ОГЛАВЛЕНИЕ

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ

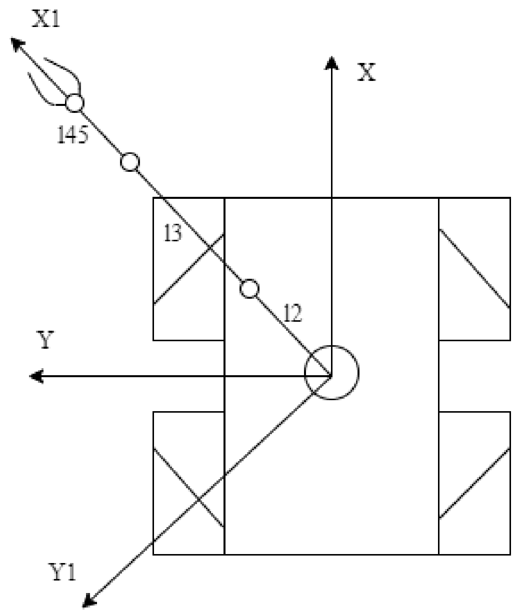
Цель работы

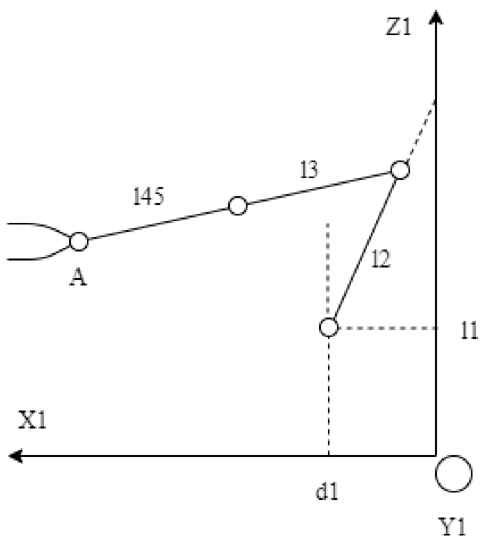
Управление манипуляционным роботом *KUKA youBot* на основе решения обратной задачи о положениях при перемещении схвата по заданному закону.

Ограничения

В лабораторных рассматривается только две степени манипулятора – остальные зафиксированы. Из этого следует, что: ϕ_1, ϕ_4 и ϕ_5 это константы, а угол ориентации схвата в плоскости руки манипулятора: $\theta = \phi_2 + \phi_3 + \phi_4$. Причем, последнее звено схвата выпрямлено, находится в положении параллельном третьему звену, откуда следует что $\phi_4 = 0$.

Исходные данные





Длины звеньев и расстояния между их осями:

$$
\begin{aligned}
d_1 &= 0.033 \\
l_1 &= 0.075 \\
l_2 &= 0.155 \\
l_3 &= 0.135 \\
l_4 &= 0.081 \\
l_5 &= 0.137 \\
l_{45} &= l_4 + l_5 = 0.218 \\
l_{345} &= l_3 + l_4 + l_5 = 0.353
\end{aligned}
$$

Схват перемещается так, что его координаты X и Y не меняются со временем, а Z меняется по закону:

$$Z(t) = 0.2 + 0.1 \cos \frac{2\pi t}{10}$$

Время берем дискретное, из ста значений от 0 до 10 c. Временной шаг $\Delta t = 0.1$ с

Так как для управления движением манипулятора используются «технические» углы A_i, отсчет которых производится от упоров, то необходим переход от углов φ_i к A_i, который осуществляется следующим образом:

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \varphi_1 + 2.9496 \\
A_2 &= \varphi_2 + 1.1345 \\
A_3 &= \varphi_3 - 2.5654 \\
A_4 &= \varphi_4 + 1.829 \\
A_5 &= -\varphi_5 + 2.93
\end{aligned}
$$

Причем диапазоны работы манипулятора ограничены в A_i:

$$
\begin{gathered}
0.01 < A_1 < 5.84 \\
0.01 < A_2 < 2.6179 \\
-4.8 < A_3 < -0.01 \\
0.022 < A_4 < 3.4292 \\
0.01 < A_5 < 5.6415
\end{gathered}
$$

Нам заданы $X(t)$,$Z(t)$, требуется найти $\varphi_i(t)$.

1. УПРАВЛЕНИЕ ПО ПОЛОЖЕНИЮ СХВАТА. АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД.

Расчет углов в сочленениях производится с помощью результатов точного аналитического решения обратной задачи о положениях:

$$\begin{aligned} X_{1A} &= d_1 + l_2 \sin\varphi_2 + l_3 \sin(\varphi_2 + \varphi_3) \\ Z_{1A} &= l_1 + l_2 \cos\varphi_2 + l_3 \cos(\varphi_2 + \varphi_3) \end{aligned} \tag{1}$$

Преобразуя данные уравнения, получим:

$$\begin{gathered} l_2 \sin\varphi_2 + l_3 \sin(\varphi_2 + \varphi_3) = X_{1A} - d_1 = \tilde{X} \\ l_2 \cos\varphi_2 + l_3 \cos(\varphi_2 + \varphi_3) = Z_{1A} - l_1 = \tilde{Z} \\ \tilde{l} = \sqrt{\tilde{X}^2 + \tilde{Z}^2} \\ \alpha = \pi - \varphi_3 \end{gathered}$$

По теореме косинусов:

$$\begin{gathered} \tilde{l}^2 = l_3^2 + l_2^2 - 2 l_2 l_3 \cos\alpha \\ \cos\varphi_3 = \frac{\tilde{l}^2 - l_3^2 - l_2^2}{2 l_2 l_3} = \frac{(\tilde{X}^2 + \tilde{Z}^2) - (l_3^2 + l_2^2)}{2 l_2 l_3} = D \end{gathered}$$

Замечание: если $|D| > 1$, то программное движение нереализуемо, так как координаты целевой точки вне рабочей области.

$$\varphi_3 = \pm \arccos D + 2\pi n, n \in \zeta$$

Найдем φ_2:

$$\begin{gathered} \operatorname{tg}\beta = \frac{\tilde{Z}}{\tilde{X}} \\ \beta = \arctan(\tilde{Z}, \tilde{X}) \end{gathered}$$

По теореме косинусов:

$$\begin{gathered} l_3^2 = \tilde{l}^2 + l_2^2 - 2\tilde{l} l_3 \cos\gamma \\ \cos\gamma = \frac{\tilde{l}^2 + l_2^2 - l_3^2}{2\tilde{l} l_2} \\ \gamma = \pm \arccos \frac{\tilde{l}^2 + l_2^2 - l_3^2}{2\tilde{l} l_2} \end{gathered}$$

$$\varphi_2 + \gamma + \beta = \frac{\pi}{2}$$

Тогда

$$\varphi_2 = \frac{\pi}{2} - \gamma - \beta.$$

Для проверки результата решим прямую задачу. Полученные значения φ_2,φ_3 подставим в (1). Программа для нахождения φ_2,φ_3, а также графики реальных и программных значений координат представлены в Приложении 1.

Также было получено квадратичное отклонение:

$$||Z(t) - Z^*||_2 = 4.65 \cdot 10^{-16}$$

2. УПРАВЛЕНИЕ ПО ПОЛОЖЕНИЮ СХВАТА. ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД НЬЮТОНА.

2.1. Постановка задачи

Дан вектор $X = \begin{bmatrix} X_{1A}(t) \\ Z_{1A}(t) \end{bmatrix}$, требуется найти $q = \begin{bmatrix} \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix}$ методом Ньютона.

2.2. Метод Ньютона

Путем итерационных приближений находится $q^{(k+1)} = q^{(k)} - p^{(k)}$, где $p^{(k)}$ – вектор полного шага.

$$J(q^{(k)}) \cdot p^{(k)} = F(q^{(k)})$$

$$J = \frac{\partial F}{\partial q} = \begin{bmatrix} \frac{\partial X_{1A}}{\partial \varphi_2} & \frac{\partial X_{1A}}{\partial \varphi_3} \\ \\ \frac{\partial Z_{1A}}{\partial \varphi_2} & \frac{\partial Z_{1A}}{\partial \varphi_3} \end{bmatrix}$$

Если размерность J небольшая, то можно найти $p^{(k)} = J^{-1}(q^{(k)}) \cdot F(q^{(k)})$. Здесь и выше J – это матрица Якоби. Она формируется путем дифференцирования графа координат схвата по обобщенным координатам. Граф для координат схвата:

$$X_{1A} = d_1 + l_2 \sin \varphi_2 + l_3 \sin (\varphi_2 + \varphi_3)$$
$$Z_{1A} = l_1 + l_2 \cos \varphi_2 + l_3 \cos (\varphi_2 + \varphi_3)$$

При помощи найденных численно φ_1, φ_2 можно решить прямую задачу кинематики, подставив значения в граф. После чего сравнить полученную траекторию движения с программным движением.

3. ПОСТРОЕНИЕ ТРАЕКТОРИИ ДВИЖЕНИЯ СХВАТА И ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ КИНЕМАТИКИ

Зададим программную ориентацию схвата с помощью матрицы направляющих косинусов. Выберем координату в которую будет позиционироваться схват:

$$T_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x_d \\ 0 & -1 & 0 & y_d \\ 0 & 0 & -1 & z_d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \; x_d = 0; \; y_d = 0{,}4; \; z_d = 0 = const$$

После чего составим минимизируемую функцию, добавим ограничения на углы и найдем величины обобщенных координат в начальной точке траектории. Выбор этой точки основан на значении минимума функции $g(F)$:

$$g(F) = g(T - T_d)$$

$$g(F) = F_{00}^2 + F_{01}^2 + \ldots + F_{33}^2$$

Чем меньше значение этой функции в точке тем более точно схват может позиционироваться в ней. Далее продолжаем исследовать плоскую подобласть D, определим ее границы и выберем еще две точки траектории:

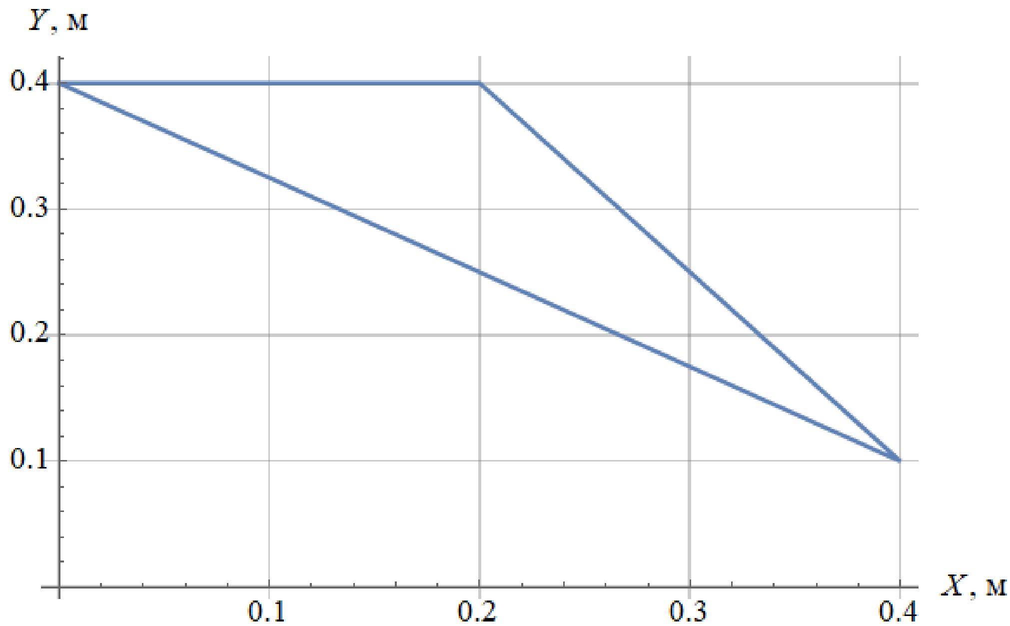


Рисунок 3.1 — Плоская подобласть D и траектория движения схвата

Значения функций в трёх выбранных точках:

$$F(x_d = 0, y_d = 0{,}4, z_d = 0) : g(F) = 8{,}88 * 10^{-16}$$
$$F(x_d = 0{,}2, y_d = 0{,}4, z_d = 0) : g(F) = 4{,}44 * 10^{-15}$$
$$F(x_d = 0{,}4, y_d = 0{,}1, z_d = 0) : g(F) = 3{,}46 * 10^{-14}$$

4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЗАКОНОВ ИЗМЕНЕНИЯ ОБОБЩЕННЫХ КООРДИНАТ НА ПРОГРАММНОМ ДВИЖЕНИИ

Используя метод верзоров и кинематических винтов, составим уравнения кинематики шестизвенного манипулятора. После чего численно решим эти уравнения с использованием ранее полученных начальных условий.

$$G_{i,i+1} = \begin{bmatrix} \Gamma_{i,i+1} & 0 \\ r_{O_1,O_{i,i+1}}\Gamma_{i,i+1} & \Gamma_{i,i+1} \end{bmatrix}, U_A = \begin{bmatrix} \omega \\ V_A \end{bmatrix}$$

где U_A - кинематический винт, G - верзор. Верзоры вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned} &G_1 = G_{01} \\ &G_2 = G_1 \cdot G_{12} \\ &\vdots \\ &G_i = G_{i-1} \cdot G_{i,i+1} \end{aligned}$$

матрица $r_{O_1,O_{i,i+1}}$ вычисляется как показано ниже:

$$r_{O_1,O_{i,i+1}} = \begin{bmatrix} 0 & -d_{i+1} & a\sin\theta \\ d_{i+1} & 0 & -a\cos\theta \\ -a\sin\theta & a\cos\theta & 0 \end{bmatrix}$$