ОГЛАВЛЕНИЕ

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ

Цель работы

Управление манипуляционным роботом *KUKA youBot* на основе решения обратной задачи о положениях при перемещении схвата по заданному закону.

Ограничения

В лабораторных рассматривается только две степени манипулятора – остальные зафиксированы. Из этого следует, что: ϕ_1, ϕ_4 и ϕ_5 это константы, а угол ориентации схвата в плоскости руки манипулятора: $\theta = \phi_2 + \phi_3 + \phi_4$. Причем, последнее звено схвата выпрямлено, находится в положении параллельном третьему звену, откуда следует что $\phi_4 = 0$.

Исходные данные

Длины звеньев и расстояния между их осями:

$$\begin{aligned}
d_1 &= 0.033 \\
l_1 &= 0.075 \\
l_2 &= 0.155 \\
l_3 &= 0.135 \\
l_4 &= 0.081 \\
l_5 &= 0.137 \\
l_{45} &= l_4 + l_5 = 0.218 \\
l_{345} &= l_3 + l_4 + l_5 = 0.353
\end{aligned}$$

Схват перемещается так, что его координаты X и Y не меняются со временем, а Z меняется по закону:

$$Z(t) = 0.2 + 0.1\cos\frac{2\pi t}{10}$$

Время берем дискретное, из ста значений от 0 до $10\,c$. Временной шаг $\Delta t = 0.1$ с

Так как для управления движением манипулятора используются «технические» углы A_i, отсчет которых производится от упоров, то необходим переход от углов φ_i к A_i, который осуществляется следующим образом:

$$\begin{aligned}
A_1 &= \varphi_1 + 2.9496 \\
A_2 &= \varphi_2 + 1.1345 \\
A_3 &= \varphi_3 - 2.5654 \\
A_4 &= \varphi_4 + 1.829 \\
A_5 &= -\varphi_5 + 2.93
\end{aligned}$$

Причем диапазоны работы манипулятора ограничены в A_i:

$$0.01 < A_1 < 5.84$$
$$0.01 < A_2 < 2.6179$$
$$-4.8 < A_3 < -0.01$$
$$0.022 < A_4 < 3.4292$$
$$0.01 < A_5 < 5.6415$$

Нам заданы $X(t)$,$Z(t)$, требуется найти $\varphi_i(t)$.

1. УПРАВЛЕНИЕ ПО ПОЛОЖЕНИЮ СХВАТА(АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД).

Расчет углов в сочленениях производится с помощью результатов точного аналитического решения обратной задачи о положениях:

$$\begin{aligned} X_{1A} &= d_1 + l_2 \sin\varphi_2 + l_3 \sin(\varphi_2+\varphi_3) \\ Z_{1A} &= l_1 + l_2 \cos\varphi_2 + l_3 \cos(\varphi_2+\varphi_3) \end{aligned} \quad (1)$$

Преобразуя данные уравнения, получим:

$$\begin{aligned} l_2 \sin\varphi_2 + l_3 \sin(\varphi_2+\varphi_3) &= X_{1A} - d_1 = \tilde{X} \\ l_2 \cos\varphi_2 + l_3 \cos(\varphi_2+\varphi_3) &= Z_{1A} - l_1 = \tilde{Z} \\ \tilde{l} &= \sqrt{\tilde{X}^2 + \tilde{Z}^2} \\ \alpha &= \pi - \varphi_3 \end{aligned}$$

По теореме косинусов:

$$\begin{aligned} \tilde{l}^2 &= l_3^2 + l_2^2 - 2 l_2 l_3 \cos\alpha \\ \cos\varphi_3 &= \frac{\tilde{l}^2 - l_3^2 - l_2^2}{2 l_2 l_3} = \frac{(\tilde{X}^2+\tilde{Z}^2) - (l_3^2 + l_2^2)}{2 l_2 l_3} = D \end{aligned}$$

Замечание: если $|D| > 1$, то программное движение нереализуемо, так как координаты целевой точки вне рабочей области.

$$\varphi_3 = \pm \arccos D + 2\pi n, n \in \zeta$$

Найдем φ_2:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\beta &= \frac{\tilde{Z}}{\tilde{X}} \\ \beta &= \arctan(\tilde{Z}, \tilde{X}) \end{aligned}$$

По теореме косинусов:

$$\begin{aligned} l_3^2 &= \tilde{l}^2 + l_2^2 - 2\tilde{l} l_3 \cos\gamma \\ \cos\gamma &= \frac{\tilde{l}^2 + l_2^2 - l_3^2}{2\tilde{l} l_2} \\ \gamma &= \pm \arccos \frac{\tilde{l}^2 + l_2^2 - l_3^2}{2\tilde{l} l_2} \end{aligned}$$

$$\varphi_2 + \gamma + \beta = \frac{\pi}{2}$$

Тогда

$$\varphi_2 = \frac{\pi}{2} - \gamma - \beta.$$

Для проверки результата решим прямую задачу. Полученные значения φ_2,φ_3 подставим в (1). Программа для нахождения φ_2,φ_3, а также графики реальных и программных значений координат представлены в Приложении 1.

Также было получено квадратичное отклонение:

$$||Z(t) - Z^*||_2 = 4.65 \cdot 10^{-16}$$

2. ПОСТРОЕНИЕ РАБОЧЕЙ ОБЛАСТИ СХВАТА В ВЕРТИКАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ

2.1. Выражение матрицы однородного преобразования для соседних звеньев через параметры Денавита-Хартенберга

Используем решение прямой задачи кинематики, полученное методом однородных преобразований.

Требуется найти ρ_A - столбец однородных координат точки A в неподвижных осях.

$$\rho_A = \begin{bmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \\ 1 \end{bmatrix}$$

Известны $T_{i,i+1}, \rho_A^{(N)}$.

$$\begin{aligned}
&\rho_A^{(N-1)} = T_{N-1,N} \cdot \rho_A^{(N)} \\
&\rho_A^{(N-2)} = T_{N-2,N-1} \cdot \rho_A^{(N-1)} = T_{N-2,N-1} \cdot T_{N-1,N} \cdot \rho_A^{(N)} \\
&\vdots \\
&\rho_A = T_{01} \cdot T_{12} \cdot \dots \cdot T_{N-1,N} \cdot \rho_A^{(N)}
\end{aligned}$$

Тогда матрица однородных преобразований вычисляется следующим образом:

$$T_{0,N} = T_{01} \cdot T_{12} \cdot \dots \cdot T_{N-1,N},$$

причем $T_{i,i+1}$ вычисляется, как показано ниже:

$$T_{i,i+1} = T_{\theta_i} \cdot T_{d_i} \cdot T_{a_{i+1}} \cdot T_{\alpha_{i+1}},$$

где T_θ - матрица поворота вокруг оси *Z*, T_d - матрица параллельного переноса вдоль оси *Z*, T_a - матрица параллельного переноса вдоль оси *X*, T_α - матрица поворота вокруг оси *X*.

$$T_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i & 0 & 0 \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, T_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$T_a = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, T_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha_i & -\sin\alpha_i & 0 \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2.2. Рабочая область манипулятора в вертикальной плоскости

Построение рабочей области было проведено в среде *Wolfram Mathematica*.

3. ПОСТРОЕНИЕ ТРАЕКТОРИИ ДВИЖЕНИЯ СХВАТА И ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ КИНЕМАТИКИ

Зададим программную ориентацию схвата с помощью матрицы направляющих косинусов. Выберем координату в которую будет позиционироваться схват:

$$T_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x_d \\ 0 & -1 & 0 & y_d \\ 0 & 0 & -1 & z_d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};\ x_d = 0;\ y_d = 0{,}4;\ z_d = 0 = const$$

После чего составим минимизируемую функцию, добавим ограничения на углы и найдем величины обобщенных координат в начальной точке траектории. Выбор этой точки основан на значении минимума функции $g(F)$:

$$g(F) = g(T - T_d)$$

$$g(F) = F_{00}^2 + F_{01}^2 + \ldots + F_{33}^2$$

Чем меньше значение этой функции в точке тем более точно схват может позиционироваться в ней. Далее продолжаем исследовать плоскую подобласть D, определим ее границы и выберем еще две точки траектории:

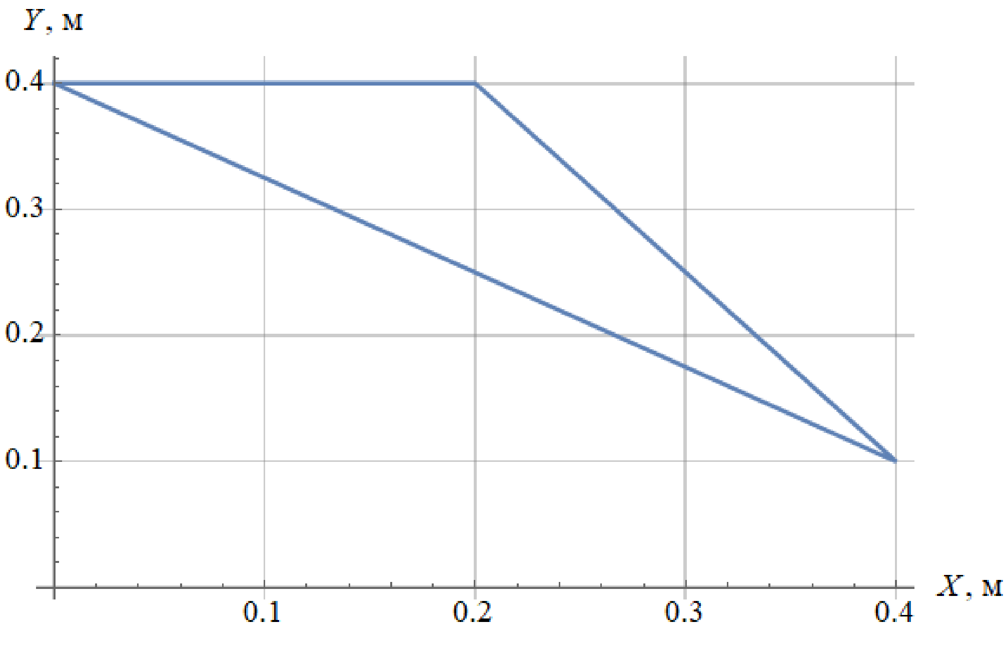

Рисунок 3.1 — Плоская подобласть D и траектория движения схвата

Значения функций в трёх выбранных точках:

$$F(x_d = 0, y_d = 0{,}4, z_d = 0) : g(F) = 8{,}88 * 10^{-16}$$
$$F(x_d = 0{,}2, y_d = 0{,}4, z_d = 0) : g(F) = 4{,}44 * 10^{-15}$$
$$F(x_d = 0{,}4, y_d = 0{,}1, z_d = 0) : g(F) = 3{,}46 * 10^{-14}$$

4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЗАКОНОВ ИЗМЕНЕНИЯ ОБОБЩЕННЫХ КООРДИНАТ НА ПРОГРАММНОМ ДВИЖЕНИИ

Используя метод верзоров и кинематических винтов, составим уравнения кинематики шестизвенного манипулятора. После чего численно решим эти уравнения с использованием ранее полученных начальных условий.

$$G_{i,i+1} = \begin{bmatrix} \Gamma_{i,i+1} & 0 \\ r_{O_1,O_{i,i+1}}\Gamma_{i,i+1} & \Gamma_{i,i+1} \end{bmatrix}, U_A = \begin{bmatrix} \omega \\ V_A \end{bmatrix}$$

где U_A - кинематический винт, G - верзор. Верзоры вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned} &G_1 = G_{01} \\ &G_2 = G_1 \cdot G_{12} \\ &\vdots \\ &G_i = G_{i-1} \cdot G_{i,i+1} \end{aligned}$$

матрица $r_{O_1,O_{i,i+1}}$ вычисляется как показано ниже:

$$r_{O_1,O_{i,i+1}} = \begin{bmatrix} 0 & -d_{i+1} & a\sin\theta \\ d_{i+1} & 0 & -a\cos\theta \\ -a\sin\theta & a\cos\theta & 0 \end{bmatrix}$$