Тема 8. МЕТОДЫ МАТЕМ-ГО ПРОГР-Я В ЗАДАЧАХ ПРОЕКТИРОВАНИЯ ВТС И ЦнПФС

8.1 ОБЩАЯ ПОСТ-КА И МАТЕМ-КАЯ ФОРМУЛИРОВКА З-ЧИ ЛИНЕЙН. ПРОГР-Я (ЗЛП)

ЛП – это …….

Сущность ЗЛП ……..

Определить $$X^{опт}_{\langle n\rangle} = \arg\max_{\{X_{\langle n\rangle}\}} \sum_{j=1}^{n} c_j x_j ,$$

……. область $\{X_{\langle n\rangle}\}$ ….. описывается с-мой неравенств

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \overset{>}{\underset{<}{=}} b_i \quad [i = 1(1)m],$$

…….. $$x_j \geq 0 \quad [j = 1(1)n]$$

Каноническая форма ЗЛП

I. Дана система из m уравнений (в виде рав-в) с n неизвестными

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}\right\} \quad (8.1.1)$$

Как правило $m < n$

или $$\sum_{j=1}^{n} x_j a_{ij} = b_i , \; [i = 1(1)m]. \quad (8.1.1')$$

II. …….. $$x_j \geq 0 \quad [j = 1(1)n]. \quad (8.1.2)$$

Задана:

$$Q = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n = c_0 + \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \quad (8.1.3)$$

………. $m < n$, то………

Требуется ……. $x_j \geq 0$ $[i = 1(1)n]$ ……….

III. ЛФ Q достигает **миним-ого** значения.

ЗЛП можно …. в векторно-матричной форме:

Пусть $X_{\langle n\rangle} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ – вектор переменных;

$A_{[m;n]} = \begin{bmatrix} a_{11}\, a_{12} ... a_{1n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{m1} a_{m2} ... a_{mn} \end{bmatrix}$ – матрица коэф-тов системы ограничений;

$B_{\langle m\rangle} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ – вектор свободных членов системы ограничений;

$$C_{\langle n\rangle} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$ – вектор коэф-тов линейной формы (ЛФ).

Требуется … $X^*_{\langle n\rangle} = X^{onm}_{\langle n\rangle}$ ….. $\min Q\left(X_{\langle n\rangle}\right)$

$$X^{onm}_{\langle n\rangle} = \arg\min_{\{X_{\langle n\rangle}\}} Q\left(X_{\langle n\rangle}\right) = \arg\min_{\{X_{\langle n\rangle}\}}\left(c_0 + C^T_{\langle n\rangle} X_{\langle n\rangle}\right) \quad (8.1.4)$$

при ограничениях
$$\begin{cases} A_{[m,n]} X_{\langle n\rangle} = B_{\langle m\rangle} & (8.1.5) \\ X_{\langle n\rangle} \geq O_{\langle n\rangle} & (8.1.6) \end{cases},$$

Иногда …… Рассмотрим …….

$$A_{[m;n]} = \left\langle A^{(1)}_{\langle m\rangle}, A^{(2)}_{\langle m\rangle}, \ldots, A^{(n)}_{\langle m\rangle} \right\rangle$$

Соответ-но ……. $A^j_{\langle m\rangle} = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$, [$j = 1(1)n$].

Тогда
$$\sum_{j=1}^{n} x_j A^{(j)}_{\langle m\rangle} = B_{\langle m\rangle} \quad (8.1.5')$$

$$X_{\langle n\rangle} \geq O_{\langle n\rangle} \quad (8.1.6')$$

При решении …..линейной формы $Q = c_0 + C^T X$.

В общем случае ….. x_j …… от (8.1.5) и (8.1.6)….

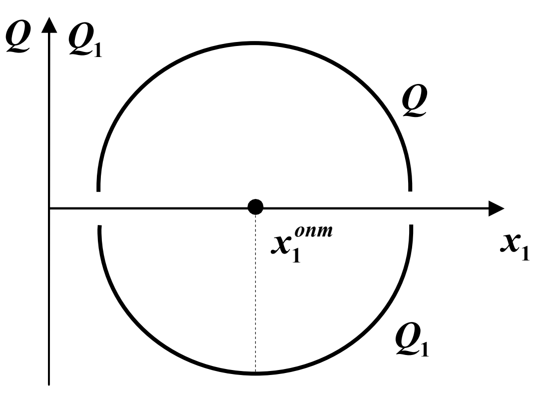
$\leq$, $\geq$..

Правила приведения к канонической форме ЗЛП:

1. Если ….. $\max Q = \max\left[c_0 + C^T X\right]$, то…..

$C_{\langle n+1\rangle}$ на (-1) ….минимум функции Q_1:

$$Q_1 = -c_0 - C^T X \Rightarrow \arg\max_{\{X\}} Q = \arg\min_{\{X\}} Q_1$$



2. Если ….. x_{n+1}, x_{n+2}, …, x_{n+k}. Число k …..

Q (или входят с коэффициентами $c_{n+l} = 0$, $\left[l = 1(1)k\right]$).

3. Если не на все ….. x_j …….

А) Каждую переменную x_j,…..

Б) ……. способ в замене x_j,.

Проиллюстрируем сказанное на примере.

Пример. Пусть требуется найти ***max*** ЛФ:

$$Q = x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 \qquad (1)$$

при ограничениях
$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - 3x_4 \le 2 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + 4x_4 \ge 1 \end{cases} \qquad (2)$$

При этом $x_3 \ge 0$, $x_4 \ge 0$.

Решение.

1. Переход к Q_1

$$Q_1 = -Q = -x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 \qquad (1')$$

2. Для перехода от нер-тв к рав-твам введём $x_5 \ge 0$, $x_6 \ge 0$. Тогда …….:

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - 3x_4 + x_5 = 2 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + 4x_4 - x_6 = 1 \end{cases} \qquad (2')$$

$x_3 \ge 0$, $x_4 \ge 0$, $x_5 \ge 0$, $x_6 \ge 0$.

3. Для исключ-я ~-х x_1 и x_2, ….. выразим их ..

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= -1 + \frac{4}{3}x_3 - \frac{5}{3}x_4 + \frac{1}{3}x_6; \\ x_2 &= 2 + \frac{5}{3}x_3 - \frac{7}{3}x_4 + \frac{2}{3}x_6. \end{aligned}\right\} -$$ подставляя их в 3-е уравн-е получим:

$$\begin{cases} x_5 - x_6 = 7; \\ x_j \ge 0; \ j = 3,4,5,6. \end{cases} \qquad (2'')$$

Требуется ….. ***min*** $Q_1 = -1 - x_3 + 3x_4 - x_5$ …. при ограничениях (2''). ▲

Определение. Вектор $X_{\langle n \rangle} = \langle x_1, x_2, ..., x_n \rangle^T$, удовлетворяющий ограничениям ЗЛП называется ***допустимым планом*** (допустимым решением). ▲

Определение. Допустимый план $X^*_{\langle n \rangle}$, миним-ющий критер-ую ф-цию (ЛФ) Q, наз-ется ***оптимальным***. ▲

Т.о. $C^T X^* \le C^T X$.

…… m уравнений, …..n, где $m < n$, ….. C_n^m (если система ограничений совместна).

При анализе постановки ЗЛП различают 3 случая:

1. Условия з-чи противоречивы, .. X .. $AX = B$. ….. матрицы A, ….. а свободный член (b_i) положителен и, наоборот (следует помнить, что $x_j \ge 0$). …..

2. Система ограничений непротиворечива ….. функция Q не ограничена снизу (сверху), т.е. ….. $(-\infty)$ $(+\infty)$.

3. Условия задачи совместны (непротиворечивы)….