

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ .....</b>	<b>3</b>
<b>1. УПРАВЛЕНИЕ ПО ПОЛОЖЕНИЮ СХВАТА. АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД.</b>	<b>5</b>
<b>2. УПРАВЛЕНИЕ ПО ПОЛОЖЕНИЮ СХВАТА. ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД НЬЮ- ТОНА.</b>	<b>7</b>
2.1. Постановка задачи.....	7
2.2. Метод Ньютона .....	7
<b>3. АЛГОРИТМ УПРАВЛЕНИЯ НА ОСНОВЕ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ О СКОРОСТЯХ.</b>	<b>8</b>
3.1. Постановка задачи.....	8
3.2. Алгоритм управления .....	8

# ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ

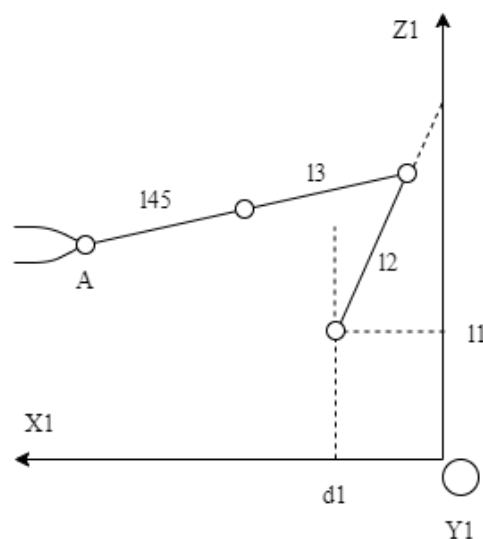
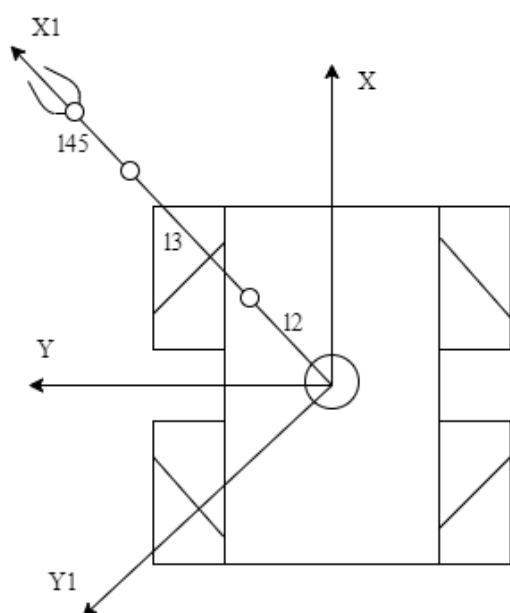
## Цель работы

Управление манипуляционным роботом *KUKA youBot* на основе решения обратной задачи о положениях при перемещении схвата по заданному закону.

## Ограничения

В лабораторных рассматривается только две степени манипулятора – остальные зафиксированы. Из этого следует, что:  $\phi_1$ ,  $\phi_4$  и  $\phi_5$  это константы, а угол ориентации схвата в плоскости руки манипулятора:  $\theta = \phi_2 + \phi_3 + \phi_4$ . Причем, последнее звено схвата выпрямлено, находится в положении параллельном третьему звену, откуда следует, что  $\phi_4 = 0$ .

## Исходные данные



Длины звеньев и расстояния между их осями:

$$d_1 = 0.033$$

$$l_1 = 0.075$$

$$l_2 = 0.155$$

$$l_3 = 0.135$$

$$l_4 = 0.081$$

$$l_5 = 0.137$$

$$l_{45} = l_4 + l_5 = 0.218$$

$$l_{345} = l_3 + l_4 + l_5 = 0.353$$

Схват перемещается так, что его координаты  $X$  и  $Y$  не меняются со временем, а  $Z$  меняется по закону:

$$Z(t) = 0.2 + 0.1 \cos \frac{2\pi t}{10}$$

При переходе к оси манипулятора  $X_1$  требуется пересчитывать координату  $X_{1A}$  сле-

дующим образом:

$$X_{1A} = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

Время берем дискретное, из ста значений от 0 до 10 с. Временной шаг  $\Delta t = 0.1$  с

Так как для управления движением манипулятора используются «технические» углы  $A_i$ , отсчет которых производится от упоров, то необходим переход от углов  $\varphi_i$  к  $A_i$ , который осуществляется следующим образом:

$$A_1 = \varphi_1 + 2.9496$$

$$A_2 = \varphi_2 + 1.1345$$

$$A_3 = \varphi_3 - 2.5654$$

$$A_4 = \varphi_4 + 1.829$$

$$A_5 = -\varphi_5 + 2.93$$

Причем диапазоны работы манипулятора ограничены в  $A_i$ :

$$0.01 < A_1 < 5.84$$

$$0.01 < A_2 < 2.6179$$

$$-4.8 < A_3 < -0.01$$

$$0.022 < A_4 < 3.4292$$

$$0.01 < A_5 < 5.6415$$

Нам заданы  $X(t), Z(t)$ , требуется найти  $\varphi_i(t)$ .

# 1. УПРАВЛЕНИЕ ПО ПОЛОЖЕНИЮ СХВАТА. АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД.

Расчет углов в сочленениях производится с помощью результатов точного аналитического решения обратной задачи о положениях:

$$\begin{aligned} X_{1A} &= d_1 + l_2 \sin \varphi_2 + l_3 \sin (\varphi_2 + \varphi_3) \\ Z_{1A} &= l_1 + l_2 \cos \varphi_2 + l_3 \cos (\varphi_2 + \varphi_3) \end{aligned} \quad (1)$$

Преобразуя данные уравнения, получим:

$$\begin{aligned} l_2 \sin \varphi_2 + l_3 \sin (\varphi_2 + \varphi_3) &= X_{1A} - d_1 = \tilde{X} \\ l_2 \cos \varphi_2 + l_3 \cos (\varphi_2 + \varphi_3) &= Z_{1A} - l_1 = \tilde{Z} \\ \tilde{l} &= \sqrt{\tilde{X}^2 + \tilde{Z}^2} \\ \alpha &= \pi - \varphi_3 \end{aligned}$$

По теореме косинусов:

$$\begin{aligned} \tilde{l}^2 &= l_3^2 + l_2^2 - 2l_2l_3 \cos \alpha \\ \cos \varphi_3 &= \frac{\tilde{l}^2 - l_3^2 - l_2^2}{2l_2l_3} = \frac{(\tilde{X}^2 + \tilde{Z}^2) - (l_3^2 + l_2^2)}{2l_2l_3} = D \end{aligned}$$

Замечание: если  $|D| > 1$ , то программное движение нереализуемо, так как координаты целевой точки вне рабочей области.

$$\varphi_3 = \pm \arccos D + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Найдем  $\varphi_2$ :

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \beta &= \frac{\tilde{Z}}{\tilde{X}} \\ \beta &= \arctan (\tilde{Z}, \tilde{X}) \end{aligned}$$

По теореме косинусов:

$$\begin{aligned} l_3^2 &= \tilde{l}^2 + l_2^2 - 2\tilde{l}l_2 \cos \gamma \\ \cos \gamma &= \frac{\tilde{l}^2 + l_2^2 - l_3^2}{2\tilde{l}l_2} \\ \gamma &= \pm \arccos \frac{\tilde{l}^2 + l_2^2 - l_3^2}{2\tilde{l}l_2} \\ \varphi_2 + \gamma + \beta &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Тогда

$$\varphi_2 = \frac{\pi}{2} - \gamma - \beta.$$

Для проверки результата решим прямую задачу. Полученные значения  $\varphi_2, \varphi_3$  подставим в (1).

Программа для нахождения  $\varphi_2, \varphi_3$ , а также графики реальных и программных значений координат представлены в Приложении 1.

Также были получены квадратичные отклонения:

$$\|X(t) - X^*\|_2 = 4.98 \cdot 10^{-16}$$

$$\|Z(t) - Z^*\|_2 = 4.65 \cdot 10^{-16}$$

.

## 2. УПРАВЛЕНИЕ ПО ПОЛОЖЕНИЮ СХВАТА. ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД НЬЮТОНА.

### 2.1. Постановка задачи

Дан вектор  $X = \begin{bmatrix} X_{1A}(t) \\ Z_{1A}(t) \end{bmatrix}$ , требуется найти  $q = \begin{bmatrix} \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix}$  методом Ньютона.

### 2.2. Метод Ньютона

Путем итерационных приближений находится  $q^{(k+1)} = q^{(k)} - p^{(k)}$ , где  $p^{(k)}$  – вектор полного шага.

$$J(q^{(k)}) \cdot p^{(k)} = F(q^{(k)})$$
$$J = \frac{\partial F}{\partial q} = \begin{bmatrix} \frac{\partial X_{1A}}{\partial \varphi_2} & \frac{\partial X_{1A}}{\partial \varphi_3} \\ \frac{\partial Z_{1A}}{\partial \varphi_2} & \frac{\partial Z_{1A}}{\partial \varphi_3} \end{bmatrix}$$

Если размерность  $J$  небольшая, то можно найти  $p^{(k)} = J^{-1}(q^{(k)}) \cdot F(q^{(k)})$ . Здесь и выше  $J$  – это матрица Якоби. Она формируется путем дифференцирования графа координат схвата по обобщенным координатам. Граф для координат схвата:

$$X_{1A} = d_1 + l_2 \sin \varphi_2 + l_3 \sin (\varphi_2 + \varphi_3)$$
$$Z_{1A} = l_1 + l_2 \cos \varphi_2 + l_3 \cos (\varphi_2 + \varphi_3)$$

При помощи найденных численно  $\varphi_1, \varphi_2$  можно решить прямую задачу кинематики, подставив значения в граф. После чего сравнить полученную траекторию движения с программным движением.

Программа для нахождения  $\varphi_2, \varphi_3$ , а также графики реальных и программных значений координат представлены в Приложении 2.

Также были получены квадратичные отклонения:

$$\|X(t) - X^*\|_2 = 0.194585$$

$$\|Z(t) - Z^*\|_2 = 0.2622$$

.

### 3. АЛГОРИТМ УПРАВЛЕНИЯ НА ОСНОВЕ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ О СКОРОСТЯХ.

#### 3.1. Постановка задачи

Даны векторы  $X^* = \begin{bmatrix} X_{1A}^*(t) \\ Z_{1A}^*(t) \end{bmatrix}$ ,  $\dot{X}^* = \begin{bmatrix} \dot{X}_{1A}^*(t) \\ \dot{Z}_{1A}^*(t) \end{bmatrix}$  – закон изменения скорости схвата.

Известно, что  $J(q)\dot{q} = \dot{X}$ .

Требуется найти:  $\dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_2 \\ \dot{\varphi}_3 \end{bmatrix}$ .

#### 3.2. Алгоритм управления

Введём вектор ошибок положения схвата:  $e = X - X^*(t) = f(q) - X^*$ , где  $f(q)$  – фактические координаты,  $X^*$  – требуемые координаты.

Потребуем, чтобы  $e \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ .

Пусть  $\dot{e} = -ke, k = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}$ , тогда  $e \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$  в силу асимптотической устойчивости.

$$\begin{aligned} \dot{e} &= \dot{X} - \dot{X}^* \\ J\dot{q} - \dot{X}^* &= -ke \\ J\dot{q} &= \dot{X}^* - ke \\ \dot{q} &= J^{-1} \cdot (\dot{X}^* - ke) \end{aligned}$$

Для проверки результата решим прямую задачу. Получим  $\varphi_2, \varphi_3$  из  $\dot{q}$  с помощью метода Эйлера:

$$\begin{aligned} \varphi_{2i} &= \varphi_{2(i-1)} + 0.1\dot{\varphi}_{2i} \\ \varphi_{3i} &= \varphi_{3(i-1)} + 0.1\dot{\varphi}_{3i} \end{aligned}$$

Подставим полученные значения в граф для координат схвата:

$$\begin{aligned} X_{1A} &= d_1 + l_2 \sin \varphi_2 + l_3 \sin (\varphi_2 + \varphi_3) \\ Z_{1A} &= l_1 + l_2 \cos \varphi_2 + l_3 \cos (\varphi_2 + \varphi_3) \end{aligned}$$

Программа для нахождения  $\dot{q}$ , а также графики реальных и программных значений координат представлены в Приложении 3.

Также были получены квадратичные отклонения:

$$\|X(t) - X^*\|_2 = 0.0002513$$

$$\|Z(t) - Z^*\|_2 = 0.38452$$