臺北市第55屆中小學科學展覽會
作品說明書封面

科　別：數學科

組　別：國小組

作品名稱：自然數拆解成連續自然數和或連續整數和的解

關 鍵 詞：連續整數和、梯形公式、連續整數解的個數

編 號：

目錄

摘要-- 1
壹、前言-- 1
貳、研究設備及器材-- 2
參、研究過程或方法-- 2
肆、研究結果-- 5
伍、討論-- 19
陸、結論-- 27
柒、參考文獻資料-- 28

圖目錄

圖一、奇偶數解法展開圖-- 3

圖二、研究架構圖-- 4

表目錄

表一、自然數拆解成連續自然數和的解-- 6

表二：0 到 100 整數拆解成連續整數和的解-- 12

作品名稱：自然數拆解成連續自然數或整數和的解

摘要

將傳統「自然數拆成連續自然數(N)和」問題應用梯形公式先擴展到「拆成整數(Z)」證明發現的規律。再探究「拆成自然數和」問題。研究主要發現並證明了，在 Y 拆成連續 L 個整數或自然數的和中：

一、「Y 可拆成連續除了 1 以外奇數 L 個整數的和」等同「L 是 Y 除了 1 以外的奇數因數」。

二、「Y 可拆成連續偶數 L 個整數的和」等同「$\frac{2Y}{L}$會是奇數」。

三、找出拆成「整數和」和「自然數和」中，L 是奇數、偶數，和全部的個數；L 中最大和最小數。

四、L 中，奇數和偶數部分可以各取出適當的 Q、R 使得 Q*R=2Y。

五、在 Y 的奇數因數 L 中，當 1<L< $\sqrt{2Y}$時， Y 可拆成 L 個連續自然數和；

當 L> $\sqrt{2Y}$時， Y 可拆成$\frac{2Y}{L}$個連續自然數和。

六、列出「自然數拆成連續自然數和或連續整數和」的步驟。

壹、前言

一、研究動機：

一年半前，瀏覽全國第 51 屆研究作品時，發現一份報告的題目是連續整數，他們使用窮舉法算出在 3~100 中的整數如何分解成連續的自然數，於是我們想擴充他們的研究，算出所有自然數如何分解成連續的整數（含負數），並加入證明發現的規律。四年級和五年級的數學課中有單元學到過四則運算和梯形面積公式，連續整數和是一種等差級數，可以使用梯形公式計算和，所以，梯形公式可以應用在此題目中。

二、研究目的：

（一）找出符合一個自然數分解成連續自然數和的解有甚麼規律？

（二）如何列出符合上述解的規律的條件的連續自然數？

（三）一個自然數分解成連續自然數和的解的個數是多少？

（四）找出符合一個自然數分解成連續整數和的解有甚麼規律？

（五）如何列出符合上述解的規律的條件的連續整數？

（六）一個自然數分解成連續整數和的解的個數是多少？

三、文獻回顧：

（一）陳書玟等（2011）五位五年級同學於第 51 屆國展＜連續整數和的難題＞中的研究，內容使用窮舉法算出 3~100 的整數如何拆解成連續的自然數，藉由發現連續整數的規律，推算出連續整數和的解內容中的規律。評語中評審表示此作品「可惜的是此推算法目前只能由大量的數據驗證，還可以再接再厲。」我們也發現作品中並沒有寫到證明，所以加入證明可以成為我們研究目的之一。

（二）李銘城（2005）於龍華科技大學學報<正整數分解成正等差數列和之研究>中的研究，內容為尋找公差為 2 的正等差數列和的問題。

（三）林映汝等（2017）五人於第 51 屆國展＜天作之「和」-整數和、平方和及立方和的探討＞中的研究內容使用高斯算法推導出連續正整數及連續負整數的平方和及立方和的公式，但他們也在結論寫到：「我們尚不足的部分是非連續整數，如等差數列的求和、平方和、立方和部分是否能找出有規律的公式仍待深入探討。」

（四）等差級數的梯形公式解：應用高斯解連續整數的梯形公式，延伸計算所有自然數如何拆解成連續的整數，並且包含負數，而且也有加入證明。

貳、研究設備及器材

一、紙

二、筆

三、電腦

參、研究過程或方法

一、名詞解釋

（一） 連續整數解：連續的整數，包含正整數和負整數，每數相差為１。例如：Ｙ是 12 時，連續整數解可以是 3、4、5。

（二）Ｙ：連續整數解的總和。例如：Ｙ是 12 時，連續整數可分為 3、4、5。

（三）Ｌ：連續整數的數量，例如：3、4、5，因為有 3 個連續整數，所以 L 是 3。

（四）Ｚ：正負整數，Ｚ解就是Ｙ含有幾個連續整數和的解。

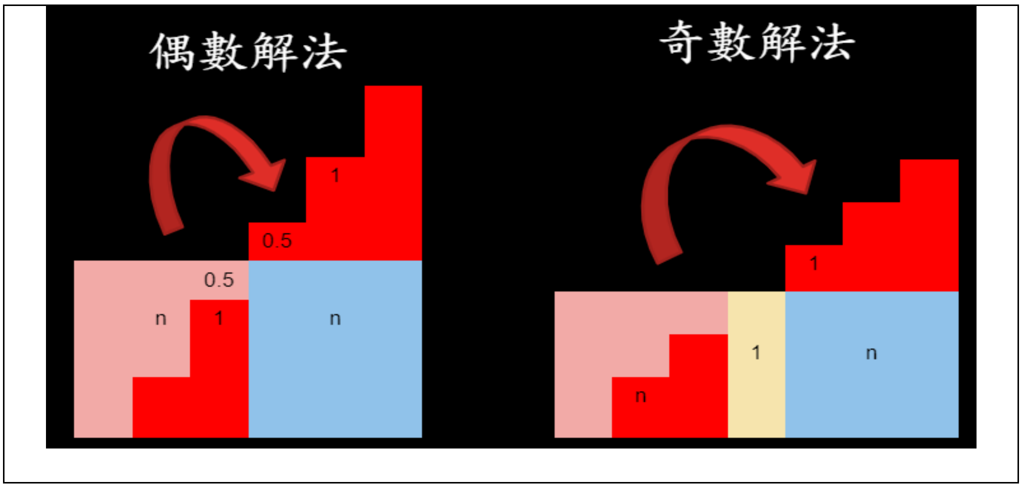
（五）Ｎ：自然數，Ｎ解就是Ｙ只含有幾個連續自然數和的解。

（六）a：連續整數解中第一個數字。

（七）配對：其中一個連續整數和的解頭尾相加，會等於另外一個解的Ｌ，這個解頭

尾相加，正好等於第一個解的Ｌ。這樣的情況就是配對。只有Ｌ＝2Y 時，才不會有配對的解，因為 2Y 的解頭尾相加等於 1，但是連續整數不能是 1，所以不會有配對的解。例如 Y 是 9 時，有一個解釋 4+5（Ｌ＝2），另一個解是-3~5（Ｌ＝9），4+5=9，配對的解 L 是 9，-3+5=2，配對的解 L 是 2。

二、奇偶數解法展開圖



圖一、奇偶數解法展開圖

三、實驗步驟：

（一）找出符合一個自然數分解成連續自然數和的解有甚麼規律？

1. 由奇偶數解法展開圖可以看出，對於任何一個 Y，

當 L 是奇數時，使用$\frac{Y}{L}$=正整數來判斷 Y 是否有這個連續自然數和的解。

當 L 是偶數時，使用$\frac{2Y}{L}$=奇數來判斷 Y 是否有這個連續自然數和的解。

找出所有連續自然數和的解，並製作成表 1。

2.核對表一中連續自然數和的解是否和民國 100 年的研究作品中的附錄一一樣。

3.找出連續自然數解的規律。

（二）如何列出符合上述解的規律的條件的連續自然數？

1. 當 Y 有 L 個連續自然數解時，先判斷 L 是奇數或是偶數

2.當 L 是奇數時，列出所有連續自然數。

3.當 L 是偶數時，列出所有連續自然數。

（三）一個自然數分解成連續自然數和的解的個數是多少？

1. 計算表一解的個數 ，記錄在表一中。

2. 計算 Y 的因數個數。

3. 找出解的個數和 Y 因數的關係。

（四）利用梯形公式找出符合一個自然數分解成連續整數和的解有甚麼規律？

1. 由奇偶數解法展開圖可以看出，對於任何一個 Y，當 Y 有奇數 L 個連續整數解時，$\frac{Y}{L}$=一個整數中間數，所以要判斷 L 是奇數時，Y 有沒有 L 個連續整數解，要使用$\frac{Y}{L}$=正整數來判斷。當 Y 有偶數 L 個連續整數解時，$\frac{Y}{L}$=整數+0.5，若使用$\frac{2Y}{L}$，$\frac{2Y}{L}$就會等於奇數。所以要判斷 L 是偶數時，Y 有沒有 L 個連續整數解，要使用$\frac{2Y}{L}$=奇數來判斷。找出所有 L 個連續整數和的解，製作成表 2。

2. 探討為何 L 是奇數時，Y 解的個數和 Y 因數關係的原因。

3.探討為何 L 是偶數時，Y 解的個數和 Y 因數關係的原因。

（五）如何列出符合上述解的規律的條件的連續整數？

1. 當 Y 有 L 個連續整數解時，先判斷 L 是奇數或是偶數

2.當 L 是奇數時，列出所有連續整數。

3.當 L 是偶數時，列出所有連續整數。

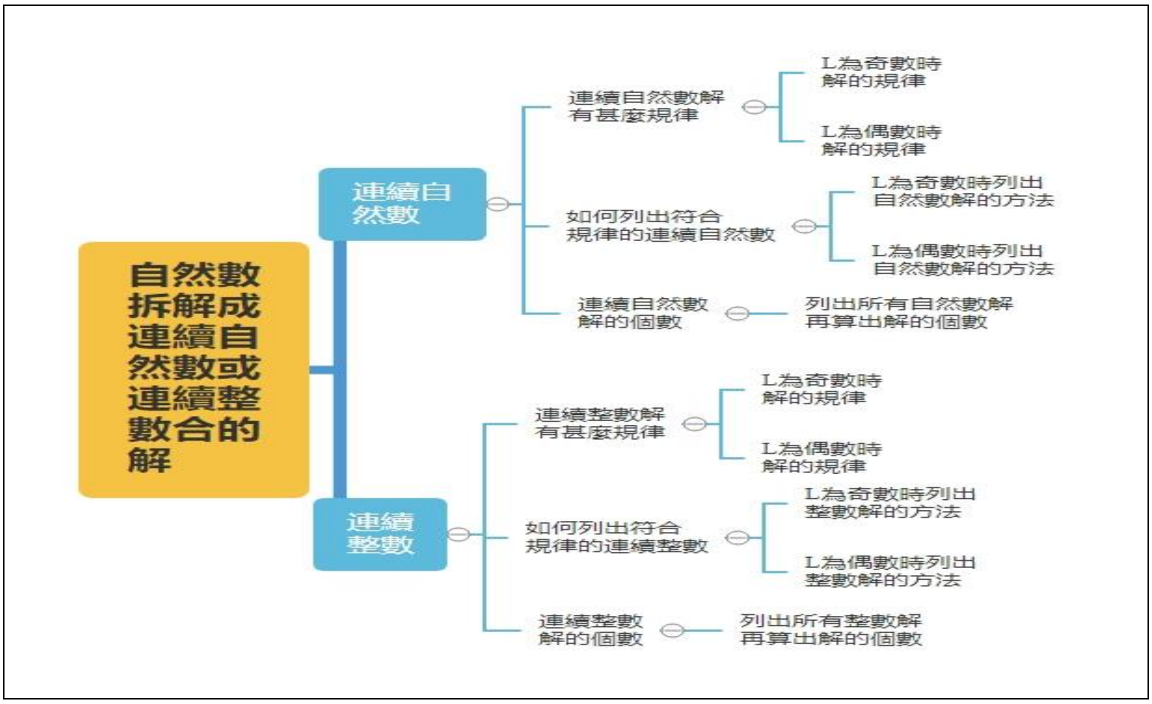
（六）一個自然數分解成連續整數和的解的個數是多少？

1. 計算表二解的個數 ，記錄在表二中。

2. 計算 Y 的因數個數。

3. 找出解的個數和 Y 因數的關係。

四、研究架構圖



圖二、研究架構圖

肆、研究結果

一、找出符合一個自然數分解成連續自然數和的解有甚麼規律？

（一）當 Y 有 L 個連續自然數和的解 L 時，L 和 Y 有哪些規律

1.Y 是2^n時，無解

例如：Y=2、4、8、16、…就無法拆成連續自然數和。

2.只要 Y 是 1 以外的奇數，就一定有 L=2 的解

例如：Y=5 時，有一個 L=2 的解是 2+3。

3.如果 Y 有 L 的解，那 Y+nL 都有 L 的解。

例如：30 可以拆成 4 個連續自然數，30+nL（4）=34，Y 是 34、38、42、…時，就有 L 是 4 的解。

4. 如果 Y 有奇數 L 的解時，L 是 Y 的因數。

例如：Y 是 9 時，L 是 3，3 是 9 的奇數因數。

（二）利用梯形公式發現自然數 Y 分解成連續 L 個自然數和的解時，有甚麼規律？

1.當 L 是奇數時，L 是 Y 的因數。相反地，當 L 是 Y 的奇數因數時，Y 不一定可以拆成 L 個連續自然數和。

2.判斷 L=奇數（2N+1）有沒有解：

如果有一個 Y 和一個大於 1 的奇數 L，要判斷 Y 有沒有這個 L 的長度的連續整數解，要使用$\frac{Y}{L}$=正整數來判斷，如果是，就代表符合上述條件，如果不是，就代表不符合上述條件。

例如：Y 是 30 時，有 L 是 3 的解，$\frac{30}{3}$=10，10 是最中間的數，也就是第 2 個數是 10，往前後依序+1 或-1。

但是，15 是 30 的奇數因數，可是$\frac{30}{15}$=2，也就是最中間的數，第 8 個數是 2，往前有 7 個數，需要減 7，就會是負數，不是自然數解。所以，30 不能拆成 15 個連續自然數和。

2. 當 L 是偶數時，$\frac{Y}{L} = n + 0.5$。相反地，當$\frac{Y}{L} = n + 0.5$，Y 不一定可以拆成 L 個連續自然數和。

如果有一個 Y 和一個大於 1 的偶數 L，要判斷 Y 有沒有這個 L 的長度的連續整數解，如果使用奇數的判斷方法，$\frac{Y}{L} = n + 0.5$，整個算式乘上2，判斷式就變成$\frac{2Y}{L}$=奇數，所以要判斷 L 是否符合條件，要使用$\frac{2Y}{L}$來判斷，如果是，就代

表符合上述條件，如果不是，就代表不符合上述條件。

例如：Y 是 10，L 是 4 時，$\frac{10}{4}$=2+0.5；

Y 是 10，L 是 2 時，判斷是為$\frac{10}{2}$=5，不是$n + 0.5$，所以 10 不可以拆成 2 個連續自然數和

但是，Y 是 30，L 是 20 時，$\frac{30}{20}$=1+0.5，第 10 個數是 1，往前有 9 個數，需要減 9，就會是負數，不是自然數解。所以，30 不能拆成 20 個連續自然數和。

表一：自然數拆解成連續自然數和的解

Y	L是奇數	L是偶數	L共幾個	解
1	0	0	0	
2	0	0	0	
3	0	1	1	1+2（L=2）
4	0	0	0	
5	0	1	1	2+3（L=2）
6	1	0	1	1+2+3（L=3）
7	0	1	1	3+4（L=2）
8	0	0	0	
9	1	1	2	4+5（L=2）、2+3+4（L=3）
10	0	1	1	1+2+3+4（L=4）
11	0	1	1	5+6（L=2）
12	1	0	1	3+4+5（L=3）
13	0	1	1	6+7（L=2）
14	0	1	1	2+3+4+5（L=4）
15	2	1	3	7+8（L=2）、4+5+6（L=3）、1+2+3+4+5（L=5）
16	0	0	0	
17	0	1	1	8+9（L=2）
18	1	1	2	5+6+7（L=3）、3+4+5+6（L=4）
19	0	1	1	9+10（L=2）
20	0	1	1	2+3+4+5+6（L=5）

表一：自然數拆解成連續自然數和的解

Y	L是奇數	L是偶數	L共幾個	解
21	1	2	3	10+11（L=2）、6+7+8（L=3）、1+2+3+4+5+6（L=6）
22	0	1	1	4+5+6+7（L=4）
23	0	1	1	11+12（L=2）
24	1	0	1	7+8+9（L=3）
25	1	1	2	12+13（L=2）、3+4+5+6+7（L=5）
26	0	1	1	5+6+7+8（L=4）
27	1	2	3	13+14（L=2）、8+9+10（L=3）、2+3+4+5+6+7（L=6）
28	1	0	1	1+2+3+4+5+6+7（L=7）
29	0	1	1	14+15（L=2）
30	2	1	3	9+10+11（L=3）、6+7+8+9（L=4）、4+5+6+7+8（L=5）
31	0	1	1	15+16（L=2）
32	0	0	0	
33	1	2	3	16+17（L=2）、10+11+12（L=3）、3+4+5+6+7+8（L=6）
34	0	1	1	7+8+9+10（L=4）
35	2	1	3	12+13（L=2）、5+6+7+8+9（L=5）、2+3+4+5+6+7+8（L=7）
36	1	1	2	11+12+13（L=3）、1+2+3+4+5+6+7+8（L=8）
37	0	1	1	18+19（L=2）
38	0	1	1	8+9+10+11（L=4）
39	1	2	3	19+20（L=2）、12+13+14（L=3）、4+5+6+7+8+9（L=6）
40	1	0	1	6+7+8+9+10（L=5）
41	0	1	1	20+21（L=2）
42	2	1	3	13+14+15（L=3）、9+10+11+12（L=4）、3+4+5+6+7+8+9（L=7）
43	0	1	1	21+22（L=2）
44	0	1	1	2+3+4+5+6+7+8+9（L=8）
45	3	2	5	22+23（L=2）、14+15+16（L=3）、7+8+9+10+11（L=5）、5+6+7+8+9+10（L=6）、1+2+3+4+5+6+7+8+9（L=9）
46	0	1	1	10+11+12+13（L=4）
47	0	1	1	23+24（L=2）

表一：自然數拆解成連續自然數和的解（續）

Y	L是奇數	L是偶數	L共幾個	解
48	1	0	1	15+16+17（L=3）
49	1	1	2	24+25（L=2）、4+5+6+7+8+9+10（L=7）
50	1	1	2	11+12+13+14（L=4）、8+9+10+11+12（L=5）
51	1	2	3	25+26（L=2）、16+17+18（L=3）、6+7+8+9+10+11（L=6）
52	0	1	1	3+4+5+6+7+8+9+10（L=8）
53	0	1	1	26+27（L=2）
54	2	1	3	17+18+19（L=3）、12+13+14+15（L=4）、2+3+4+5+6+7+8+9+10（L=9）
55	1	2	3	27+28（L=2）、9+10+11+12+13（L=5）、1~10（L=10）
56	1	0	1	5+6+7+8+9+10+11（L=7）
57	1	2	3	28+29（L=2）、18+19+20（L=3）、7+8+9+10+11+12（L=6）
58	0	1	1	13+14+15+16（L=4）
59	0	1	1	29+30（L=2）
60	2	3	3	19+20+21（L=3）、10+11+12+13+14（L=5）、4+5+6+7+8+9+10+11（L=8）
61	0	1	1	30+31（L=2）
62	0	1	1	14+15+16+17（L=4）
63	3	2	5	31+32（L=2）、20+21+22（L=3）、8+9+10+11+12+13（L=6）、 6+7+8+9+10+11+12（L=7）、3~11（L=9）
64	0	0	0	
65	1	2	3	32+33（L=2）、11+12+13+14+15（L=5）、2~11（L=10）
66	2	1	3	21+22+23（L=3）、15+16+17+18（L=4）、1~11（L=11）
67	0	1	1	33+34（L=2）
68	0	1	1	5+6+7+8+9+10+11+12（L=8）
69	1	2	3	34+35（L=2）、22+23+24（L=3）、9+10+11+12+13+14（L=6）
70	2	1	3	16+17+18+19（L=4）、12+13+14+15+16（L=5）、7+8+9+10+11+12+13（L=7）
71	0	1	1	35+36（L=2）
72	2	0	2	23+24+25（L=3）、4+5+6+7+8+9+10+11+12（L=9）
73	0	1	1	36+37（L=2）
74	0	1	1	17+18+19+20（L=4）

表一：自然數拆解成連續自然數和的解（續）

Y	L是奇數	L是偶數	L共幾個	解
75	2	3	5	37+38（L=2）、24+25+26（L=3）、13+14+15+16+17（L=5）、10+11+12+13+14+15（L=6）、3~12（L=10）
76	0	1	1	6+7+8+9+10+11+12+13（L=8）
77	2	1	3	38+39（L=2）、8+9+10+11+12+13+14（L=7）、2~12（L=11）
78	1	2	3	25+26+27（L=3）、18+19+20+21（L=4）、1~12（L=12）
79	0	1	1	39+40（L=2）
80	0	1	1	14+15+16+17+18（L=5）
81	2	2	4	40+41（L=2）、26+27+28（L=3）、11+12+13+14+15+16（L=6）、5+6+7+8+9+10+11+12+13（L=9）
82	0	1	1	19+20+21+22（L=4）
83	0	1	1	41+42（L=2）
84	2	0	2	27+28+29（L=3）、9+10+11+12+13+14+15（L=7）
85	1	2	3	42+43（L=2）、15+16+17+18+19（L=5）、4~13（L=10）
86	0	1	1	20+21+22+23（L=4）
87	1	2	3	43+44（L=2）、28+29+30（L=3）、12+13+14+15+16+17（L=6）
88	1	0	1	3~13（L=11）
89	0	1	1	44+45（L=2）
90	3	2	5	29+30+31（L=3）、21+22+23+24（L=4）、16+17+18+19+20（L=5）、6+7+8+9+10+11+12+13+14（L=9）、2~13（L=12）
91	2	1	3	45+46（L=2）、10+11+12+13+14+15+16（L=7）、1~13（L=13）
92	0	1	1	8+9+10+11+12+13+14+15（L=8）
93	1	2	3	46+47（L=2）、30+31+32（L=3）、13+14+15+16+17+18（L=6）
94	0	1	1	22+23+24+25（L=4）
95	1	2	3	47+48（L=2）、17+18+19+20+21（L=5）、5~14（L=10）
96	1	0	1	31+32+33（L=3）
97	0	1	1	48+49（L=2）
98	1	1	2	23+24+25+26（L=4）、11+12+13+14+15+16+17（L=7）
99	3	2	5	49+50（L=2）、32+33+34（L=3）、14+15+16+17+18+19（L=6）、7+8+9+10+11+12+13+14+15（L=9）、4~14（L=11）
100	1	1	2	18+19+20+21+22（L=5）、9+10+11+12+13+14+15+16（L=8）

二、如何列出符合上述解的規律的條件的連續自然數？

（一）當 L 是奇數，$\frac{Y}{L}$=整數時，算出中間數，往前後依序+1 或-1，看第一個數是否≧1，若不是，那這就不是自然數解，若是，那就是自然數解。

例如：當 Y=18，L=3 時，$\frac{18}{3}$=6 整數，中間數（第 2 個數）是 6，往前減一是 5，往後加 1 是 7，第一個數是 5，5≧1，所以，符合連續自然數的規定。

所以，18 可以拆成連續 3 個自然數和。也就是 18=5+6+7

另外，當 Y=18，L=9 時，$\frac{18}{9}$=2 整數，中間數（第 5 個數）是 2，往前減一是 1、0、-1、-2，往後加 1 是 3、4、5、6，第一個數是-2，-2<1，所以，不符合連續自然數的規定。

所以，18 可以拆成連續 9 個整數和。但是不符合都是自然數的規定。也就是雖然 18=（-2）+（-1）+0+1+2+3+4+5+6，但不是拆成自然數和的解。

（二）當 L 是偶數時，$\frac{Y}{L}$=n+0.5，算出中間數，往前減 0.5 後再依序減 1，往後先加 0.5 後，再依序-1。然後，看第一個數是否≧1，若不是，那這就不是自然數解，若是，那就是自然數解。

例如：當 Y=18，L=4 時，$\frac{18}{4}$=4+0.5，平均數是 4.5，往前先減 0.5 後再依序減 1，所以是 4、3；往後先加 0.5 後再依序加 1，所以是 5、6

第一個數是 3，3≧1，所以，符合連續自然數的規定。

所以，18 可以拆成連續 4 個自然數和。也就是 18=3+4+5+6

另外，當 Y=18，L=12 時，$\frac{18}{12}$=1+0.5，平均數是 1.5，往前先減 0.5 後再依序減 1，所以是 1、0、-1、-2、-3、-4；往後先加 0.5 後再依序加 2、3、4、5、6、7，第一個數是-4，-4<1，所以，不符合連續自然數的規定。

所以，18 可以拆成連續 12 個整數和。但是不符合都是自然數的規定。也就是雖然 18=（-4）+（-3）+（-2）+（-1）+0+1+2+3+4+5+6+7，但不是拆成自然數和的解。

三、一個自然數分解成連續自然數和的解的個數是多少？

（一）使用上述方式，列出所有 N 解，算出連續自然數和的解的個數，就是一個自然

數分解成連續自然數和的解的個數。

例如：當 Y=30 L=4 時，利用$\frac{Y}{L}$=30/4=7.5，7.5-0.5=7，7.5+0.5=8，7-1=6，8+1=9，30=6+7+8+9。

（二）Y 為奇數時，Y 可拆成連續 L 個整數和中，最小的 L 是 2。

例如：Y=3,5,9…99 等奇數都有 L=2 解，像 Y=11,L=2 時，解為 5+6。

（三）Y 為偶數時，Y 可拆成連續 L 個整數和中，最小的 L 是 Y 的最小奇質數和 $2*2^{a_0}$中比較小的數。

例如：當 Y=6 時，Y 的最小奇質數=3，$2*2^{a_0}$=4，其中，Y 的最小奇質數，3 較小， 所以最小的 L=3。

四、找出符合一個自然數分解成連續整數和的解有甚麼規律？

（一）當 Y 有 L 個連續整數和的解 L 時，L 和 Y 有哪些規律

1. 所有的自然數都可以拆成連續整數和。

例如：Y=1 到 100 都可以拆成連續整數和。

2.只要 Y 是 1 以外的奇數，就一定有 L=2 的解

例如：Y=5 時，有一個 L=2 的解是 2+3。

3.如果 Y 有 L 的解，那 Y+nL 都有 L 的解。

例如：30 可以拆成 4 個連續自然數，30+nL（4）=34，Y 是 34、38、42、…時，就有 L 是 4 的解。

4. Y 可以拆成 Y 的 z 非 1 奇因數個連續整數和。

例如：Y 是 30 時，Y 的奇因數有 1、3、5、15，所以 Y 可拆成 3、5、15 個連續整數和。也就是

Y=9+10+11；Y=4+5+6+7+8；Y=（-5）+（-4）+…+1+2+3+…8+9

（二）利用梯形公式發現自然數 Y 分解成連續 L 個整數和的解時，有甚麼規律？

1.當 L 是奇數時，L 是 Y 的非 1 奇因數。相反地，當 L 是 Y 的非 1 奇數因數時，Y 一定可以拆成 L 個連續自然數和。

例如：Y 是 30 時，有 L 是 3 的解，$\frac{30}{3}$=10，10 是最中間的數，也就是第 2 個數是 10，往前後依序+1 或-1。所以，

Y=9+10+11

15 是 30 的奇數因數，可是$\frac{30}{15}$=2，也就是最中間的數，第 8 個數是 2，往前有 7 個數，需要減 7。所以，

Y=（-5）+（-4）+⋯+1+2+3+⋯+8+9

2. 當 L 是偶數時，$\frac{Y}{L}=n+0.5$。相反地，當$\frac{Y}{L}=n+0.5$，Y 一定可以拆成 L 個連續自然數和。

例如：Y 是 10，L 是 4 時，$\frac{10}{4}$=2+0.5；

Y 是 10，L 是 2 時，判斷是為$\frac{10}{2}$=5，不是$n+0.5$，所以 10 不可以拆成 2 個連續自然數和

但是，Y 是 30，L 是 20 時，$\frac{30}{20}$=1+0.5。所以，

30=（-13）+（-12）+⋯+0+1+2+3+⋯+15+16

（三）Y 可拆成連續 L 個整數和中， L 的最大值是 2Y

例如：2、3、4、5 個可拆成連續 4、6、8、10 個連續整數。也就是

2=（-1）+0+1+2；3=（-2）+（-1）+0+1+2+3；

4=（-3）+（-2）+（-1）+0+1+2+3+4；

5=（-4）+（-3）+（-2）+（-1）+0+1+2+3+4+5

表二：0 到 100 整數拆解成連續整數和的解

Y	多少 N 解	多少 Z 解	解（負數連續整數解以螢光標示）
0	0	∞	以 0 為中間數的所有解
1	0	1	0+1（L=2）
2	0	1	-1+0+1+2（L=4）
3	1	3	1+2（L=2）、0+1+2（L=3）、-2+-1+0+1+2+3（L=6）
4	0	1	-3+-2+-1+0+1+2+3+4（L=8）
5	1	3	2+3（L=2）、-1+0+1+2+3（L=5）、-4~5（L=10）
6	1	3	1+2+3（L=3）、0+1+2+3（L=4）、-5~6（L=12）
7	1	3	3+4（L=2）、-2+-1+0+1+2+3+4（L=7）、-6~7（L=14）
8	0	1	-7~8（L=16）
9	2	5	4+5（L=2）、2+3+4（L=3）、-1+0+1+2+3+4（L=6）、-3+-2+-1+0+1+2+3+4+5（L=9）、-8~9（L=18）
10	1	3	1+2+3+4（L=4）、0+1+2+3+4（L=5）、-9~10（L=20）
11	1	3	5+6（L=2）、-4~6（L=11）、-10~11（L=22）
12	1	3	3+4+5（L=3）、-2+-1+0+1+2+3+4+5（L=8）、-11~12（L=22）
13	1	3	6+7（L=2）、-5~7（L=13）、-12~13（L=26）

表二：0 到 100 整數拆解成連續整數和的解（續）

Y	多少 N 解	多少 Z 解	解（負數連續整數解以螢光標示）
14	1	3	2+3+4+5（L=4）、-1+0+1+2+3+4+5（L=7）、-13~14（L=28）
15	3	7	7+8（L=2）、4+5+6（L=3）、1+2+3+4+5（L=5）、 0+1+⋯+5（L=6）、-3~6（L=10）、-6~8（L=15）、-14~15（L=30）
16	0	1	-15~16（L=32）
17	1	3	8+9（L=2）、-7~9（L=17）、-16~17（L=32）
18	2	5	5+6+7（L=3）、3+4+5+6（L=4）、-2+-1+0+1+2+3+4+5+6（L=9）、 -4~7（L=12）、-17~18（L=36）
19	1	3	9+10（L=2）、-8~10（L=19）、-18~19（L=38）
20	1	3	2+3+4+5+6（L=5）、-1+0+1+2+3+4+5+6（L=8）、-19~20（L=40）
21	3	7	10+11（L=2）、6+7+8（L=3）、1+2+3+4+5+6（L=6）、 0+1+⋯5+6（L=7）、-5~8（L=14）、-9~11（L=21）、-20~21（L=42）
22	1	3	4+5+6+7（L=4）、-3~7（L=11）、-21~22（L=44）
23	1	3	11+12（L=2）、-10~12（L=23）、-22~23（L=46）
24	1	3	7+8+9（L=3）、-6~9（L=16）、-23~24（L=48）
25	2	5	12+13（L=2）、3+4+5+6+7（L=5）、 -2~7（L=10）、-11~13（L=25）、-24~25（L=50）
26	1	3	5+6+7+8（L=4）、-4~8（L=13）、-25~26（L=52）
27	3	7	13+14（L=2）、8+9+10（L=3）、2+3+4+5+6+7（L=6）、 -1~7（L=9）、-7~10（L=18）、-12~14（L=27）、-26~27（L=54）
28	1	3	1+2+3+4+5+6+7（L=7）、0+1+2+3+4+5+6+7（L=8）、-27~28（L=56）
29	1	3	14+15（L=2）、-13~15（L=29）、-28~29（L=58）
30	3	7	9+10+11（L=3）、6+7+8+9（L=4）、4+5+6+7+8（L=5）、 -3~8（L=12）、-5~9（L=15）、-8~11（L=20）、-29~30（L=60）
31	1	3	15+16（L=2）、-14~16（L=31）、-30~31（L=62）
32	0	1	-31~32（L=64）
33	3	7	16+17（L=2）、10+11+12（L=3）、3+4+5+6+7+8（L=6）、 -2~8（L=11）、-9~12（L=22）、-15~17（L=33）、-32~33（L=66）
34	1	3	7+8+9+10（L=4）、-6~10（L=17）、-33~34（L=68）
35	3	7	12+13（L=2）、5+6+7+8+9（L=5）、2+3+4+5+6+7+8（L=7）、 -1~8（L=10）、-4~9（L=14）、-11~13（L=35）、-34~35（L=70）
36	2	5	11+12+13（L=3）、1+2+3+4+5+6+7+8（L=8）、 0+1+2+3+4+5+6+7+8（L=9）、-10~13（L=24）、-35~36（L=72）
37	1	3	18+19（L=2）、-17~19（L=37）、-36~37（L=74）

表二：0 到 100 整數拆解成連續整數和的解（續）

Y	多少 N 解	多少 Z 解	解（負數連續整數解以螢光標示）
38	1	3	8+9+10+11（L=4）、-7~11（L=19）、-37~38（L=76）
39	3	7	19+20（L=2）、12+13+14（L=3）、4+5+6+7+8+9（L=6）、-3~9（L=13）、-11~14（L=26）、-18~20（L=39）、-38~39（L=79）
40	1	3	6+7+8+9+10（L=5）、-5~10（L=16）、-39~40（L=80）
41	1	3	20+21（L=2）、-19~21（L=41）、-40~41（L=82）
42	3	7	13+14+15（L=3）、9+10+11+12（L=4）、3+4+5+6+7+8+9（L=7）、-2~9（L=12）、-8~12（L=21）、-12~15（L=28）、-41~42（L=84）
43	1	3	21+22（L=2）、-20~22（L=43）、-42~43（L=86）
44	1	3	2+3+4+5+6+7+8+9（L=8）、-1~9（L=11）、-43~44（L=88）
45	5	11	22+23（L=2）、14+15+16（L=3）、7+8+9+10+11（L=5）、5+6+7+8+9+10（L=6）、1+2+3+4+5+6+7+8+9（L=9）、0~9（L=10）、-4~10（L=15）、-6~11（L=18）、-13~16（L=30）、-21~23（L=45）、-44~45（90）
46	1	3	10+11+12+13（L=4）、-9~13（L=23）、-45~46（L=92）
47	1	3	23+24（L=2）、-22~24（L=47）、-46~47（L=94）
48	1	3	15+16+17（L=3）、-14~17（L=32）、-47~48（L=96）
49	2	5	24+25（L=2）、4+5+6+7+8+9+10（L=7）、-3~10（L=14）、-23~25（L=49）、-48~49（L=98）
50	2	5	11+12+13+14（L=4）、8+9+10+11+12（L=5）、-7~12（L=20）、-10~14（L=25）、-49~50（L=100）
51	3	7	25+26（L=2）、16+17+18（L=3）、6+7+8+9+10+11（L=6）、-5~11（L=17）、-15~17（L=34）、-24~26（L=51）、-50~51（L=102）
52	1	3	3+4+5+6+7+8+9+10（L=8）、-2~10（L=13）、-51~52（L=104）
53	1	3	26+27（L=2）、-25~27（L=53）、-52~53（L=106）
54	3	7	17+18+19（L=3）、12+13+14+15（L=4）、2+3+4+5+6+7+8+9+10（L=9）、-1~10（L=12）、-11~15（L=27）、-16~19（L=36）、-53~54（L=108）
55	3	7	27+28（L=2）、9+10+11+12+13（L=5）、1~10（L=10）、0~10（L=11）、-8~13（L=22）、-26 ~28（L=55）、-54~55（L=110）
56	1	3	5+6+7+8+9+10+11（L=7）、-4~11（L=16）、-55~56（L=112）
57	3	7	28+29（L=2）、18+19+20（L=3）、7+8+9+10+11+12（L=6）、-6~12（L=19）、-17~20（L=38）、-27~29（L=57）、-56~57（L=114）

表二：0 到 100 整數拆解成連續整數和的解（續）

Y	多少 N 解	多少 Z 解	解（負數連續整數解以螢光標示）
58	1	3	13+14+15+16（L=4）、-12~16（L=29）、-57~58（L=116）
59	1	3	29+30（L=2）、-28~30（L=59）、-58~59（L=118）
60	3	7	19+20+21（L=3）、10+11+12+13+14（L=5）、4+5+6+7+8+9+10+11（L=8）、-3~11（L=15）、-9~14（L=24）、-18~21（L=40）、-59~60（L=120）
61	1	3	30+31（L=2）、-29~31（L=61）、-60~61（L=122）
62	1	3	14+15+16+17（L=4）、-13~17（L=31）、-61~62（L=124）
63	5	11	31+32（L=2）、20+21+22（L=3）、8+9+10+11+12+13（L=6）、6+7+8+9+10+11+12（L=7）、3~11（L=9）、-2~11（L=14）、-5~12（L=18）、-7~13（L=21）、-19~22（L=42）、-30~32（L=63）、-62~63（L=126）
64	0	1	-63~64（L=128）
65	3	7	32+33（L=2）、11+12+13+14+15（L=5）、2~11（L=10）、-1~9（L=13）、-10~15（L=26）、-31~33（L=65）、-64~65（L=130）
66	3	7	21+22+23（L=3）、15+16+17+18（L=4）、1~11（L=11）、0~11（L=12）、-14~18（L=33）、-20~23（L=44）、-65~66（L=132）
67	1	3	33+34（L=2）、-32~34（L=67）、-66~67（L=134）
68	1	3	5+6+7+8+9+10+11+12（L=8）、-4~12（L=17）、-67~68（L=136）
69	3	7	34+35（L=2）、22+23+24（L=3）、9+10+11+12+13+14（L=6）、-8~14（L=23）、-21~24（L=46）、-33~35（L=69）、68~69（L=138）
70	3	7	16+17+18+19（L=4）、12+13+14+15+16（L=5）、7+8+9+10+11+12+13（L=7）、-6~13（L=20）、-11~16（L=28）、-15~19（L=35）、-69~70（L=140）
71	1	3	35+36（L=2）、-34~36（L=71）、-70~71（L=142）
72	2	5	23+24+25（L=3）、4+5+6+7+8+9+10+11+12（L=9）、-3~12（L=16）、-22~25（L=48）、-71~72（L=144）
73	1	3	36+37（L=2）、-35~37（L=73）、-72~73（L=146）
74	1	3	17+18+19+20（L=4）、-16~20（L=37）、-73~74（L=148）
75	5	11	37+38（L=2）、24+25+26（L=3）、13+14+15+16+17（L=5）、10+11+12+13+14+15（L=6）、3~12（L=10）、-2~12（L=15）、-9~15（L=25）、-12~17（L=30）、-23~26（L=50）、-36~38（L=75）、-74~75（L=150）
76	1	3	6+7+8+9+10+11+12+13（L=8）、-5~13（L=19）、-75~76（L=152）
77	3	7	38+39（L=2）、8+9+10+11+12+13+14（L=7）、2~12（L=11）、-1~12（L=14）、-7~14（L=22）、-37~39（L=77）、-76~77（L=154）

表二：0 到 100 整數拆解成連續整數和的解（續）

Y	多少 N 解	多少 Z 解	解（負數連續整數解以螢光標示）
78	3	7	25+26+27（L=3）、18+19+20+21（L=4）、1~12（L=12）、0~12（L=13）、-17~21（L=39）、-24~27（L=52）、-77~78（L=156）
79	1	3	39+40（L=2）、-38~40（L=79）、-78~79（L=158）
80	1	3	14+15+16+17+18（L=5）、-13~18（L=32）、-79~80（L=160）
81	4	9	40+41（L=2）、26+27+28（L=3）、11+12+13+14+15+16（L=6）、5+6+7+8+9+10+11+12+13（L=9）、-4~13（L18）、-10~16（L=27）、-26~28（L=54）、-39~42（L=81）、-80~81（L=162）
82	1	3	19+20+21+22（L=4）、-18~22（L=41）、-81~82（L=164）
83	1	3	41+42（L=2）、-40~42（L=83）、-82~83（L=166）
84	2	5	27+28+29（L=3）、9+10+11+12+13+14+15（L=7）、-9~16（L=24）、-26~29（L=56）、-83~84（L=168）
85	3	7	42+43（L=2）、15+16+17+18+19（L=5）、4~13（L=10）、-3~13（L=17）、-14~19（L=34）、-41~43（L=85）、-84~85（L=170）
86	1	3	20+21+22+23（L=4）、-19~23（L=43）、-85~86（L=172）
87	3	7	43+44（L=2）、28+29+30（L=3）、12+13+14+15+16+17（L=6）、-11~17（L=29）、-27~30（L=58）、-42~44（L=87）、-86~87（L=174）
88	1	3	3~13（L=11）、-2~13（L=16）、-87~88（L=176）
89	1	3	44+45（L=2）、-43~45（L=89）、-88~89（L=178）
90	5	11	29+30+31（L=3）、21+22+23+24（L=4）、16+17+18+19+20（L=5）、6+7+8+9+10+11+12+13+14（L=9）、2~13（L=12）、-1~13（L=15）、-5~14（L=20）、-15~20（L=36）、-20~24（L=45）、-28~31（L=60）、-89~90（L=180）
91	3	7	45+46（L=2）、10+11+12+13+14+15+16（L=7）、1~13（L=13）、0~13（L=14）、-9~16（L=26）、-44~46（L=91）、-90~91（L=182）
92	1	3	8+9+10+11+12+13+14+15（L=8）、-7~15（L=23）、-91~92（L=184）
93	3	7	46+47（L=2）、30+31+32（L=3）、13+14+15+16+17+18（L=6）、-12~18（L=31）、-29~32（L=62）、-45~47（L=93）、-92~93（L=186）
94	1	3	22+23+24+25（L=4）、-21~25（L=47）、-93~94（L=188）
95	3	7	47+48（L=2）、17+18+19+20+21（L=5）、5~14（L=10）、-4~14（L=19）、-16~21（L=38）、-46~48（L=95）、-94~95（L=190）
96	1	3	31+32+33（L=3）、-30~33（L=64）、-95~96（L=192）
97	1	3	48+49（L=2）、-47~49（L=97）、-96~97（L=194）

表二：0 到 100 整數拆解成連續整數和的解（續）

Y	多少 N 解	多少 Z 解	解（負數連續整數解以螢光標示）
98	2	5	23+24+25+26（L=4）、11+12+13+14+15+16+17（L=7）、-10~17（L=28）、-22~26（L=49）、-97~98（L=196）
99	5	11	49+50（L=2）、32+33+34（L=3）、14+15+16+17+18+19（L=6）、7+8+9+10+11+12+13+14+15（L=9）、4~14（L=11）、-3~14（L=18）、-6~15（L=22）、-13~19（L=33）、-31~34（L=66）、-48~50（L=99）、-98~99（L=198）
100	2	5	18+19+20+21+22（L=5）、9+10+11+12+13+14+15+16（L=8）、-8~16（L=25）、-17~22（L=40）、－99~100（L=200）

五、如何列出符合上述解的規律的條件的連續整數？

（一）當 L 是奇數，$\frac{Y}{L}$=整數時，算出中間數，往前後依序+1 或-1，就是拆成連續整數和的解。

例如：當 Y=18，L=3 時，$\frac{18}{3}$=6 整數，中間數（第 2 個數）是 6，往前減一是 5，往後加 1 是 7，所以，18 可以拆成連續 3 個整數和。也就是

18=5+6+7

當 Y=18，L=9 時，$\frac{18}{9}$=2 整數，中間數（第 5 個數）是 2，往前減一是 1、0、-1、-2，往後加 1 是 3、4、5、6。

所以，18 可以拆成連續 9 個整數和。也就是

18=（-2）+（-1）+0+1+2+3+4+5+6

（二）當 L 是偶數時，$\frac{Y}{L}$=n+0.5，算出中間數，往前減 0.5 後再依序減 1，往後先加 0.5 後，再依序-1。那就是拆成連續整數和的解。

例如：當 Y=18，L=4 時，$\frac{18}{4}$=4+0.5，平均數是 4.5，往前先減 0.5 後再依序減 1，所以是 4、3；往後先加 0.5 後再依序加 1，所以是 5、6

所以，18 可以拆成連續 4 個自然數和。也就是

18=3+4+5+6

當 Y=18，L=12 時，$\frac{18}{12}$=1+0.5，平均數是 1.5，往前先減 0.5 再依序減 1，所以是 1、0、…、-3、-4；往後先加 0.5 再依序加 2、3、…、6、7，

所以，18 可以拆成連續 12 個整數和。也就是

18=（-4）+（-3）+（-2）+（-1）+0+1+2+3+4+5+6+7

六、一個自然數分解成連續整數和的解的個數是多少？

（一）一個自然數 Y 分解成奇數個連續整數和解的個數=Y 的奇因數個數-1。

例如：當 Y=30，有 1、3、5、15 等 4 個奇因數，Y 就可以分解成 3、5、15 個連續整數和，也就是有 3（=4-1）個分解成奇數個連續整數和解。

當 Y=90，有 1、3、5、9、15、45 等 6 個奇因數，Y 就可以分解成 3、5、9、15、45 個連續整數和，也就是有 5（=6-1）個分解成奇數個連續整數和解。

（二）一個自然數 Y 分解成偶數個連續整數和解的個數=Y 的奇因數個數。

例如：當 Y=30，有 1、3、5、15 等 4 個奇因數，Y 就可以分解成$60\left(=\frac{2\times30}{1}\right)$、$20\left(=\frac{2\times30}{3}\right)$、$12\left(=\frac{2\times30}{5}\right)$、$4\left(=\frac{2\times30}{15}\right)$個連續整數和，也就是有 4 個分解成偶數個連續整數和解。

當 Y=90，有 1、3、5、9、15、45 等 6 個奇因數，Y 就可以分解成 $180\left(=\frac{2\times90}{1}\right)$、$60\left(=\frac{2\times90}{3}\right)$、$36\left(=\frac{2\times90}{5}\right)$、$20\left(=\frac{2\times90}{9}\right)$、$12\left(=\frac{2\times90}{15}\right)$、$4\left(=\frac{2\times90}{45}\right)$、個連續整數和，也就是有 4 個分解成偶數個連續整數和解。

（三）Y 為奇數時，Y 可拆成連續 L 個整數和中，最小的 L 是 2。

例如：Y=3,5,9…99 等奇數都有 L=2 解，像 Y=11,L=2 時，解為 5+6。

（四）Y 為偶數時，Y 可拆成連續 L 個整數和中，最小的 L 是 Y 的最小奇質數和 $2*2^{a_0}$中比較小的數。

例如：當 Y=6 時，Y 的最小奇質數=3，$2*2^{a_0}$=4，其中，Y 的最小奇質數，3 較小，　所以最小的 L=3。

七、其他發現

（一）Y＝2^m（2 的次方）時，沒有自然數的解，只有一個負整數的解。例如：Y是 4 時，只會有一個從-3~4 的負整數解。

（二）任何Y的Z解的數量（正負整數的解的數量）都是奇數。例如：Y是 5 時，Z 解的數量是 3，3 是奇數。

（三）非 2 質數Z解的數量都會有 3 個，在自然數中有 1 個解，在正負整數有 3 個解。例如：Y是非 2 質數 7 時，Z 解的數量 3，N 解的數量是 1。

（四）任何Y自然數（N）解的數量是$\frac{Z-1}{2}$。例如：Y是9時，N解的數量是2，也就是$\frac{5-1}{2}$。

（五）將前2個小的L相乘會得出下一個L。例如：Y是10時，前2個小的L是4和5，相乘後得到20，下一個解的L就是20。

（六）同一個Y的所有解中，任何2個配對的L相乘會得出2Y。以15為例，其中一個配對的解，一個是7+8（L=2），另一個是-6~8（L=15），2×15=30，30=2Y。

伍、討論

一、當Y可拆成連續奇數L個整數（Z）的和時，L會是Y的奇數因數。

證明：假設Y可拆成連續奇數L個連續整數（Z）的和，

Y=$a_1+a_2+\cdots+a_{2n+1}$

$=a_1+(a_1+1)+(a_1+2)+\cdots+(a_{1+2n})$，其中L=2N+1。

Y=$a_1+a_2+\cdots+a_{2n+1}$

$=a_1+(a_1+1)+(a_1+2)+\cdots+(a_{1+2n})$

=（2N+1）$a_1+\frac{(1+2N)*2N}{2}$

=（2N+1）(a_1+N)

= L*a_{n+1}

$\frac{Y}{L}=\frac{a_1+a_2+\ldots+a_L}{2n+1}$

$=\frac{L*a_{n+1}}{2n+1}$

$=\frac{L*a_{n+1}}{L}$

$=a_{n+1}\in$N

因此L會是Y的因數

二、當L是Y的奇數因數時，Y可拆成連續奇數L個整數（Z）的和。

證明 ： 假設L為Y的奇數因數，Y有從a開始L個連續整數和的解。

假如$\frac{Y}{L}=x$，因為L為Y的因數，所以x為整數。

若L為奇數，有一個整數n使得L=2n+1。

令

$a_1=\frac{Y}{L}-n$

$=x\text{-n}\in Z$

$a_i=a_1+(i-1)$

$=x\text{-n}+（i-1）\in Z$，其中i是從 1 到 L 中的整數

$a_{n+1}=\frac{Y}{L}$

$=x\in Z$

$a_L=\frac{Y}{L}+\text{n}$

$=x+\text{n}\in Z$

根據連續整數梯形公式：

$a_1+a_2+\ldots+a_L=\frac{(a_1+a_L)\times L}{2}$

$=\frac{[(x-n)+(x+n)]\times L}{2}$

$=\frac{(x+x)\times L}{2}$

$=\frac{(2x)\times L}{2}$

$=x\times L$

$=Y$

因此 Y 可拆成連續奇數 L 個整數（Z）的和。

三、當 Y 可拆成連續偶數 L 個整數（Z）的和時，2Y/L 會是奇數。

證明：假設 Y 可拆成連續偶數 L 個整數的和時，

$Y=a_1+a_2+\ldots+a_L=a_1+a_2+\ldots+a_{2n}$

$=a_1+（a_1+1）+（a_1+2）+\ldots+（a_1+2n-1）$，其中 L=2n

$=\frac{(a_1+(a_1+2n-1))*2n}{2}$

$=（2a_1+2n+1）*n$

$=（2（a_1+n）+1）*n$

另外，$\frac{2Y}{L}=\frac{2*(2(a_1+n)+1)*n}{L}$

$=\frac{2*(2(a_1+n)+1)*n}{2n}$

$=2（a_1+n）+1$

$2（a_1+n）+1$ 是奇數，

所以如果 Y 有偶數 L 個連續整數和的解，2Y/L 會是奇數。

四、當 L 是偶數且 2Y/L 是奇數時，Y 可拆成連續偶數 L 個整數（Z）的和。

證明：假設 L 是偶數且$\frac{2Y}{L}$=奇數，

就會有一個 n 使得 L=2n，有一個 m 使得$\frac{2Y}{L}$=2m+1

因為$\frac{2Y}{L}$=2m+1，

所以$\frac{Y}{L}=\frac{2m+1}{2}$=m+0.5，

L=$\frac{Y}{m+0.5}$，

a_n=$\frac{Y}{L}$-0.5

=（m+0.5）-0.5

= m∈Z

a_i=a_1+（i-1）

=（a_n-（$n-1$））+（i-1）

=（$m-$（$n-1$））+（i-1）=m-n+i∈Z

其中a_1=m-n+1

a_L=m-n+L

=m-n+2n

=m+n

接下來根據連續整數梯形公式：

$a_1+a_2+\ldots+a_L=\frac{(a_1+a_L)\times L}{2}$

$=\frac{[(m-n+1)+(m+n)]\times L}{2}$

$=\frac{(2m+1)\times 2n}{2}$

$=(2m+1)\times n$

$=\frac{2Y}{L}*\frac{L}{2}=$ Y

因此 Y 可拆成連續奇數 L 個整數（Z）的和。

五、當 Y 質因數分解成為 Y=$2^{a_0}\times P_1^{a_1}\times P_2^{a_2}\times\ldots\times P_m^{a_m}=2^{a_0}\times$Y’，有（($a_1$+1）*（$a_2$+1）*...*（$a_m$+1））-1 個奇數、(($a_1$+1）*（$a_2$+1）*...*（$a_m$+1））個偶數解，共有 2*（($a_1$+1）*（$a_2$+1）*...*（$a_m$+1））-1 個解。

證明：（1）由 1、2 知道奇數 L 是 Y 的因數時，但 Y=$2^{a_0}\times$Y’，Y’是奇數，所以 L 一定是 Y'的因數，因此 Y 有幾個奇數 L 的解=Y'的因數個數-1

=（(a_1+1）*（a_2+1）*...*（a_m+1））-1

（2）由 3、4 知道偶數 L 是 Y 的因數時，$\frac{2Y}{L}=\frac{2*2^{a_0}\times Y'}{L}=\frac{2^{a_0+1}\times Y'}{L}$是奇數 x，這個奇數 x 是 Y'的因數，所以$\frac{Y'}{x}$=奇數。

$$L=\frac{2Y}{x}$$

$$=\frac{2^{a_0+1}\times Y'}{x}$$

$$=2^{a_0+1}\times\frac{Y'}{x}$$

$=2^{a_0+1}\times L'$，其中 L'=$\frac{Y'}{x}$

因此 Y 有幾個偶數 L 的解=Y’有幾個偶數 L’的解

=Y'的因數個數，

=（(a_1+1）*（a_2+1）*...*（a_m+1））

（其中 L 的最小值是2^{a_0+1}*1≥2^1 *1=2>1）

（3）Y 有幾個所有 L 的解=Y 有幾個奇數 L 的解+Y 有幾個偶數 L 的解

=（Y'的因數個數-1）+（Y'的因數個數）

=（((a_1+1）*（a_2+1）*...*（a_m+1））-1）+（(a_1+1）*（a_2+1）*...*（a_m+1））

=2*（(a_1+1）*（a_2+1）*...*（a_m+1））-1

六、Y 的 L 解中，奇數部分和偶數部分可以各取出適當的 Q、R 使得 Q*R=2Y。

證明：當 Y 質因數分解成為 Y=$2^{a_0}\times P_1^{a_1}\times P_2^{a_2}\times\ldots\times P_m^{a_m}$時

由伍、一跟伍、二知道，「Y 可拆成連續奇數 L 個整數（Z）的和」，和「L 是 Y 的奇數因數」是一樣的。

由伍、一跟伍、五知道，有（(a_1+1）*（a_2+1）*...*（a_m+1））-1 個奇數、((a_1+1）*（a_2+1）*...*（a_m+1））-1 個偶數解，共有 2*（(a_1+1）*（a_2+1）*...*（a_m+1））-1 個解。

Y 的奇數 L 解，就是 Y’ 的除了 1 以外所有因數，將這些因數和 1（共（a_1+1）*（a_2+1）*...*（a_m+1）個）由小到大排列成

$q_1 < q_2 < q_3 \dots q_{(a_1)\times(a_2)\dots}$，

因為q_i是 Ý 的因數所以$\frac{\acute{Y}}{q}$=整數r_i，把所有的 r 按照大小列出

$r_1 > r_2 > r_3 \dots > r_{(a_1)\times(a_2)\dots}$。

令Q_i=q_i；R_i=$2^{a_0} \times r_i$

Q_i* r_i=2Y，所以 Y 的 L 解中，奇數部分和偶數部分可以各取出適當的 Q、R 使得 Q*R=2Y。

七、在 Y 拆成連續 L 個整數（Z）的和中，當 L< $\sqrt{2Y}$時，這 L 個整數是 Y 拆成 L 個自然數和的解。

證明：L=奇數時，

$$a_1 = \frac{Y}{L} - n$$
$$= \frac{Y}{L} - \frac{L-1}{2}$$
$$= \frac{2Y-(L^2-L)}{2}$$
$$= \frac{2Y+L-L^2}{2L} \geq 1$$

L=偶數時

$$a_1 = \frac{Y}{L} - 0.5-（n-1）$$
$$= \frac{2\times Y}{2\times L} - \frac{1\times L}{L\times L} - \frac{L\times L}{2\times L}$$
$$= 2Y+L-L^2$$
$$= \frac{2Y+L-L^2}{2L} \geq 1$$

不管 L 是奇數還是偶數最後都推導出$\frac{2Y+L-L^2}{2L} \geq 1$

$$\frac{2Y+L-L^2}{2L} \geq 1$$

=> $2Y + L - L^2 \geq 2L$

=> $L^2 \leq 2Y - L$

=> $L^2 < 2Y + L$

$L^2 \leq 2Y - L + L^2 < 2Y + L$

=> $L^2 + L^2$ <4Y

=> $L^2 < 2Y$

=> $L^2 < \sqrt{2Y}$

八、在 Y 可拆成連續奇數 L 個整數（Z）的和時，$\sqrt{2Y}$不會是L個整數中的任一個奇數。

證明：依第六項可知，2Y=q_i*（$2^{a_{0+1}}$*r_i）

另外，2Y=$\sqrt{2Y}$*$\sqrt{2Y}$

$\sqrt{2Y}$*$\sqrt{2Y}$=q_i*（$2^{a_{0+1}}$*r_i）

假設有i，使得$\sqrt{2Y}$=q_i

$\sqrt{2Y}$*$\sqrt{2Y}$=q_i*（$2^{a_{0+1}}$*r_i）

=> $\sqrt{2Y}$*$\sqrt{2Y}$=$\sqrt{2Y}$*（$2^{a_{0+1}}$*r_i）

兩邊同時去除$\sqrt{2Y}$後，成為$\sqrt{2Y} = 2^{a_{0+1}} * r_i$，

$2^{a_{0+1}} * r_i$是偶數，但是因為q_i是 Y 的因數，所以q_i是奇數，因此若$\sqrt{2Y}$=q_i，則互相矛盾，所以$\sqrt{2Y} \neq q_i$。

九、在 Y 可拆成連續奇數 L 個自然數的和時，在 Y 的奇數因數中符合 L< $\sqrt{2Y}$就是奇數個連續自然數和的個數。所有連續自然數和的個數是 2*（Y 的奇數因數個數）-1。

證明：根據

依上述〔伍、九〕結果

$\sqrt{2Y}$*$\sqrt{2Y}$=q_i*（$2^{a_{0+1}}$*r_i）

如果q_i>$\sqrt{2Y}$

那麼$2^{a_{0+1}}$*r_i<$\sqrt{2Y}$

因為$2^{a_{0+1}}$*r_i<$\sqrt{2Y}$

所以$2^{a_{0+1}}$*r_i是 Y 的 N 解

十、當 Y＝2^m（2 的次方）時，沒有自然數的解，只有一個負整數的解。不能拆成連續自然數的和。

證明：當 Y 是2^m時，質因數分解後，沒有奇數因數，所以 Y 只會有偶數的 L。

計算偶數的 L 要使用$\frac{2Y}{L}$=奇數，表示 2Y=L×奇數，但是 Y 除了 1，沒有其他奇數因數，所以 2Y=L×1，也就是 2Y=L。

要算出解的中間數，要使用$\frac{Y}{L}$，也就是$\frac{2^m}{2\times 2^m}$，變成$\frac{2^m}{2^{m+1}}$，也就是 0.5。

因為 L=2N，所以中間數 0.5 往左減去 N 個，再往右加上 N 個，結果一定不會符合 N 解。

十一、給定一個 Y，寫出算出所有 Z 解的步驟。

步驟：（1）先將 Y 質因數分解，得到 Y=$2^{a_0}\times P_1{}^{a_1}\times P_2{}^{a_2}\cdots\times P_m{}^{a_m}=2^{a_0}\times Y'$。

（2）找出 Y 的所有奇數因數，就是Y'的所有因數，並由小到大排列，稱為 L’。

（3）L’就是 Y 可拆成連續奇數 L 個自然數和。

（4）用$\frac{Y}{L}$=整數，算出正中間數，往前後依序減 1 或加 1，那就是 Y 的連續整數和的解。

（5）2^{a_0+1}*L’就是 Y 可拆成連續偶數 L 個整數和。

（6）用$\frac{Y}{L}$=整數+0.5，算出正中間值也就是平均數，往前算先平均數減 0.5 後再依序減 1；往後算，先平均數加 0.5 後再依序加 1，那就是 Y 的連續整數和的解。

十二、給定一個 Y，算出所有連續自然數和的解的步驟。

步驟：（1）先將 Y 質因數分解，得到 Y=$2^{a_0}\times P_1{}^{a_1}\times P_2{}^{a_2}\cdots\times P_m{}^{a_m}=2^{a_0}\times Y'$。

（2）找出 Y 的所有奇數因數，就是Y'的所有因數，稱為 L’。

（3）當 L’ <$\sqrt{2Y}$時，就是 Y 可拆成連續奇數 L’個整數和。

（4）用$\frac{Y}{L}$=整數，算出正中間數，往前後依序減 1 或加 1，那就是 Y 的連續整數和的解。

（5）接著算 Y 的偶數 L。當 L’ > $\sqrt{2Y}$時，Y 會有$\frac{2Y}{L'}$=L 個連續整數和的解。

（6）用$\frac{Y}{L}$=整數+0.5，算出正中間數，往前後依序減 1 或加 1，那就是 Y 的連續自然數和的解。

十三、Y 可拆成連續 L 個整數和中，L 的最大值是 2Y

證明：因為 2Y 是偶數，所以使用$\frac{2Y}{L}$=奇數判斷。如果把 2Y 代入，會變成$\frac{2Y}{2Y}$=1，1 是最小的奇數，所以 2Y 是最大的 L，如果代入更大的 L，$\frac{2Y}{L}$就會小於 1，所以 Y 的解中，L 最大的是 2Y。

十四、Y 為奇數時，Y 可拆成連續 L 個整數和中，最小的 L 是 2。

證明：Y 是奇數時，Y=$2^{a_0} \times P_1{}^{a_1} \times P_2{}^{a_2} \cdots \times P_m{}^{a_m}$中，$a_0 = 0$。

（1）第一個狀況是，L 是奇數。根據〔伍、一〕L 是 Y 的 1 以外的奇數因數。

但是 L≠1，所以 L 的最小奇數是 Y 的最小奇質數。這個時候最小 L≥3

（2）第二個狀況，L 是偶數。根據〔伍、五〕L 是2^{a_0+1}*Y 的奇數因數。

Y 的奇數因數最小是 1。且$2^{a_0+1} \geq 2$

所以 L 的最小偶數是 2。

由（1）、（2），得知最小的 L 是 2。

十五、Y 為偶數時，Y 可拆成連續 L 個整數和中，最小的 L 是 Y 的最小奇質數和 2*2^{a_0}中比較小的數。

證明：Y 是偶數時，Y=$2^{a_0} \times P_1{}^{a_1} \times P_2{}^{a_2} \cdots \times P_m{}^{a_m}$中，$a_0 \geq 1$。

（1）第一個狀況是，L 是奇數。根據〔伍、一〕L 是 Y 的 1 以外的奇數因數。

但是 L≠1，所以 L 的最小奇數是 Y 的最小奇質數。

（2）第二個狀況，L 是偶數。根據〔伍、五〕L 是2^{a_0+1}*Y 的奇數因數。

Y 的奇數因數最小是 1。且$2^{a_0+1} \geq 1$

所以 L 的最小偶數是2^{a_0+1}=2*2^{a_0}。

由（1）、（2），得知最小的 L 是 Y 的最小奇質數和 2*2^{a_0}中比較小的數。

陸、結論

一、當 Y 可拆成連續奇數 L 個整數（Z）的和時，L 會是 Y 的奇數因數。

二、當 L 是 Y 的奇數因數時，Y 可拆成連續奇數 L 個整數（Z）的和。

三、當 Y 可拆成連續偶數 L 個整數（Z）的和時，2Y/L 會是奇數。

四、當 L 是偶數且 2Y/L 是奇數時，Y 可拆成連續偶數 L 個整數（Z）的和。

五、當 Y 質因數分解成為 Y=$2^{a_0}\times P_1^{a_1}\times P_2^{a_2}\times\ldots\times P_m^{a_m}=2^{a_0}$ ×Y’ ， Y 可拆成 L 個連續整數（Z）和的解中，L 有

（(a_1+1）*（a_2+1）*...*（a_m+1)）-1 個奇數解、

（(a_1+1）*（a_2+1）*...*（a_m+1)）個偶數解，

共有 2*（(a_1+1）*（a_2+1）*...*（a_m+1)）-1 個解。

六、Y 的 L 解中，奇數部分和偶數部分可以各取出適當的 Q、R 使得 Q*R=2Y。

七、在 Y 拆成連續 L 個整數（Z）的和中，當 L< $\sqrt{2Y}$時，這 L 個整數是 Y 拆成 L 個自然數和的解。

八、在 Y 可拆成連續奇數 L 個整數（Z）的和時，$\sqrt{2Y}$不會是L個整數中的任一個奇數。

九、在 Y 可拆成連續奇數 L 個自然數（N）的和時，在 Y 的奇數因數中符合 L< $\sqrt{2Y}$就是奇數個連續自然數和的個數。

所有連續自然數和的 L 個數是 2*（Y 的奇數因數個數）-1。

十、當 Y＝2^m（2 的次方）時，沒有自然數的解，只有一個負整數的解。不能拆成連續自然數的和。

十一、給定一個 Y，寫出算出所有 Z 解的步驟為：

（一）先將 Y 質因數分解，得到 Y=$2^{a_0}\times P_1{}^{a_1}\times P_2{}^{a_2}\cdots\times P_m{}^{a_m}=2^{a_0}\times Y'$。

（二）找出 Y 的所有奇數因數，就是Y'的所有因數，並由小到大排列，稱為 L’ 。

（三）L’ 就是 Y 可拆成連續奇數 L 個自然數和。

（四）$\frac{Y}{L}$=整數，算出正中間數，往前後依序減 1 或加 1，那就是 Y 的連續整數和的解。

（五）2^{a_0+1}*L’ 就是 Y 可拆成連續偶數 L 個整數和。

（六）用$\frac{Y}{L}$=整數+0.5，算出正中間值也就是平均數，往前算先平均數減 0.5 後再依序減 1；往後算，先平均數加 0.5 後再依序加 1，那就是 Y 的連續整數和的解。

十二、給定一個 Y，算出所有連續自然數和的解的步驟為：

（一）將 Y 質因數分解，得到 Y=$2^{a_0} \times P_1{}^{a_1} \times P_2{}^{a_2} \cdots \times P_m{}^{a_m} = 2^{a_0} \times Y'$。

（二）出 Y 的所有奇數因數，就是Y'的所有因數，稱為 L’。

（三）L’ <$\sqrt{2Y}$時，就是 Y 可拆成連續奇數 L’ 個整數和。

（四）用$\frac{Y}{L}$=整數，算出中間數，往前後依序減 1 和加 1，那就是 Y 的連續整數和的解。

（五）接著算 Y 的偶數 L。 當 L’ > $\sqrt{2Y}$時，Y 會有$\frac{2Y}{L'}$=L 個連續整數和的解。

（六）$\frac{Y}{L}$=整數+0.5，算出中間數，往前後依序減 1 和加 1，那就是 Y 的連續自然數和的解。

十三、Y 可拆成連續 L 個整數和中， L 的最大值是 2Y

十四、Y 為奇數時，Y 可拆成連續 L 個整數和中，最小的 L 是 2。

十五、Y 為偶數時，Y 可拆成連續 L 個整數和中，最小的 L 是 Y 的最小奇質數和 2*2^{a_0}中較小的數。

柒、參考文獻資料

林映汝、張舒涵、陳思媛、陳萱鴻、陳玉玫，(2017)。**天作之「和」-整數和、平方和及立方和的探討**， 彰化縣第五十七屆科學展覽會國中組數學科。取自 https://science.hsjh.chc.edu.tw/upload_works/106/1b515dc5b50bffde91f4fe9b4f2cf2b9.pdf

李銘城，(2005)。**正整數分解成正等差數列和之研究。**龍華科技大學學報。取自 https://www.lhu.edu.tw/m/Admission/publish/publish/18/09 李銘城-正整數分解成正等差數列和之研究.pdf

周筠淇、盧俐君、葉俊佑（2013)。**『連續正整數和』與『連續正奇數和』之探索,** 取自：https：//schooL.cY.edu.tw/upLoads/1580718072778H17hYkY.pdf

陳書玟、黃鈺媚、方培蓉、許家哲、蔣承軒，(**2011**)。**連續整數和的難題。** 中華民國第 51 屆中小學科學展覽會國小組 數學科。取自：https://www.ntsec.edu.tw/Science-Content.aspx?a=6821&fld=&key=&isd=1&icop=10&p=1&sid=9172