臺北市南港區胡適國民小學

110學年度校內科學展覽會作品說明書封面

科　　別：數學科

組　　別：國小組

作品名稱：移位遊戲—乾坤扭轉

關 鍵 詞：移位、跳蛙、毛蟲棋

編　　號：

臺北市南港區胡適國民小學

110學年度校內科學展覽會作品說明書內容

作品名稱：移位遊戲—乾坤扭轉

摘要

我們在研究當左邊有N_1 N_1個棋子，中間的空m格，右邊有N_2 N_2個棋子時，當棋子只能走或跳時，兩邊棋子交換移動的最少和最多步數各是多少。研究發現如下：

一、當N_1、$M \in N$ N_1、$M \in N$，$N_2 = 0$ $N_2 = 0$時，移位遊戲的規律。

(一)當n(=2p+1)是奇數時，最少步數是m走+p*m跳;最多是m*n走。

(二)當n(=2p)是偶數時，最少步數是0走+p*m跳；最多是m*n走。

二、當$N_1 = N_2 = n \in N$，$m = 1$ $N_1 = N_2 = n \in N$，$m = 1$時，最少步和最多步數都是2n走+n^2 n^2跳;。

三、當$N_1 = N_2 = n \in N, m \in N$且$> 1$ $N_1 = N_2 = n \in N, m \in N$且$> 1$時。

(一)當n(=2p)是偶數時，要使m=1，可以使用一(二)的方法將棋子往前挪動，使棋子變成(n,1,n)的形式。再利用二的方法將棋子交換，最後再用一(二)的方法將棋子往前挪m-1個位子。所以最少步數中，2n走+(n*(m-1)+n^2) n^2)跳;最多步數是(2*(n*(m-1))+2n)走+(n^2) n^2)跳。

(二)當n(=2p+1)是奇數時，最少步數不能用三(一)的方法解題;最多步數是(2*(n*(m-1))+2n)走+(n^2) n^2)跳。

壹、研究動機

我們在瀏覽第46屆全國科展時發現有一種叫「乾坤大挪移」的數學遊戲，覺得很新奇，於是想進一步的了解，移位遊戲的解法、規則、規律，並創造新的玩法，剛好也有在四年級的數學課中有單元學到過四則運算。

貳、研究目的

一、當$N_1 \in N$ $N_1 \in N$，N_2 N_2=0，M=1時，移位遊戲的規律。

二、當N_1、$M \in N$ N_1、$M \in N$，N_2 N_2=0，時，移位遊戲的規律。

三、當N_1、$N_2 \in N$且≥ 1 N_1、$N_2 \in N$且≥ 1，$N_1 = N_2$ $N_1 = N_2$，M=1時，移位遊戲的規律。

四、當N_1、N_2、$M \in N$且≥ 1 N_1、N_2、$M \in N$且≥ 1，$N_1 = N_2$ $N_1 = N_2$時，移位遊戲的規律。

五、計算不同顏色棋子的走數與跳數時，移位遊戲的規律。

參、研究設備及器材

一、象棋盤

二、彩色棋子

三、紙

四、筆

肆、研究過程或方法

一、先依照題目樣式擺放同樣顏色的彩色棋子在象棋盤的不同格子上。

二、每次只能往同一個方向跳或是走，遊戲目標就是將彩色棋子互換位置。

三、如果A棋子前有B棋子，A棋子就可以跳到B棋子前面的格子。

四、如果A棋子前是空格，就可以往前走一格。

五、名詞解釋

(一)N_1 N_1:左邊棋子的數量

(二)N_2 N_2:右邊棋子的數量

(三)M:空格數量(不包含棋子)。

(四)J: A棋子跳到B棋子前的格子的次數。

(六)W: A棋子前是空格，往前走一格的次數。

伍、研究結果

一、當N_1 、$M \in N$ N_1 、$M \in N$ ，N_2 N_2=0時，移位遊戲的規律。

M / N_1	1		2		3		4	
	最多步(走+跳)	最少步(走+跳)	最多步(走+跳)	最少步(走+跳)	最多步(走+跳)	最少步(走+跳)	最多步(走+跳)	最少步(走+跳)
1	1+0	1+0	2+0	2+0	3+0	3+0	4+0	4+0
2	2+0	0+1	4+0	0+2	6+0	0+3	8+0	0+4
3	3+0	1+1	6+0	2+2	9+0	3+3	12+0	4+4
4	4+0	0+2	8+0	0+4	12+0	0+6	16+0	0+8
5	5+0	1+2	10+0	2+4	15+0	3+6	20+0	4+8

(一) n是1時，跳數是0。因此，最多步是m走，最少步也是m走

(二) n是2時，最少步數跳數是m，走數是m。最多步數跳數是0，走數是m*2

(三) n是3時，最少步數跳數是m，走數是m。最多步數跳數是0，走數是m*3

(四) n是4時，最少步數跳數是m*2，走數是0。最多步數跳數是0，走數是m*4

(五) n是5時，最少步數跳數是2m，走數是m。最多步數跳數是0，走數是m*5

(六) 不論n是多少，最多步數跳數都是0，走數的差是n，走數是m*n

(七) 當n是偶數，最少步數走數都是0，跳數的差是n/2

(八) 當n是奇數，最少步數走數都是m，走數的差是1，跳數的差是（n/2-0.5）

(九) 當n是奇數時，2個相鄰的奇數的最少步數跳數，差會是m

二、當N_1、N_2、$M \in N$且≥ 1 N_1、N_2、$M \in N$且≥ 1，$N_1 = N_2$ $N_1 = N_2$時，移位遊戲的規律。

M / N_1	1		2		3		4	
	最多步(走+跳)	最少步(走+跳)	最多步(走+跳)	最少步(走+跳)	最多步(走+跳)	最少步(走+跳)	最多步(走+跳)	最少步(走+跳)
1	2+1	2+1	4+1	4+1	6+1	6+1	8+1	8+1
2	4+4	4+4	8+4	4+6	12+4	4+8	16+4	4+10
3	6+9	6+9	12+9	6+12	18+9	6+15	24+9	6+18
4	8+16	8+16	16+16	8+20	24+16	8+24	32+16	8+28
5	10+25	10+25	20+25	10+30	30+25	10+35	40+25	10+40

(一) 最少跳數的差都是n-1

(二) 當n=1時，最多和最少步數相同。

(三) 當n=2時，最少步數走數都是4，跳數的差為n。最多步數走數差為2n，跳數相同。

(四) 當n=3時，最少步數走數的差都是2，跳數的差都是2。最多步數走數差為2n，跳數相同

(五) 當n=4時，最少步數走數都是8，跳數都是4的倍數，最多步數走數差為2n，跳數相同。

(六) 當n=5時，最少步數走數差都是2，跳數的差是4，最多步數走數差為2n，跳數相同。

(七) 當m=1時，最少跳數是n^2 n^2，只要m是自然數，n=偶數，最少走數都是2n

(八) 當n為偶數時，走數不變，且跳數都為偶數、最少步數的走是最多步數的走的1/2倍、最多步數的跳與最少步數的跳差n，例如:n=2時，8+4 4+6 6=4+2 n=4 16+14 8+18 18=14+4

(九) 當n為奇數時，走數成等差數列，且是最多步數時，跳數都一樣

三、計算不同顏色棋子的走數與跳數時，移位遊戲的規律

(一) 當N=7, M=1時，移位遊戲的走數與跳數有14走，49跳。

1. 連續的步驟是:111213141516171615141312111(跳數是紫色與綠色、走數是藍色與紅色)

2. 如果把走數和跳數分開來看，跳數是1234567654321、走數是11111111111111

(二) 每次的步數棋子顏色都不同(如下圖)

假設左邊的棋子顏色是綠色，右邊的棋子是紫色：

每次連續跳或走的棋子都是同一種顏色，紫色棋子連續跳完後，就會換到棋子走一次，再換綠色棋子連續跳，以此類推。且走數是2n，連續跳的次數是2n-1。

當m是奇數時，最少步數為1走1跳1走2跳...1走m跳1走m-1跳...1走

當m是偶數時，最少步數為

連續的走數和跳數圖

(左邊是走數、右邊是跳數)

陸、討論

一、當N_1 、$M \in N$ N_1 、$M \in N$ ，N_2 N_2=0時，移位遊戲的規律。

(一) n是1時，最少步數跳數是0，走數是m。最多步數與最少步數相同。

因為只有一棋子，所以不能跳，只能走，所以最多步數與最少步數都是m。

(二) n是2時，最少步數跳數是m，走數是0。最多步數跳數是0，走數是2m。

1. 最少步數:因為有2個棋子，最少步數就是不斷互相跳，要讓2個棋子都向前1格(m)的最少步數是1跳，1跳=1m，因此最少跳數會是m，而走數會是0。
2. 最多步數:因為1跳可以抵2走，所以從最少跳數m換成最多走數是m*2，也就是2m，因此最多走數會是2m，而跳數會是0。

(三) n是3時，最少步數跳數是m，走數是m。最多步數跳數是0，走數是3m。

1. 最少步數:因為有3個棋子，要讓3個棋子都向前1格(m)的最少步數是1跳1走，1跳+1走=1m，因此最少跳數會是m，而走數也是m。
2. 最多步數:因為1跳可以抵2走，而1走可以換成1m，所以從最少跳數m和最少走數m換成最多走數是2m+m，也就是3m，因此最多走數會是3m，而跳數會是0

(四) 當n是4時，最少步數跳數是2m，走數是0。最多步數跳數是0，走數是4m。

1. 最少步數:因為有4個棋子，最少步數就是不斷互相跳，要讓4個棋子都向前1格(m)的最少步數是2跳，2跳=1m，因此最少跳數會是2*m，也就是2m，而走數會是0。
2. 最多步數:因為1跳可以抵2走，所以從最少跳數2m換成最多走數是2m*2，也就是4m，因此最多走數會是4m，而跳數會是0。

(五) 當n是5時，最少步數跳數是2m，走數是m。最多步數跳數是0，走數是5m。

1. 最少步數:因為有5個棋子，要讓5個棋子都向前1格(m)的最少步數是2跳1走，2 跳+1走=1m，因此最少跳數會是2m，而走數會是m。
2. 最多步數:因為1跳可以抵2走，而1走可以換成1m，所以從最少跳數2m和最少走數m換成最多走數是2(2m)+m，也就是5m，因此最多走數會是5m，而跳數會是0。

(六) 當n是奇數時，最多步數跳數都是0，跳數差是[(n/2-0.5)]*m。

因為奇數不能被2整除，所以會有餘數1，最多步數跳數為0，最少步數跳數為[(n/2-0.5)]*m，[(n/2-0.5)]*m-0=[(n/2-0.5)]*m，所以跳數差為[(n/2-0.5)]*m

(七) 當n是偶數，最少步數走數都是0，跳數的差是n/2。

因為n可以被2整除，而1跳可以抵2走，所以最少步數走數都是0，最多步數跳數為0，且m_1 m_1與m_2 m_2相差1，最少步數跳數為n*m/2，n*m_1 m_1/2-n*m_2 m_2/2=1*(n/2)=n/2，所以差是n/2

(八) 當n是奇數，最少步數走數都是m，走數的差是(n-1)*m，走數是m*n。

因為一跳是兩走，所以在最多步數時，不會有跳，最少步數的走有m(n是奇數)個，最多步數的走有n個棋子*m，差是n*m-m=(n-1)*m

(九) 當n是奇數時，2個相鄰的奇數的最少步數跳數，差會是(n/2)+1。

因為當n是奇數時，最少步數跳數為[(n/2)+1]*m，因為是相鄰，所以我們分m_1 m_1和m_2 m_2，m_1 m_1和m_2 m_2差1，當m=m_1 m_1，最少步數跳數為[(n/2)+1]*m_1 m_1，當m=m_2 m_2，最少步數跳數為[(n/2)+1]*m_2 m_2，由於m_1 m_1和m_2 m_2差1，所以差為[(n/2)+1]*1=[(n/2)+1]=(n/2)+1

二、當N_1、N_2、$M \in N$且≥ 1 N_1、N_2、$M \in N$且≥ 1，$N_1 = N_2$ $N_1 = N_2$時，移位遊戲的規律。

(一) 當n=1時，最多和最少步數相同。

因為當n=1時只能跳一步所以步數相同。

(二) 當n=2時，最少步數走數都是4，跳數的差為n。最多步數走數差為2n，跳數相同。

1. 最少步數:因為每個棋子都只能往前走1格，兩邊有4個棋子，所以走數會是4(2n)。每當m增加1，要讓2個棋子往前的最少步數就是1跳，而回來到終點時又增加1跳，所以m增加1，跳數就會增加2(n)。
2. 最多步數:每多一格空格最多走數就是n走，而回來到終點時又增加n走，所以最多步數差會是2n，而跳數不變。

(三) 當n=3時，最少步數走數的差都是2，跳數的差都是2。最多步數走數差為2n，跳數相同

1. 最少步數:每多一格空間就是一跳一走，因為要來回所以最少步數走數和跳數差都是2(1*2)
2. 最多步數:每多一格空間就是三走，因為要來回所以走數差為2n

(四) 當n=4時，最少步數走數都是8，跳數都是4的倍數，最多步數走數差為2n，跳數相

同。

(五) 當n=5時，最少步數走數差都是2，跳數的差是4，最多步數走數差為2n，跳數相同。

1. 最少步數:每多一格空間就是兩跳一走，因為要來回所以最少步數走數差都是2(1*2)，跳數的差是4(2*2)
2. 最多步數:每多一格空間就是五走，因為要來回所以走數差為2n

(六) 當m=1時，最少跳數是n^2 n^2，只要m是自然數，n=偶數，最少走數都是2n。

因為每n個棋子都要掉過另一邊的每個棋子，所以最少跳數是n^2 n^2，每一個棋子只有一步走的空間，因為有2n個棋子，所以最少走數是2n。

(七) 當n為偶數時，走數不變，且跳數都為偶數、最少步數的走是最多步數的走的1/2倍、最多步數的跳與最少步數的跳差n，例如:n=2時，8+4 4+6 6=4+2 n=4 16+14 8+18 18=14+4。

(八) 當n為奇數時，走數成等差數列，且是最多步數時，跳數都一樣。

(九) 當m是1，最多與最少步數都一樣。

因為當m是1時，只有唯一的解，因此最多與最少步數都一樣。

三、計算不同顏色棋子的走數與跳數時，移位遊戲的猜想

當m=N時，有兩種情況，一種是n=奇數，一種是n=偶數。

(一) 當n=奇數時同種顏色的每個棋子要往前，至少都要一跳一走(視n而定)，如果最少的步數比這樣還少，表示m=1時的走法步數可以更少，就是把兩走合併成一跳，以此類推。(1走1跳1走2跳...1走m跳1走m-1跳...1走)

(二) 當n=偶數時，同種顏色的每個棋子要往前，只需要一直往前跳，不需要走，所以走法步數不能再更少。(後面沒有落單的)

柒、結論

一、當N_1 、$M \in N$ N_1 、$M \in N$ ，N_2 N_2=0時，移位遊戲的規律。

(一) n是1時，因為只有一個棋子，只能走，所以最多步數與最少步數都是m。

(二) n是2時，都向前1格的最少步數是1跳，最少跳數會是m，走數是0。1跳可以抵2走，所以最多走數是2m，跳數是0。

(三) n是3時，都向前1格的最少步數是1跳1走，因此最少跳數與走數會是m。1跳可以抵2走，所以最多走數是3m，跳數是0。

(四) n是4時，都向前1格的最少步數是2跳，最少跳數是2m，走數是0。1跳可以抵2走，最多走數是4m，跳數是0。

(五) n是5時，都向前1格的最少步數是2跳1走，最少跳數會是2m，走數是m。1跳可以抵2走，所以最多走數是2(2m)+m，因此最多走數會是5m，跳數是0。

(六) 當n是奇數時，最多步數跳數都是0，跳數差是[(n/2-0.5)]*m。

(七) 當n是偶數，最少步數走數都是0，跳數的差是n/2。

(八) 當n是奇數，最少步數走數都是m，走數的差是(n-1)*m，走數是m*n。

(九) 當n是奇數時，2個相鄰的奇數的最少步數跳數，差會是(n/2)+1。

二、當N_1、N_2、$M \in N$且≥ 1 N_1、N_2、$M \in N$且≥ 1，$N_1 = N_2$ $N_1 = N_2$時，移位遊戲的規律。

(一) 當n=1時，最多和最少步數相同。

(二) 當n=2時，最少走數會是2n。每當m增加1，要讓2個棋子往前的最少步數就是1跳，最少跳數就會增加n。每多一格空格最多走數就是n走，而回來到終點時又增加n走，所以最多步數差會是2n，而跳數不變。

(三) 當n=3時，最少步數走數的差都是2，跳數的差都是2。最多步數走數差為2n，跳數相同。

(四) 當n=4時，最少步數走數都是8，跳數都是4的倍數，最多步數走數差為2n，跳數相同。

(五) 當n=5時，最少步數走數差是2(1*2)，跳數差是4(2*2)。最多走數差為2n。

(六) 當m=1時，最少跳數是n^2 n^2 ，只要m是自然數，n=偶數，最少走數都是2n。

(七) 當n為偶數時，走數不變，且跳數都為偶數、最少步數的走是最多步數的走的1/2倍、最多步數的跳與最少步數的跳差n。

(八) 當n為奇數時，走數成等差數列，且是最多步數時，跳數都一樣。

(九) 當m是1，最多與最少步數都一樣。

三、計算不同顏色棋子的走數與跳數時，移位遊戲的規律

(一) 每次連續跳或走的棋子都是同一種顏色，其中一種顏色的棋子連續跳完後，就會換到棋子走一次，再換另一種顏色的棋子連續跳。連續走數是2n，連續跳數是2n-1。

捌、參考資料及其他

陳慕群、許碩博、林宜岑、張怡婷等人，（1984）。**有趣的移位遊戲。**全國中小學第二十四屆科學展覽會初小組數學科。取自 https://twsf.ntsec.gov.tw/activity/race-1/24/pdf/24s/220.pdf

陳妍廷、李奇軒、吳睿軒、簡子賀等人，（2007）。**毛毛蟲爬眼鏡。**全國中小學第四十八屆科學展覽會國小組數學科。取自 https://twsf.ntsec.gov.tw/activity/race-1/48/elementary/080410.pdf

潘豐佑、褚紘佑、戴予珩、俞祺譯、黃以撒等人，（2015）。**「青蛙」「塔」移位遊戲。**全國中小學第五十六屆科學展覽會國小組數學科。取自 https://twsf.ntsec.gov.tw/activity/race-1/56/pdf/080404.pdf