

Rapport de Stage

Débat basé sur la théorie de la décision*

Auteur :
Tony SEGUIN

Encadrants :
Olivier CAILLOUX
Meltem OZTÜRK



Version : 29 mai 2018

Résumé

to do

Table des matières

1	Introduction	2
2	Notations et définitions	2
2.1	Connaissances	2
2.2	Argument et relation	3
3	État de l’art	4
3.1	Deux grandes familles de système de recommandation	4
3.2	Argumentation dans des systèmes de recommandation	8
3.3	Objectifs des argumentations des systèmes de recommandation	10
3.4	Élargissement de l’état de l’art : choix des approches pour le débat	11
3.4.1	Critère de sélection	11
3.4.2	Recherche	12
3.4.3	Présentations des approches sélectionnées	14
4	Les 2 Approches retenues	16
4.1	Approche Labreuche	16
4.2	Approche Nunes	16
5	Travaux à venir	16

1 Introduction

Une forme de problème d'aide à la décision consiste à formaliser et déterminer les préférences d'un utilisateur dans le but de fournir une alternative recommandable par rapport à un ensemble d'alternative possible. En fonction du contexte du problème fournir juste une recommandation à l'aide de modèle de décision n'est pas forcément suffisant, les décideurs peuvent avoir besoin d'explication sur comment la recommandation a été faite et pourquoi elle est la meilleure pour eux. En effet, l'argumentation, la justification, d'une recommandation est une part importante de la décision. Construire une explication compréhensible et convaincante est nécessaire pour un décideur. Dans le cas des systèmes de recommandation (SR) en ligne, il a été montré que les explications augmentent l'acceptabilité d'une alternative recommandée [Pu and Chen, 2007]. Dans ce contexte ci, une explication doit être simple et complète pour installer une confiance au décideur qu'une alternative recommandée est celle qui lui convient le mieux.

La théorie de la décision propose des modèles capturant les préférences du décideur en vue de l'aider à éclaircir son problème de décision. En se basant sur l'article de [Cailloux and Meinard, 2018]) on considère un problème de décision comme un débat, où deux *SR* argumenteraient chacun leurs tour à propos de la décision sur le problème. Cette argumentation entre les systèmes permettrait de générer un graphe d'arguments et en fonction de la préférence du décideur après avoir pris en compte tous ces arguments [Dung, 1995], la décision sera prise. Nous nous plaçons dans le cadre des systèmes d'Aide à la Décision Multi-Critère (ADMC). Le premier objectif du stage est donc de trouver des *SR* qui génèrent une *argumentation* sur la base de modèle de préférences. Une recherche sera entreprise, avec comme point de départ la *review* de [Nunes and Jannach, 2017]. Après avoir mis en évidence un certain nombre d'approches générant des arguments, nous devrons en sélectionner deux qui pourront être adaptée avec notre système afin de générer des arguments et des contre-arguments basés sur leurs modèle d'argumentation. Le but est de faire argumenter ces deux approches entre elles pour générer une explication. Ce qui implique la nécessité d'établir un *langage commun* entre les *SR* et compréhensible pour le décideur. L'approche par le biais d'un débat entre deux *SR* nous semble être un bon compromis entre une explication simple et complète. En effet quoi de mieux qu'un débat quasi naturel pour convaincre une personne que ce que l'on énonce est vrai ou non? C'est pour cela que notre approche se penche sur cette problématique d'argumentation pour la recommandation avec cette nuance qu'est le débat.

Ce rapport est découpé (actuellement) en 2 parties. Dans un premier temps, Section 3, un état de l'art sur les systèmes de recommandation et d'aide à la décision, basé sur la *review* de [Nunes and Jannach, 2017], est effectué afin d'avoir une idée assez large des approches que l'on pourrait utiliser dans le cadre du projet. Une recherche d'approche compatible a été effectuée sur la base de critère de sélection que nous avons défini, permettant de lister des approches compatibles. Et finalement, Section 4, nous présentons en détail les deux approches sélectionnées pour notre débat.

2 Notations et définitions

Avant d'entrer dans les détails de notre approche, il est nécessaire de poser les définitions et les notations que nous allons utiliser tout au long du projet. Nous établissons d'abord les connaissances pour les systèmes de recommandation et ensuite les arguments et les relations entre eux pour le jugement de la décision lors d'un débat.

2.1 Connaissances

Nous prenons comme notations des connaissances celles tirées de [Labreuche, 2011] :

$X = X_1 \times \dots \times X_n$: l'ensemble des alternatives décrit sur n critères, $x \in X$;
 N : l'ensemble des critères ;
 X_i : l'échelle des performances des alternatives sur le critère i ;
 x_i : la performance de l'alternative x sur le critère i ;
 $w = (w_1, \dots, w_n)$: le vecteur de poids, $\sum_{i=1}^n w_i = 1$;
 w_i : le poids du critère i , $w_i \in [0, 1]$.

En combinant les poids des critères et les performances des alternatives, notre approche s'appuie sur les modèles de décision de type *Multi-Attribute Value Theory* (MAVT) [Keeney and Raiffa, 1993] afin d'attribuer un score global à chaque alternative permettant ainsi de déterminer quelle alternative est la meilleur en fonction des préférences du décideur. En général, la fonction de décision associé au modèle est de la forme, pour $x \in X$, $v(x) = \sum_{i=1}^n w_i \times v_i(x_i)$, où $v_i(x_i)$ représente l'utilité de x sur le critère i . On note $x_i \succsim_i y_i \Leftrightarrow v_i(x_i) \geq v_i(y_i)$ et $v(x) \rightarrow [0, 1]$. Cette fonction v quantifie la relation de préférence \succsim , i.e $\forall x, y \in X, x \succsim y \Leftrightarrow v(x) \geq v(y)$.

La sélection d'une alternative par rapport aux autres s'établit par la relation binaire \succsim_i sur chaque ensemble X_i , représentant ainsi les préférences du décideur sur les éléments de X_i . On note \succ_i et \sim_i comme les parties asymétrique et symétrique de \succsim_i , et nous notons :

$x_i \succsim_i y_i$: x est au moins aussi bon que y sur le critère i .

Nous disons qu'une alternative x domine une alternative y si et seulement si, $\forall i, x_i \succ y_i$. Nous disons qu'une alternative est *dominante*, si et seulement si, aucune autre alternative ne la domine.

2.2 Argument et relation

Les relations entre argument suit la notation de [Cailloux and Meinard, 2018] suivante :

S : l'ensemble des arguments ;
 $S^+(x, y)$: ensemble des arguments en faveur de x par rapport à y ;
 $S^-(x, y)$: ensemble des contre-arguments ;
 $S^=(x, y)$: ensemble des arguments neutres ;

Ces arguments permettent de mettre en évidence les phases de compromis pour une alternative qui n'est pas dominante. Les trois derniers ensembles d'arguments sont inclus dans l'ensemble S .

T : ensemble des proposition possible ;
 P : ensemble des perspectives.

Dans notre cas, les propositions possibles sont $\{\forall x, y \in X, t_{x \geq y}\}$, représentant ainsi chaque paire possible de comparaison d'une alternative sur une autre. Une perspective $p \in P$ représente le point de vue de décideur, qui peut changer au cours du débat s'il a été convaincu d'un argument nouveau. C'est à dire qu'un argument s peut être valide selon une perspective p mais non valide sur une perspective p' . Les ensembles P , T et S déterminent la position argumentative de l'utilisateur et est représentée via les relations suivantes :

$\rightsquigarrow \subseteq S \times T$: on note $s \rightsquigarrow t$, l'argument s *soutient* la proposition t ;

$\triangleright_{\exists} \subseteq S \times Arg$: on note $s_2 \triangleright_{\exists} s_1$, l'argument s_2 *attaque* l'argument s_1 , s'il l'attaque dans au moins une perspective, s_1 devient un argument invalide ;

$\ntriangleright_{\exists} \subseteq S \times Arg$: on note $s_2 \ntriangleright_{\exists} s_1$, l'argument s_2 n'attaque pas l'argument s_1 , s_1 reste un argument valide.

Un argument $s \in A$ peut soutenir plusieurs propositions comme aucune. On admet $\neg(a_2 \triangleright_{\exists} a_1) \Rightarrow a_2 \ntriangleright_{\exists} a_1$. Si l'utilisateur change d'avis, les relations $(\triangleright_{\exists}, \ntriangleright_{\exists})$ suffisent à capturer ce changement.

Définition 1 Une situation de décision est définie par le tuple $(T, S, \rightsquigarrow, \triangleright_{\exists}, \ntriangleright_{\exists})$.

\triangleright_{\forall} : défini comme $a_2 \triangleright_{\forall} a_1 \Leftrightarrow \neg(a_2 \ntriangleright_{\exists} a_1)$;

$\ntriangleright_{\forall}$: défini comme $a_2 \ntriangleright_{\forall} a_1 \Leftrightarrow \neg(a_2 \triangleright_{\exists} a_1)$.

La relation $a' \triangleright_{\forall} a$ signifie que l'argument a' attaque l'argument a sur toutes les perspectives. En revanche la relation $a' \ntriangleright_{\forall} a$ signifie que a' n'attaque jamais a .

Définition 2 Étant donné une situation de décision $(T, S, \rightsquigarrow, \triangleright_{\exists}, \ntriangleright_{\exists})$, un argument $s \in S$ est décisif, si et seulement si, $\forall s' \in S : s' \ntriangleright_{\forall} s$.

Définition 3 Étant donné une situation de décision $(T, S, \rightsquigarrow, \triangleright_{\exists}, \ntriangleright_{\exists})$, une proposition t est :

- acceptable si et seulement si, $\exists s \in S \mid ss \rightsquigarrow t, \forall s' : s' \ntriangleright_{\forall} s$;
- rejetable si et seulement si, $\forall s \in S \mid s \rightsquigarrow t, \exists s_c \mid s_c \triangleright_{\forall} s$ et $\forall s_{cc} : s_{cc} \ntriangleright_{\forall} s_c$.

Définition 4 Une situation de décision $(T, S, \rightsquigarrow, \triangleright_{\exists}, \ntriangleright_{\exists})$ est claire, si et seulement si, chaque proposition dans T est acceptable ou rejetable.

Définition 5 Le jugement délibéré du décideur correspondant à la situation de décision $(T, S, \rightsquigarrow, \triangleright_{\exists}, \ntriangleright_{\exists})$ est :

$$T_{decideur} = \{ t \in T \mid t \text{ est acceptable} \}.$$

3 État de l'art

Dans cette section nous allons décrire ce qui à été entrepris dans le domaine des systèmes d'aide à la décision et de l'argumentation d'après la review de [Nunes and Jannach, 2017]. Les graphiques et données dans cette section ont pour source cette article uniquement. Nous établissons d'abord une vision large du domaine, sur les quatre décennies précédente, ensuite nous discuterons autour des caractéristiques d'une explication en général, les méthodes de génération, le contenu et la manière dont elle est fourni à l'utilisateur et nous finirons par les objectifs des systèmes de recommandation.

3.1 Deux grandes familles de système de recommandation

Dans la review, les articles étudiés sont classés en quatre catégories : (i) *Technique*, pour les articles générant une nouvelle forme d'explication (ii) *Tool*, les articles décrivant un outil

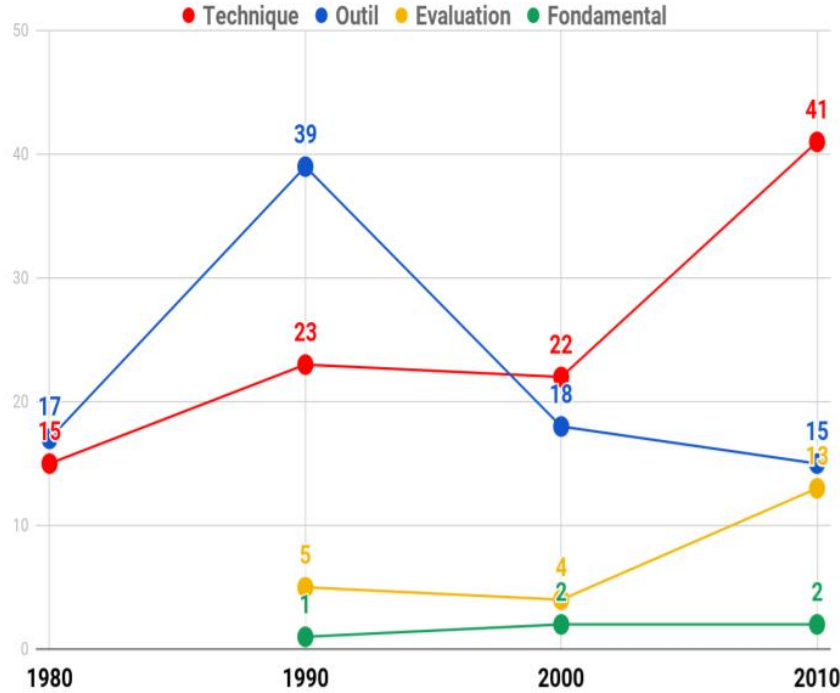


FIGURE 1: Nombre d'article par catégorie par décennie. La dernière décennie correspond à 2010 - 12 Août 2016.

incluant un processus d'explication (iii) *Evaluation*, les articles évaluant ou comparant des formes d'explication et (iv) *Foundational*, les articles discutant autour des aspect des explications.

D'après la FIGURE 1, le nombre de publications sur le sujet par décennie augmente constamment. Les articles d'outils étaient plus communs dans le passé, selon les auteurs ce genre d'article était peut être d'avantage considéré comme une contribution dans la recherche durant période. En revanche il y une augmentation du nombre d'articles qui introduisent des nouvelles techniques d'explication tout au long des décennies. Les articles d'évaluations d'explications sont plus nombreux ces dernières années, d'après les auteurs cela serait une amélioration de la maturité par rapport a la communauté en terme de méthodologie de recherche. Et nous remarquons très peu d'articles fondamentaux sur le sujet.

Entre les années 90 et 2000 une stagnation du nombre de publication est remarqué dû au rôle déclinant des systèmes basés sur les connaissances (principalement ceux basés sur des règles) et à l'engouement pour le *Machine Learning* (ML) dans le domaine des systèmes de recommandation, durant les années 2000, qui ne cherchait qu'à déterminer les bonnes recommandations au détriment de fournir une explication. Cela s'explique car la review ne s'intéresse qu'aux articles où la notion d'explication est précisée.

Cet remarque nous montre les principales catégories dans les systèmes de recommandation, à savoir :

Les systèmes basés sur le Machine Learning qui sont essentiellement appliqués au commerce en ligne (ex : Amazon,Google) et aux multi-média (ex : Netflix,Steam,Facebook). Ils se décomposant en 3 sous-catégories :

Basé sur le *contenu* («Content-based»)

Ces approches sont basées sur le contenu d'un profile d'un décideur, construit à l'aide des données sur celui-ci, soit par interaction avec le décideur soit par apprentissage des informations sur ses dernières actions (ex : ses derniers achats en ligne). Le mécanisme

de cette approche est de recommander une alternative *similaire* à une des alternatives contenu dans son profil, c'est à dire que le système cherche à trouver une paire d'alternatives (a, b) où a est dans le profil de l'utilisateur et b dans un voisinage proche. Cela se fait à l'aide d'une *fonction de similarité*, il en existe plusieurs, par exemple *Normalised Google Distance* qui détermine la similarité entre des termes textuel en utilisant leurs co-occurrence sur des sites internet :

$$d(a, b) = \frac{\max\{\log f(a), \log f(b)\} - \log f(a, b)}{\log M - \min\{\log f(a), \log f(b)\}} \quad (1)$$

Où M est le nombre total de page Google cherchées, $f(a)$ et $f(b)$ sont respectivement le nombre d'occurrence de a et de b , et $f(a, b)$ est le nombre de co-occurrence de a et b .

Filtrage Collaboratif («Collaborative filtering»)

On note D l'ensemble des décideurs, $V_d \subseteq X$ pour l'ensemble des alternatives que le décideur d a déjà noté et R l'ensemble des notes r_{dx} des décideurs $d \in D$ sur les alternatives $x \in V_d$. Dans la base de donnée de Netflix par exemple, les notes sont des entiers compris entre 1 et 5 pour signifier respectivement avoir aimé ou détesté le film.

Le but des approches par filtrage collaboratif est d'être capable de *prédire* la note p_{dx} qu'un décideur d donnera à une alternative x . Le décideur d est supposé actif, c'est à dire qu'il a déjà noté un certain nombre d'alternative, donc $V_d \neq \emptyset$, et que l'alternative x prédit n'est pas encore connu du décideur, $x \notin V_d$.

Cette approche à plusieurs méthode de prédiction possible, l'une des plus utilisé est celle basée sur les profils des décideurs à l'aide d'une fonction de *similarité* $\text{sim}(d, d')$ déterminant la similarité entre deux décideurs d et d' . Ceci permet de créer un ensemble de taille K de voisins de d , noté T_d , qui sont les K décideurs qui maximise leurs similarité sur le décideur d . une prédiction possible pour la note du décideur d sur l'alternative x est d'utilisé une somme pondérée des notes des plus proches voisins $d' \in T_d$ qui ont déjà noté l'alternative x :

$$p_{dx} = \frac{\sum_{\{d' \in T_d | x \in V_{d'}\}} \text{sim}(d, d') \times r_{d'x}}{\sum_{\{d' \in T_d | x \in V_{d'}\}} |\text{sim}(d, d')|} \quad (2)$$

Hybride («Hybrid»)

Ces approches combinent au moins deux techniques de recommandation dans le but d'obtenir de meilleur performance avec moins de retour. La plus commune est approche de filtrage collaboratif combinée avec d'autres technique dans le but d'éviter le problème de démarrage à froid. Ce problème se rencontre lorsque le système n'a pas assez d'information sur le profil du décideur. Un exemple d'approche *hybride* dans [Balabanović and Shoham, 1997] est la combinaison avec une approche basé sur le contenu qui force les alternatives à être, en même temps, proche du profil du décideur, et noté par les décideurs du voisinage du décideur.

Les systèmes basés sur les connaissances («Knowledge-based») qui utilisent des connaissances explicites sur l'ensemble des alternatives X et les préférences du décideur, par exemple l'importance des critères ou des contraintes fixées. Ces approches s'appliquent sur des problèmes de décision, par exemple un décideur possède une liste de choix et il ne sais pas quel choix prendre. On dénombre un certain nombre de sous-catégories :

Basé sur des règles («Rule-based»)

Ces approches s'appuient sur les connaissances d'un expert d'un domaine, ses connaissances sont exprimées sous formes de règles. En appliquant les données d'entrée du problème, des règles seront activées et chaque règle fourni une argumentation. Une règle est de la forme if-then, c'est à dire qu'un ou plusieurs prérequis sont nécessaires pour activer la règle pour donner un argument. Par exemple dans [Wick et Sagle \(1989\)](#) une règle est :

IF high water in the reservoir

THEN cracks in the interface

BECAUSE high water in the reservoir causes cracks in the interface.

Où la clause **Because** est la justification de la recommandation de la clause **Then** par rapport à la condition **IF**.

Basé sur la logique («Logic-based»)

Ce genre d'approche est principalement liée à la *Logique Floue (Fuzzy Logic)* introduit par [\[Zadeh, 1965\]](#). Elle est basé sur des *degrés de vérité* plutôt que sur la logique booléenne «vrai ou faux» (0 ou 1).

La *Logique Floue* inclue 0 et 1 comme des cas extrêmes de vérité mais inclue une variété de cas intermédiaire de vérité entre eux. Par exemple la vitesse normale est de 90km/h sur les routes nationales françaises. La vitesse est considérée élevée au-dessus de 100km/h et réglementaire en dessous de 80km/h. Si nous nous plaçons dans le contexte où on veut savoir si un véhicule à une vitesse élevée, on obtient qu'un véhicule n'a pas de vitesse élevé en dessous de 80km/h (0), qu'il à une vitesse élevée à partir de 100km/h (1), mais s'il est par exemple à 90km/h on dit que la véhicule à une vitesse élevée à 50% (0.5).

Basé sur un raisonnement par cas («Case-based reasoning»)

Le raisonnement par cas, [\[Riesbeck and Schank, 1989\]](#), est le processus de résolution de nouveaux problèmes basés sur les solutions d'anciens problèmes similaires. Autrement dit, ces approches s'appuient sur d'anciennes recommandations possédants un contexte (préférence du décideur) *similaire* au nouveau problème. Par exemple en médecine, si un patient p possède les mêmes symptômes qu'un ancien patient p' , le médecin va prescrire le traitement x qu'il avait prescrit au patient p' . Dans [\[Mcsherry, 2005\]](#), la fonction de similarité entre deux cas $c \in C$, C l'ensemble des cas, et q sur un sous ensemble de critère N_q est de la forme :

$$sim(c, q) = \sum_{n \in N_q} w_n sim_n(c, q) \quad (3)$$

où $sim_n(c, q)$ est la similarité local entre c et q sur le critère n . Cette fonction permet d'établir le voisinage de q et ainsi de déterminer les cas similaire à q .

Prise de décision multi-critère («Multi Criteria Decision Making»)

Selon [\[Triantaphyllou, 2000\]](#) *Multi-criteria decision making (MCDM)* et *Multi-attribute decision making (MADM)* représentent la même catégorie, se regroupant sous la bannière *MCDM*. Les approches se basant sur des modèle MCDM, s'appuient essentiellement sur deux informations : l'ensemble des alternatives X décrivent sur un ensemble de critère N et le vecteur w représentant l'importance de chaque critère. Il existe plusieurs méthode pour déterminer l'alternative qui sera la plus à même de satisfaire le décideur, comme analytic

hierarchy process (AHP) [Saaty, 2008] ou weighted product model (WPM), mais la plus connue étant la méthode de somme pondérée (*Weighed Sum Method*) :

$$X^* = \max_{x \in X} \sum_{i=1}^n w_i \times v_i x_i. \quad (4)$$

où X^* est le score de la meilleur alternative et $n = |N|$.

3.2 Argumentation dans des systèmes de recommandation

Les systèmes d'aide à la décision étaient plus focalisés sur le fait de déterminer la meilleur recommandation plutôt que l'apport d'explications. C'est à partir de l'engouement pour le *ML*, voir Section 3.3, et les débuts du domaine des *Multi-Criteria Decision Analyses* (MCDA) que l'argumentation à pris plus de considération.

Méthode de génération

Les articles cités dans la review donnent peu de détails a propos du processus de génération d'explication. Ceci s'explique car le processus est étroitement lié avec la méthode d'inférence de décision et les données utilisées pour déterminer la meilleur alternative. Si la méthode d'inférence est basée sur des règles, l'explication fourni à l'utilisateur consistera en un ensemble de représentation de langage naturel des règles qui ont été activées.

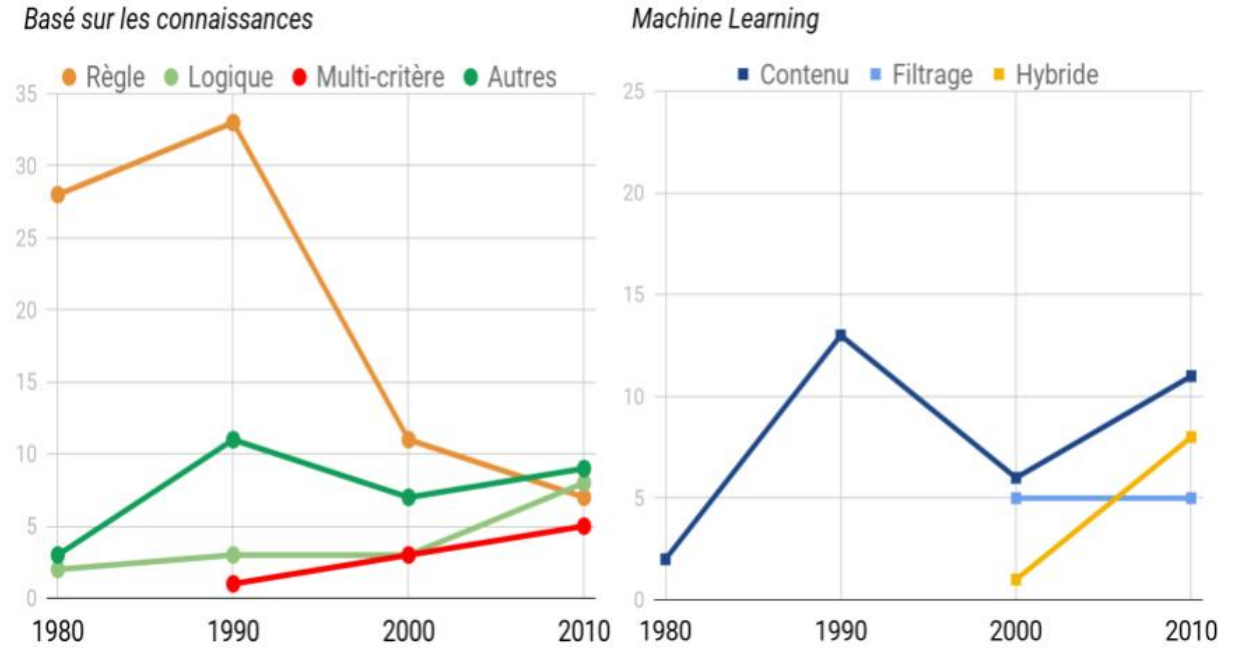


FIGURE 2: Occurrence des types de méthodes utilisées par décennie

Avec l'engouement historique des explications des systèmes expert à base de règle, il est normal que la majorité des études adoptent une approche basé sur les connaissances pour la décision par inférence et par extension pour la génération des explications. On remarque à nouveau la déclinaison des systèmes à base de règle au fil du temps et un engouement croissant pour les approches basées sur le *ML*. Les explications par les systèmes de filtrage collaboratif sont principalement étudiées depuis le début des années 2000, dû à la forte croissance du nombre et des formes de données, ces approches sont plus adaptées.

Contenu

Une explication doit fournir une information dépendant de divers facteur, incluant les expertise ou les intérêts de l'utilisateur voir leur situation contextuelle courante.

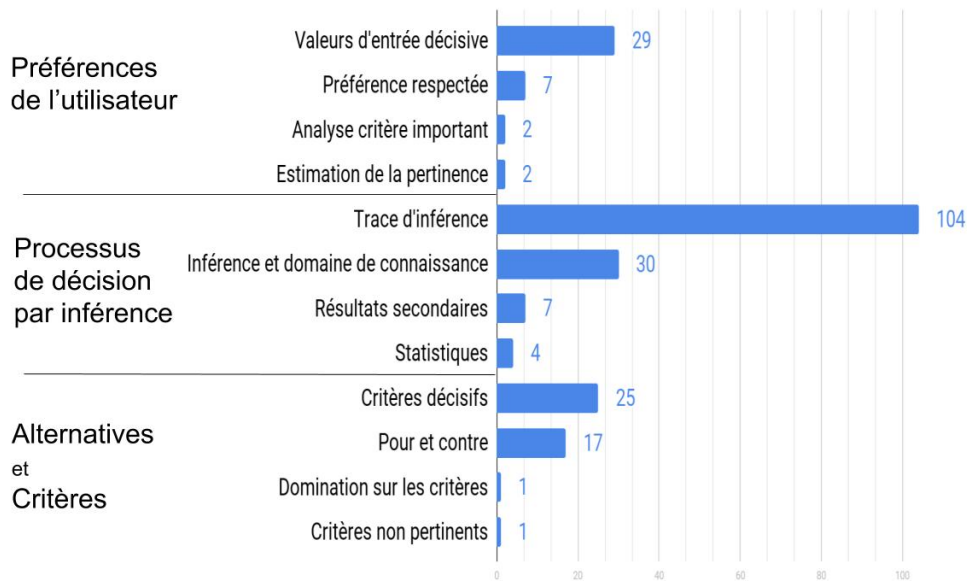


FIGURE 3: Occurrence du type de contenu utilisé dans une argumentation. Une explication d'un article peut fournir plusieurs type de contenu.

On distingue trois grandes parties de contenu :

Préférence de l'utilisateur : Une manière pour expliquer la suggestion faite par le système est d'utiliser les entrées fourni par l'utilisateur comme explication, c'est à dire fournir : (1) quelles entrées sont les plus décisives par rapport à la recommandation. (2) quelles contraintes sont respectées et quelles ne le sont pas (3) dans quelle mesure l'alternative recommandée est appropriée en fonction des préférences (4). Ce qu'on voit dans la Figure 3, c'est que ce sont les entrées décisives du décideur qui sont le plus souvent utilisé dans cette partie, ainsi que le respect de ses préférences.

Processus de décision par inférence : Fournir une information a propos du processus itératif d'un problème de décision spécifique (une trace) est l'approche la plus commune. Ceci s'explique par rapport aux systèmes à base de règles qui fournissent la liste des règles activées. Quelques explications fournissent seulement la logique général du processus d'inférence interne du système, i.e fonctionnement interne de l'algorithme. D'autres fournissent la confiance du système sur sa suggestion ou taux de succès sur les situations de prise de décision passées.

Alternative et critères : Les approches *MCDM* en revanche expliquent la suggestion du systèmes en analysant les caractéristiques des alternatives (chaque critère est étudié pour chaque proposition possible). L'argumentation derrière consiste en une liste de caractéristiques, le compromis (le pour et le contre), pour chaque alternative. D'autre réfèrent les relations de dominance basées sur les caractéristiques, mais la majorité des explications montrent quels critères sont décisifs durant le processus de recommandation.

Présentation

Majoritairement, les explications sont présentées sous forme de langage naturel, comprenant celles basées sur des canevas, ou «texte à trou», qui sont par exemple instanciées avec des listes d’arguments avant d’être soumis à l’utilisateur. Un exemple de canevas serait *Il y a aucune raison de choisir <alternative 1> , alors que <alternative 2> est meilleur sur tous les critères.*, ceci résumant la dominance de l’alternative 2 sur l’alternative 1. Il existe aussi la présence assez forte d’utilisation de forme de visualisation (graphe, arbre, etc), pour imaginer et ainsi améliorer l’argumentation fournie au décideur [Grando et al., 2011, Narayanan and McGuinness, 2008].

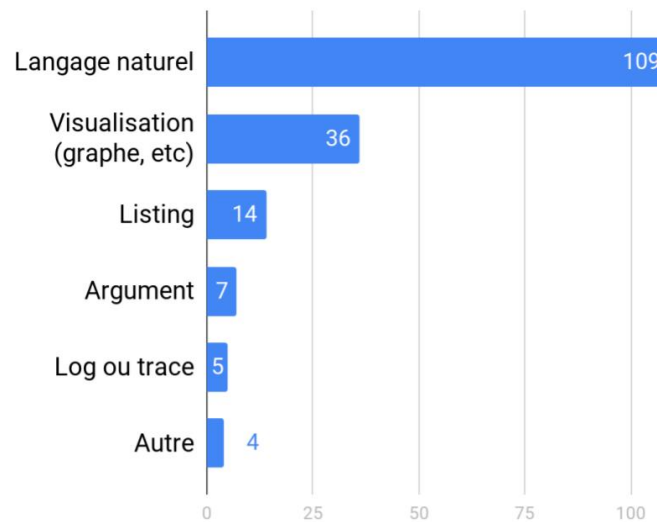


FIGURE 4: Occurrence des manières de présenter une explication

D’une tout autre manière, un certain nombre d’approche donne un listing de différentes items pour l’argumentation comme par exemple une liste des contraintes satisfaites (Deep et al, 1988) ou une liste de relation de préférence sur certain critère entre deux alternatives [Labreuche et al., 2015]. Les 7 articles, catégorisé dans Argument sont des approches qui utilisent une structure des arguments de [Toulmin, 2003].

3.3 Objectifs des argumentations des systèmes de recommandation

Il est nécessaire de relever l’importance du but d’une explication Tintarev et Masthoff]. D’après les auteurs il faut différencier les but annoncés des vrais buts. La plupart des études de la review ne précisent pas forcément les buts des explications fournies. La Figure 5 se base seulement sur les buts annoncés dans ces articles.

Le but recherché le plus commun est la *transparence*, i.e expliquer comment le système est parvenu à sa suggestion. Les explications fournis dans ces études se focalisent sur l’exposition du processus d’inférence dans le but de rendre la décision recommandée compréhensible. Il existe d’après eux des liens entre les buts, par exemple, la transparence impliquera la *confiance* du décideur envers le système de recommandation, que la confiance est un effet indirect attendu de la transparence. Le second plus fréquent des buts des explications est l’*efficacité*, i.e d’aider les utilisateurs à évaluer si l’alternative recommandée est bien adéquate pour eux. La force de *persuasion*, i.e la capacité à un système à pousser l’utilisateur dans une certaine direction (en conflit avec l’efficacité, [Chen and Wang, 2014], est dans une nombre important d’étude de la review, principalement les articles de *ML*.

Ces dernières années, la *satisfaction* de l’utilisateur, la *scrutabilité* (la possibilité de dire au

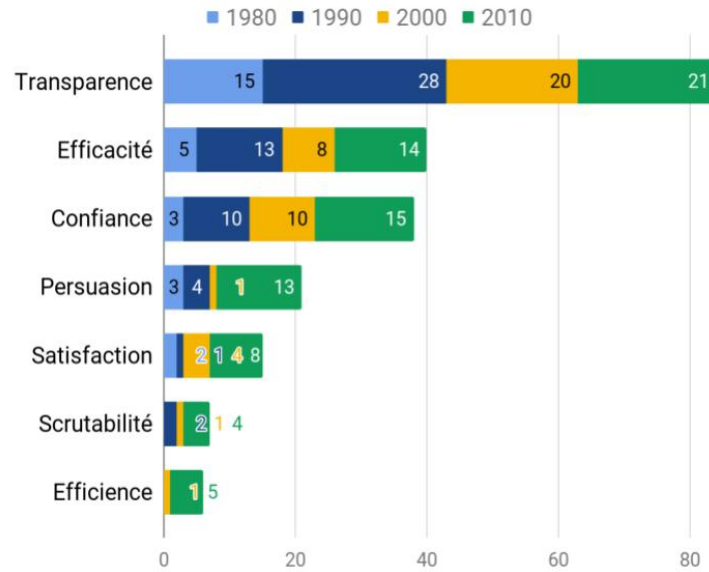


FIGURE 5: Nombre d'articles Technique et Outils par but

système que c'est faux) et le fait d'aider l'utilisateur à faire un choix *plus rapide* sont au goût du jour. En effet, réduire la charge cognitive et essayer d'améliorer la satisfaction des décideurs par un système est l'aspect essentiel des applications *e-commerce*, qui est un sujet très recherché ces dernières années. Dans ce contexte, le potentiel persuasif naturel des explications attire plus d'intérêt dans la recherche ces dernières années.

3.4 Élargissement de l'état de l'art : choix des approches pour le débat

Nous allons maintenant discuter des approches que nous avons sélectionnées. Tout d'abord nous allons préciser quels critères de sélection nous établissons pour les approches compatibles avec notre projet. nous allons exposer notre recherche et nous finissons par un léger résumé de chacune des articles retenues.

3.4.1 Critère de sélection

Dans le cadre du projet, les articles doivent être cohérent entre eux, i.e ils adoptent, dans les grandes lignes, des modèles de recommandation et donc d'argumentation compatibles entre eux. Il est donc nécessaire que les articles que nous allons sélectionner, pour la recommandation basée sur un débat, soient spécifiques à aucun domaine et par conséquent non contextualisés. Ce qui est notre premier critère de sélection.

Le second critère est sur quelles informations nos approches vont s'appuyer pour argumenter ; comme vu Section 3, les approches basées sur les connaissances permettent une argumentation riche et détaillée. En adoptant un Modèle d'Aide à la Décision Multi-Critère (MADMC), le compromis, les critères décisifs, pertinents ou non, sont des types d'argument qui rentrent dans notre schéma de débat. C'est pourquoi nous nous pencherons seulement sur les approches basées sur les connaissances et utilisant un MADMC.

Et comme dernier critère, seules les approches fournissant une argumentation en faveur d'une seule alternative seront retenues. Ces argumentations peuvent être de type : «A meilleur que B» ou «A meilleur que tout les autres».

3.4.2 Recherche

La recherche des approches à été faite en deux parties, dans un premier temps une sélection des articles étudiés dans une review [Nunes and Jannach, 2017] à été réalisée et dans un second temps une recherche pour élargir notre vision d'ensemble et obtenir un nombre assez conséquent d'approches à été effectuée.

Review

Dans la review, les articles étudiés sont classé en quatre catégories : (i) *Technique*, pour les articles apportant une nouvelle forme d'explication (ii) *Tool*, les articles décrivant un outil incluant une explication (iii) *Evaluation*, les articles évaluant ou comparant des approches et (iv) *Foundational*, les articles discutant autour des aspect des explications. Dans un premier temps, seuls les articles *Technique* sont conservé, car ce sont des articles avec des approches non contextualisée (contrairement aux Tools) pour la majorité, soit 101 articles. Ensuite nous avons conservé seulement les articles étiquetés par les auteurs comme étant des approches basée sur les connaissances, plus précisément celles utilisant un MADMC, ce qui nous donne 8 articles. Les résumés et conclusions ont été inspectés, ainsi qu'un lecture transversale de l'ensemble des articles nous à permis de réduire à 5 articles, en effet un article [Bielza et al., 2000] est basé sur un modèle de type Multi Attribute Utility Theory (MAUT) et le second article rejeté est [Bohanec et al., 2000] car contextualisé dans le domaine de la médecine. Les articles conservés sont listés en Table 1.

Table 1 Articles retenus de la review

Auteurs	Titres
Klein et Shortliffe	A framework for explaining decision-theoretic advice
Carenini et Moore	Generating and evaluating evaluative arguments
Labreuche	A general framework for explaining the results of a multi-attribute preference model
Nunes et al	Pattern-based Explanation for Automated Decisions
Belahcene et al	Explaining robust additive utility models by sequences of preference swaps

Élargissement

Ensuite, une recherche supplémentaire a été exécutée pour élargir le nombre d'approches possible, nous avons d'abord établi les mots clés de pour la recherche ainsi que leurs synonymes. En effet dans la littérature tout le monde ne s'accorde pas à utiliser les mêmes termes pour désigner la même chose. Le premier terme est *argumentation*, qui est l'ingrédient essentiel de notre recherche, ensuite le deuxième terme est *decision support system* incluant ainsi les systèmes de recommandation et le troisième est *multi-criteria* designant toute les variante tel que Multi-Criteria Decision Making par exemple.

Table 2 Termes et synonymes

Termes	Synonymes
argumentation	explanation, justification
decision support system	decision making, recommandation
	knowledge-based system, knowledge based system
multi-criteria	multi-attribute, multi attribute, multi criteria

La recherche à l’aide de ces mots clés prend forme de la manière suivante sur les plus large base de données de bibliothèques d’articles en ligne, à savoir : ACM Digital Library, IEEE Xplore Digital Library, ScienceDirect et Springer Link.

$(\text{argumentation} \vee \text{justification} \vee \text{explanation}) \wedge (\text{decision support system} \vee \text{decision making} \vee \text{recommandation} \vee \text{knowledge-based system} \vee \text{knowledge based system}) \wedge (\text{multi-criteria} \vee \text{multi-attribute} \vee \text{multi attribute} \vee \text{multi criteria})$

Ces termes ont été recherchés dans les titres et les résumés de chaque articles des bases de données, nous avons obtenus 98 articles, voir Table 3. Dans un premiers temps, les titres et résumés ont été étudiés, pour réaliser un premier filtre, ensuite une lecture plus en détails des articles restant à été entrepris.

Table 3 Résultat de recherche par source

Sources	Nombre d’articles
ACM Digital Library	19
IEEE Xplore Digital Library	8
ScienceDirect	19
Springer Link	52
Total	98

Étonnamment, pour la majorité des cas, les articles ont une approche de type machine learning ou les approches sont des outils pour un problème précis. Toutes ces approches ont été rejetées. Après ce premier filtre nous sommes parvenu à 6 articles restant et après lecture des textes de ces articles, certains ont été rejeté. Par exemple, [Delle Site and Filippi, 2009], ne fourni pas d’argumentation, [Yevseyeva et al., 2016] utilisent des données externes, [Kadziński et al., 2017] est une analyse expérimentale d’une fonction additive dans plusieurs méthodes de désagrégation des préférences.

Table 4 Articles retenus de la recherche d’élargissement

Auteurs	Titres
Labreuche and al	A Dialogue Game for Recommendation with Adaptive Preference methods : An experimental analysis
Geldermann	Explanation Systems
Papamichail et French	Explaining and justifying the advice of a decision support system : a natural language generation approach

3.4.3 Présentations des approches sélectionnées

En s'appuyant sur la review de [Nunes and Jannach, 2017] et l'élargissement présenté précédemment 8 approches respectent les critères imposés. Une présentation par ordre chronologique de chaque articles est établie ci-après.

Klein et Shortliffe

L'approche de [Klein and Shortliffe, 1994] est l'une des premières approche à fournir une argumentation dans un modèle ADMC, elle pose les bases de cette branche de l'aide à la décision. Les auteurs présentent plusieurs stratégies basées sur la MAVT pour expliquer automatiquement les décisions parmi plusieurs objectifs en conflit. Ils décrivent ces stratégies dans un framework prénommé IVA (Interpretive Value Analysis), dans un cadre large d'explication et d'acquisition de pointe dans des systèmes experts qui modélisent des décisions à forte intensité de compromis, exposition du pour et du contre d'une alternative. Les concepts d'interprétation jouent le rôle de primitives d'explication dans les stratégies d'IVA et sont également utilisés comme fonctions d'évaluation qui guident la composition des explications. Les stratégies génèrent des comparaisons sommaires de paires particulières d'alternatives en limitant la profondeur et la largeur d'un arbre de valeurs. Les stratégies produisent des comparaisons plus détaillées d'alternatives, fournissant des traces pas à pas de calculs des différences de valeurs multi-attributs.

Papamichail et French

Cette approche décrit une méthode pour générer une explication dans une décision de contexte analytique. D'après [Papamichail and French, 2003] le point fort de leurs approche est le développement d'une librairie de texte planifié, i.e des textes à trou instanciés par les arguments trouvés par le système de recommandation, pour structurer le message soumis à l'utilisateur. L'approche est en revanche générique. Le système fourni deux types de rapport : (i) un rapport de comparaison expliquant le raisonnement derrière le classement des alternatives et (ii) un rapport d'analyse de sensibilité fournissant une évaluation globale du modèle de décision et décrit l'effet de la variation d'un paramètre de décision.

L'analyse de variation des paramètres de décision nous révèle un intérêt pour cette approche.

Carenini et Moore

L'article de [Carenini and Moore, 2006] se veut interdisciplinaire (théorie de l'argumentation, théorie de la décision, linguistique informatique, psychologie sociale et interaction homme-machine). L'approche se focalisent principalement sur la génération de l'argumentation en langage naturel. La sélection et l'organisation du contenu de l'argumentation est basé sur les principes de la théorie de l'argumentation.

En se concentrant uniquement sur les parties argumentation et théorie de la décision, l'approche se détache des autres car elle forme un graphe de relation entre les arguments pour générer ensuite son explication en langage naturel, i.e compréhensible humainement, adaptée aux préférences du décideur.

Geldermann

L'article de Geldermann (2009) fournis une application pour un système d'explication pour des systemes d'aide à la décision basé sur MAUT et plus spécifiquement sur MAVT. L'argumentation se fait par le biais d'un rapport comparatif, i.e interprétant les résultats d'évaluations du modèle en comparant deux alternatives. Le rapport discute de la façon dont une alternative évalue l'autre sur chaque critère d'évaluation, en soulignant les arguments pour et contre chaque

alternative, sur la base des scores de critères réels. Ainsi, il examine à quel point une alternative est meilleure qu'une autre et souligne les facteurs qui différencient entre deux alternatives. Un autre type de rapport est fournis, l'analyses de sensibilité, qui explique les graphiques d'analyse de sensibilité et illustre l'effet du changement du poids d'un attribut dans le classement des alternatives et discute de la robustesse de la meilleur alternative.

Cette approche est trop similaire à l'approche de [Papamichail and French, 2003], si l'une est retenue la seconde ne le sera pas.

Labreuche

Cette approche se veut fournir une explication plus simple à comprendre par rapport à l'approche de [Klein and Shortliffe, 1994]. En effet l'approche de [Labreuche, 2011], propose une approche pour sélectionner les arguments utilisables dans une explication faite pour un problème de décision multi-critère pondéré par des poids assigné à ces critères. Il se base sur l'analyse des valeurs de ces poids ainsi que le score des alternatives pour les comparer. Un seul modèle utilisé sur les trois de l'article nous intéresse, le modèle Expected Utility (EU), qui est un modèle MAVT. Le but de l'approche est de rechercher certain changement dans le vecteur de poids w qui permet une inversion de la décision fournit par le modèle entre deux alternatives. L'explication se focalisent alors sur le ou les critères qui ont été modifiés dans w . Les autres critères ne sont pas mentionnés pour une explication se voulant le plus court possible. Il y a deux stratégies de modification de w : (i) le remplacement de w par un autre vecteur de poids de référence w^F et (ii) la permutation des poids de w . La première stratégie permet de mettre évidence les critères importants et non importants, et la seconde permet de déterminer les critères décisifs.

Cette article a pour objectif d'argumenter avec le minimum d'argument possible. Sa vision d'argumenter en utilisant les mauvais cotés comme étant compensé par une meilleurs partie d'une alternative par rapport à une autre alternative en fait un bon candidat.

Nunes et al

L'approche de [Nunes et al., 2014] est l'une des plus complète, elle s'appuie sur une génération d'explications basées sur un groupe d'algorithmes pour identifier les paramètres permettant de remplir le canevas d'explication qu'ils fournissent dans l'article. En effet une explication possède 7 formes possibles, s'adaptant ainsi aux différents cas particuliers de décision. Si plusieurs formes d'explications sont possibles pour une alternative recommandée, une ordre pré-établie des formes d'explication est installé pour en choisir qu'une seule. Les principales formes sont : (i) *attribut critique*, l'alternative est choisie car elle a la meilleur valeur sur un critère donnée (ii) *domination*, l'alternative domine sur tout les critères (iii) *critère décisif*, l'alternative est sélectionnée en raison d'un ensemble de critère (iv) *compromis*, l'alternative a un coté avantageux sur un ensemble de critère qui compense ses défauts. Une étude utilisateur a été réalisé incluant une trentaine de participants, leurs approche a été comparée à deux autres approches, [Klein and Shortliffe, 1994, Labreuche, 2011], les résultats indiquant que leurs approches à de meilleurs performance.

Cette approche est plus général que l'approche de [Labreuche, 2011] par rapport à son éventail de type d'argument possible supérieure et son argumentation de compromis nous fait retenir cette approche.

Labreuche and al

L'interaction via un protocole de dialogue, représenté par un graphe orienté, entre un décideur (1) et leurs système de recommandation (2), c'est à dire que (1) et (2) s'exprime à tour de rôle. Ceci en fait sa particularité. En effet, [Labreuche et al., 2015] proposent une méthode où le système s'adapte en fonction des retours de l'utilisateur et passe d'un modèle de décision à

l'autre en fonction des informations disponibles. Dans l'article seul un modèle nous intéresse, car c'est le seule qui est de MAVT. L'argumentation par contre est sommaire, elle fourni un listing des arguments en faveurs d'une alternative par rapport à une autre.

L'approche est intéressante par rapport à son interaction avec l'utilisateur et son protocole de dialogue, mais l'argumentation ainsi que la représentation des connaissances devront être modifiées si l'approche est retenue.

Belahcene et al

L'approche de [Belahcene et al., 2017] fournit une explication dite complète, contrairement à d'autres approches qui ne fournissent que les points clés décisifs, dans un contexte de décision multi-critères. Les informations initiales prennent une forme de comparaison par paire d'alternatives. La génération d'explication s'inspire d'une méthode «even-swap», une procédure d'élection utilisant un modèle de valeur additif des valeurs des préférences du décideur et basée sur le *compromis* entre des paires de critère. La version des auteurs est une généralisation d'«even-swap» appliqué sur l'échanges des préférences dans le but de simplement montrer une comparaison d'alternatives. L'explication construit un graphe d'arguments positifs et négatifs entre deux alternatives, pour argumenter pourquoi l'une est préférée à l'autre. La visualisation se fait par un graphe biparti entre les deux types d'arguments.

La génération d'un graphe bipartie (argument et contre-argument), prenant en compte tous les critères incluant ceux non décisif, rend l'approche pertinente. Cette approche se rapproche de celle de [Carenini and Moore, 2006] en terme de visualisation des graphes.

Après avoir considéré les approches listé ci-dessus, nous avons décidé de sélectionner les approches de [Labreuche, 2011] et de [Nunes et al., 2014].

4 Les 2 Approches retenues

Dans cette section nous allons présenter les deux approches que nous allons utiliser pour notre débat. Dans un premier temps nous présenterons l'approche de [Labreuche, 2011] et dans un second temps celle de [Nunes et al., 2014]. Nous verrons en détails la mécanique de ces deux approches.

4.1 Approche Labreuche

4.2 Approche Nunes

5 Travaux à venir

Dans un premier temps nous allons implémenter les deux approches retenues et les tester pour obtenir des résultats cohérents avec leurs articles respectifs. Ensuite la prochaine étape est d'adapter indépendamment l'une de l'autre ces approches à l'article de [Cailloux and Meinard, 2018] dans le but de générer des arguments et contre arguments et dans le même temps établir le langage commun entre les deux approches et le décideur. Parallèlement nous réfléchirons à l'établissement d'un protocole de dialogue lors de la résolution du problème de décision. La finalité est de faire la convergence des deux approches dans un système unique, de tester sa robustesse, et en fonction du temps faire une étude utilisateur du résultat final.

Références

- M. Balabanović and Y. Shoham. Fab : Content-based, collaborative recommendation. *Commun. ACM*, 40(3) :66–72, Mar. 1997. ISSN 0001-0782. doi : 10.1145/245108.245124. URL <http://doi.acm.org/10.1145/245108.245124>.
- K. Belahcene, C. Labreuche, N. Maudet, V. Mousseau, and W. Ouerdane. Explaining robust additive utility models by sequences of preference swaps. *Theory and Decision*, 82(2) :151–183, Feb 2017. ISSN 1573-7187. doi : 10.1007/s11238-016-9560-1. URL <https://doi.org/10.1007/s11238-016-9560-1>.
- C. Bielza, G. M. R.-I. S, and F. d. P. J, A. Structural, elicitation and computational issues faced when solving complex decision making problems with influence diagrams. *Computers & Operations Research*, 27(7) :725 – 740, 2000. ISSN 0305-0548. doi : [https://doi.org/10.1016/S0305-0548\(99\)00113-6](https://doi.org/10.1016/S0305-0548(99)00113-6). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0305054899001136>.
- M. Bohanec, B. Zupan, and V. Rajkovič. Applications of qualitative multi-attribute decision models in health care. *International Journal of Medical Informatics*, 58-59 :191 – 205, 2000. ISSN 1386-5056. doi : [https://doi.org/10.1016/S1386-5056\(00\)00087-3](https://doi.org/10.1016/S1386-5056(00)00087-3). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1386505600000873>.
- O. Cailloux and Y. Meinard. A formal framework for deliberated judgment. *CoRR*, abs/1801.05644, 2018. URL <http://arxiv.org/abs/1801.05644>.
- G. Carenini and J. D. Moore. Generating and evaluating evaluative arguments. *Artificial Intelligence*, 170(11) :925 – 952, 2006. ISSN 0004-3702. doi : <https://doi.org/10.1016/j.artint.2006.05.003>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S000437020600066X>.
- L. Chen and F. Wang. Sentiment-enhanced explanation of product recommendations. In *Proceedings of the 23rd International Conference on World Wide Web, WWW '14 Companion*, pages 239–240, New York, NY, USA, 2014. ACM. ISBN 978-1-4503-2745-9. doi : 10.1145/2567948.2577276. URL <http://doi.acm.org/10.1145/2567948.2577276>.
- P. Delle Site and F. Filippi. Weighting methods in multi-attribute assessment of transport projects. *European Transport Research Review*, 1(4) :199–206, Dec 2009. ISSN 1866-8887. doi : 10.1007/s12544-009-0018-1. URL <https://doi.org/10.1007/s12544-009-0018-1>.
- P. M. Dung. On the acceptability of arguments and its fundamental role in nonmonotonic reasoning, logic programming and n-person games. *Artificial Intelligence*, 77(2) :321 – 357, 1995. ISSN 0004-3702. doi : [https://doi.org/10.1016/0004-3702\(94\)00041-X](https://doi.org/10.1016/0004-3702(94)00041-X). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/000437029400041X>.
- M. A. Grando, L. Moss, D. Glasspool, D. Sleeman, M. Sim, C. Gilhooly, and J. Kinsella. Argumentation-logic for explaining anomalous patient responses to treatments. In M. Peleg, N. Lavrač, and C. Combi, editors, *Artificial Intelligence in Medicine*, pages 35–44, Berlin, Heidelberg, 2011. Springer Berlin Heidelberg. ISBN 978-3-642-22218-4.
- M. Kadziński, M. Ghaderi, J. Wąsikowski, and N. Agell. Expressiveness and robustness measures for the evaluation of an additive value function in multiple criteria preference disaggregation methods : An experimental analysis. *Computers & Operations Research*, 87 : 146 – 164, 2017. ISSN 0305-0548. doi : <https://doi.org/10.1016/j.cor.2017.05.011>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0305054817301235>.
- R. Keeney and H. Raiffa. *Decisions with Multiple Objectives : Preferences and Value Tradeoffs*. Cambridge University Press, 1993.

- D. A. Klein and E. H. Shortliffe. A framework for explaining decision-theoretic advice. *Artificial Intelligence*, 67(2) :201 – 243, 1994. ISSN 0004-3702. doi : [https://doi.org/10.1016/0004-3702\(94\)90053-1](https://doi.org/10.1016/0004-3702(94)90053-1). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0004370294900531>.
- C. Labreuche. A general framework for explaining the results of a multi-attribute preference model. *Artificial Intelligence*, 175(7) :1410 – 1448, 2011. ISSN 0004-3702. doi : <https://doi.org/10.1016/j.artint.2010.11.008>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0004370210001979>. Representing, Processing, and Learning Preferences : Theoretical and Practical Challenges.
- C. Labreuche, N. Maudet, W. Ouerdane, and S. Parsons. A dialogue game for recommendation with adaptive preference models. pages 959–967, 2015. URL <http://dl.acm.org/citation.cfm?id=2772879.2773275>.
- D. Mcsherry. Explanation in recommender systems. *Artificial Intelligence Review*, 24(2) :179–197, Oct 2005. ISSN 1573-7462. doi : 10.1007/s10462-005-4612-x. URL <https://doi.org/10.1007/s10462-005-4612-x>.
- T. Narayanan and D. L. McGuinness. Towards leveraging inference web to support intuitive explanations in recommender systems for automated career counseling. In *First International Conference on Advances in Computer-Human Interaction, ACHI 2008, February 10-15, 2008, Sainte Luce, Martinique, France*, pages 164–169, 2008. doi : 10.1109/ACHI.2008.36. URL <https://doi.org/10.1109/ACHI.2008.36>.
- I. Nunes and D. Jannach. A systematic review and taxonomy of explanations in decision support and recommender systems. *User-Modeling and User-Adapted Interaction*, 27(3–5) :393–444, 2017.
- I. Nunes, S. Miles, M. Luck, S. Barbosa, and C. Lucena. Pattern-based explanation for automated decisions. *Artificial Intelligence*, 170(11) :669 – 674, 2014. ISSN 0004-3702. doi : <https://doi.org/10.1016/j.artint.2006.05.003>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S000437020600066X>.
- K. Papamichail and S. French. Explaining and justifying the advice of a decision support system : a natural language generation approach. *Expert Systems with Applications*, 24(1) :35 – 48, 2003. ISSN 0957-4174. doi : [https://doi.org/10.1016/S0957-4174\(02\)00081-7](https://doi.org/10.1016/S0957-4174(02)00081-7). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0957417402000817>.
- P. Pu and L. Chen. Trust-inspiring explanation interfaces for recommender systems. *Knowledge-Based Systems*, 20(6) :542 – 556, 2007. ISSN 0950-7051. doi : <https://doi.org/10.1016/j.knosys.2007.04.004>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0950705107000445>. Special Issue On Intelligent User Interfaces.
- C. K. Riesbeck and R. C. Schank. *Inside Case-Based Reasoning*. L. Erlbaum Associates Inc., Hillsdale, NJ, USA, 1989. ISBN 0898597676.
- T. L. Saaty. Decision making with the analytic hierarchy process. *International Journal of Services Sciences*, 1(1) :83–98, 2008. doi : 10.1504/IJSSci.2008.01759. URL <https://www.inderscienceonline.com/doi/abs/10.1504/IJSSci.2008.01759>.
- S. E. Toulmin. *The uses of argument*. Cambridge University Press, 2003.
- E. Triantaphyllou. *Multi-Criteria Decision Making Methods*, pages 5–21. Springer US, Boston, MA, 2000. ISBN 978-1-4757-3157-6. doi : 10.1007/978-1-4757-3157-6_2. URL https://doi.org/10.1007/978-1-4757-3157-6_2.

I. Yevseyeva, C. Morisset, and A. van Moorsel. Modeling and analysis of influence power for information security decisions. *Performance Evaluation*, 98 :36 – 51, 2016. ISSN 0166-5316. doi : <https://doi.org/10.1016/j.peva.2016.01.003>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0166531616000043>.

L. A. Zadeh. Fuzzy sets. *Information and Control*, 8 :338–353, 1965.