $q$ . A tale scopo si deriva la prima equazione rispetto al tempo:

$$\ddot{q} = \frac{\dot{p}}{m}$$

Sostituendo la seconda equazione, si ottiene l'equazione dell'oscillatore armonico, la cui soluzione è nota:

$$\ddot{q} = -\frac{k}{m} q$$

## 1.5 Metodo di Eulero-Cauchy

Si considera il sistema di equazioni differenziali del secondo ordine, nelle funzioni incognite  $y_1$  e  $y_2$ :

$$\begin{cases} \ddot{y}_1 = f_1(\dot{y}_1, \dot{y}_2, y_1, y_2) \\ \ddot{y}_2 = f_2(\dot{y}_1, \dot{y}_2, y_1, y_2) \end{cases}$$

Dove  $f_1$  e  $f_2$  sono due funzioni qualsiasi che legano la derivata seconda di una funzione incognite con le derivate prime e funzioni incognite stesse. Per rendere il sistema del primo ordine si considerano due variabili ausiliarie,  $A_1$  e  $A_2$ , definite come:

$$\begin{cases} A_1 = \dot{y}_1 \\ A_2 = \dot{y}_2 \end{cases}$$

Si ottiene così un sistema del primo ordine con quattro funzioni incognite,  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $y_1$  e  $y_2$ :

$$\begin{cases} A_1 = \dot{y}_1 \\ A_2 = \dot{y}_2 \\ \dot{A}_1 = f_1(A_1, A_2, y_1, y_2) \\ \dot{A}_2 = f_2(A_1, A_2, y_1, y_2) \end{cases}$$

Il sistema può essere risolto mediante il metodo di Eulero-Cauchy degli elementi finiti. Si considera la prima equazione:

$$A_1 = \frac{dy_1}{dt} \Leftrightarrow dy_1 = A_1 dt$$

Passando agli incrementi finiti, è possibile approssimare l'equazione:

$$\Delta y_1 \simeq A_1 \Delta t$$

Per tutte le altre equazioni è possibile procedere allo stesso modo:

$$\begin{cases} \Delta y_1 \simeq A_1 \Delta t \\ \Delta y_2 \simeq A_2 \Delta t \\ \Delta A_1 \simeq f_1(A_1, A_2, y_1, y_2) \Delta t \\ \Delta A_2 \simeq f_2(A_1, A_2, y_1, y_2) \Delta t \end{cases}$$

Dividendo l'intervallo temporale in intervalli sufficientemente piccoli è possibile determinare la soluzione approssimata del sistema. Tale metodo è in grado di fornire soluzioni valide solamente se le funzioni incognite non variano troppo rapidamente rispetto gli intervalli di tempo scelti per l'analisi  $\Delta t$ . Con funzioni rapidamente variabili sono possibili anche errori importanti.

### 1.5.1 Risoluzione sistema con MatLab

Si considera il seguente sistema di equazioni differenziali del secondo ordine, nelle funzioni incognite  $y_1$  e  $y_2$  [landau1994meccanica]:

$$\begin{cases} \ddot{y}_1 = -5.5y_1 + 1.1y_2 \\ \ddot{y}_2 = 1.1y_1 - 1.2y_2 \end{cases}$$

Ponendo  $z_1 = \dot{y}_1, z_2 = \dot{y}_2$ , si ottiene il sistema:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = z_1 \\ \dot{y}_2 = z_2 \\ \dot{z}_1 = -5.5y_1 + 1.1y_2 \\ \dot{z}_2 = 1.1y_1 - 1.2y_2 \end{cases}$$

Si pone il sistema in forma matriciale:

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -5.5 & 1.1 & 0 & 0 \\ 1.1 & -1.2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

Utilizzando le variabili ausiliarie  $z_1$  e  $z_2$ , è possibile avere una matrice quadrata. Si pone:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -5.5 & 1.1 \\ 1.1 & -1.2 \end{pmatrix}$$

La matrice dei termini noti  $\mathbf{C}$  può essere scritta come:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -5.5 & 1.1 & 0 & 0 \\ 1.1 & -1.2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{I}_{2 \times 2} \\ \mathbf{A} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \end{pmatrix}$$

Dove  $\mathbf{I}_{2 \times 2}$  è la matrice identità  $2 \times 2$ , mentre  $\mathbf{0}_{2 \times 2}$  è la matrice nulla  $2 \times 2$ .

Definendo  $\vec{y}$  il vettore delle funzioni incognite:

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

Il sistema può essere scritto come:

$$\dot{\vec{y}} = \mathbf{C}\vec{y}$$

La soluzione di questa equazione è del tipo:

$$\vec{y} = \vec{k} \exp(\lambda \mathbf{I} t)$$

Sostituendo nel sistema, si ottiene:

$$\lambda \vec{k} \mathbf{I} \exp(\lambda \mathbf{I} t) = \mathbf{C} \vec{k} \exp(\lambda \mathbf{I} t)$$

Poiché la funzione esponenziale è sempre non nulla, esiste l'inversa a  $\vec{k} \exp(\lambda \mathbf{I} t)$ , si ha:

$$\lambda \mathbf{I} = \mathbf{C} \Leftrightarrow \mathbf{C} - \lambda \mathbf{I} = \mathbf{0}$$

Affinché il sistema ammetta soluzioni non banali bisogna porre:

$$\det(\mathbf{C} - \lambda \mathbf{I}) = 0$$

Di conseguenza,  $\lambda$  sono gli autovalori della matrice dei coefficienti. Si calcolano, dunque, gli autovalori:

$$\det(\mathbf{C} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ -5.5 & 1.1 & -\lambda & 0 \\ 1.1 & -1.2 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

La cui soluzioni sono:

$$\begin{cases} \lambda_1 = j2.4011 \\ \lambda_2 = -j2.4011 \\ \lambda_3 = j0.9669 \\ \lambda_4 = -j0.9669 \end{cases}$$

Di conseguenza, le soluzioni sono del tipo:

$$y_i = k_{i,1} \cos(\omega_{i,1} t + \vartheta_{i,1}) + k_{i,2} \cos(\omega_{i,2} t + \vartheta_{i,2}), \quad i = 1, 2$$

Dove  $k_{i,j}$  e  $\vartheta_{i,j}$ , con  $i, j = 1, 2$  sono costanti ottenute imponendo le condizioni iniziali; mentre  $\omega_{i,1}$  sono le pulsazioni naturali del sistema.

Per ottenere la soluzione si ricorre a MATLAB. Per prima cosa, si pulisce l'ambiente.

```
1 clear all
2 close all
```

Si definiscono i parametri del sistema. La matrice dei coefficienti è definita come globale perché deve essere letta anche da una funzione, richiamata dalla *main function*.

```
1 global A
2 A=[-5.5 1.1;1.1 -1.2]; %matrice dei coefficienti del sistema
3 Ts=0.001;
4 t_span=0:Ts:200;
5 y0 = [.5,.5,0,0]'; %si usa il trasposto perche' e' necessario avere un vettore
    colonna
```

Si risolve il sistema mediante ode45, il risolutore di equazioni differenziali. Bisogna utilizzare una funzione che implementa il sistema di equazioni differenziali.

```
1 eq=@sistema\_f;
2 [t,s]=ode45(eq,t\_span,y0);
3 a\_val=eig(A);
4 w=abs(a\_val);
5 w1=sqrt(w(1))
6 w2=sqrt(w(2))
```

risulta che:

$$\omega_1 = 2.4011$$

$$\omega_2 = 0.9669$$

Si plottano le due funzioni e i picchi spettrali.

```
1 subplot(1,2,1)
2 plot(t,[s(:,1) s(:,2)])
3 subplot(1,2,2)
4 L = length(t);
5 fax = (1/Ts)*(0:L-1)/L; %Si normalizza l'asse delle frequenze
6 plot(fax,abs(fft(s(:,1:2))))
7 set(gca,'xlim',[0 1])
```

Come si vede dalla trasformata di Fourier, le soluzioni del sistema accoppiato contengono due frequenze di oscillazione ben distinte ( $\omega_1$  e  $\omega_2$ ). A causa dell'interazione tra le due funzioni, entrambe le soluzioni  $y_1$  e  $y_2$  sono una combinazione di queste due frequenze, che sono differenti dal caso non interagente.

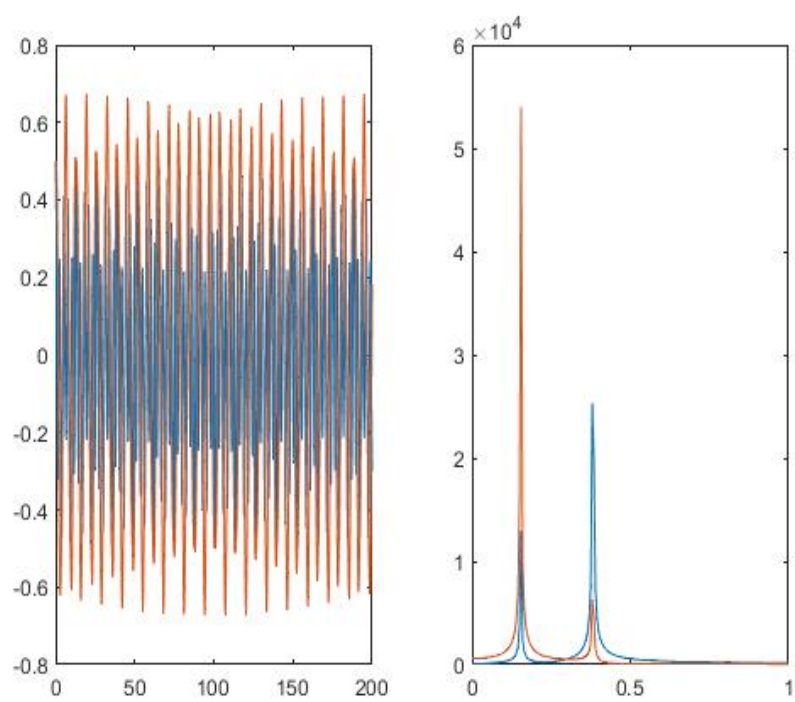


Figura 1.8: *Andamento delle soluzioni e relativa risposta spettrale*





# Capitolo 2

## Meccanica relativistica

### Sommario

<b>2.1</b>	<b>Discordanza tra meccanica ed elettromagnetismo . . . . .</b>	<b>43</b>
2.1.1	Trasformazioni galileiane . . . . .	43
<b>2.2</b>	<b>Relatività ristretta . . . . .</b>	<b>43</b>
2.2.1	Composizione delle velocità . . . . .	48
2.2.2	Fattore di Lorentz . . . . .	50
2.2.3	Dilatazione dei tempi . . . . .	51
2.2.4	Contrazione delle lunghezze . . . . .	53
2.2.5	Energia e quantità di moto relativistiche . . . . .	55
<b>2.3</b>	<b>Quadrivettori . . . . .</b>	<b>60</b>
2.3.1	Legge di trasformazione dei quadrivettori . . . . .	63
<b>2.4</b>	<b>Urto anelastico . . . . .</b>	<b>65</b>
<b>2.5</b>	<b>Conservazione dell'energia . . . . .</b>	<b>67</b>
<b>2.6</b>	<b>Esempio carica in moto in campo elettrico . . . . .</b>	<b>68</b>

## 2.1 Discordanza tra meccanica ed elettromagnetismo

Verso la fine del 1800, le previsioni della meccanica classica non erano in grado di spiegare i fenomeni rilevati sperimentalmente riguardanti la velocità della luce. In questo periodo storico, le equazioni di Maxwell indicavano che ogni radiazione elettromagnetica si propaga nello spazio con velocità costante  $c$ .

L'esperimento di Michelson-Morley del 1881 dimostrò che la velocità della luce  $c$  è la stessa in tutti i sistemi di riferimento inerziali, indipendentemente dal loro moto relativo. Questo risultato non era in accordo con le previsioni teoriche della meccanica classica, basata sul principio di relatività galileiana.

### 2.1.1 Trasformazioni galileiane

Per comprendere le previsioni della meccanica classica si dati due sistemi di riferimento inerziali in moto relativo tra loro con velocità costante  $\vec{v}$ . Si suppone che il movimento del sistema  $K'$  rispetto al sistema  $K$  avvenga solamente lungo  $x$ . Con questa ipotesi la trattazione non perde di generalità, infatti, per i moti traslatori è sempre possibile definire un asse lungo cui avviene il moto. Gli altri assi restano paralleli.

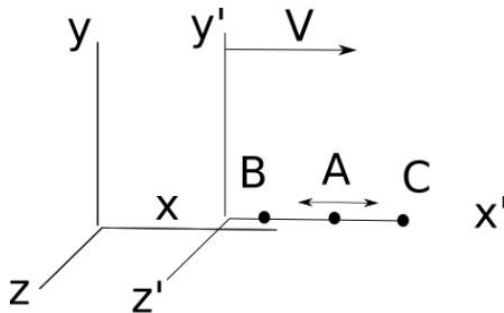


Figura 2.1: Sistemi di riferimento in moto relativo

In questo caso, le trasformazioni galileiane si scrivono come:

$$\begin{cases} x = x' + vt \\ y = y' \\ z = z' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_x = v_{x'} + v \\ v_y = v_{y'} \\ v_z = v_{z'} \end{cases}$$

Da queste relazioni si evince che, se una radiazione elettromagnetica viaggia con velocità  $c$  nel sistema  $K'$ , un osservatore nel sistema  $K$  la misurerebbe a una velocità pari a  $c + v$ . Tale considerazione è in contrasto con l'esperimento di Michelson e Morley. Questa incongruenza discende dall'aver considerato il tempo uguale per i due sistemi di riferimento inerziali, in moto relativo tra loro [kittel1965meccanica].

## 2.2 Relatività ristretta

Assumendo che il principio di relatività sia valido, nel '900 Einstein dimostrò che il concetto di tempo non è assoluto ma relativo. Si considerano, dunque, due sistemi inerziali  $K$  e  $K'$ , di cui il primo fermo mentre il secondo in moto lungo la direzione delle  $x$  positive con velocità  $v$ . Se è valido il principio di relatività, le

equazioni di Maxwell devono essere le stesse per ogni sistema inerziale. Di conseguenza la velocità della luce  $c$  deve essere la stessa sia in  $K$  che  $K'$ .

Siano  $A$ ,  $B$  e  $C$  tre punti sull'asse delle  $x'$ , con  $A$  e  $C$  equidistanti da  $B$ , sorgente luminosa. I tre punti sono solidali con il sistema riferimento  $K'$ , ovvero sono fermi rispetto a esso. Se anche l'osservatore è solidale con il sistema di riferimento  $K'$ , vede i tre punti fermi, dunque, la luce, procedendo con velocità  $c$  in entrambe le direzioni, giungere contemporaneamente sui punti  $A$  e  $C$ .

Per un osservatore solidale con  $K$  i tre punti si muovono con velocità  $v$  nel verso positivo delle  $x$ . In particolare,  $A$  insegue la sorgente luminosa, mentre  $C$  si allontana da essa. La luce, dovendo compiere percorsi diversi, raggiunge prima il punto  $A$  e, successivamente, il punto  $C$ .

Da questo esempio discende che, cambiando sistema di riferimento, gli eventi che in un sistema di riferimento  $K'$  sono contemporanei, non lo sono nel sistema di riferimento  $K$ . Si conclude, quindi, che il tempo è un concetto relativistico legato al sistema di riferimento considerato. Bisogna collegare la coordinata temporale  $t'$  del sistema in moto  $K'$  con la rispettiva  $t$  del sistema di riferimento  $K$ , in modo che sia rispettato il principio di invarianza della velocità della luce delle equazioni di Maxwell.

A tale scopo si supponga che un'onda luminosa sferica si propaghi partendo dall'origine del sistema di coordinate  $K$  e si propaghi con velocità  $c$  nello spazio. Questo fenomeno deve essere osservato allo stesso modo anche nel sistema di riferimento  $K'$ . Si suppone che l'origine di quest'ultimo sistema di riferimento coincida con quella di  $K$ , all'atto di emissione dell'onda luminosa. Per i due sistemi valgono le relazioni:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \\ x'^2 + y'^2 + z'^2 = r'^2 \end{cases}$$

Dove, i raggi sono dati da:

$$r = ct, \quad r' = ct'$$

Inoltre, per le ipotesi fatte sui due sistemi di riferimento, risulta:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \\ x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2 \end{cases}$$

Siccome gli eventi non sono simultanei nei due sistemi di riferimento,  $t' \neq t$ .

Einstein ipotizza un legame di tipo lineare tra il tempo e lo spazio in  $K'$  con le analoghe quantità in  $K$ , ovvero:

$$\begin{cases} t' = gx + et \\ x' = ax + bt \end{cases}$$

Queste equazioni sono dette trasformazioni di Lorentz generalizzate.

Si sostituisce queste relazioni nell'equazione che descrive l'espansione dell'onda in  $K'$ :

$$(ax + bt)^2 + y^2 + z^2 = c^2(gx + et)^2$$

Sviluppando i quadrati:

$$a^2x^2 + 2abxt + b^2t^2 + y^2 + z^2 = c^2g^2x^2 + 2c^2gext + c^2e^2t^2$$

Raccogliendo, si ha:

$$(a^2 - c^2g^2)x^2 + (2ab - 2c^2ge)xt + y^2 + z^2 = (c^2e^2 - b^2)t^2$$

Questa equazione descrive l'onda nel sistema di riferimento  $K$ , quindi, deve essere paragonata all'equazione:

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2$$

Uguagliando i coefficienti dei termini corrispondente, si ha:

$$\begin{cases} a^2 - c^2g^2 = 1 \\ 2ab - 2c^2ge = 0 \\ c^2e^2 - b^2 = c^2 \end{cases}$$

Il sistema ottenuto presenta tre equazioni, nelle incognite  $a$ ,  $b$ ,  $e$  e  $g$ . È, dunque, necessario aggiungere una quarta equazione. Al fine di colmare il grado di libertà si fissa il rapporto tra due incognite. Si considerano le trasformazioni di Lorentz generalizzate e se ne calcola il differenziale:

$$\begin{cases} t' = gx + et \\ x' = ax + bt \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} dt' = g dx + e dt \\ dx' = a dx + b dt \end{cases}$$

Se la sorgente luminosa è solidale col sistema  $K$ , ovvero è ferma in tale sistema, allora la variazione della sua coordinata  $x$  deve essere nulla; per cui:

$$dx = 0$$

Si ottiene:

$$\begin{cases} dt' = e dt \\ dx' = b dt \end{cases}$$

Dividendo membro a membro si ha:

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{b}{e} \frac{dt}{dt}$$

Siccome la variazione di  $t$  considerata è relativa al sistema  $K$ , i  $dt$  sono uguali, dunque possono essere semplificati:

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{b}{e}$$

Si considera un punto fermo in  $K'$ ; per il quale la sua coordinata  $x'$  è costante, dunque,  $dx' = 0$ . Si considera l'equazione  $x' = a dx + b dt$ . Ponendo  $dx' = 0$  si ottiene:

$$a dx + b dt = 0 \Leftrightarrow \frac{dx}{dt} = -\frac{b}{a}$$

La velocità del punto fermo in  $K'$ , misurata nel sistema  $K$ , è proprio  $dx/dt$ . Poiché il sistema  $K'$  si muove rispetto a  $K$  con velocità  $v$ , un punto fermo in  $K'$  ha, per l'osservatore in  $K$ , una velocità  $v$ . Pertanto, è valida la relazione:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{b}{a} \Leftrightarrow v = -\frac{b}{a}$$

Da cui si ricava:

$$b = av$$

Il primo termine è la velocità del sistema  $K'$  rispetto a  $K$ , cambiata di segno. In conclusione, la quarta equazione è:

$$\frac{b}{e} = -v \Leftrightarrow b = -ve$$

Si ottiene il sistema:

$$\begin{cases} a^2 - c^2 g^2 = 1 \\ ab - c^2 ge = 0 \\ c^2 e^2 - b^2 = c^2 \\ b = -ve \end{cases}$$

Si considera la terza equazione:

$$c^2 e^2 - b^2 = c^2$$

Si sostituisce l'ultima:

$$c^2 e^2 - v^2 e^2 = c^2$$

Da cui è possibile ricavare  $e$ :

$$e^2 = \frac{c^2}{c^2 - v^2} = \frac{1}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

$$e = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

Noto  $e$  è possibile risalire a  $b$  dalla quarta equazione:

$$b = -ve = -\frac{v}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

Dalla seconda equazione è possibile ricavare  $g$  in funzione di  $a$ :

$$c^2 ge = ab \Leftrightarrow g = \frac{1}{c^2} a \frac{b}{e}$$

Per la quarta equazione, si ha:

$$g = -\frac{v}{c^2} a$$

Si sostituisce questo risultato nella prima equazione:

$$a^2 - c^2 g^2 = 1 \Leftrightarrow a^2 - c^2 \frac{v^2}{c^4} a^2 = 1 \Leftrightarrow \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) a^2 = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

Noto  $a$ , è possibile risalire a  $g$ :

$$g = -\frac{v}{c^2} a = -\frac{v}{c^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

I coefficienti determinati sono, dunque:

$$\left\{ \begin{array}{l} a = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \\ b = -\frac{v}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \\ g = -\frac{v}{c^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \\ e = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \end{array} \right.$$

Dato che il rapporto della velocità di movimento del sistema di riferimento sulla velocità della luce compare frequentemente, si pone:

$$\frac{v}{c} = \beta$$

La quantità:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

È detto fattore di Lorentz. Con queste definizioni, i coefficienti delle equazioni di composizione possono essere scritti come:

$$\left\{ \begin{array}{l} a = \gamma \\ b = -v\gamma \\ g = -\frac{v}{c^2}\gamma \\ e = \gamma \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = \gamma \\ b = -\beta\gamma c \\ g = -\frac{\beta}{c}\gamma \\ e = \gamma \end{array} \right.$$

Le leggi di trasformazioni tra il sistema  $K$  e  $K'$  sono, quindi [landau1975campi, feynman1964vol1]:

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = ax + bt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = gx + et \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x' = \gamma x - \beta\gamma ct \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = -\frac{\beta}{c}\gamma x + \gamma t \end{array} \right.$$

### 2.2.1 Composizione delle velocità

Si determinano, ora, le leggi di trasformazione per la velocità; a tale scopo si differenziano le equazioni appena ottenute. Si ottengono così le trasformazioni di Lorentz:



$$\begin{cases} dx' = \gamma dx - \beta\gamma c dt \\ dy' = dy \\ dz' = dz \\ dt' = -\frac{\beta}{c}\gamma dx + \gamma dt \end{cases}$$

Dividendo una delle variazioni spaziali per  $dt'$  si ottengono le velocità lungo gli assi nel sistema  $K'$ . Si inizia con  $v_{x'}$ , dunque, si divide  $dx'$  con  $dt'$

$$v_{x'} = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\gamma(dx - \beta c dt)}{\gamma\left(-\frac{\beta}{c} dx + dt\right)} = \frac{dx - \beta c dt}{-\frac{\beta}{c} dx + dt}$$

Al secondo membro si mette in evidenza  $dt$ :

$$v_{x'} = \frac{\frac{dx}{dt} - \beta c}{-\frac{\beta}{c} \frac{dx}{dt} + 1}$$

Ma:

$$\frac{dx}{dt} = v_x$$

È la componente di velocità lungo l'asse  $x$  con cui si muove un fenomeno nel sistema  $K$ :

$$v_{x'} = \frac{v_x - \beta c}{-\frac{\beta}{c} v_x + 1}$$

Lungo  $y'$ , la velocità è data da:

$$v_{y'} = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{\gamma\left(-\frac{\beta}{c} dx + dt\right)}$$

Moltiplicando e dividendo per  $dt$  al secondo membro, si ha:

$$v_{y'} = \frac{dy'}{dt'} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\gamma\left(-\frac{\beta}{c} \frac{dx}{dt} + 1\right)}$$

Dove compare la componente di velocità lungo l'asse  $x$  con cui si muove un fenomeno nel sistema  $K$ :

$$\frac{dy}{dt} = v_y \Rightarrow v_{y'} = \frac{dy'}{dt'} = \frac{v_y}{\gamma\left(-\frac{\beta}{c} v_x + 1\right)}$$

Analogamente, per la componente lungo  $z'$  si ha:

$$v_{z'} = \frac{dz'}{dt'} = \frac{dz}{\gamma \left( -\frac{\beta}{c} dx + dt \right)} = \frac{v_z}{\gamma \left( -\frac{\beta}{c} v_x + 1 \right)}$$

Si considera il caso in cui la velocità  $v_x = c$ , ovvero il sistema  $K'$  viaggia alla velocità della luce. Nel sistema  $K'$ , la velocità  $v_{x'}$ , diventa:

$$v_{x'} = \left. \frac{v_x - \beta c}{-\frac{\beta}{c} v_x + 1} \right|_{v_x=c} = \frac{c - \beta c}{-\frac{\beta}{c} c + 1} = c \frac{1 - \beta}{1 - \beta} = c$$

La trasformazione di Lorentz verificano, quindi, i risultati sperimentali ottenuti da Michelson e Morley, ovvero l'invarianza della velocità della luce al variare del sistema di riferimento inerziale. Tuttavia, le leggi di trasformazione sono più complesse di quelle galileiane.

### 2.2.2 Fattore di Lorentz

Le velocità considerate nella maggior parte delle applicazioni pratiche sono molto minori della velocità della luce:

$$\frac{v_x}{c} \ll 1$$

In questo caso, il fattore di Lorentz tende all'unità:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \simeq 1, \quad \frac{v_x}{c} \ll 1$$

In questo limite, la relatività ristretta ricade nella meccanica classica. Date le velocità raggiunte generalmente dalle apparecchiature umane, è possibile considerare la propagazione della luce quasi istantanea, ignorando gli effetti relativistici.

La meccanica classica, in ultima analisi, è un caso particolare della meccanica relativistica di Einstein. Al crescere della velocità, il fattore di Lorentz, sempre positivo, tende a crescere. Nel caso limite in cui  $v = c$ , allora:

$$\gamma = \left. \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \right|_{v=c} \rightarrow \infty$$

La velocità della luce  $c$  è un limite irraggiungibile per la teoria della meccanica relativistica.

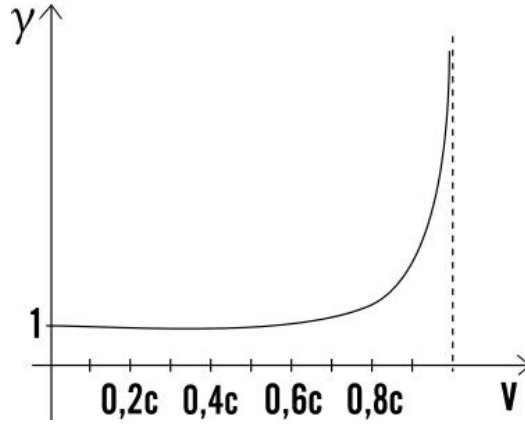


Figura 2.2: Andamento del fattore di Lorentz

### 2.2.3 Dilatazione dei tempi

Si considerano due sistemi di riferimento inerziali  $K$  e  $K'$ , in moto relativo tra loro con velocità  $v$  lungo la direzione delle  $x$  positive. Si suppone che  $K$  sia fermo.

Dalle trasformazioni di Lorentz:

$$\begin{cases} dx' = \gamma(dx - \beta c)dt \\ dy' = dy \\ dz' = dz \\ dt' = \gamma\left(-\frac{\beta}{c}dx + dt\right) \end{cases}$$

Si considerano solamente la prima e la quarta equazione. Tramite queste si ricavano le coordinate del sistema di riferimento fisso  $K$  in funzione di quelle relative a  $K'$

$$\begin{cases} dx' = \gamma(dx - \beta c)dt \\ dt' = \gamma\left(-\frac{\beta}{c}dx + dt\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{\gamma}dx' = dx - \beta c dt \\ \frac{1}{\gamma}dt' = -\frac{\beta}{c}dx + dt \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} dx = \frac{1}{\gamma}dx' + \beta c dt \\ dt = \frac{1}{\gamma}dt' + \frac{\beta}{c}dx \end{cases}$$

Si sostituisce la prima equazione nella seconda:

$$dt = \frac{1}{\gamma}dt' + \frac{\beta}{c}dx \Leftrightarrow dt = \frac{1}{\gamma}dt' + \frac{\beta}{c}\left(\frac{1}{\gamma}dx' + \beta c dt\right)$$

Risolvendo, si ha:

$$dt = \frac{1}{\gamma}dt' + \frac{\beta}{\gamma c}dx' + \beta^2 dt$$

Si portano i termini contenenti  $dt$  al primo membro:

$$(1 - \beta^2)dt = \frac{1}{\gamma}dt' + \frac{\beta}{\gamma c}dx'$$

Isolando  $dt$ , si ha:

$$dt = \frac{1}{\gamma(1-\beta^2)} \left( dt' + \frac{\beta}{c} dx' \right)$$

Per definizione, il fattore di Lorentz può essere scritto come:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Sostituendo questo risultato nell'espressione per  $dt$  si ottiene:

$$dt = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{(1-\beta^2)} \left( dt' + \frac{\beta}{c} dx' \right) = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \left( dt' + \frac{\beta}{c} dx' \right) = \gamma \left( dt' + \frac{\beta}{c} dx' \right)$$

Noto  $dt$ , è possibile ricavare  $dx$  dalla prima equazione:

$$dx = \frac{1}{\gamma} dx' + \beta c dt = \frac{1}{\gamma} dx' + \beta c \gamma \left( dt' + \frac{\beta}{c} dx' \right) = \frac{1}{\gamma} dx' + \beta c \gamma dt' + \beta^2 \gamma dx'$$

Si raccoglie  $\gamma$  al secondo membro:

$$dx = \gamma \left[ \left( \frac{1}{\gamma^2} + \beta^2 \right) dx' + \beta c dt' \right]$$

Dove, per definizione del fattore di Lorentz:

$$\frac{1}{\gamma^2} + \beta^2 = 1 - \beta^2 + \beta^2 = 1$$

Con questo risultato, si ottiene l'espressione per  $dx$ :

$$dx = \gamma (dx' + \beta c dt')$$

Le due equazioni, per  $dx$  e  $dt$ , sono, in definitiva:

$$\begin{cases} dx = \gamma (dx' + \beta c dt') \\ dt = \gamma \left( dt' + \frac{\beta}{c} dx' \right) \end{cases}$$

Si considera un punto solidale col sistema di riferimento  $K'$ , ovvero fermo rispetto a esso. Ne discende che  $dx' = 0$ , in quanto la variazione lungo l'asse  $x$  è nulla, essendo, appunto, il punto fermo. Nel sistema di riferimento  $K$ , la variazione temporale è data da:

$$dt = \gamma \left( dt' + \frac{\beta}{c} dx' \right) \Big|_{dx'=0} = \gamma dt'$$

Si definisce tempo proprio  $\tau$  il tempo che una particella vede scorrere nel sistema di riferimento in cui è in quiete. Con questa definizione, la relazione può essere scritta come:

$$dt = \gamma d\tau$$

Dato che il fattore di Lorentz è maggiore di 1 in caso di movimento, gli intervalli di tempo misurati in un sistema di riferimento  $K$ , in cui il punto è in moto, sono maggiori di quelli misurati nel sistema proprio del punto, in cui è fermo. Ne consegue che il tempo misurato in  $K$  (dove l'oggetto si muove) scorre più lentamente del tempo proprio, ovvero del tempo misurato in  $K'$  (dove l'oggetto è fermo).

Per apprezzare tale effetto, noto come dilatazione dei tempi, il fattore di Lorentz  $\gamma$  deve essere significativamente maggiore di 1. Tale condizione si verifica quando la velocità con cui si muove  $K'$  rispetto a  $K$  deve essere prossima alla velocità della luce.

Nel caso limite in cui  $K'$  si muove alla velocità della luce, il fattore di Lorentz tende all'infinito, di conseguenza, anche il tempo tende a esplodere:

$$dt = \gamma d\tau|_{v=c} \rightarrow \infty$$

Nel limite classico, quindi con velocità molto minori della velocità della luce  $c$ , il fattore di Lorentz è circa unitario ( $\gamma \simeq 1, v \ll c$ ), dunque, la dilatazione dei tempi non è apprezzabile:

$$dt = \gamma d\tau|_{v \ll c} \simeq d\tau$$

A differenza degli intervalli di tempo misurati nei vari sistemi di riferimento, il tempo proprio  $\tau$  è univocamente determinato noto  $\gamma$ , ovvero la velocità relativa di  $K'$  rispetto al sistema di riferimento  $K$ , in cui si effettua la misura.

## 2.2.4 Contrazione delle lunghezze

Si considerano due sistemi di riferimento inerziali  $K$  e  $K'$ , in moto relativo tra loro con velocità  $v$  lungo la direzione delle  $x$  positive. Si suppone che  $K$  sia fermo. Si suppone di osservare due punti nel sistema  $K'$ , nello stesso istante; dunque, la variazione temporale  $dt'$  è nulla.

Nel sistema di riferimento in moto  $K'$  si misura una distanza  $dx'$ , mentre un osservatore nel sistema di riferimento fisso  $K$  misura una distanza  $dx$ , legata a  $dx'$ , dalle trasformazioni di Lorentz.

$$\begin{cases} dx = \gamma (dx' + \beta c dt') \\ dt = \gamma \left( dt' + \frac{\beta}{c} dx' \right) \end{cases}$$

Per misurare la lunghezza di un oggetto in movimento, l'osservatore nel sistema fisso  $K$  deve misurare le posizioni delle estremità simultaneamente nel suo sistema, cioè  $\delta t = 0$ . La seconda equazione si scrive come:

$$dt = \gamma \left( dt' + \frac{\beta}{c} dx' \right) \Leftrightarrow \gamma \left( dt' + \frac{\beta}{c} dx' \right) = 0$$

Da cui si ricava:

$$dt' = -\frac{\beta}{c} dx'$$

Si sostituisce tale risultato nella prima equazione:

$$dx = \gamma (dx' + \beta c dt') = \gamma \left( dx' + \beta c \left( -\frac{\beta}{c} dx' \right) \right) =$$

Si svolgono il prodotto dei termini tra parentesi si ottiene:

$$= \gamma (dx' - \beta^2 dx') =$$

Raccogliendo  $dx'$ , si ricava:

$$= \gamma dx' (1 - \beta^2) =$$

Si è visto che  $1 - \beta^2 = \gamma^{-2}$ . Sostituendo tale risultato nell'equazione appena determinata, si ottiene:

$$= \gamma dx' \left( \frac{1}{\gamma^2} \right) =$$

Semplificando  $\gamma$  si ottiene la relazione che lega la lunghezza nel sistema  $K$ , ovvero  $dx$ , con quella nel sistema  $K'$ ,  $dx'$ :

$$dx = \frac{1}{\gamma} dx'$$

Siccome  $\gamma > 1, v > 0$ , la misura  $dx$ , nel sistema di riferimento  $K$ , in cui i due punti sono in moto, è minore di quella ottenuta nel sistema  $K'$ , in cui i due punti sono in quiete,  $dx'$ .

La distanza tra due punti è massima nel sistema in cui sono in quiete. Inoltre, a differenza della misura ottenuta negli altri sistemi di riferimento, quella valutata nel sistema di riferimento in cui i due punti sono fermi è univocamente determinata, noto  $\gamma$ , ovvero la velocità relativa tra i due sistemi.

Infine, noto  $\gamma$  e  $dx'$ , è possibile risalire al valore della misura  $dx$  in qualsiasi sistema di riferimento inerziale.

### 2.2.5 Energia e quantità di moto relativistiche

Si vuole ricavare le relazioni di energia e quantità di moto nella teoria relativistica. A tale scopo, si considera il principio di minima azione, in quanto più semplice da trattare. L'azione di una particella libera  $S$  deve essere invariante rispetto alle trasformazioni di Lorentz, in quanto è una quantità scalare e non una funzione vettoriale. L'azione è, infatti, l'integrale della lagrangiana nel tempo. Nel campo relativistico, l'azione deve essere l'integrale di una quantità quantizzante la traiettoria della particella.

Siccome l'azione deve essere invariante, non è possibile integrare la lagrangiana sul tempo  $t$  di un sistema di riferimento qualsiasi; il tempo stesso deve essere invariante.

Si sceglie di integrare rispetto al tempo proprio della particella, univocamente definito, noto il fattore di Lorentz  $\gamma$ . In prima approssimazione, è possibile definire l'azione relativistica, in analogia con la meccanica classica, come:

$$S = \int \alpha d\tau$$

Dove  $\alpha$  è una quantità da determinare.

Il tempo proprio  $d\tau$  è legato al tempo misurato in un qualsiasi sistema di riferimento inerziale, in moto rispetto a quello proprio della particella, dalla relazione:

$$dt = \gamma d\tau = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} d\tau$$

Ricavando  $d\tau$ , si ottiene:

$$d\tau = \frac{1}{\gamma} dt = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt$$

Con questo risultato, l'azione può essere scritta come:

$$S = \int \alpha d\tau = \int \alpha \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt$$

La meccanica relativistica deve inglobare la meccanica classica, nel caso limite in cui  $v \ll c$ . In questa condizione l'azione deve essere uguale a quella classica, ovvero, la quantità  $\alpha$  deve coincidere con la lagrangiana classica. Per  $v \ll c$ , risulta che:

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \simeq \left(1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}\right), \quad v \ll c$$

Con questo risultato l'azione, nel limite classico, può essere scritta come:

$$s = \int \alpha \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt \simeq \int \alpha \left(1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}\right) dt$$

Nell'approssimazione classica, l'azione è data da:

$$S = \int L_{class} dt$$

L'integrando coincide con la lagrangiana relativistica  $L_{appr}^r$ , nel limite delle meccanica classica, in cui le velocità in gioco sono molto minori della velocità della luce. Questa quantità deve coincidere con la lagrangiana classica ( $L_{class}$ ), a meno di una costante additiva, in quanto le equazioni di Eulero-Lagrange dipendono solamente dalla derivata della lagrangiana.

Per una particella libera in assenza di un campo di potenziale, la lagrangiana coincide con l'energia cinetica, per cui l'azione è data da:

$$S = \int L_{class} dt = \int \frac{1}{2} m_0 v^2 dt$$

Dove  $m_0$  è la massa inerziale. Confrontando l'azione ottenuta nel limite classico, per  $v \ll c$ , con quella scritta nella teoria classica, si uguagliano i termini in  $v^2$ : poiché la parte costante non influenza le equazioni di Eulero-Lagrange. Si ottiene:

$$-\frac{1}{2} \alpha \frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{2} m_0 v^2$$

Da cui si ricava  $\alpha$  come:

$$\alpha = -m_0 c^2$$

Con questo risultato si ha la certezza che, nel limite  $v \ll c$ , la lagrangiana relativistica e quella classica coincidano, a meno di una costante  $-m_0 c^2$ . Infatti, risulta che:

$$L_{appr}^r = \alpha \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \right) = -m_0 c^2 \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \right) = -m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 = -m_0 c^2 + L_{class}$$

La costante non influenza il risultato dell'equazione di Eulero-Lagrange, dunque, può essere trascurata senza problemi.

La lagrangiana deve rispettare il principio di Fermat del minor tempo, secondo il quale, tra tutti i possibili percorsi che uniscono due punti, un raggio di luce segue il cammino che richiede il minor tempo e che, di conseguenza, minimizza l'azione.

L'azione relativistica può essere espressa come:

$$s = \int \alpha \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt = \int -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt$$

La lagrangiana relativistica è, dunque:



$$L^r = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}}{c^2}}$$

Dall'equivalenza tra meccanica newtoniana e meccanica lagrangiana è possibile ricavare la definizione di momento lineare generalizzato alla meccanica relativistica:

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \left( -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}}{c^2}} \right) = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Da questa relazione è possibile osservare che la massa relativistica è legata alla massa inerziale dalla relazione:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma m_0$$

$m_0$  è detta massa a riposo e rappresenta la quantità di materia che possiede un corpo da fermo. La massa  $m$  di una particella dipende, invece, dalla velocità con cui si muove. Nel limite classico,  $v \ll c$ , il fattore di Lorentz è prossimo all'unità, per cui, la massa relativistica  $m$  coincide con la massa a riposo:

$$m \simeq m_0, \quad v \ll c$$

Se la velocità  $v$  tende a raggiungere la velocità della luce, il fattore di Lorentz tende a diventare infinito; di conseguenza, anche la massa relativistica tende a divergere:

$$m \rightarrow \infty, \quad v \rightarrow c$$

La divergenza della massa relativistica al crescere della velocità spiega perché non sia possibile superare la velocità della luce  $c$ . Infatti, l'energia fornita a una particella in parte ne aumenta la velocità e in parte ne accresce la massa relativistica. Di conseguenza, per superare la velocità della luce  $c$  è necessario fornire un'energia infinita, violando il principio di conservazione dell'energia.

La quantità di moto, a differenza del limite classico, è legata alla massa relativistica, che a sua volta dipende dalla velocità. Di conseguenza, la quantità di moto non dipende più in modo lineare dalla velocità:

$$\vec{p} = m \vec{v}$$

Essa presenta, invece, una relazione più complessa, poiché anche la massa dipende dalla velocità:

$$\vec{p} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

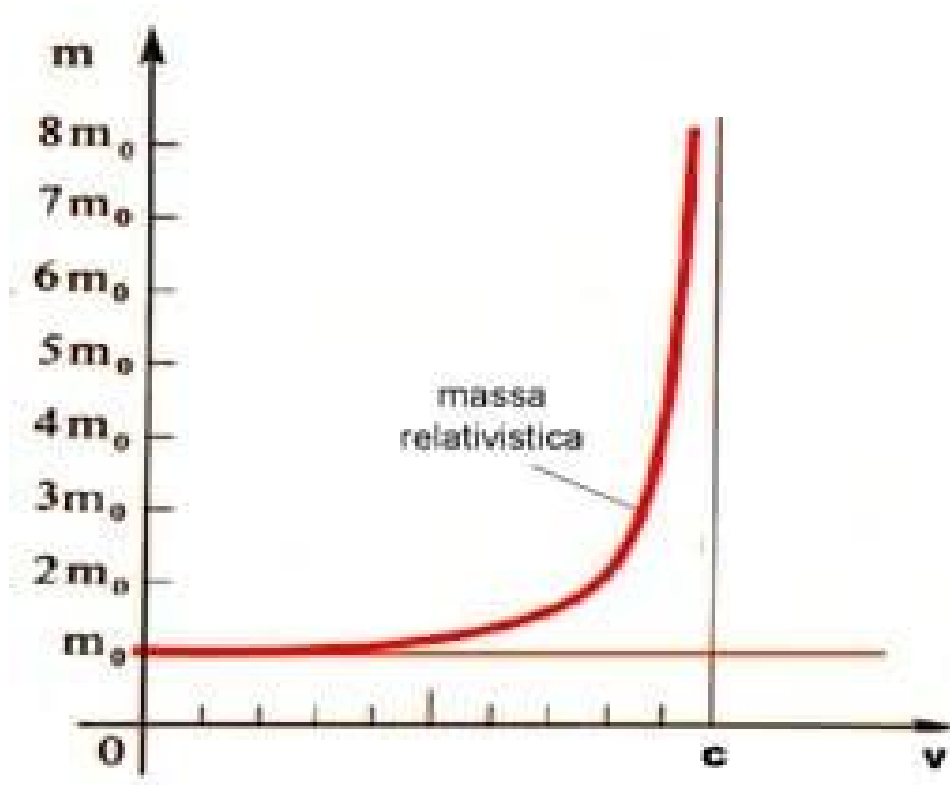


Figura 2.3: Andamento della massa relativistica in funzione della velocità

La massa  $m$ , nel piano  $p - v$ , rappresenta la pendenza della curva quantità di moto in funzione della velocità. Nella teoria relativistica, non si ha una retta. L'andamento della quantità di moto relativistica è lineare nel limite classico, dunque per  $v \ll c$ .

Per valutare l'energia relativistica si ricorre alla definizione di lagrangiana:

$$L^r = T - U$$

L'energia totale del sistema è data da:

$$E = T + U$$

Nota la lagrangiana è possibile ricavare l'energia totale del sistema. Sommando, infatti, le due equazioni, si ha:

$$L^r + E = T - U + T + U = 2T \Leftrightarrow E = 2T - L^r$$

È possibile scrivere che:

$$2T = \vec{p} \cdot \vec{v} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} \cdot \vec{v}$$

Con questo risultato l'energia totale può essere espressa come:

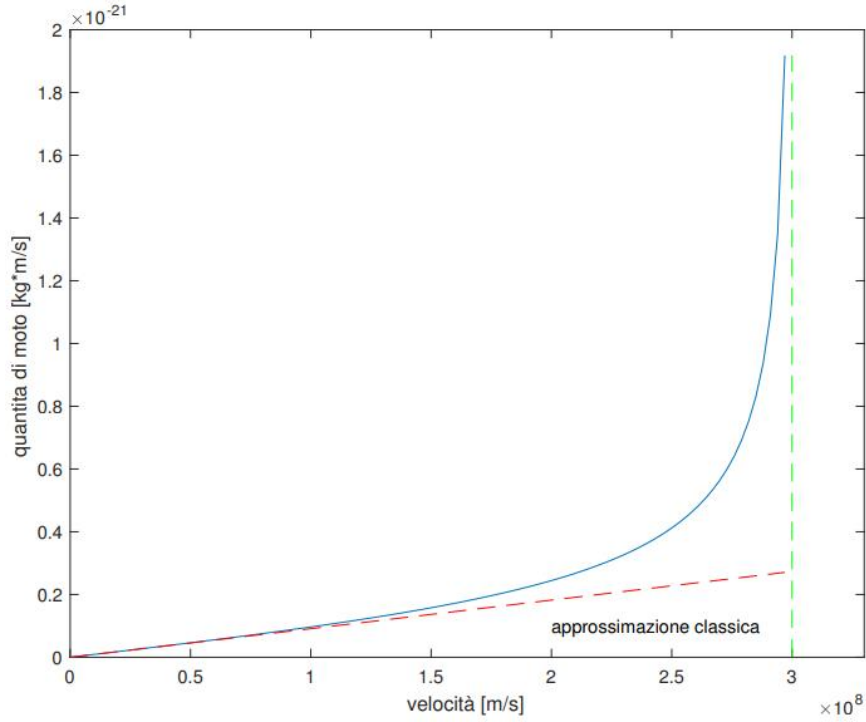


Figura 2.4: Andamento della quantità di moto relativistica

$$E = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} \cdot \vec{v} - L$$

Sostituendo le espressioni ricavate per la quantità di moto e lagrangiana nell'ambito della teoria relativistica, si ha:

$$E = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} \cdot \vec{v} - L = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot \vec{v} + m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{m_0 v^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Si esegue il minimo comune multiplo al secondo membro e, successivamente, si svolgono i prodotti:

$$E = \frac{m_0 v^2 + m_0 c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m_0 v^2 + m_0 c^2 - m_0 v^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

L'energia totale è, quindi, data da:

$$E = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} c^2$$

Questa relazione rappresenta una delle equazioni più note di Einstein e della relatività ristretta [landau1994meccanica, feynman1964vol1]. Il termine  $m_0 c^2$  rappresenta un termine energetico, legato allo stato di quiete della particella. Infatti, nel limite classico, è possibile approssimare in serie di Taylor il denominatore:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \simeq 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}$$

Sostituendo tale risultato nell'equazione per l'energia  $E$ , si ottiene:

$$E = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} c^2 \simeq m_0 c^2 \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \right)$$

Svolgendo i prodotti, si ricava l'espressione per l'energia totale nel limite classico:

$$E \simeq m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2, \quad v \ll c$$

L'energia totale della particella è data dalla somma dell'energia a riposo ( $m_0 c^2$ ) e del termine di energia cinetica caratteristico della meccanica classica per una particella libera.

Se, invece, la velocità  $v$  approssima quella della luce, l'energia tende a divergere:

$$E \rightarrow \infty, \quad v \rightarrow c$$

Questo risultato ribadisce il concetto che, per portare una particella con massa a riposo  $m_0$  da ferma alla velocità della luce  $c$ , bisogna fornire un'energia infinita.

Anche in meccanica relativistica valgono i teoremi di conservazione, tuttavia, i principi di conservazione della massa e dell'energia sono sostituiti dal principio di conservazione della massa-energia.

## 2.3 Quadri-vettori

Lo spazio-tempo o cronotopo è lo spazio quadridimensionale introdotto da Einstein nella relatività ristretta, composto da tre coordinate spaziali e una temporale. Ogni fenomeno fisico è descritto da eventi nello spazio-tempo del tipo  $(ct, x, y, z)$ , detti quadri-vettori. È necessario introdurre come prima componente  $ct$  in modo da avere delle quantità dimensionalmente omogenee nel quadri-vettore; inoltre, il quadri-vettore è denotato con l'apice  $\alpha$ :

$$s^\alpha = (ct, x, y, z)$$

Si definisce distanza  $s$  il quadri-vettore  $s^\alpha$  e l'origine come:

$$s^2 = c^2 t^2 - (x^2 + y^2 + z^2)$$

Il termine  $x^2 + y^2 + z^2$  coincide con la distanza euclidea. Inoltre, la grandezza  $s^2$  è detta intervallo ed è invariante rispetto alle trasformazioni di Lorentz [landau1994meccanica]. Dalla distanza  $s$  si deduce che

lo spazio-tempo non rispetta la metrica euclidea. La definizione di  $s$  è scelta in modo da ottenere equazioni simili alla meccanica classica.

Si definisce velocità la derivata del quadrivettore spostamento  $s^\alpha$  rispetto al tempo proprio  $\tau$  della particella:

$$u^\alpha = \frac{ds^\alpha}{d\tau} = \left( c \frac{dt}{d\tau}, \frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}, \frac{dz}{d\tau} \right)$$

La variazione del tempo proprio di una particella è legata alla variazione del tempo  $dt$ , osservata in un qualsiasi sistema di riferimento inerziale, dalla relazione:

$$d\tau = \frac{1}{\gamma} dt \Leftrightarrow d\tau = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt$$

La velocità può essere espressa come:

$$u^\alpha = \frac{ds^\alpha}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{ds^\alpha}{dt} = \gamma \frac{ds^\alpha}{dt}$$

Svolgendo l'operazione di derivata, il quadrivettore velocità si esprime come:

$$u^\alpha = \gamma \left( c \frac{dt}{dt}, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) = \gamma (c, v_x, v_y, v_z)$$

In meccanica, il vettore velocità lungo i tre assi si esprime come:

$$\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$$

Il quadrivettore velocità può essere espresso come:

$$u^\alpha = \gamma (c, \vec{v})$$

È possibile esprimere il quadrivettore in termini di quantità di moto ed energia. Infatti, per definizione di quantità di moto, risulta:

$$\vec{p} = m_0 \vec{v} \Leftrightarrow \vec{v} = \frac{1}{m_0} \vec{p}$$

L'energia, invece, può essere espressa come:

$$E = m_0 c^2 \Leftrightarrow c = \frac{E}{m_0 c}$$

Il quadrivettore velocità, espresso in termini energetici, è dato da:

$$u^\alpha = \gamma \left( \frac{E}{m_0 c}, \frac{1}{m_0} \vec{p} \right)$$

È possibile definire anche l'operazione di moltiplicazione tra quadrivettori. A tale scopo si adopera la notazione di Einstein secondo la quale ogni indice che compare all'interno di un fattore più di una volta viene sommato al variare di tutti i possibili valori che l'indice può assumere. Ad esempio, il prodotto vettoriale tra vettori  $n$ -dimensionali, mediante la notazione di Einstein, è:

$$\vec{x} \times \vec{y} = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n \left( \sum_{k=0}^n (\varepsilon_{ijk} x_j y_k \vec{e}_i) \right) \right) = \varepsilon_{ijk} x^j y^k \vec{e}^i$$

Dove  $\varepsilon_{ijk}$  è il simbolo di Levi-Civita e  $\vec{e}_i$  è la  $i$ -esimo vettore della base canonica di  $\mathbb{R}^3$ .

Si applica tale notazione al fine di valutare il modulo del quadrivettore velocità:

$$u_\alpha u^\alpha = \gamma^2 (c^2 - v^2) = c^2 \gamma^2 \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right)$$

Dopo aver raccolto  $c^2$ , per definizione di  $\gamma$ , è possibile scrivere:

$$u_\alpha u^\alpha = c^2 \gamma^2 \gamma^{-2} = c^2$$

Il modulo quadro del quadrivettore velocità è la velocità della luce al quadrato,  $c^2$ , dunque, è invariante rispetto alle trasformazioni di Lorentz.

La quantità di moto nello spazio-tempo è data da:

$$p^\alpha = m_0 u^\alpha = m_0 \gamma (c, \vec{v}) = (m_0 \gamma c, m_0 \gamma \vec{v})$$

Il termine  $m_0 \gamma$  rappresenta la massa relativistica  $m$ , dunque, la relazione  $p^\alpha$  può essere scritta come:

$$p^\alpha = (mc, m\vec{v})$$

Si è visto che  $E = mc^2 \Leftrightarrow mc = E/c$  e  $\vec{p} = m\vec{v}$ . Da queste relazioni si evince che il quadrivettore quantità di moto è:

$$p^\alpha = \left( \frac{E}{c}, \vec{p} \right)$$

Si valuta il modulo del quadrivettore quantità di moto:

$$p^\alpha p_\alpha = \frac{E^2}{c^2} - p^2$$

Dove  $E = \gamma m_0 c^2$  e  $p = \gamma m_0 v$ , per cui:

$$p_\alpha p^\alpha = \frac{E^2}{c^2} - p^2 = \frac{\gamma^2 m_0^2 c^4}{c^2} - \gamma^2 m_0^2 v^2 = \gamma^2 m_0^2 c^2 - \gamma^2 m_0^2 v^2$$

Raccogliendo  $\gamma^2 m_0^2 c^2$  si ha:

$$p^\alpha p_\alpha = \gamma^2 m_0^2 c^2 \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right)$$

Per definizione del fattore di Lorentz si ha:

$$p_\alpha p^\alpha = m_0^2 c^2$$

Siccome  $E = m_0 c^2$ , la quantità di moto può essere espressa anche in termini energetici:

$$p_\alpha p^\alpha = m_0 E$$

Infine, il vettore quantità di moto  $\vec{p}$  può essere espresso in termini energetici, infatti:

$$E = m_0 c^2 \Leftrightarrow m_0 = \frac{E}{c^2}$$

Per cui:

$$\vec{p} = m_0 \vec{v} \Leftrightarrow \vec{p} = \frac{E}{c^2} \vec{v}$$

Tale equazione è molto utile nel campo della medicina radiologica in cui le particelle raggiungono quasi la velocità della luce. In questo caso, la quantità di moto è data da:

$$p = \frac{E}{c^2} c = \frac{E}{c}$$

Questa relazione descrive la quantità di moto dei fotoni.

### 2.3.1 Legge di trasformazione dei quadri vettori

Per comodità è possibile scrivere le trasformazioni di Lorentz in forma matriciale; così è più semplice determinare il modo in cui un quadri vettore in un sistema di riferimento  $K$  si trasforma in un quadri vettore nel sistema di riferimento  $K'$ .

Si parte dalle trasformazioni di Lorentz:

$$\begin{cases} t' = \gamma \left( -\frac{\beta}{c} x + t \right) \\ x' = \gamma (x - \beta c t) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

Si moltiplicano entrambi i membri della prima equazione, in modo da ottenere le quantità  $ct$  e  $ct'$  presenti nei quadrivettori dello spostamento:

$$\begin{cases} ct' = \gamma ct - \beta\gamma x \\ x' = -\gamma\beta ct + \gamma x \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

Si pone  $s'^{\alpha}$  il quadrivettore spostamento nel sistema di riferimento  $K'$  e  $s^{\alpha}$  il quadrivettore spostamento nel sistema di riferimento  $K$ :

$$s'^{\alpha} = \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, \quad s^{\alpha} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

La matrice di trasformazione di Lorentz è data da:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le trasformazioni di Lorentz in forma matriciale si scrivono come:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

In forma compatta, si ha:

$$s'^{\alpha} = \Lambda s^{\alpha}$$

Derivando rispetto al tempo si ottengono le trasformazioni della velocità per passare dal sistema  $K$  a  $K'$ :

$$\frac{ds'^{\alpha}}{dt} = \Lambda \frac{ds^{\alpha}}{dt}$$

La matrice di trasformazione di Lorentz è costante rispetto al tempo poiché la velocità relativa tra i due sistemi di riferimento è fissata, dunque, i termini  $\beta$  e  $\gamma$  sono costanti.

Si è visto che:



$$\gamma \frac{ds^\alpha}{dt} = u^\alpha \Leftrightarrow \frac{ds^\alpha}{dt} = \frac{1}{\gamma} u^\alpha = \gamma \left( \frac{E}{m_0 c}, \frac{1}{m_0} \vec{p} \right)$$

Per cui è possibile scrivere le equazioni di composizione della velocità in forma matriciale:

$$\begin{pmatrix} \frac{E'}{m_0 c} \\ \frac{p_{x'}}{m_0} \\ \frac{p_{y'}}{m_0} \\ \frac{p_{z'}}{m_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{E}{m_0 c} \\ \frac{p_x}{m_0} \\ \frac{p_y}{m_0} \\ \frac{p_z}{m_0} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{E'}{m_0 c} \\ v_{x'} \\ v_{y'} \\ v_{z'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{E}{m_0 c} \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

Moltiplicando entrambi i membri per  $m_0$  si ottiene la trasformazione della quantità di moto:

$$\begin{pmatrix} \frac{E'}{c} \\ p_{x'} \\ p_{y'} \\ p_{z'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

Le componenti dei quadrivettori spostamento, velocità e quantità di moto variano in base al sistema di riferimento, tuttavia, il loro quadrato è costante, dunque, è invariante rispetto alle trasformazioni di Lorentz.

## 2.4 Urto anelastico

Un urto anelastico è un particolare tipo di urto in cui si conserva solamente la quantità di moto del sistema, mentre l'energia cinetica non si conserva ma si trasforma in massa a riposo. Fondamentalmente le due particelle dopo l'urto si fondono in un'unica particella, come, ad esempio, due nuclei di idrogeno collidono, producendo un nucleo di elio.

Si pone l'origine del sistema di riferimento  $S$  nel centro di massa delle due particelle. Se le due particelle di masse identiche  $m$  hanno velocità uguali ed opposte, risulta che la somma delle quantità di moto deve essere nulla:

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \gamma m_0 \vec{v}_1 + \gamma m_0 \vec{v}_2 = \vec{0}$$

Poiché:

$$m_1 = m_2 = m_0, \quad \vec{v}_1 = -\vec{v}_2$$

L'energia di una particella secondo la meccanica relativistica è data da:

$$E = \gamma m_0 c^2$$

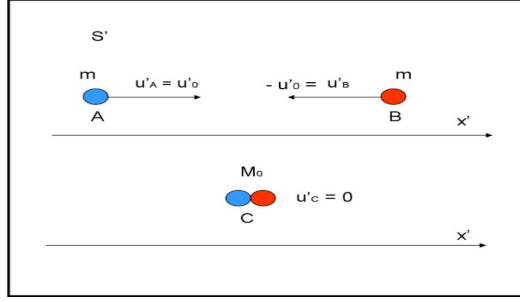


Figura 2.5: *Urto anelastico tra due particelle*

Siccome le velocità, in modulo, e le masse delle due particelle sono uguali, anche le energie coincidono, ovvero:

$$E_1 = E_2 = E$$

Dopo l'urto la particella risultante è in quiete nel centro di massa, per cui il fattore di Lorentz è unitario. L'energia della particella risultante, di massa a riposo  $M_0$ , è, dunque:

$$E = M_0 c^2, \quad \gamma = 1$$

Per la conservazione dell'energia, la somma delle energie delle particelle prima dell'urto deve essere uguale all'energia della particella dopo l'urto,  $E_R$ :

$$E_R = E_1 + E_2 = 2E$$

Esplicitando le equazioni, si ha:

$$2\gamma m_0 c^2 = M_0 c^2$$

Semplificando  $c^2$ , si ha:

$$M_0 = 2\gamma m_0 = 2 \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Poiché le due particelle, prima dell'urto, erano in moto, il fattore di Lorentz è maggiore dell'unità, di conseguenza, la massa  $M_0$  della particella risultante a valle dell'urto è maggiore della somma delle due masse a riposo iniziali. Questo fenomeno può essere spiegato ammettendo che l'energia cinetica posseduta dalle particelle prima dell'urto sia convertita in massa a riposo.

## 2.5 Conservazione dell'energia

Il principio di conservazione dell'energia può essere verificato a partire dal principio di conservazione del momento lineare e applicando le leggi di trasformazioni di Lorentz al quadrivettore energia-momento. Si considera un sistema di riferimento  $S'$  con origine non coincidente con il centro di massa del sistema. Supponendo che il moto avvenga solamente lungo una direzione, è possibile scrivere:

$$p_{x'_1} + p_{x'_2} = p_{x'_3}$$

Dove 1, 2 e 3 distinguono le tre particelle prima e dopo l'urto. Si applica la trasformazione di Lorentz per la quantità di moto:

$$\begin{pmatrix} \frac{E'}{c} \\ p_{x'} \\ p_{y'} \\ p_{z'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

Da cui si ricavano le equazioni:

$$\begin{cases} \frac{E'}{c} = \gamma \frac{E}{c} - \beta\gamma p_x \\ p_{x'} = -\beta\gamma \frac{E}{c} + p_x \end{cases}$$

Utilizzando la seconda equazione è possibile riscrivere il bilancio della quantità di modo:

$$p_{x'_1} + p_{x'_2} = p_{x'_3} \Leftrightarrow -\beta\gamma \frac{E_1}{c} + \gamma p_{x_1} - \beta\gamma \frac{E_2}{c} + \gamma p_{x_2} = -\beta\gamma \frac{E_3}{c} + \gamma p_{x_3}$$

Se la particella risultante è in quiete nel sistema  $S$ , la sua quantità di moto  $p_{x_3}$  è nulla. Raccogliendo la primo membro si ha:

$$-\beta\gamma \frac{E_1}{c} - \beta\gamma \frac{E_2}{c} + \gamma (p_{x_1} + p_{x_2}) = -\beta\gamma \frac{E_3}{c}$$

Per il principio di identità di polinomi deve risultare che:

$$\begin{cases} p_{x_1} + p_{x_2} = 0 \\ -\beta\gamma \frac{E_1}{c} - \beta\gamma \frac{E_2}{c} = -\beta\gamma \frac{E_3}{c} \end{cases}$$

Semplificando i termini comuni nella seconda equazione, si ha:

$$E_1 + E_2 = E_3$$

Da cui discende la conservazione dell'energia.

## 2.6 Esempio carica in moto in campo elettrico

Si considera una particella carica in un campo elettrico  $\vec{E}_{ext}$  uniforme in una regione dello spazio e costante nel tempo. La carica è soggetta alla forza di Lorentz:

$$\vec{F} = q\vec{E}_{ext}$$

Per la meccanica newtoniana, risulta:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \dot{\vec{p}}$$

Per cui la legge di Lorentz si scrive anche:

$$\dot{\vec{p}} = q\vec{E}_{ext}$$

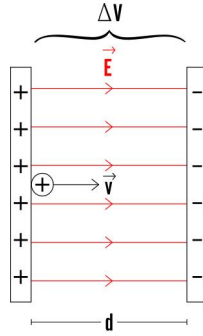


Figura 2.6: Particella immersa in un campo elettrico costante e uniforme

Si suppone che il moto avvenga solamente lungo l'asse  $x$ :

$$\dot{p}_x = qE_{ext,x}$$

Si integra tale equazione rispetto al tempo. In ipotesi di velocità iniziale nulla, si ha:

$$p_x = \int_0^t qE_{ext,x} dt' = qE_{ext,x}t$$

Nella teoria classica, la velocità della particella cresce linearmente nel tempo. Infatti, dividendo l'equazione per la quantità di moto appena ottenuta per la massa, risulta:

$$v_x = \frac{q}{m}E_{ext,x}t$$

Secondo la meccanica relativistica, la velocità non può aumentare indefinitamente, in quando la velocità della luce è un limite invalicabile. A tale scopo, si studia lo stesso fenomeno mediante un approccio relativistico. Il modulo quadro del quadrivettore quantità di moto è dato da:

$$p_\alpha p^\alpha = \frac{E^2}{c^2} - p_x^2$$

Dove  $p_\alpha p^\alpha = m_0^2 c^2$ , per cui si ha:

$$m_0^2 c^2 = \frac{E^2}{c^2} - p_x^2$$

Da questa equazione, si ricava l'energia della particella  $E$ :

$$E = c\sqrt{m_0^2 c^2 + p_x^2}$$

La quantità di moto è data da  $p_x = qE_{ext,x}t$ , per cui si ottiene:

$$E = c\sqrt{m_0^2 c^2 + q^2 E_{ext,x}^2 t^2}$$

La velocità della particella è legata all'energia dalla relazione:

$$\vec{p} = \frac{E}{c^2} \vec{v}$$

Proiettando questa equazione sull'asse del moto, si ha:

$$p_x = \frac{E}{c^2} v_x \Leftrightarrow v_x = \frac{c^2}{E} p_x$$

Sostituendo le relazioni per  $p_x$  e l'energia, si ricava

$$v_x = \frac{c^2}{E} p_x = \frac{c^2 q E_{ext,x} t}{c\sqrt{m_0^2 c^2 + q^2 E_{ext,x}^2 t^2}} = \frac{cq E_{ext,x} t}{\sqrt{m_0^2 c^2 + q^2 E_{ext,x}^2 t^2}}$$

Per  $t \rightarrow \infty$  la velocità tende a quella della luce:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v_x = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{cq E_{ext,x} t}{\sqrt{m_0^2 c^2 + q^2 E_{ext,x}^2 t^2}} \rightarrow \frac{cq E_{ext,x} t}{q E_{ext,x} t} = c$$

Tale equazione è coerente con il principio di limite teorico invalicabile per la velocità della luce. Infatti, affinché una particella di massa a riposo  $m_0$  raggiunga la velocità della luce deve essere accelerata per un tempo indefinito.

Per piccoli intervalli temporali, è valida l'approssimazione classica in cui la velocità è proporzionale al tempo  $t$  mediante una costante di proporzionalità:

$$v_x \simeq \frac{q}{m} E_{ext,x} t, \quad t \ll \frac{m_0 c}{q E_{ext,x}}$$

Nel limite classico, il concetto di massa inerziale coincide con quello di massa a riposo relativistico.

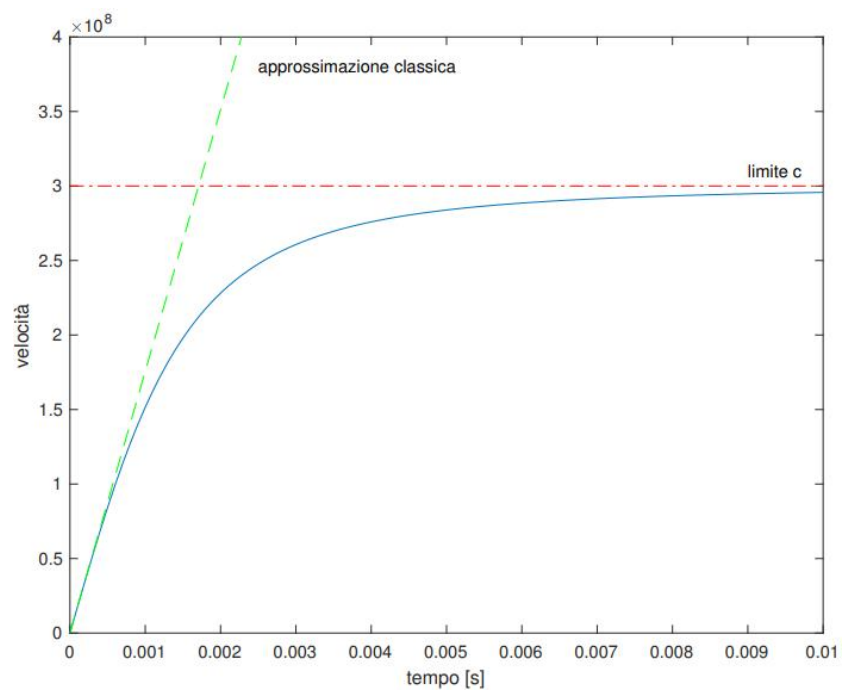


Figura 2.7: Andamento della velocità in funzione del tempo per particella accelerata



# Capitolo 3

## Elettromagnetismo

### Sommario

<b>3.1</b>	<b>Cenni di elettromagnetismo . . . . .</b>	<b>73</b>
<b>3.2</b>	<b>Equazioni di Maxwell nel vuoto in forma locale . . . . .</b>	<b>73</b>
3.2.1	Equazione di continuità della carica . . . . .	74
3.2.2	Risoluzione delle equazioni di Maxwell omogenee . . . . .	75
3.2.3	Risoluzione delle equazioni di Maxwell in presenza di sorgenti . . . . .	76
3.2.4	Equazioni di Maxwell nel vuoto in forma globale . . . . .	78
<b>3.3</b>	<b>Equazioni di Maxwell nel mezzo . . . . .</b>	<b>78</b>
<b>3.4</b>	<b>Forza di Lorentz . . . . .</b>	<b>81</b>
<b>3.5</b>	<b>Parallelismo tra campo elettrico e magnetico . . . . .</b>	<b>81</b>
<b>3.6</b>	<b>Forza e coppia su una piccola spira . . . . .</b>	<b>83</b>
3.6.1	Momento magnetico di un anello rotante . . . . .	86
3.6.2	Momento magnetico per un guscio sferico . . . . .	87
3.6.3	Momento magnetico per una sfera . . . . .	89
<b>3.7</b>	<b>Forza su piccola spira in un campo disomogeneo . . . . .</b>	<b>93</b>
3.7.1	Esperimento di Stern-Gerlach . . . . .	94
3.7.2	Concetto di spin . . . . .	97
<b>3.8</b>	<b>Campo magnetico prodotto da un momento magnetico . . . . .</b>	<b>98</b>
<b>3.9</b>	<b>Moto del momento magnetico in campo magnetico . . . . .</b>	<b>100</b>
<b>3.10</b>	<b>Diamagnetismo . . . . .</b>	<b>102</b>
<b>3.11</b>	<b>Paramagnetismo . . . . .</b>	<b>106</b>



### 3.1 Cenni di elettromagnetismo

Le **equazioni di Maxwell**, formalizzate verso la metà dell'Ottocento dal fisico James Clerk Maxwell, non solo sintetizzarono le leggi dell'elettricità e del magnetismo note all'epoca (come le leggi di Faraday e Ampère), ma predissero l'esistenza delle onde elettromagnetiche e dimostrarono che la luce stessa è un'onda elettromagnetica [landau1975campi, purcell1985elettromagnetismo, feynman1964vol2, halliday2004fisica2]. Queste equazioni sono ancora valide in molte applicazioni pratiche moderne, con poche modifiche rispetto alla formulazione originale.

Il concetto di **spazio-tempo** (nella teoria **Relatività Ristretta**) fu introdotto da Albert Einstein nel 1905 proprio per risolvere il conflitto tra la meccanica newtoniana (che era invariante solo rispetto alle trasformazioni Galileiane) e le equazioni di Maxwell (che sono invece invarianti rispetto alle trasformazioni di Lorentz).

Il campo elettromagnetico è descritto in modo formale dai due campi vettoriali: il **campo elettrico** ( $\vec{E}$ ) e il **campo di induzione magnetica** ( $\vec{B}$ ). Questi due campi non sono entità separate e indipendenti, ma sono le manifestazioni di un unico tensore elettromagnetico.

Il campo magnetico ( $\vec{B}$ ) è essenzialmente una manifestazione relativistica del campo elettrico ( $\vec{E}$ ). Ossia, il campo magnetico osservato in un sistema di riferimento  $K$  è in parte il risultato della trasformazione del campo elettrico e delle cariche in moto osservate in un altro sistema  $K'$

Quando una carica  $q$  si muove in una regione di spazio, essa è soggetta alla Forza di Lorentz ( $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ ) [landau1975campi, purcell1985elettromagnetismo, feynman1964vol2, halliday2004fisica2]. Se si considera un sistema di riferimento  $K'$  solidale con la carica ( $\vec{v}' = 0$ ), su di essa agisce solo la forza elettrica ( $\vec{F}' = q\vec{E}'$ ). Pertanto, in tale sistema, qualsiasi forza percepita dalla carica deve essere attribuita al solo campo elettrico trasformato  $\vec{E}'$ , mentre il termine magnetico è nullo.

### 3.2 Equazioni di Maxwell nel vuoto in forma locale

Sebbene sia possibile descrivere l'interazione elettromagnetica mediante l'uso del solo campo elettrico, per semplicità si ammette l'esistenza anche del campo magnetico. In quest'ottica, il campo elettrico e il campo di induzione magnetica sono due manifestazioni dello stesso campo: il campo elettromagnetico, descritto, in assenza di mezzo materiale (nel vuoto), dalle equazioni differenziali in forma locale:

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} & \text{(Legge di Gauss per l'Elettricità)} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 & \text{(Legge di Gauss per il Magnetismo)} \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \text{(Legge di Faraday-Neumann-Lenz)} \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left( \vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) & \text{(Teorema di Ampère-Maxwell)} \end{cases}$$

La prima equazione è la legge di Gauss per il campo elettrico e afferma che la divergenza del campo elettrico è proporzionale alla densità di carica  $\rho$  presente nel volume di riferimento, rapportata alla costante dielettrica nel vuoto  $\varepsilon_0$ .

La seconda equazione è la legge di Gauss per il magnetismo, secondo cui la divergenza del campo di induzione magnetica  $\vec{B}$  è nulla. Questa legge implica che le linee di campo magnetico non hanno sorgenti o pozzi (non esistono monopoli magnetici) e che il campo  $\vec{B}$  è solenoidale. Dal punto di vista fisico, questa legge implica che le linee di campo magnetico entrano ed escono dal volumetto  $d\Omega$  su cui si calcola la divergenza, che, di conseguenza, è nulla Figura 3.1.

La terza equazione è la legge di Faraday-Neumann-Lenz e stabilisce che un campo di induzione magnetica variabile nel tempo ( $\partial\vec{B}/\partial t$ ) induce un campo elettrico rotazionale ( $\vec{\nabla} \times \vec{E}$ ). In altre parole, la variazione del flusso del campo magnetico attraverso un circuito elettrico genera una forza elettromotrice indotta e, di conseguenza, una corrente elettrica indotta

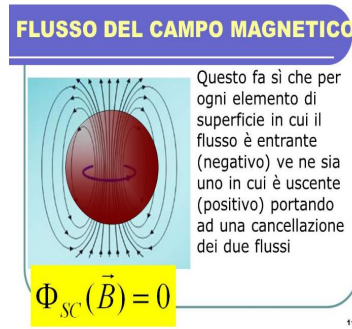


Figura 3.1: Flusso campo magnetico attraverso superficie chiusa

La quarta equazione è il teorema di Ampère-Maxwell, secondo cui il rotore del campo  $\vec{B}$  è determinato dalla densità di corrente di conduzione ( $\vec{J}$ ) più la corrente di spostamento ( $\varepsilon_0\partial\vec{E}/\partial t$ ). La corrente di spostamento fu introdotta da Maxwell per garantire la conservazione della carica. Secondo questo teorema, dal punto di vista globale, un campo magnetico indotto intorno a un circuito chiuso qualsiasi è proporzionale alla corrente elettrica concatenata  $\mu_0\vec{J}$  al circuito più la corrente di spostamento ( $\mu_0\varepsilon_0\partial\vec{E}/\partial t$ ) attraverso la superficie chiusa.

### 3.2.1 Equazione di continuità della carica

Dalle equazioni di Maxwell è possibile ricavare la legge di continuità della carica. A tale scopo si applica la divergenza all'equazione di Ampere-Maxwell:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Il primo membro è la divergenza di un rotore che, per qualsiasi campo vettoriale derivabile due volte, è sempre nulla, ovvero  $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{B} = 0$ . Si ottiene:

$$\mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0$$

È possibile scambiare il simbolo di derivata temporale con quello di divergenza:

$$\mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) = 0$$

La divergenza del campo elettrico è data dalla prima equazione di Maxwell. Semplificando anche  $\mu_0$ , si ottiene:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho}{\varepsilon_0} \right) = 0$$

Dunque, si è ottenuta la legge di conservazione della carica:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Tale equazione afferma che, se la carica in un volume varia nel tempo, deve esistere una corrente in ingresso o in uscita dal volume che sostenga tale variazione di carica.

### 3.2.2 Risoluzione delle equazioni di Maxwell omogenee

Si considera il caso di assenza di sorgenti, ovvero, si vuole risolvere le equazioni di Maxwell lontano dalle sorgenti di campo  $\vec{J}$  e  $\rho$

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left( \vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \end{cases}$$

Si vuole risolvere il sistema di equazioni in modo da determinare il campo induzione magnetica  $\vec{B}$ . A tale scopo si applica il rotore all'equazione di Ampere-Maxwell:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Il rotore del rotore può essere scritto come:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot) - \nabla^2$$

Dove  $\nabla^2$  è l'operatore laplaciano che, scritto in coordinate cartesiane, è dato da:

$$\nabla^2 = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

L'equazione di Ampere-Maxwell si può scrivere, invertendo l'operatore derivata temporale col rotore, come:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Leftrightarrow \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \nabla^2 \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{E})$$

La divergenza del campo induzione magnetica è nulla, inoltre, sostituendo la terza equazione di Maxwell si ha:

$$-\nabla^2 \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \Leftrightarrow -\nabla^2 \vec{B} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

L'equazione:

$$\nabla^2 \vec{B} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0$$

È detta equazione delle onde o di d'Alembert. Si definisce operatore di d'Alembert come:

$$\square = \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

Dove  $c$  è la velocità di propagazione dell'onda. In questo caso,  $c$  coincide con la velocità della luce nel vuoto. Dalle equazioni di Maxwell discende che:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \simeq 3.00 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

### 3.2.3 Risoluzione delle equazioni di Maxwell in presenza di sorgenti

Si vuole risolvere le equazioni di Maxwell in prossimità delle sorgenti  $\vec{J}$  e  $\rho$ . In questo modo è possibile ricostruire l'intero campo elettromagnetico generato dalle sorgenti.

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left( \vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \end{cases}$$

Dall'equazione di Gauss per il magnetismo, risulta che il campo induzione magnetica è solenoidale, quindi, è possibile definire un potenziale vettore  $\vec{A}$  tale che:

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$$

Si sostituisce tale definizione nella terza equazione di Maxwell:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{A})$$

L'operatore  $\vec{\nabla}$  è indipendente dalla derivata temporale, dunque, è lecita la loro inversione:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Portando tutto al primo membro e applicando la linearità dell'operatore rotore, è possibile scrivere:

$$\vec{\nabla} \times \left( \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \vec{0}$$

Il campo  $\vec{E} + \partial \vec{A} / \partial t$  è irrotazionale, per cui, è possibile definire un potenziale scalare  $\phi$  tale che:

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \phi$$

Il potenziale scalare  $\phi$  è generalmente definito con un segno negativo. Nell'elettrostatica, il potenziale scalare coincide con la tensione  $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$ .

In presenza di un campo magnetostatico, la derivata temporale di  $\vec{B}$  è nulla, per cui il potenziale scalare coincide con il potenziale elettrico:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi$$

La forza elettrica ( $\vec{F}$ ) deve essere opposta al gradiente del potenziale scalare ( $\phi$ ) perché il potenziale  $\phi$  rappresenta l'energia potenziale elettrica per unità di carica (ossia, la tensione o voltaggio). In fisica, una forza conservativa (come la forza elettrica) tende sempre a muovere un oggetto nella direzione in cui l'energia potenziale diminuisce più rapidamente. Il gradiente ( $\vec{\nabla} \phi$ ) punta, per definizione, nella direzione in cui il potenziale aumenta più rapidamente. Per questo motivo, la relazione fondamentale tra campo elettrico ( $\vec{E}$ ) e potenziale elettrico ( $\phi$ ) deve includere un segno negativo

potenziali vettore  $\vec{A}$  e scalare  $\phi$  non sono univocamente determinati. Per tale motivo, si adotta una condizione di Gauge per disaccoppiare le equazioni differenziali. La Gauge di Lorentz, data da:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

è invariante quando si passa da un sistema di riferimento inerziale a un altro tramite le trasformazioni di Lorentz, il che è un requisito fondamentale della Relatività Ristretta. Per tale motivo si parla di condizione covariante in relatività.

Sotto la condizione di Gauge di Lorentz, le Equazioni di Maxwell si riducono a due equazioni d'onda disaccoppiate per  $\vec{A}$  e  $\phi$  con termini sorgente. La soluzione di queste equazioni porta ai potenziali ritardati.

Si dimostra che, per una sorgente puntiforme, il potenziale vettore, nel dominio della frequenza, è dato da:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{J}}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} e^{-jk|\vec{r} - \vec{r}_0|}$$

Dove  $\vec{r}_0$  è la posizione in cui sono posizionate le sorgenti, mentre  $\vec{r}$  è il punto nello spazio in cui si valuta il campo. La quantità:

$$g(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\vec{r}|} e^{-jk|\vec{r}|}$$

È la funzione di Green o risposta impulsiva del mezzo, lineare e isotropo, visto come un sistema ingresso-uscita. Si definisce il numero d'onda (o costante di propagazione nel vuoto) come:

$$k = \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} = \frac{\omega}{c}$$

### 3.2.4 Equazioni di Maxwell nel vuoto in forma globale

Le equazioni di Maxwell in forma locale non possono essere utilizzate in presenza di brusche variazioni della superficie dei volumi sui quali calcolare i campi. In questo caso si ricorre alla forma globale o integrale:

$$\left\{ \begin{array}{l} \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \\ \oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \\ \oint_{\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{\Sigma} \\ \oint_{\partial S} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma} \end{array} \right.$$

Dove  $S$  è una superficie all'interno della quale si vuole valutare il campo, mentre  $\Sigma$  è una superficie aperta avente per contorno  $\partial S$ .  $Q$  è la quantità di carica contenuta in  $S$  e  $I$  la corrente che attraversa  $\Sigma$ .

## 3.3 Equazioni di Maxwell nel mezzo

In presenza di un mezzo materiale si introducono i vettori di induzione elettrica  $\vec{D}$  e di campo magnetico  $\vec{H}$ . Il vettore  $\vec{B}$  è detto vettore di induzione magnetica, mentre  $\vec{E}$  rappresenta il campo elettrico.

I campi di induzione descrivono il comportamento del materiale a seguito dell'applicazione dei rispettivi campi. Con l'introduzione dei campi  $\vec{E}$ ,  $\vec{D}$ ,  $\vec{H}$  e  $\vec{B}$ , le equazioni di Maxwell in forma locale si scrivono come:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{lib} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}_{lib} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{array} \right.$$

Dove  $\rho_{lib}$  e  $\vec{J}_{lib}$  sono le sorgenti libere ovvero le cariche e correnti che possono muoversi liberamente all'interno o all'esterno di un materiale, non vincolate alla struttura atomica o molecolare del mezzo. Queste sorgenti possono essere controllate direttamente, ad esempio, applicando una tensione o facendo passare una corrente in un conduttore. In contrapposizione, ci sono le sorgenti vincolate (o di legame), che derivano dal comportamento microscopico delle molecole e atomi del materiale. I vettori di polarizzazione e di magnetizzazione dipendono da tali sorgenti.

Il vettore di induzione elettrica è definito come:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

dove  $\vec{P}$  è il vettore di polarizzazione; esso descrive come i dipoli elettrici contenuti nel materiale si orientano sotto l'effetto del campo elettrico.

L'induzione magnetica è invece definita come:

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$$

dove  $\vec{M}$  è il vettore di magnetizzazione e descrive come i dipoli magnetici nel materiale si orientano sotto l'azione del campo magnetico applicato  $\vec{H}$ .

Per i mezzi lineari e isotropi esistono due costanti, dette suscettibilità elettrica  $\chi_e$  e suscettibilità magnetica  $\chi_m$ , che rappresentano i coefficienti di proporzionalità, rispettivamente, tra i campi di polarizzazione e magnetizzazione e i relativi campi applicati:

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}, \quad \vec{M} = \chi_m \vec{H}$$

Sostituendo il vettore di polarizzazione nella definizione del vettore di induzione elettrica si ottiene:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 \vec{E} + \varepsilon_0 \chi_e \vec{E} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E}$$

Si definisce la costante dielettrica del mezzo, per un materiale lineare e isotropo, come:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 (1 + \chi_e)$$

Con questa definizione si ha:

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

Analogamente, per il campo di induzione magnetica:

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \chi_m \vec{H} = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H}$$

Si definisce la permeabilità magnetica del mezzo, per un materiale lineare e isotropo, come:

$$\mu = \mu_0 (1 + \chi_m)$$

Il campo di induzione magnetica si scrive quindi come:

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

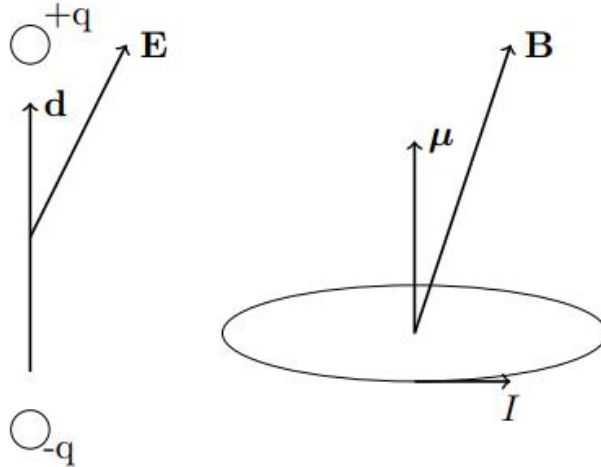


Figura 3.2: *Dipolo elettrico e magnetico.*

Infine, la densità di corrente totale si suddivide in una componente libera, associata alle cariche mobili, e in una componente vincolata, dovuta alla polarizzazione e alla magnetizzazione del materiale. Si scrive dunque:

$$\vec{J} = \vec{J}_{lib} + \vec{J}_{vinc}$$

La densità di corrente vincolata (o di legame) è data da:

$$\vec{J}_{vinc} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \vec{\nabla} \times \vec{M}$$

Per un mezzo lineare e isotropo, sostituendo le relazioni costitutive si ottiene:

$$\vec{J}_{vinc} = \varepsilon_0 \chi_e \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \left( \vec{\nabla} \times (\chi_m \vec{H}) \right)$$



Se il mezzo è omogeneo,  $\chi_m$  è una costante spaziale. In questa ipotesi, la densità di corrente vincolata si scrive come:

$$\vec{J}_{vinc} = \varepsilon_0 \chi_e \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \chi_m (\vec{\nabla} \times \vec{H})$$

La densità di corrente totale  $\vec{J}$  dipende dunque sia dal campo elettrico sia dal campo magnetico. Nella quarta equazione di Maxwell, tuttavia, la densità di corrente si riferisce solo alla parte libera:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}_{lib} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

In definitiva, i campi fondamentali che descrivono le forze elettromagnetiche sono  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$ , mentre  $\vec{D}$  e  $\vec{H}$  sono campi ausiliari introdotti per semplificare le equazioni di Maxwell in presenza di un mezzo materiale (come un dielettrico o un magnete), inglobando negli stessi gli effetti microscopici di polarizzazione ( $\vec{P}$ ) e magnetizzazione ( $\vec{M}$ ).

### 3.4 Forza di Lorentz

I campi elettrico  $\vec{E}$  e di induzione magnetica  $\vec{B}$  esercitano una forza su una particella di carica  $q$  che si muove con velocità  $\vec{v}$  in una regione di spazio contenente tali campi. L'espressione della forza totale è:

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$$

Questa interazione è nota come **forza di Lorentz**. Essa si compone di due contributi distinti:

- **Forza elettrica:**  $\vec{F}_E = q\vec{E}$ . Questa forza è parallela o antiparallela al campo elettrico, a seconda del segno della carica  $q$ , ed è indipendente dalla velocità  $\vec{v}$  della particella.
- **Forza magnetica:**  $\vec{F}_B = q(\vec{v} \times \vec{B})$ . Questa forza è sempre perpendicolare sia alla velocità  $\vec{v}$  sia al campo di induzione magnetica  $\vec{B}$ . Poiché la direzione della forza è perpendicolare allo spostamento della particella, la forza magnetica *non compie lavoro* sulla carica.

### 3.5 Parallelismo tra campo elettrico e magnetico

Le equazioni di Maxwell possono essere rese formalmente simmetriche introducendo le *cariche magnetiche* e le *correnti magnetiche*, concetti ipotetici non osservati sperimentalmente ma utili per evidenziare l'analogia tra fenomeni elettrici e magnetici.

Si indichi con  $U$  l'energia potenziale di un dipolo elettrico  $\vec{d}$  o magnetico  $\vec{\mu}$ , immerso rispettivamente in un campo elettrico o magnetico. Conoscendo  $U$ , è possibile determinare la forza  $\vec{F}$  e il momento torcente  $\vec{N}$  agente sul dipolo.

Per il campo elettrico:

$$\left\{ \begin{array}{l} U = -\vec{d} \cdot \vec{E} \\ \vec{F} = -\vec{\nabla} U = \vec{\nabla} (\vec{d} \cdot \vec{E}) \\ \vec{N} = \vec{d} \times \vec{E} \\ \phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{R} dV' \\ \vec{E} = -\vec{\nabla} \phi \\ \nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \end{array} \right.$$

Dove:

- $\vec{d}$  è il **momento di dipolo elettrico**, vettore diretto dalla carica negativa a quella positiva, proporzionale al modulo della carica e alla distanza di separazione;
- $\vec{E}$  è il **campo elettrico**, che rappresenta la forza per unità di carica esercitata nello spazio;
- $\phi$  è il **potenziale elettrico scalare**, da cui il campo deriva come gradiente negativo;
- $\rho$  è la **densità di carica elettrica**, sorgente del campo elettrico;
- $\epsilon_0$  è la **costante dielettrica del vuoto**, che stabilisce la relazione tra campo elettrico e densità di carica.

Per il campo magnetico risulta:

$$\left\{ \begin{array}{l} U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} \\ \vec{F} = -\vec{\nabla} U = \vec{\nabla} (\vec{\mu} \cdot \vec{B}) \\ \vec{N} = \vec{\mu} \times \vec{B} \\ \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{R} dV' \\ \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \\ \nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J} \end{array} \right.$$

Dove:

- $\vec{\mu}$  è il **momento di dipolo magnetico**, legato al moto circolare di cariche (correnti) e orientato secondo la regola della mano destra rispetto al verso della corrente;
- $\vec{B}$  è il **campo magnetico**, che descrive l'azione sui dipoli magnetici e sulle particelle cariche in movimento;
- $\vec{A}$  è il **potenziale vettore magnetico**, da cui si ricava il campo magnetico mediante il rotore;
- $\vec{J}$  è la **densità di corrente elettrica**, sorgente del campo magnetico;
- $\mu_0$  è la **permeabilità magnetica del vuoto**, che regola l'intensità del campo magnetico generato dalle correnti.

Queste relazioni mostrano il parallelismo formale tra le grandezze elettriche ( $\vec{d}, \vec{E}, \phi, \rho, \varepsilon_0$ ) e le corrispondenti magnetiche ( $\vec{\mu}, \vec{B}, \vec{A}, \vec{J}, \mu_0$ ).

Elettrico	Magnetico	Descrizione
$\vec{d}$	$\vec{\mu}$	Momento di dipolo (separazione di cariche o corrente circolare)
$\vec{E}$	$\vec{B}$	Campo vettoriale (forza per unità di carica o effetto su dipoli)
$\phi$	$\vec{A}$	Potenziale (scalare o vettoriale) da cui deriva il campo
$\rho$	$\vec{J}$	Sorgente del campo (cariche o correnti)
$\varepsilon_0$	$\mu_0$	Costanti fondamentali del vuoto

Tabella 3.1: *Confronto tra le grandezze elettriche e magnetiche e loro significato fisico.*

Questa analogia sottolinea la profonda simmetria formale tra elettricità e magnetismo, unificate nella teoria elettromagnetica di Maxwell.

### 3.6 Forza e coppia su una piccola spira

Si vuole determinare la forza totale agente su una piccola spira di superficie  $S$ , percorsa da una corrente  $I$ , immersa in un campo di induzione magnetica uniforme.

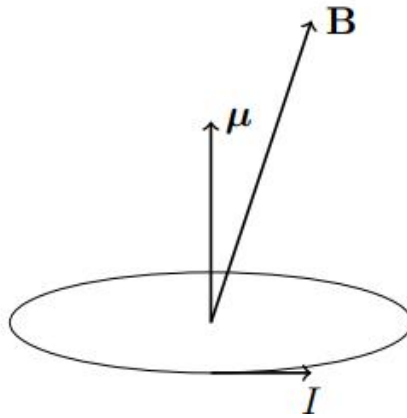


Figura 3.3: *Spira percorsa da corrente in un campo magnetico.*

Il momento magnetico dipolare è dato da:

$$\vec{\mu} = IS \hat{n}$$

dove  $\hat{n}$  è la normale alla superficie  $S$ , orientata in modo da vedere la corrente ruotare in senso antiorario.

Si consideri un tratto elementare  $d\vec{s}$  della spira; su di esso agisce la forza di Lorentz, poiché le cariche al suo interno sono messe in moto dalla corrente elettrica:

$$d\vec{F} = I d\vec{s} \times \vec{B}$$

Integrando su tutta la lunghezza della spira si ottiene:

$$\vec{F} = \oint_{\partial S} I d\vec{s} \times \vec{B}$$

Poiché la corrente e il campo  $\vec{B}$  sono costanti, possono essere portati fuori dal segno di integrale:

$$\vec{F} = I \left( \oint_{\partial S} d\vec{s} \right) \times \vec{B}$$

Siccome la spira è in equilibrio, la somma di tutti i contributi elementari è nulla; di conseguenza la forza risultante è nulla:

$$\vec{F} = \vec{0}$$

ovvero:

$$I \left( \oint_{\partial S} d\vec{s} \right) \times \vec{B} = \vec{0} \iff \left( \oint_{\partial S} d\vec{s} \right) \times \vec{B} = \vec{0}$$

Anche se la forza netta agente sulla spira è nulla, possono comunque esistere momenti torcenti. Poiché la forza agente sulla spira elementare è nulla, il momento delle forze risulta indipendente dal polo scelto. La coppia agente sull'elemento infinitesimo è data da:

$$d\vec{N} = \vec{r} \times d\vec{F}$$

La coppia, o momento torcente, può essere denotata anche con  $\vec{\tau}$ . Integrando lungo la spira si ottiene:

$$\vec{N} = \oint_{\partial S} \vec{r} \times d\vec{F}$$

Sostituendo la forza di Lorentz  $d\vec{F} = I d\vec{s} \times \vec{B}$ , si ha:

$$\vec{N} = I \oint_{\partial S} \vec{r} \times (d\vec{s} \times \vec{B})$$

Dati tre vettori, è valida l'identità:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}$$

Applicando tale relazione, l'espressione del momento si scrive come:

$$\vec{N} = I \oint_{\partial S} [(\vec{r} \cdot \vec{B}) d\vec{s} - \vec{B} (\vec{r} \cdot d\vec{s})]$$

Poiché il vettore  $\vec{r}$  appartiene alla spira, risulta  $d\vec{s} = d\vec{r}$ , e dunque:

$$\vec{N} = I \oint_{\partial S} [(\vec{r} \cdot \vec{B}) d\vec{r} - \vec{B} (\vec{r} \cdot d\vec{r})]$$

Il termine  $\vec{r} \cdot d\vec{r}$  può essere riscritto come:

$$\vec{r} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2} d(\vec{r} \cdot \vec{r})$$

per cui:

$$\vec{N} = I \oint_{\partial S} (\vec{r} \cdot \vec{B}) d\vec{r} - I \oint_{\partial S} \vec{B} (\vec{r} \cdot d\vec{r}) = I \oint_{\partial S} (\vec{r} \cdot \vec{B}) d\vec{r} - \frac{1}{2} I \vec{B} \oint_{\partial S} d(\vec{r} \cdot \vec{r})$$

L'ultimo termine è l'integrale esteso a una linea chiusa di una forma differenziale esatta, dunque, è nullo:

$$\oint_{\partial S} d(\vec{r} \cdot \vec{r}) = 0$$

Pertanto, la coppia risulta:

$$\vec{N} = I \oint_{\partial S} (\vec{r} \cdot \vec{B}) d\vec{r}$$

Per risolvere tale integrale si considera la quantità  $d((\vec{r} \cdot \vec{B}) \vec{r})$ ; si applicano le proprietà del differenziale:

$$d((\vec{r} \cdot \vec{B}) \vec{r}) = (d\vec{r} \cdot \vec{B}) \vec{r} + (\vec{r} \cdot \vec{B}) d\vec{r} + (\vec{r} \cdot d\vec{B}) \vec{r}$$

Dato che il campo è uniforme,  $d\vec{B} = 0$ . Per cui:

$$d((\vec{r} \cdot \vec{B}) \vec{r}) = (d\vec{r} \cdot \vec{B}) \vec{r} + (\vec{r} \cdot \vec{B}) d\vec{r}$$

Si ricava la quantità  $(\vec{r} \cdot \vec{B}) d\vec{r}$ , presente nell'espressione della coppia:

$$(\vec{r} \cdot \vec{B}) d\vec{r} = d((\vec{r} \cdot \vec{B}) \vec{r}) - (d\vec{r} \cdot \vec{B}) \vec{r}$$

Per applicare nuovamente la proprietà sul prodotto vettore di tre vettori, si aggiunge e sottrae  $(\vec{r} \cdot \vec{B}) d\vec{r}$  al secondo membro:

$$(\vec{r} \cdot \vec{B}) d\vec{r} = d((\vec{r} \cdot \vec{B}) \vec{r}) - (d\vec{r} \cdot \vec{B}) \vec{r} - (\vec{r} \cdot \vec{B}) d\vec{r} + (\vec{r} \cdot \vec{B}) d\vec{r}$$

Dove:

$$(\vec{r} \cdot \vec{B}) d\vec{r} - (d\vec{r} \cdot \vec{B}) \vec{r} = \vec{r} \times d\vec{r} \times \vec{B}$$

Per cui si ha:

$$(\vec{r} \cdot \vec{B}) d\vec{r} = d((\vec{r} \cdot \vec{B}) \vec{r}) + \vec{r} \times d\vec{r} \times \vec{B} - (\vec{r} \cdot \vec{B}) d\vec{r} \Leftrightarrow 2(\vec{r} \cdot \vec{B}) d\vec{r} = d((\vec{r} \cdot \vec{B}) \vec{r}) + \vec{r} \times d\vec{r} \times \vec{B}$$

In definitiva, si ha:

$$(\vec{r} \cdot \vec{B}) d\vec{r} = \frac{1}{2} d((\vec{r} \cdot \vec{B}) \vec{r}) + \frac{1}{2} \vec{r} \times d\vec{r} \times \vec{B}$$

Sostituendo tale risultato nell'espressione della coppia si ha::

$$\vec{N} = I \oint_{\partial S} (\vec{r} \cdot \vec{B}) d\vec{r} = \frac{1}{2} I \oint_{\partial S} d((\vec{r} \cdot \vec{B}) \vec{r}) + \frac{1}{2} I \oint_{\partial S} \vec{r} \times d\vec{r} \times \vec{B}$$

Il primo termine è nullo, essendo una circuitazione di una forma differenziale esatta, quindi:

$$\oint_{\partial S} d\left((\vec{r} \cdot \vec{B}) \vec{r}\right) = \vec{0}$$

Per cui si ha:

$$\vec{N} = \frac{1}{2} I \oint_{\partial S} \vec{r} \times d\vec{r} \times \vec{B}$$

Siccome il campo è costante lungo tutto il percorso di integrazione, può essere portato all'esterno del simbolo di integrale:

$$\vec{N} = \frac{1}{2} I \left( \oint_{\partial S} \vec{r} \times d\vec{r} \right) \times \vec{B}$$

Si definisce il *momento magnetico* della spira:

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2} I \oint_{\partial S} \vec{r} \times d\vec{r} = IS\hat{i}_n$$

La coppia  $\vec{N}$  può, in definitiva, essere espressa come:

$$\vec{N} = \vec{\mu} \times \vec{B}$$

Nel caso più generale, il momento magnetico di una distribuzione continua di corrente in un volume  $V$  è dato da:

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2} \int_V \vec{r} \times \vec{J} dV$$

### 3.6.1 Momento magnetico di un anello rotante

Si vuole calcolare il momento magnetico di un anello sottile di raggio  $R$ , massa  $M$  e carica  $q$  distribuita uniformemente, che ruota con velocità angolare  $\omega$  attorno ad un asse ortogonale al piano in cui giace l'anello e passante per il centro.

L'anello, ruotando, genera una corrente la cui intensità media è:

$$I = \frac{q}{T}$$

Dove  $T$  è il periodo dell'oscillazione dato da:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Per cui la corrente è data da:

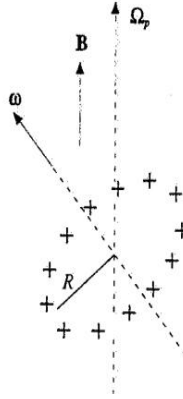


Figura 3.4: *Anello rotante nel campo magnetico*

$$I = \frac{q}{T} = q \frac{\omega}{2\pi}$$

L'anello è assimilabile a una spira percorsa da corrente, dunque, il suo momento magnetico è dato da:

$$\vec{\mu} = IS\hat{i}_n = q \frac{\omega}{2\pi} \pi R^2 \hat{i}_n$$

Semplificando, si ottiene il momento magnetico:

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2} q \omega R^2 \hat{i}_n$$

### 3.6.2 Momento magnetico per un guscio sferico

Si vuole calcolare il momento magnetico di uno strato sferico sottile di raggio  $R$ , massa  $M$  e carica  $Q$  distribuita uniformemente, che ruota con velocità angolare  $\omega$  attorno ad un asse passante per il centro della sfera.

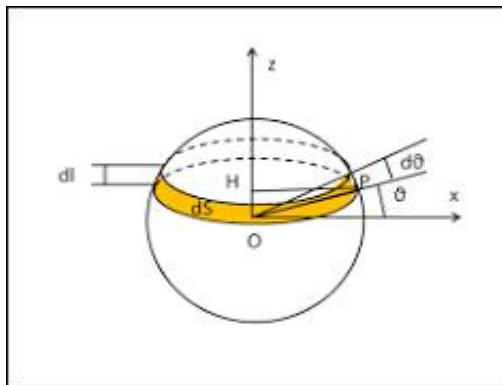


Figura 3.5: *Guscio sferico*

Si pone l'asse  $z$  coincidente con l'asse di rotazione, per cui  $\vec{\omega} = \omega \hat{z}$ . Si suddivide la superficie sferica in anelli infinitesimi, ciascuno giacente su un piano ortogonale all'asse  $z$ . In corrispondenza dell'angolo polare

$\vartheta$  l'anello ha:

$$\text{raggio: } r = R \sin \vartheta, \quad \text{lunghezza: } 2\pi R \sin \vartheta, \quad \text{larghezza (sulla sfera): } R d\vartheta.$$

L'elemento di area dell'anello è quindi:

$$dS = (2\pi R \sin \vartheta)(R d\vartheta) = 2\pi R^2 \sin \vartheta d\vartheta.$$

Se  $\sigma$  è la densità superficiale di carica uniforme, la carica dell'anello è  $dq = \sigma dS$  e la corrente associata alla sua rotazione è:

$$dI = \frac{dq}{T} = \frac{\sigma dS}{T} = \frac{\omega \sigma}{2\pi} 2\pi R^2 \sin \vartheta d\vartheta = \omega \sigma R^2 \sin \vartheta d\vartheta,$$

con  $T = 2\pi/\omega$  periodo di rotazione della sfera. L'area della spira (anello) è  $S = \pi(R \sin \vartheta)^2$ , dunque il momento magnetico elementare vale:

$$d\vec{\mu} = S dI \hat{z} = \pi R^2 \sin^2 \vartheta \omega \sigma R^2 \sin \vartheta d\vartheta \hat{z} = \pi \omega \sigma R^4 \sin^3 \vartheta d\vartheta \hat{z}.$$

Per le ipotesi fatte sul sistema di riferimento, risulta che  $\hat{i}_n = \hat{i}_z$ . Infatti, il momento magnetico è diretto come  $\vec{\omega}$ . Svolgendo i prodotti, si ha:

$$d\vec{\mu} = \pi \omega \sigma R^4 \sin^3 \vartheta d\vartheta \hat{i}_z$$

Il momento magnetico è ottenuto integrando l'equazione ottenuta su tutti i possibili valori assunti da  $\vartheta$ , ovvero:

$$\vec{\mu} = \int_0^\pi \pi \omega \sigma R^4 \sin^3 \vartheta d\vartheta \hat{i}_z = \pi \omega \sigma R^4 \int_0^\pi \sin^3 \vartheta d\vartheta \hat{i}_z$$

Si risolve l'integrale. Per le relazioni trigonometriche è possibile scrivere:

$$\int_0^\pi \sin^3 \vartheta d\vartheta = \int_0^\pi \left( \frac{3 \sin \vartheta - \sin 3\vartheta}{4} \right) d\vartheta = \frac{1}{4} \left( 3 \int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta - \int_0^\pi \sin 3\vartheta d\vartheta \right)$$

Dove:

$$3 \int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta = 3 [-\cos \vartheta]_0^\pi = 3 (-\cos \pi + \cos 0) = 3(1 + 1) = 6$$

$$\int_0^\pi \sin 3\vartheta d\vartheta = -\frac{1}{3} [\cos 3\vartheta]_0^\pi = -\frac{1}{3} (\cos 3\pi - \cos 0) = -\frac{1}{3} (-1 - 1) = \frac{2}{3}$$

Nel complesso, l'integrale è dato da:

$$\int_0^\pi \sin^3 \vartheta d\vartheta = \frac{1}{4} \left( 6 - \frac{2}{3} \right) = \frac{1}{4} \left( \frac{18 - 2}{3} \right) = \frac{1}{4} \frac{16}{3} = \frac{4}{3}$$

Il momento magnetico è dato da:



$$\vec{\mu} = \frac{4}{3} \pi \omega \sigma R^4 \hat{i}_z$$

La superficie totale della sfera è data da:

$$S = 4\pi R^2$$

Il prodotto della densità superficiale di carica  $\sigma$  per la superficie  $S$  restituisce la carica globale  $Q$ . Il momento magnetico può essere scritto come:

$$\vec{\mu} = \frac{1}{3} \omega Q R^2 \hat{i}_z$$

### 3.6.3 Momento magnetico per una sfera

Si vuole calcolare il momento magnetico di una sfera raggio  $R$ , massa  $M$  e carica  $Q$  distribuita uniformemente, che ruota con velocità angolare  $\omega$  attorno ad un asse passante per il centro della sfera.

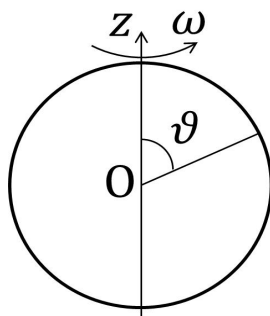


Figura 3.6: Sfera rotante

Si utilizzano le coordinate sferiche  $r, \vartheta, \varphi$ . Si assume come polo il centro  $O$  della sfera carica e come asse polare il diametro parallelo alla velocità angolare  $\omega$ . Dove:

$$r \in [0; R], \vartheta \in [0; \pi], \varphi \in [0; 2\pi]$$

Si indica con  $\rho$  la densità di carica volumetrica. Il volumetto  $dV$  contiene una carica  $dq$ :

$$dq = \rho dV$$

Un elemento di volume  $dV$  contribuisce alla densità di corrente volumetrica  $\vec{J}$ , data da:

$$\vec{J} = \rho \vec{v}$$

Poiché la sfera ruota con velocità angolare  $\vec{\omega}$  e la carica ha densità  $\rho$ , la densità di corrente volumetrica è:

$$\vec{J} = \rho \vec{v} = \rho (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

per calcolare il momento magnetico di un corpo di volume  $V$  con densità di corrente  $J$ , si usa la formula generale:

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2} \int_V \vec{r} \times \vec{J} dV$$

Sostituendo la densità di corrente dell'elemento di volume infinitesimo nella definizione del momento magnetico si ha:

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2} \int_V \vec{r} \times (\rho (\vec{\omega} \times \vec{r})) dV$$

Nell'ipotesi di densità di carica costante in tutto il volume, è possibile portare all'esterno del simbolo di integrale  $\rho$ :

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2} \rho \int_V \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) dV$$

Si considera il triplo prodotto vettoriale all'interno dell'integrale e si utilizza l'identità nota:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$$

Ponendo  $\vec{a} = \vec{r}$ ,  $\vec{b} = \vec{\omega}$ , e  $\vec{c} = \vec{r}$ , l'espressione  $\vec{r} \times \vec{\omega} \times \vec{r}$  diventa:

$$\vec{r} \times \vec{\omega} \times \vec{r} = (\vec{r} \cdot \vec{r})\vec{\omega} - (\vec{r} \cdot \vec{\omega})\vec{r}$$

Ricordando che  $\vec{r} \cdot \vec{r} = r^2$ , l'ultima relazione può essere scritta come:

$$\vec{r} \times \vec{\omega} \times \vec{r} = r^2 \vec{\omega} - (\vec{r} \cdot \vec{\omega}) \vec{r}$$

Per ipotesi, la rotazione avviene lungo la direzione  $\hat{i}_z$ , per cui  $\vec{\omega} = \omega \hat{i}_z$ . Inoltre, è possibile esprimere il vettore posizione in coordinate sferiche:

$$\vec{r} = r(\sin \vartheta \cos \varphi \hat{i}_x + \sin \vartheta \sin \varphi \hat{i}_y + \cos \vartheta \hat{i}_z)$$

Il prodotto scalare tra il vettore posizione e la velocità angolare avviene solamente tra le componenti lungo  $\hat{i}_z$ :

$$\vec{r} \cdot \vec{\omega} = r(\sin \vartheta \cos \varphi \hat{i}_x + \sin \vartheta \sin \varphi \hat{i}_y + \cos \vartheta \hat{i}_z) \cdot \omega \hat{i}_z = r\omega \cos \vartheta$$

Il prodotto vettoriale triplo si scrive come:

$$\vec{r} \times \vec{\omega} \times \vec{r} = r^2 \omega \hat{i}_z - (\omega r \cos \vartheta) (r(\sin \vartheta \cos \varphi \hat{i}_x + \sin \vartheta \sin \varphi \hat{i}_y + \cos \vartheta \hat{i}_z))$$

Svolgendo i prodotti, si ricava:

$$\vec{r} \times \vec{\omega} \times \vec{r} = r^2 \omega \hat{i}_z - r^2 \omega (\sin \vartheta \cos \varphi \cos \vartheta \hat{i}_x + \sin \vartheta \sin \varphi \cos \vartheta \hat{i}_y + \cos^2 \vartheta \hat{i}_z)$$

Sostituendo questo risultato nell'espressione vettoriale per il momento magnetico, si ottiene:

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2} \rho \int_V (r^2 \omega \hat{i}_z - r^2 \omega (\sin \vartheta \cos \varphi \cos \vartheta \hat{i}_x + \sin \vartheta \sin \varphi \cos \vartheta \hat{i}_y + \cos^2 \vartheta \hat{i}_z)) dV$$

Si raccoglie  $\omega$  che, essendo costante rispetto la posizione, può essere portata fuori dal simbolo di integrale:

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2} \rho \omega \int_V ((r^2 \hat{i}_z - r^2 (\sin \vartheta \cos \varphi \cos \vartheta \hat{i}_x + \sin \vartheta \sin \varphi \cos \vartheta \hat{i}_y + \cos^2 \vartheta \hat{i}_z)) dV$$

Si divide l'integrale in base alle componenti spaziali delle coordinate sferiche:

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2} \rho \omega \left( \int_V (r^2 \hat{i}_z - r \cos^2 \vartheta) \hat{i}_z dV - \int_V (r^2 \sin \vartheta \cos \varphi \cos \vartheta \hat{i}_x) dV - \int_V (r^2 \sin \vartheta \sin \varphi \cos \vartheta \hat{i}_y) dV \right)$$

In coordinate sferiche, l'elemento di volume infinitesimo è il prodotto delle tre lunghezze elementari:

$$dV = \underbrace{dr}_{\text{spessore radiale}} \underbrace{(r d\vartheta)}_{\text{altezza meridiana}} \underbrace{(r \sin \vartheta d\varphi)}_{\text{lunghezza azimutale}} = r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi$$

Si risolve l'integrale contenente la componente lungo la direzione  $\hat{i}_x$ . Utilizzando le coordinate sferiche e integrando su tutto il volume, si ottiene:

$$\int_V (r^2 \sin \vartheta \cos \varphi \cos \vartheta) dV = \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin \vartheta \cos \varphi \cos \vartheta (r^2 \sin \vartheta) d\varphi d\vartheta dr =$$

Per la linearità dell'operatore integrale è possibile scrivere:

$$= \int_0^R r^4 \int_0^\pi \sin^2 \vartheta \cos \vartheta \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi d\vartheta dr$$

Nella relazione individuata il  $\cos \varphi$  è integrato sul suo periodo, pertanto il suo risultato è nullo. Di conseguenza anche l'integrale complessivo è nullo:

$$\int_V (r^2 \sin \vartheta \cos \varphi \cos \vartheta) dV = \int_0^R r^4 \int_0^\pi \sin^2 \cos \vartheta \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi d\vartheta dr = 0$$

Per l'integrazione lungo la componente  $\hat{i}_y$  vale un discorso analogo, dunque, anche questo contributo è nullo. Le componenti  $\mu_x$  e  $\mu_y$  del momento magnetico si annullano a causa della simmetria di rotazione della

sfera attorno all'asse  $\hat{i}_z$ , espressa matematicamente dall'integrazione su  $\varphi$  (l'angolo azimutale) che annulla i termini  $\cos \varphi$  e  $\sin \varphi$ . Il momento magnetico totale è quindi solo in direzione  $\hat{i}_z$ :

$$\vec{\mu} = \mu_z \hat{i}_z$$

Al fine di valutare l'espressione del momento magnetico, bisogna risolvere l'integrale lungo l'asse di rotazione:

$$\mu_z = \frac{1}{2} \rho \omega \int_V (r^2 - r^2 \cos^2 \vartheta) dV = \frac{1}{2} \rho \omega \int_V r^2 (1 - \cos^2 \vartheta) dV$$

Si utilizza l'identità trigonometrica  $1 - \cos^2 \vartheta = \sin^2 \vartheta$  e si sostituisce l'espressione del volumetto elementare  $dV = r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi$ :

$$\mu_z = \frac{1}{2} \rho \omega \int_V r^2 \sin^2 \vartheta dV = \frac{1}{2} \rho \omega \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin^2 \vartheta (r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi)$$

Riorganizzando i termini e separando gli integrali, si ricava:

$$\mu_z = \frac{1}{2} \rho \omega \left( \int_0^{2\pi} d\varphi \right) \left( \int_0^\pi \sin^3 \vartheta d\vartheta \right) \left( \int_0^R r^4 dr \right)$$

L'integrale sulla coordinata azimutale è:

$$\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi$$

L'integrale sul raggio, è invece dato da:

$$\int_0^R r^4 dr = \left[ \frac{r^5}{5} \right]_0^R = \frac{R^5}{5}$$

L'integrale sulla coordinata polare è:

$$\int_0^\pi \sin^3 \vartheta d\vartheta = \int_0^\pi \left( \frac{3 \sin \vartheta - \sin 3\vartheta}{4} \right) d\vartheta = \frac{1}{4} \left( 3 \int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta - \int_0^\pi \sin 3\vartheta d\vartheta \right)$$

$$\int_0^\pi \sin^3 \vartheta d\vartheta = \int_0^\pi \left( \frac{3 \sin \vartheta - \sin 3\vartheta}{4} \right) d\vartheta = \frac{1}{4} \left( 3 \int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta - \int_0^\pi \sin 3\vartheta d\vartheta \right)$$

Dove:

$$3 \int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta = 3 [-\cos \vartheta]_0^\pi = 3 (-\cos \pi + \cos 0) = 3(1 + 1) = 6$$

$$\int_0^\pi \sin 3\vartheta d\vartheta = -\frac{1}{3} [\cos 3\vartheta]_0^\pi = -\frac{1}{3} (\cos 3\pi - \cos 0) = -\frac{1}{3} (-1 - 1) = \frac{2}{3}$$

Nel complesso, l'integrale è dato da:

$$\int_0^\pi \sin^3 \vartheta d\vartheta = \frac{4}{3}$$

Di conseguenza, il momento magnetico della sfera è dato da:

$$\mu_z = \frac{1}{2} \rho \omega (2\pi) \left( \frac{4}{3} \right) \left( \frac{R^5}{5} \right) = \frac{4\pi}{15} \rho \omega R^5$$

La carica totale  $Q$  è data dal prodotto della densità volumetrica  $\rho$  per il volume della sfera  $V = 4\pi R^3/3$ :

$$Q = \rho V \Leftrightarrow \rho = \frac{Q}{V}$$

Sostituendo il volume della sfera, si ottiene:

$$Q = \rho V \Leftrightarrow \rho = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3Q}{4\pi R^3}$$

Sostituendo l'espressione di  $\rho$  nell'espressione per il momento magnetico lungo l'asse di rotazione, si ottiene:

$$\mu_z = \frac{4\pi}{15} \omega R^5 \left( \frac{3Q}{4\pi R^3} \right)$$

Semplificando:

$$\mu_z = \frac{1}{5} Q \omega R^2$$

Dato che il momento magnetico della sfera rotante è diretto lungo l'asse di rotazione, si ha:

$$\vec{\mu} = \frac{1}{5} Q \omega R^2 \hat{z}$$

### 3.7 Forza su piccola spira in un campo disomogeneo

La forza agente su una spira elementare, percorsa da corrente, immersa in un campo magnetico generico può essere espressa come:

$$\vec{F} = \vec{\nabla} (\vec{\mu} \cdot \vec{B})$$

Dove  $\vec{\mu}$  è il momento magnetico della spira. Per un atomo il momento magnetico è costante, dunque, può essere portato all'esterno del simbolo di gradiente, producendo l'operatore:

$$(\vec{\mu} \cdot \vec{\nabla}) = \mu_x \frac{\partial}{\partial x} + \mu_y \frac{\partial}{\partial y} + \mu_z \frac{\partial}{\partial z}$$

L'espressione per la forza si riduce a:

$$\vec{F} = (\vec{\mu} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}$$

L'equazione, scritta in forma estesa, è:

$$\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = \left( \mu_x \frac{\partial}{\partial x} + \mu_y \frac{\partial}{\partial y} + \mu_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_x \frac{\partial B_x}{\partial x} + \mu_y \frac{\partial B_x}{\partial y} + \mu_z \frac{\partial B_x}{\partial z} \\ \mu_x \frac{\partial B_y}{\partial x} + \mu_y \frac{\partial B_y}{\partial y} + \mu_z \frac{\partial B_y}{\partial z} \\ \mu_x \frac{\partial B_z}{\partial x} + \mu_y \frac{\partial B_z}{\partial y} + \mu_z \frac{\partial B_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Si suppone che il campo sia diretto solamente lungo  $z$ , direzione lungo cui è variabile. In altre parole, il campo è dato da:

$$\vec{B} = B_z(z) \hat{i}_z$$

La forza, in questo contesto, può essere espressa come:

$$\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = \left( \mu_x \frac{\partial}{\partial x} + \mu_y \frac{\partial}{\partial y} + \mu_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_z(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mu_z \frac{\partial B_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

La componente non nulla della forza è solamente quella lungo  $z$ , data da:

$$F_z = \mu_z \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

La forza che agisce sulla spira dipende dalla proiezione del momento magnetico  $\vec{\mu}$  lungo  $z$  e dal gradiente del campo magnetico  $\vec{B}$  lungo  $z$ .

Questa relazione mostra che un dipolo magnetico immerso in un campo non uniforme subisce una forza che tende a spostarlo verso le regioni di campo più intenso se il momento magnetico è positivo,  $\mu_z > 0$ , o meno intenso se  $\mu_z < 0$ .

### 3.7.1 Esperimento di Stern-Gerlach

L'esperimento di Stern-Gerlach fornisce una prova sperimentale della quantizzazione del momento magnetico dell'atomo.

Nel modello classico l'elettrone era visto come un pianeta orbitante intorno al nucleo, dunque, caratterizzato da un momento angolare dato dalla rivoluzione dell'elettrone intorno al nucleo e intorno al proprio asse.

È noto, inoltre, che la massa del nucleo è di molti ordini di grandezza maggiore rispetto quella dell'elettrone; dunque, è possibile ritenere il nucleo fermo rispetto all'elettrone.

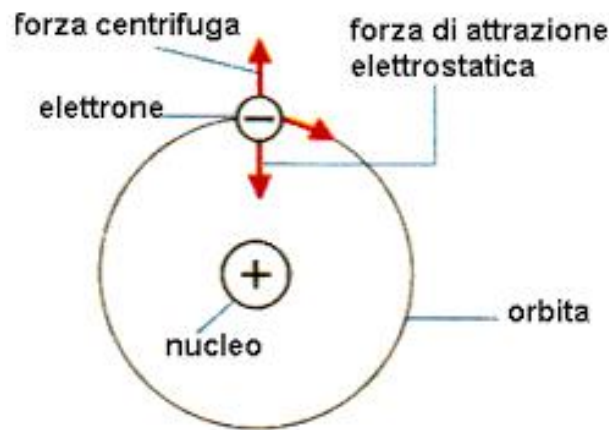


Figura 3.7: Modello planetario dell'atomo

Il moto dell'elettrone può essere considerato circolare con raggio  $r$ . L'elettrone viaggia con velocità  $\vec{v}$ . Per definizione la corrente è:

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t}$$

Dove, la carica coincide con quella dell'elettrone, mentre  $\Delta t$  coincide con il periodo di rivoluzione della particella carica:

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{e}{2\pi \frac{r}{v}} = \frac{ev}{2\pi r}$$

Data la piccola corrente generata, esiste un momento magnetico  $\vec{\mu}$  ortogonale al piano sul quale l'elettrone esegue la sua orbita, con verso diretto in modo da vedere la corrente ruotare in senso antiorario. Per convenzione sulla corrente, l'elettrone deve ruotare in senso orario.

Il momento magnetico è dato da:

$$\vec{\mu} = IS\hat{n}$$

Si considera il modulo, si sostituisce l'espressione della corrente prodotta dall'elettrone e la superficie della spira descritta :

$$\mu = IS = -\frac{ev}{2\pi r}\pi r^2 = -\frac{evr}{2}$$

Dove il segno meno è dovuto alla convenzione sulle correnti.

Sull'elettrone agisce un momento angolare  $\vec{L}$ , dovuto all'orbita circolare descritto dall'elettrone, anch'esso ortogonale al piano dell'orbita, dato da:

$$\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v}$$

Si considera il modulo del momento angolare:

$$L = mrv$$

Si moltiplicano ambo i membri per  $e/2$ :

$$\frac{e}{2}L = \frac{e}{2}mrv$$

Sostituendo l'espressione del momento magnetico, si ha:

$$\frac{e}{2}L = m\mu$$

Ricavano il momento magnetico in funzione del momento angolare, si ha:

$$\mu = \frac{e}{2m}L$$

In generale, se la particella ha carica  $q$  negativa, risulta:

$$\vec{\mu} = -\frac{q}{2m}\vec{L}$$

Dove  $\vec{\mu}$  è opposto a  $\vec{L}$  per la convenzione sulle correnti.

Sebbene l'ultima equazione sia stata ricavata nell'ambito della fisica classica, è valida anche in meccanica quantistica, in cui il punto di vista è completamente diverso.

Sebbene l'esperimento venga oggi usato per dimostrare lo spin, al tempo l'obiettivo era dimostrare l'esistenza del momento magnetico intrinseco e la sua quantizzazione spaziale. I due fisici eseguirono l'esperimento sugli atomi di argento, emessi da una sorgente. Questi atomi venivano deflessi da un campo magnetico non omogeneo, variabile lungo  $z$ . L'argento è stato scelto proprio perché il suo momento angolare totale, derivante dagli elettroni di valenza, è dovuto essenzialmente a un singolo elettrone  $s$ -orbitale, semplificando l'interpretazione dei risultati.

La meccanica classica prevede che momento magnetico degli atomi di argento sia distribuito statisticamente in tutte le direzioni. Sugli atomi di argento agisce una forza data da:

$$F_i = \mu_{iz} \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

Dunque, ogni atomo subisce una deflessione dovuta alla proiezione del suo momento magnetico lungo l'asse  $z$  e dal gradiente del campo magnetico lungo lo stesso asse.



Nella teoria classica, dato che ogni atomo possiede un momento magnetico orientato casualmente, Stern e Gerlach si aspettavano di ottenere una linea retta compresa tra un massimo e minimo. Tutte le posizioni compresi tra questi due valori hanno tutti la stessa probabilità.

Tuttavia, i due scienziati rilevarono solo due punti di arrivo. I due dedussero che gli orientamenti dei momenti magnetici degli atomi non disposti in modo casuale ma in maniera quantizzata.

Questo risultato non può essere previsto dalla meccanica classica, ma viene spiegato dalla meccanica quantistica.

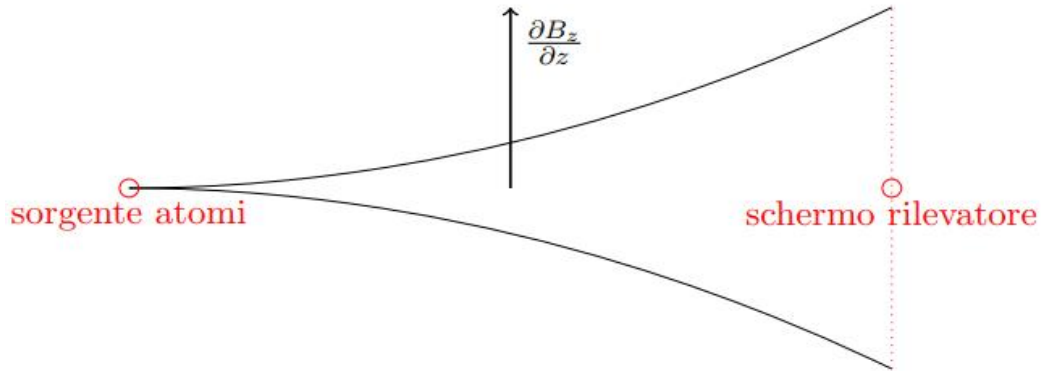


Figura 3.8: *Esperimento di Stern-Gerlach*

### 3.7.2 Concetto di spin

Il concetto di spin è inglobato nella meccanica quantistica e può essere visualizzato come la rotazione dell'elettrone intorno al suo asse. Lo spin determina un momento angolare e un momento magnetico. I due parametri sono antiparalleli e legati dal rapporto giromagnetico ( $\gamma$ ).

$$\vec{\mu} = -\frac{q}{2m}\vec{L} = -\gamma_e\vec{L}$$

Il concetto di elettrone rotante non può essere considerato valido poiché, nel contesto della meccanica quantistica, l'elettrone è privo di estensione superficiale. Lo spin è una proprietà intrinseca della particella, non legata a rotazione spaziale.

In meccanica quantistica, ogni particella elementare o composta che possieda un momento angolare intrinseco (spin  $\vec{S}$ ) o orbitale ( $\vec{L}$ ) è associata a un momento magnetico  $\vec{\mu}$ . Il momento magnetico intrinseco ( $\vec{\mu}_s$ ) di una particella è sempre proporzionale al suo spin ( $\vec{S}$ ):

$$\vec{\mu}_s = g\frac{q}{2m}\vec{S}$$

Dove:

- $q$  e  $m$  sono, rispettivamente, la carica e la massa della particella (ad esempio, elettrone, protone, muone, ecc.);
- $\vec{S}$  è il momento angolare di spin della particella;

- $g$  è il fattore giromagnetico ( $g$ -factor) o fattore di Landé, un numero adimensionale che indica di quanto il momento magnetico devia dal valore classico ( $q/2m$ )

Per l'elettrone, la formula è:

$$\vec{\mu}_e = -g_e \frac{e}{2m_e} \vec{S}$$

Il fattore  $e/2m_e$  è l'unità naturale del magnetismo per l'elettrone ed è chiamato magnetone di Bohr ( $\mu_B$ ). Il fattore  $g_e$  per l'elettrone libero è  $g_e \approx 2.0023$  (la piccola deviazione da  $g = 2$  è spiegata dall'Elettrodinamica Quantistica, QED).

Per i nucleoni e nuclei, si usa la massa del protone ( $m_p$ ) come riferimento per l'unità magnetica, poiché i momenti magnetici nucleari sono molto più piccoli:

$$\vec{\mu}_N = g_N \frac{e}{2m_p} \vec{I}$$

Dove:

- $e/2m_p$  è il magnetone nucleare ( $\mu_N$ );
- $\vec{I}$  è il momento angolare di spin nucleare;
- $g_N$  è il fattore  $g$  nucleare, che è caratteristico di ciascun nucleo.

Per un atomo in uno stato quantico definito, il momento magnetico totale ( $\vec{\mu}_{tot}$ ) è proporzionale al momento angolare totale ( $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ ):

$$\vec{\mu}_{tot} = -g \frac{e}{2m_e} \vec{J}$$

In questo caso, il fattore  $g$  è il fattore di Landé ( $g$ ) dell'atomo, il cui valore dipende da come si accoppiano  $\vec{L}$  e  $\vec{S}$  (ad esempio, tramite l'accoppiamento  $LS$ )

In sintesi, la relazione  $\vec{\mu} = gq/2m\vec{S}$  è la formula unificatrice in meccanica quantistica, con il fattore  $g$  che incorpora la natura specifica della particella o del sistema considerato.

### 3.8 Campo magnetico prodotto da un momento magnetico

Si vuole determinare il campo creato da un momento magnetico di una piccola spira percorsa da corrente. A tale scopo si considerano le equazioni di Maxwell per il campo induzione magnetica nel vuoto:

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left( \vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \end{cases}$$

Se la lunghezza d'onda del campo incidente  $\lambda$  è molto maggiore della dimensione lineare dell'oggetto, è possibile ritenere il campo elettromagnetico lentamente variabile sulla superficie della spira, dunque:

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \simeq 0$$

È possibile scrivere:

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \end{cases}$$

Siccome il campo induzione magnetica è solenoidale, è possibile definire un potenziale vettore, tale che:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

Si sostituisce la definizione del potenziale vettore nella seconda equazione:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \Leftrightarrow \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

Il rotore del rotore può essere scritto come:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot) - \nabla^2$$

Dunque, si ottiene:

$$\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{J}$$

Il potenziale vettore non è univocamente definito, dunque, è possibile imporre la condizione, detta gauge di Coulomb:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$$

Si ottiene che il laplaciano del campo vettore è dato da:

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}$$

Si dimostra che la soluzione è del tipo:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

Per una piccola spira, lontano da essa, si utilizza lo sviluppo in serie di multipoli per  $1/|\vec{r} - \vec{r}'|$  e si considera solo il termine di dipolo magnetico. Si dimostra che il potenziale vettore in un punto di osservazione  $\vec{R}$  è dato da::

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{\mu} \times \vec{R}}{R^3}$$

Dove  $\vec{R}$  è il vettore che congiunge il centro della piccola spira col punto di osservazione.

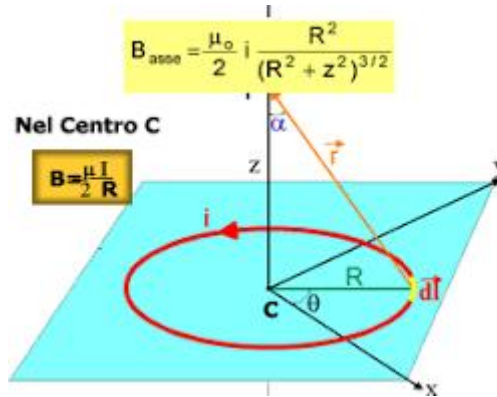


Figura 3.9: Campo prodotto da una spira elementare

L'iterazione di una spira con un campo magnetico  $\vec{B}$  esterno è descritta dall'energia potenziale  $U$ , data da:

$$U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = -\mu B \cos \beta$$

Con  $\beta$  angolo formato dal campo magnetico e il momento magnetico. L'energia potenziale è nulla quando il campo magnetico è ortogonale al momento magnetico.

Il momento magnetico immerso in un campo magnetico subisce l'effetto di una coppia data da:

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$$

Con  $\vec{\tau}$  momento torcente.

### 3.9 Moto del momento magnetico in campo magnetico

Si considera una particella, come un elettrone, un atomo o un nucleo, immerso in un campo magnetico  $\vec{B}$ . Per semplicità si analizza il sistema mediante una descrizione classica e non relativistica.

Ogni atomo o particella subatomica, immerso in un campo magnetico subisce un momento torcente  $\vec{\tau}$  dato da:

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$$

Il momento angolare rispetta la seconda legge di Newton:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}$$

Sostituendo l'espressione per il momento angolare in funzione del momento magnetico si ha:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\mu} \times \vec{B}$$

Il momento magnetico è legato al momento angolare da un fattore di proporzionalità  $\gamma$ :

$$\vec{\mu} = \gamma \vec{L}$$

In caso di elettroni, la costante di proporzionalità coincide con il rapporto giromagnetico:

$$\gamma = -\gamma_e$$

In caso di atomo con:

$$\gamma = -g \frac{q}{2m}$$

Mentre per un nucleo con:

$$\gamma = g \frac{q}{2m_p}$$

La seconda legge di Newton può essere scritta come:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\mu} \times \vec{B} = \gamma \vec{L} \times \vec{B}$$

$\gamma$  è positivo se momento angolare e momento magnetico sono paralleli, negativo se antiparalleli.

Dall'equazione ottenuta si nota che la derivata del momento angolare deve essere perpendicolare al momento angolare stesso. Ne discende che il modulo di  $\vec{L}$  è costante. In altre parole, la punta del vettore momento angolare  $\vec{L}$  giace su una sfera e percorre una traiettoria circolare nel piano perpendicolare a  $\vec{B}$ . Tale moto è detto precessione del momento magnetico o del momento angolare.

Confrontando l'equazione ottenuta per il momento angolare:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \gamma \vec{L} \times \vec{B} = -\gamma \vec{B} \times \vec{L}$$

Con la relazione generale che lega la rotazione di un vettore alla velocità angolare:

$$d\vec{v} = \vec{\Omega} \times \vec{v} dt$$

è evidente che la velocità del moto di precessione è data da:

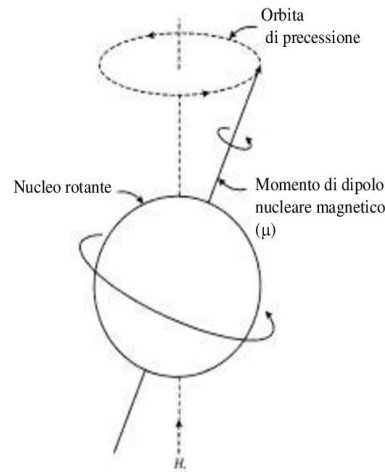


Figura 3.10: *Moto di precessione del momento magnetico*

$$\vec{\Omega} = -\gamma \vec{B}$$

Con questa definizione, è possibile scrivere:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{L}$$

### 3.10 Diamagnetismo

I materiali diamagnetici sono caratterizzati da atomi che, se immersi in un campo magnetico  $\vec{B}$ , sviluppano un momento magnetico aggiuntivo tale che il momento magnetico risultante si oppone al campo applicato.

Si suppone di applicare lentamente un campo magnetico a un atomo di materiale diamagnetico. Il suo nucleo, avendo una massa molto maggiore dell'elettrone può essere ritenuto fermo, mentre l'elettrone ruota intorno al nucleo. Questo movimento può essere assimilato a una spira di raggio  $r$  percorsa da corrente centrata sul nucleo.

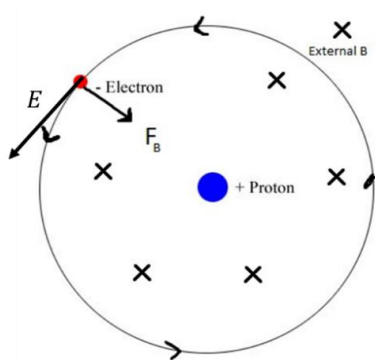


Figura 3.11: *Nucleo immerso in un campo magnetico*

Il campo magnetico  $\vec{B}$ , variabile nel tempo e nello spazio, si concatena con la spira, provocando la generazione di una forza elettromagnetica data dalla legge di Faraday:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{C} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Dove  $S$  è la superficie della spira e  $\partial S = C$  il suo contorno. Se il campo  $\vec{B}$  è costante sulla superficie della spira può essere portato fuori dal simbolo di integrale:

$$\vec{E} \cdot \oint_C d\vec{C} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \cdot \int_S d\vec{S}$$

Ne discende che il campo elettrico è anch'esso uniforme sulla spira e parallelo, in ogni punto, a  $d\vec{C}$ . Per una circonferenza risulta:

$$E2\pi r = \pi r^2 \left( -\frac{\partial B}{\partial t} \right)$$

Dato che  $B$  è una funzione solo del tempo, la derivata parziale si riduce a una totale. Semplificando  $\pi r$  si ottiene:

$$E = -\frac{r}{2} \frac{dB}{dt}$$

Il campo elettrico produce un momento torcente sull'elettrone, dato dalla relazione:

$$\vec{\tau} = q\vec{r} \times \vec{E}$$

Dato che il campo elettrico è ortogonale al raggio, essendo ortogonale anche al campo magnetico  $\vec{B}$ , il modulo del momento torcente, esplicitando anche la carica dell'elettrone, può essere espresso come:

$$\tau = -erE$$

Sostituendo il campo elettrico prima determinato, si ha:

$$\tau = e \frac{r^2}{2} \frac{dB}{dt}$$

Per la seconda legge di Newton  $dL/dt = \tau$ , si ottiene:

$$\frac{dL}{dt} = e \frac{r^2}{2} \frac{dB}{dt}$$

Si integra tra  $t_0$ , tempo di applicazione del campo magnetico, e  $t_1$  tempo in cui il campo  $B$  raggiunge il suo valore massimo:

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{dL}{dt} dt = e \frac{r^2}{2} \int_{t_0}^{t_1} \frac{dB}{dt} dt$$

Risolvendo si ha:

$$L(t_1) - L(t_0) = e \frac{r^2}{2} [B(t_1) - B(t_0)]$$

Inizialmente il campo è nullo  $B(t_0) = 0$ , per cui la differenza di momento angolare è data da:

$$\Delta L = e \frac{r^2}{2} B$$

Dove  $B$  è il massimo valore del campo.

Il momento magnetico dell'elettrone intorno al nucleo è antiparallelo al momento angolare. Le due quantità sono legate dal rapporto giromagnetico:

$$\Delta \mu = -\frac{e}{2m} \Delta L$$

Sostituendo l'espressione della differenza del momento angolare, si ottiene:

$$\Delta \mu = -\frac{e^2 r^2}{4m} B$$

In linea di principio l'orbita descritta dall'elettrone dovrebbe variare per l'applicazione del campo magnetico.

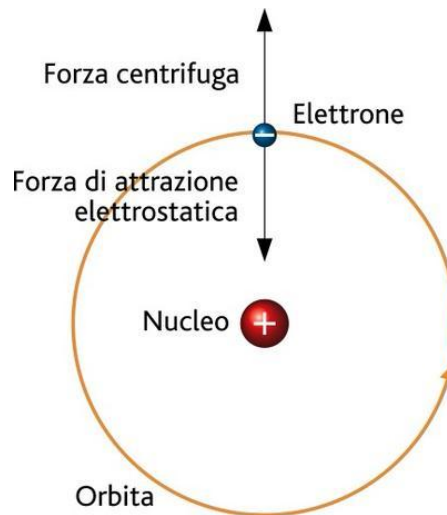


Figura 3.12: *Elettrone in equilibrio sull'orbita*

Un elettrone orbitante è mantenuto, infatti, in equilibrio dalla forza centripeta ( $F_c$ ) e dell'interazione coulombiana con il nucleo ( $F_e$ ):

$$F_e = F_c$$



Sostituendo le relative espressioni nell'ipotesi che il nucleo sia composto da un solo elettrone, si ha:

$$m \frac{v^2}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2}$$

La variazione di velocità indotta dal campo elettrico dopo l'introduzione del campo  $dB$  è data dalla forza che il campo esercita:

$$F = \frac{dp}{dt} = m \frac{dv}{dt}$$

La forza può essere espressa in termini di campo elettrico. Dalla definizione di campo elettrico, per l'elettrone risulta:

$$E = \frac{F}{q} \Leftrightarrow F = -eE$$

Dunque, la variazione di quantità di moto può essere espressa come:

$$-eE = m \frac{dv}{dt}$$

Il campo elettrico, per la legge di Faraday, è legato al campo magnetico dalla relazione:

$$E = -\frac{r}{2} \frac{d\vec{B}}{dt}$$

Dunque, si ha:

$$-eE = m \frac{dv}{dt} \Leftrightarrow e \frac{r}{2} \frac{d\vec{B}}{dt} = m \frac{dv}{dt}$$

Si analizza la sola variazione di velocità subita dall'elettrone:

$$dv = \frac{er}{2m} dB$$

A causa della variazione di velocità, anche l'accelerazione centripeta  $\alpha$  varia. Ricorrendo allo sviluppo in serie di Taylor, trascurando gli ordini superiori al primo, si ha:

$$\alpha + d\alpha = \frac{v^2}{r} + d\left(\frac{v^2}{r}\right) = \frac{v^2}{r} + \frac{2v dv}{r} + o\left(\frac{1}{r^2} dr\right) + o(dv^2)$$

Dopo l'applicazione del campo magnetico, bisogna considerare anche la forza di Lorentz nel bilancio delle forze sull'elettrone. La forza di Lorentz e quella elettrostatica sono concordi, dunque, affinché l'elettrone sia in equilibrio, la velocità deve aumentare per incrementare la forza centripeta:

$$\frac{mv^2}{r} + \frac{2mvdv}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} + evdB$$

Si è visto che:

$$dv = \frac{er}{2m} dB$$

Sostituendo nel bilancio, si ha:

$$\frac{mv^2}{r} + \frac{2mv}{r} \frac{er}{2m} dB = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} + evdB \Leftrightarrow \frac{mv^2}{r} + vedB = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} + evdB$$

Per cui si ottiene l'equazione dell'equilibrio prima dell'applicazione del campo esterno:

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2}$$

Dopo l'applicazione del campo magnetico, l'equilibrio dell'elettrone è ottenuto mediante una sola variazione della velocità di rotazione. La variazione del raggio è influente per ordini superiori, dunque, in prima analisi, è perfettamente trascurabile. La cancellazione dei termini di ordine superiore ( $\pm evdB$ ) dimostra che, se si ignora la variazione di raggio, la variazione di velocità indotta ( $2mvdv/r$ ) è esattamente ciò che è richiesto dalla forza aggiuntiva di Lorentz ( $evdB$ ) per mantenere l'equilibrio (cioè,  $F_{centripeta} = F_{Lorentz} + F_{Coulomb}$ ).

Per i materiali diamagnetici la permeabilità relativa è circa unitaria,  $\mu_r \simeq 1$ , con valori leggermente inferiori all'unità in modo da opporsi al campo applicato. Inoltre, essendo un fenomeno legato all'orbita elettronica, il diamagnetismo è presente in tutti i materiali.

### 3.11 Paramagnetismo

A differenza del diamagnetismo sempre presente in ogni materiale, il paramagnetismo è presente solamente in quei materiali i cui atomi o molecole hanno un momento magnetico permanente ( $\vec{\mu} \neq 0$ ), dovuto alla presenza di elettroni spaiati negli orbitali atomici.

Per il principio di esclusione di Pauli, gli elettroni negli orbitali atomici si dispongono con spin antiparallelo, così da cancellare gli effetti degli spin stessi. Negli atomi in cui sono presenti elettroni spaiati, ovvero con orbitali atomici non completamente riempiti, la cancellazione degli spin non avviene, dunque, lo spin netto dell'atomo è diverso da zero.

A livello macroscopico, gli spin dei vari costituenti del materiale si sommano, dando luogo alla magnetizzazione macroscopica. Quest'ultima è influenzata dalla presenza o meno di un campo magnetico.

In assenza di un campo magnetico esterno, il momento magnetico di ogni atomo è orientato in modo casuale a causa dell'agitazione termica, dunque, la magnetizzazione macroscopica media ( $\vec{M}$ ) del materiale è nulla.

Applicato un campo magnetico esterno, invece, i singoli momenti magnetici (spin) subiscono un momento torcente che tende ad allinearli nella direzione del campo. Essi iniziano a precedere attorno alla direzione del campo con la frequenza di Larmor:

$$\omega = \gamma B$$

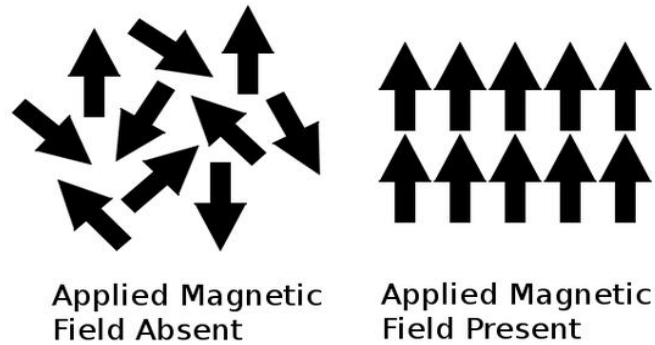


Figura 3.13: *Spin nei materiali paramagnetici*

Il paramagnetismo è presente solo in alcune sostanze ed è caratterizzato da una permeabilità magnetica relativa  $\mu_r \simeq 1$ , lievemente maggiore dell'unità.

Si osservi che il vettore di magnetizzazione ( $M$ ) è definito come la somma vettoriale dei momenti magnetici per unità di volume:

$$\vec{M} = \frac{1}{V} \sum_i \vec{\mu}_i$$

L'interazione del campo esterno con i momenti magnetici determina la magnetizzazione macroscopica  $M$  del materiale, che in equilibrio termico è generalmente debole a causa del disorientamento termico.



## Capitolo 4

# Meccanica quantistica

### Sommario

<b>4.1</b>	<b>Incongruenze del modello fisico del '900</b>	<b>111</b>
4.1.1	Stabilità dell'atomo	111
4.1.2	Corpo nero	112
4.1.3	Effetto fotoelettrico	113
4.1.4	Double slit	114
4.1.5	Esperimento di Stern e Gerlach	115
4.1.6	Spettro di assorbimento	116
<b>4.2</b>	<b>Teoria della meccanica quantistica</b>	<b>117</b>
4.2.1	Quantizzazione della materia	117
4.2.2	Dualismo onda-particella	118
4.2.3	Funzione d'onda associata alla particella	119
<b>4.3</b>	<b>Principio di indeterminazione di Heisenberg</b>	<b>120</b>
<b>4.4</b>	<b>Equazione di Schrödinger</b>	<b>121</b>
<b>4.5</b>	<b>Operatori in meccanica quantistica</b>	<b>123</b>
<b>4.6</b>	<b>Equazione di Schrödinger per stati stazionari</b>	<b>125</b>
4.6.1	Buco di potenziale	129
4.6.2	Gradino di potenziale	134
4.6.3	Effetto tunnel	135
<b>4.7</b>	<b>Meccanica quantistica con notazione di Dirac</b>	<b>136</b>
4.7.1	Autovalori dell'operatore hamiltoniano	138
4.7.2	Risultato dell'operatore di misura	138
4.7.3	Evoluzione libera degli stati	141
4.7.4	Notazione di Dirac per lo spin	142
4.7.5	Split dei livelli energetici	145
4.7.6	Energia media di un nucleo in base allo spin	148
4.7.7	Evoluzione temporale dello stato spin up	150

4.7.8	Valore medio del momento magnetico sull'asse longitudinale . . . . .	151
4.7.9	Andamento temporale dello stato momento magnetico lungo l'asse trasversale . . .	151
4.7.10	Transizioni di stato . . . . .	154

## 4.1 Incongruenze del modello fisico del '900

All'inizio del Novecento, il modello matematico utilizzato per descrivere i fenomeni naturali mostrava alcune incongruenze rispetto ai risultati sperimentali. La fisica classica non era in grado di spiegare diversi fenomeni osservati, tra cui:

- La stabilità dell'elettrone orbitante attorno al nucleo: secondo l'elettrodinamica classica, un elettrone in moto circolare dovrebbe emettere radiazione elettromagnetica e perdere energia, spiraleggiando verso il nucleo. Tuttavia, gli atomi sono stabili;
- La distribuzione spettrale della radiazione del corpo nero: la teoria classica prevedeva una divergenza dell'energia emessa alle alte frequenze (catastrofe ultravioletta), in contrasto con le osservazioni sperimentali;
- L'effetto fotoelettrico: la luce incidente su una superficie metallica può liberare elettroni, ma il fenomeno non era spiegabile con la teoria ondulatoria classica della luce.

Oltre a questi problemi, vi erano ulteriori discrepanze tra il modello classico e le osservazioni sperimentali, che mettevano in discussione la concezione tradizionale della materia. Tra gli esperimenti più significativi si annoverano:

- **Esperimento della doppia fenditura (double slit):** quando elettroni (o fotoni) passano attraverso due fenditure, producono un'interferenza tipica delle onde, anche se inviati uno alla volta. Questo suggerisce che ogni particella interferisce con sé stessa, manifestando una natura ondulatoria;
- **Esperimento di Stern-Gerlach:** un fascio di atomi d'argento viene fatto passare attraverso un campo magnetico non uniforme. Il fascio si divide in due componenti discrete, rivelando la quantizzazione del momento angolare (spin) e la non continuità dei valori osservabili;
- **Spettro di assorbimento atomico:** gli atomi assorbono solo specifiche frequenze di luce, corrispondenti a transizioni tra livelli energetici discreti. Questo conferma che l'energia degli elettroni è quantizzata.

Queste difficoltà portarono alla necessità di rivedere i fondamenti della fisica. Nacque così la **meccanica quantistica**, una nuova teoria che descrive il comportamento della materia e dell'energia su scala microscopica, introducendo concetti come la quantizzazione, la probabilità e la dualità onda-particella [messiah1961quantum, wickmann1971quantistica, feynman1965vol3].

### 4.1.1 Stabilità dell'atomo

Secondo la meccanica classica e l'elettromagnetismo basato sulle equazioni di Maxwell, una carica elettrica in movimento, come l'elettrone orbitante attorno al nucleo, dovrebbe emettere energia sotto forma di radiazione elettromagnetica. Questo processo comporterebbe una perdita continua di energia, con conseguente riduzione del raggio orbitale fino al collasso dell'elettrone sul nucleo.

Tuttavia, le osservazioni sperimentali mostrano chiaramente che gli atomi, in particolare quelli di elementi stabili e non radioattivi, mantengono una struttura stabile nel tempo. Questa evidente discrepanza tra teoria classica e realtà sperimentale rappresentava uno dei problemi fondamentali della fisica all'inizio del Novecento.

La soluzione a questa incongruenza fu proposta da Niels Bohr nel 1913, con l'introduzione di un modello atomico quantizzato: l'elettrone può occupare solo determinate orbite stazionarie, in cui non emette radiazione. Il passaggio da un'orbita all'altra avviene mediante l'assorbimento o l'emissione di quanti di energia (o fotoni), in accordo con la relazione di Planck.

#### 4.1.2 Corpo nero

Il corpo nero è un oggetto ideale che assorbe completamente tutta la radiazione elettromagnetica incidente, senza rifletterla né trasmetterla. In base al principio di conservazione dell'energia, un corpo nero riscaldato deve emettere radiazione elettromagnetica in modo continuo, su tutte le frequenze.

Sebbene il corpo nero sia un'astrazione teorica, nella pratica può essere approssimato da un oggetto cavo con pareti nere e una piccola apertura. La radiazione elettromagnetica che entra nella cavità ha una probabilità molto bassa di uscire, rendendo il sistema un buon approssimante del comportamento ideale.

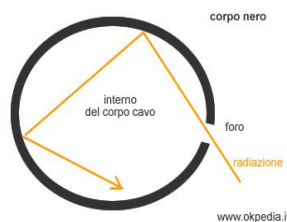


Figura 4.1: *Modello pratico di corpo nero*

Secondo la fisica classica, basata sulle equazioni di Maxwell, l'intensità della radiazione emessa da un corpo nero dovrebbe aumentare indefinitamente al diminuire della lunghezza d'onda  $\lambda$ , portando a una divergenza nota come **catastrofe ultravioletta**. Questo risultato teorico è in netto contrasto con le osservazioni sperimentali.

In realtà, lo spettro di emissione del corpo nero dipende dalla temperatura e presenta un andamento continuo e finito. Esiste una lunghezza d'onda per cui l'intensità è massima, che si sposta verso valori più bassi all'aumentare della temperatura (legge di Wien). Dopo il massimo, l'intensità decresce, in accordo con la legge di Rayleigh-Jeans solo per lunghezze d'onda elevate.

La risoluzione teorica di questo problema fu proposta da Max Planck nel 1900, segnando l'inizio della meccanica quantistica. Planck ipotizzò che l'energia della radiazione non fosse continua, ma quantizzata, ovvero composta da multipli interi, detti *quanti* o pacchetti di energia, di una determinata energia fondamentale.

L'energia emessa o assorbita da un oscillatore è proporzionale alla frequenza della radiazione, secondo la relazione:

$$E = h\nu$$



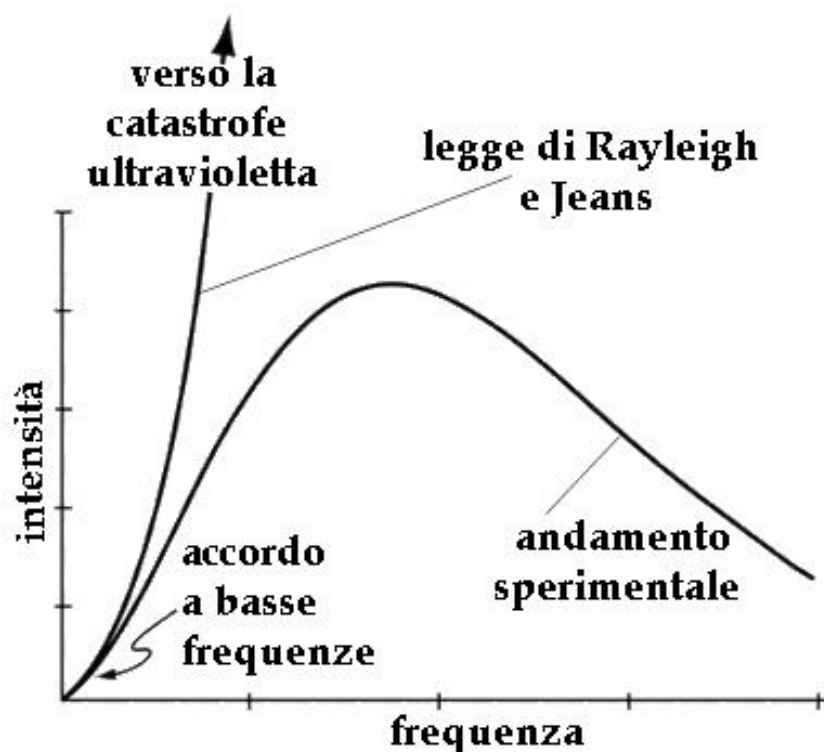


Figura 4.2: Spettro di emissione del corpo nero a diverse temperature

dove  $E$  è l'energia del quanto,  $\nu$  è la frequenza della radiazione, e  $h$  è la costante di Planck. Questa ipotesi permise di descrivere correttamente lo spettro osservato e introdusse il concetto fondamentale di quantizzazione dell'energia.

### 4.1.3 Effetto fotoelettrico

L'effetto fotoelettrico è un fenomeno che descrive l'interazione tra la radiazione elettromagnetica e la materia, caratterizzato dall'emissione di elettroni da una superficie, generalmente metallica, quando irradiata con energia elettromagnetica.

Sperimentalmente, si osserva che ponendo due elettrodi metallici all'interno di un'ampolla di vetro, resa trasparente alla radiazione incidente e sottoposta a un vuoto molto spinto, si genera una corrente elettrica quando uno degli elettrodi viene irradiato da una sorgente luminosa.

Gli elettroni emessi dall'elettrodo irradiato, dotati di energia cinetica non nulla, vengono accelerati dal campo elettrico generato da una batteria, raggiungendo il secondo elettrodo collegato al polo positivo. In questo modo, si chiude il circuito elettrico e si rileva una corrente.

Applicando una differenza di potenziale tale da impedire il passaggio degli elettroni, si può misurare l'energia cinetica massima degli elettroni emessi. Infatti, quando la tensione di arresto è sufficiente a fermare anche gli elettroni più energetici, la corrente si annulla. Conoscendo tale tensione, si può determinare l'energia cinetica degli elettroni espulsi.

Si applica una differenza di potenziale tale da bloccare la circolazione di corrente nel circuito, nonostante l'irraggiamento dell'elettrodo. In questa situazione, un elettrone, espulso per effetto fotoelettrico con una

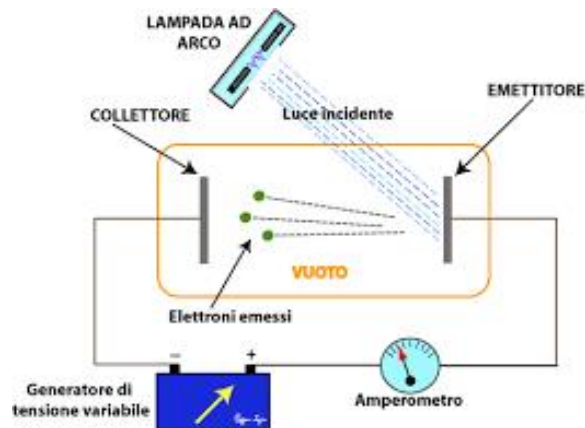


Figura 4.3: Circuito per l'effetto fotoelettrico

certa energia cinetica, si trova in un campo elettrico che lo decelera fino a farlo tornare sull'elettrodo che l'ha prodotto. Nota la tensione applicata, si riesce a determinare l'energia dell'elettrone espulso.

Secondo la fisica classica, l'energia dei fotoelettroni avrebbe dovuto dipendere dall'intensità della radiazione incidente: una luce più intensa avrebbe dovuto fornire più energia agli elettroni, indipendentemente dalla sua frequenza. Tuttavia, l'esperimento mostrò che l'energia degli elettroni dipende esclusivamente dalla frequenza della radiazione, e non dalla sua intensità.

Albert Einstein risolse questa incongruenza nel 1905, estendendo l'ipotesi di Planck: la luce è composta da quanti di energia (fotoni), ciascuno con energia proporzionale alla frequenza della radiazione

$$E = h\nu$$

dove  $E$  è l'energia del fotone,  $\nu$  è la frequenza della radiazione, e  $h$  è la costante di Planck. Se l'energia del fotone è sufficiente a superare la funzione lavoro del materiale, l'elettrone viene espulso. Per questa spiegazione rivoluzionaria, Einstein ricevette il Premio Nobel per la Fisica nel 1921.

#### 4.1.4 Double slit

La meccanica classica descriveva l'elettrone come una particella orbitante attorno al nucleo. Tuttavia, l'esperimento della **doppia fenditura** (o **double slit**) ha rivelato la natura ondulatoria dell'elettrone, mettendo in crisi la visione corpuscolare della materia.

In questo esperimento, un fascio di elettroni viene emesso da un filamento riscaldato e fatto passare attraverso due fenditure parallele. Sullo schermo di rilevazione, anziché osservare due bande corrispondenti alle fenditure, si forma una figura di interferenza: una sequenza di frange chiare e scure, tipica dei fenomeni ondulatori. Le frange scure indicano interferenza distruttiva, mentre quelle chiare corrispondono a interferenza costruttiva.

Il comportamento degli elettroni in questo esperimento può essere interpretato attraverso il principio di Huygens dei fenomeni ondulatori, secondo cui ogni punto  $d\Sigma$  di un fronte d'onda  $\Sigma$  può essere considerato

### Double-slit experiment

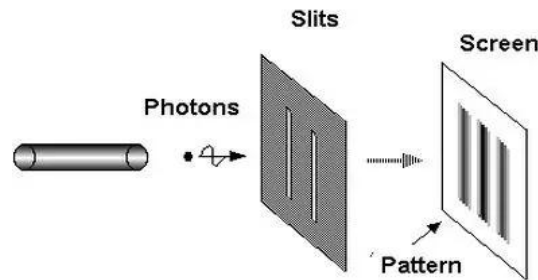


Figura 4.4: *Figura di interferenza della doppia fenditura*

come sorgente secondaria di onde sferiche. La perturbazione risultante in un punto dello spazio è data dalla sovrapposizione di tutte le onde secondarie che vi giungono.

Questo risultato è sorprendente, poiché gli elettroni sono particelle dotate di massa. Inoltre, in altri esperimenti, come l'effetto fotoelettrico, gli elettroni interagiscono con i fotoni come particelle, attraverso urti elastici. Questi due comportamenti apparentemente contraddittori hanno portato alla formulazione del concetto di **dualismo onda-corpuscolo**.

Nel 1924, Louis de Broglie propose che a ogni particella materiale fosse associata un'onda, con lunghezza d'onda inversamente proporzionale alla quantità di moto:

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

dove  $\lambda$  è la lunghezza d'onda associata alla particella,  $h$  è la costante di Planck, e  $p$  è la quantità di moto. Questa ipotesi fu confermata sperimentalmente e rappresenta uno dei pilastri della meccanica quantistica.

#### 4.1.5 Esperimento di Stern e Gerlach

L'esperimento di Stern e Gerlach, condotto nel 1922, ha fornito una prova diretta della quantizzazione del momento angolare e ha rivelato l'esistenza di una proprietà fondamentale delle particelle: lo **spin**.

Nel setup sperimentale, un fascio di atomi d'argento viene fatto passare attraverso un campo magnetico non uniforme. Secondo la fisica classica, il momento magnetico degli atomi dovrebbe orientarsi in modo continuo rispetto al campo, producendo una distribuzione continua sullo schermo di rilevazione.

Tuttavia, ciò che si osserva è una separazione netta del fascio in due sole componenti distinte. Questo risultato indica che il momento magnetico, quindi il momento angolare, non può assumere valori arbitrari, ma solo determinati valori discreti. In particolare, per gli atomi d'argento, che hanno un solo elettrone nel guscio esterno, il momento angolare intrinseco (spin) può assumere solo due orientamenti: "su" e "giù".

Questo esperimento ha dimostrato che:

- Il momento magnetico è **quantizzato**, non continuo.

- Le particelle subatomiche possiedono uno **spin**, una proprietà intrinseca non spiegabile dalla meccanica classica.
- Le misure in meccanica quantistica possono dare solo risultati discreti, anche se il sistema sembra poter assumere infiniti stati.

L'esperimento di Stern-Gerlach è uno dei pilastri della meccanica quantistica, poiché mostra in modo diretto la discrezione degli stati quantici e l'impossibilità di descrivere il comportamento microscopico della materia con modelli classici.

#### 4.1.6 Spettro di assorbimento

Lo spettro di assorbimento di un elemento o composto chimico è l'insieme delle radiazioni elettromagnetiche assorbite quando la sostanza viene esposta a una sorgente luminosa. Le sostanze assorbono radiazioni solo a determinate frequenze, generando uno spettro a righe caratteristiche.

Nei primi anni del Novecento, la meccanica classica non era in grado di prevedere lo spettro di assorbimento degli atomi. Si osservava, infatti, che le sostanze non assorbono tutte le frequenze della radiazione incidente, ma solo alcune, indipendentemente dalla loro intensità.

Lo spettro risultante, osservato a valle dell'esposizione, è dato dalla radiazione incidente privata delle lunghezze d'onda assorbite dal materiale. In altre parole, lo spettro presenta delle bande scure, corrispondenti alle frequenze assorbite.

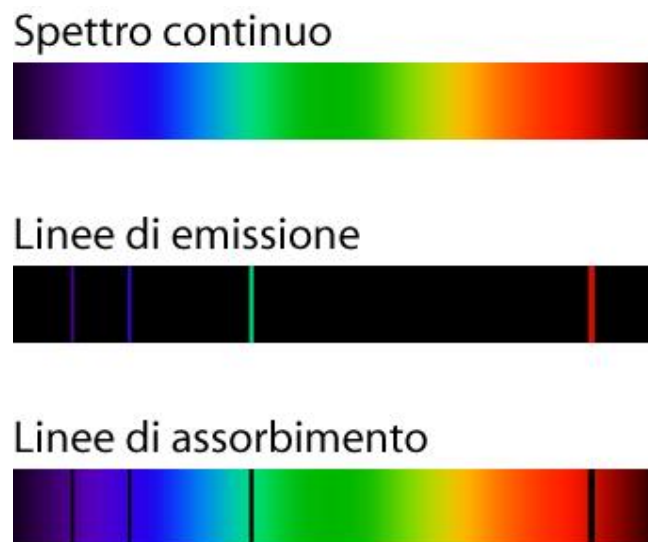


Figura 4.5: *Spettro di assorbimento e di emissione*

Una soluzione empirica per prevedere lo spettro di assorbimento dell'atomo di idrogeno fu proposta da Johannes Rydberg, secondo cui la lunghezza d'onda è data da:

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left( \frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right)$$

dove  $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$  e  $R_H$  è la costante di Rydberg.

La formulazione di Rydberg si basa su considerazioni energetiche e suggerisce l'esistenza di livelli energetici discreti. Ogni transizione tra due livelli corrisponde all'assorbimento (o emissione) di una radiazione elettromagnetica con frequenza ben definita.

Il lavoro di Rydberg permise di prevedere lo spettro di assorbimento dell'atomo di idrogeno, ma non ne spiegava il motivo. La spiegazione teorica arrivò successivamente con il modello atomico di Bohr e, più in generale, con la meccanica quantistica, che introdusse il concetto di quantizzazione dell'energia negli stati atomici.

## 4.2 Teoria della meccanica quantistica

In fisica teorica sono state sviluppate due principali formulazioni della teoria quantistica: una **non relativistica**, sufficiente per descrivere il comportamento degli atomi e la struttura della materia, e una **relativistica**, necessaria per trattare particelle che si muovono alla velocità della luce o interagiscono ad alte energie [landau1975quantistica'rel].

La teoria quantistica relativistica è nota come **elettrodinamica quantistica** (QED, *Quantum Electrodynamics*). Essa descrive con grande precisione il comportamento dei fotoni, le particelle mediatrici del campo elettromagnetico, e le loro interazioni con le particelle cariche, come gli elettroni.

Una delle previsioni fondamentali della QED è l'esistenza delle **antiparticelle**, entità con caratteristiche opposte rispetto alla materia ordinaria. Un esempio è il **positrone**, antiparticella dell'elettrone, che possiede la stessa massa ma carica elettrica opposta.

La meccanica quantistica non relativistica si basa sui risultati ottenuti da:

- Max Planck, con l'ipotesi della quantizzazione dell'energia per spiegare la radiazione del corpo nero;
- Albert Einstein, con l'interpretazione quantistica dell'effetto fotoelettrico;
- Louis de Broglie, con la proposta della dualità onda-corpuscolo per la materia.

Questi contributi hanno posto le basi per lo sviluppo della meccanica quantistica, una teoria che descrive il comportamento delle particelle microscopiche in termini probabilistici, introducendo concetti come la funzione d'onda, il principio di indeterminazione e la quantizzazione degli stati energetici [dirac1930principles, messiah1961quantum, wichmann1971quantistica, feynman1965vol3].

### 4.2.1 Quantizzazione della materia

L'ipotesi di partenza della meccanica quantistica è la natura quantizzata della materia, secondo cui le grandezze fisiche a livello microscopico non variano in modo continuo, ma assumono solo valori discreti, multipli interi di una quantità fondamentale. Questo principio è compatibile con i risultati teorici di Einstein e Planck e consente di spiegare fenomeni come lo spettro di assorbimento a righe degli atomi.

Gli elettroni all'interno di un atomo possiedono una certa energia, determinata dal livello energetico in cui si trovano. Quando un fotone incide sull'atomo, può essere assorbito da un elettrone solo se la sua energia

è maggiore o uguale alla differenza tra due livelli energetici ammissibili. L'energia del fotone è data dalla relazione:

$$E = h\nu$$

dove  $E$  è l'energia del fotone,  $\nu$  è la sua frequenza, e  $h$  è la costante di Planck. Da questa relazione si deduce che l'energia della radiazione dipende esclusivamente dalla frequenza, e non dall'intensità.

Se il fotone viene assorbito, l'elettrone si eccita e salta a un livello energetico superiore. Successivamente, l'elettrone tende a tornare al livello originario, emettendo un fotone con la stessa energia di quello assorbito. Poiché gli elettroni possono occupare solo livelli energetici quantizzati e stabili, non collassano sul nucleo, garantendo la stabilità dell'atomo.

## 4.2.2 Dualismo onda-particella

L'ipotesi di Louis de Broglie, formulata nel 1924, ha fornito una spiegazione teorica al comportamento osservato nell'esperimento della doppia fenditura. Secondo questa ipotesi, a ogni particella materiale, come l'elettrone, è associata un'onda, descritta da una funzione d'onda  $\Psi(\vec{r}, t)$ , che racchiude le informazioni sullo stato quantico della particella.

Poiché la particella manifesta anche una natura ondulatoria, le si può associare un'energia secondo la relazione di Planck:

$$E = h\nu$$

dove  $E$  è l'energia,  $\nu$  è la frequenza dell'onda associata, e  $h$  è la costante di Planck. La frequenza è legata alla pulsazione  $\omega$  dalla relazione:

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi}$$

Sostituendo nella formula dell'energia, si ottiene:

$$E = \frac{h}{2\pi}\omega = \hbar\omega$$

Si definisce  $h$  tagliato,  $\hbar$ , la costante di Planck normalizzata o ridotta di  $2\pi$ :

$$E = \hbar\omega$$

Alla particella è anche associata una quantità di moto  $p$ . Per una particella relativistica, si ha:

$$E = mc^2 \quad \text{e} \quad p = \frac{E}{c}$$

Per l'ipotesi di de Broglie  $E = \hbar\omega$ , la quantità di moto dipende della pulsazione:

$$p = \hbar \frac{\omega}{c}$$

Si definisce numero d'onda  $k$  come:

$$k = \frac{\omega}{c}$$

Con questa definizione, è possibile scrivere la quantità di moto come:

$$p = \hbar k$$

Ragionando in termini di frequenza  $\nu$ , si ha:

$$p = \frac{h\nu}{c}$$

Infine, ricordando che  $\lambda = \frac{c}{\nu}$ , si può scrivere:

$$p = \frac{h}{\lambda}$$

Queste relazioni mostrano come le proprietà dinamiche di una particella, come energia e quantità di moto, siano legate a grandezze tipiche delle onde, ovvero frequenza e lunghezza d'onda, confermando il dualismo onda-corpuscolo alla base della meccanica quantistica.

### 4.2.3 Funzione d'onda associata alla particella

Si consideri una particella libera in moto lungo l'asse  $x$ . In base all'ipotesi di de Broglie, a tale particella può essere associata una funzione d'onda  $\Psi(x, t)$ , che ne descrive lo stato quantico. Nel caso più semplice, la funzione d'onda assume la forma di un'onda piana, espressa come esponenziale complesso:

$$\Psi(x, t) = \exp(j(kx - \omega t))$$

Una qualsiasi forma d'onda può essere ottenuta come sovrapposizione di infinite onde piane.

I parametri  $k$  (numero d'onda) e  $\omega$  (pulsazione) possono essere espressi in funzione delle grandezze fisiche della particella:

$$k = \frac{p}{\hbar} \quad \text{e} \quad \omega = \frac{E}{\hbar}$$

Sostituendo nella funzione d'onda si ottiene:

$$\Psi(x, t) = \exp\left(\frac{j}{\hbar}(px - Et)\right)$$

Nel caso tridimensionale, la funzione d'onda assume la forma:

$$\Psi(\vec{r}, t) = \exp\left(\frac{j}{\hbar}(\vec{p} \cdot \vec{r} - Et)\right)$$

Secondo l'interpretazione di Born, il modulo quadro della funzione d'onda associata alla particella rappresenta la densità di probabilità di trovare la particella nella posizione  $\vec{r}$  al tempo  $t$ :

$$P(\vec{r}, t) = |\Psi(\vec{r}, t)|^2$$

Nel caso dell'onda piana, la probabilità risulta uniforme nello spazio. Tuttavia, poiché tale funzione si estende all'infinito, non è normalizzabile e non rappresenta una situazione fisica realistica. Per descrivere particelle localizzate, si utilizzano combinazioni di onde piane, dette *pacchetti d'onda*.

In questo contesto, il concetto classico di orbita, inteso come traiettoria deterministica, non è più applicabile. La meccanica quantistica descrive la posizione della particella in termini probabilistici. Si definisce **orbitale** la regione dello spazio in cui è massima la probabilità di trovare l'elettrone ed è data da  $|\Psi(\vec{r}, t)|^2$ .

### 4.3 Principio di indeterminazione di Heisenberg

Il principio di indeterminazione di Heisenberg è coerente con l'interpretazione probabilistica della meccanica quantistica proposta da Born. Secondo questo principio, non è possibile conoscere con precisione e simultaneamente la posizione e la quantità di moto di una particella. Indicando con  $\Delta x$  l'incertezza sulla posizione e con  $\Delta p$  quella sulla quantità di moto, si ha:

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

Questo significa che, se la posizione viene determinata con estrema precisione ( $\Delta x \rightarrow 0$ ), l'incertezza sulla quantità di moto deve aumentare ( $\Delta p \rightarrow \infty$ ) per mantenere valida la disuguaglianza. Analogamente, maggiore è la precisione sulla misura della quantità di moto meno precisa è la conoscenza della posizione, ovvero  $\Delta p \rightarrow 0$  allora  $\Delta x \rightarrow \infty$ .

Il principio può essere esteso anche alla coppia energia-tempo, come:

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$$

In questo contesto,  $\Delta t$  rappresenta l'intervallo di tempo durante il quale l'energia del sistema è definita. Questo significa che una misura precisa dell'energia ( $\Delta E \rightarrow 0$ ) richiede un intervallo di tempo  $\Delta t$  sufficientemente lungo (tendente a infinito), mentre una misura molto rapida ( $\Delta t$  piccolo) comporta una maggiore incertezza sull'energia ( $\Delta E$  grande).



Questo principio rappresenta un limite fondamentale alla conoscenza dello stato di una particella e riflette la natura intrinsecamente probabilistica della meccanica quantistica.

L'indeterminazione può essere interpretata come una conseguenza del processo di misura. Per determinare la posizione di una particella, ad esempio un elettrone, è necessario interagire con essa, ad esempio mediante fotoni. Questa interazione modifica inevitabilmente lo stato della particella. Nel mondo macroscopico, tale effetto è trascurabile, poiché l'energia dei fotoni è molto inferiore rispetto a quella degli oggetti con cui interagiscono, e quindi non ne altera significativamente lo stato.

## 4.4 Equazione di Schrödinger

La meccanica ondulatoria di Schrödinger è una teoria quantistica non relativistica, valida per particelle che si muovono a velocità molto inferiori a quella della luce  $c$ . In questa descrizione si trascurano fenomeni come la creazione e l'annichilazione di particelle, poiché le energie coinvolte in tali processi sono troppo elevate per essere trattate nel contesto non relativistico della meccanica ondulatoria. Si osservi che il fotone è l'unica particella che può essere creata e distrutta con semplicità, tramite i fenomeni di emissione e assorbimento. Questi fenomeni sono descritti dalla meccanica ondulatoria.

La teoria si applica principalmente agli stati stazionari delle particelle e rappresenta la base della meccanica quantistica non relativistica. Da essa sono state sviluppate estensioni relativistiche, come l'equazione di Klein-Gordon e quella di Dirac, quest'ultima capace di prevedere l'esistenza del positrone [dirac1930principles, landau1975quantistica'el].

La funzione d'onda associata a una particella libera può essere espressa come:

$$\Psi(\vec{r}, t) = \exp\left(\frac{j}{\hbar}(\vec{p} \cdot \vec{r} - Et)\right)$$

La funzione d'onda deve soddisfare un'equazione differenziale che descriva la sua evoluzione nel tempo. Per l'ipotesi di Schrödinger, la funzione d'onda contiene tutte le informazioni necessarie a definire il moto della particella, per questo motivo l'equazione che permette di ricavare la funzione d'onda deve essere un'equazione differenziale, contenente la sua derivata temporale al primo ordine. In questo modo è possibile ricavare la funzione d'onda in ogni istante temporale, noto l'istante iniziale.

Inoltre, la teoria di Schrödinger non considera gli effetti relativistici. Un primo tentativo di includere la relatività fu formulato da Klein-Gordon che, appunto, considerarono l'equazione con una derivata temporale al secondo ordine.

Dirac, infine, scrisse un'equazione relativistica corretta da cui fu possibile prevedere l'esistenza del positrone [dirac1930principles].

Per ricavare l'equazione di Schrödinger, si applica il gradiente alla funzione d'onda piana:

$$\vec{\nabla} \Psi(\vec{r}, t) = \frac{\partial \Psi}{\partial \vec{r}} = \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \exp\left(\frac{j}{\hbar}(\vec{p} \cdot \vec{r} - Et)\right) = \frac{j}{\hbar} \vec{p} \exp\left(\frac{j}{\hbar}(\vec{p} \cdot \vec{r} - Et)\right)$$

Il gradiente può essere riscritto come:

$$\vec{\nabla} \Psi(\vec{r}, t) = \frac{j}{\hbar} \vec{p} \Psi(\vec{r}, t)$$

Per valutare il laplaciano della funzione d'onda, si applica la divergenza al gradiente di  $\Psi$ :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \Psi(\vec{r}, t) = \nabla^2 \Psi(\vec{r}, t) = \frac{j}{\hbar} \left( \vec{\nabla} \cdot (\vec{p} \Psi(\vec{r}, t)) \right) =$$

Per le proprietà dell'operatore divergenza è possibile scrivere:

$$= \frac{j}{\hbar} \left( \Psi(\vec{r}, t) \vec{\nabla} \cdot \vec{p} + \vec{p} \cdot \vec{\nabla} \Psi(\vec{r}, t) \right) =$$

Poiché il vettore quantità di moto per una particella libera è costante, la sua divergenza è nulla ( $\vec{\nabla} \cdot \vec{p} = 0$ ), per cui risulta:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \Psi(\vec{r}, t) = \frac{j}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{\nabla} \Psi(\vec{r}, t)$$

Il laplaciano della funzione d'onda si scrive come:

$$\nabla^2 \Psi = \frac{j}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{\nabla} \Psi(\vec{r}, t) = \frac{j}{\hbar} \vec{p} \cdot \left( \frac{j}{\hbar} \vec{p} \Psi(\vec{r}, t) \right) = \left( \frac{j}{\hbar} \right)^2 \Psi(\vec{r}, t) \vec{p} \cdot \vec{p}$$

Per le proprietà del prodotto scalare e delle potenze dell'unità immaginaria, si scrive:

$$\nabla^2 \Psi = - \left( \frac{p}{\hbar} \right)^2 \Psi$$

La derivata temporale di  $\Psi$  è, invece:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \exp \left( \frac{j}{\hbar} (\vec{p} \cdot \vec{r} - Et) \right) = -\frac{j}{\hbar} E \exp \left( \frac{j}{\hbar} (\vec{p} \cdot \vec{r} - Et) \right)$$

Ovvero:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{j}{\hbar} E \Psi$$

L'equazione di Schrödinger è ottenuta confrontando le due quantità ottenute:

$$\begin{cases} \nabla^2 \Psi = - \left( \frac{p}{\hbar} \right)^2 \Psi \\ \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{j}{\hbar} E \Psi \end{cases}$$

Si isola  $\Psi$  per entrambe le equazione:

$$\begin{cases} \Psi = -\frac{\hbar^2}{p^2} \nabla^2 \Psi \\ \Psi = -\frac{\hbar}{jE} \frac{\partial \Psi}{\partial t} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Psi = -\frac{\hbar^2}{p^2} \nabla^2 \Psi \\ \Psi = j \frac{\hbar}{E} \frac{\partial \Psi}{\partial t} \end{cases}$$

Uguagliando i secondi membri delle due equazioni si ottiene:

$$-\frac{\hbar^2}{p^2} \nabla^2 \Psi = j \frac{\hbar}{E} \frac{\partial \Psi}{\partial t} \quad (4.1)$$

Per una particella libera, l'energia totale o hamiltoniana coincide con l'energia cinetica:

$$H = E = T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m}$$

Dall'ultima uguaglianza si isola il termine  $p^2$ :

$$p^2 = 2mE$$

Sostituendo questo risultato nell'equazione differenziale ottenuta, si ha;

$$-\frac{\hbar^2}{2mE} \nabla^2 \Psi = j \frac{\hbar}{E} \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

Si semplifica  $\hbar$  ed  $E$ , ottenendo l'equazione:

$$\frac{\hbar}{2m} \nabla^2 \Psi + j \frac{\partial \Psi}{\partial t} = 0$$

Questa relazione rappresenta la forma standard dell'equazione di Schrödinger per una particella libera.

Nel caso in cui la particella si trovi in un campo di potenziale, dipendente dalla posizione e dal tempo  $U(\vec{r}, t)$ , l'equazione si modifica includendo il termine di energia potenziale al secondo membro:

$$j\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(\vec{r}, t) \right) \Psi$$

Questa equazione descrive l'evoluzione temporale della funzione d'onda  $\Psi(\vec{r}, t)$ , che contiene tutte le informazioni sullo stato quantico della particella. La sua soluzione consente di determinare la probabilità di trovare la particella in una certa posizione e in un certo istante.

## 4.5 Operatori in meccanica quantistica

In meccanica quantistica, a ogni grandezza fisica osservabile è associato un operatore matematico  $\hat{f}$  che agisce sullo spazio delle funzioni d'onda:

$$\hat{f} : \Psi \rightarrow \varphi$$

L'operatore  $\hat{f}$  è un'applicazione lineare che trasforma una funzione d'onda  $\Psi$  in un'altra funzione d'onda  $\varphi$ , ovvero porta una particella da uno stato quantico iniziale a uno finale. I valori misurabili della grandezza fisica corrispondono agli autovalori dell'operatore  $\hat{f}$ , ottenuti risolvendo l'equazione agli autovalori:

$$\hat{f}\Psi = f\Psi$$

In questo contesto, un'osservabile è una grandezza fisica misurabile, rappresentata da un operatore lineare, in genere complesso, che agisce sullo spazio degli stati quantici.

Essendo  $\hat{f}$  un operatore lineare, vale la proprietà:

$$\hat{f}(c_1\Psi_1 + c_2\Psi_2) = c_1\hat{f}(\Psi_1) + c_2\hat{f}(\Psi_2)$$

In meccanica quantistica, la quantità di moto (o momento lineare) è associata all'operatore:

$$\hat{\vec{p}} = -j\hbar\vec{\nabla}$$

che, in coordinate cartesiane, si scrive:

$$\hat{\vec{p}} = -j\hbar \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

L'energia di una particella libera è descritta dall'operatore hamiltoniano:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{\vec{p}} \cdot \hat{\vec{p}} = \frac{1}{2m}(-j\hbar\vec{\nabla}) \cdot (-j\hbar\vec{\nabla}) = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2$$

che, in coordinate cartesiane, si scrive:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$$

Se la particella è immersa in un campo di potenziale  $U(\vec{r}, t)$ , l'operatore hamiltoniano, rappresentante l'energia totale della particella, si generalizza come:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + U(\vec{r}, t)$$

Il momento angolare è associato all'operatore:

$$\vec{\hat{L}} = \vec{r} \times \hat{\vec{p}} = \vec{r} \times (-j\hbar\vec{\nabla}) = -j\hbar\vec{r} \times \vec{\nabla}$$

Tabella 4.1: *Operatori Fondamentali in Meccanica Quantistica*

Osservabile	Simbolo Classico	Operatore Quantistico ( $\hat{f}$ )
Posizione	$\vec{r}$	$\hat{\vec{r}} = \vec{r}$
Quantità di Moto	$\vec{p}$	$\hat{\vec{p}} = -j\hbar\vec{\nabla}$
Energia Cinetica	$T = \frac{p^2}{2m}$	$\hat{T} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2$
Energia Potenziale	$U(\vec{r}, t)$	$\hat{U} = U(\vec{r}, t)$
Energia Totale (Hamiltoniana)	$H = T + U$	$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + U(\vec{r}, t)$
Momento Angolare	$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$	$\vec{\hat{L}} = -j\hbar(\vec{r} \times \vec{\nabla})$

Utilizzando la definizione dell'operatore hamiltoniano, è possibile riscrivere in forma compatta l'equazione di Schrödinger per una particella immersa in un campo potenziale variabile nel tempo e con la posizione:

$$j\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi + U(\vec{r}, t) \Psi$$

Poiché  $\hat{H} = -\hbar^2/2m \nabla^2 + U(\vec{r}, t)$ , si può scrivere:

$$\left( U(\vec{r}, t) - \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \right) \Psi = j\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

Si ottiene così la forma operativa dell'equazione di Schrödinger:

$$\hat{H} \Psi = j\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

oppure, portando tutti i termini da un lato:

$$\hat{H} \Psi - j\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = 0$$

## 4.6 Equazione di Schrödinger per stati stazionari

La funzione d'onda  $\Psi(\vec{r}, t)$ , espressa come un'onda piana, può essere scritta come:

$$\Psi(\vec{r}, t) = \exp\left(\frac{j}{\hbar}(\vec{p} \cdot \vec{r} - Et)\right) = \exp\left(\frac{j}{\hbar}\vec{p} \cdot \vec{r}\right) \exp\left(-\frac{j}{\hbar}Et\right)$$

Si definisce  $\phi(\vec{r})$  come la parte della funzione d'onda dipendente dalla posizione:

$$\phi(\vec{r}) = \exp\left(\frac{j}{\hbar}\vec{p} \cdot \vec{r}\right)$$

L'equazione di Schrödinger si scrive quindi come:

$$\Psi(\vec{r}, t) = \phi(\vec{r}) \exp\left(-\frac{j}{\hbar} Et\right)$$

Se l'energia del sistema è costante, l'hamiltoniana non dipende dal tempo. Si applica questo operatore alla funzione d'onda:

$$\hat{H}\Psi = \hat{H}\left(\phi(\vec{r}) \exp\left(-\frac{j}{\hbar} Et\right)\right)$$

Per definizione dell'operatore hamiltoniano, si ha:

$$\hat{H}\Psi = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\vec{r})\right)\left(\phi(\vec{r}) \exp\left(-\frac{j}{\hbar} Et\right)\right)$$

Poiché  $V(\vec{r})$  è un operatore di moltiplicazione e l'esponenziale temporale non dipende dalla posizione (dunque, può essere portato all'esterno del Laplaciano) si ottiene:

$$\hat{H}\Psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \exp\left(-\frac{j}{\hbar} Et\right) \nabla^2 \phi(\vec{r}) + V(\vec{r}) \phi(\vec{r}) \exp\left(-\frac{j}{\hbar} Et\right)$$

Raccogliendo opportunamente, si ha:

$$\hat{H}\Psi = \exp\left(-\frac{j}{\hbar} Et\right) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{r})\right) \phi(\vec{r})$$

Per definizione dell'operatore hamiltoniano, si ricava:

$$\hat{H}\Psi = \exp\left(-\frac{j}{\hbar} Et\right) \hat{H}\phi(\vec{r})$$

Si calcola ora la derivata temporale di  $\Psi$ :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\phi(\vec{r}) \exp\left(-\frac{j}{\hbar} Et\right)\right)$$

Poiché  $\phi(\vec{r})$  non dipende dal tempo, ma solamente dalla posizione, può essere portata all'esterno del simbolo di derivata:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \phi(\vec{r}) \frac{\partial}{\partial t} \exp\left(-\frac{j}{\hbar} Et\right) = -\frac{j}{\hbar} E \phi(\vec{r}) \exp\left(-\frac{j}{\hbar} Et\right)$$

Si considera l'equazione di Schrödinger in termini di hamiltoniana,  $\hat{H}\Psi - j\hbar\partial\Psi/\partial t = 0$ . Si è visto che:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{j}{\hbar} E \phi(\vec{r}) \exp\left(-\frac{j}{\hbar} Et\right) \\ \hat{H}\Psi = \exp\left(-\frac{j}{\hbar} Et\right) \hat{H}\phi(\vec{r}) \end{cases}$$

Sostituendo:

$$\exp\left(-\frac{j}{\hbar}Et\right)\hat{H}\phi(\vec{r}) - j\hbar\left(-\frac{j}{\hbar}E\phi(\vec{r})\exp\left(-\frac{j}{\hbar}Et\right)\right) = 0$$

Svolgendo i prodotti, si ottiene:

$$\exp\left(-\frac{j}{\hbar}Et\right)\hat{H}\phi(\vec{r}) - E\phi(\vec{r})\exp\left(-\frac{j}{\hbar}Et\right) = 0$$

Semplificando il termine esponenziale, si ottiene:

$$\hat{H}\phi(\vec{r}) = E\phi(\vec{r})$$

Si ottiene un'equazioni agli autovettori e autovalori; infatti, è possibile scrivere:

$$(\hat{H} - E)\phi(\vec{r}) = 0$$

Dove  $E$  è l'energia totale del sistema supposta costante. L'energia  $E$  rappresenta gli autovalori dell'operatore hamiltoniano  $\hat{H}$ . Questo risultato è coerente con gli esperimenti, poiché gli autovalori sono, in genere, un'infinità numerabile e, dunque, discreti.

La meccanica ondulatoria di Schrödinger prevede la quantizzazione dell'energia degli orbitali atomici. La soluzione dell'equazione agli autovalori permette di ottenere i livelli energetici del sistema e le autofunzioni  $\phi(\vec{r})$ , il cui modulo quadro rappresenta la probabilità che la particella del sistema si trovi in quel livello energetico.

Sia  $V(\vec{r})$  l'energia potenziale a cui la particella è soggetta, ad esempio un elettrone attratto dal nucleo. L'operatore hamiltoniano si scrive:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\vec{r})$$

Con  $\hat{E}_c$  operatore energia cinetica:

$$\hat{E}_c = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2$$

L'operatore hamiltoniano è dato da:

$$\hat{H} = \hat{E}_c + V(\vec{r}) = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\vec{r})$$

Nel caso dell'elettrone attratto dal nucleo, il potenziale è di tipo coulombiano:

$$V(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r}$$

Dove  $Z$  è il numero atomico, ovvero il numero di protoni nel nucleo.

L'equazione agli autovettori dell'hamiltoniano si scrive come:

$$\hat{H}\phi(\vec{r}) - E\phi(\vec{r}) = 0 \Leftrightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\phi + V(\vec{r})\phi = E\phi$$

Moltiplicando per  $-1$ , si ha:

$$\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\phi - V(\vec{r})\phi + E\phi = 0$$

Raccogliendo, si ha:

$$\left(\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + (E - V(\vec{r}))\right)\phi = 0$$

In generale, è possibile scrivere un'equazione agli autovalori per ogni operatore. I corrispondenti autovalori sono i valori che quell'operatore può assumere.

Ad esempio, gli autovalori del momento angolare sono i possibili valori del momento angolare ottenuti risolvendo l'equazione agli autovalori:

$$\hat{L}\phi = L\phi$$

In presenza di un campo magnetico, l'energia totale dell'elettrone o particella è data da:

$$E = E_c + V(\vec{r})$$

Dove il potenziale è dato da:

$$V(\vec{r}) = \vec{\mu} \cdot \vec{B}$$

Il momento magnetico è legato al momento angolare dal fattore giromagnetico:

$$\hat{\vec{\mu}} = -\gamma\hat{\vec{L}}$$

Dunque, il potenziale può essere espresso come:

$$V(\vec{r}) = -\gamma\hat{\vec{L}} \cdot \vec{B}$$

In definitiva, l'operatore hamiltoniano si scrive:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - \gamma\hat{\vec{L}} \cdot \vec{B}$$



### 4.6.1 Buco di potenziale

Secondo la meccanica classica, l'energia cinetica di una particella è:

$$T = \frac{1}{2}mv^2$$

Mentre l'energia totale è data da:

$$E = T + V$$

Con  $V$  energia potenziale. Dalla relazione per l'energia totale è possibile valutare l'energia cinetica in funzione di quella totale e potenziale:

$$T = E - V$$

Nella teoria classica, la particella è in moto se l'energia cinetica è positiva, ovvero:

$$T > 0 \Leftrightarrow E > V$$

Pertanto, in ambito classico, il moto della particella può avvenire solo nelle regioni in cui  $E > V$ .

Si considera ora una buca di potenziale unidimensionale definita da:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x < a \\ \infty & x \leq 0 \text{ oppure } x \geq a \end{cases}$$

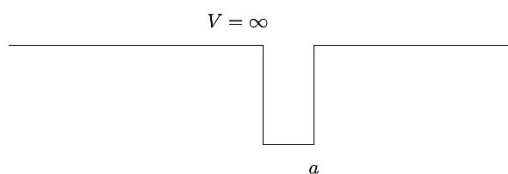


Figura 4.6: *Buca di potenziale*

La particella può muoversi solo all'interno della regione di spazio  $0 < x < a$ , dunque, la funzione d'onda  $\phi(\vec{r})$  è nulla all'esterno della buca di potenziale, in cui  $V \rightarrow \infty$ .

L'equazione di Schrödinger ha soluzioni non nulle solo dove il potenziale è finito. In termini di hamiltoniana:

$$\hat{H}\phi(x) = E\phi(x)$$

Poiché la particella è libera all'interno della buca, l'operatore hamiltoniano nel caso generale è:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2$$

Il moto avviene solamente lungo l'asse  $x$ , per cui l'operatore è:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}$$

L'equazione di Schrödinger per la buca di potenziale è, quindi:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\phi}{dx^2} = E\phi \Leftrightarrow \frac{d^2\phi}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\phi = 0$$

L'equazione ottenuta coincide con l'oscillatore armonico, la cui soluzione è del tipo:

$$\phi(x) = A \cos\left(\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}x\right) + B \sin\left(\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}x\right)$$

Dove  $A$  e  $C$  sono due costanti dipendenti dalle condizioni al contorno, ottenute considerando la funzione d'onda continua nei punti  $x = a$  e  $x = b$ :

$$\begin{cases} \phi(a) = 0 \\ \phi(0) = 0 \end{cases}$$

Si applica la prima condizione  $\phi(a) = 0$ :

$$\phi(a) = A \cos\left(\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}a\right) + B \sin\left(\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}a\right) = 0$$

Da cui risulta:

$$\phi(0) = A = 0$$

Si applica la seconda condizione al contorno:

$$\phi(a) = B \sin\left(\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}a\right) = 0$$

Le soluzioni dell'equazione:

$$\sin\left(\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}a\right) = 0$$

sono un'infinità numerabile:

$$\sqrt{\frac{2mE_n}{\hbar^2}}a = n\pi, \quad n \in \mathbb{N}$$

Si ricava  $E_n$ :

$$\frac{a}{\hbar} \sqrt{2mE_n} = n\pi \Leftrightarrow \sqrt{2mE_n} = \frac{\hbar^2}{a^2} n\pi, \quad n \in \mathbb{N}$$

Si eleva al quadrato e si divide ambo i membro per  $2m$ :

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2ma^2} n^2 \pi^2, \quad n \in \mathbb{N}$$

Gli  $E_n$  sono gli autovalori possibili dell'operatore hamiltoniano e, di conseguenza, i possibili livelli energetici che può assumere la particella in una buca di potenziale monodimensionale. Come si nota, i livelli energetici sono quantizzati, in accordo con le previsioni sperimentali.

Si considera, ora, il caso tridimensionale, ovvero la particella si muove in una scatola di potenziale. La funzione potenziale è data da:

$$V(x, y, z) = \begin{cases} 0 & 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \quad 0 < z < c \\ \infty & \text{altrove} \end{cases}$$

L'equazione di Schrödinger fornisce valori non nulli solamente nella regione di spazio in cui il potenziale è finito  $[0; a] \times [0; b] \times [0; c]$ . In termini di hamiltoniano, costante nel tempo, si ha:

$$\hat{H}\phi(\vec{r}) - E\phi(\vec{r}) = 0$$

Esplicitando l'operatore hamiltoniano, si ottiene:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \phi(\vec{r}) - E\phi(\vec{r}) = 0$$

Ricavando il laplaciano di  $\phi$ :

$$\nabla^2 \phi + \frac{2m}{\hbar^2} E\phi = 0$$

In coordinate cartesiane, l'equazione è data:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E\phi = 0$$

Si applica il metodo delle variabile separabili, secondo cui la soluzione è del tipo:

$$\phi(\vec{r}) = \alpha(x)\beta(y)\gamma(z)$$

Si sostituisce questa espressione nell'equazione di Schrödinger in coordinate cartesiane:

$$\beta\gamma\frac{\partial^2\alpha}{\partial x^2} + \alpha\gamma\frac{\partial^2\beta}{\partial y^2} + \alpha\beta\frac{\partial^2\gamma}{\partial z^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\alpha\beta\gamma = 0$$

Si divide per  $\phi(\vec{r}) = \alpha(x)\beta(y)\gamma(z)$ :

$$\frac{1}{\alpha}\frac{\partial^2\alpha}{\partial x^2} + \frac{1}{\beta}\frac{\partial^2\beta}{\partial y^2} + \frac{1}{\gamma}\frac{\partial^2\gamma}{\partial z^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} = 0$$

I tre termini dipendono solamente da una variabile spaziale, dunque, è possibile scrivere tre equazioni diverse:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2\alpha}{\partial x^2} + k_x^2\alpha = 0 \\ \frac{\partial^2\beta}{\partial y^2} + k_y^2\beta = 0 \\ \frac{\partial^2\gamma}{\partial z^2} + k_z^2\gamma = 0 \end{cases}$$

La soluzione delle equazioni è del tipo:

$$f(q) = c \exp(-jk_q q), \quad q = x, y, z$$

Dunque, la integrale generale è del tipo:

$$\phi(x, y, z) = (A_x \cos(k_x x) + B_x \sin(k_x x)) \cdot (A_y \cos(k_y y) + B_y \sin(k_y y)) \cdot (A_z \cos(k_z z) + B_z \sin(k_z z))$$

Dove:

$$k_x = \sqrt{2m\frac{E_x}{\hbar^2}}, \quad k_y = \sqrt{2m\frac{E_y}{\hbar^2}}, \quad k_z = \sqrt{2m\frac{E_z}{\hbar^2}}$$

mentre  $A_i$  e  $B_i$  sono costanti determinate dalle condizioni al contorno.

Le condizioni da imporre riguardano la continuità della funzione d'onda ai bordi della buca di potenziale:

$$\begin{cases} \phi(0, y, z) = 0 \\ \phi(a, y, z) = 0 \\ \phi(x, 0, z) = 0 \\ \phi(x, b, z) = 0 \\ \phi(x, y, 0) = 0 \\ \phi(x, y, c) = 0 \end{cases}$$

Le condizioni al contorno portano a un'equazione del tipo:

$$\sin(ak_x) = 0$$

La cui soluzioni sono:

$$k_x = n_x \frac{\pi}{a}, \quad n_x \in \mathbb{N}$$

Da cui si ottengono gli autovalori lungo  $x$  dell'equazione di Schrödinger:

$$E_x = k_x^2 \frac{\hbar^2}{2m} = n_x^2 \frac{\pi^2}{a^2} \frac{\hbar^2}{2m}, \quad n_x \in \mathbb{N}$$

Analogo risultato lo si ottiene per  $E_y$ :

$$E_y = n_y^2 \frac{\pi^2}{b^2} \frac{\hbar^2}{2m}, \quad n_y \in \mathbb{N}$$

ed  $E_z$ :

$$E_z = n_z^2 \frac{\pi^2}{c^2} \frac{\hbar^2}{2m}, \quad n_z \in \mathbb{N}$$

La somma dei tre autovalori deve essere uguale all'energia totale:

$$E_n = E_x + E_y + E_z$$

Sostituendo i valori ottenuti si ottengono gli autovalori dell'operatore hamiltoniano per la geometria considerata:

$$E_n = \left( \frac{n_x^2}{a^2} + \frac{n_y^2}{b^2} + \frac{n_z^2}{c^2} \right) \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m}, \quad n_x, n_y, n_z \in \mathbb{N}$$

Allo stesso modo è possibile ottenere i livelli energetici per un atomo qualsiasi, come quello di idrogeno. In questo caso, il potenziale in cui è immerso l'elettrone è di tipo coulombiano:

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r}$$

La risoluzione dell'equazione di Schrödinger in coordinate sferiche fornisce i livelli energetici dell'atomo.

Le previsioni teoriche, ovvero livelli energetici ricavati dalla risoluzione dell'equazione di Schrödinger, coincidono con l'energia dei livelli energetici dell'atomo. Ne discende che, mediante l'equazione di Schrödinger è possibile ottenere una previsione teorica anche per gli spettri di assorbimento. Infatti, nota l'energia degli orbitali, è nota anche l'energia,  $E = h\nu$ , che il fotone deve possedere affinché sia assorbito dall'elettrone. L'energia del fotone deve essere maggiore della differenza dell'energia dei due livelli energetici coinvolti.

### 4.6.2 Gradino di potenziale

In meccanica classica il moto di una particella non può avvenire nella regione di spazio in cui la sua energia  $E$  è minore del potenziale  $V$  che insiste in quella regione di spazio ( $E < V$ ). In altre parole, se la particella non ha energia sufficiente, non riesce a superare il gradino di potenziale.

Si consideri una particella elementare, come un elettrone, con energia  $E$ , lanciata verso un gradino di potenziale  $V_0$ , definita come:

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

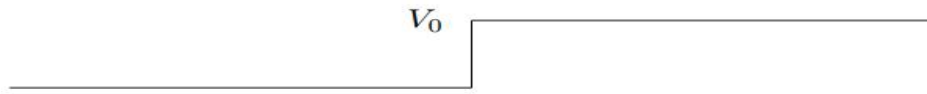


Figura 4.7: *Gradino di potenziale*

È possibile scrivere l'equazione di Schrödinger per le due regioni dello spazio, in base al potenziale  $V(x)$ . Essendo il moto monodimensionale, risulta:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} \phi = 0 & x < 0 \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V_0) \phi = 0 & x > 0 \end{cases}$$

La prima equazione presenta una soluzione del tipo:

$$\phi(x) = A \exp\left(j \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} x\right) + C \exp\left(-j \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} x\right)$$

All'interfaccia del gradino di potenziale, si genera un'onda riflessa che prosegue in verso retrogrado. Dunque, Nella regione di spazio  $x < 0$  vi sono due onde: una progressiva (o incidente) e una regressiva (o riflessa). Nell'equazione,  $A$  è il coefficiente dell'onda incidente e  $C$  quello della riflessa.

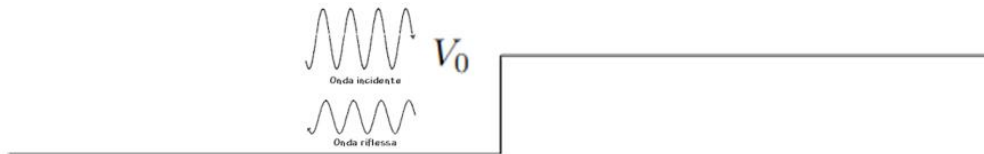


Figura 4.8: *Onda riflessa e trasmessa all'interfaccia*

Nella regione  $x > 0$  supponendo che  $E < V_0$ , l'esponentiale dell'onda deve essere reale e negativo, ovvero:

$$\phi(x) = B \exp\left(-\frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar} x\right)$$

Applicando la condizione di continuità della funzione d'onda all'interfaccia  $x = 0$ , risulta che:

$$\phi(0^-) = \phi(0^+)$$

Ovvero:

$$A + C = B$$

Esiste, dunque, una probabilità non nulla di trovare la particella oltre il gradino di potenziale. Tuttavia, poiché l'onda nella regione di spazio  $x > 0$  presenta un esponenziale reale, la probabilità di trovare la particella elementare oltre il gradino di potenziale decresce rapidamente con la distanza. Nonostante ciò, trovare la particella oltre il gradino di potenziale è un evento possibile, soprattutto in prossimità dell'interfaccia.

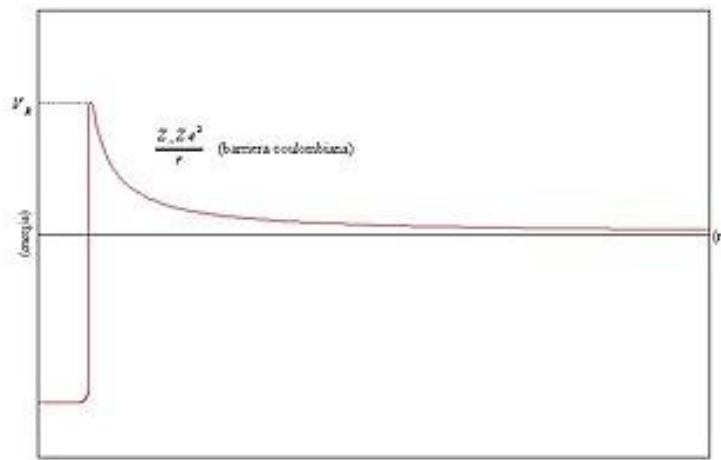


Figura 4.9: Probabilità di rilevare la particella oltre il gradino di potenziale

L'effetto del gradino di potenziale è sfruttato nei dispositivi a semiconduttore.

### 4.6.3 Effetto tunnel

Si suppone che il potenziale sia confinato in una regione dello spazio, ovvero del tipo:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ V_0 & 0 \leq x \leq a \\ 0 & x > a \end{cases}$$

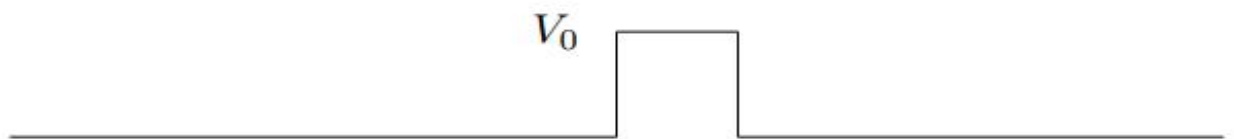


Figura 4.10: Impulso di tensione

Si suppone che la particella provenga da sinistra, ovvero proceda nel verso delle  $x$  crescenti. Nella prima regione ( $x < 0$ ), l'equazione di Schrödinger stazionaria è:

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\phi = 0$$

La cui soluzione prevede due onde: una progressiva e una regressiva a causa dei fenomeni di riflessione:

$$\phi_{x<0}(x) = I \exp\left(j \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} x\right) + R \exp\left(-j \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} x\right)$$

dove  $I$  è l'ampiezza dell'onda incidente e  $R$  quella dell'onda riflessa.

Nella regione intermedia ( $0 < x < a$ ), dove il potenziale è costante e maggiore dell'energia della particella ( $V_0 > E$ ), l'equazione diventa:

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V_0) \phi = 0, \quad 0 < x < a$$

Per la presenza dell'interfaccia successiva, per ottenere la soluzione completa, è necessario prevedere la presenza di due onde: una progressiva e una regressiva:

$$\phi_{0<x<a}(x) = A \exp\left(\frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar} x\right) + B \exp\left(-\frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar} x\right)$$

Dove gli esponenziali sono reali a causa della condizione  $V_0 > E$ .

Nella regione  $x > a$ , invece, si ha un'unica onda poiché non vi sono fenomeni di riflessione. L'equazione stazionaria è la stessa della regione per  $x < 0$ :

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\phi = 0, \quad x > a$$

Dove la soluzione è:

$$\phi_{x>a}(x) = S \exp\left(j \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} x\right)$$

Oltre l'impulso di tensione di ampiezza  $V_0$  maggiore di  $E$  della particella, esiste una probabilità non nulla di trovare la particella. Tale fenomeno è noto come effetto tunnel e rappresenta uno dei risultati più controintuitivi e utilizzati della meccanica quantistica.

L'effetto tunnel ha importanti applicazioni, tra cui il Microscopio a Scansione a Effetto Tunnel (STM) e i diodi tunnel.

## 4.7 Meccanica quantistica con notazione di Dirac

La **meccanica ondulatoria**, sviluppata principalmente da Schrödinger, e la **meccanica matriciale**, introdotta da Heisenberg, sono due formulazioni della meccanica quantistica elaborate nello stesso periodo



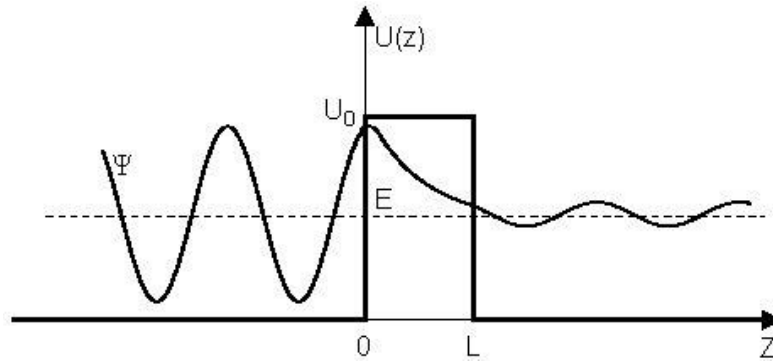


Figura 4.11: *Effetto tunnel*

storico. Dirac ha dimostrato l'equivalenza tra le due teorie attraverso un approccio algebrico basato sugli **spazi di Hilbert**, una generalizzazione dello spazio euclideo.

Ogni sistema microscopico è descritto, in ogni istante, da uno **stato quantico** rappresentato da un vettore nello spazio di Hilbert, indicato con  $|\varphi\rangle$ , dove  $\varphi$  rappresenta lo stato del sistema.

Uno spazio di Hilbert  $H = (\mathbb{H}, \langle \cdot | \cdot \rangle)$  è uno spazio vettoriale **complesso** dotato di un **prodotto interno sesquilineare** e **positivo definito**. Una forma sesquilineare è una funzione  $B : V \times V \rightarrow F$  lineare nel primo argomento e coniugata lineare nel secondo. Essendo uno spazio lineare, vale il **principio di sovrapposizione**. Le principali proprietà dello spazio di Hilbert sono:

- **Prodotto interno:** esiste un prodotto interno  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  tale che, detta  $d$  la distanza indotta dal prodotto interno, lo spazio metrico  $(\mathbb{H}, d)$  è **completo**, ovvero ogni successione di Cauchy converge in  $\mathbb{H}$ .
- **Norma:** si può definire una norma associata al prodotto interno:

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\langle \vec{v} | \vec{v} \rangle}$$

- **Distanza:** la distanza tra due vettori è definita come:

$$d(\vec{u}, \vec{v}) = \sqrt{\langle \vec{u} - \vec{v} | \vec{u} - \vec{v} \rangle}$$

Le grandezze fisiche misurabili in un esperimento sono dette **osservabili** e corrispondono a **operatori hermitiani** (o della meccanica quantistica) che agiscono sullo spazio di Hilbert. Un operatore quantistico, come  $\hat{A}$ , agisce su uno stato  $|\varphi\rangle$  per generare un nuovo stato  $|b\rangle$ :

$$\hat{A}|\varphi\rangle = |b\rangle$$

L'operazione di misura **perturba** lo stato del sistema microscopico. In altre parole, la misura **modifica** lo stato quantico. Questo fenomeno è alla base del **principio di indeterminazione di Heisenberg**, secondo il quale non è possibile conoscere simultaneamente con precisione due grandezze coniugate (come energia e intervallo temporale). Il principio si esprime come:

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$$

Per calcolare l'energia di una particella, si applica l'**operatore hamiltoniano**  $\hat{H}$  allo stato  $|\varphi\rangle$ :

$$\hat{H}|\varphi\rangle = E|\varphi\rangle$$

L'operatore hamiltoniano cambia lo stato del sistema. In questo caso,  $E$  è un **autovalore** dell'operatore  $\hat{H}$ . Il sistema può assumere solo i valori energetici corrispondenti agli autovalori dell'operatore applicato.

Analogamente, per misurare il **momento angolare** si applica l'operatore  $\hat{L}$ :

$$\hat{L}|\varphi\rangle = L|\varphi\rangle$$

Il momento angolare è **quantizzato**, quindi il sistema può assumere solo i valori corrispondenti agli autovalori dell'operatore  $\hat{L}$ .

#### 4.7.1 Autovalori dell'operatore hamiltoniano

Per un elettrone legato a un nucleo atomico, gli autovalori dell'operatore hamiltoniano rappresentano i possibili **livelli energetici** degli orbitali  $s$ ,  $p$ ,  $d$  e  $f$ . Ogni orbitale può contenere al massimo **due elettroni con spin opposto**, secondo il **principio di esclusione di Pauli**, che stabilisce che due fermioni non possono occupare lo stesso stato quantico simultaneamente.

Questi livelli energetici sono discreti e quantizzati, e corrispondono alle soluzioni dell'equazione di Schrödinger per l'atomo. La struttura elettronica degli atomi è quindi determinata dagli autovalori dell'hamiltoniano, che definiscono le energie consentite per ciascun elettrone.

#### 4.7.2 Risultato dell'operatore di misura

In generale, il risultato di una misura deve essere un **autovalore** dell'operatore di misura. Il valore della grandezza fisica in esame, in altre parole, deve essere una soluzione dell'equazione:

$$\hat{A}|a\rangle = a_n|a\rangle$$

Una misura può dare come esito uno qualsiasi degli autovalori  $a_n$  dell'operatore  $\hat{A}$ . L'autovettore associato all'autovalore è detto **autostato**. Se lo stato iniziale del sistema è un autostato dell'operatore, la misura restituirà con certezza l'autovalore corrispondente. In altre parole, se un sistema si trova in un autostato  $|a_n\rangle$  con autovalore  $a_n$ , allora il risultato della misura sarà proprio  $a_n$ .

Se, invece, il sistema si trova in uno stato qualsiasi  $|\varphi\rangle$ , questo può essere espresso come combinazione lineare degli autostati dell'operatore:

$$|\varphi\rangle = \sum_n \varphi_n |a_n\rangle$$

Gli autostati  $|a_n\rangle$  di un operatore di misura  $\hat{A}$  formano una **base ortonormale** dello spazio di Hilbert, quindi ogni stato può essere scritto come loro combinazione lineare. Applicando l'operatore  $\hat{A}$  allo stato  $|\varphi\rangle$ :

$$\hat{A}|\varphi\rangle = \hat{A} \sum_n \varphi_n |a_n\rangle$$

Per linearità dell'operatore sommatoria, è possibile scrivere:

$$\hat{A}|\varphi\rangle = \sum_n \varphi_n \hat{A}|a_n\rangle$$

Dato che  $|a_n\rangle$  è autovettore dell'operatore applicato,  $\hat{A}|a_n\rangle = a_n |a_n\rangle$ , risulta:

$$\hat{A}|\varphi\rangle = \sum_n \varphi_n a_n |a_n\rangle$$

Ovvero, si è espresso lo stato  $\hat{A}|\varphi\rangle$  come combinazione degli autovettori dell'operatore  $\hat{A}$ .

In meccanica quantistica non è possibile prevedere con certezza il risultato della misura, ma è possibile calcolare la **probabilità** che il sistema transiti dallo stato iniziale  $\varphi$  nello stato  $|a_n\rangle$ , attraverso l'operatore di misura  $\hat{A}$ . Questa è data dal modulo quadro del prodotto scalare:

$$|\langle a_n|\varphi\rangle|^2$$

La notazione di Dirac (o bra-ket) distingue tra il vettore di stato nello spazio di Hilbert e il suo coniugato hermitiano:

- Ket: La notazione  $|\varphi\rangle$  è detta ket e rappresenta il vettore di stato del sistema nello spazio di Hilbert ( $\mathbb{H}$ ).
- Bra: La notazione  $\langle\varphi|$  è detta bra e rappresenta il vettore duale o coniugato hermitiano del ket  $|\varphi\rangle$ . Il bra appartiene allo spazio duale di  $\mathbb{H}$  ( $\mathbb{H}^*$ ).

Il prodotto scalare tra i due vettori è il bra-ket (la parola "bra-ket" deriva dalla contrazione delle due notazioni,  $\langle\text{bra}|\text{ket}\rangle$ ):

$$\langle a_n|\varphi\rangle$$

Questo prodotto è un numero complesso che proietta lo stato iniziale  $|\varphi\rangle$  sull'autostato  $|a_n\rangle$ , fornendo l'ampiezza di probabilità del risultato  $a_n$ .

Dirac assunse che il **valor medio** (o **valore di aspettazione**) di una grandezza fisica, associata all'operatore  $\hat{A}$ , per un sistema nello stato  $|\varphi\rangle$ , come:

$$\langle\hat{A}\rangle = \langle\varphi|\hat{A}|\varphi\rangle$$

Ad esempio, l'energia media  $\langle E \rangle$  si ottiene applicando l'operatore hamiltoniano:

$$\langle E \rangle = \langle \varphi | \hat{H} | \varphi \rangle$$

In generale, il vettore  $\varphi$  può essere espresso come combinazione lineare degli autostati dell'operatore di misura  $\hat{A}$ :

$$|\varphi\rangle = \sum_n \varphi_n |a_n\rangle$$

Il valor medio dell'operatore di misura è, dunque:

$$\langle \varphi | \hat{A} | \varphi \rangle = \langle \varphi | \hat{A} \sum_n \varphi_n |a_n\rangle$$

Per la linearità si ha:

$$\langle \varphi | \hat{A} | \varphi \rangle = \langle \varphi | \hat{A} \sum_n \varphi_n |a_n\rangle = \langle \varphi | \sum_n \varphi_n \hat{A} |a_n\rangle$$

Anche il vettore bra può essere espresso mediante gli autovettori dell'operatore  $\hat{A}$ , tuttavia, si rende necessario l'uso del complesso coniugato, in modo che il prodotto scalare sia reale:

$$\langle \varphi | = \sum_k \varphi_k^* \langle a_k |$$

Sostituendo nell'espresso per il valor medio si ha:

$$\langle \varphi | \hat{A} | \varphi \rangle = \sum_k \varphi_k^* \langle a_k | \sum_n \varphi_n \hat{A} |a_n\rangle = \sum_n \sum_k \varphi_k^* \varphi_n \langle a_k | \hat{A} |a_n\rangle$$

Poiché  $\hat{A} |a_n\rangle = a_n |a_n\rangle$ , ovvero  $|a_n\rangle$  sono gli autostati dell'operatore  $\hat{A}$ , si ha:

$$\langle \varphi | \hat{A} | \varphi \rangle = \sum_n \sum_k \varphi_k^* \varphi_n \langle a_k | \hat{A} |a_n\rangle = \sum_n \sum_k \varphi_k^* \varphi_n a_n \langle a_k |a_n\rangle$$

Si scelgono gli autostati dell'operatore  $\hat{A}$  in modo che siano ortonormali, ovvero sono ortogonali tra loro, mentre la loro norma è unitaria. Per cui risulta:

$$\langle a_k |a_n\rangle = \delta_{kn} = \begin{cases} 1, & k = n \\ 0, & k \neq n \end{cases}$$

Dunque, il valor medio si esprime come:

$$\langle \varphi | \hat{A} | \varphi \rangle = \sum_n |\varphi_n|^2 a_n$$

La probabilità che la misura dia come risultato  $a_n$  è quindi  $|\varphi_n|^2$ .

Se la misura ha dato come risultato  $a_k$ , il sistema si trova nello stato  $|a_k\rangle$ .

Se la misura ha dato come risultato  $a_k$ , il sistema, dopo la misura, si trova nello stato corrispondente all'autovalore  $a_k$ , ovvero nell'autostato  $|a_k\rangle$ . Di conseguenza, lo stato precedente alla misura non è più conoscibile, ma quello successivo sì.

Se si ripete la misura in un tempo sufficientemente breve, il risultato sarà nuovamente  $a_k$ , poiché il sistema si trova già in un autostato dell'operatore  $\hat{A}$ . Tuttavia, se il tempo tra le due misure è troppo lungo, il sistema potrebbe decadere in uno stato diverso, rendendo il risultato imprevedibile.

### 4.7.3 Evoluzione libera degli stati

Se il sistema microscopico non viene perturbato, evolve liberamente secondo l'equazione differenziale deterministica di Schrödinger:

$$\hat{H} |\varphi\rangle = j\hbar \frac{d}{dt} |\varphi\rangle$$

Dove  $\hat{H}$  è l'hamiltoniana del sistema. A seguito della misura dell'operatore  $\hat{H}$ , il sistema microscopico collassa in un autostato  $|\varphi_n\rangle$  con autovalore  $E_n$ , che rappresenta l'energia dello stato:

$$\hat{H} |\varphi_n\rangle = E_n |\varphi_n\rangle$$

L'equazione di Schrödinger si scrive:

$$j\hbar \frac{d}{dt} |\varphi_n\rangle = \hat{H} |\varphi_n\rangle = E_n |\varphi_n\rangle$$

La soluzione di questa equazione differenziale è:

$$|\varphi_n(t)\rangle = |\varphi_n(t_0)\rangle \exp\left(-j \frac{E_n}{\hbar} (t - t_0)\right)$$

Dove  $t_0$  è l'istante di misura.

Per uno stato generico  $|\varphi\rangle$ , è possibile generalizzare questo risultato sviluppando lo stato iniziale come combinazione lineare degli autostati dell'operatore hamiltoniano, con coefficienti  $c_n = \langle \varphi_n(t_0) | \varphi(t_0) \rangle$ :

$$|\varphi(t_0)\rangle = \sum_n c_n |\varphi_n(t_0)\rangle$$

L'evoluzione dello stato generico è data dall'evoluzione di ciascun autostato componente:

$$|\varphi(t)\rangle = \sum_n c_n |\varphi_n(t_0)\rangle \exp \left[ -j \frac{E_n}{\hbar} (t - t_0) \right]$$

È possibile giungere al **principio di indeterminazione di Heisenberg** osservando che, nello spazio vettoriale degli stati, gli operatori non soddisfano in generale la proprietà algebrica commutativa. Dati due operatori  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$ , si ha:

$$\hat{A}\hat{B} \neq \hat{B}\hat{A}$$

Ciò implica che la misura consecutiva di due grandezze fisiche diverse su un sistema microscopico non porta allo stesso risultato, indipendentemente dall'ordine con cui si effettuano le misure. Di conseguenza, non è possibile determinare simultaneamente quantità di moto e posizione, in accordo con il principio di Heisenberg:

$$\Delta p \Delta x \geq \frac{\hbar}{2}$$

In altre parole, una misura di posizione altera la misura della quantità di moto e viceversa. Questo effetto è legato alla necessità di perturbare il sistema per osservare una grandezza. Se si misura la posizione, non è più possibile ottenere altre informazioni sullo stato iniziale del sistema. Nota la posizione della particella, si dice che la **funzione d'onda collassa**, poiché la probabilità di ritrovare la particella in altre posizioni si annulla.

Nel contesto probabilistico della meccanica quantistica, il concetto deterministico di **traiettoria** perde di significato.

#### 4.7.4 Notazione di Dirac per lo spin

L'esperimento di Stern e Gerlach ha evidenziato che il momento angolare delle particelle microscopiche deve essere quantizzato. Affinché i risultati sperimentali siano in accordo con le previsioni teoriche, è necessario ammettere l'esistenza dell'operatore spin  $\hat{S}$ , rappresentante il **momento angolare intrinseco** di una particella.

Nel caso di un protone o di un elettrone in un campo magnetico, gli stati possibili dello spin sono due, indicati con  $+$  e  $-$ , in base alle due possibili orientazioni lungo la direzione  $z$ .

Siano  $|+\rangle$  e  $|-\rangle$  i due stati dello spin, e  $\hat{S}_z$  l'operatore di spin lungo l'asse  $z$ . Applicando la misura del momento magnetico  $\hat{S}_z$  a uno stato  $|\varphi\rangle$ , si ha:

$$\hat{S}_z |\varphi\rangle = s_z |\varphi\rangle$$

dove  $s_z$  sono gli autovalori dell'operatore  $\hat{S}_z$ , che possono assumere solo due valori:

$$+\frac{\hbar}{2}, \quad -\frac{\hbar}{2}$$

I vettori  $|+\rangle$  e  $|-\rangle$  sono gli autovettori dell'operatore  $\hat{S}_z$ , dunque, risulta:

$$\hat{S}_z |+\rangle = +\frac{\hbar}{2} |+\rangle, \quad \hat{S}_z |-\rangle = -\frac{\hbar}{2} |-\rangle$$

Spin angular momentum (spin-1/2 particles)

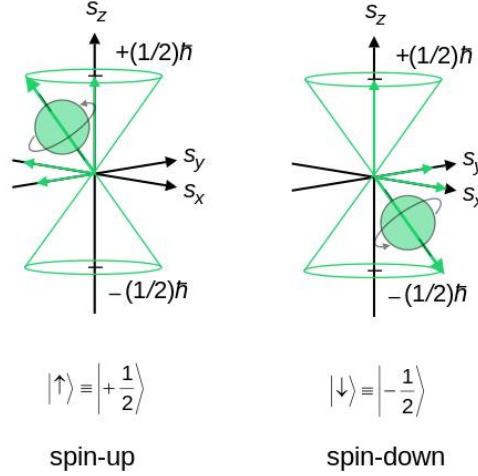


Figura 4.12: Orientazione dello spin

Un qualsiasi stato può essere espresso come combinazione lineare dei due autostati dell'operatore  $\hat{S}_z$ :

$$|\varphi\rangle = \varphi_+ |+\rangle + \varphi_- |-\rangle$$

L'operazione di misura dello spin  $\hat{S}_z$  lungo l'asse  $z$  è fondamentale poiché le proiezioni del momento magnetico della particella lungo gli altri assi si dimostra essere dipendente da  $\hat{S}_z$ .

Sia  $\langle\varphi|$  lo stato iniziale e  $|\psi\rangle$  lo stato finale. La quantità  $\langle\varphi|\hat{S}_z|\psi\rangle$  rappresenta la misura della proiezione del momento magnetico lungo  $z$ .

Sia  $\langle\varphi|$  lo stato iniziale dello spin della particella e  $|\psi\rangle$  lo stato finale. La quantità  $\langle\varphi|\hat{S}_z|\psi\rangle$  indica rappresenta la misura della proiezione del momento magnetico lungo  $z$  di una particella inizialmente nello stato  $\langle\varphi|$ . A fine della misura, la particella si porta nello stato  $|\psi\rangle$ . Se lo stato iniziale coincide con l'autostato  $\langle+|$  e anche quello finale  $|+\rangle$ , allora risulta:

$$\langle+|\hat{S}_z|+\rangle = \langle+|\left(+\frac{\hbar}{2}\right)|+\rangle = +\frac{\hbar}{2} \langle+|+\rangle$$

Siccome gli autovettori sono ortonormali, risulta:

$$\langle+|+\rangle = 1$$

Quindi, in definitiva, si ottiene:

$$\langle+|\hat{S}_z|+\rangle = +\frac{\hbar}{2}$$

Se lo stato iniziale coincide con l'autostato  $\langle -|$  e anche quello finale  $|-\rangle$ , poiché gli autovettori sono ortonormali, si ha:

$$\langle -|\hat{S}_z|-\rangle = \langle -|-\frac{\hbar}{2}|-\rangle = -\frac{\hbar}{2}\langle -|-\rangle = -\frac{\hbar}{2}$$

Se lo stato iniziale coincide con l'autostato  $\langle +|$  e anche quello finale  $|-\rangle$ , risulta:

$$\langle +|\hat{S}_z|-\rangle = \langle +|-\frac{\hbar}{2}|-\rangle = -\frac{\hbar}{2}\langle +|-\rangle = 0$$

Se lo stato iniziale coincide con l'autostato  $\langle -|$  e anche quello finale  $|+\rangle$ , risulta:

$$\langle -|\hat{S}_z|+\rangle = \langle -|+\frac{\hbar}{2}|+\rangle = +\frac{\hbar}{2}\langle -|+\rangle = 0$$

Siccome i vettori della base dell'operatore  $\hat{S}_z$  sono due, è possibile associare il vettore  $(1, 0)^T$  all'autostato  $|+\rangle$  e  $(0, 1)^T$  all'autostato  $|-\rangle$ . Dato che sono possibili quattro combinazioni, tra stato iniziale e finale dopo la misura, l'operatore  $\hat{S}_z$  ha dimensione finita. È possibile associare una matrice alla trasformazione:

$$\begin{pmatrix} \langle +|\hat{S}_z|+\rangle & \langle +|\hat{S}_z|-\rangle \\ \langle -|\hat{S}_z|+\rangle & \langle -|\hat{S}_z|-\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +\frac{\hbar}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\hbar}{2} \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La matrice:

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

È detta matrice di Pauli e riassume i valori dello spin lungo l'asse  $z$  e consente di scrivere l'operatore di misura del momento magnetico come:

$$\hat{S}_z = \frac{\hbar}{2}\sigma_z$$

Tramite la matrice di Pauli è possibile, inoltre, calcolare lo stato finale di una particella. Ad esempio, se lo stato iniziale di una particella è  $\langle +|$ , lo stato finale può essere espresso come:

$$\hat{S}_z|+\rangle = \frac{\hbar}{2}\sigma_z|+\rangle = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}|+\rangle$$

È possibile definire le matrici di Pauli anche per la misura del momento magnetico intrinseco lungo gli altri assi, come:

$$\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -j \\ j & 0 \end{pmatrix}$$



Se una particella si trova in uno stato  $|+\rangle$ , autovettore di  $\hat{S}_z$ , allora lungo  $x$  si ha uno stato:

$$\hat{S}_x |+\rangle = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} |-\rangle$$

Se, invece, lo stato iniziale è  $|-\rangle$ , lungo l'asse  $x$ , si ha:

$$\hat{S}_x |-\rangle = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} |+\rangle$$

I vettori  $|+\rangle$  e  $|-\rangle$  non sono una base per l'operatore  $\hat{S}_x$  poiché, l'applicazione di questo operatore a uno dei due vettori, non restituisce un vettore parallelo.

Analogamente, è possibile ripetere lo stesso discorso per l'operatore  $\hat{S}_y$ :

$$\hat{S}_y |+\rangle = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -j \\ j & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = j \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = j \frac{\hbar}{2} |-\rangle$$

$$\hat{S}_y |-\rangle = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -j \\ j & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -j \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -j \frac{\hbar}{2} |+\rangle$$

Anche per  $\hat{S}_y$ , i vettori  $|+\rangle$  e  $|-\rangle$  non sono una base per questo operatore.

Posizionando un campo magnetico  $\vec{B}$  diretto lungo l'asse  $z$  e misurando  $\hat{S}_z$ , si ottiene un valore certo di  $S_z$  ( $\pm\hbar/2$ ). Tuttavia, a causa della **non-commutatività** degli operatori di spin, ovvero:

$$[\hat{S}_i, \hat{S}_j] \neq 0 \quad \text{per } i \neq j,$$

lo stato risultante  $|+\rangle$  o  $|-\rangle$  non è un autostato di  $\hat{S}_x$  o  $\hat{S}_y$ . Di conseguenza, non è possibile conoscere simultaneamente le componenti dello spin lungo gli assi  $x$  e  $y$ : la misura di  $S_z$  rende le componenti  $S_x$  e  $S_y$  completamente **indeterminate**, con valore di aspettazione nullo e massima incertezza:

$$\Delta S_x = \Delta S_y = \frac{\hbar}{2}$$

Non è dunque possibile ricostruire tridimensionalmente il vettore momento intrinseco con precisione illimitata.

#### 4.7.5 Split dei livelli energetici

Considerando un nucleo immerso in un campo magnetico  $\vec{B}$  diretto lungo l'asse  $z$ , l'operatore hamiltoniano totale  $\hat{H}$  si compone dell'hamiltoniano imperturbato  $\hat{H}^{(0)}$  (energia cinetica e potenziale) e dell'energia potenziale magnetica  $\hat{U}$ :

$$\hat{H} = \hat{H}^{(0)} + \hat{U} = \left( \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V} \right) - \hat{\vec{\mu}} \cdot \vec{B}$$

dove  $\hat{V}$  è l'energia potenziale coulombiana che agisce sul nucleo,  $\hat{\vec{\mu}}$  è l'operatore momento magnetico intrinseco e  $\hat{U}$  è l'energia potenziale magnetica:

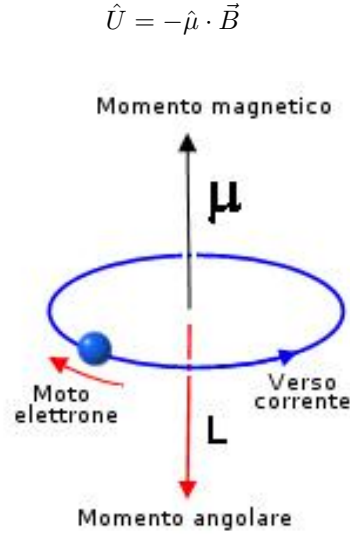


Figura 4.13: Nucleo immerso in un campo magnetico

Proiettando lungo  $z$ , il momento magnetico è legato all'operatore di spin dal rapporto giromagnetico  $\gamma$ :  $\hat{\mu}_z = \gamma \hat{S}_z$ . Poiché il campo magnetico ha solo componente lungo  $\hat{i}_z$ , ovvero  $\vec{B} = B\hat{i}_z$ , l'hamiltoniano si scrive:

$$\hat{H} = \left( \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V} \right) - \gamma \hat{S}_z B$$

Sia  $E_n^{(0)}$  l'autovalore di  $\hat{H}^{(0)}$  per uno stato orbitale  $|\varphi_n\rangle$ , tale che:

$$\left( \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V} \right) |\varphi_n\rangle = E_n^{(0)} |\varphi_n\rangle$$

Assumendo che lo stato totale sia separabile in una parte orbitale e una di spin,  $|\psi_{n,s}\rangle = |\varphi_n\rangle \otimes |s_z\rangle$ , l'applicazione dell'hamiltoniano produce:

$$\hat{H} |\psi_{n,s}\rangle = E_n^{(0)} |\psi_{n,s}\rangle - \gamma B \hat{S}_z |\psi_{n,s}\rangle$$

L'operatore  $\hat{S}_z$  possiede solo due autovalori per lo spin 1/2:

$$s_z = \pm \frac{\hbar}{2}$$

Sostituendo tali autovalori, l'energia totale si divide in due livelli:

$$E = E_n^{(0)} - \gamma B s_z = \begin{cases} E_{\text{low}} = E_n^{(0)} - \frac{\hbar}{2} \gamma B & \text{per } s_z = +\frac{\hbar}{2} \text{ (Spin Up, } |+\rangle \text{)} \\ E_{\text{high}} = E_n^{(0)} + \frac{\hbar}{2} \gamma B & \text{per } s_z = -\frac{\hbar}{2} \text{ (Spin Down, } |-\rangle \text{)} \end{cases}$$

Per effetto del campo magnetico diretto lungo  $z$ , ogni autovalore dell'energia si divide in due livelli energetici che differiscono di:

$$\Delta E = E_{\text{high}} - E_{\text{low}} = \hbar \gamma B$$

Questo fenomeno è noto come **split dei livelli energetici** o **effetto Zeeman nucleare**.

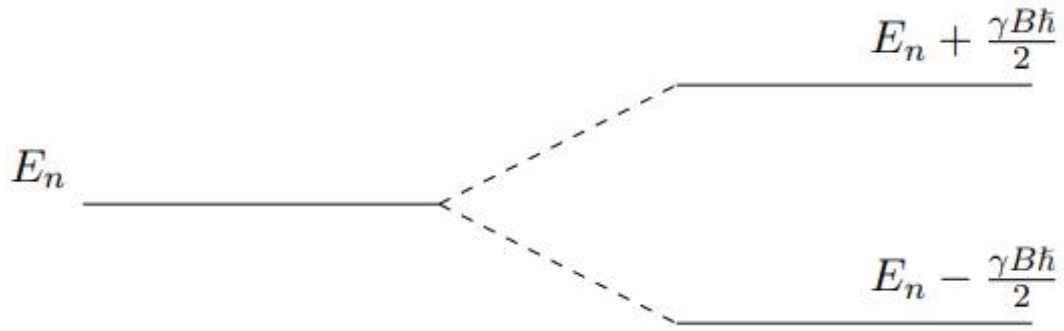


Figura 4.14: *Split di livelli energetici di un nucleo immerso in un campo magnetico*

L'hamiltoniano di un nucleo in un campo magnetico diretto lungo l'asse  $z$  contiene i termini  $\pm \frac{\hbar}{2} \gamma B$ . Gli spin si orientano quindi in direzione parallela o antiparallela rispetto al campo magnetico applicato.

Si può trascurare il termine  $\hat{p}^2/2m$  poiché il nucleo, avendo massa elevata, può essere considerato fermo. Se il nucleo è in equilibrio, anche il potenziale coulombiano può essere trascurato. L'hamiltoniano si riduce quindi a:

$$\hat{H} |\varphi_n\rangle = -\gamma B \hat{S}_z |\varphi_n\rangle$$

Se lo stato del nucleo è  $|+\rangle$ , allora:

$$\hat{H} |+\rangle = -\gamma B \hat{S}_z |+\rangle = -\frac{\hbar}{2} \gamma B$$

Per  $\gamma > 0$  come nel protone, lo spin è parallelo al campo magnetico poiché il nucleo possiede la minima energia. Al contrario, se lo stato è  $|-\rangle$ , risulta:

$$\hat{H} |-\rangle = -\gamma B \hat{S}_z |-\rangle = \frac{\hbar}{2} \gamma B$$

Per  $\gamma > 0$ , lo spin è antiparallelo al campo magnetico poiché il suo nucleo possiede energia massima.

#### 4.7.6 Energia media di un nucleo in base allo spin

Uno stato qualsiasi del sistema microscopico è descritto dal vettore ket  $|\psi\rangle$ , che può essere decomposto come combinazione lineare degli autostati dell'operatore spin  $\hat{S}_z$ :

$$\hat{H} |\psi\rangle = C_+ \hat{H} |+\rangle + C_- \hat{H} |-\rangle$$

Si calcola l'energia del sistema applicando l'operatore hamiltoniano:

$$\hat{H} |\psi\rangle = \hat{H} (C_+ |+\rangle + C_- |-\rangle) = C_+ \hat{H} |+\rangle + C_- \hat{H} |-\rangle$$

Si valuta il valor medio dell'energia del nucleo, mediante la definizione  $\langle\psi| \hat{H} |\psi\rangle$ . Sostituendo l'equazione ottenuta per  $\hat{H} |\psi\rangle$ , si ha:

$$\langle\psi| \hat{H} |\psi\rangle = \langle\psi| (C_+ \hat{H} |+\rangle + C_- \hat{H} |-\rangle) = C_+ \langle\psi| \hat{H} |+\rangle + C_- \langle\psi| \hat{H} |-\rangle$$

L'autostato bra  $\langle\psi|$  può essere espresso come combinazione lineare degli autostati dell'operatore  $\hat{S}_z$ , mediante coefficienti complessi e coniugati:

$$\langle\psi| = C_+^* \langle+| + C_-^* \langle-|$$

Sostituendo nella relazione per  $\langle\psi| \hat{H} |\psi\rangle$ , si ha:

$$\langle\psi| \hat{H} |\psi\rangle = C_+ (C_+^* \langle+| + C_-^* \langle-|) \hat{H} |+\rangle + C_- (C_+^* \langle+| + C_-^* \langle-|) \hat{H} |-\rangle$$

Svolgendo i prodotti, si ottiene:

$$\langle\psi| \hat{H} |\psi\rangle = C_+ C_+^* \langle+| \hat{H} |+\rangle + C_+ C_-^* \langle-| \hat{H} |+\rangle + C_- C_+^* \langle+| \hat{H} |-\rangle + C_- C_-^* \langle-| \hat{H} |-\rangle$$

Dove  $C_+ C_+^* = |C_+|^2$  e  $C_- C_-^* = |C_-|^2$ , dunque, è possibile scrivere:

$$\langle\psi| \hat{H} |\psi\rangle = |C_+|^2 \langle+| \hat{H} |+\rangle + C_+ C_-^* \langle-| \hat{H} |+\rangle + C_- C_+^* \langle+| \hat{H} |-\rangle + |C_-|^2 \langle-| \hat{H} |-\rangle$$

Per un nucleo immerso in un campo magnetico di ampiezza  $B_0$  diretto lungo  $z$ , l'operatore hamiltoniano, trascurano la velocità del nucleo e il campo coulombiano, può essere espresso come:

$$\hat{H} = -\gamma B_0 \hat{S}_z$$

Il valor medio dell'energia del nucleo, può essere espressa come:

$$\langle \psi | \hat{H} | \psi \rangle = -\gamma B_0 \left( |C_+|^2 \langle + | \hat{S}_z | + \rangle + C_+ C_-^* \langle - | \hat{S}_z | + \rangle + C_- C_+^* \langle + | \hat{S}_z | - \rangle + |C_-|^2 \langle - | \hat{S}_z | - \rangle \right)$$

Dalla definizione di matrice di Pauli, risulta:

$$\hat{S}_z | + \rangle = \frac{\hbar}{2} \boldsymbol{\sigma}_z | + \rangle = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} | + \rangle$$

$$\hat{S}_z | - \rangle = \frac{\hbar}{2} \boldsymbol{\sigma}_z | - \rangle = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{\hbar}{2} | - \rangle$$

Inoltre, i vettori  $| + \rangle$  e  $| - \rangle$  sono ortonormali, dunque, risulta che:

$$\langle + | \hat{S}_z | + \rangle = \langle + | \frac{\hbar}{2} | + \rangle = \frac{\hbar}{2} \langle + | + \rangle = \frac{\hbar}{2}$$

$$\langle - | \hat{S}_z | - \rangle = -\langle - | \frac{\hbar}{2} | - \rangle = -\frac{\hbar}{2} \langle - | - \rangle = -\frac{\hbar}{2}$$

$$\langle - | \hat{S}_z | + \rangle = \langle - | \frac{\hbar}{2} | + \rangle = \frac{\hbar}{2} \langle - | + \rangle = 0$$

$$\langle + | \hat{S}_z | - \rangle = -\langle + | \frac{\hbar}{2} | - \rangle = -\frac{\hbar}{2} \langle + | - \rangle = 0$$

Si ottiene:

$$\langle \psi | \hat{H} | \psi \rangle = -\gamma B_0 \left( \frac{\hbar}{2} |C_+|^2 - \frac{\hbar}{2} |C_-|^2 \right) = -\gamma B_0 \frac{\hbar}{2} \left( |C_+|^2 - |C_-|^2 \right)$$

Il parametro  $|C_+|^2$  rappresenta la probabilità che il nucleo sia nello stato  $| + \rangle$  alla fine del processo di misura. Analogamente,  $|C_-|^2$  rappresenta la probabilità che il nucleo sia nello stato  $| - \rangle$ .

In un insieme di  $N$  nuclei (come in un campione NMR), se si assume che la probabilità di trovare un singolo nucleo negli autostati  $| + \rangle$  o  $| - \rangle$  sia data dalle popolazioni termiche di equilibrio, il numero atteso di nuclei in ciascuno stato è, per lo stato  $| + \rangle$ :

$$N_+ = NP_+ = N |C_+|^2$$

per lo stato  $| - \rangle$ , invece:

$$N_- = NP_- = N |C_-|^2$$

Sia  $\Delta N = N_+ - N_-$  la differenza di popolazione tra gli spin nello stato  $| + \rangle$  e quelli nello stato  $| - \rangle$ :

$$\Delta N = N_+ - N_- = N |C_+|^2 - N |C_-|^2 = N (|C_+|^2 - |C_-|^2)$$

Dividendo per  $N$ , si ottiene l'eccesso di popolazione normalizzato:

$$\frac{\Delta N}{N} = |C_+|^2 - |C_-|^2$$

Sostituendo questa relazione nell'espressione del valor medio dell'energia  $\langle \psi | \hat{H} | \psi \rangle$ , si ottiene:

$$\langle \psi | \hat{H} | \psi \rangle = -\gamma B_0 \frac{\hbar}{2} \frac{\Delta N}{N}$$

L'energia media dei nuclei è data dalla differenza di nuclei nello stato  $|+\rangle$  rispetto a quelli nello stato  $|-\rangle$ , rapportato al numero totale dei nuclei.

#### 4.7.7 Evoluzione temporale dello stato spin up

A seguito della misura, il sistema evolve secondo una legge deterministica. Lo stato quantico ha un'evoluzione temporale descritta da:

$$|\varphi_n(t)\rangle = |\varphi_n(t_0)\rangle \exp\left(-j \frac{E_n}{\hbar} (t - t_0)\right)$$

Se il sistema si trova nello stato  $|+\rangle$ , l'energia associata è:

$$E^+ = -\frac{\hbar}{2} \gamma B_0$$

Per cui, l'evoluzione temporale dello stato è:

$$|+(t)\rangle = |+(t_0)\rangle \exp\left(-j \frac{1}{\hbar} \left(-\frac{\hbar}{2} \gamma B_0\right) (t - t_0)\right) = |+(t_0)\rangle \exp\left(+j \frac{\gamma B_0}{2} (t - t_0)\right)$$

Analogamente, nello stato  $|-\rangle$  il sistema possiede un'energia data da:

$$E^- = \frac{\hbar}{2} \gamma B_0$$

Per cui, l'andamento dello stato è:

$$|-(t)\rangle = |-(t_0)\rangle \exp\left(-j \frac{1}{\hbar} \left(+\frac{\hbar}{2} \gamma B_0\right) (t - t_0)\right) = |-(t_0)\rangle \exp\left(-j \frac{\gamma B_0}{2} (t - t_0)\right)$$

Un qualsiasi stato  $|\psi\rangle$  del sistema può essere espresso come combinazione lineare degli autostati dell'operatore  $\hat{S}_z$ :

$$|\psi(t)\rangle = C_+ |+(t_0)\rangle \exp\left(+j \frac{\gamma B_0}{2} (t - t_0)\right) + C_- |-(t_0)\rangle \exp\left(-j \frac{\gamma B_0}{2} (t - t_0)\right)$$

#### 4.7.8 Valore medio del momento magnetico sull'asse longitudinale

L'operatore momento angolare su  $z$ ,  $\hat{\mu}_z$ , è legato all'operatore di spin  $\hat{S}_z$ , dalla relazione:

$$\hat{\mu}_z = \gamma \hat{S}_z$$

È possibile calcolare il valor medio di tale operatore mediante la definizione:

$$\langle \psi | \hat{\mu}_z | \psi \rangle = \langle \psi | \gamma \hat{S}_z | \psi \rangle = \gamma \langle \psi | \hat{S}_z | \psi \rangle$$

È possibile esprimere gli stati come sovrapposizione degli autostati dell'operatore spin:

$$\langle \psi | = C_+^* \langle + | + C_-^* \langle - |$$

$$| \psi \rangle = C_+ | + \rangle + C_- | - \rangle$$

Sostituendo queste due relazioni nel valor medio, si ottiene:

$$\langle \psi | \hat{\mu}_z | \psi \rangle = (C_+^* \langle + | + C_-^* \langle - |) \hat{S}_z (C_+ | + \rangle + C_- | - \rangle)$$

Si svolgono i prodotti:

$$\langle \psi | \hat{\mu}_z | \psi \rangle = \gamma \left( C_+ C_+^* \langle + | \hat{S}_z | + \rangle + C_+ C_-^* \langle - | \hat{S}_z | + \rangle + C_- C_+^* \langle + | \hat{S}_z | - \rangle + C_- C_-^* \langle - | \hat{S}_z | - \rangle \right)$$

Dove:

$$\begin{cases} \langle + | \hat{S}_z | + \rangle = \frac{\hbar}{2} \langle + | + \rangle = \frac{\hbar}{2} \\ \langle - | \hat{S}_z | - \rangle = -\frac{\hbar}{2} \langle - | - \rangle = -\frac{\hbar}{2} \\ \langle + | \hat{S}_z | - \rangle = -\frac{\hbar}{2} \langle + | - \rangle = 0 \\ \langle - | \hat{S}_z | + \rangle = \frac{\hbar}{2} \langle - | + \rangle = 0 \end{cases}$$

Per cui si ha:

$$\langle \psi | \hat{\mu}_z | \psi \rangle = \gamma \frac{\hbar}{2} (|C_+|^2 - |C_-|^2)$$

#### 4.7.9 Andamento temporale dello stato momento magnetico lungo l'asse trasversale

Si vuole calcolare l'energia media nel tempo dell'operatore momento magnetico lungo  $x$ ,  $\hat{\mu}_x$ . Siccome il momento magnetico possiede solo due autostati, può assumere solamente due valori. Lo stato energetico dei due autostati  $|+(t)\rangle$  e  $|-(t)\rangle$  sono rispettivamente:

$$E^- = \frac{\hbar}{2}\gamma B_0, \quad E^+ = -\frac{\hbar}{2}\gamma B_0$$

L'evoluzione temporale dei due autostati stazionari è:

$$|+(t)\rangle = |+(t_0)\rangle \exp \left[ -j \frac{E^+}{\hbar} (t - t_0) \right]$$

$$|-(t)\rangle = |-(t_0)\rangle \exp \left[ -j \frac{E^-}{\hbar} (t - t_0) \right]$$

Sia  $|\psi(t)\rangle$  un qualsiasi stato, esso può essere ottenuto come combinazione lineare dei due autostati stazionari:

$$|\psi(t_0)\rangle = C_+ |+(t_0)\rangle + C_- |-(t_0)\rangle$$

Dunque, l'evoluzione temporale è:

$$|\psi(t)\rangle = C_+ |+(t_0)\rangle \exp \left[ -j \frac{E^+}{\hbar} (t - t_0) \right] + C_- |-(t_0)\rangle \exp \left[ -j \frac{E^-}{\hbar} (t - t_0) \right]$$

Si valuta l'energia media dell'operatore  $\hat{\mu}_x$ , sostituendo la combinazione per  $|\psi(t)\rangle$ , si ha:

$$\langle \psi(t) | \hat{\mu}_x | \psi(t) \rangle = \langle \psi(t) | \hat{\mu}_x C_+ |+(t_0)\rangle \exp \left[ -j \frac{E^+}{\hbar} (t - t_0) \right] + \langle \psi(t) | \hat{\mu}_x C_- |-(t_0)\rangle \exp \left[ -j \frac{E^-}{\hbar} (t - t_0) \right]$$

L'operatore momento magnetico lungo  $x$  può essere espresso in termini dell'operatore momento angolare intrinseco lungo lo stesso asse,  $\hat{S}_x$ :

$$\hat{\mu}_x = \gamma \hat{S}_x$$

Mediante la matrice di Pauli è possibile valutare il risultato dell'applicazione di  $\hat{S}_x$  agli autostati  $|+\rangle$  e  $|-\rangle$ :

$$\hat{\mu}_x |+\rangle = \gamma \hat{S}_x |+\rangle = \gamma \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \gamma \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \gamma \frac{\hbar}{2} |-\rangle$$

$$\hat{\mu}_x |-\rangle = \gamma \hat{S}_x |-\rangle = \gamma \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \gamma \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \gamma \frac{\hbar}{2} |+\rangle$$

Per cui, l'energia media può essere scritta come:

$$\langle \psi(t) | \hat{\mu}_x | \psi(t) \rangle = \gamma \frac{\hbar}{2} \left\{ C_+ \langle \psi(t) | - (t_0) \rangle \exp \left[ -j \frac{E^+}{\hbar} (t - t_0) \right] + C_- \langle \psi(t) | + (t_0) \rangle \exp \left[ -j \frac{E^-}{\hbar} (t - t_0) \right] \right\}$$



Il vettore bra può essere espresso come combinazione lineare degli autostati di  $\hat{S}_z$ :

$$\langle \psi(t) | = C_+^* \langle + (t) | + C_-^* \langle - (t) | = C_+^* \langle + (t_0) | \exp \left[ j \frac{E^+}{\hbar} (t - t_0) \right] + C_-^* \langle - (t_0) | \exp \left[ j \frac{E^-}{\hbar} (t - t_0) \right]$$

Sostituendo questa relazione nel calcolo dell'energia media, si ottengono i risultati:

$$C_+ C_+^* \langle + (t_0) | - (t_0) \rangle \exp \left[ -j \frac{E^+}{\hbar} (t - t_0) \right] \exp \left[ j \frac{E^+}{\hbar} (t - t_0) \right] = 0$$

$$C_+ C_-^* \langle - (t_0) | - (t_0) \rangle \exp \left[ -j \frac{E^+}{\hbar} (t - t_0) \right] \exp \left[ j \frac{E^-}{\hbar} (t - t_0) \right] = C_+ C_-^* \exp \left[ -j \frac{E^+ - E^-}{\hbar} (t - t_0) \right]$$

$$C_- C_+^* \langle - (t_0) | - (t_0) \rangle \exp \left[ -j \frac{E^-}{\hbar} (t - t_0) \right] \exp \left[ j \frac{E^+}{\hbar} (t - t_0) \right] = C_- C_+^* \exp \left[ j \frac{E^+ - E^-}{\hbar} (t - t_0) \right]$$

$$C_-^* C_+^* \langle - (t_0) | + (t_0) \rangle \exp \left[ -j \frac{E^-}{\hbar} (t - t_0) \right] \exp \left[ j \frac{E^-}{\hbar} (t - t_0) \right] = 0$$

L'energia media del momento magnetico lungo  $x$  è, dunque:

$$\langle \psi(t) | \hat{\mu}_x | \psi(t) \rangle = \gamma \frac{\hbar}{2} \left\{ C_+ C_-^* \exp \left[ -j \frac{E^+ - E^-}{\hbar} (t - t_0) \right] + C_- C_+^* \exp \left[ j \frac{E^+ - E^-}{\hbar} (t - t_0) \right] \right\}$$

Si pone  $C_+ C_-^* = A \exp j\beta$ , dove compaiono esplicitamente modulo,  $A = |C_+ C_-^*|$ , e fase,  $\angle C_+ C_-^*$ , del prodotto  $C_+ C_-^*$ . La relazione per il valor medio del momento magnetico lungo  $x$  può essere scritta tenendo conto delle proprietà dei numeri complessi: la somma di un numero complesso e del suo coniugato restituisce il doppio della parte reale del numero stesso. Questa relazione può essere scritta anche come:

$$\langle \psi(t) | \hat{\mu}_x | \psi(t) \rangle = \gamma \hbar \operatorname{Re} \left\{ C_- C_+^* \exp \left[ j \frac{E^+ - E^-}{\hbar} (t - t_0) \right] \right\}$$

Si pone:

$$\omega_0 = \frac{E^- - E^+}{\hbar}$$

Sostituendo le espressioni per le due energie,  $E^- = \hbar/2\gamma B_0$  e  $E^+ = -\hbar/2\gamma B_0$ , si ottiene:

$$\omega_0 = \frac{E^- - E^+}{\hbar} = \frac{1}{\hbar} \left( \frac{\hbar}{2} \gamma B_0 - \left( -\frac{\hbar}{2} \gamma B_0 \right) \right) = \gamma B_0$$

$\omega_0$  è detta pulsazione di Larmor, quantità positiva se  $\gamma > 0$ .

In definitiva, il valor medio del momento magnetico lungo  $x$  è:

$$\langle \psi(t) | \hat{\mu}_x | \psi(t) \rangle = \gamma \hbar A \cos (\beta - \omega (t - t_0))$$

#### 4.7.10 Transizioni di stato

Gli autostati dell'operatore di misura  $\hat{A}$  presentano energie costanti, rappresentate dagli autovalori dell'operatore di misura applicato.

Finché il sistema si trova in un autostato stazionario, ovvero il sistema non è perturbato, l'evoluzione temporale avviene in maniera determinista, secondo l'equazione:

$$|\psi(t)\rangle = |\psi(t_0)\rangle \exp\left(-j\frac{E_n}{\hbar}(t-t_0)\right)$$

In seguito a una misura, mediante l'applicazione dell'operatore  $\hat{A}$ , lo stato del sistema collassa in un autostato di  $\hat{A}$ , e la probabilità che lo stato  $|\psi\rangle$  sia trovato nell'autostato  $|\varphi\rangle$  è data da  $|\langle\varphi|\psi\rangle|^2$ .

Il passaggio da uno stato energetico all'altro, ovvero la transizione di stato, può avvenire in modo guidato a seguito di una sollecitazione elettromagnetica di un'opportuna frequenza. L'efficacia di tale transizione è determinata dall'elemento di matrice di transizione, come ad esempio  $\langle\varphi|\hat{\mu}_x|\psi\rangle$  per l'interazione magnetica trasversale.

Se il sistema quantico si trova in un campo elettromagnetico oscillante, è possibile sviluppare una soluzione dell'equazione di Schrödinger tempo dipendente:

$$j\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \hat{H}\psi$$

I metodi approssimati per poter risolvere questa equazione sono abbastanza complessi. Questi metodi sono basati sull'assunzione che la soluzione approssimata al primo ordine, ottenuta considerando un operatore hamiltoniano senza perturbazione  $\hat{H}_0$  a cui si aggiunge un termine del primo ordine dello sviluppo della perturbazione,  $\hat{H}_1(t)$ . Questo termine aggiuntivo rappresenta la probabilità di transizione dallo stato a energia  $l$  verso quello a energia  $k$ . In simboli è possibile scrivere:

$$H_{kl} = \langle k|\hat{H}_1|l\rangle$$

I termini che esprimono le probabilità di transizione per unità di tempo, al tempo  $t$ , da un livello energetico all'altro sono esprimibili secondo la **meccanica quantistica perturbativa nel tempo** (*time-dependent perturbation theory*):

$$W_{a\rightarrow b} = \frac{1}{\hbar^2} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} H_{ab}(\tau) \exp\left(j\frac{E_b - E_a}{\hbar}\tau\right) d\tau \right|^2$$

dove:

- $W_{a\rightarrow b}$ : probabilità di transizione (proporzionale alla probabilità che il sistema passi dallo stato  $a$  allo stato  $b$ );
- $H_{ab}(\tau) = \langle b|H'(\tau)|a\rangle$ : elemento di matrice del termine perturbativo tra gli stati  $|a\rangle$  e  $|b\rangle$ .
- $E_a, E_b$ : energie degli stati iniziale e finale del sistema non perturbato;

- $\hbar$ : costante di Planck ridotta, che lega energia e frequenza quantistica ( $E = \hbar\omega$ ).
- l'esponenziale: fattore di fase oscillante dovuto alla differenza di energia tra i due stati.

La probabilità di transizione tra lo stato  $a$  a quello  $b$  dipende dalla trasformata di Fourier dell'hamiltoniana associata alla radiazione oscillante.  $\Delta E = E_b - E_a$  è la differenza di energia tra i due stati. Se la perturbazione  $\hat{H}_1$  è costituita da un campo di frequenze, con spettro concentrato intorno alla frequenza:

$$\omega_{ab} = \frac{E_b - E_a}{\hbar}$$

La probabilità  $W_{a \rightarrow b}$  risulta essere molto più alta rispetto al caso in cui lo spettro della perturbazione non è concentrato intorno a questa frequenza ma è disperso.

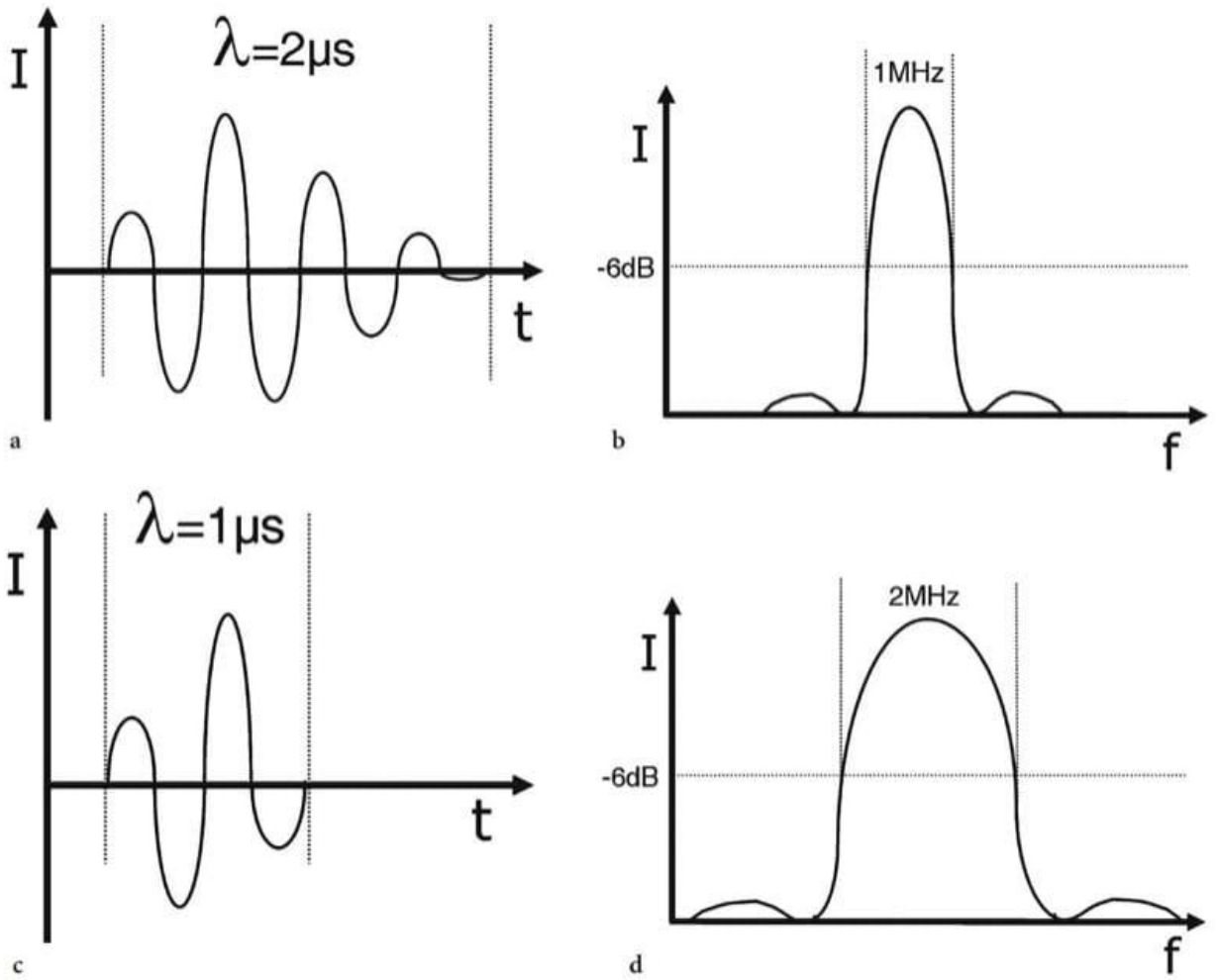


Figura 4.15: Spettro concentrato in alto e più disperso in basso

La probabilità di transizione inversa,  $W_{b \rightarrow a}$  assume lo stesso valore, a causa della presenza del modulo quadro:

$$W_{b \rightarrow a} = \frac{1}{\hbar^2} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} H_{ba}(\tau) \exp \left( j \frac{E_a - E_b}{\hbar} \tau \right) d\tau \right|^2$$

L'elemento di matrice dovrebbe essere  $H_{ba} = \langle a | \hat{H}_1 | b \rangle$ , ma poiché  $|H_{ba}| = |H_{ab}|$ , l'uso di  $H_{ab}$  è accettabile se si intende  $|H_{ab}|^2$ . Tuttavia, per rigore, si usa l'elemento di matrice corretto per la transizione  $b \rightarrow a$ )

Se  $E_a > E_b$ , è possibile avere le transizioni in entrambi i versi, ovvero, un sistema può sia passare dal livello energetico inferiore  $E_b$  a quello superiore  $E_a$  che il viceversa. Al primo passaggio è associato l'assorbimento di un fotone, con frequenza data dalla legge di Plank-Einstein:

$$h\nu = |E_a - E_b|$$

Il passaggio inverso avviene mediante l'emissione, detta stimolata, di un fotone con frequenza uguale a quella del fotone assorbito.

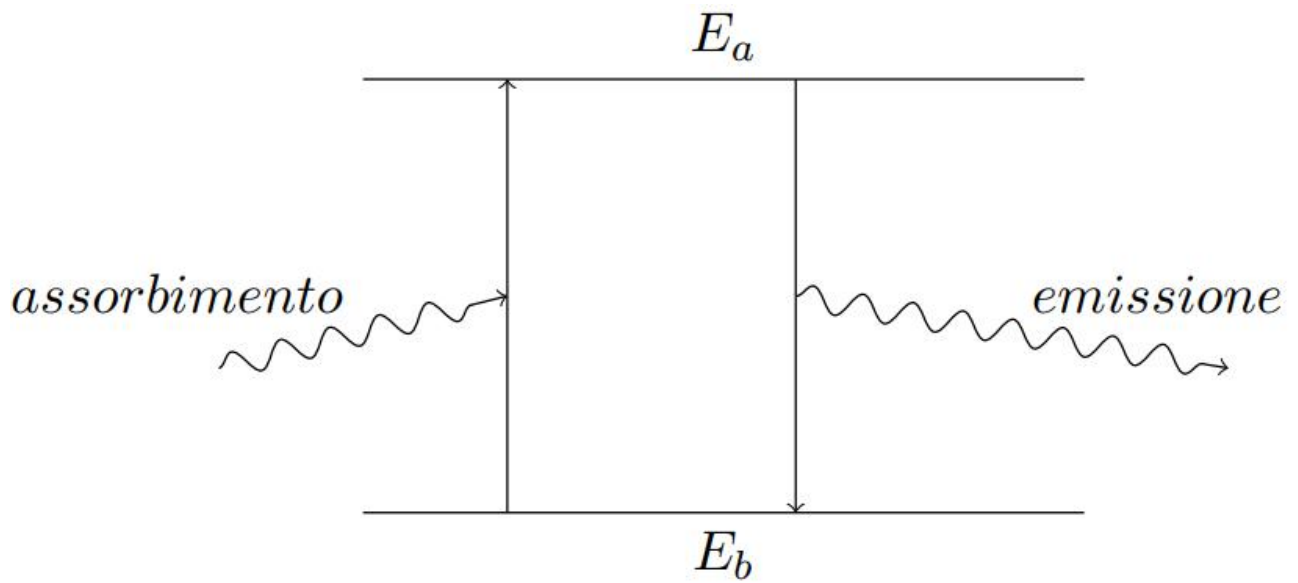


Figura 4.16: *Transizioni tra livelli energetici mediante assorbimento ed emissione di fotoni*



## Capitolo 5

# Meccanica statistica

### Sommario

<b>5.1</b>	<b>Cenni di meccanica statistica . . . . .</b>	<b>159</b>
<b>5.2</b>	<b>Possibili stati di un sistema in base allo spin . . . . .</b>	<b>159</b>
<b>5.3</b>	<b>Approssimazione di Stirling . . . . .</b>	<b>162</b>
5.3.1	Probabilità con approssimazione di Stirling . . . . .	163
<b>5.4</b>	<b>Stati ammissibili . . . . .</b>	<b>167</b>
<b>5.5</b>	<b>Entropia . . . . .</b>	<b>168</b>
<b>5.6</b>	<b>Distribuzione di Boltzmann . . . . .</b>	<b>171</b>
5.6.1	Magnetizzazione macroscopica . . . . .	174
5.6.2	Legge di Planck . . . . .	176
5.6.3	Rumore termico o di Johnson-Nyquist . . . . .	179
<b>5.7</b>	<b>Distribuzione di Gibbs . . . . .</b>	<b>181</b>
5.7.1	Distribuzione di Fermi-Dirac . . . . .	184
5.7.2	Distribuzione di Bose-Einstein . . . . .	185

## 5.1 Cenni di meccanica statistica

La Meccanica Statistica è il fondamentale ponte teorico che collega il comportamento delle singole particelle a livello microscopico con le proprietà misurabili e osservabili dei sistemi a livello macroscopico (termodinamico). Essa utilizza i principi della probabilità e della statistica per trattare sistemi composti da un numero enorme ( $N \approx 10^{23}$ ) di costituenti (atomi, molecole o particelle quantistiche), superando l'impossibilità pratica di applicare le leggi della meccanica classica o quantistica a ogni singola entità [LandauStatistica, ReifStatistica, KittelKroemer].

Il cuore della meccanica statistica risiede nell'idea di **ensemble statistico** e nel principio che il valore di equilibrio di una grandezza macroscopica  $M$  è dato dalla media sui microstati permessi (o dalla media temporale, secondo l'ipotesi ergodica). Formalmente:

$$\langle M \rangle = \sum_{\text{microstati } i} M_i P_i$$

dove  $P_i$  è la probabilità che il sistema si trovi nel microstato  $i$ . Le probabilità  $P_i$  sono ricavate dalla **funzione di partizione**  $Z$ , che funge da generatrice di tutte le grandezze termodinamiche.

La meccanica statistica consente di dedurre tutte le grandezze termodinamiche (macroscopiche) partendo dalle proprietà microscopiche (livelli energetici e Hamiltoniana del sistema). Le grandezze fondamentali che essa riesce a esprimere in termini microscopici includono:

Tabella 5.1: *Grandezze macroscopiche derivate dalla meccanica statistica*

Grandezza	Simbolo	Relazione Statistica	Descrizione Microscopica
<b>Energia Interna</b>	$U$ (o $E$ )	$U = \langle H \rangle = - \left( \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \right)_{V, N}$	Media dell'energia totale su tutti i microstati.
<b>Pressione</b>	$P$	$P = \frac{1}{\beta} \left( \frac{\partial \ln Z}{\partial V} \right)_{T, N}$	Legata all'impulso trasferito dagli urti delle particelle contro le pareti.
<b>Temperatura</b>	$T$	$T = \frac{1}{k_B \beta}$	Misura dell'agitazione termica media delle particelle.
<b>Entropia</b>	$S$	$S = k_B \ln W$	Logaritmo del numero $W$ di microstati compatibili (disordine molecolare).
<b>Capacità Termica</b>	$C_V$	$C_V = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V$	Misura della variazione dell'energia interna (media) con la temperatura.

In sintesi, la meccanica statistica traduce i parametri microscopici (posizioni, quantità di moto e interazioni delle  $N$  particelle) in grandezze macroscopiche, fornendo una giustificazione teorica per le leggi fenomenologiche della Termodinamica.

## 5.2 Possibili stati di un sistema in base allo spin

Si considerano due sistemi separati da un setto. Il sistema a destra possiede inizialmente due particelle, mentre quello a sinistra una sola. Si suppone di rimuovere il setto in modo da far interagire tra loro le tre particelle. Si osservano fenomeni diffusivi.

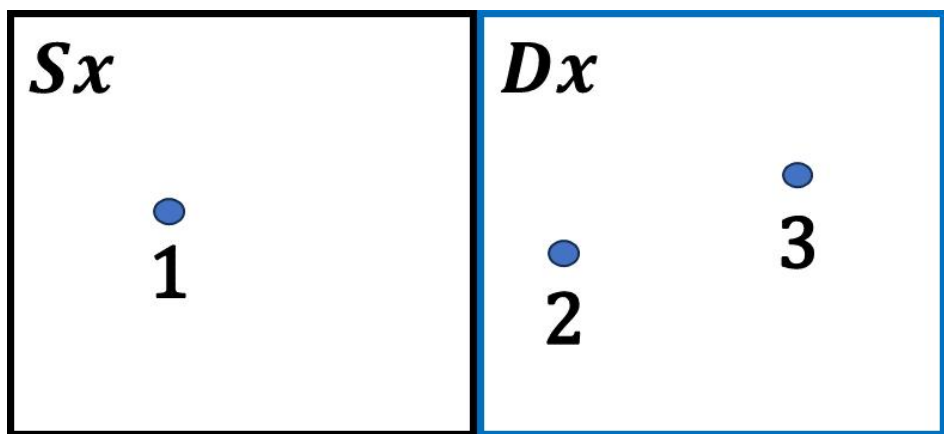


Figura 5.1: Sistemi separati da un setto

Una particella può trovarsi in due stati possibili: a destra o a sinistra. Le possibili configurazioni del sistema complessivo, privato del setto, sono  $2^N$ , dove  $2$  è il numero degli stati e  $N$  il numero delle particelle. Nel caso in esame si hanno i seguenti casi:

Tabella 5.2: Possibili configurazioni del sistema con tre particelle

Particella 1	Particella 2	Particella 3
S	S	S
S	S	D
S	D	S
S	D	D
D	S	S
D	S	D
D	D	S
D	D	D

Di tutte le possibili configurazioni, una prevede che tutte le particelle si trovino a sinistra, una che tutte siano a destra, mentre tre prevedono due particelle a sinistra e una a destra. Analogamente, vi sono tre casi in cui due particelle sono a destra e una a sinistra.

Tutte le configurazioni elencate sono possibili, tuttavia quelle intermedie hanno maggiore probabilità di verificarsi. Infatti, la probabilità che tutte siano a destra o tutte a sinistra è:

$$\frac{1}{8} = 0.125 = 12.5\%$$

La probabilità di avere due particelle a sinistra e una a destra, o viceversa, è:

$$\frac{3}{8} = 0.375 = 37.5\%$$

Si considera un sistema di  $N$  particelle. Per la sua descrizione sono presenti tre gradi di libertà per ciascuna particella, uno per ogni coordinata cartesiana. Se le particelle si muovono secondo le leggi della meccanica classica, la lagrangiana del sistema totale si scrive come:



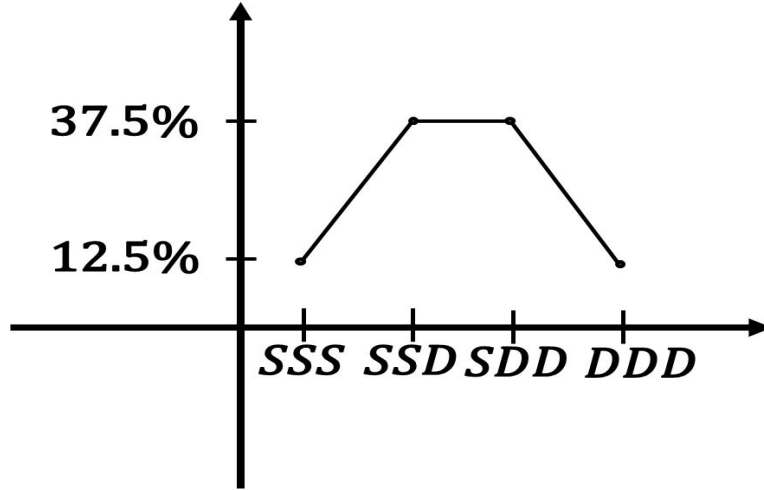


Figura 5.2: Probabilità delle varie configurazioni

Risulta, dunque, molto complesso, se non impossibile, scrivere le equazioni del moto e risolverle tutte. A tale scopo è necessario conoscere le condizioni iniziali delle particelle.

Per studiare tali sistemi, si ricorre a una descrizione probabilistica, come nel caso delle tre particelle. Con un grammo di sostanza, vi sono  $2^{N_A}$  combinazioni possibili, ognuna con la propria probabilità di verificarsi.

Si considera ora un sistema composto da  $N$  spin non interagenti, ciascuno dei quali può assumere solamente due stati possibili:  $|+\rangle$  e  $|-\rangle$ .

Si suppone che ogni spin occupi una posizione fissa nello spazio. Lo stato complessivo del sistema macroscopico è descritto da una sequenza di stati  $|+\rangle$  e  $|-\rangle$ , che identificano lo stato di ciascuno spin.

Il sistema può assumere  $2^N$  configurazioni diverse. Si vuole determinare il numero massimo di combinazioni con  $k$  spin nello stato  $|+\rangle$ . Il numero delle combinazioni con  $k$  spin nello stato  $|+\rangle$  coincide con il coefficiente binomiale:

$$N_k = \binom{N}{k} = \frac{N!}{k!(N-k)!}$$

La probabilità di avere  $k$  spin nello stato  $|+\rangle$  è ottenuta dividendo questo risultato per il numero totale delle configurazioni ammissibili del sistema  $2^N$ :

$$P(k \text{ spin nello stato } |+\rangle) = \frac{1}{2^N} \binom{N}{k} = \frac{1}{2^k 2^{N-k}} \binom{N}{k}$$

Il numero degli spin nello stato  $|+\rangle$  equivale a una distribuzione binomiale con probabilità di  $1/2$ . Per cui la media è:

$$m = \frac{N}{2}$$

La varianza della distribuzione binomiale è:

$$\sigma^2 = Npq = N \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{N}{4}$$

Dove  $p$  è la probabilità del caso voluto e  $q = 1 - p$  la probabilità del caso sfavorevole.

All'aumentare del numero di particelle, il numero delle configurazioni intermedie aumenta, così come la loro probabilità di comparsa. Inoltre, la distribuzione binomiale tende a una distribuzione gaussiana, in cui il picco rappresenta la configurazione più probabile. Le configurazioni estreme, come tutti gli spin nello stato  $|+\rangle$  o  $|-\rangle$ , hanno probabilità praticamente nulla.

Le fluttuazioni relative a una determinata configurazione sono date da  $\sigma/m$ , con  $m$  media. Sostituendo la relazione per media e varianza si ha:

$$\frac{\sigma}{m} = \frac{\sqrt{N}/2}{N/2} = \frac{\sqrt{N}}{2} \cdot \frac{2}{N} = \frac{1}{\sqrt{N}}$$

Se il numero delle particelle è dell'ordine del numero di Avogadro, la fluttuazione è:

$$\frac{\sigma}{m} \simeq \frac{1}{\sqrt{10^{23}}} \simeq 10^{-11} \ll 1$$

La distribuzione delle configurazioni ha una varianza molto ridotta, quindi la curva gaussiana è molto concentrata intorno al valore medio.

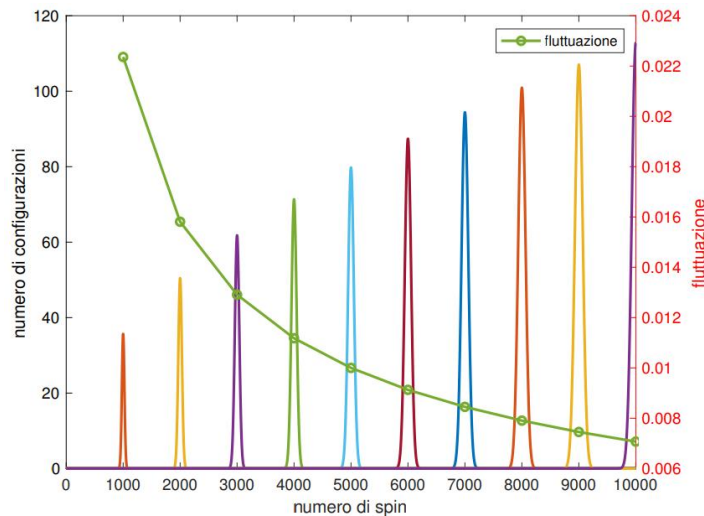


Figura 5.3: *Variazione della distribuzione delle possibili configurazioni al variare del numero di spin*

Se il sistema di  $N$  spin potesse essere osservato in tutti gli istanti di tempo, si vedrebbe quasi sempre una configurazione in cui  $k = N/2$ , ovvero la metà degli spin è nello stato  $|+\rangle$  e l'altra metà nello stato  $|-\rangle$ . In definitiva, è molto più probabile trovare il sistema in una configurazione con probabilità  $p = 1/2$ , piuttosto che in una configurazione lontana da quella maggiormente favorevole.

### 5.3 Approssimazione di Stirling

Si considera un numero intero  $N$ , sufficientemente grande, e si valuta la quantità:

$$\ln N! = \ln \prod_{n=1}^N n$$

Per le proprietà dei logaritmi, si ha:

$$\ln \prod_{n=1}^N n = \sum_{n=1}^N \ln n$$

Per  $N \gg 1$ , si può approssimare la somma con un integrale:

$$\sum_{n=1}^N \ln n \simeq \int_1^N \ln x dx$$

Integrando per parti, si ha;

$$\int_1^N \ln x dx = (x \ln x)_1^N - \int_1^N dx = N \ln N - N + 1$$

Per  $N \gg 1$ , il termine costante può essere trascurato:

$$\ln N! \simeq N \ln N - N$$

Maggiore è il numero delle particelle, più l'approssimazione di Stirling risulta accurata. L'uguaglianza diventa esattamente valida nel limite  $N \rightarrow \infty$ .

### 5.3.1 Probabilità con approssimazione di Stirling

L'approssimazione di Stirling può essere utilizzata per stimare la probabilità che un sistema composto da  $N$  particelle assuma una determinata configurazione, quando  $N \gg 1$  e  $k$  è dell'ordine di  $N/2$ . Il coefficiente binomiale è:

$$P(k \text{ spin su } N \text{ nello stato } |+\rangle) = \frac{1}{2^N} \binom{N}{k} = \frac{1}{2^N} \frac{N!}{k!(N-k)!}$$

Applicando il logaritmo e le sue proprietà:

$$\ln P = \ln \left( \frac{1}{2^N} \frac{N!}{k!(N-k)!} \right) = \ln N! - \ln k! - \ln(N-k)! - N \ln 2$$

Si applica l'approssimazione di Stirling ( $\ln M! \simeq M \ln M - M$ ):

$$\ln P \simeq \underbrace{(N \ln N - N)}_{\ln N!} - \underbrace{(k \ln k - k)}_{\ln k!} - \underbrace{((N-k) \ln(N-k) - (N-k))}_{\ln(N-k)!} - N \ln 2$$

Riordinando i termini è possibile scrivere:

$$\ln P \simeq N \ln N - N - k \ln k + k - (N - k) \ln (N - k) + N - k - N \ln 2$$

I termini lineari in  $N$  e  $k$  si cancellano, quindi:

$$\ln P \simeq N \ln N - [k \ln k + (N - k) \ln (N - k)] - N \ln 2.$$

Si applicano le proprietà dei logaritmi ai termini  $N \ln N - N \ln 2$ :

$$\ln P \simeq N \ln \frac{N}{2} - (k \ln k + (N - k) \ln (N - k))$$

Si definisce lo scarto  $k$  dalla media  $\mu = N/2$  di una quantità  $\Delta s \ll N/2$ :

$$k = \frac{N}{2} + \Delta s \quad \text{e} \quad N - k = \frac{N}{2} - \Delta s$$

Si può scrivere  $N - k$  come:

$$N - k = N - \frac{N}{2} - \Delta s = \frac{N}{2} - \Delta s = \frac{N}{2} \left( 1 - \frac{\Delta s}{\frac{N}{2}} \right)$$

Si applica il logaritmo a entrambi i membri:

$$\ln(N - k) = \ln \left( \frac{N}{2} \left( 1 - \frac{\Delta s}{\frac{N}{2}} \right) \right) = \ln \frac{N}{2} + \ln \left( 1 - \frac{\Delta s}{\frac{N}{2}} \right)$$

Siccome  $\Delta s \ll N/2$ , è possibile sviluppare in serie di Taylor il secondo logaritmo al secondo membro:

$$\ln \left( 1 - \frac{2\Delta s}{N} \right) \simeq -\frac{2\Delta s}{N} - \frac{1}{2} \left( \frac{2\Delta s}{N} \right)^2$$

Per cui si ottiene:

$$\ln(N - k) = \ln \left( \frac{N}{2} - \Delta s \right) = \ln \frac{N}{2} + \ln \left( 1 - \frac{2\Delta s}{N} \right) \simeq \ln \frac{N}{2} - \frac{2\Delta s}{N} - \frac{1}{2} \left( \frac{2\Delta s}{N} \right)^2$$

Riscrivendo l'equazione si ottiene:

$$\ln(N - k) \simeq \ln \frac{N}{2} - \frac{2\Delta s}{N} - \frac{2\Delta s^2}{N^2}$$

Analogamente, si considera  $\ln(k)$  e si applica la relazione  $k = N/2 + \Delta s$ . Per le proprietà dei logaritmi si ha:

$$\ln k = \ln \left( \frac{N}{2} + \Delta s \right) = \ln \frac{N}{2} + \ln \left( 1 + \frac{2\Delta s}{N} \right) \simeq \ln \frac{N}{2} + \frac{2\Delta s}{N} - \frac{1}{2} \left( \frac{2\Delta s}{N} \right)^2$$

Scrivendo diversamente, si ottiene:

$$\ln k \simeq \ln \frac{N}{2} + \frac{2\Delta s}{N} - \frac{2\Delta s^2}{N^2}$$

Si considerano, uno alla volta, i gruppi presenti dell'equazione per  $\ln P$ :

$$\ln P \simeq -(k \ln k + (N - k) \ln(N - k)) + N \ln \frac{N}{2}$$

Si parte dai termini contenenti il parametro  $k$ , ovvero  $k \ln k$ :

$$\begin{aligned} k \ln k &= \left( \frac{N}{2} + \Delta s \right) \left( \ln \frac{N}{2} + \frac{2\Delta s}{N} - \frac{1}{2} \left( \frac{2\Delta s}{N} \right)^2 \right) \\ &= \frac{N}{2} \ln \frac{N}{2} + \Delta s \ln \frac{N}{2} + \frac{N}{2} \cdot \frac{2\Delta s}{N} + \Delta s \cdot \frac{2\Delta s}{N} - \frac{N}{2} \cdot \frac{1}{2} \left( \frac{4\Delta s^2}{N^2} \right) \end{aligned}$$

Eseguendo le somme e semplificando si ottiene si ottiene:

$$k \ln k \simeq \frac{N}{2} \ln \frac{N}{2} + \Delta s \ln \frac{N}{2} + \Delta s + \frac{\Delta s^2}{N}$$

Si considera ora la restante parte:

$$\begin{aligned} (N - k) \ln(N - k) &= \left( \frac{N}{2} - \Delta s \right) \left( \ln \frac{N}{2} - \frac{2\Delta s}{N} - \frac{1}{2} \left( \frac{2\Delta s}{N} \right)^2 \right) \\ &\simeq \frac{N}{2} \ln \frac{N}{2} - \Delta s \ln \frac{N}{2} - \frac{N}{2} \cdot \frac{2\Delta s}{N} + \Delta s \cdot \frac{2\Delta s}{N} - \frac{N}{2} \cdot \frac{1}{2} \left( \frac{4\Delta s^2}{N^2} \right) \end{aligned}$$

Svolgendo i seguenti passaggi:

$$\frac{N}{2} \cdot \frac{2\Delta s}{N} = \Delta s, \quad \frac{N}{2} \cdot \frac{1}{2} \left( \frac{4\Delta s^2}{N^2} \right) = \frac{\Delta s^2}{N}.$$

si ottiene:

$$(N - k) \ln(N - k) \simeq \frac{N}{2} \ln \frac{N}{2} - \Delta s \ln \frac{N}{2} - \Delta s + \frac{\Delta s^2}{N}$$

Si sostituiscono questi risultati nell'espressione per  $\ln P$ :

$$\ln P \simeq N \ln \frac{N}{2} - (k \ln k + (N - k) \ln(N - k))$$

Si sostituiscono le relative espressioni in  $k \ln k + (N - k) \ln(N - k)$ :

$$\begin{aligned} k \ln k + (N - k) \ln(N - k) &\simeq \frac{N}{2} \ln \frac{N}{2} - \Delta s \ln \frac{N}{2} - \Delta s + \frac{\Delta s^2}{N} + \\ &\quad + N \ln \frac{N}{2} + \frac{2\Delta s^2}{N} + \frac{N}{2} \ln \frac{N}{2} + \Delta s \ln \frac{N}{2} + \Delta s + \frac{\Delta s^2}{N} \end{aligned}$$

Sommando i termini analoghi si ha:

$$k \ln k + (N - k) \ln(N - k) \simeq N \ln \frac{N}{2} + \frac{2\Delta s^2}{N}.$$

Si sostituisce tale risultato nell'espressione per la probabilità:

$$\ln P \simeq N \ln \frac{N}{2} - \left( N \ln \frac{N}{2} + \frac{2\Delta s^2}{N} \right) = -\frac{2\Delta s^2}{N}$$

Dalla definizione di  $\Delta s$  si ha che  $k = N/2 + \Delta s \Leftrightarrow \Delta s = k - N/2$ . È possibile scrivere:

$$\ln P \simeq -\frac{\left(k - \frac{N}{2}\right)^2}{\frac{N}{2}}$$

Questa relazione può essere arrangiata in modo da evidenziare la varianza della distribuzione binomiale  $\sigma = N/4$ , moltiplicando e dividendo per 2 il secondo membro:

$$\ln P \simeq -\frac{1}{2} \frac{\left(k - \frac{N}{2}\right)^2}{\frac{N}{4}}$$

Si applica l'esponenziale, in modo da ricavare la probabilità  $P$ :

$$P(k \text{ spin su } N \text{ nello stato } |+\rangle) \simeq \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{\left(k - \frac{N}{2}\right)^2}{\sigma^2}\right)$$

La distribuzione ottenuta è di tipo gaussiano, con media  $\mu = N/2$  e varianza  $\sigma^2 = N/4$ . Affinché la relazione sia effettivamente una gaussiana, è necessario introdurre un termine di normalizzazione  $A$ ;

$$P(k \text{ spin su } N \text{ nello stato } |+\rangle) \simeq \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{\left(k - \frac{N}{2}\right)^2}{\sigma^2}\right)$$

Nei passaggi precedenti, la costante di normalizzazione non è comparsa a causa delle approssimazioni introdotte da Stirling e dallo sviluppo in serie di Taylor. La costante di normalizzazione è:

$$A = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi(N/4)}} = \frac{2}{\sqrt{2\pi N}}$$

Quindi la distribuzione che  $k$  spin siano nello stato up è:

$$P(k \text{ spin su } N \text{ nello stato } |+\rangle) \simeq \frac{2}{\sqrt{2\pi N}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{\left(k - \frac{N}{2}\right)^2}{\sigma^2}\right)$$

## 5.4 Stati ammissibili

Si considera un sistema composto da  $N$  particelle immerse in un potenziale. Un esempio di tale configurazione è un sistema di  $N$  spin immersi in un campo magnetico  $\vec{B}$ . In questa situazione, gli spin sono soggetti a un'energia potenziale:

$$U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$$

Se il campo magnetico ha solo componente lungo l'asse  $z$ , ovvero  $\vec{B} = B_0 \hat{z}$ , l'energia potenziale diventa:

$$U = \mp \mu_z B_0$$

dove  $\mu_z$  è la proiezione del momento magnetico intrinseco sull'asse  $z$ .

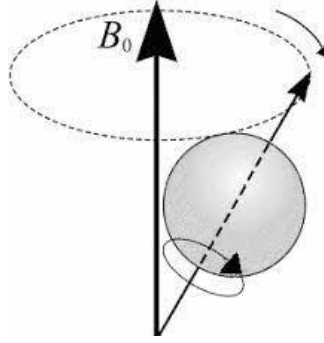


Figura 5.4: *Spin immerso in un campo magnetico*

Secondo la meccanica quantistica, le particelle possono assumere solo due livelli energetici,  $\pm \mu_z B_0$ , corrispondenti agli autovalori dell'operatore hamiltoniano in presenza di un campo magnetico:

$$\hat{H} = -\gamma B_0 \hat{S}_z$$

L'operatore  $\hat{S}_z$  presenta due autovalori:  $\pm \hbar/2$ , che corrispondono a due possibili momenti magnetici. Il momento magnetico parallelo al campo ha energia minima  $-\gamma \hbar B_0/2$ , mentre quello antiparallelo ha energia massima  $+\gamma \hbar B_0/2$ . I due stati sono indicati con  $|+\rangle$  e  $|-\rangle$ .

Supponendo che gli spin siano non interagenti, l'energia totale del sistema è data dalla somma delle energie di ciascuna particella:

$$U_{\text{tot}} = \sum_{n=1}^N (-\mu_z B_0 s(n)) = -\mu_z B_0 \sum_{n=1}^N s(n)$$

dove  $s(n) = 1$  se lo spin si trova nello stato  $|+\rangle$ , invece,  $s(n) = -1$  se lo spin si trova nello stato  $|-\rangle$ .

Se il sistema è isolato, non può scambiare energia con l'ambiente, quindi la sua energia totale rimane costante nel tempo. Il sistema può trovarsi in qualsiasi configurazione con  $k$  spin nello stato  $|+\rangle$ , purché l'energia totale sia invariata. La somma si scrive come:

$$\sum s(n) = k - (N - k) = 2k - N$$

Nel caso in esame l'energia può essere espressa come multiplo della differenza tra il numero di spin nello stato  $|+\rangle$  e quelli nello stato  $|-\rangle$ :

$$U_{\text{tot}} = -\mu_z B_0 \sum_{n=1}^N s(n) \Rightarrow U_{\text{tot}} = -(k - (N - k)) \mu_z B_0 = -(2k - N) \mu_z B_0$$

Il numero delle possibili configurazioni che il sistema può assumere con  $k$  spin nello stato  $|+\rangle$  è dato da:

$$\binom{N}{k} = \frac{N!}{k!(N - k)!}$$

Nell'ipotesi di spin non interagenti, il sistema è statico e permane nello stato iniziale. Tuttavia, nella realtà gli spin interagiscono tra loro, seppur per tempi brevi, scambiandosi energia. Così, uno spin con energia maggiore può trasferire energia a uno con energia inferiore, causando un cambio di stato per entrambi.

Si suppone che gli spin siano debolmente interagenti, ovvero che scambino una quantità di energia trascurabile rispetto all'energia totale del sistema. A causa di queste interazioni, il sistema non permane nello stato iniziale, ma evolve attraverso configurazioni diverse, purché l'energia totale rimanga costante. Le configurazioni che condividono la stessa energia totale sono dette **stati ammissibili**. In pratica, il sistema transita continuamente tra stati ammissibili, ciascuno dei quali ha uguale probabilità. Tutti gli stati ammissibili corrispondenti allo stesso stato macroscopico osservato sono equiprobabili; pertanto, osservando il sistema, esso può trovarsi in una qualsiasi di queste configurazioni.

## 5.5 Entropia

Si considerano due sistemi,  $\mathbb{S}_1$  e  $\mathbb{S}_2$ , composti rispettivamente da  $N_1$  e  $N_2$  particelle, con energie  $U_1$  e  $U_2$ . I due sistemi sono messi in contatto in modo da poter scambiare energia, ma non materia: si tratta quindi di un contatto termico, ma non diffusivo.

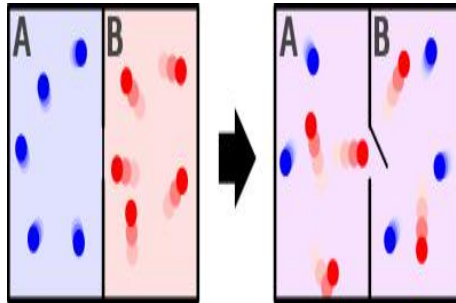


Figura 5.5: *Sistemi posti in contatto*

Una volta messi in contatto, i due sistemi formano un sistema complessivo  $\mathbb{S}$ , con  $N = N_1 + N_2$  particelle e energia totale  $U = U_1 + U_2$ . Si suppone che il sistema  $\mathbb{S}$  sia isolato rispetto all'ambiente esterno, quindi non può scambiare energia con esso.



Si considera il sistema  $\mathbb{S}_1$ , la cui energia dipende dallo stato delle sue particelle. Sia  $s_1$  una variabile che enumera le configurazioni possibili del sistema, ad esempio il numero di spin nello stato  $|+\rangle$ . L'energia del sistema è funzione della configurazione:

$$U_1 = U_1(s_1)$$

La variabile  $s_1$  non identifica una singola configurazione, ma un insieme di configurazioni con la stessa energia  $U_1(s_1)$ .

La numerosità degli stati ammissibili  $g$  è funzione del numero di particelle e dell'energia:

$$g_1(U_1(s_1), N_1)$$

Analogo discorso vale per il sistema  $\mathbb{S}_2$ , la cui numerosità degli stati ammissibili è:

$$g_2(U_2(s_2), N_2)$$

Ponendo in contatto, i due sistemi l'energia totale, costante nel tempo, è data da:

$$U = U_1(s_1) + U_2(s_2)$$

È possibile descrivere l'energia del secondo sistema in funzione dell'energia totale e dell'energia del primo sistema:

$$U_2(s_2) = U - U_1(s_1)$$

La numerosità degli stati del secondo sistema può essere scritta come:

$$g_2(U - U_1(s_1), N_2)$$

Da questo ragionamento si evince che, al variare dell'energia del sistema  $\mathbb{S}_1$ , varia la sua numerosità degli stati ammissibili. Poiché l'energia totale è costante, un aumento dell'energia di  $\mathbb{S}_1$  comporta una diminuzione dell'energia di  $\mathbb{S}_2$ , influenzando a sua volta la numerosità dei suoi stati ammissibili. La configurazione più probabile corrisponde al massimo del prodotto  $g_1 g_2$ .

Fissando il valore di  $s_1$ , è univocamente determinata anche la sua energia  $U_1$ . Il numero di configurazioni possibili per il sistema complessivo  $\mathbb{S} = \mathbb{S}_1 + \mathbb{S}_2$  è dato dal prodotto delle numerosità:

$$g(U, N) = g_1(U_1(s_1), N_1) g_2(U - U_1(s_1), N_2)$$

dove  $N = N_1 + N_2$ . Per ogni stato ammissibile del primo del primo sistema, il secondo può trovarsi in uno qualunque dei suoi stati ammissibili, il cui numero dipende dall'energia del sistema  $\mathbb{S}_1$ . In altre parole, al

variare dell'enumerazione  $s_1$  del primo sistema, varia anche la numerosità degli stati ammissibili del sistema totale. Esiste, di conseguenza, un massimo della funzione  $g(U, N)$ , ottenuto ponendo uguale a 0 la derivata di  $g$  rispetto all'energia:

$$\frac{\partial g}{\partial U} = \frac{\partial g}{\partial U_1} = \frac{\partial}{\partial U_1} (g_1(U_1(s_1), N_1) g_2(U - U_1(s_1), N_2))$$

Per le proprietà delle derivate si ha:

$$\frac{\partial g}{\partial U_1} = \frac{\partial g_1}{\partial U_1} g_2 - g_1 \frac{\partial g_2}{\partial U_1}$$

Il segno meno deriva dalla dipendenza di  $g_2$  da  $-U_1$ . In condizione di massimo, è valida la relazione:

$$\frac{\partial g}{\partial U} = 0$$

Ovvero:

$$\frac{\partial g_1}{\partial U_1} g_2 - g_1 \frac{\partial g_2}{\partial U_1} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial g_1}{\partial U_1} g_2 = g_1 \frac{\partial g_2}{\partial U_1}$$

Dividendo per  $g_1 g_2$ :

$$\frac{1}{g_1} \frac{\partial g_1}{\partial U_1} = \frac{1}{g_2} \frac{\partial g_2}{\partial U_1}$$

Poiché:

$$\frac{\partial}{\partial U_1} \ln g_1 = \frac{1}{g_1} \frac{\partial g_1}{\partial U_1}$$

Si ottiene:

$$\frac{\partial}{\partial U_1} \ln g_1 = \frac{\partial}{\partial U_1} \ln g_2$$

Si definisce **entropia adimensionale** o **logaritmo della molteplicità** di un sistema  $\sigma$  come il logaritmo della molteplicità degli stati aventi tutti la stessa energia:

$$\sigma = \ln g$$

Si definisce **entropia di Boltzmann** come:

$$S = k_B \ln g = k_B \sigma$$

Tramite il concetto di entropia è possibile riscrivere la relazione precedente come:

$$\left. \frac{\partial \sigma}{\partial U} \right|_1 = \left. \frac{\partial \sigma}{\partial U} \right|_2$$

Questa relazione implica che, una volta raggiunto l'equilibrio termico, i due sistemi hanno la stessa temperatura. Le entropie possono essere diverse, poiché dipendono dal numero di particelle e dalle configurazioni possibili.

La legge zero della termodinamica afferma che due sistemi posti in contatto termico raggiungono la stessa temperatura. Dal ragionamento precedente, si definisce la temperatura come:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial U} = \frac{1}{k_B T}$$

dove  $k_B = 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$  è la costante di Boltzmann, necessaria per garantire la correttezza dimensionale.

L'entropia è legata al disordine del sistema: maggiore è il numero di configurazioni ammissibili, maggiore è il disordine e quindi l'entropia.

## 5.6 Distribuzione di Boltzmann

Si supponga che un sistema  $\mathbb{S}_1$  sia molto più piccolo rispetto a un sistema  $\mathbb{S}_2$ . I due sistemi sono posti in contatto termico, in modo che possano scambiarsi energia. Il sistema  $\mathbb{S}_2$  è detto serbatoio termico, poiché la sua energia totale  $U$  varia di una quantità trascurabile (idealmente nulla) quando interagisce con  $\mathbb{S}_1$ .

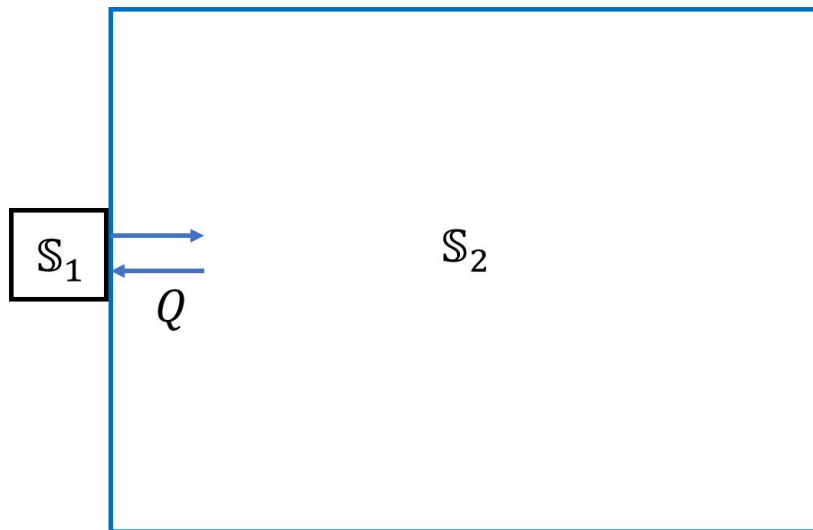


Figura 5.6: Sistema molto più piccolo dell'altro messi in contatto termico

Si vuole collegare le variazioni di entropia del piccolo sistema con quelle del grande sistema, raggiunto l'equilibrio termico.

L'entropia è legata alla probabilità di trovare il sistema  $\mathbb{S}_1$  in uno stato specifico  $s_1$ , a cui corrisponde un'energia  $\varepsilon_1^\alpha \ll U$ , mediante la numerosità degli stati. Per valutare questa probabilità si scrive la numerosità del sistema totale:

$$g(\varepsilon_1^\alpha, N) = g_1(\varepsilon_1^\alpha, N_1) t g_2(U - \varepsilon_1^\alpha, N_2)$$

Fissata l'energia e la configurazione del piccolo sistema (come lo stato di uno spin immerso nell'ambiente) risulta che:

$$g_1(\varepsilon_1^\alpha, N_1) = 1$$

Le possibili configurazioni ammissibili dipendono solamente dal sistema  $\mathbb{S}_2$ , poiché, appunto, la configurazione di  $\mathbb{S}_1$  è fissata:

$$g(\varepsilon_1^\alpha, N) = g_2(U - \varepsilon_1^\alpha, N_2)$$

Si considera un secondo valore di energia del sistema  $\mathbb{S}_1$ ,  $\varepsilon_1^\beta$ . Fissato lo stato del sistema  $\mathbb{S}_1$ , la numerosità degli stati ammissibili dal sistema complessivo è data da:

$$g(\varepsilon_1^\beta, N) = g_2(U - \varepsilon_1^\beta, N_2)$$

La numerosità è legata alla probabilità mediante un fattore di normalizzazione, dato dal numero totale delle configurazioni possibili del sistema, indipendente dall'energia. Calcolando il rapporto tra le due numerosità degli stati del sistema globale, si ottiene il rapporto tra la probabilità che il sistema  $\mathbb{S}_2$  sia nello stato  $g_2(U - \varepsilon_1^\alpha)$  e la probabilità che sia nello stato  $g_2(U - \varepsilon_1^\beta)$ . In altre parole, il fattore di normalizzazione si elide:

$$\frac{P(\varepsilon_1^\alpha)}{P(\varepsilon_1^\beta)} = \frac{g_2(U - \varepsilon_1^\alpha, N_2)}{g_2(U - \varepsilon_1^\beta, N_2)}$$

L'entropia è legata alla numerosità degli stati mediante logaritmo:

$$\sigma = \ln g = \ln g_2$$

Applicando l'esponenziale si ha:

$$g_2 = e^\sigma$$

Sostituendo questo risultato nel rapporto tra le probabilità si ottiene:

$$\frac{P(\varepsilon_1^\alpha)}{P(\varepsilon_1^\beta)} = \frac{g_2(U - \varepsilon_1^\alpha, N_2)}{g_2(U - \varepsilon_1^\beta, N_2)} = \frac{\exp(\sigma(U - \varepsilon_1^\alpha, N_2))}{\exp(\sigma(U - \varepsilon_1^\beta, N_2))}$$

Dato che  $\varepsilon_1^\alpha, \varepsilon_1^\beta \ll U$ , si può sviluppare  $\sigma(U - \varepsilon)$  in serie di Taylor al primo ordine:

$$\sigma(U - \varepsilon_1^i, N_2) \simeq \sigma(U) - \varepsilon_1^i \frac{\partial \sigma}{\partial U}, \quad i = \alpha, \beta$$

Per definizione di temperatura:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial U} = \frac{1}{k_B T}$$

Lo sviluppo si scrive come:

$$\sigma(U - \varepsilon_1^i, N_2) \simeq \sigma(U) - \varepsilon_1^i \frac{1}{k_B T}, \quad i = \alpha, \beta$$

Si sostituisce questo risultato nel rapporto tra le due probabilità:

$$\frac{P(\varepsilon_1^\alpha)}{P(\varepsilon_1^\beta)} = \frac{\exp(\sigma(U - \varepsilon_1^\alpha, N_2))}{\exp(\sigma(U - \varepsilon_1^\beta, N_2))} \simeq \frac{\exp(\sigma(U)) \exp\left(-\frac{\varepsilon_1^\alpha}{k_B T}\right)}{\exp(\sigma(U)) \exp\left(-\frac{\varepsilon_1^\beta}{k_B T}\right)}$$

Dato che l'entropia è la stessa per entrambe le configurazioni, si semplifica  $\exp(\sigma(U))$ :

$$\frac{P(\varepsilon_1^\alpha)}{P(\varepsilon_1^\beta)} \simeq \frac{\exp\left(-\frac{\varepsilon_1^\alpha}{k_B T}\right)}{\exp\left(-\frac{\varepsilon_1^\beta}{k_B T}\right)}$$

Dato che il rapporto tra le due probabilità  $P(\varepsilon_1^\alpha)$  e  $P(\varepsilon_1^\beta)$ , restituisce il rapporto tra due esponenziali, la probabilità generica  $P(\varepsilon)$  deve essere proporzionale all'esponenziale:

$$P(\varepsilon) \propto \exp\left(-\frac{\varepsilon}{k_B T}\right)$$

Il termine esponenziale al secondo membro,  $\exp\left(-\frac{\varepsilon}{k_B T}\right)$ , indica la probabilità relativa, non normalizzata, di un singolo stato, è chiamato fattore di Boltzmann.

Per ottenere la dipendenza esatta della probabilità dall'energia del piccolo sistema,  $\varepsilon$ , si introduce un fattore di normalizzazione  $Z$ , tale che:

$$P(\varepsilon) = \frac{1}{Z} \exp\left(-\frac{\varepsilon}{k_B T}\right)$$

$Z$  è scelto in modo tale che la somma di tutte le probabilità, al variare dell'energia del sistema  $\mathbb{S}_1$ , sia unitaria, ovvero:

$$Z : \sum_n P(\varepsilon_n) = 1$$

Sostituendo l'espressione per la probabilità, si ha:

$$\frac{1}{Z} \sum_n \exp\left(-\frac{\varepsilon_n}{k_B T}\right) = 1$$

Da cui:

$$Z = \sum_n \exp\left(-\frac{\varepsilon_n}{k_B T}\right)$$

$Z$  è noto come fattore di ripartizione e funge, come detto, da costante di normalizzazione. La probabilità di una configurazione del piccolo sistema con energia  $\varepsilon$  è:

$$P(\varepsilon) = \frac{\exp\left(-\frac{\varepsilon}{k_B T}\right)}{\sum_n \exp\left(-\frac{\varepsilon_n}{k_B T}\right)}$$

### 5.6.1 Magnetizzazione macroscopica

Mediante la distribuzione di Boltzmann è possibile determinare la magnetizzazione macroscopica di un volumetto di materiale contenente un numero di Avogadro di particelle, immerso in un campo magnetico uniforme diretto lungo l'asse  $z$ .

Ogni spin presente nel volumetto può assumere uno dei due livelli energetici:

$$\varepsilon_{1,2} = \pm \gamma \frac{\hbar}{2} B_0$$

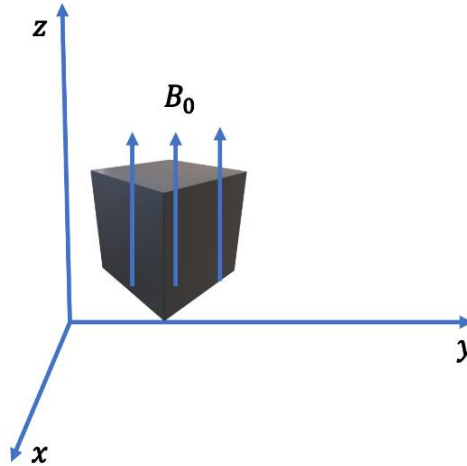


Figura 5.7: Volume elementare immerso in un campo magnetico

Utilizzando la distribuzione di Boltzmann, la probabilità che una particella si trovi nello stato  $|+\rangle$  o  $|-\rangle$  è:

$$P(\varepsilon_{1,2}) = \frac{1}{Z} \exp\left(-\frac{\varepsilon_{1,2}}{k_B T}\right)$$

dove il fattore di partizione  $Z$  è:

$$Z = \sum_n \exp\left(-\frac{\varepsilon_n}{k_B T}\right) = \exp\left(\frac{\gamma \hbar B_0}{2k_B T}\right) + \exp\left(-\frac{\gamma \hbar B_0}{2k_B T}\right)$$

Poiché gli spin possono assumere solo due livelli energetici, il fattore di partizione è la somma di due termini.

Sia  $N$  il numero degli spin nell'unità di volume. Il momento di magnetizzazione è dato da:

$$M = N\gamma \frac{\hbar}{2} (P^+ - P^-)$$

dove  $P^+$  è il totale degli spin nello stato  $|+\rangle$ , mentre  $P^-$  nello stato  $|-\rangle$ . In altre parole, il vettore di magnetizzazione  $M$  è dato dal netto degli spin nello stato parallelo rispetto a quelli nello stato antiparalelo, rispetto al campo applicato. Per la distribuzione di Boltzmann, risulta che:

$$P^+ = \frac{\exp\left(\frac{\gamma \hbar B_0}{2k_B T}\right)}{\exp\left(\frac{\gamma \hbar B_0}{2k_B T}\right) + \exp\left(-\frac{\gamma \hbar B_0}{2k_B T}\right)}, \quad P^- = \frac{\exp\left(-\frac{\gamma \hbar B_0}{2k_B T}\right)}{\exp\left(\frac{\gamma \hbar B_0}{2k_B T}\right) + \exp\left(-\frac{\gamma \hbar B_0}{2k_B T}\right)}$$

Il vettore di magnetizzazione, dunque, è dato da:

$$M = N\gamma \frac{\hbar}{2} \left( \frac{\exp\left(\frac{\gamma \hbar B_0}{2k_B T}\right) - \exp\left(-\frac{\gamma \hbar B_0}{2k_B T}\right)}{\exp\left(\frac{\gamma \hbar B_0}{2k_B T}\right) + \exp\left(-\frac{\gamma \hbar B_0}{2k_B T}\right)} \right)$$

Il secondo membro coincide con la tangente iperbolica, per cui:

$$M = N\gamma \frac{\hbar}{2} \tanh\left(\frac{\gamma \hbar B_0}{2k_B T}\right)$$

In regime di alta temperatura, ovvero quando:

$$\frac{\gamma \hbar B_0}{2k_B T} \ll 1 \Leftrightarrow \frac{\gamma \hbar B_0}{2} \ll k_B T$$

si può approssimare la tangente iperbolica con il suo argomento. Il momento di magnetizzazione può essere scritto come:

$$M = N\gamma \frac{\hbar}{2} \tanh\left(\frac{\gamma \hbar B_0}{2k_B T}\right) \simeq N\gamma \frac{\hbar}{2} \frac{\gamma \hbar B_0}{2k_B T}$$

Da cui si ricava la legge di Curie:

$$M \simeq N \frac{\gamma^2 \hbar^2}{4k_B T} B_0$$

La magnetizzazione è proporzionale al campo magnetico applicato e inversamente proporzionale alla temperatura.

Dall'ultima relazione è possibile ricavare un'espressione per la suscettività magnetica  $\chi_m$ :

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$$

Poiché si assume che la densità di spin sia bassa, si può approssimare  $\vec{B}_0 \simeq \mu_0 \vec{H}$ , da cui:

$$M \simeq N \frac{\gamma^2 \hbar^2}{4k_B T} (\mu_0 H)$$

In particolare, la suscettività magnetica è data da:

$$\chi_m \simeq \mu_0 N \frac{\gamma^2 \hbar^2}{4k_B T}$$

La magnetizzazione netta dipende dal campo applicato e dall'inverso della temperatura. Gli altri parametri sono costanti, dunque, non è possibile agire su di essi. In risonanza magnetica, la temperatura non può essere resa piccola a piacere per non raffreddare eccessivamente il paziente. Si utilizzano, per tale motivo, campi magnetici molto elevati, dell'ordine di  $1.5 \text{ T}$  in diagnostici,  $3 \text{ T}$  in terapia e  $7 \text{ T}$  in ricerca.

### 5.6.2 Legge di Planck

Si considera una cavità metallica rettangolare con un piccolo foro al centro di una delle sue pareti. Questo sistema approssima il comportamento di un corpo nero. Dal foro fuoriesce una radiazione elettromagnetica la cui distribuzione energetica dipende dalla temperatura della cavità.

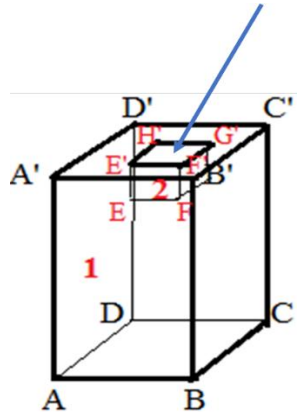


Figura 5.8: Approssimazione del corpo nero

Mediante la meccanica classica non è possibile spiegare il comportamento dello spettro di emissione del corpo nero. Planck ipotizzò che la radiazione elettromagnetica avesse una natura quantizzata, cioè che l'energia potesse assumere solo valori discreti dati da:

$$E = n h \nu, \quad n \in \mathbb{N}$$

Il comportamento del corpo nero può dunque essere spiegato e descritto mediante la meccanica quantistica e la statistica.



Nella cavità esistono dei modi di oscillazione del campo elettromagnetico. Sia  $\omega$  la pulsazione di uno di questi modi. L'ipotesi di Planck afferma che l'energia è quantizzata, dunque, può assumere valori multipli di una quantità fondamentale  $\hbar\omega$ . I livelli energetici dei fotoni associati a questo modo sono:

$$E_s = s\hbar\omega, \quad s \in \mathbb{N}.$$

Si considera un singolo modo del campo elettromagnetico, che può contenere un numero variabile di fotoni, ciascuno con energia  $\hbar\omega$ . La probabilità che il modo contenga  $s$  fotoni (cioè si trovi al livello energetico  $E_s = s\hbar\omega$ ) è data da:

$$P(E_s) = \frac{1}{Z} \exp\left(-\frac{s\hbar\omega}{k_B T}\right),$$

dove il fattore di partizione  $Z$ , nell'ipotesi che  $s$  possa assumere qualsiasi valore intero non negativo, è dato da:

$$Z = \sum_{s=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{s\hbar\omega}{k_B T}\right).$$

Il fattore di ripartizione  $Z$  è una serie geometrica con ragione minore dell'unità, dunque, convergente:

$$Z = \sum_{s=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{s\hbar\omega}{k_B T}\right) = \frac{1}{1 - \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right)}$$

La probabilità che il modo contenga  $s$  fotoni è quindi:

$$P(E_s) = \frac{1}{Z} \exp\left(-\frac{s\hbar\omega}{k_B T}\right) = \exp\left(-\frac{s\hbar\omega}{k_B T}\right) \left(1 - \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right)\right)$$

Il valor medio dell'energia del modo con pulsazione  $\omega$  è:

$$\langle E \rangle = \sum_{s=0}^{\infty} E_s P(E_s)$$

Sostituendo  $E_s = s\hbar\omega$  e la forma di  $P(E_s)$ , si ottiene:

$$\langle E \rangle = \sum_{s=0}^{\infty} E_s P(E_s) = \sum_{s=0}^{\infty} s\hbar\omega \exp\left(-\frac{s\hbar\omega}{k_B T}\right) \left(1 - \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right)\right) =$$

Per la linearità della sommatoria, si ha:

$$\langle E \rangle = \hbar\omega \left(1 - \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right)\right) \sum_{s=0}^{\infty} s \exp\left(-\frac{s\hbar\omega}{k_B T}\right)$$

si definisce la variabile  $x$  come:

$$x = \frac{\hbar\omega}{k_B T}$$

si osserva che:

$$\sum_{s=0}^{\infty} s \exp(-xs), \quad x = \frac{\hbar\omega}{k_B T}$$

Sostituendo, si ottiene:

$$s \exp(-xs) = -\frac{d}{dx} \exp(-xs)$$

Per cui è possibile scrivere:

$$\langle E \rangle = \hbar\omega \left( 1 - \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right) \right) \sum_{s=0}^{\infty} \left( -\frac{d}{dx} \exp\left(-\frac{s\hbar\omega}{k_B T}\right) \right)$$

Per la linearità della sommatoria e della derivata si ha:

$$\langle E \rangle = -\hbar\omega \left( 1 - \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right) \right) \frac{d}{dx} \sum_{s=0}^{\infty} \exp(-xs)$$

La serie risulta essere convergente in quanto serie geometrica con ragione in modulo minore dell'unità. Il valor medio può essere scritto come:

$$\langle E \rangle = -\hbar\omega \left( 1 - \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right) \right) \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{1 - \exp(-x)} \right)$$

Svolgendo la derivata, si ottiene:

$$\langle E \rangle = -\hbar\omega \left( 1 - \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right) \right) \frac{-\exp\left(-\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right)}{\left( 1 - \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right) \right)^2}$$

Semplificando:

$$\langle E \rangle = \hbar\omega \frac{\exp\left(-\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right)}{\left( 1 - \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right) \right)}$$

È possibile raccogliere il termine esponenziale  $\exp\left(-\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right)$ :

$$\langle E \rangle = \frac{\hbar\omega}{\left( \exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right) - 1 \right)}$$

Questa è la **legge di Planck** per l'energia media di un modo del campo elettromagnetico. Essa rappresenta una delle prime applicazioni della quantizzazione dell'energia e costituisce un risultato fondamentale della meccanica quantistica e della statistica di Boltzmann.

### 5.6.3 Rumore termico o di Johnson-Nyquist

Il rumore termico, noto anche come rumore di Johnson-Nyquist, è sempre presente nei componenti elettronici, come resistori o dispositivi a semiconduttore.

Si considera una linea di trasmissione chiusa alle estremità da due resistori uguali all'impedenza caratteristica della linea. In altre parole, le resistenze sono adattate alla linea. Sulla linea di trasmissione, cioè, viaggiano solamente onde progressive o modi, a causa dell'adattamento ( $\Gamma = 0$ ), generate dalle resistenze, la cui energia dipende dalla temperatura a cui si trovano, in accordo con la legge di Planck. Poiché il sistema è adattato, la potenza trasferita sul carico è data da:

$$P = \frac{\langle V^2 \rangle}{4R} = \langle I^2 \rangle R$$



Figura 5.9: *Linea di trasmissione adattata*

Per ogni pulsazione del modo,  $\omega$ , esistono due onde viaggianti in direzione opposte. Sia  $L$  la lunghezza della linea e  $c$  la velocità di propagazione del segnale sulla linea. Il tempo impiegato dall'onda per percorrere l'intera linea di trasmissione è:

$$\Delta t = \frac{L}{c}$$

I modi presenti sulla linea presentano delle frequenze multiple intere di una quantità  $\delta f$  data da:

$$\delta f = \frac{1}{\Delta t} = \frac{c}{L}$$

In un intervallo di frequenze  $\Delta f$ , il numero di modi è:

$$n_{\text{modi}} = \frac{\Delta f}{\delta f} = \frac{L}{c} \Delta f$$

Noto il numero di modi presenti nell'intervallo frequenziale  $\Delta f$ , è possibile valutare l'energia complessivamente presente sulla linea di trasmissione:

$$E = 2 \frac{\Delta f}{\delta f} \langle E \rangle$$

Il fattore 2 è dovuto alle due onde generate dai resistori.

Ogni singolo modo può essere considerato come un fotone immerso in un sistema, composto dagli altri fotoni, per cui è possibile applicare la legge di Planck per il calcolo dell'energia media:

$$\langle E \rangle = \frac{\hbar\omega}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right) - 1}$$

Quindi:

$$E = 2 \cdot \frac{\Delta f}{\delta f} \cdot \frac{\hbar\omega}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right) - 1}$$

Per le normali frequenze utilizzate nella pratica elettrotecnica, risulta che:

$$\hbar\omega \ll k_B T \Leftrightarrow \frac{\hbar\omega}{k_B T} \ll 1$$

In questa ipotesi, è possibile approssimare l'esponenziale in serie di Taylor, arrestato al primo ordine:

$$\exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right) \simeq 1 + \frac{\hbar\omega}{k_B T}$$

Con questa approssimazione, l'energia media è:

$$\langle E \rangle = \frac{\hbar\omega}{\left(\exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right) - 1\right)} \simeq \frac{\hbar\omega}{\left(1 + \frac{\hbar\omega}{k_B T} - 1\right)} = k_B T$$

L'energia complessiva, di conseguenza, è:

$$E = 2 \frac{\Delta f}{\delta f} k_B T$$

A questa energia corrisponde una potenza data, per definizione, da:

$$P = \frac{E}{\Delta t} = 2 \frac{1}{\Delta t} \frac{\Delta f}{\delta f} k_B T$$

Ma  $\Delta t$  è l'inverso di  $\delta f$ , dunque, il prodotto dei due termini è unitario. La potenza è, quindi:

$$P = \frac{E}{\Delta t} = 2 \Delta f k_B T$$

Su un singolo resistore, si ritrova metà potenza, ovvero:

$$P_R = \frac{P}{2} = \Delta f k_B T$$

Per l'adattamento in potenza, la potenza trasferita al carico è:

$$P = \frac{\langle V^2 \rangle}{4R}$$

Sostituendo l'espressione appena determinata per la potenza, è possibile ricavare  $\langle V^2 \rangle$ :

$$\Delta f k_B T = \frac{\langle V^2 \rangle}{4R} \Leftrightarrow \langle V^2 \rangle = 4R \Delta f k_B T$$

$\langle V^2 \rangle$  corrisponde al valor quadratico medio della tensione su un resistore, dovuto all'agitazione termica dei suoi portatori di carica, nella banda  $\Delta f$ . Il rumore termico presenta la stessa ampiezza in tutto il range frequenziale  $\Delta f$  per cui può essere modellato come un rumore bianco.

Non approssimando l'esponenziale, il valor quadratico medio della tensione su un resistore è dato da:

$$\langle V^2 \rangle = 4R \Delta f \frac{\hbar \omega}{\left( \exp \left( \frac{\hbar \omega}{k_B T} \right) - 1 \right)}$$

La **frequenza di taglio** è:

$$f_0 = \frac{k_B T}{2\pi \hbar}$$

Questa frequenza, a temperatura ambiente, è data da:

$$f_0 = \frac{k_B T}{2\pi \hbar} = \frac{1.38 \cdot 10^{-23} \frac{J}{K} \cdot 290 K}{6.63 \cdot 10^{-34} J \cdot s} = 6.05 THz$$

Questa frequenza, come detto precedentemente, è molto maggiore di quelle gestibili con l'attuale strumentazione elettronica. Per questo motivo si ricorre alla relazione approssimata.

## 5.7 Distribuzione di Gibbs

Si considerano due sistemi contenenti rispettivamente  $N_1$  e  $N_2$  particelle, posti in contatto sia termico che diffusivo, ovvero capaci di scambiare energia e materia.

Il sistema totale ha energia data dalla somme delle singole energie iniziali dei due sistemi,  $U = U_1 + U_2$ . Si suppone, infine, che il sistema complessivo sia isolato dall'ambiente, così da conservare la propria energia.

Prima del contatto, i due sistemi possedevano entropie  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ . Dopo il contatto, per ragioni probabilistiche, l'entropia totale sarà massima.

Si suppone che il sistema  $S_1$  sia molto più piccolo di  $S_2$ , che può essere considerato un serbatoio termico. Si vuole valutare la probabilità che  $S_1$  si trovi in uno stato con  $N_a$  particelle ed energia  $U_a$ .

Fissata la configurazione del sistema  $S_1$ , la probabilità che si verifichi questa condizione dipende dalle configurazioni ammissibili del sistema  $S_2$ , ovvero:

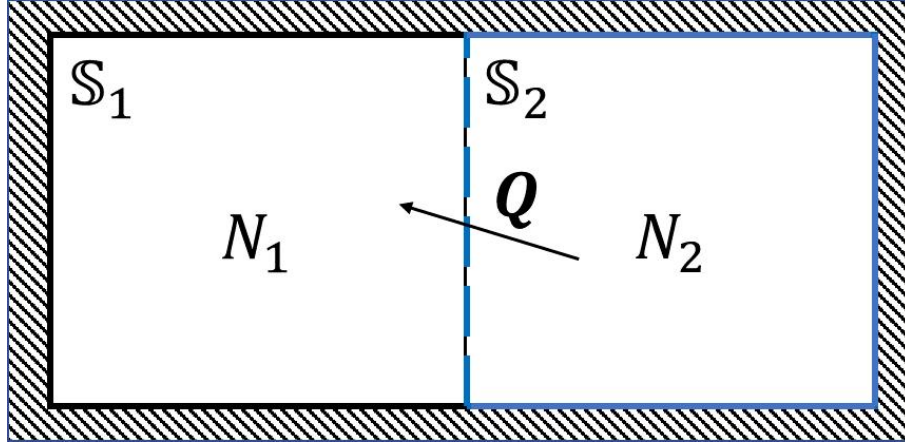


Figura 5.10: Sistemi posti in contatto termico e diffusivo

$$P(N_a, U_a) = g_2(N_2, U_2)$$

Siccome il numero delle particelle è costante, così come l'energia, è possibile scrivere:

$$N = N_a + N_2 \Leftrightarrow N_2 = N - N_a, \quad U = U_a + U_2 \Leftrightarrow U_2 = U - U_a$$

La numerosità degli stati ammissibili dal sistema  $S_2$  può essere scritta come:

$$P(N_a, U_a) \propto g_2(N - N_a, U - U_a)$$

La probabilità che il sistema  $S_1$  assuma un'altra configurazione, caratterizzata da un numero  $N_b$  di particelle da un'energia uguale a  $U_b$ , è data da:

$$P(N_b, U_b) \propto g_2(N - N_b, U - U_b)$$

Il rapporto tra le due probabilità si scrive come:

$$\frac{P(N_a, U_a)}{P(N_b, U_b)} = \frac{g_2(N - N_a, U - U_a)}{g_2(N - N_b, U - U_b)}$$

Applicando il logaritmo:

$$\log \left( \frac{P(N_a, U_a)}{P(N_b, U_b)} \right) = \log \left( \frac{g_2(N - N_a, U - U_a)}{g_2(N - N_b, U - U_b)} \right) = \log g_2(N - N_a, U - U_a) - \log g_2(N - N_b, U - U_b)$$

Per la definizione di entropia  $\sigma(N, U) = \log g(N, U)$ , il logaritmo del rapporto può essere espresso come:

$$\log \left( \frac{P(N_a, U_a)}{P(N_b, U_b)} \right) = \sigma(N - N_a, U - U_a) - \sigma(N - N_b, U - U_b)$$

Siccome il sistema  $\mathbb{S}_2$  è molto più grande del sistema  $\mathbb{S}_1$ , è possibile concludere che:

$$U \gg U_a, U_b, \quad N \gg N_a, N_b$$

È possibile sviluppare in serie di Taylor l'entropia, arrestando lo sviluppo al primo ordine:

$$\sigma(N - N_i, U - U_i) = \sigma(N, U) - \left. \frac{\partial \sigma}{\partial N} \right|_N N_i - \left. \frac{\partial \sigma}{\partial U} \right|_U U_i, \quad i = a, b$$

Con questa approssimazione si ottiene:

$$\log \left( \frac{P(N_a, U_a)}{P(N_b, U_b)} \right) = \sigma(N, U) - \left. \frac{\partial \sigma}{\partial N} \right|_N N_a - \left. \frac{\partial \sigma}{\partial U} \right|_U U_a - \sigma(N, U) + \left. \frac{\partial \sigma}{\partial N} \right|_N N_b - \left. \frac{\partial \sigma}{\partial U} \right|_U U_b$$

Elidendo  $\sigma(N, U)$  e raccogliendo:

$$\log \left( \frac{P(N_a, U_a)}{P(N_b, U_b)} \right) = (N_b - N_a) \left. \frac{\partial \sigma}{\partial N} \right|_N + (U_b - U_a) \left. \frac{\partial \sigma}{\partial U} \right|_U$$

Si definisce la temperatura come:

$$\left. \frac{\partial \sigma}{\partial U} \right|_U = \frac{1}{k_B T}$$

Si definisce potenziale chimico  $\mu$  come il fattore di proporzionalità tra la derivata dell'entropia rispetto al numero di particelle e la temperatura:

$$\left. \frac{\partial \sigma}{\partial N} \right|_N = -\frac{\mu}{k_B T}$$

Con queste definizioni, si ha:

$$\log \left( \frac{P(N_a, U_a)}{P(N_b, U_b)} \right) = -(N_b - N_a) \frac{\mu}{k_B T} + (U_b - U_a) \frac{1}{k_B T} = (N_a - N_b) \frac{\mu}{k_B T} - (U_a - U_b) \frac{1}{k_B T}$$

Si applica l'esponenziale, si ha:

$$\frac{P(N_a, U_a)}{P(N_b, U_b)} = \exp \left( \frac{\mu N_a - U_a}{k_B T} \right) \exp \left( -\frac{\mu N_b - U_b}{k_B T} \right) = \frac{\exp \left( \frac{\mu N_a - U_a}{k_B T} \right)}{\exp \left( \frac{\mu N_b - U_b}{k_B T} \right)}$$

Quindi, la probabilità che il sistema  $\mathbb{S}_1$  si trovi in uno stato con energia  $U_a$  e con un numero di particelle  $N_a$  è proporzionale a:

$$P(N_a, U_a) \propto \exp \left( \frac{\mu N_a - U_a}{k_B T} \right)$$

L'esponenziale nella relazione individuata è detto **fattore di Gibbs**. La probabilità esatta si esprime introducendo un **fattore di normalizzazione**  $Z$ , tale che:

$$\frac{1}{Z} \sum_N \sum_U P(N, U) = 1$$

Sostituendo la relazione per la probabilità, si ricava:

$$\frac{1}{Z} \sum_N \sum_U \exp\left(\frac{\mu N - U}{k_B T}\right) = 1 \Leftrightarrow Z = \sum_N \sum_U \exp\left(\frac{\mu N - U}{k_B T}\right)$$

dove  $Z$  è la **somma di Gibbs**, o **fattore di partizione**.

La probabilità che il piccolo sistema  $\mathbb{S}_1$  si trovi in uno stato  $(U_a, N_a)$  è, dunque, data da:

$$P(N_a, U_a) = \frac{\exp\left(\frac{\mu N_a - U_a}{k_B T}\right)}{\sum_N \sum_U \exp\left(\frac{\mu N - U}{k_B T}\right)}$$

La quantità  $\mu$  rappresenta la capacità di scambio diffusivo tra sistemi messi in contatto diffusivo e termico.

### 5.7.1 Distribuzione di Fermi-Dirac

I fermioni sono particelle elementari con spin semi-intero, ad esempio  $\pm\frac{1}{2}$ . Secondo il **principio di esclusione di Pauli**, due fermioni non possono occupare simultaneamente lo stesso stato quantico.

Si consideri un piccolo sistema costituito da fermioni, come elettroni o protoni. Gli stati ammissibili per ciascun livello energetico sono  $N = 0$  (livello vuoto) e  $N = 1$  (livello occupato), corrispondenti rispettivamente alle energie  $U = 0$  e  $U = \varepsilon$ . La somma di Gibbs è data da:

$$Z = \sum_N \sum_U \exp\left(\frac{\mu N - U}{k_B T}\right) = \underbrace{\exp\left(\frac{\mu \cdot 0 - 0}{k_B T}\right)}_{\text{Stato } N=0, U=0} + \underbrace{\exp\left(\frac{\mu \cdot 1 - \varepsilon}{k_B T}\right)}_{\text{Stato } N=1, U=\varepsilon} = 1 + \exp\left(\frac{\mu - \varepsilon}{k_B T}\right)$$

Si vuole determinare il **numero medio di particelle** del piccolo sistema  $\mathbb{S}_1$  con energia  $U = \varepsilon$ . Per definizione di media, si ha:

$$\langle N(\varepsilon) \rangle = \frac{1}{Z} \sum_N \sum_U N(\varepsilon) P(N, U)$$

Poiché  $N = 0$  o  $1$ , la somma si riduce al solo contributo del livello occupato:

$$\langle N(\varepsilon) \rangle = \frac{1}{Z} \exp\left(\frac{\mu - \varepsilon}{k_B T}\right) = \frac{\exp\left(\frac{\mu - \varepsilon}{k_B T}\right)}{1 + \exp\left(\frac{\mu - \varepsilon}{k_B T}\right)}$$

Raccogliendo il fattore di Gibbs, si ottiene:



$$\langle N(\varepsilon) \rangle = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{\varepsilon - \mu}{k_B T}\right)}$$

Questa è la **distribuzione di Fermi-Dirac**, che descrive il numero medio di fermioni in un determinato livello energetico  $\varepsilon$ , in funzione della temperatura  $T$  e del potenziale chimico  $\mu$ .

La statistica di Fermi-Dirac è fondamentale nello studio dei semiconduttori, dei metalli e dei cristalli scintillatori, dove è necessario conoscere la probabilità che un livello energetico sia occupato da un elettrone.

### 5.7.2 Distribuzione di Bose-Einstein

I bosoni sono particelle con spin intero o nullo. A differenza dei fermioni, i bosoni **non rispettano il principio di esclusione di Pauli**, quindi un livello energetico può essere occupato da un numero arbitrario di bosoni. Un esempio importante è il fotone, che possiede spin unitario.

Si consideri un piccolo sistema di bosoni, ciascuno con energia  $\varepsilon$ . Il sistema può contenere un numero qualsiasi  $N$  di particelle. La somma di Gibbs, nel caso in cui l'energia sia fissata a  $U = N\varepsilon$ , è:

$$Z = \sum_N \sum_U \exp\left(\frac{\mu N - U}{k_B T}\right) = \sum_N \exp\left(\frac{N\mu - N\varepsilon}{k_B T}\right) = \sum_N \left(\exp\left(\frac{\mu - \varepsilon}{k_B T}\right)\right)^N$$

La somma è convergente, in quanto serie geometrica con ragione, in modulo, minore dell'unità. La condizione di convergenza implica che  $\mu < \varepsilon$ , il che è sempre vero per i bosoni se  $\varepsilon$  è l'energia dello stato fondamentale, e  $\mu$  è in genere 0 o negativo. Risulta, quindi:

$$Z = \frac{1}{1 - \exp\left(\frac{\mu - \varepsilon}{k_B T}\right)}$$

Il numero medio di bosoni nel livello energetico  $\varepsilon$  è:

$$\langle N(\varepsilon) \rangle = \frac{1}{Z} \sum_N \sum_U N P(N, U) = \left(1 - \exp\left(\frac{\mu - \varepsilon}{k_B T}\right)\right) \sum_N \sum_U N \exp\left(\frac{\mu N - U}{k_B T}\right)$$

Avendo fissata l'energia, risulta:

$$\langle N(\varepsilon) \rangle = \left(1 - \exp\left(\frac{\mu - \varepsilon}{k_B T}\right)\right) \sum_N N \exp\left(\frac{N\mu - N\varepsilon}{k_B T}\right) = \left(1 - \exp\left(\frac{\mu - \varepsilon}{k_B T}\right)\right) \sum_N N \left(\exp\left(\frac{\mu - \varepsilon}{k_B T}\right)\right)^N$$

Si pone:

$$X = \exp\left(\frac{\mu - \varepsilon}{k_B T}\right)$$

Il numero medio di bosoni nel livello energetico  $\varepsilon$  può essere scritto come.

$$\langle N(\varepsilon) \rangle = (1 - X) \sum_N N X^N$$

Si considera la quantità:

$$Z = \sum_N X^N$$

Si deriva rispetto a  $X$ :

$$\frac{dZ}{dX} = \frac{d}{dX} \sum_N X^N = \sum_N \frac{d}{dX} (X^N) = \sum_N N X^{N-1} = \sum_N N X^N X^{-1}$$

Per la linearità dell'operatore sommatoria, si scrive:

$$\frac{dZ}{dX} = \frac{1}{X} \sum_N N X^N$$

Da cui si ha:

$$\sum_N N X^N = X \frac{dZ}{dX} = X \frac{d}{dX} \left( \frac{1}{1 - X} \right) = \frac{X}{(1 - X)^2}$$

Il numero medio dei bosoni può essere scritto come:

$$\langle N(\varepsilon) \rangle = (1 - X) \sum_N N X^N = (1 - X) \frac{X}{(1 - X)^2} = \frac{X}{1 - X} = \frac{1}{\frac{1}{X} - 1}$$

Sostituendo il valore di  $X$  si ottiene il numero medio dei bosoni nel livello energetico  $\varepsilon$ , ovvero la **distribuzione di Bose-Einstein**:

$$\langle N(\varepsilon) \rangle = \frac{1}{\exp\left(\frac{\varepsilon - \mu}{k_B T}\right) - 1}$$

Questa distribuzione descrive il numero medio di bosoni in un dato livello energetico  $\varepsilon$ , in funzione della temperatura  $T$  e del potenziale chimico  $\mu$ .

Le distribuzioni di **Bose-Einstein**, **Fermi-Dirac** e **Gibbs** convergono alla **distribuzione di Boltzmann** nel limite di alte temperature o basse densità. Tuttavia, le statistiche quantistiche rimangono valide in ogni regime e sono fondamentali per descrivere il comportamento dei sistemi di particelle indistinguibili.



## Capitolo 6

# Introduzione alla risonanza magnetica

### Sommario

<b>6.1</b>	<b>Diverse metodiche di imaging . . . . .</b>	<b>189</b>
6.1.1	Storia della risonanza magnetica . . . . .	191
6.1.2	Introduzione al principio di risonanza magnetica . . . . .	191
6.1.3	Risonanza magnetica come tecnica spettroscopica . . . . .	195
6.1.4	Momento di precessione . . . . .	197
6.1.5	Vettore di magnetizzazione . . . . .	213
6.1.6	Equazioni di Bloch . . . . .	229



Figura 6.1: *Figura .: Tipica struttura di una strumentazione di imaging*

## 6.1 Diverse metodiche di imaging

Dal punto di vista estetico, i macchinari per risonanza magnetica (MRI), tomografia computerizzata (CT) e tomografia a emissione di positroni (PET) presentano una struttura a spirale. Tutte queste metodiche prevedono un **gantry**, che ospita la circuiteria necessaria per la generazione dello stimolo e la sua ricezione. Nella PET, lo stimolo è generato internamente al paziente tramite l'iniezione di un radiofarmaco.

Il paziente viene posizionato su un tavolo mobile longitudinale, detto tavolo **porta-paziente**. Sebbene le applicazioni esterne possano sembrare simili, le metodiche si basano su principi fisici differenti:

- La **TC** si basa sull'assorbimento dei raggi X da parte del corpo umano. L'assorbimento dipende dalla densità del tessuto attraversato: l'osso assorbe molto più dei tessuti molli, che tra loro presentano assorbimenti simili. La TC fornisce immagini con elevato contenuto morfologico; La **risonanza magnetica** sfrutta la risonanza dei nuclei di idrogeno in presenza di un campo magnetico esterno. Poiché l'idrogeno è prevalentemente presente nell'acqua ( $H_2O$ ), è possibile discriminare i tessuti in base al contenuto acquoso. L'osso, essendo povero d'acqua, risulta poco visibile. Più in dettaglio la porzione corticale (dura) dell'osso, avendo bassa densità di protoni mobili, è meno visibile, mentre il midollo osseo (grasso e acqua) è ben visualizzato;
- La **PET** si basa sull'emissione di fotoni  $\gamma$  da parte di un radiofarmaco iniettato nel paziente. La distribuzione del radiofarmaco fornisce informazioni sul metabolismo dei tessuti, quindi la PET produce immagini funzionali.

La strumentazione moderna combina PET e CT in un'unica macchina, detta **PET-CT**, per ottenere immagini con contenuto sia morfologico che funzionale.

La risonanza magnetica può fornire immagini sia morfologiche che funzionali. Queste ultime sono utilizzate prevalentemente nello studio dell'encefalo: in base alle aree attivate da un determinato stimolo, si genera una mappa a colori, indicante il funzionamento della corteccia cerebrale.

La MRI (*magnetic resonance imaging*) funzionale è utilizzata per la diagnosi di malattie neurodegenerative. Questo tipo di studio non può essere eseguito mediante CT poiché la scatola cranica assorbe la maggior parte della radiazione X incidente. Ne risulta, dunque, un'immagine dell'encefalo poco definita.

La CT è essenzialmente utilizzata per ottenere informazioni di natura morfologica sugli organi interni in breve tempo. Le immagini CT presentano una buona risoluzione nel discriminare le ossa; tuttavia, la risoluzione peggiora con i tessuti molli.

Utilizzando una radiazione X, la CT possiede una pericolosità intrinseca, dovuta ai possibili effetti cancerogeni della radiazione ionizzante. I danni biologici si verificano con un certo andamento statistico, quindi, sono state prodotte delle specifiche normative che regolano la dose assorbita sia dal paziente che dal tecnico radiologo.

La tomografia computerizzata è la metodica di imaging più veloce poiché, mediante le attuali tecnologie, permette di ottenere delle scansioni *total body* in pochi secondi. Per tale motivo la CT è la metodica di analisi più utilizzata per eseguire la diagnosi di una patologia in tempo breve, seppur la risoluzione grossolana per i tessuti molli.

La risonanza magnetica, a differenza delle altre metodiche, non utilizza radiazioni ionizzanti ma campi elettromagnetici statici, di grande intensità, e a radiofrequenza, dell'ordine dei  $mT$ . Ai campi magnetici non sono associati particolari effetti nocivi, tuttavia, la loro intensità in risonanza magnetica è normata da norme nazionali e internazionali.

L'utilizzo del campo elettromagnetico consente di eseguire l'esame di risonanza magnetica ripetutamente. Alla risonanza magnetica, inoltre, è associata una bassa invasività e una grande flessibilità, poiché permette di ottenere sia immagini morfologiche che funzionali, ovvero, è possibile visualizzare un tessuto biologico in base alla sua composizione biochimica.

A differenza della CT, tuttavia, l'esame con risonanza magnetica richiede un lungo tempo di esecuzione, che si aggira intorno ai 30 minuti fino a un'ora. Ciò provoca anche un senso di disagio per il paziente, il quale deve restare immobile per un lungo periodo di tempo. Tuttavia, a causa del normale movimento del paziente, si producono artefatti da movimento durante l'esecuzione dell'esame radiologico. Infine, la strumentazione usata per la risonanza magnetica è più complessa di quella della CT, poiché deve produrre campi statici e a radiofrequenza con determinate caratteristiche. Ne discende che la risonanza magnetica è più costosa della CT.

La PET condivide con la risonanza magnetica i lunghi tempi di analisi, infatti, al fine di ottenere delle immagini *total body* sono richiesti di 45 minuti a un'ora. Storicamente, questa metodologia diagnostica nasce per eseguire lo studio metabolico del cervello. Attualmente, l'applicazione più frequente della PET è lo studio del comportamento metabolico dei tumori, al fine di evidenziare il suo stadio e la presenza di metastasi. Infatti, in presenza di diagnosi di tumore, è necessario eseguire la PET almeno una volta all'anno, al fine di rilevare precocemente la presenza di nuove metastasi, formatesi per problemi legati alla recidiva tumorale.

La PET si basa sull'emissione di radiazione  $\gamma$  da parte di radionuclidi eccitati. La diversa distribuzione del radio-metabolita permette di ottenere immagini indicanti la funzionalità degli organi interessati.

L'unione della PET con la CT permette di ottenere immagini con informazioni morfologiche e funzionali. La sola informazione funzionale, generalmente, risulta essere di difficile compressione poiché in questo tipo

di immagini non sono evidenziate le strutture anatomiche che emettono quella data quantità di tracciante.

Lo svantaggio principale associato alla PET è la presenza di radiazione  $\gamma$  emessa dai radionuclidi. Il paziente, dunque, è una fonte di radiazioni  $\gamma$  finché il radiofarmaco non ha esaurito la sua radioattività, generalmente entro le 24 ore. In questo intervallo temporale, il paziente non può entrare in contatto con donne incinte e bambini.

### 6.1.1 Storia della risonanza magnetica

Con l'esperimento di Stern e Gerlach si dimostrò che il momento magnetico atomico è quantizzato, ovvero può assumere solamente due valori a cui corrispondono due determinati livelli energetici.

Negli anni '30 il fisico Felix Bloch sviluppò delle equazioni fenomenologiche, basate su una descrizione intermedia tra fisica classica e meccanica quantistica, per descrivere il comportamento degli spin immersi in un campo magnetico.

Grazie agli studi di Bloch, negli anni '70 il chimico Paul Christian Lauterbur mise appunto una tecnica per ottenere immagini di sezioni di un corpo mediante campi elettromagnetici a radiofrequenza. La prima risonanza magnetica fu eseguita su un limone. Da questa prima applicazione sono stati sviluppati dei macchinari commerciali, attualmente utilizzati in molti ambiti della diagnostica medica. A Lauterbur fu attribuita l'idea secondo la quale i gradienti del campo magnetico consentono l'individuazione dell'origine delle onde radio emesse dai nuclei dell'oggetto in esame, ottenendo, così, immagini bidimensionali.

### 6.1.2 Introduzione al principio di risonanza magnetica

Il principio fisico su cui si basa la risonanza magnetica è descritto dalle equazioni di Bloch: un gran numero di protoni di idrogeno, immersi in un campo magnetico  $B$ , producono una magnetizzazione netta  $M$ , misurabile, a temperatura ambiente e all'equilibrio termodinamico, mediante la legge di Curie:

$$M \simeq \frac{N}{V} \frac{\gamma^2 \hbar^2}{4k_B T} B_0$$

Dove  $M$  è il momento magnetico per unità di volume, il quale contiene  $N$  particelle con spin. La grandezza  $N/V$  è detta densità protonica ed è indicata con  $\rho$ .

Dalla legge di Curie si evince che la magnetizzazione dipende dal campo magnetico applicato, dalla temperatura, dal rapporto giromagnetico e dal numero di spin presenti nel volume elementare sotto analisi. Ne discende che per aumentare il valore della magnetizzazione è possibile:

- Incrementare il valore del campo magnetico utilizzato. Tipicamente il valore utilizzato del campo magnetico è 1.5 T. Questo valore è regolato da norme internazionali;
- La temperatura non può essere ridotta a piacere poiché non è possibile raffreddare eccessivamente il paziente. Nella sala della risonanza magnetica la temperatura è mantenuta costante, intorno ai 25 °C, al fine di evitare fluttuazioni della magnetizzazione;

- È possibile scegliere la sostanza di cui si vuole calcolare la magnetizzazione, selezionando quella con un rapporto giromagnetico maggiore. In linea di principio è possibile determinare immagini di risonanza magnetica anche degli elettroni, che presentano un rapporto giromagnetico  $\gamma_e = -1.76 \cdot 10^{11} \text{ rad/Ts}$ , mentre quello del protone è  $\gamma_p = 2.68 \cdot 10^8 \text{ rad/Ts}$ . Il rapporto di  $\gamma_e$  e  $\gamma_p$  è:

$$\gamma = \frac{|\gamma_e|}{\gamma_p} = \frac{1.76 \cdot 10^{11} \frac{\text{rad}}{\text{Ts}}}{2.68 \cdot 10^8 \frac{\text{rad}}{\text{Ts}}} = 658$$

Il rapporto giromagnetico dell'elettrone è molto maggiore di quel del protone, ovvero del nucleo di idrogeno, quindi, il vettore magnetizzazione degli elettroni, all'equilibrio termodinamico, ha intensità maggiore rispetto a quello dei nuclei di idrogeno. Si osservi, tuttavia, che il fattore giromagnetico è presente nell'espressione della frequenza di precessione di Larmor, ovvero la frequenza con cui gli spin ruotano intorno all'asse individuato dal campo magnetico:

$$\omega_0 = \gamma B_0$$

La frequenza del campo magnetico applicato aumenta al crescere del rapporto giromagnetico, in particolare, con un campo di  $1.5 \text{ T}$ , per un elettrone, si ha:

$$f_0 = 2\pi\omega_0 = 2\pi 1.76 \cdot 10^{11} \frac{\text{rad}}{\text{Ts}} 1.5 \text{ T} = 42 \text{ GHz}$$

Il campo irradiato dall'elettrone è, dunque, dell'ordine della decina di  $\text{GHz}$ . Ciò determina una maggiore energia associata all'onda, che si deposita nei tessuti biologici. In generale, più l'onda si avvicina allo spettro dei raggi X, maggiore è il loro contenuto energetico e maggiori sono i possibili effetti biologici. Per tale motivo le radiofrequenze adoperate sono ottimizzate per il protone.

- Si potrebbe pensare di utilizzare un atomo o un composto che risuoni alle radiofrequenze ma con un fattore giromagnetico più alto; tuttavia, l'idrogeno ha una concentrazione di  $88 \text{ M} = 88 \text{ mol/V}$ , molto maggiore degli altri composti che presentano una concentrazione molare dell'ordine dei  $\mu\text{M}$  o  $\text{mM}$ . L'uso della risonanza dei protoni consente di ottenere il giusto compromesso tra energia depositata nel paziente, dunque effetto biologico, e un elevato numero di spin per unità di volume, ottimizzando, di conseguenza, il valore della magnetizzazione all'equilibrio;
- L'unico parametro che può essere modificato per aumentare la magnetizzazione è il campo statico esterno applicato, detto principale.

Il vettore di magnetizzazione è valutato su un volumetto elementare contenente un numero di Avogadro  $N_A$  di particelle. Ne discende che in risonanza magnetica il paziente può essere considerato come un insieme di volumetti elementari, ognuno dei quali possiede il proprio vettore di magnetizzazione  $dM$ . La ricostruzione del momento magnetico permettere di eseguire l'imaging del corpo umano. Si osservi che non tutti i volumetti considerati possiedono lo stesso numero di particelle. In media, è possibile ritenere che il numero delle particelle sia pressoché lo stesso se si considerano volumetti elementari con dimensione lineare di  $1 \text{ mm}$ .



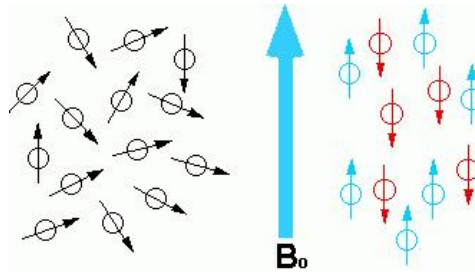


Figura 6.2: *Figura .: Orientamento degli spin a causa del campo*

Giunti all'equilibrio termodinamico, il vettore magnetizzazione non è direttamente misurabile, poiché non produce alcun segnale variabile nel tempo da captare con apposite antenne. Per ottenere un'immagine tomografica è necessario perturbare l'equilibrio termodinamico e registrare il segnale emesso dal corpo del paziente durante il ritorno all'equilibrio dei vettori di magnetizzazione di ogni singolo volumetto elementare in cui è scomponibile il paziente.

I protoni, ovvero i nuclei degli atomi di idrogeno, non sono presenti solamente nell'acqua ma sono legati anche ad altre molecole biologiche come proteine, acidi nucleici e lipidi. I nuclei di idrogeno contenuti in queste molecole non sono soggetti allo stesso campo magnetico principale imposto dall'esterno. Ciò è dovuto all'effetto di schermatura prodotto dalla molecola. Di conseguenza, gli spin di questi nuclei compieranno delle oscillazioni a frequenza diversa da quelle degli altri atomi di idrogeno. Eccitando opportunamente un tessuto, è possibile discriminare i suoi vari costituenti sulla base delle caratteristiche biochimiche.

Dalla meccanica quantistica è noto che la transizione tra due stati  $|\psi\rangle$  e  $|\varphi\rangle$  possiede un andamento nel piano  $xy$  dato da:

$$\gamma \hbar \cos(\beta - \omega_0 t)$$

Dove  $\omega_0 = \gamma B_0$  è detta pulsazione di Larmor.

Le previsioni della meccanica quantistica possono essere descritte in maniera più semplice considerando gli spin orientati in modo casuale. Quando si applica un campo magnetico, gli spin si orientano nella direzione del campo, mentre nel piano  $xy$ , trasverso all'asse del campo, si instaura un moto di precessione con pulsazione angolare  $\omega_0 = \gamma B_0$ . In altre parole, gli spin ruotano intorno all'asse  $z$ , individuato dal campo magnetico, in senso orario con frequenza  $2\pi\omega_0$ .

Questa assunzione, sebbene non sia esatta, consente di descrivere in modo semplice il comportamento degli spin immersi in un campo magnetico, ottenendo gli stessi risultati della meccanica quantistica.

Si suppone di applicare un campo magnetico nella direzione  $z$ , convenzionalmente coincidente con l'asse maggiore del tavolo porta-paziente. Si suppone di applicare uno stimolo  $B_1$  tale da ruotare il vettore di magnetizzazione all'equilibrio sull'asse  $y$ .

Il vettore magnetizzazione globale, somma di tanti momenti magnetici intrinseci, presenta un andamento più complesso di un normale vettore; infatti, le componenti trasversali evolvono con una tempistica diversa dalle componenti longitudinali.

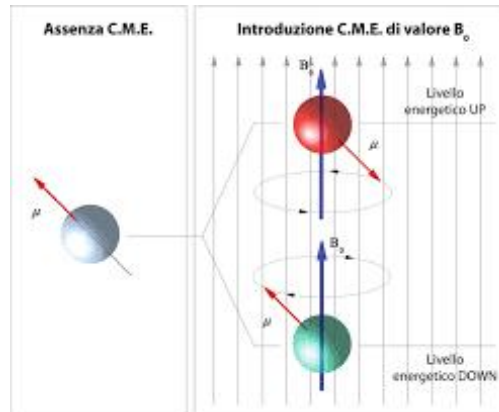


Figura 6.3: *Figura .: Moto di precessione*

## Esperimento NMR

Nel sistema ruotante il vettore magnetizzazione del campione, orientato lungo l'asse z, viene perturbato da una campo magnetico B1 che, nel rotating frame, risulta nel piano x y allineato lungo un asse. L'effetto di questa radiazione B1 è quella di ruotare il vettore magnetizzazione, sulla base del prodotto vettoriale.



Figura 6.4: *Figura .: Rotazione del vettore magnetizzazione a opera di uno stimolo esterno*

Rimosso lo stimolo, il vettore magnetizzazione torna all'equilibrio termodinamico, emettendo un segnale dato da:

$$s = -\frac{d}{dt} \int_V M \cdot B_{RF} dV$$

Dove  $B_{RF}$  è il campo che sarebbe erogato dall'antenna ricevente se percorsa da una certa corrente. Trascurando questo termine, il segnale registrato è proporzionale alla derivata del vettore magnetizzazione:

$$s \propto \frac{dM}{dt}$$

Generalmente l'eccitamento è di tipo sinusoidale, dunque:

$$\frac{dM}{dt} = \omega_0 M = \gamma B_0 M$$

Per la legge di Curie, scritta in termini di densità protonica:

$$M \simeq \frac{N}{V} \frac{\gamma^2 \hbar^2}{4k_B T} B_0 = \rho \frac{\gamma^2 \hbar^2}{4k_B T} B_0$$

Il segnale registrato è proporzionale a:

$$s \propto \gamma B_0 M = \rho \frac{\gamma^3 \hbar^2}{4k_B T} B_0^2$$

Tralasciando i termini costante:

$$s \propto \rho \frac{\gamma^3}{T} B_0^2$$

$\rho$  rappresenta il numero di protoni di idrogeno presenti nel volumetto considerato. Dato che il segnale dipende anche da  $B_0^2$ , è fondamentale che il campo  $B_0$  sia molto elevato, in modo da ottenere un buon rapporto segnale-rumore o *signal-to-noise ratio* (SNR).

### 6.1.3 Risonanza magnetica come tecnica spettroscopica

La risonanza magnetica nasce negli anni '50-'60 con applicazioni spettroscopiche. Questa metodica, ancora oggi molto utilizzata, permette di valutare la composizione chimica del materiale irraggiato dal campo magnetico. In campo medico, la spettroscopia è utilizzata per valutare lo stato metabolico di un tessuto.

A causa dell'effetto della schermatura delle macromolecole, i nuclei di idrogeno non appartenenti all'acqua subiscono un campo magnetico diverso da quello esterno. Si assistono, dunque, a più moti di precessione con frequenza di Larmor diverse.

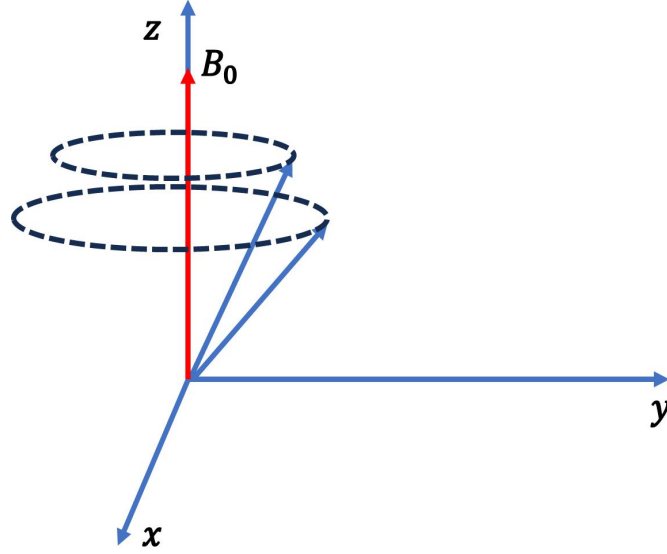


Figura 6.5: *Figura :: Moti di precessione con frequenze diverse*

L'applicazione dello stimolo non ruoterà tutti i momenti magnetici allo stesso modo. Dunque, il ritorno all'equilibrio produce dei campi magnetici variabili nel tempo, i quali, a loro volta, inducono sulle antenne riceventi delle fem. con differenti contenuti frequenziali.

Il segnale prelevato è proporzionale alla somma dei veri momenti magnetici che procedono intorno all'asse  $z$ , con diversa frequenza di Larmor, poiché è diverso il campo principale percepito:

$$s \propto \sum_k M(k) \omega(k) \exp(-j\omega_0 kt)$$

Si ha, ovvero, una somma di  $N$  segnali con proprie frequenze, in base alla molecola a cui il nucleo di idrogeno è legato.

Ogni tessuto biologico è caratterizzato da una certa composizione chimica, quindi, determinando la contrazione dei costituenti, come le proteine, è possibile valutare lo stato di salute di un tessuto e la sua attività metabolica.

Nei tessuti, tuttavia, sono presenti un gran numero di molecole, oltre alle proteine o sostanze di interesse come acqua, acidi nucleici ed ecc. Per cui, al fine di aumentare il numero di molecole di cui si vuole effettuare l'imaging è necessario aumentare le dimensioni del volumetto elementare  $dV$ .

Nel caso delle immagini funzionali, di conseguenza, l'aumento del SNR comporta un peggioramento della risoluzione spaziale. In questo modo, è possibile distinguere il contenuto metabolico del tessuto dalla restante parte di acqua e altri costituenti.

Per ottenere le immagini, infine, oltre al campo magnetico costante di grande intensità, si applica un campo stazionario variabile lungo una direzione  $x$  o  $y$ . Si instaura così un gradiente di campo magnetico che determina la variazione, per ogni punto  $r$  del paziente, la frequenza di precessione con cui si muovono gli spin varia con la posizione:

$$\omega(r) = \gamma B(r)$$

Se il gradiente è posizionato lungo  $z$ , il campo magnetico è del tipo:

$$B = B_0 + G_z z$$

Con questa soluzione, la frequenza di precessione è data da:

$$f(z) = \frac{\omega(z)}{2\pi} = \frac{\gamma}{2\pi} (B_0 + G_z z)$$

Si definisce  $\bar{\gamma} = \gamma/2\pi$ . Questa quantità, per il nucleo di idrogeno è:

$$\bar{\gamma} = \frac{\gamma}{2\pi} = \frac{2.68 \cdot 10^8 \frac{rad}{Ts}}{2\pi} = 42.6 \frac{MHz}{T}$$

Con un campo statico principale di  $1.5 T$  si ha una frequenza di precessione data da:

$$f_0 = \bar{\gamma} B_0 = 42.6 \frac{MHz}{T} 1.5 T \simeq 64 MHz$$

Per un campo di  $3 T$ , risulta invece:

$$f_0 = \bar{\gamma} B_0 = 42.6 \frac{MHz}{T} 3 T \simeq 128 MHz$$

Queste frequenze rientrano nello spettro delle onde radio, in particolare, nella banda di frequenze normalmente utilizzate nella trasmissione FM.

L'uso dei gradienti i campo permette di variare la frequenza di precessione con la posizione. In questo modo, è possibile selezionare una sola fetta del corpo del paziente di cui si vuole eseguire l'imaging. Nello specifico, una volta raggiunto l'equilibrio termodinamico, si applica uno stimolo che ribalta il vettore di magnetizzazione che procede a una determinata frequenza.

#### 6.1.4 Momento di precessione

Si considera un singolo spin immerso in un campo magnetico diretto lungo l'asse  $z$ . All'equilibrio termico questo spin si allinea lungo l'asse individuato dal campo magnetico.

Dal punto di vista classico, lo spin immerso nel campo magnetico subisce una torsione meccanica, data da:

$$\tau = \mu \times B$$

Dove:

$$\tau = \frac{dL}{dt}$$

$L$  è il momento angolare, legato al momento magnetico  $\mu$  dal fattore giromagnetico  $\gamma$ :

$$\mu = \gamma L \Leftrightarrow L = \frac{1}{\gamma} \mu$$

Sostituendo i due risultati nell'equazione differenziale si ha:

$$\mu \times B = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{\gamma} \mu \right) \Leftrightarrow \frac{d\mu}{dt} = \gamma \mu \times B$$

La descrizione classica, rappresentata dall'equazione differenziale appena individuata, non è precisa, tuttavia, presenta gli stessi risultati della meccanica quantistica. Quest'ultima teoria si basa sui livelli energetici  $|+\rangle$  e  $|-\rangle$ . Si dimostra che la proiezione dello spin lungo l'asse  $x$  è del tipo:

$$\mu_x \propto \cos(\omega_0 t)$$

Dove  $\omega_0 = \gamma B_0$  è la frequenza di precessione di Larmor.

L'equazione differenziale:

$$\frac{d\mu}{dt} = \gamma \mu \times B$$

Presenta la stessa soluzione della meccanica quantistica ma con una descrizione semplificata; per tale motivo, si ricorre alla descrizione classica.

Si considera il prodotto scalare tra  $\mu$  e la sua derivata:

$$\mu \cdot \frac{d\mu}{dt} = \gamma \mu \cdot (\mu \times B)$$

Il vettore  $\mu \times B$  è ortogonale sia al vettore  $\mu$  che  $B$ , dunque, il prodotto scalare è nullo:

$$\mu \cdot \frac{d\mu}{dt} = \gamma \mu \cdot (\mu \times B) = 0$$

Il prodotto scalare tra  $\mu$  e la sua derivata può essere scritto come:

$$\mu \cdot \frac{d\mu}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\mu \cdot \mu) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\mu|^2 = 0$$

La derivata del modulo quadro è nulla, dunque, il modulo del momento magnetico intrinseco è costante nel tempo:

$$|\mu| = \text{const}$$

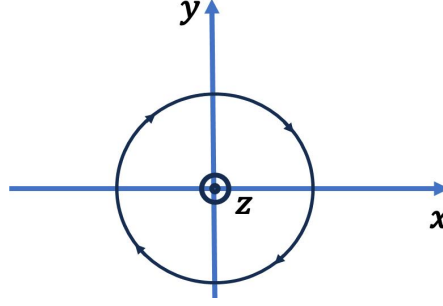


Figura 6.6: *Figura .: Verso di rotazione del moto di precessione*

Nonostante il suo modulo sia costante, la fase del momento magnetico decresce costantemente nel tempo, infatti, risulta:

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\omega$$

Il momento magnetico precessa nel piano  $xy$  in senso orario. La fase può essere scritta come:

$$\varphi(t) = \varphi_0 - \omega t$$

Dove  $\varphi_0$  è la fase iniziale.

Si risolve l'equazione differenziale per il momento magnetico. A tale scopo si scompone il prodotto vettoriale  $\mu \times B$  lungo gli assi:

$$\mu \times B = \begin{vmatrix} \hat{i}_x & \hat{i}_y & \hat{i}_z \\ \mu_x & \mu_y & \mu_z \\ 0 & 0 & B_0 \end{vmatrix} = B_0 (\mu_y \hat{i}_x - \mu_x \hat{i}_y)$$

L'equazione differenziale, si scrive come:

$$\frac{d\mu}{dt} = \gamma B_0 (\mu_y \hat{i}_x - \mu_x \hat{i}_y)$$

Scomponendo lungo gli assi, si ha:

$$\begin{cases} \frac{d\mu_x}{dt} = \gamma B_0 \mu_y \\ \frac{d\mu_y}{dt} = -\gamma B_0 \mu_x \\ \frac{d\mu_z}{dt} = 0 \end{cases}$$

Si deriva la seconda equazione rispetto al tempo:

$$\frac{d^2\mu_y}{dt^2} = -\gamma B_0 \frac{d\mu_x}{dt}$$

Sostituendo la prima equazione, si ha:

$$\frac{d^2 \mu_y}{dt^2} = -\gamma^2 B_0^2 \mu_y \Leftrightarrow \frac{d^2 \mu_y}{dt^2} + \gamma^2 B_0^2 \mu_y = 0$$

Passando al polinomio associato si ha:

$$\lambda^2 + \gamma^2 B_0^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm j \gamma B_0$$

Ponendo,  $\omega_0 = \gamma B_0$ , la soluzione  $\mu_y$  è del tipo:

$$\mu_x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$$

Dove  $A$  e  $B$  sono due costanti di integrazione, ottenute applicando le condizioni iniziali.

Nota l'espressione per  $\mu_x(t)$ , è possibile ottenere quella di  $\mu_y(t)$ ; dalla prima equazione differenziale, infatti, risulta:

$$\frac{d\mu_x}{dt} = \gamma B_0 \mu_y \Leftrightarrow \mu_y = \frac{1}{\omega_0} \frac{d\mu_x}{dt} = \frac{1}{\omega_0} \frac{d}{dt} [A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)]$$

Svolgendo la derivata si ha:

$$\mu_y(t) = -A \sin(\omega_0 t) + B \cos(\omega_0 t)$$

Lungo  $z$ , la derivata del momento magnetico è nulla, dunque,  $\mu_z$  è costante. Si suppone di conoscere lo stato iniziale del momento:

$$\begin{cases} \mu_x(t)|_{t=0} = \mu_x(0) \\ \mu_y(t)|_{t=0} = \mu_y(0) \\ \mu_z(t)|_{t=0} = \mu_z(0) \end{cases}$$

Al fine di ricavare le due costanti di integrazione  $A$  e  $B$ , si usano le prime due equazioni:

$$\begin{cases} [A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)]_{t=0} = \mu_x(0) \\ [-A \sin(\omega_0 t) + B \cos(\omega_0 t)]_{t=0} = \mu_y(0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \mu_x(0) \\ B = \mu_y(0) \end{cases}$$

La soluzione dell'equazione differenziale è, dunque:

$$\begin{cases} \mu_x(t) = \mu_x(0) \cos(\omega_0 t) + \mu_y(0) \sin(\omega_0 t) \\ \mu_y(t) = -\mu_x(0) \sin(\omega_0 t) + \mu_y(0) \cos(\omega_0 t) \\ \mu_z(t) = \mu_z(0) \end{cases}$$

È possibile scrivere la soluzione dell'equazione differenziale:



$$\frac{d\mu}{dt} = \gamma \mu \times B$$

in forma compatta introducendo la matrice di rotazione intorno all'asse  $z$ :

$$R_z(\omega_0 t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega_0 t) & \sin(\omega_0 t) & 0 \\ -\sin(\omega_0 t) & \cos(\omega_0 t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Con questa posizione, il momento magnetico  $\mu$  in funzione del tempo è dato da:

$$\mu(t) = R_z(\omega_0 t) \mu(0)$$

#### 6.1.4.1 Rappresentazione complessa

Dato che gli spin dei protoni eseguono un moto di precessione intorno all'asse  $z$  individuato dal campo magnetico, è utile introdurre una notazione utilizzando il piano complesso, in modo da considerare anche il movimento degli spin nel piano trasverso al campo magnetico. Si definisce la grandezza fasoriale  $\mu_{\perp}(t)$  come:

$$\mu_{\perp}(t) = \mu_x(t) + j\mu_y(t)$$

Il fasore permette di descrivere il movimento nel piano trasverso del momento magnetico nel tempo.

La derivata temporale di un fasore si scrive come:

$$\frac{d\mu_{\perp}}{dt} = -j\omega_o \mu_{\perp}$$

Dove  $\omega_o = \gamma B_0$  è la frequenza di precessione di Larmor. Per definizione di  $\mu_{\perp}(t)$ , si ha:

$$\frac{d\mu_{\perp}}{dt} = -j\omega_o \mu_{\perp} = -j\omega_o \mu_x(t) - j\omega_o [j\mu_y(t)] = -j\omega_o \mu_x(t) - j\omega_o \mu_y(t)$$

Inoltre, deve risultare:

$$\frac{d\mu_{\perp}}{dt} = \frac{d\mu_x}{dt} + j \frac{d\mu_y}{dt}$$

Confrontando le due espressioni risulta che:

$$\frac{d\mu_x}{dt} = -j\omega_o \mu_x(t), \quad \frac{d\mu_y}{dt} = -j\omega_o \mu_y(t)$$

La notazione fasoriale è più semplice rispetto al sistema di equazioni differenziali. Si integra per variabili separabili l'equazione:

$$\frac{d\mu_{\perp}}{dt} = -j\omega_o\mu_{\perp} \Leftrightarrow \frac{1}{\mu_{\perp}}d\mu_{\perp} = -j\omega_o dt$$

Da cui si ottiene:

$$\mu_{\perp}(t) = \mu_{\perp}(0) \exp(-j\omega_o t)$$

Questa soluzione coincide con quella nel dominio del tempo del vettore momento magnetico, ristretto al piano  $xy$ . Il termine esponenziale,  $\exp(-j\omega_o t)$ , rappresenta una rotazione in senso orario nel piano complesso o, equivalentemente, intorno all'asse  $z$  individuato dal campo principale. La rotazione nel piano  $xy$  è dovuto alla rotazione del momento magnetico intrinseco dello spin sul piano trasverso al campo applicato.

La fase del fasore è strettamente correlata con la pulsazione con cui il vettore momento magnetico intrinseco ruota nel piano trasverso. La conoscenza della posizione, ovvero della fase, è fondamentale per ricostruire l'immagine di risonanza magnetica. Per cui, data l'importanza della fase, è molto utile introdurre una notazione complessa per tale quantità, in modo da esplicitarla.

In generale, un numero complesso può essere espresso esplicitando modulo e fase:

$$\mu_{\perp}(t) = |\mu_{\perp}(t)| \exp[-j\varphi(t)]$$

Il modulo del fasore è costante nel tempo, infatti, nel dominio del tempo si è dimostrato che:

$$\mu \cdot \frac{d\mu}{dt} = 0$$

La fase, invece, è data da:

$$\angle\mu_{\perp} = \varphi(t) + \angle\mu(0) = -j\omega_o t + \varphi_0$$

Dove  $\varphi_0 = \angle\mu(0)$ .

L'evoluzione del fasore  $\mu_{\perp}$  può essere scritto come:

$$\mu_{\perp}(t) = |\mu_{\perp}(0)| \exp[-j(\omega_o t + \varphi_0)]$$

A partire dalla fase  $\varphi_0$  è possibile determinare l'evoluzione della posizione dello spin, nota la pulsazione di Larmor  $\omega_o = \gamma B_0$ .

#### 6.1.4.2 Sistema di riferimento rotante con velocità angolare $\omega$

Applicando un campo magnetico lungo un asse di un sistema di riferimento fisso, gli spin si orientano lungo l'asse individuato dal campo principale,  $z$ , compiendo un moto di precessione all'equilibrio termodinamico.

Al fine di ottenere un segnale misurabile è necessario perturbare l'equilibrio termodinamica, mediante un campo elettromagnetico esterno con opportuna frequenza.

Per descrivere al meglio la perturbazione, si introduce un sistema di riferimento rotante con pulsazione  $\omega$  in senso orario intorno all'asse  $z$ .

Sia  $(x', y', z')$  il sistema di riferimento rotante. Nel sistema di riferimento fisso del laboratorio, il sistema rotante presenta una velocità angolare:

$$\Omega = -\omega \hat{z}$$

Dove il segno meno è dovuto alla rotazione oraria. La velocità di rotazione può variare nel tempo.

Si vuole determinare una relazione che leghi un vettore nel sistema fisso alle componenti del vettore rotante. Ogni vettore  $c$ , istantaneamente ruotato con velocità angolare  $\Omega$ , presenta una variazione temporale rispetto al sistema di riferimento fisso del laboratorio, descritta dalla relazione:

$$\frac{dc}{dt} = \Omega \times c$$

Il vettore  $c$  può essere espresso come somma della componente parallela all'asse  $z$  e della componente trasversale:

$$c = c_{\parallel} + c_{\perp}$$

Il vettore  $\Omega$  ha solo componente lungo  $z$ , per cui il prodotto vettoriale tra  $\Omega$  e la componente parallela all'asse  $z$  di  $c$ ,  $c_{\parallel}$ , è nullo:

$$\Omega \times c_{\parallel} = 0$$

Se il vettore  $c$  è fermo nel sistema di riferimento fisso, la sua derivata temporale è nulla:

$$\frac{dc}{dt} = 0$$

Nel sistema di riferimento rotante, il vettore  $c$  non è fermo; infatti, questo sistema vede il vettore ruotare, per cui risulta:

$$\left(\frac{dc}{dt}\right)' = \Omega \times c' \neq 0$$

Dove  $(dc/dt)'$  indica la derivata del vettore  $c$  nel sistema di riferimento rotante  $x'y'$ .

Nel sistema di riferimento fisso, il vettore  $c$  ha delle componenti:

$$c(t) = c_x(t)\hat{i}_x + c_y(t)\hat{i}_y + c_z(t)\hat{i}_z$$

Il tempo è considerato invariante nei due sistemi di riferimento poiché le velocità considerate sono molto minore della velocità della luce. Nel sistema rotante, invece, il vettore  $c$  possiede delle componenti diversi:

$$c'(t) = c_{x'}(t)\hat{i}_{x'} + c_{y'}(t)\hat{i}_{y'} + c_{z'}(t)\hat{i}_{z'}$$

Dato che i due sistemi possiedono l'asse  $z$  in comune, deve risultare  $\hat{i}_z \equiv \hat{i}_{z'}$ , per cui:

$$c'(t) = c_{x'}(t)\hat{i}_{x'} + c_{y'}(t)\hat{i}_{y'} + c_z(t)\hat{i}_z$$

Si osserva che non è necessario distinguere  $c(t)$  nel sistema fisso e  $c'(t)$  nel sistema rotante in quanto il vettore è lo stesso per entrambi i sistemi di riferimento.

Le componenti del vettore nel sistema fisso dipendono da quelle nel sistema rotante e viceversa. Si calcola la derivata rispetto al tempo del vettore  $c(t)$  nel sistema fisso di riferimento:

$$\frac{dc}{dt} = \frac{d}{dt} [c_x(t)\hat{i}_x + c_y(t)\hat{i}_y + c_z(t)\hat{i}_z] = \frac{dc_x}{dt}\hat{i}_x + c_x\frac{d\hat{i}_x}{dt} + \frac{dc_y}{dt}\hat{i}_y + c_y\frac{d\hat{i}_y}{dt} + \frac{dc_z}{dt}\hat{i}_z + c_z\frac{d\hat{i}_z}{dt}$$

Siccome il sistema di riferimento è fisso, le derivate dei suoi versori sono nulle:

$$\frac{d\hat{i}_x}{dt} = 0, \quad \frac{d\hat{i}_y}{dt} = 0, \quad \frac{d\hat{i}_z}{dt} = 0$$

Si ottiene:

$$\frac{dc}{dt} = \frac{dc_x}{dt}\hat{i}_x + \frac{dc_y}{dt}\hat{i}_y + \frac{dc_z}{dt}\hat{i}_z$$

La derivata del sistema rotante è, invece:

$$\frac{dc}{dt} = \frac{dc_{x'}}{dt}\hat{i}_{x'} + c_{x'}\frac{d\hat{i}_{x'}}{dt} + \frac{dc_{y'}}{dt}\hat{i}_{y'} + c_{y'}\frac{d\hat{i}_{y'}}{dt} + \frac{dc_{z'}}{dt}\hat{i}_{z'} + c_{z'}\frac{d\hat{i}_{z'}}{dt}$$

La relazione  $dc/dt = \Omega \times c$  è valida per un generico vettore  $c$ , dunque, è valida anche per i versori degli assi coordinati:

$$\frac{d\hat{i}_{x'}}{dt} = \Omega \times \hat{i}_{x'}, \quad \frac{d\hat{i}_{y'}}{dt} = \Omega \times \hat{i}_{y'}, \quad \frac{d\hat{i}_{z'}}{dt} = \Omega \times \hat{i}_{z'}$$

Per cui la derivata nel sistema rotante può essere scritta sostituendo queste relazioni:

$$\frac{dc}{dt} = \frac{dc_{x'}}{dt}\hat{i}_{x'} + c_{x'}\Omega \times \hat{i}_{x'} + \frac{dc_{y'}}{dt}\hat{i}_{y'} + c_{y'}\Omega \times \hat{i}_{y'} + \frac{dc_{z'}}{dt}\hat{i}_{z'} + c_{z'}\Omega \times \hat{i}_{z'} = \frac{dc_{x'}}{dt}\hat{i}_{x'} + \frac{dc_{y'}}{dt}\hat{i}_{y'} + \frac{dc_{z'}}{dt}\hat{i}_{z'} + \Omega \times (c_{x'}\hat{i}_{x'} + c_{y'}\hat{i}_{y'} + c_{z'}\hat{i}_{z'})$$

Dove  $c' = c_{x'}\hat{i}_{x'} + c_{y'}\hat{i}_{y'} + c_{z'}\hat{i}_{z'}$  è il vettore nel sistema di riferimento fisso. Si indica con:

$$\left(\frac{dc}{dt}\right)' = \frac{dc_{x'}}{dt}\hat{i}_{x'} + \frac{dc_{y'}}{dt}\hat{i}_{y'} + \frac{dc_{z'}}{dt}\hat{i}_{z'}$$

La derivata del vettore  $c$  nel sistema di riferimento rotante, i cui versori sono fissi. La derivata nel sistema di riferimento rotante può essere scritta come:

$$\frac{dc}{dt} = \left(\frac{dc}{dt}\right)' + \Omega \times c'$$

La derivata del vettore  $c$  nel sistema rotante è data dalla variazione nel tempo del vettore  $c$  nel sistema rotante a cui si aggiunge un termine che tiene conto della rotazione del sistema.

Si considera, come vettore  $c$ , il momento magnetico di uno spin immerso in un campo magnetico  $B$  uniforme e diretto lungo  $z$ :

$$\frac{d\mu}{dt} = \left(\frac{d\mu}{dt}\right)' + \Omega \times \mu$$

La variazione del momento magnetico è legata al campo magnetico dalla relazione:

$$\frac{d\mu}{dt} = \gamma \mu \times B$$

Sostituendo questo risultato nella relazione del sistema rotante, si ha:

$$\gamma \mu \times B = \left(\frac{d\mu}{dt}\right)' + \Omega \times \mu$$

Ricavando la derivata nel sistema rotante si ha:

$$\left(\frac{d\mu}{dt}\right)' = \gamma \mu \times B - \Omega \times \mu$$

È valido il risultato  $-\Omega \times \mu = \mu \times \Omega$ . Sostituendo si ha:

$$\left(\frac{d\mu}{dt}\right)' = \gamma \mu \times B + \mu \times \Omega = \gamma \mu \times \left(B + \frac{1}{\gamma} \Omega\right)$$

Si definisce campo magnetico effettivo o efficace come:

$$B_{eff} = B + \frac{1}{\gamma} \Omega$$

L'equazione per il momento magnetico nel sistema rotante assume la forma:

$$\left(\frac{d\mu}{dt}\right)' = \gamma \mu \times B_{eff}$$

Si ottiene la stessa forma dell'equazione ricavata per il sistema fisso, a patto di sostituire il campo magnetico principale  $B$  applicato, il campo effettivamente visto nel sistema rotante  $B_{eff}$ , il quale prevede che, al campo magnetico applicato nel sistema rotante, si aggiunge un campo fittizio, dovuta alla rotazione  $\Omega$  del sistema. Si suppone che il sistema ruoti intorno all'asse  $z$  in senso orario con velocità  $\omega$ :

$$\Omega = -\omega \hat{i}_z$$

In queste condizioni, il campo efficace è:

$$B_{eff} = B_0 \hat{i}_z - \frac{1}{\gamma} \omega \hat{i}_z$$

Se la frequenza con cui ruota il sistema coincide con quella di Larmor, ovvero  $\omega = \omega_0 = \gamma B_0$ , allora:

$$B_{eff} = B_0 \hat{i}_z - \frac{1}{\gamma} \omega_0 \hat{i}_z = B_0 \hat{i}_z - \frac{1}{\gamma} \gamma B_0 \hat{i}_z = 0$$

Se la velocità di rotazione è uguale alla frequenza di Larmor, il momento magnetico  $\mu$  appare fisso nel sistema di riferimento rotante. Ne discende che questo sistema di riferimento è solidale con gli spin.

L'introduzione del sistema rotante permette di descrivere in modo semplice il segnale registrato. Nella pratica non è semplice produrre un campo con la stessa frequenza con cui risuonano i protoni, quindi, il campo non è mai nullo.

#### 6.1.4.3 Rotazione del sistema di riferimento per un campo a radiofrequenza

Si considera un protone allineato al campo magnetico esterno, diretto lungo l'asse  $z$ . Il protone risuona o precede alla frequenza di Larmor nel piano trasverso. Al fine di eccitare lo spin per eseguire la misura, bisogna stimarlo mediante un campo elettromagnetico alla frequenza di Larmor. Questo campo magnetico, essendo oscillante, possiede una polarizzazione.

Si suppone che la polarizzazione del campo eccitante sia lineare, ovvero che il campo sia diretto solamente lungo un asse, ad esempio  $x$ . Il campo possiede, dunque, un andamento del tipo:

$$B_x(t) = b_x(t) \cos(\omega_0 t) \hat{i}_x$$

Nell'espressione vi è la dipendenza addizionale dell'ampiezza delle oscillazioni  $b_x(t)$ , poiché il segnale emanato è, solitamente, un pacchetto di sinusoidi.

L'uso del sistema rotante rende la descrizione del campo magnetico a cui è soggetto lo spin più semplice. Infatti, in questo sistema il campo può essere descritto semplicemente osservando che i versori del sistema rotante sono legati a quelli del sistema fisso dalle relazioni:

$$\begin{cases} \hat{i}_{x'} = \hat{i}_x \cos(\omega_0 t) - \hat{i}_y \sin(\omega_0 t) \\ \hat{i}_{y'} = \hat{i}_x \sin(\omega_0 t) + \hat{i}_y \cos(\omega_0 t) \end{cases}$$

Si scrive il sistema in forma matriciale, in modo poter ricavare i versori del sistema fisso in funzione di quelli del sistema rotante.

$$\begin{pmatrix} \hat{i}_{x'} \\ \hat{i}_{y'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\omega_0 t) & -\sin(\omega_0 t) \\ \sin(\omega_0 t) & \cos(\omega_0 t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{i}_x \\ \hat{i}_y \end{pmatrix}$$

Dove:

$$R_z(\omega t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega_0 t) & -\sin(\omega_0 t) \\ \sin(\omega_0 t) & \cos(\omega_0 t) \end{pmatrix}$$

È la matrice di rotazione intorno all'asse  $z$ . Il suo determinante è unitario:

$$\det R_z(\omega_0 t) = \begin{vmatrix} \cos(\omega_0 t) & -\sin(\omega_0 t) \\ \sin(\omega_0 t) & \cos(\omega_0 t) \end{vmatrix} = \cos^2(\omega_0 t) + \sin^2(\omega_0 t) = 1$$

$R_z(\omega_0 t)$  è invertibile:

$$R_z^{-1}(\omega_0 t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega_0 t) & \sin(\omega_0 t) \\ -\sin(\omega_0 t) & \cos(\omega_0 t) \end{pmatrix}$$

Per cui la relazione matriciale invertite è:

$$\begin{pmatrix} \hat{i}_x \\ \hat{i}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\omega_0 t) & \sin(\omega_0 t) \\ -\sin(\omega_0 t) & \cos(\omega_0 t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{i}_{x'} \\ \hat{i}_{y'} \end{pmatrix}$$

Il versore relativo all'asse  $x$  del sistema fisso, in funzione dei versori del sistema rotante, è:

$$\hat{i}_x = \hat{i}_{x'} \cos(\omega_0 t) + \hat{i}_{y'} \sin(\omega_0 t)$$

Il campo magnetico polarizzato linearmente nel sistema rotante può essere scritto come:

$$B_x(t) = b_x(t) \cos(\omega_0 t) \hat{i}_x = b_x(t) \cos(\omega_0 t) [\hat{i}_{x'} \cos(\omega_0 t) + \hat{i}_{y'} \sin(\omega_0 t)] = b_x(t) \cos^2(\omega_0 t) \hat{i}_{x'} + b_x(t) \cos(\omega_0 t) \sin(\omega_0 t) \hat{i}_{y'}$$

Per le formule di duplicazione e addizione, si ottiene:

$$B_x(t) = b_x(t) \left[ \frac{1}{2} \cos(2\omega_0 t) + \frac{1}{2} \right] \hat{i}_{x'} + \frac{1}{2} b_x(t) \sin(2\omega_0 t) \hat{i}_{y'}$$

Nel sistema rotante il campo magnetico lineare può essere scritto come somma di una costante con due campi a frequenza doppia di quella impostata:

$$B_x(t) = \frac{1}{2} b_x(t) \hat{i}_{x'} + b_x(t) \left[ \frac{1}{2} \cos(2\omega_0 t) \hat{i}_{x'} + \frac{1}{2} \sin(2\omega_0 t) \hat{i}_{y'} \right]$$

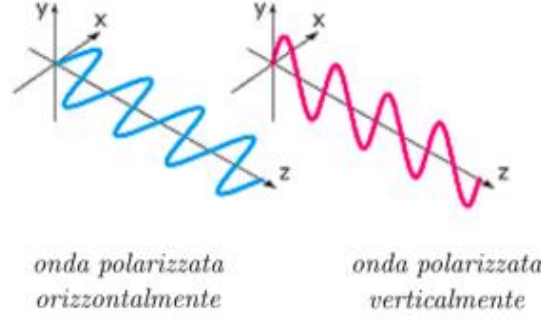


Figura 6.7: Figura .: Sovrapposizione di onde ortogonali

Si calcola il valor medio del campo magnetico su un intervallo di tempo sufficientemente lungo, come un periodo dell'onda a radiofrequenza  $T$ :

$$\langle B_x(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_T B_x(t) dt = \frac{1}{2T} \int_T \left| \left\{ b_x(t) \hat{i}_{x'} + b_x(t) \left[ \cos(2\omega_0 t) \hat{i}_{x'} + \sin(2\omega_0 t) \hat{i}_{y'} \right] \right\} \right| dt = \frac{1}{2} \langle b_x(t) \rangle$$

Gli altri termini sono nulli poiché termini sinusoidali integrati su un intervallo temporale uguale al doppio del periodo di oscillazione. L'applicazione del valor medio implica che solo metà della polarizzazione lineare è utilizzata per ruotare gli spin intorno all'asse  $x$ . Per un tempo sufficientemente lungo il campo può essere considerato a media costante.

In molte applicazioni, per rendere più precisa la ricostruzione delle immagini, si instaura un campo magnetico con polarizzazione circolare, ottenuto sovrapponendo due campi lineari di ugual intensità, in quadratura e diretti lungo due assi ortogonali.

A tale scopo si posizionano due antenne ortogonali tra loro, ognuna delle quali eroga un campo magnetico lineare. Affinché la polarizzazione sia circolare è necessario che i due campi siano in quadratura tra loro. Il campo totale, polarizzato circolarmente, è espresso, nel sistema di riferimento fisso, come:

$$B(t) = B_1 \left[ \cos(\omega_0 t) \hat{i}_x - \sin(\omega_0 t) \hat{i}_y \right]$$

Si ricava l'espressione del campo magnetico polarizzato circolarmente nel sistema di riferimento rotante alla frequenza di Larmor. A tale scopo, si considerano le relazioni tra i versori dei due sistemi di riferimento:

$$\begin{pmatrix} \hat{i}_x \\ \hat{i}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\omega_0 t) & \sin(\omega_0 t) \\ -\sin(\omega_0 t) & \cos(\omega_0 t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{i}_{x'} \\ \hat{i}_{y'} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{i}_x = \cos(\omega_0 t) \hat{i}_{x'} + \sin(\omega_0 t) \hat{i}_{y'} \\ \hat{i}_y = -\sin(\omega_0 t) \hat{i}_{x'} + \cos(\omega_0 t) \hat{i}_{y'} \end{cases}$$

Sostituendo queste relazioni nell'espressione del campo magnetico circolare si ha:

$$B(t) = B_1 \left[ \cos(\omega_0 t) \hat{i}_x - \sin(\omega_0 t) \hat{i}_y \right] = B_1 \left\{ \cos(\omega_0 t) \left[ \cos(\omega_0 t) \hat{i}_{x'} + \sin(\omega_0 t) \hat{i}_{y'} \right] - \sin(\omega_0 t) \left[ -\sin(\omega_0 t) \hat{i}_{x'} + \cos(\omega_0 t) \hat{i}_{y'} \right] \right\}$$



Per ogni istante temporale, il campo magnetico a polarizzazione circolare con frequenza uguale a quella del sistema rotante è orientato lungo l'asse  $x'$ ; inoltre, a differenza del caso lineare, la relazione è valida per ogni istante di tempo poiché non è ottenuta mediante operazione di media.

Riassumendo, quando si applica l'impulso a radiofrequenza con polarizzazione circolare, gli spin ruotano intorno all'asse  $x'$ , lungo cui iniziano un moto di precessione.

È possibile dimostrare che si ha un minor dispendio energetico per generare un campo a polarizzazione circolare. A causa di ciò, corredati ad altri fattori riguardanti il rapporto segnale/rumore e la necessità di omogeneizzare il campo a radiofrequenza, i campi rotanti a polarizzazione circolare sono molto usati in risonanza magnetica.

**6.1.4.3.1 Condizione di risonanza** Si applica un campo a radiofrequenza con polarizzazione lineare o circolare; nel primo caso bisogna considerare quantità medie, mentre nel secondo si hanno relazioni esatte dal punto di vista teorico. Nel sistema rotante il campo magnetico subito da uno spin è detto campo effettivo.

Prima dell'applicazione dell'impulso, l'equazione che descrive il comportamento dello spin, dal punto di vista classico, nel sistema rotante è:

$$\left(\frac{d\mu}{dt}\right)' = \gamma\mu \times B_{eff}$$

Dove:

$$B_{eff} = B_0\hat{i}_z - \frac{1}{\gamma}\omega\hat{i}_z$$

$B_0\hat{i}_z$  è il campo statico esterno o principale applicato.

Si applica, ora, un campo a radiofrequenza. Se il sistema di riferimento ruota con la stessa pulsazione  $\omega_0$  del campo magnetico applicato, al campo effettivo,  $B_{eff}$ , va aggiunto un termine costante, diretto lungo  $\hat{i}_{x'}$ :

$$\left(\frac{d\mu}{dt}\right)' = \gamma\mu \times \left(B_0\hat{i}_z - \frac{1}{\gamma}\omega\hat{i}_z + B_1\hat{i}_{x'}\right)$$

I due sistemi di riferimento possiedono gli assi  $z$  paralleli, per cui  $\hat{i}_z = \hat{i}_{z'}$ .

Si dice condizione di risonanza se la frequenza dell'impulso a radiofrequenza è uguale alla frequenza di Larmor degli spin contenuti in uno strato di tessuto:

$$\omega = \omega_0 = \gamma B_0$$

In questo caso, risulta:

$$\left(\frac{d\mu}{dt}\right)' = \gamma B_1\mu \times \hat{i}_{x'}$$

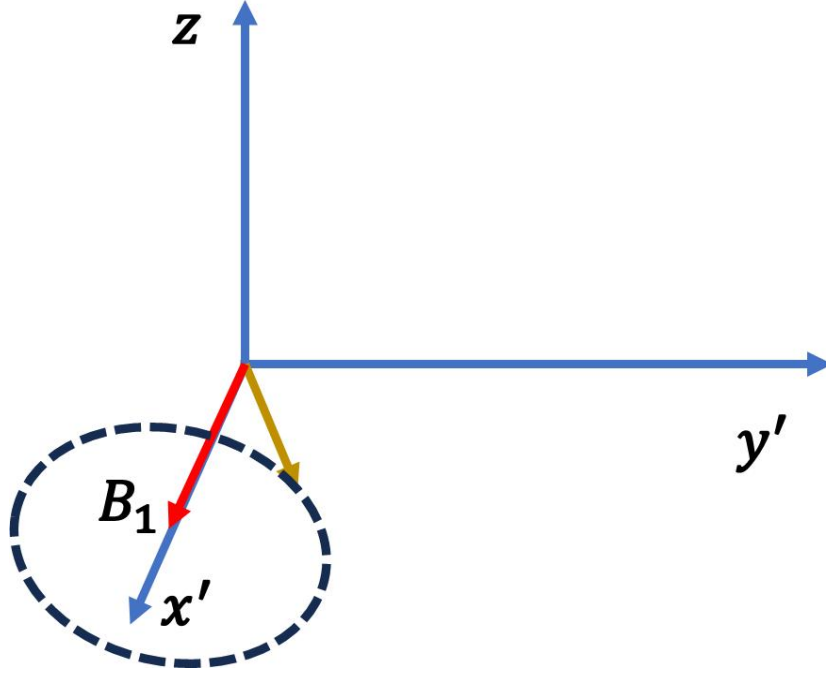


Figura 6.8: Figura .: Precessione nel sistema rotante in condizione di risonanza

Si assiste, dunque, a una precessione degli spin intorno all'asse  $\hat{i}_x'$

Il termine risonanza, in questa tecnica di imaging, è legato al fatto che, per ottenere l'immagine, il campo magnetico applicato è sintonizzato con la frequenza degli spin in moto di precessione intorno al campo magnetico applicato.

L'introduzione del sistema rotante consente di descrivere in modo semplice il comportamento degli spin, mediante un moto di precessione intorno all'asse  $x'$ . Nel sistema di riferimento fisso del laboratorio, invece, il contributo del campo a radiofrequenza si somma a quello stato e omogeneo, diretto lungo  $\hat{i}_z$ . Si dimostra che la combinazione dei due campi produce un modo elicoidale, il cui raggio aumenta all'avvicinarsi del piano  $xy$ .

Nel sistema rotante con pulsazione  $\omega$ , è possibile scrivere il campo efficace come:

$$B_{eff} = B_0 \hat{i}_z - \frac{1}{\gamma} \omega \hat{i}_z + B_1 \hat{i}_{x'}$$

Con pulsazione di Larmor:

$$\omega = \gamma B_0 \Leftrightarrow B_0 = \frac{1}{\gamma} \omega_0$$

La pulsazione del campo a radiofrequenza applicato è data da:

$$\omega_1 = \gamma B_1 \Leftrightarrow B_1 = \frac{1}{\gamma} \omega_1$$

Per cui è possibile scrivere:

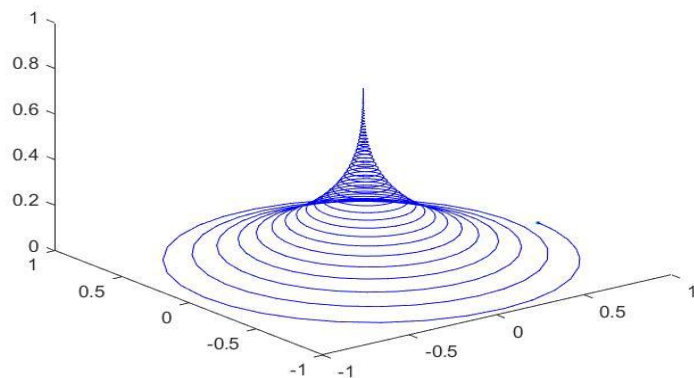


Figura 6.9: *Figura .: Moto elicoidale nel sistema fisso*

$$B_{eff} = \frac{1}{\gamma} \left[ (\omega_0 - \omega) \hat{i}_z + \omega_1 \hat{i}_{x'} \right]$$

In generale, avere un campo a radiofrequenza con stessa frequenza di Larmor, con cui precedono gli spin, è abbastanza complesso per la schermatura che alcune molecole compiono nei confronti dei campi magnetici. Inoltre, in linea di principio la frequenza con cui ruota il sistema rotante, in senso orario, è scelta arbitrariamente rispetto sia al campo a radiofrequenza che alla frequenza di precessione degli spin. Nel caso generale, si ha la stessa complessità della descrizione del sistema fisso. I vantaggi del sistema rotante si mostrano quando  $\omega_1 = \omega_0 = \omega$ , poiché il vettore momento magnetico ruota intorno all'asse  $x'$ .

Generalmente gli impulsi a radiofrequenza hanno ampiezza di qualche  $mT$  o  $\mu T$ . Si suppone, infatti, di applicare un impulso a radiofrequenza per un tempo  $\tau = 1 \text{ ms}$ , così da far ruotare di  $\pi/2$  il campo momento magnetico. L'ampiezza del campo a radiofrequenza necessaria a tale scopo è data da:

$$\Delta\vartheta = \gamma B_1 \tau$$

Dove  $\gamma = 42.6 \text{ MHz/T}$ ; si ottiene:

$$B_1 = \frac{\Delta\vartheta}{\gamma\tau} = \frac{\frac{\pi}{2}}{42.6 \frac{\text{MHz}}{\text{T}} 1 \text{ ms}} \simeq 5.9 \mu T$$

Il ribaltamento degli spin a opera del campo magnetico a radiofrequenza è detto in gergo to flip.

La maggior difficoltà pratica e tecnica della risonanza magnetica consiste nella produzione del campo magnetico principale, costante nel tempo ed omogeneo nello spazio.

I campi a radiofrequenza con frequenza di Larmor riescono a flippare gli spin anche avendo un intensità molto minore del campo principale; tuttavia, più il campo a radiofrequenza si allontana dalla frequenza di precessione di Larmor e più il campo effettivo nel sistema rotante tende a quello stato, ovvero, è minore

il numero degli spin ruotati di  $\Delta\vartheta$ . Le frequenze degli impulsi devono essere compatibili con i tempi di rilassamento del corpo in esame.

**6.1.4.3.2 Calcolo del campo magnetico a radiofrequenza** L'uso del sistema rotante intorno all'asse  $\hat{i}_z$  permette di descrivere un campo a polarizzazione circolare in modo molto semplice. Inoltre, se la frequenza del campo a radiofrequenza e quella del sistema rotante sono uguali a quella di Larmor, è possibile scrivere la relazione:

$$\left(\frac{d\mu}{dt}\right)' = \gamma B_1 \mu \times \hat{i}_{x'}$$

Dove  $B_1 = B_1 \hat{i}_{x'}$  è il campo magnetico polarizzato circolarmente visto nel sistema rotante. La rotazione intorno all'asse  $\hat{i}_z$ , nel sistema fisso, si scrive come:

$$\mu(t) = R_z(\omega t) \mu(0)$$

Dove  $R_z$  è la matrice di rotazione intorno all'asse  $\hat{i}_z$ :

$$R_z = \begin{pmatrix} \cos(\omega_0 t) & -\sin(\omega_0 t) & 0 \\ \sin(\omega_0 t) & \cos(\omega_0 t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Invece di ruotare il sistema lungo l'asse  $\hat{i}_z$ , si suppone che la rotazione avvenga intorno all'asse  $\hat{i}_y$ . In questo caso, la soluzione si scrive come:

$$\mu(t) = R_y(\omega t) \mu(0)$$

Dove:

$$R_y = \begin{pmatrix} \cos(\omega_0 t) & 0 & -\sin(\omega_0 t) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\omega_0 t) & 0 & \cos(\omega_0 t) \end{pmatrix}$$

Con rotazione del sistema attorno all'asse  $\hat{i}_x$ , la soluzione è:

$$\mu(t) = R_x(\omega t) \mu(0)$$

Con:

$$R_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\omega_0 t) & -\sin(\omega_0 t) \\ 0 & \sin(\omega_0 t) & \cos(\omega_0 t) \end{pmatrix}$$

L'angolo di cui ruota il sistema di riferimento rotante rispetto a quello fisso, fissato un istante temporale  $\tau$ , è dato da:

$$\phi = \omega_1 \tau$$

$\omega_1$  è legato al campo a radiofrequenza applicato dalla relazione:

$$\omega_1 = \gamma B_1$$

Con  $B_1$  costante. L'angolo di cui ruota il sistema può essere scritto come:

$$\phi = \gamma B_1 \tau$$

Nel caso generale, in cui l'ampiezza del campo a radiofrequenza cambia nel tempo, ovvero  $B_1 = B_1(t)$ , la fase all'istante fissato  $\tau$ , è ottenuto come integrale temporale, infatti:

$$\frac{d\phi}{dt} = \omega_1 \Leftrightarrow \phi = \int_{t_0}^{\tau} \omega_1 dt$$

Per il legame tra pulsazione del sistema rotante e campo a radiofrequenza applicato, si ha:

$$\phi = \int_{t_0}^{\tau} \gamma B_1 dt$$

Questa generalizzazione è necessaria nel caso in cui il campo polarizzato circolarmente sia applicato per un intervallo temporale finito e abbia ampiezza variabile nel tempo. L'uso dell'integrale, quindi, permette di ottenere una descrizione più generale, applicabile anche a campi di ampiezza variabile nel tempo.

Si suppone di applicare un campo a radiofrequenza  $B_1$ , diretto lungo  $\hat{i}_{x'}$ , tale da far ruotare gli spin di un angolo  $\vartheta$  rispetto all'asse  $\hat{i}_{x'}$ . Si applica, non appena viene interrotta la trasmissione del primo campo, un secondo impulso a radiofrequenza, diretto lungo l'asse  $\hat{i}_{y'}$ . La descrizione del moto di precessione, nel sistema di riferimento fisso, in questo scenario, è dato da:

$$\mu(t) = R_y R_x(\omega t) \mu(0)$$

### 6.1.5 Vettore di magnetizzazione

Per ottenere un'immagine di una sezione del corpo umano mediante il fenomeno della risonanza magnetica, si suddivide il corpo del paziente in volumetti elementi contenenti un numero di Avogadro di protoni che precedono alla frequenza di Larmor.

Dato l'elevato numero di spin si introduce il vettore di magnetizzazione su unità di volume  $M$ .

Si posiziona un volumetto elementare contenente un numero di Avogadro  $N_A$  di protoni, in un campo magnetico diretto lungo  $\hat{i}_z$ . Gli spin nel volumetto si allineano rispetto all'asse del campo magnetico esterno.

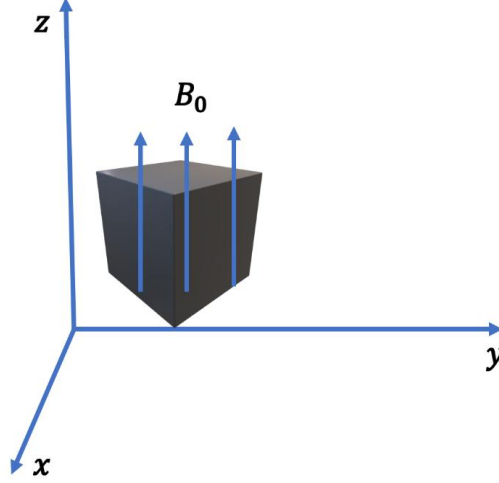


Figura 6.10: Figura.: Volumetto elementare di  $N_A$  di protoni in un campo magnetico diretto lungo  $\hat{i}_z$

Secondo la meccanica quantistica, in realtà, gli spin saltano su due livelli energetici:  $\langle -|$ , di energia  $+\hbar/2$  e  $|+\rangle$ , di energia  $-\hbar/2$ . Dal punto di vista macroscopico, ogni volumetto elementare presenta un vettore di magnetizzazione  $M$ , dato dalla somma dei singoli momenti magnetici associati ai protoni, normalizzato il volume elementare:

$$M = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^{N_A} \mu_i$$

L'insieme degli spin nel volumetto elementare, dato che risuonano alla stessa frequenza, è chiamato spin *isochromat* poiché può essere considerato come un insieme o un dominio di spin con stessa frequenza.

Trascurando le interazioni dei protoni con il loro ambiente, è possibile supporre che ogni spin precessa intorno al campo applicato secondo l'equazione:

$$\frac{d\mu_i}{dt} = \gamma \mu_i \times B_0$$

Sommando i vari contributi di ogni spin del volumetto e dividendo per il volume elementare si ha:

$$\frac{1}{V} \sum_{i=1}^{N_A} \frac{d\mu_i}{dt} = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^{N_A} \gamma \mu_i \times B_0$$

Per la linearità dell'operatore somma e derivata è possibile scrivere:

$$\sum_{i=1}^{N_A} \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{V} \mu_i \right) = \sum_{i=1}^{N_A} \gamma \frac{1}{V} \mu_i \times B_0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^{N_A} \frac{1}{V} \mu_i \right) = \gamma \left( \sum_{i=1}^{N_A} \frac{1}{V} \mu_i \right) \times B_0$$

Per definizione del vettore di magnetizzazione per unità di volume è possibile scrivere:

$$\frac{dM}{dt} = \gamma M \times B_0$$

È molto conveniente analizzare la magnetizzazione del volumetto e, quindi, l'equazione differenziale, in termini del vettore di magnetizzazione parallelo all'asse individuato dal campo magnetico principale e la componente trasversale. In altre parole, si indica:

$$M = M_{\parallel} + M_{\perp}$$

Dove, in coordinate cartesiane e con un campo magnetico esterno diretto lungo  $\hat{i}_z$ :

$$M_{\parallel} = M_z \hat{i}_z$$

$$M_{\perp} = M_x \hat{i}_x + M_y \hat{i}_y$$

L'equazione differenziale può essere scritta scomponendo il vettore di magnetizzazione:

$$\frac{d}{dt} (M_{\parallel} + M_{\perp}) = \gamma (M_{\parallel} + M_{\perp}) \times B_o \hat{i}_z$$

Per linearità:

$$\frac{dM_{\parallel}}{dt} + \frac{dM_{\perp}}{dt} = \gamma B_o M_{\parallel} \times \hat{i}_z + \gamma B_o M_{\perp} \times \hat{i}_z$$

Per definizione di componente parallela del vettore di magnetizzazione, il termine  $M_{\parallel} \times \hat{i}_z$  si annulla:

$$M_{\parallel} \times \hat{i}_z = M_z \hat{i}_z \times \hat{i}_z = 0$$

Per cui:

$$\frac{dM_{\parallel}}{dt} + \frac{dM_{\perp}}{dt} = \gamma B_o M_{\perp} \times \hat{i}_z$$

Scrivendo le due equazioni per le proiezioni si ha:

$$\begin{cases} \frac{dM_{\parallel}}{dt} = 0 \\ \frac{dM_{\perp}}{dt} = \gamma B_o M_{\perp} \times \hat{i}_z \end{cases}$$

Questa modellazione non considera i fenomeni di interazione tra gli spin e il reticolo o tra i veri spin del volumetto. In particolare, delle equazioni risulta che la dinamica longitudinale, evolve in maniera indipendente da quella trasversale. La prima è descritta dal tempo di rilassamento longitudinale  $T_1$  mentre la seconda dal tempo di rilassamento trasversale  $T_2$ . Come risultato delle due evoluzioni, il modulo del vettore magnetizzazione non è costante nel tempo.

Per comprendere tale concetto si suppone di porre un volumetto elementare in un campo magnetico diretto lungo l'asse  $\hat{i}_z$ . Raggiunto l'equilibrio termodinamico, il vettore di magnetizzazione si raggiunge il

regime, con modulo  $M_0$  e diretto come il campo magnetico esterno. Si suppone di applicare un impulso elettromagnetico tale da far ruotare il vettore di magnetizzazione. Durante il ritorno alle condizioni di equilibrio termodinamico, la componente longitudinale del vettore di magnetizzazione è più lenta nel raggiungere il valore di regime  $M_0$ , rispetto alla componente trasversale, che deve raggiungere il valore iniziale, ovvero nullo.

Questo comportamento è descritto dalle equazioni di Bloch, basate su una descrizione classica della materia. La complessità del moto del vettore di magnetizzazione è dovuta al fatto che tale vettore è composto da circa  $10^{23}$  momenti magnetici, ognuno dei quali con un proprio andamento, influenzato dall'ambiente.

Si osservi che a temperature ambiente, il vettore di magnetizzazione è dato dalla legge di Curie:

$$M_0 \simeq \frac{\gamma^2 \hbar^2}{4k_B T} B_0 \frac{N_A}{V}$$

Il rapporto tra numero di spin, uguale al numero di Avogadro per un volumetto elementare, e il volume del corpo è detto densità protonica ed è indicato con  $\rho$ :

$$\rho = \frac{N_A}{V}$$

Per cui:

$$M_0 \simeq \frac{\gamma^2 \hbar^2}{4k_B T} B_0 \rho$$

Le iterazioni degli spin con l'ambiente dipendono dal tessuto analizzato e dal suo stato di salute. Note le tempistiche con cui evolve il vettore di magnetizzazione macroscopico, nel ritorno alla condizione di regime, è possibile ricostruire l'immagine del tessuto.

#### 6.1.5.1 Iterazione spin-reticolo

In normali condizioni, gli spin non sono indipendenti tra loro ma interagiscono sia con il materiale in cui sono contenuti sia, nello stesso istante, con gli altri spin del reticolo. Ciò determina che l'equazione per la componente longitudinale:

$$\frac{dM_{\parallel}}{dt} = 0$$

è errata poiché non tiene conto di tali fenomeni; infatti, momenti magnetici dei protoni tendono ad allinearsi col campo esterno, tuttavia, le iterazioni con l'ambiente circostante non consentono al vettore di magnetizzazione di essere diretto esattamente lungo l'asse del campo principale,  $\hat{i}_z$ .

Ogni spin è inclinato rispetto l'asse verticale di un angolo  $\vartheta$ , inoltre, ogni spin interagisce con gli altri prossimi. Nello specifico, l'angolo  $\vartheta$  è l'inclinazione del vettore che congiunge il centro del sistema di riferimento con lo spin rispetto l'asse individuato dal campo magnetico esterno.



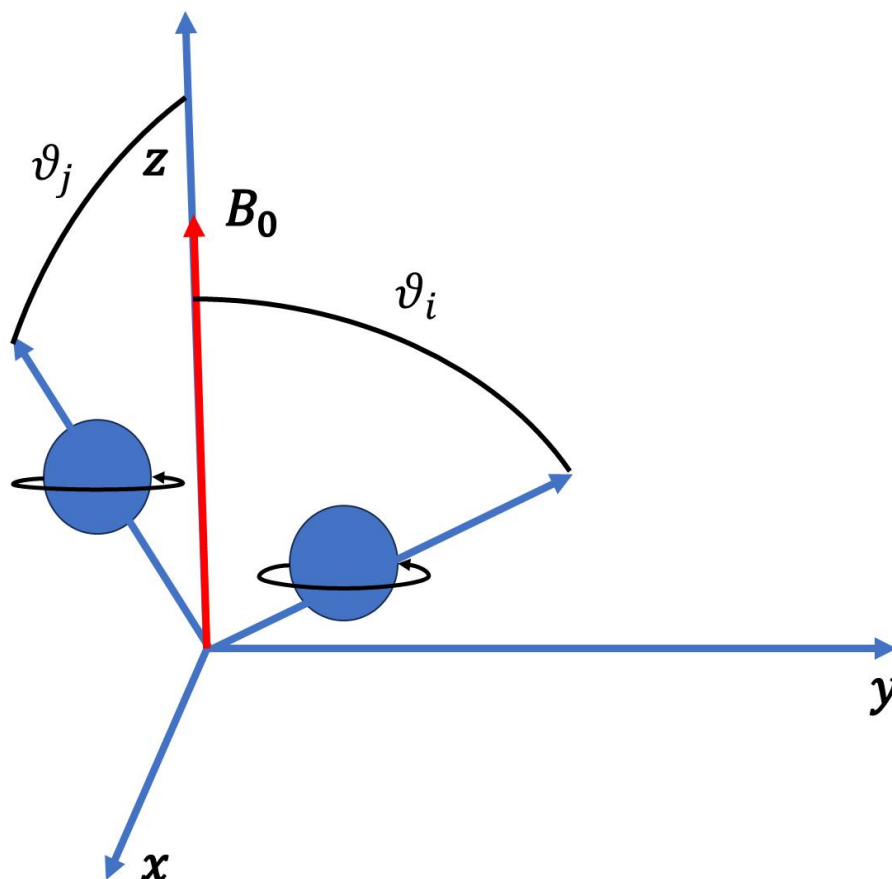


Figura 6.11: Figura :: Spin con diverse inclinazioni

Nell'analisi della componente longitudinale è possibile trascurare gli effetti di repulsione dei protoni dovute alle interazioni coulombiane. In altre parole, si ritiene che la distanza tra due protoni, detta distanza internucleare, sia molto maggiore del raggio di azione delle forze elettriche.

Ogni singolo spin può essere descritto come un dipolo magnetico elementare, il cui potenziale vettore si dimostra essere:

$$A = \frac{1}{|r|} \mu \times r$$

Dove  $r$  è il vettore che congiunge due spin.

Dal punto di vista classico, il campo prodotto da uno spin è dato da:

$$B = \nabla \times A = \frac{1}{|r|} \nabla \times (\mu \times r)$$

Si dimostra che la soluzione a tale equazione è data da:

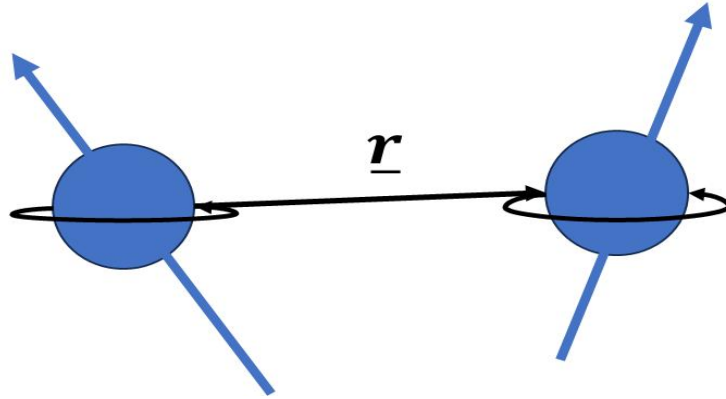


Figura 6.12: Figura .: Vettore distanza tra due spin

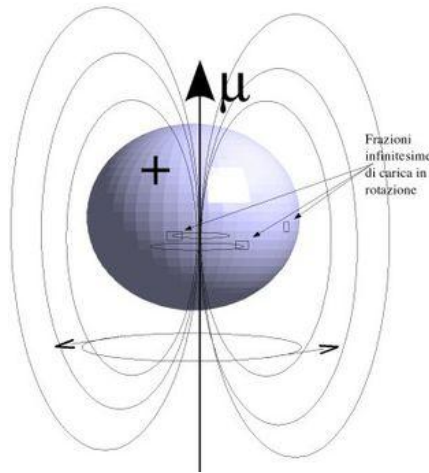


Figura 6.13: Figura .: Simmetria cilindrica del campo prodotto da uno spin

$$\begin{cases} B_x = 3\mu \frac{\sin \vartheta \cos \vartheta}{r^3} \\ B_y = 0 \\ B_z = \mu \frac{3 \cos^2 \vartheta - 1}{r^3} \end{cases}$$

La componente lungo  $\hat{i}_y$  è nulla poiché l'andamento delle linee di campo magnetico di uno spin hanno simmetria cilindrica.

Per il principio di sovrapposizione è possibile che uno spin influenzi quelli vicini e viceversa, uno spin è influenzato da quelli vicini.

La componente lungo  $\hat{i}_z$  è legata all'energia del sistema, infatti, in meccanica classica, si prova che l'energia di un momento magnetico  $\mu$  immerso in un campo magnetico  $B_0$  è data da:

$$U = -\mu \cdot B_0$$

Con un campo con solo componente verticale ovvero  $B_0 = B_0 \hat{i}_z$ , si ha:

$$U = -\mu_z B_0$$

Ne discende che la componente verticale, lungo  $\hat{i}_z$ , è coinvolta negli scambi energetici tra dipoli elementari.

L'interpretazione della componente lungo  $\hat{i}_x$  del campo prodotto da uno spin  $B_x$ , è più complessa in quanto bisogna tener conto che i dipoli non sono fermi nello spazio ma precedono intorno all'asse individuato dal campo esterno, uno ente a influenzare questa componente.

Nello specifico, a causa dell'agitazione termica, i dipoli non sono fissi nello spazio ma in moto casuale. L'agitazione termica è molto forte nei liquidi, di cui è prevalentemente composto il corpo umano, e nei gas.

A causa dell'agitazione termica, i dipoli si muovono reciprocamente tra loro in modo continuo. Le iterazioni reciproche dei campo magnetici degli spin sono molto complesse da descrivere; infatti, la teoria del rilassamento è molto sofisticata e può essere affrontata solamente adoperando la meccanica quantistica. In letteratura, esistono delle trattazioni riguardanti solamente le sostanze pure. A oggi, non esistono analisi basate sulla meccanica quantistica in grado di descrivere il fenomeno del rilassamento nel corpo umano per l'elevato numero di molecole di cui è composto, come acqua, sali disciolti, proteine, lipidi ed ecc.

Nell'analisi della risonanza magnetica, si forniscono delle leggi che descrivono in modo approssimativo, ma allo stesso modo abbastanza fedelmente, i meccanismi di rilassamento all'interno dei tessuti umani,

A causa delle iterazioni tra i vari spin, un protone non è soggetto a un campo magnetico uguale a quello statico applicato, ma prossimo a esso. Ogni spin, per le influenze degli altri, ruoterà attorno all'asse individuato dal campo magnetico principale con propria frequenza di Larmor.

Quando è applicato un campo magnetico a frequenza  $\omega_0 = \gamma B_0$ , è probabile che avvengano delle transizioni degli spin dallo stato  $|+\rangle$  allo stato  $|-\rangle$  e viceversa. Dunque, un dipolo magnetico, soggetto a una radiazione elettromagnetica a frequenza  $\omega_0$ , prossima a quella con cui precede, può essere indotto a una transizione verso l'alto o verso il basso:

- Nella transizione dal livello energetico  $|+\rangle$  a  $|-\rangle$ , il protone emette un fotone di energia  $\hbar\gamma B_0 = \hbar\omega_0$ . Tale fenomeno è noto come emissione stimolata;
- Nella transizione dal livello energetico  $|-\rangle$  a  $|+\rangle$ , protone assorbe un fotone di energia  $\hbar\omega_0$ .

Il passaggio dallo stato  $|+\rangle$  a  $|-\rangle$  produce l'emissione di un fotone che può stimolare un altro spin vicino, il quale transita a sua volta da  $|-\rangle$  a  $|+\rangle$ . Le iterazioni energetiche a livello microscopico sono, quindi, molto complesse a causa dell'elevato numero di spin contenuti in un volumetto elementare.

Per analizzare il comportamento di un singolo spin con l'intera massa che lo circonda, è possibile ricorrere alla statistica di Boltzmann, considerando lo spin a contatto con il reticolo, o *lattice*, come un piccolo sistema a contatto con un altro avente un numero di spin molto maggiore.

Sia  $N^+$  il numero di protoni nel livello energetico  $E^+ = \hbar\gamma B_0/2$  e  $N^-$  il numero di protoni nel livello energetico  $E^- = -\hbar\gamma B_0/2$ . Sia  $W_{+\rightarrow-}$  la probabilità di transizione di uno spin dallo stato  $|+\rangle$  a  $|-\rangle$ , mentre  $W_{-\rightarrow+}$  la probabilità opposta, ovvero che uno spin transiti da uno stato  $|-\rangle$  a  $|+\rangle$ .

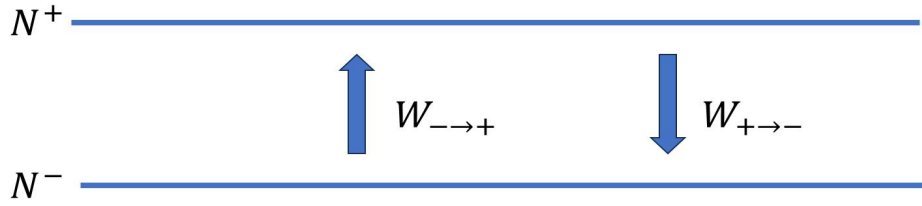


Figura 6.14: *Figura .: Probabilità di transizioni*

In meccanica quantistica, le due probabilità si esprimono come:

$$W_{+\rightarrow-} = \langle + | \hat{\mu} | - \rangle$$

$$W_{-\rightarrow+} = \langle - | \hat{\mu} | + \rangle$$

Queste quantità possono essere stimate a patto di conoscere l'hamiltoniano  $\hat{H}$  del sistema. Dato il gran numero di particelle presente nel volumetto elementare, la trattazione con la meccanica quantistica, attraverso l'operatore hamiltoniano, è molto complessa. Per tale ragione si ricorre alla statistica di Boltzmann.

All'equilibrio termodinamico, il numero delle transizioni dallo stato  $|+\rangle$  allo stato  $|-\rangle$  deve essere uguale al numero delle transizioni da  $|-\rangle$  a  $|+\rangle$ , in quanto l'energia del sistema si conserva. Si instaura così un equilibrio dinamico nel sistema. Per tale motivo è possibile scrivere l'uguaglianza:

$$N^+ W_{+\rightarrow-} = N^- W_{-\rightarrow+}$$

Dove  $N^+ W_{+\rightarrow-}$  è il numero dei protoni che dallo stato  $|+\rangle$  transitano allo stato  $|-\rangle$  e  $N^- W_{-\rightarrow+}$  è il numero dei protoni che eseguono la transizione opposta. Le transizioni devono essere tali da mantenere la popolazione degli spin costante.

Si scrive l'equazione all'equilibrio termodinamico come:

$$N^+ W_{+\rightarrow-} = N^- W_{-\rightarrow+} \Leftrightarrow \frac{W_{+\rightarrow-}}{W_{-\rightarrow+}} = \frac{N^-}{N^+}$$

Per la statistica di Boltzmann, il rapporto tra le due probabilità è dato dal rapporto degli esponenziali:

$$\frac{W_{+\rightarrow-}}{W_{-\rightarrow+}} = \frac{\exp\left(\frac{E^+}{k_B T}\right)}{\exp\left(\frac{E^-}{k_B T}\right)} = \exp\left(\frac{E^+ - E^-}{k_B T}\right)$$

Sebbene non sia possibile valutare numericamente le due probabilità, è possibile valutarne il rapporto mediante la meccanica statistica.

Si scrive l'equazione differenziale che collega l'evoluzione temporale del numero di protoni che si trovano nello stato  $|+\rangle$ . La variazione nel tempo del numero di spin nello stato energetico  $|+\rangle$  dipende dal numero

di protoni che dallo stato  $|-\rangle$  passano allo stato  $|+\rangle$ , a cui va sottratto il numero di protoni che transitano dallo stato  $|+\rangle$  a quello  $|-\rangle$  nell'intervallo temporale infinitesimo  $dt$ :

$$\frac{dN^+}{dt} = N^- W_{-\rightarrow+} - N^+ W_{+\rightarrow-}$$

Da questa espressione si evince che le quantità  $W_{-\rightarrow+}$  e  $W_{+\rightarrow-}$  sono dimensionalmente omogenee con l'inverso di un tempo:

$$[W_{-\rightarrow+}] = \left[ \frac{1}{s} \right]$$

In altre parole,  $W_{-\rightarrow+}$  e  $W_{+\rightarrow-}$  sono delle probabilità per unità di tempo.

Analogamente per la popolazione di spin nello stato  $|-\rangle$ : la variazione del numero di spin nell'unità di tempo è data dalla popolazione di spin nello stato  $|+\rangle$  che transita nello stato  $|-\rangle$  a cui va sottratto il numero di spin che esegue la transizione opposta:

$$\frac{dN^-}{dt} = N^+ W_{+\rightarrow-} - N^- W_{-\rightarrow+}$$

Si scrivono le equazioni in termini di differenza di popolazioni  $\Delta N$ :

$$\Delta N = N^+ - N^-$$

Il parametro  $\Delta N$  è fondamentale poiché la magnetizzazione macroscopica del volumetto elementare  $M$  è proporzionale alla differenza di popolazione di spin nello stato  $|+\rangle$  rispetto a quelle nello stato  $|-\rangle$ :

$$|M| \propto \Delta N = N^+ - N^-$$

La magnetizzazione è, in ultima analisi, legata al netto di spin paralleli al campo magnetico principale, rispetto a quelli antiparalleli. Da ciò si evince la convenienza nel ragionare in termini di evoluzione della differenza di popolazione, piuttosto che mediante la variazione delle singole popolazioni.

Dalle due equazioni differenziali, che descrivono l'evoluzione temporale di una sola popolazione, sottraendo membro a membro si ha:

$$\begin{cases} \frac{dN^+}{dt} = N^- W_{-\rightarrow+} - N^+ W_{+\rightarrow-} \\ \frac{dN^-}{dt} = N^+ W_{+\rightarrow-} - N^- W_{-\rightarrow+} \end{cases}$$

$$\frac{d}{dt} (N^+ - N^-) = N^- W_{-\rightarrow+} - N^+ W_{+\rightarrow-} - N^+ W_{+\rightarrow-} + N^- W_{-\rightarrow+}$$

Da cui:

$$\frac{d\Delta N}{dt} = 2N^-W_{-\rightarrow+} - 2N^+W_{+\rightarrow-}$$

Sia  $N$  il numero totale degli spin contenuto nel volumetto elementare. Siccome il volume non scambia materia con l'esterno, il numero degli spin è costante:

$$N = N^+ + N^- = \text{const}$$

Per definizione:

$$\Delta N = N^+ - N^-$$

Sommando membro a membro si ha:

$$N + \Delta N = 2N^+ \Leftrightarrow N^+ = \frac{1}{2}(N + \Delta N)$$

Invece, sottraendo membro a membro, si ha:

$$N - \Delta N = 2N^- \Leftrightarrow N^- = \frac{1}{2}(N - \Delta N)$$

L'equazione differenziale:

$$\frac{d}{dt} (N^+ - N^-) = 2N^-W_{-\rightarrow+} - 2N^+W_{+\rightarrow-}$$

Può essere scritta come:

$$\frac{d\Delta N}{dt} = 2\frac{1}{2}(N - \Delta N)W_{-\rightarrow+} - 2\frac{1}{2}(N + \Delta N)W_{+\rightarrow-} = (N - \Delta N)W_{-\rightarrow+} - (N + \Delta N)W_{+\rightarrow-}$$

Raccogliendo  $N$  e  $\Delta N$  al secondo membro si ha:

$$\frac{d\Delta N}{dt} = N(W_{-\rightarrow+} - W_{+\rightarrow-}) - \Delta N(W_{-\rightarrow+} + W_{+\rightarrow-})$$

Queste equazioni devono essere sempre valide poiché non sono state proposte ipotesi particolari semplificative. Se le equazioni sono sempre valide, lo sono anche all'equilibrio termodinamico, condizione in cui non vi è nessuna variazione di  $\Delta N$  dato che le due popolazioni presentano lo stesso numero di spin, nonostante la variazione della configurazione del sistema.

Dal punto di vista matematico, all'equilibrio termodinamico, risulta:

$$\frac{d\Delta N}{dt} = 0$$

Dunque,  $\Delta N = \Delta N_0 = \text{const.}$  Siano  $N_0^+$  il numero di spin nello stato  $|+\rangle$  e  $N_0^-$  il numero di spin nello stato  $|-\rangle$  all'equilibrio termodinamico, risulta:

$$\Delta N_0 = N_0^+ - N_0^-$$

$\Delta N_0$  è la differenza di spin nello stato  $|+\rangle$  rispetto a quelli nello stato  $|-\rangle$  all'equilibrio termodinamico; ciò produce la magnetizzazione macroscopica  $M$ .

All'equilibrio termodinamico, l'equazione:

$$\frac{d\Delta N}{dt} = N(W_{-\rightarrow+} - W_{+\rightarrow-}) - \Delta N(W_{-\rightarrow+} + W_{+\rightarrow-})$$

Diventa:

$$N(W_{-\rightarrow+} - W_{+\rightarrow-}) - \Delta N_0(W_{-\rightarrow+} + W_{+\rightarrow-}) = 0$$

Si ricava  $\Delta N_0$ :

$$\Delta N_0 = N \frac{W_{-\rightarrow+} - W_{+\rightarrow-}}{W_{-\rightarrow+} + W_{+\rightarrow-}}$$

Sapendo che il valore all'equilibrio termodinamico del netto di spin è  $\Delta N_0$ , è possibile ricavare l'andamento temporale di  $\Delta N$ . Infatti, siccome  $\Delta N_0$  è costante, è possibile sottrarre la sua derivata al primo membro dell'equazione:

$$\frac{d\Delta N}{dt} = N(W_{-\rightarrow+} - W_{+\rightarrow-}) - \Delta N(W_{-\rightarrow+} + W_{+\rightarrow-})$$

Ottenendo:

$$\frac{d}{dt}(\Delta N - \Delta N_0) = N(W_{-\rightarrow+} - W_{+\rightarrow-}) - \Delta N(W_{-\rightarrow+} + W_{+\rightarrow-})$$

Al secondo membro si raccoglie il termine  $(W_{-\rightarrow+} + W_{+\rightarrow-})$ , ottenendo:

$$\frac{d}{dt}(\Delta N - \Delta N_0) = \left( N \frac{W_{-\rightarrow+} - W_{+\rightarrow-}}{W_{-\rightarrow+} + W_{+\rightarrow-}} - \Delta N \right) (W_{-\rightarrow+} + W_{+\rightarrow-})$$

All'equilibrio termodinamico, si ha:

$$\Delta N_0 = N \frac{W_{-\rightarrow+} - W_{+\rightarrow-}}{W_{-\rightarrow+} + W_{+\rightarrow-}}$$

Per cui, l'equazione differenziale può essere scritta come:

$$\frac{d}{dt}(\Delta N - \Delta N_0) = (\Delta N_0 - \Delta N)(W_{-\rightarrow+} + W_{+\rightarrow-})$$

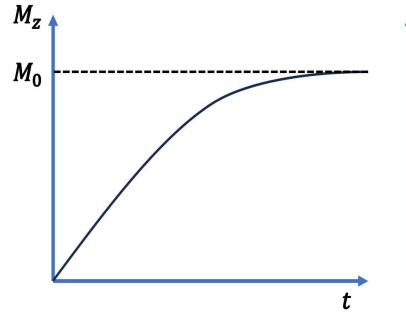


Figura 6.15: *Figura .: Evoluzione temporale del netto di vettore di magnetizzazione per effetto del campo principale*

Dato che  $W_{-\rightarrow+}$  e  $W_{+\rightarrow-}$  sono omogenee con l'inverso di un tempo, si pone:

$$\frac{1}{T_1} = W_{-\rightarrow+} + W_{+\rightarrow-}$$

Con questa posizione, l'equazione differenziale si può scrivere:

$$\frac{d}{dt} (\Delta N - \Delta N_0) = \frac{1}{T_1} (\Delta N_0 - \Delta N)$$

Al fine di avere la stessa quantità, si raccoglie un segno meno al secondo membro:

$$\frac{d}{dt} (\Delta N - \Delta N_0) = -\frac{1}{T_1} (\Delta N - \Delta N_0)$$

L'evoluzione temporale di  $\Delta N$  dipende dalla costante di tempo  $T_1$ , data dalla somma delle probabilità di transizione da uno stato all'altro.

La relazione individuata è molto approssimata, poiché le probabilità non sono note a priori, ma permette di descrivere l'evoluzione temporale del netto degli spin nello stato parallelo nel tempo. Si osserva che la soluzione dell'equazione è di tipo esponenziale crescente, con costante di tempo  $T_1$ , il valore di regime è  $\Delta N_0$ .

Generalizzando, in un sistema di spin immerso in un campo magnetico, la componente longitudinale del vettore di magnetizzazione tende a raggiungere il valore di regime, dato dalla legge di Curie, con una costante di tempo  $\tau = T_1$ .

Disattivando il campo magnetico principale dopo che il sistema ha raggiunto l'equilibrio termodinamico, la componente longitudinale del vettore di magnetizzazione si annulla. Il decadimento è di tipo esponenziale con costante di tempo sempre uguale a  $T_1$ .

Il tempo  $T_1$  interessa gli scambi tra i vari spin contenuti nel materiale ed è legato alla componente longitudinale, lungo  $\hat{i}_z$ . L'equazione di Bloch  $dM_z/dt = 0$  viene corretta introducendo l'andamento temporale, dettato dalla costante di tempo  $T_1$ :

$$\frac{dM_z}{dt} = \frac{1}{T_1} (M_0 - M_z)$$



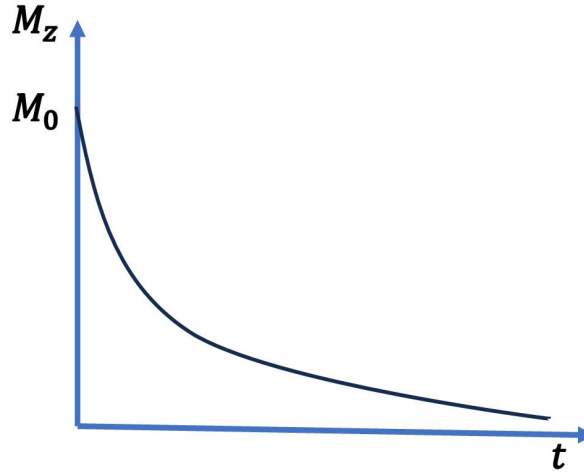


Figura 6.16: *Figura .: Evoluzione del vettore di magnetizzazione alla rimozione del campo principale*

Tale equazione è detta I equazione di Bloch. Inoltre, il tempo  $T_1$  è detto tempo di rilassamento longitudinale o spin-reticolo o, in letteratura anglosassone, *spin-lattice*. Dal nome si evince che il tempo  $T_1$  tiene conto delle interazioni di uno spin a contatto con l'intero reticolo, visto come un serbatoio termico, in cui è inserito. Generalmente,  $T_1$  è maggiore nei liquidi rispetto ai solidi.

La soluzione della prima equazione di Bloch è del tipo:

$$M_z(t) = M_z(0) \exp\left(-\frac{t}{T_1}\right) + M_0 \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{T_1}\right)\right]$$

L'equazione di Bloch è fondamentale per studiare come il vettore di magnetizzazione raggiunga nuovamente l'equilibrio termodinamico, a valle di una perturbazione.

La costante di tempo  $T_1$  è un parametro essenziale per la caratterizzazione dei tessuti, così da eseguire l'*imaging*. Tessuti diversi sono caratterizzati da un tempo di rilassamento longitudinale specifico.

### 6.1.5.2 Iterazioni spin-spin

Un importante meccanismo, che determina il decadimento delle componenti trasversali della magnetizzazione, è la generazione di campi locali prodotti dagli spin. Questi campi si combinano col campo principale applicando, modificando localmente il campo in cui sono immersi i campi vicini.

Si considera un singolo spin, il campo prodotto da questo spin è indicato con  $B_{loc}$ . Gli altri spin genereranno dei campi diversi. Tutte le componenti verticali possiedono intensità diverse, non predicibili in quanto non è possibile ricostruire il moto di ogni singolo spin del volumetto considerato.

Per studiare il campo locale visto da uno spin si utilizza il valor quadratico medio:

$$B_{RMS} = \sqrt{\langle |B_{loc}|^2 \rangle}$$

Dunque, vi è una componente magnetica del campo valor quadratico medio lungo  $\hat{i}_z$ . Questa componente si sovrappone al campo magnetico principale  $B_0\hat{i}_z$ , applicato dall'esterno; ciò determina una variazione della frequenza con cui i singoli spin precedono intorno all'asse  $\hat{i}_z$ .

Data l'agitazione termina, gli spin sono in moto relativo, quindi, la loro posizione non è statica ma dinamica. Ne consegue che il campo locale prodotto da uno spin varia nel tempo, poiché, appunto, varia la distribuzione locale degli spin. Per tale motivo il campo valor quadratico medio è una funzione del tempo:

$$B_{RMS}(t) = \sqrt{\langle |B_{loc}(t)|^2 \rangle}$$

Sia  $t_1$  un primo istante di osservazione; il campo locale di uno spin vale  $B_{loc}(t_1)$ . In un secondo istante temporale  $t_2$ , successivo al primo, il campo locale sarà diverso, a causa dei modi termici, per cui:

$$B_{loc}(t_1) \neq B_{loc}(t_2)$$

Questo risultato è dovuto alla diversa configurazione degli spin tra gli istanti  $t_1$  e  $t_2$ .

Per ogni spin, la frequenza di precessione intorno all'asse  $\hat{i}_z$  è diversa dagli altri ed è data da:

$$\Delta\omega(t) = \gamma B_{loc}(t)$$

Dove  $\Delta\omega = \omega_0 - \omega_{loc}(t)$ . La differenza tra le frequenze di precessione è, dunque, una funzione del tempo. Dati due istanti temporali, risulta:

$$\Delta\omega(t_1) = \gamma B_{loc}(t_1) \neq \Delta\omega(t_2) = \gamma B_{loc}(t_2)$$

Ovviamente  $\Delta\omega(t_1) \neq \Delta\omega(t_2)$  poiché i campi locali nei due istanti temporali sono diversi.

Si vuole studiare il fenomeno del campo locale nel sistema di riferimento locale. Tralasciando la frequenza principale  $\omega_0$ , restano solamente le variazioni  $\Delta\omega$  dovute alle interazioni tra uno spin e i protoni locali. Queste variazioni, nel sistema rotante danno luogo a delle variazioni di fase:

$$\vartheta = \int_{t_0}^{t_1} \Delta\omega(t') dt'$$

Può capitare che in un istante la fase cresca più rapidamente, altre volte meno rapidamente. In ogni caso la rotazione degli spin avviene sempre, complessivamente, in senso orario. Nel sistema rotante, in particolare, le variazioni di fase possono essere sia positive che negative; di conseguenza, la proiezione dello spin sul piano  $x' - y'$  non è fissa ma varia nel tempo, secondo la sua variazione di fase legate al campo locale.

La proiezione di tutti gli spine nel piano  $x' - y'$  è del tutto casuale, poiché casuale è il campo locale che ogni spin percepisce. È possibile, quindi, concludere che le proiezioni degli spin sono tutte distribuite uniformemente nel piano  $x' - y'$ . Di conseguenza, l'effetto medio, percepito a livello macroscopico nel volumetto contenente un numero di Avogadro di particelle, è l'annullamento delle componenti trasverse del

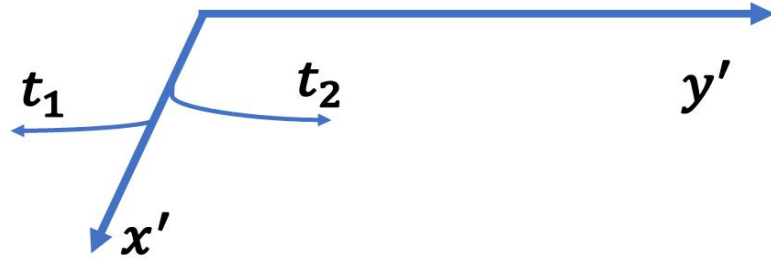


Figura 6.17: Figura .: Variazione della fase a causa del campo locale

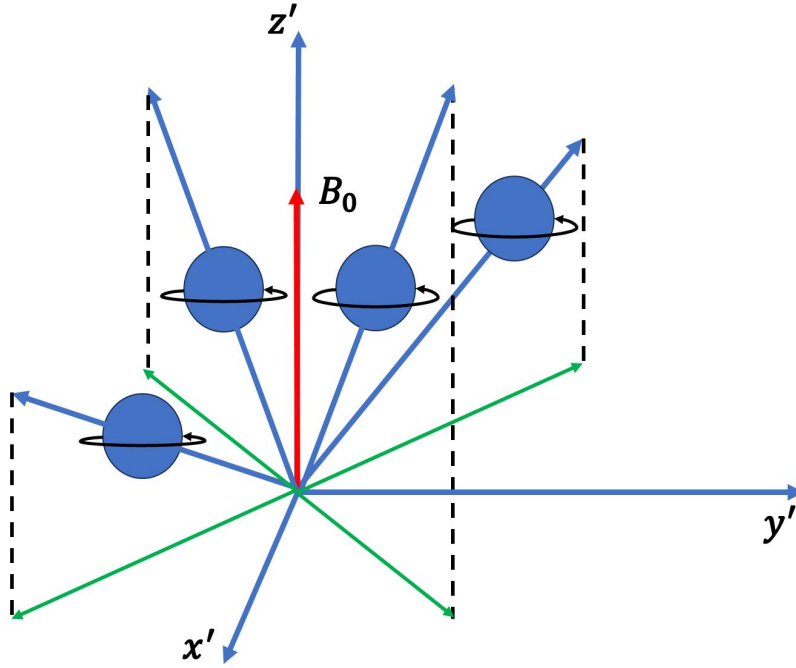


Figura 6.18: Figura .: Eliminazione delle componenti trasverse degli spin causa distribuzione uniforme

vettore di magnetizzazione. Infatti, le componenti trasverse, essendo casuali, si elidono a vicenda; ovvero, la risultante media della componente trasversa del vettore di magnetizzazione è nulla, dato l'elevato numero di spin considerato.

Le componenti longitudinali del campo magnetico prodotto da uno spin induce uno sfasamento e defasamento degli spin vicini, poiché procedono con frequenze diverse e casuali. Ne discende che la somma delle componenti trasversali degli spin mediamente è nulla. Da notare che lo sfasamento è legato alla fase diversa per ogni singolo spin.

Il tempo con cui la componente trasversale media va zero può essere stimato, studiando le iterazioni tra due spin. Si suppone che a un certo istante di tempo le fasi dei due spin siano le stesse.

In generale, la differenza di fase è data da:

$$\Delta\phi = \phi_1 - \phi_2 = (\phi_0^1 - \Delta\omega_{loc1}t) - (\phi_0^2 - \Delta\omega_{loc2}t)$$

Dove  $\Delta\omega_{loc_1}$  e  $\Delta\omega_{loc_2}$  sono le frequenze di precessione relative rispetto a quelle del campo magnetico principale, legati ai campi locali, rispettivamente del primo spin,  $B_{loc_1}$  e del secondo spin  $B_{loc_2}$ .

Se le fasi iniziali dei due spin sono le stesse, ovvero  $\phi_0^1 = \phi_0^2$ , la differenza di fase si scrive come:

$$\Delta\phi = -(\Delta\omega_{loc_1} - \Delta\omega_{loc_2})t$$

Le frequenze di precessione relative rispetto a quelle del campo magnetico principale possono essere scritte in funzione del campo locale:

$$\Delta\omega_{loc_i} = \gamma B_{loc_i}, \quad i = 1, 2$$

Per cui la differenza di fase può essere scritta come:

$$\Delta\phi = -(\gamma B_{loc_1} - \gamma B_{loc_2})t$$

Si indica la differenza di campi locali come:

$$\Delta B_{loc} = B_{loc_1} - B_{loc_2}$$

Si ottiene:

$$\Delta\phi = -\gamma \Delta B_{loc} t$$

Per avere una risultate netta nulla nel piano trasverso, le due proiezioni sul piano  $x' - y'$  devono essere uguali e oppure, dunque, la differenza di fase deve essere  $\Delta\phi = \pi$ . È, ora, possibile ottenere il tempo con cui due spin annullano le proprie componenti trasversali. Si indica tale tempo con  $\tau$ :

$$\Delta\phi = \pi = -\gamma \Delta B_{loc} \tau$$

Da cui:

$$\tau = -\frac{\pi}{\gamma \Delta B_{loc}}$$

Le differenze dei campi indotti hanno un'intensità proporzionale al fattore  $3\mu/r^3$ :

$$B_{loc} \propto \frac{3\mu}{r^3}$$

Il tempo di defasamento, al limite (ignorando le costanti), è dato da:

$$\tau \sim \frac{\pi}{\gamma \frac{\mu}{r^3}} = \frac{\pi r^3}{\mu \gamma}$$

Da questa relazione, noti i valori medi del momento magnetico e della distanza interatomica, è possibile ottenere una stima del tempo di defasamento più o meno concorde ai dati sperimentali. La stima di basa su una descrizione non esatta del fenomeno, in quanto fondata della meccanica classica; tuttavia, è usata poiché permette di ottenere una buona stima dei risultati sperimentali.

Il tempo di defasamento  $\tau$  è indicato con  $T_2$  ed è detto tempo di rilassamento trasversale.  $T_2$  rappresenta la costante di tempo con cui la componente trasversale del vettore di magnetizzazione,  $M_{\perp}$ , tende a zero:

$$M_x \rightarrow 0, \quad M_y \rightarrow 0$$

$T_2$  è generalmente minore nei solidi rispetto ai liquidi.

### 6.1.6 Equazioni di Bloch

All'equazione che descrive la magnetizzazione macroscopica di un volumetto elementare:

$$\frac{dM}{dt} = \gamma M \times B_0$$

vanno aggiunti due termini che tengono conto dei fenomeni di rilassamento. Il primo termine è legato agli scambi energetici tra uno spin e il reticolo, visto come un serbatoio termico, il secondo legato alle interazioni locali tra spin:

$$\frac{dM}{dt} = \gamma M \times B_0 + \frac{1}{T_1} (M_0 - M_z) \hat{i}_z - \frac{1}{T_2} M_{\perp}$$

La precedente equazione è detta di Bloch. Il segno meno nel termine  $M_{\perp}/T_2$  è dovuto al tendere a zero della componente trasversale del vettore di magnetizzazione con un tempo  $T_2$ .

Le equazioni di Bloch forniscono una descrizione fenomenologica del vettore di magnetizzazione, poiché non descrive i fenomeni fisici ma forniscono dei risultati concordi alle osservazioni sperimentali. Inoltre, le equazioni di Bloch non possono essere dedotte utilizzando la meccanica quantistica.

In letteratura anglosassone si definisce rilassività o relaxivity longitudinale e trasversale come:

$$R_1 = \frac{1}{T_1}, \quad R_2 = \frac{1}{T_2}$$

L'equazione vettoriale di Bloch può essere anche scritta in termini di relaxivity

$$\frac{dM}{dt} = \gamma M \times B_0 + R_1 (M_0 - M_z) \hat{i}_z - R_2 M_{\perp}$$

I tempi di rilassamento permettono di caratterizzare tessuti diversi e di identificare lo stato di salute di un tessuto stesso.

I tempi di rilassamento sono abbastanza variabili a seconda del tessuto; in particolare, tra i vari tessuti molli vi è una grande variabilità dei tempi di rilassamento. Ciò consente di discriminare con gradi di grigio diversi i tempi di rilassamento i diversi tessuti.

Le differenze di tempo di rilassamento longitudinale  $T_1$  non possono essere determinate sulla base della teoria quantistica, a causa dell'elevata complessità biochimiche dei tessuti umani.

In media, la composizione dei vari tessuti è simile tra i diversi individui, quindi, in un paziente i tempo di rilassamento sono grossomodo simili a quelli medi. Mediante delle opportune sequenze di acquisizione è possibile ottenere informazioni sui tempi di rilassamento, caratterizzando così il tessuto.

Tabella 6.1: *Tabella 6.1: Tempi di rilassamento di vari tessuti molli con campo principale di 1.5 T e temperatura di 37 °C*

Tessuto	Tempo di rilassamento	Tempo di rilassamento trasversale
	longitudinale $T_1$	$T_2$
Materia grigia	$\sim 950 \text{ ms}$	$\sim 100 \text{ ms}$
Tessuto muscolare	$\sim 900 \text{ ms}$	$\sim 50 \text{ ms}$
Grasso	$\sim 250 \text{ ms}$	$\sim 60 \text{ ms}$
Sangue	$\sim 1200 \text{ ms}$	$\sim 100 \text{ ms}$
Materia bianca	$\sim 600 \text{ ms}$	$\sim 80 \text{ ms}$
Fluidio cerebrospinale (CSF)	$\sim 4500 \text{ ms}$	$\sim 2200 \text{ ms}$

Generalmente risulta che il tempo di rilassamento longitudinale è maggiore di quello trasversale,  $T_1 > T_2$ , quindi, l'evoluzione longitudinale evolve più lentamente di quella trasversale. Analogamente per le relaxivity risulta  $R_2 > R_1$ .

#### 6.1.6.1 Risoluzione dell'equazione di Bloch

Si è visto che l'equazione vettoriale di Bloch, comprendente i tempi di rilassamento longitudinale e trasversale è:

$$\frac{dM}{dt} = \gamma M \times B_0 + \frac{1}{T_1} (M_0 - M_z) \hat{i}_z - \frac{1}{T_2} M_{\perp}$$

Questa equazione descrive da un punto di vista classico l'andamento del vettore di magnetizzazione  $M$  nel tempo.

Si suppone di forzare il sistema di spin mediante un campo magnetico principale  $B_0$  diretto lungo  $\hat{i}_z$ . Si scrive il prodotto vettoriale tra il vettore di magnetizzazione e il campo esterno applicato:

$$M \times B_0 = \begin{vmatrix} \hat{i}_x & \hat{i}_y & \hat{i}_z \\ M_x & M_y & M_z \\ 0 & 0 & B_0 \end{vmatrix} = B_0 (M_y \hat{i}_x - M_x \hat{i}_y)$$

Si scrive l'equazione di Bloch esplicitando le componenti dei vettori coinvolti:

$$\frac{d}{dt} (M_x \hat{i}_x + M_y \hat{i}_y + M_z \hat{i}_z) = \gamma B_0 (M_y \hat{i}_x - M_x \hat{i}_y) + \frac{1}{T_1} (M_0 - M_z) \hat{i}_z - \frac{1}{T_2} (M_x \hat{i}_x + M_y \hat{i}_y)$$

Per effetto del campo magnetico principale, il vettore di magnetizzazione si sposta da una configurazione iniziale  $M(t_0)$  a quella finale, descritta dall'equazione di Bloch.

Si proietta quest'ultima lungo gli assi:

$$\begin{cases} \frac{dM_x}{dt} = \gamma B_0 M_y - \frac{1}{T_2} M_x \\ \frac{dM_y}{dt} = -\gamma B_0 M_x - \frac{1}{T_2} M_y \\ \frac{dM_z}{dt} = \frac{1}{T_1} (M_0 - M_z) \end{cases}$$

Com'è facile osservare, l'evoluzione della componente longitudinale,  $M_z$ , è indipendente da quelle trasversali  $M_x$  e  $M_y$ ; infatti, le relative equazioni non sono accoppiate dopo la proiezione sugli assi. Le componenti trasversa sono, invece, legate tra loro.

Si risolve l'equazione relativa alla componente longitudinale del vettore  $M$ :

$$\frac{dM_z}{dt} = \frac{1}{T_1} (M_0 - M_z)$$

Si passa all'equazione omogenea associata:

$$\frac{dM_z}{dt} = -\frac{1}{T_1} M_z$$

La soluzione di questa equazione è del tipo:

$$M_z(t) = k \exp\left(-\frac{t}{T_1}\right)$$

Dove  $k$  è una costante dipendente dalle condizioni iniziali del sistema.

Alla soluzione dell'omogenea, va associata una soluzione particolare. Siccome il forzamento è costante una possibile soluzione particolare è del tipo:

$$M_z(t) = c = \text{const}$$

Si sostituisce tale soluzione nell'equazione differenziale:

$$\left. \frac{dM_z}{dt} \right|_{M_z=c} = \frac{1}{T_1} (M_0 - M_z)|_{M_z=c} \Leftrightarrow \frac{dc}{dt} = \frac{1}{T_1} (M_0 - c)$$

La derivata di una costante è nulla, per cui:

$$\frac{1}{T_1} (M_0 - c) = 0 \Leftrightarrow c = M_0$$

L'integrale generale dell'equazione differenziale per la componente longitudinale è:

$$M_z(t) = k \exp\left(-\frac{t}{T_1}\right) + M_0$$

Si suppone che il vettore di magnetizzazione sia noto all'istante  $t = t_0$ . Applicando la condizione iniziale è possibile determinare il valore di  $k$ :

$$M_z(t_0) = k \exp\left(-\frac{t_0}{T_1}\right) + M_0 \Leftrightarrow k = [M_z(t_0) - M_0] \exp\left(\frac{t_0}{T_1}\right)$$

La soluzione è, dunque:

$$M_z(t) = [M_z(t_0) - M_0] \exp\left(\frac{t_0}{T_1}\right) \exp\left(-\frac{t}{T_1}\right) + M_0$$

Esplicitando la componente transitoria e quella di regime, si ha:

$$M_z(t) = M_0 \left[ 1 - \exp\left(\frac{t_0 - t}{T_1}\right) \right] + M_z(t_0) \exp\left(\frac{t_0 - t}{T_1}\right)$$

Ovviamente, per tempi sufficientemente lunghi:

$$M_z(t_0) \exp\left(\frac{t_0 - t}{T_1}\right) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty$$

Se  $t_0 = 0$ , risulta:

$$M_z(t) = M_0 \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t}{T_1}\right) \right] + M_z(0) \exp\left(-\frac{t}{T_1}\right)$$

Supponendo che il valore iniziale della magnetizzazione sia nullo, la soluzione diventa:

$$M_z(t) = M_0 \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t}{T_1}\right) \right]$$

Applicando il campo magnetico principale, da una condizione di equilibrio termodinamico, la componente longitudinale tende al valore di regime con andamento esponenziale e costante di tempo  $T_1$ . Il valore di regime è dato dall'equazione di Curie:



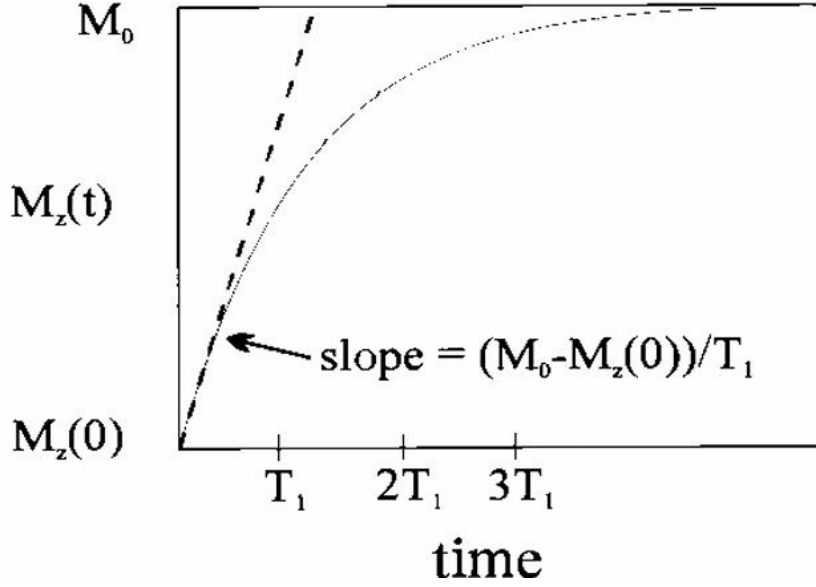


Figura 6.19: Tabella 6.2: Andamento della soluzione longitudinale dell'equazione di Bloch

$$M_0 \simeq \frac{N}{V} \frac{\gamma^2 \hbar^2}{4k_B T} B_0$$

È possibile ritenere che la componente longitudinale raggiunga il regime dopo un tempo uguale a  $4 \div 5$  volte la costante di tempo  $T_1$ . Generalmente il tempo di rilassamento longitudinale è dell'ordine del secondo, per cui si ritiene che il transitorio abbia una durata di circa 5 s.

Nella pratica, una volta immesso il paziente nel gantry della risonanza magnetica è necessario aspettare un giusto tempo prima di eseguire l'imaging, affinché gli spin dei protoni contenuti nel corpo del paziente raggiungano l'equilibrio termodinamico. L'esame, quindi, non può iniziare istantaneamente ma è necessario che il vettore di magnetizzazione del paziente raggiunga l'equilibrio termodinamico col campo. In caso contrario, si ottengono delle immagini con risultati falsati. In un tempo di  $5 \div 10$  s il tecnico radiologo entra nella sala di comando.

Per quanto riguarda le componenti trasversali, le equazioni che descrivono la loro evoluzione sono:

$$\begin{cases} \frac{dM_x}{dt} = \gamma B_0 M_y - \frac{1}{T_2} M_x \\ \frac{dM_y}{dt} = -\gamma B_0 M_x - \frac{1}{T_2} M_y \end{cases}$$

Dove  $\omega_0 = \gamma B_0$ ; per cui il sistema può essere scritto come:

$$\begin{cases} \frac{dM_x}{dt} = \omega_0 M_y - \frac{1}{T_2} M_x \\ \frac{dM_y}{dt} = -\omega_0 M_x - \frac{1}{T_2} M_y \end{cases}$$

Si pone il sistema in forma matriciale:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{T_2} & \omega_0 \\ -\omega_0 & -\frac{1}{T_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \end{pmatrix}$$

La soluzione di questa equazione è del tipo:

$$M_{\perp} = k \exp(\lambda I t)$$

Sostituendo tale equazione nell'equazione differenziale si ha:

$$\frac{d}{dt} \left[ k \exp(\lambda I t) \right] = \begin{pmatrix} -\frac{1}{T_2} & \omega_0 \\ -\omega_0 & -\frac{1}{T_2} \end{pmatrix} k \exp(\lambda I t) \Leftrightarrow \lambda I k \exp(\lambda I t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{T_2} & \omega_0 \\ -\omega_0 & -\frac{1}{T_2} \end{pmatrix} k \exp(\lambda I t)$$

Moltiplicando per la matrice inversa a  $k \exp(\lambda I t)$  si ottiene:

$$\lambda I = \begin{pmatrix} -\frac{1}{T_2} & \omega_0 \\ -\omega_0 & -\frac{1}{T_2} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -\frac{1}{T_2} - \lambda & \omega_0 \\ -\omega_0 & -\frac{1}{T_2} - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

Si pone il determinante della matrice individuata a zero, al fine di identificare i suoi autovettori. Conoscendo gli autovalori è possibile individuare anche il tipo di moto a cui sono soggette le componenti trasverse:

$$\det \begin{pmatrix} -\frac{1}{T_2} - \lambda & \omega_0 \\ -\omega_0 & -\frac{1}{T_2} - \lambda \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \left( -\frac{1}{T_2} - \lambda \right) \left( -\frac{1}{T_2} - \lambda \right) + \omega_0^2 = 0 \Leftrightarrow \left( \frac{1}{T_2} + \lambda \right)^2 + \omega_0^2 = 0$$

Svolgendo i prodotti si ha:

$$\frac{1}{T_2^2} + \frac{2\lambda}{T_2} + \lambda^2 + \omega_0^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + \frac{2\lambda}{T_2} + \omega_0^2 + \frac{1}{T_2^2} = 0$$

Si valuta il delta dell'equazione:

$$\frac{\Delta}{4} = \frac{1}{T_2^2} - \left( \omega_0^2 + \frac{1}{T_2^2} \right) = \frac{1}{T_2^2} - \omega_0^2 - \frac{1}{T_2^2} = -\omega_0^2$$

Il determinante è negativo per cui l'equazione non ammette soluzioni reali. Ne consegue che l'evoluzione delle componenti trasverse sono di tipo oscillanti smorzate.

Gli autovalori della matrice dei coefficienti sono:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{T_2} \pm j\omega_0 \Leftrightarrow \lambda_1 = -\frac{1}{T_2} - j\omega_0, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{T_2} + j\omega_0$$

Le soluzioni delle componenti trasverse sono del tipo:

$$\begin{cases} M_x(t) = k_{1,x} \exp \left[ \left( -\frac{1}{T_2} - j\omega_0 \right) t \right] + k_{2,x} \exp \left[ \left( -\frac{1}{T_2} + j\omega_0 \right) t \right] \\ M_y(t) = k_{1,y} \exp \left[ \left( -\frac{1}{T_2} - j\omega_0 \right) t \right] + k_{2,y} \exp \left[ \left( -\frac{1}{T_2} + j\omega_0 \right) t \right] \end{cases}$$

Per le proprietà degli esponenziali, è possibile scrivere:

$$\begin{cases} M_x(t) = k_{1,x} \exp\left(-\frac{t}{T_2}\right) \exp(-j\omega_0 t) + k_{2,x} \exp\left(-\frac{t}{T_2}\right) \exp(j\omega_0 t) \\ M_y(t) = k_{1,y} \exp\left(-\frac{t}{T_2}\right) \exp(-j\omega_0 t) + k_{2,y} \exp\left(-\frac{t}{T_2}\right) \exp(j\omega_0 t) \end{cases}$$

Raccogliendo il termine dipendente da  $T_2$ , si ottiene:

$$\begin{cases} M_x(t) = [k_{1,x} \exp(-j\omega_0 t) + k_{2,x} \exp(j\omega_0 t)] \exp\left(-\frac{t}{T_2}\right) \\ M_y(t) = [k_{1,y} \exp(-j\omega_0 t) + k_{2,y} \exp(j\omega_0 t)] \exp\left(-\frac{t}{T_2}\right) \end{cases}$$

Per individuare le costanti di integrazione bisognerebbe sostituire le equazioni individuate nel sistema di equazioni differenziali per le componenti trasverse e applicare le condizioni al contorno.

Per semplificare la trattazione si nota che la dipendenza da  $T_2$  è espressa mediante un fattore esponenziale moltiplicativo, quindi, è possibile scrivere le soluzioni delle componenti trasversali come:

$$M_x(t) = m_x(t) \exp\left(-\frac{t}{T_2}\right), \quad M_y(t) = m_y(t) \exp\left(-\frac{t}{T_2}\right)$$

Le due equazioni differenziali si scrivono come:

$$\begin{cases} \frac{dM_x}{dt} = \omega_0 M_y - \frac{1}{T_2} M_x \\ \frac{dM_y}{dt} = -\omega_0 M_x - \frac{1}{T_2} M_y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{d}{dt} \left[ m_x \exp\left(-\frac{t}{T_2}\right) \right] = \omega_0 m_y \exp\left(-\frac{t}{T_2}\right) - \frac{1}{T_2} m_x \exp\left(-\frac{t}{T_2}\right) \\ \frac{d}{dt} \left[ m_y \exp\left(-\frac{t}{T_2}\right) \right] = -\omega_0 m_x \exp\left(-\frac{t}{T_2}\right) - \frac{1}{T_2} m_y \exp\left(-\frac{t}{T_2}\right) \end{cases}$$

Svolgendo le derivate, si ha:

$$\begin{cases} \frac{dm_x}{dt} \exp\left(-\frac{t}{T_2}\right) - \frac{1}{T_2} m_x \exp\left(-\frac{t}{T_2}\right) = \omega_0 m_y \exp\left(-\frac{t}{T_2}\right) - \frac{1}{T_2} m_x \exp\left(-\frac{t}{T_2}\right) \\ \frac{dm_y}{dt} \exp\left(-\frac{t}{T_2}\right) - \frac{1}{T_2} m_y \exp\left(-\frac{t}{T_2}\right) = -\omega_0 m_x \exp\left(-\frac{t}{T_2}\right) - \frac{1}{T_2} m_y \exp\left(-\frac{t}{T_2}\right) \end{cases}$$

Semplificando i termini comuni al primo e al secondo membro e il termine esponenziale dipendente da  $T_2$ , si ottiene un semplice sistema di equazioni differenziali, la cui soluzione è nota:

$$\begin{cases} \frac{dm_x}{dt} = \omega_0 m_y \\ \frac{dm_y}{dt} = -\omega_0 m_x \end{cases}$$

Si deriva la prima equazione rispetto al tempo:

$$\frac{d^2 m_x}{dt^2} = \omega_0 \frac{dm_y}{dt}$$

Sostituendo la seconda equazione, si ottiene:

$$\frac{d^2 m_x}{dt^2} = -\omega_0^2 m_x$$

L'equazione differenziale ha come soluzione:

$$m_x = C_1 \exp(\lambda_1 t) + C_2 \exp(\lambda_2 t) = C_1 \exp(-j\omega_0 t) + C_2 \exp(j\omega_0 t)$$

Nota  $m_x$  è possibile ricavare l'equazione per  $m_y$  dalla prima relazione del sistema:

$$\frac{dm_x}{dt} = \omega_0 m_y \Leftrightarrow m_y = \frac{1}{\omega_0} \frac{dm_x}{dt} = \frac{1}{\omega_0} \frac{d}{dt} [C_1 \exp(-j\omega_0 t) + C_2 \exp(j\omega_0 t)]$$

Svolgendo l'operazione di derivata si ottiene:

$$m_y = \frac{1}{\omega_0} [-j\omega_0 C_1 \exp(-j\omega_0 t) + j\omega_0 C_2 \exp(j\omega_0 t)] = -jC_1 \exp(-j\omega_0 t) + jC_2 \exp(j\omega_0 t)$$

In definitiva, si è ottenuto:

$$\begin{cases} m_x = C_1 \exp(-j\omega_0 t) + C_2 \exp(j\omega_0 t) \\ m_y = -jC_1 \exp(-j\omega_0 t) + jC_2 \exp(j\omega_0 t) \end{cases}$$

Tornando alle componenti trasverse si ha:

$$\begin{cases} M_x(t) = [C_1 \exp(-j\omega_0 t) + C_2 \exp(j\omega_0 t)] \exp\left(-\frac{t}{T_2}\right) \\ M_y(t) = [-jC_1 \exp(-j\omega_0 t) + jC_2 \exp(j\omega_0 t)] \exp\left(-\frac{t}{T_2}\right) \end{cases}$$

Si suppone che il vettore di magnetizzazione sia noto all'istante  $t_0$ . In questo modo è possibile individuare le costanti di integrazione:

$$\begin{cases} M_x(t_0) = [C_1 \exp(-j\omega_0 t_0) + C_2 \exp(j\omega_0 t_0)] \exp\left(-\frac{t_0}{T_2}\right) \\ M_y(t_0) = [-jC_1 \exp(-j\omega_0 t_0) + jC_2 \exp(j\omega_0 t_0)] \exp\left(-\frac{t_0}{T_2}\right) \end{cases}$$

Si divide per il termine esponenziale per entrambe le equazioni:

$$\begin{cases} M_x(t_0) \exp\left(\frac{t_0}{T_2}\right) = C_1 \exp(-j\omega_0 t_0) + C_2 \exp(j\omega_0 t_0) \\ M_y(t_0) \exp\left(\frac{t_0}{T_2}\right) = -jC_1 \exp(-j\omega_0 t_0) + jC_2 \exp(j\omega_0 t_0) \end{cases}$$

Si divide per l'unità immaginaria nella seconda equazione:

$$\begin{cases} M_x(t_0) \exp\left(\frac{t_0}{T_2}\right) = C_1 \exp(-j\omega_0 t_0) + C_2 \exp(j\omega_0 t_0) \\ -jM_y(t_0) \exp\left(\frac{t_0}{T_2}\right) = -C_1 \exp(-j\omega_0 t_0) + C_2 \exp(j\omega_0 t_0) \end{cases}$$

Sommando membro a membro si ottiene:

$$M_x(t_0) \exp\left(\frac{t_0}{T_2}\right) - jM_y(t_0) \exp\left(\frac{t_0}{T_2}\right) = 2C_2 \exp(j\omega_0 t_0)$$

Da cui si ricava  $C_2$

$$C_2 = \frac{1}{2} \left[ M_x(t_0) \exp\left(\frac{t_0}{T_2}\right) - j M_y(t_0) \exp\left(\frac{t_0}{T_2}\right) \right] \exp(-j\omega_0 t_0)$$

Sottraendo membro a membro si ricava  $C_1$ :

$$M_x(t_0) \exp\left(\frac{t_0}{T_2}\right) + j M_y(t_0) \exp\left(\frac{t_0}{T_2}\right) = 2C_1 \exp(-j\omega_0 t_0)$$

$$C_1 = \frac{1}{2} \left[ M_x(t_0) \exp\left(\frac{t_0}{T_2}\right) + j M_y(t_0) \exp\left(\frac{t_0}{T_2}\right) \right] \exp(j\omega_0 t_0)$$

La soluzione lungo  $\hat{i}_x$  è:

$$M_x(t) = [C_1 \exp(-j\omega_0 t) + C_2 \exp(j\omega_0 t)] \exp\left(-\frac{t}{T_2}\right)$$

Dove:

$$\begin{aligned} C_1 \exp(-j\omega_0 t) &= \frac{1}{2} \left[ M_x(t_0) \exp\left(\frac{t_0}{T_2}\right) + j M_y(t_0) \exp\left(\frac{t_0}{T_2}\right) \right] \exp(j\omega_0 t_0) \exp(-j\omega_0 t) = \\ &= \left[ \frac{1}{2} M_x(t_0) + j \frac{1}{2} M_y(t_0) \right] \exp\left(\frac{t_0}{T_2}\right) \exp[-j\omega_0(t - t_0)] = \left[ \frac{1}{2} M_x(t_0) - \frac{1}{2j} M_y(t_0) \right] \exp\left(\frac{t_0}{T_2}\right) \exp[-j\omega_0(t - t_0)] \\ C_2 \exp(j\omega_0 t) &= \frac{1}{2} \left[ M_x(t_0) \exp\left(\frac{t_0}{T_2}\right) - j M_y(t_0) \exp\left(\frac{t_0}{T_2}\right) \right] \exp(-j\omega_0 t_0) \exp(j\omega_0 t) = \left[ \frac{1}{2} M_x(t_0) - j \frac{1}{2} M_y(t_0) \right] \exp(-j\omega_0 t_0) \exp(j\omega_0 t) \end{aligned}$$

Quindi, la soluzione lungo  $\hat{i}_x$  si scrive come:

$$M_x(t) = \left\{ \left[ \frac{1}{2} M_x(t_0) - \frac{1}{2j} M_y(t_0) \right] \exp\left(\frac{t_0}{T_2}\right) \exp[-j\omega_0(t - t_0)] + \left[ \frac{1}{2} M_x(t_0) - j \frac{1}{2} M_y(t_0) \right] \exp(-j\omega_0 t_0) \exp[j\omega_0(t - t_0)] \right\}$$

Raccogliendo opportunamente si ha:

$$M_x(t) = \left\{ M_x(t_0) \frac{\exp[j\omega_0(t - t_0)] + \exp[-j\omega_0(t - t_0)]}{2} + M_y(t_0) \frac{\exp[j\omega_0(t - t_0)] - \exp[-j\omega_0(t - t_0)]}{2j} \right\} \exp\left(-\frac{t - t_0}{T_2}\right)$$

Per le relazioni di Eulero, risulta:

$$M_x(t) = \{ M_x(t_0) \cos[\omega_0(t - t_0)] + M_y(t_0) \sin \cos[\omega_0(t - t_0)] \} \exp\left(-\frac{t - t_0}{T_2}\right)$$

Analogamente, per la componente lungo  $\hat{i}_y$  si ha:

$$M_y(t) = [-jC_1 \exp(-j\omega_0 t) + jC_2 \exp(j\omega_0 t)] \exp\left(-\frac{t}{T_2}\right)$$

Dove:

$$-jC_1 \exp(-j\omega_0 t) = -j\frac{1}{2} \left[ M_x(t_0) \exp\left(\frac{t_0}{T_2}\right) + jM_y(t_0) \exp\left(\frac{t_0}{T_2}\right) \right] \exp(j\omega_0 t_0) \exp(-j\omega_0 t) = \left[ -j\frac{1}{2}M_x(t_0) + \frac{1}{2}M_y(t_0) \right] \exp\left(-\frac{t-t_0}{T_2}\right)$$

$$\begin{aligned} jC_2 \exp(j\omega_0 t) &= j\frac{1}{2} \left[ M_x(t_0) \exp\left(\frac{t_0}{T_2}\right) - jM_y(t_0) \exp\left(\frac{t_0}{T_2}\right) \right] \exp(-j\omega_0 t_0) \exp(j\omega_0 t) = \left[ j\frac{1}{2}M_x(t_0) + \frac{1}{2}M_y(t_0) \right] \exp\left(-\frac{t-t_0}{T_2}\right) \\ &= \left[ -\frac{1}{2j}M_x(t_0) + \frac{1}{2}M_y(t_0) \right] \exp\left(\frac{t_0}{T_2}\right) \exp[j\omega_0(t-t_0)] \end{aligned}$$

Quindi, la soluzione lungo  $\hat{i}_y$  si scrive come:

$$M_y(t) = \left\{ \left[ \frac{1}{2j}M_x(t_0) + \frac{1}{2}M_y(t_0) \right] \exp\left(\frac{t_0}{T_2}\right) \exp[-j\omega_0(t-t_0)] + \left[ -\frac{1}{2j}M_x(t_0) + \frac{1}{2}M_y(t_0) \right] \exp\left(\frac{t_0}{T_2}\right) \exp[j\omega_0(t-t_0)] \right\} \exp\left(-\frac{t-t_0}{T_2}\right)$$

Raccogliendo opportunamente si ha:

$$M_y(t) = \left\{ -M_x(t_0) \frac{\exp[j\omega_0(t-t_0)] - \exp[-j\omega_0(t-t_0)]}{2j} + M_y(t_0) \frac{\exp[j\omega_0(t-t_0)] + \exp[-j\omega_0(t-t_0)]}{2} \right\} \exp\left(-\frac{t-t_0}{T_2}\right)$$

Per l'equivalenza di Eulero risulta:

$$M_y(t) = \{-M_x(t_0) \sin[\omega_0(t-t_0)] + M_y(t_0) \cos[\omega_0(t-t_0)]\} \exp\left(-\frac{t-t_0}{T_2}\right)$$

In definitiva, le componenti trasverse evolvono secondo le seguenti equazioni:

$$\begin{cases} M_x(t) = \{M_x(t_0) \cos[\omega_0(t-t_0)] + M_y(t_0) \sin[\omega_0(t-t_0)]\} \exp\left(-\frac{t-t_0}{T_2}\right) \\ M_y(t) = \{-M_x(t_0) \sin[\omega_0(t-t_0)] + M_y(t_0) \cos[\omega_0(t-t_0)]\} \exp\left(-\frac{t-t_0}{T_2}\right) \end{cases}$$

Se l'istante iniziale coincide con l'origine dei tempi,  $t_0 = 0$ , risulta:

$$\begin{cases} M_x(t) = [M_x(0) \cos(\omega_0 t) + M_y(0) \sin(\omega_0 t)] \exp\left(-\frac{t}{T_2}\right) \\ M_y(t) = [-M_x(0) \sin(\omega_0 t) + M_y(0) \cos(\omega_0 t)] \exp\left(-\frac{t}{T_2}\right) \end{cases}$$

Per un tempo sufficientemente lungo, circa  $4 \div 5$  volte  $T_2$  è possibile ritenere la risposta transitoria esaurita, per cui le componenti trasversali sono nulle:

$$M_x(t) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty$$

$$M_y(t) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty$$

Siccome il tempo di rilassamento trasversale è dell'ordine di 100 *ms*, il tempo necessario affinché le componenti trasversali del vettore di magnetizzazione si annullino è dell'ordine di 500 *ms*, ovvero un ordine di grandezza inferiore rispetto al tempo che la componente longitudinale impiega per raggiungere il regime.

È possibile scrivere la soluzione delle componenti trasversali in forma complessa, introducendo il fasore  $M_+$ , definito come:

$$M_+(t) = M_x(t) + jM_y(t) = [M_x(0) \cos(\omega_0 t) + M_y(0) \sin(\omega_0 t) - jM_x(0) \sin(\omega_0 t) + jM_y(0) \cos(\omega_0 t)] \exp\left(-\frac{t}{T_2}\right)$$

Raccogliendo si ottiene:

$$M_+(t) = \{M_x(0) [\cos(\omega_0 t) - j \sin(\omega_0 t)] + jM_y(0) [\cos(\omega_0 t) - j \sin(\omega_0 t)]\} \exp\left(-\frac{t}{T_2}\right) = \{[\cos(\omega_0 t) - j \sin(\omega_0 t)] [M_x(0) + jM_y(0)]\} \exp\left(-\frac{t}{T_2}\right)$$

Dove:

$$M_+(0) = M_x(0) + jM_y(0)$$

Inoltre, per l'identità di Eulero e le proprietà delle funzioni trigonometriche:

$$\cos(\omega_0 t) - j \sin(\omega_0 t) = j \sin(-\omega_0 t) + \cos(-\omega_0 t) = \exp(-j\omega_0 t)$$

Per cui il fasore si scrive come:

$$M_+(t) = M_+(0) \exp(-j\omega_0 t) \exp\left(-\frac{t}{T_2}\right) = M_+(0) \exp\left[-\left(j\omega_0 t + \frac{t}{T_2}\right)\right]$$

Tale relazione fornisce l'evoluzione temporale del vettore di magnetizzazione nel piano complesso. Il moto nel piano trasverso avviene con pulsazione  $\omega_0$  e con ampiezza che decade esponenzialmente con costante di tempo  $T_2$ . In circa 500 *ms* la componente trasversa del vettore di magnetizzazione si annulla.

Il vettore di magnetizzazione  $M$ , in definitiva, evolve secondo un movimento rotatorio decrescente nel piano trasverso con costante di tempo  $T_2$  e con andamento esponenziale crescente, e costante di tempo  $T_1$ , lungo la direzione longitudinale. Le componenti del vettore di magnetizzazione sono:

$$\begin{cases} M_x(t) = [M_x(0) \cos(\omega_0 t) + M_y(0) \sin(\omega_0 t)] \exp\left(-\frac{t}{T_2}\right) \\ M_y(t) = [-M_x(0) \sin(\omega_0 t) + M_y(0) \cos(\omega_0 t)] \exp\left(-\frac{t}{T_2}\right) \\ M_z(t) = M_0 \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{T_1}\right)\right] \end{cases}$$

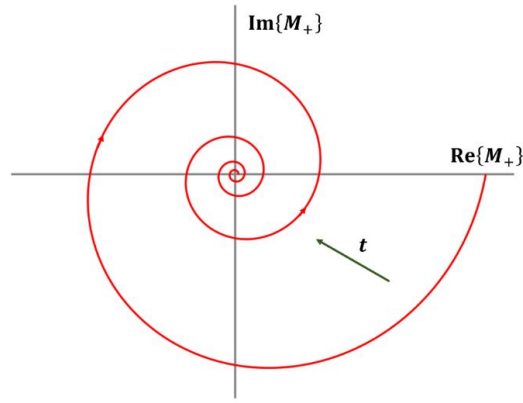


Figura 6.20: *Figura .: Andamento del vettore di magnetizzazione nel piano trasverso*

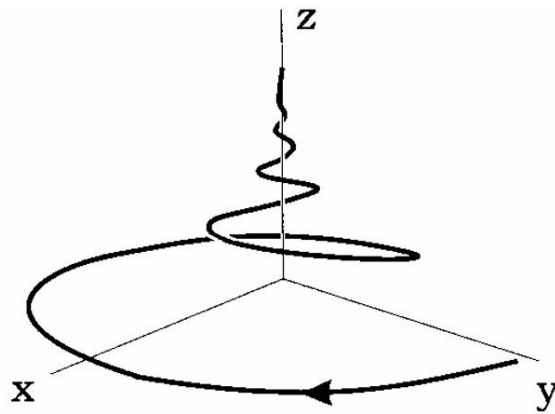


Figura 6.21: *Figura .: Evoluzione temporale del vettore di magnetizzazione a valle di un ribaltamento sul piano trasverso*

La composizione dei due moti determina che il vettore di magnetizzazione ha un modulo variabile nel tempo.

Si considera come condizione iniziale il vettore di magnetizzazione a valle di un ribaltamento nel piano trasverso a opera di un impulso a radiofrequenza. Al tempo  $t = 0$ , il vettore di magnetizzazione è:

$$M(0) = M_x(0)\hat{i}_x + M_y(0)\hat{i}_y$$

La componente lungo  $\hat{i}_z$  parte dal valore nullo e si porta al valore di regime in un tempo di  $5 \div 10$  s, mentre quelle trasversali vanno a zero in un tempo di  $0.5 \div 1$  s.

La curva descritta dal vettore di magnetizzazione tende a raggiungere il valore di regime  $M_0$  sull'asse delle  $\hat{i}_z$  mediante un andamento a spirale, convergente sull'asse del campo principale. Il modo elicoidale a raggio variabile lo si ritrova dopo una perturbazione ed è il moto in cui il vettore  $M$  torna all'equilibrio termodinamico per effetto del campo principale  $B_0$ . I tempi di rilassamento, quindi, interessano il ritorno all'equilibrio.



### 6.1.6.2 Vettore magnetizzazione durante una perturbazione

Si vuole analizzare l'evoluzione temporale del vettore di magnetizzazione durante l'applicazione di un impulso a radiofrequenza, che perturba l'equilibrio del sistema. La trattazione viene eseguita nel sistema rotante in modo da poter essere facilmente comprensibile.

Il campo efficace, visto da uno spin nel sistema di riferimento rotante al quale è applicato un impulso a radiofrequenza diretto lungo l'asse  $\hat{i}_{x'}$ , è:

$$B_{eff} = \left( B_0 - \frac{\omega}{\gamma} \right) \hat{i}_z + B_1 \hat{i}_{x'}$$

Dove  $\omega$  è la velocità di rotazione del sistema.

L'equazione di Bloch, scritte nel sistema di riferimento rotante, è analoga a quella scritta nel sistema fisso del laboratorio:

$$\left( \frac{dM}{dt} \right)' = \gamma M \times B_{eff} + \frac{1}{T_1} (M_0 - M_z) \hat{i}_z - \frac{1}{T_2} M_{\perp}$$

Questa equazione è stata ottenuta senza applicare nessuna ipotesi sul sistema di riferimento, quindi, è valida sia in sistemi inerziali che non inerziali. In particolare, la componente longitudinale del vettore di magnetizzazione evolve in maniera indipendente da quelle trasversali, quindi, il modo lungo l'asse  $\hat{i}_z$  si conserva.

Si proietta l'equazione vettoriale di Bloch lungo gli assi, svolgendo il prodotto vettoriale:

$$M \times B_{eff} = \begin{vmatrix} \hat{i}_{x'} & \hat{i}_{y'} & \hat{i}_z \\ M_{x'} & M_{y'} & M_z \\ B_1 & 0 & B_0 - \frac{\omega}{\gamma} \end{vmatrix} = M_{y'} \left( B_0 - \frac{\omega}{\gamma} \right) \hat{i}_{x'} + M_z B_1 \hat{i}_{y'} - M_{y'} B_1 \hat{i}_z - M_{x'} \left( B_0 - \frac{\omega}{\gamma} \right) \hat{i}_{y'}$$

Raccogliendo i termini, si ottiene:

$$M \times B_{eff} = M_{y'} \left( B_0 - \frac{\omega}{\gamma} \right) \hat{i}_{x'} + M_z B_1 \hat{i}_{y'} - M_{y'} B_1 \hat{i}_z - M_{x'} \left( B_0 - \frac{\omega}{\gamma} \right) \hat{i}_{y'} = M_{y'} \left( B_0 - \frac{\omega}{\gamma} \right) \hat{i}_{x'} - \left[ M_{x'} \left( B_0 - \frac{\omega}{\gamma} \right) - M_z B_1 \right] \hat{i}_{y'} - M_{y'} B_1 \hat{i}_z$$

L'equazione vettoriale di Bloch si scrive:

$$\left( \frac{dM}{dt} \right)' = \gamma M \times B_{eff} + \frac{1}{T_1} (M_0 - M_z) \hat{i}_z - \frac{1}{T_2} M_{\perp} = \gamma \left\{ M_{y'} \left( B_0 - \frac{\omega}{\gamma} \right) \hat{i}_{x'} - \left[ M_{x'} \left( B_0 - \frac{\omega}{\gamma} \right) - M_z B_1 \right] \hat{i}_{y'} - M_{y'} B_1 \hat{i}_z \right\}$$

Scomponendo lungo gli assi del sistema rotante si ottiene:

$$\begin{cases} \left( \frac{dM_{x'}}{dt} \right)' = \gamma M_{y'} \left( B_0 - \frac{\omega}{\gamma} \right) - \frac{1}{T_2} M_{x'} \\ \left( \frac{dM_{y'}}{dt} \right)' = \gamma M_z B_1 - \gamma M_{x'} \left( B_0 - \frac{\omega}{\gamma} \right) - \frac{1}{T_2} M_{y'} \\ \left( \frac{dM_z}{dt} \right)' = \frac{1}{T_1} (M_0 - M_z) - \gamma M_{y'} B_1 \end{cases}$$

Dove  $\omega_1 = \gamma B_1$  e  $\omega_0 = \gamma B_0$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{dM_{x'}}{dt} \right)' = (\omega_0 - \omega) M_{y'} - \frac{1}{T_2} M_{x'} \\ \left( \frac{dM_{y'}}{dt} \right)' = \omega_1 M_z - (\omega_0 - \omega) M_{x'} - \frac{1}{T_2} M_{y'} \\ \left( \frac{dM_z}{dt} \right)' = \frac{1}{T_1} (M_0 - M_z) - \omega_1 M_{y'} \end{array} \right.$$

Nelle equazioni  $\omega_0$  è la frequenza di Larmor,  $\omega_1$  è la frequenza del campo a radiofrequenza, mentre  $\omega$  è la frequenza con cui ruota il sistema di riferimento.

Si definisce  $\Delta\omega = \omega_0 - \omega$  e rappresenta la deviazione dalla condizione ideale. Questa deviazione è legata alle disomogeneità del campo o alla variazioni delle frequenze dell'impulso utilizzato. Affinché il vettore di magnetizzazione ruoti dell'angolo desiderato, è necessario che l'impulso a radiofrequenza abbia una durata di qualche *ms*. Nel dettaglio, il periodo di applicazione del campo a radiofrequenza, che genera la precessione intorno a  $\hat{i}_{x'}$ , è di qualche millisecondo ed è legato alla pulsazione  $\omega_1$  dalla relazione:

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$$

Dato che il tempo di rilassamento longitudinale  $T_1$  è dell'ordine dei secondi, risulta che:

$$T \ll T_1 \Leftrightarrow \frac{1}{T} \gg \frac{1}{T_1}$$

A meno di un fattore  $2\pi$ , risulta:

$$\frac{2\pi}{T} = \omega_1 \gg \frac{1}{T_1}$$

Analogo discorso vale per il tempo di rilassamento trasversale  $T_2$ , dell'ordine dei 500 *ms*. Rispetto alla pulsazione  $\omega_1$ , i termini che evolvono con costanti di tempo  $T_1$  e  $T_2$  possono essere trascurati, in quanto molto più lenti. L'evoluzione del vettore di magnetizzazione, in ultima analisi, non dipende dai tempi di rilassamento:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{dM_{x'}}{dt} \right)' = (\omega_0 - \omega) M_{y'} \\ \left( \frac{dM_{y'}}{dt} \right)' = \omega_1 M_z - (\omega_0 - \omega) M_{x'} \\ \left( \frac{dM_z}{dt} \right)' = -\omega_1 M_{y'} \end{array} \right.$$

Se il sistema ruota con una pulsazione angolare molto prossima a quella di Larmor risulta:

$$\omega_0 \simeq \omega \Leftrightarrow \Delta\omega = \omega_0 - \omega \simeq 0$$

È possibile, quindi, trascurare i termini contenenti  $\Delta\omega$ :

$$\begin{cases} \left( \frac{dM_{x'}}{dt} \right)' = 0 \\ \left( \frac{dM_{y'}}{dt} \right)' = \omega_1 M_z \\ \left( \frac{dM_z}{dt} \right)' = -\omega_1 M_{y'} \end{cases}$$

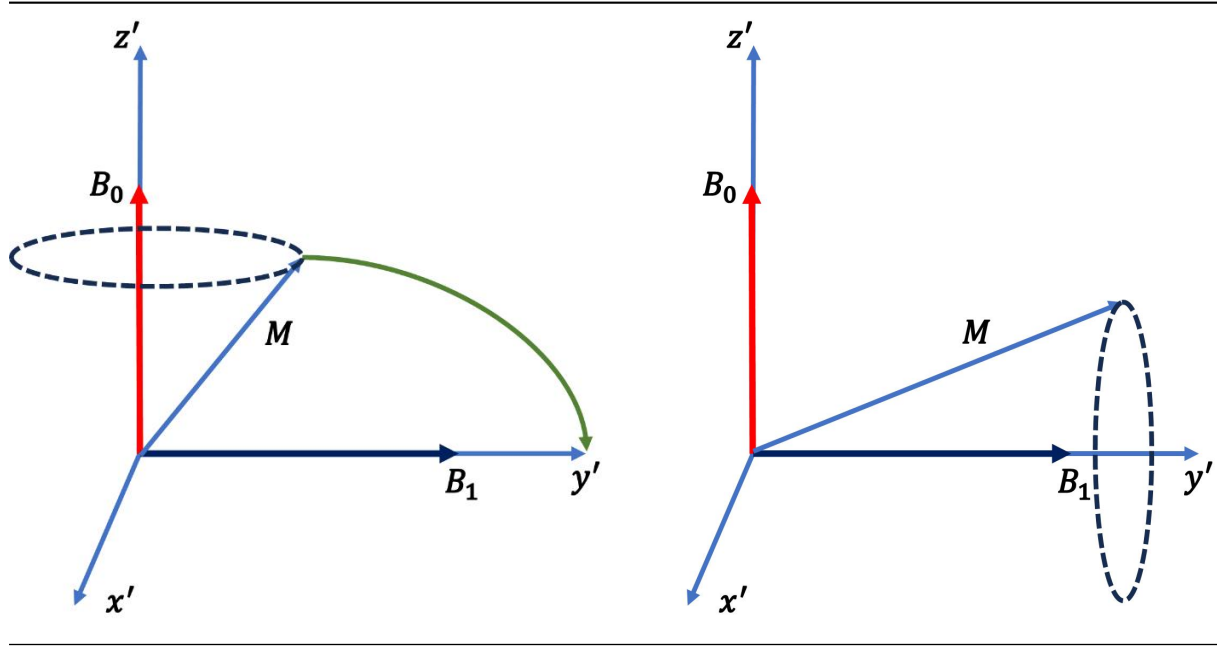
Le equazioni individuate suggeriscono un moto di precessione intorno l'asse  $\hat{i}_{x'}$ .

Per le sequenze applicate normalmente nella pratica, in definitiva, si ritiene che la rotazione del vettore di magnetizzazione avvenga senza l'influenza dei tempi di rilassamento, poiché l'evoluzione temporale legata all'impulso a radiofrequenza è molto più veloce di quella legata ai fenomeni di rilassamento. Si approssima, inoltre, la frequenza di risonanza con quella del campo a radiofrequenza. Anche in presenza di tali approssimazioni, i risultati ottenuti sono attendibili, nel senso che concordi ai risultati sperimentali. Il ritorno all'equilibrio è, invece, caratterizzato dai tempi di rilassamento del tessuto.

L'evoluzione del vettore di magnetizzazione, legato all'applicazione dell'impulso a radiofrequenza, si compone di due fasi:

- Raggiunto l'equilibrio termodinamico, il vettore di magnetizzazione è ribaltato lungo uno degli assi  $x'$  o  $y'$ , utilizzando un impulso a radiofrequenza a polarizzazione lineare o circolare. Come detto precedentemente, il ribaltamento è descritto trascurando gli effetti del rilassamento, poiché i tempi  $T_1$  e  $T_2$  sono molto più lunghi della durata dell'impulso a radiofrequenza;

Tabella 6.2: Figura .: L'applicazione dell'impulso RF porta a una precessione intorno all'asse  $y'$



- Il fenomeno di recupero della magnetizzazione è caratterizzato dal ritorno all'equilibrio della magnetizzazione e avviene con costante di tempo  $T_1$ , tempo di rilassamento per la componente longitudinale e costante di tempo  $T_2$  per la componente trasversale. I tempi di evoluzione del vettore di magnetizzazione sono paragonabili a quelli di rilassamento per cui non possono essere trascurati.

### 6.1.6.3 Sequenza FID

Per ottenere una misura del vettore di magnetizzazione, è necessario perturbare l'equilibrio raggiunto dagli spin contenuti nei tessuti del paziente. Dal segnale registrato è possibile, in seguito, ricavare le informazioni sui tempi di rilassamento *spin-lattice*,  $T_1$ , e spin-spin  $T_2$ , così da caratterizzare completamente il tessuto.

La sequenza più semplice da applicare per perturbare il sistema è detta FID (*Free Induction Decay*) in cui si applica una radiazione a radiofrequenza, indicata nei diagrammi con una *rect* o con un pacchetto di onde sinusoidali, a frequenza  $\omega \simeq \omega_0$ .

Successivamente, si registra il segnale  $s$  dovuto al ritorno all'equilibrio del vettore magnetizzazione. Le antenne in ricezione iniziano ad acquisire il segnale subito dopo la fine dell'impulso.

Il segnale registrato è proporzionale alla componente trasversa del campo, dunque, le antenne ricevono una sinusoide, a frequenza  $\omega_0$  smorzata con un decadimento di tipo esponenziale e costante di tempo  $T_2$ . Adoperando la notazione complessa, il segnale registrato dall'antenna è proporzionale al fasore  $M_+(t)$ :

$$M_+(t) = M_+(0) \exp\left(-\frac{t}{T_2}\right) \exp(-j\omega_0 t)$$

Dove  $M_+(0)$  è proporzionale al vettore di magnetizzazione all'equilibrio termodinamico  $M_0$ , che a sua volta dipende dalla densità protonica  $\rho$ , indicante il numero di protoni nel volumetto  $V$ .

Siccome non vi è nessun gradiente di campo, ogni spin all'interno del volume del paziente precede alla frequenza di Larmor  $\omega_0$ , dunque, l'applicazione del campo rotante a frequenza prossima a quella di Larmor eccita tutti gli spin nel corpo del paziente. In questo caso, il volume-paziente non è considerato in tanti volumetti elementari ma è assunto essere un unico volume.

La sequenza FID non fornisce informazioni sulla composizione chimica dei tessuti, ovvero non fornisce i tempi di rilassamento di ogni singolo volumetto. In altre parole, la sequenza FID non fornisce informazioni utili all'*imaging* ma permette di correggere degli errori introdotti dalle disomogeneità del campo magnetico principale. Infatti, le misure eseguite con la sequenza FID possono fornire un'idea su quanto il campo magnetico principale si discosta dall'andamento ideale, ovvero uniforme in tutto lo spazio contenente il paziente.

Il tempo di rilassamento trasversale  $T_2$  è determinato dall'interazioni spin-spin, che ha l'effetto di alterare localmente il campo magnetico visto da uno spin. Se il campo magnetico esterno è disomogeneo, il campo locale visto dagli spin varia con la posizione, dunque, si aggiunge un ulteriore fonte di disturbo.

In generale, i fornitori di risonanze magnetiche garantiscono che l'omogeneità del campo nel gantry abbia un valore nominale variabile di una parte per milione (ppm), all'interno di una sfera centrata nel gantry e raggio dell'ordine dei 20 cm.

Se il valore nominale del campo è di 1.5 T, la variazione di campo all'interno della sfera è dell'ordine di  $10^{-6}$ , ovvero una variazione massima di 1.5  $\mu T$ . Queste disomogeneità di campo si aggiungono ai campi locali visti dai singoli spin. Ciò porta a un'ulteriore riduzione del tempo di rilassamento trasversale  $T_2$ .

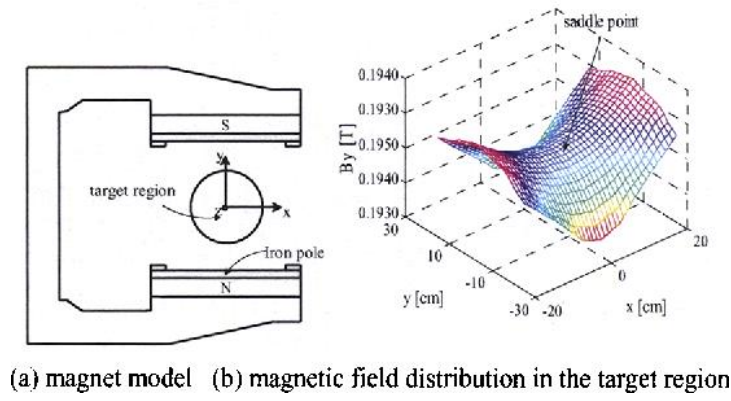


Figura 6.22: Figura .: Regione di spazio del gantry in cui il campo è omogeneo

Si introduce il tempo  $T_2^*$  legato sia alla disomogeneità del campo principale, sia all'interazione spin-spin. Il primo fenomeno è quantificato da un tempo  $T_2'$ , legato alla tecnologia costruttiva con cui si produce il campo magnetico, che, fondamentalmente, definisce le disomogeneità di  $B_0$ .

Il tempo  $T_2^*$  è definito come:

$$\frac{1}{T_2^*} = \frac{1}{T_2} + \frac{1}{T_2'}$$

Con la sequenza FID è possibile ottenere delle informazioni su  $T_2^*$  e, di conseguenza, su quanto il campo magnetico principale varia nello spazio. Noto il tempo  $T_2^*$ , mediante appositi algoritmi, è possibile correggere le immagini, le quali mostrano una maggiore affidabilità nella stima dei tempi di rilassamento  $T_1$  e  $T_2$ .

# Bibliografia