

Числено решаване на обикновени диференциални уравнения

Дадени са следните задачи: (**a** и **b** са съответно предпоследната и последната цифра от факултетния номер)

а) $y' = y - (2 + a)\sin x$, $y(b) = a + b$, $x \in [b; b + 0.5]$

б) $y' = y - \ln(x^2 + 1) + \frac{2x}{x^2 + 1} + b$, $y(a) = a + b$, $x \in [a; a + 1]$

1. Да се намерят точните решения.

2. Да се решат по методите: Ойлер, модифициран Ойлер, Рунге-Кута (1, 1), Рунге-Кута (2/3, 2/3), Рунге-Кута с 4 междинни точки за а) при $h = 0.1$,

за б) при $n = 5$. Да се направи сравнение между точното решение и численото приближение.

Да се представи геометрична интерпретация на резултатите.

3. Колко би трябвало да са n и h за всеки един от посочените методи за всяка от задачите, за да се достигне точност за а) 10^{-4} , за б) 10^{-7} ?

1. Да се намерят точните решения

Търсим общо решение:

In[1]:= `Clear[x, y]`

$$\text{DSolve}\left[y'[x] == y[x] - \text{Log}[x^2 + 1] + \frac{2x}{x^2 + 1} + 7, y[x], x\right]$$

$$\text{Out[2]} = \left\{ \left\{ y[x] \rightarrow -7 + e^x c_1 + \text{Log}[1 + x^2] \right\} \right\}$$

Търсим частно решение:

In[3]:= `Clear[x, y]`

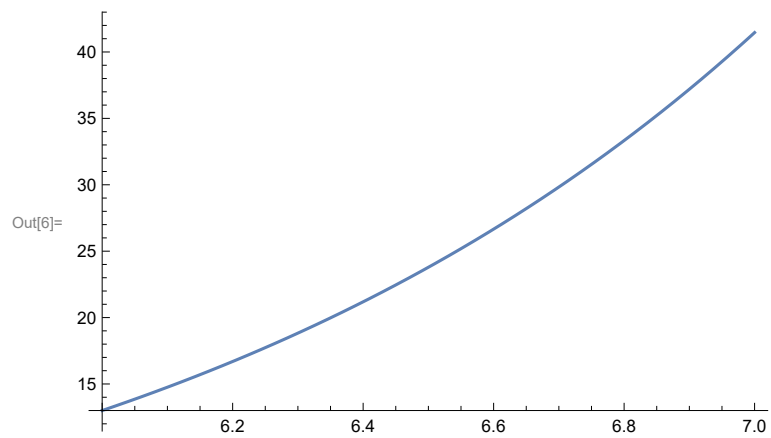
$$\text{DSolve}\left[\left\{ y'[x] == y[x] - \text{Log}[x^2 + 1] + \frac{2x}{x^2 + 1} + 7, y[6] == 13 \right\}, y[x], x\right]$$

$$\text{Out[4]} = \left\{ \left\{ y[x] \rightarrow \frac{-7 e^6 + 20 e^x - e^x \text{Log}[37] + e^6 \text{Log}[1 + x^2]}{e^6} \right\} \right\}$$

Визуализация на точното решение

In[5]:=
$$yt[x_] := \frac{-7 e^6 + 20 e^x - e^x \operatorname{Log}[37] + e^6 \operatorname{Log}[1 + x^2]}{e^6}$$

Plot[yt[x], {x, 6, 7}]



2. Да се реши по метода на Рунге-Кута с 4 междинни точки при $h = 0.02$:

2.1. РК54 - Формула с четири междинни точки

```

In[7]:= (*Въвеждаме условието на задачата*)
a = 6.; b = 7;
x = a;
y = 13.;
points = {{x, y}};

f[x_, y_] := y - Log[x^2 + 1] +  $\frac{2x}{x^2 + 1}$  + 7

(*Точно решение*)
yt[x_] :=  $\frac{-7e^6 + 20e^x - e^x \text{Log}[37] + e^6 \text{Log}[1 + x^2]}{e^6}$ 

(*Съставяме мрежата*)
h = 0.02; n =  $\frac{b - a}{h}$ ;
Print["Мрежата е с n = ", n, " и стъпка h = ", h]
(*Изчисляваме теоретичната грешка*)
Print["Теоретичната локална грешка е ", h^5]
Print["Теоретичната глобална грешка е ", h^4]
(*Намираме неизвестните стойности за y_i*)
For[i = 0, i ≤ n, i++,
  k1 = h * f[x, y];
  k2 = h * f[x +  $\frac{h}{2}$ , y +  $\frac{k1}{2}$ ];
  k3 = h * f[x +  $\frac{h}{2}$ , y +  $\frac{k2}{2}$ ];
  k4 = h * f[x + h, y + k3];
  Print["i = ", i, " x_i = ", x, " y_i = ", y, " f_i = ",
    f[x, y], " k_1 = ", k1, " k_2 = ", k2, " k_3 = ", k3, " k_4 = ",
    k4, " y_точно = ", yt[x], " Истинска грешка = ", Abs[y - yt[x]]];
  y = y +  $\frac{1}{6}$  (k1 + 2 k2 + 2 k3 + k4);
  x = x + h;
  AppendTo[points, {x, y}]
]

(*Визуализация на резултатите*)
gryt = Plot[yt[x], {x, a, b}, PlotStyle → Red];
grp = ListPlot[points, PlotStyle → Black];
Show[gryt, grp]

Мрежата е с n = 50. и стъпка h = 0.02
Теоретичната локална грешка е  $3.2 \times 10^{-9}$ 
Теоретичната глобална грешка е  $1.6 \times 10^{-7}$ 

```

$i = 0$ $x_i = 6$ $y_i = 13$ $f_i = 16.7134$ $k_1 = 0.334268$ $k_2 = 0.337536$ $k_3 = 0.337568$ $k_4 = 0.34087$ $y_{\text{точно}} = 13$ Истинска грешка = 0.

$i = 1$ $x_i = 6.02$ $y_i = 13.3376$ $f_i = 17.0435$ $k_1 = 0.340869$ $k_2 = 0.344203$ $k_3 = 0.344237$ $k_4 = 0.347605$ $y_{\text{точно}} = 13.3376$ Истинска грешка = 4.36577×10^{-10}

$i = 2$ $x_i = 6.04$ $y_i = 13.6818$ $f_i = 17.3802$ $k_1 = 0.347604$ $k_2 = 0.351006$ $k_3 = 0.35104$ $k_4 = 0.354476$ $y_{\text{точно}} = 13.6818$ Истинска грешка = 8.90843×10^{-10}

$i = 3$ $x_i = 6.06$ $y_i = 14.0328$ $f_i = 17.7238$ $k_1 = 0.354476$ $k_2 = 0.357947$ $k_3 = 0.357981$ $k_4 = 0.361488$ $y_{\text{точно}} = 14.0328$ Истинска грешка = 1.36334×10^{-9}

$i = 4$ $x_i = 6.08$ $y_i = 14.3908$ $f_i = 18.0744$ $k_1 = 0.361487$ $k_2 = 0.365028$ $k_3 = 0.365064$ $k_4 = 0.368641$ $y_{\text{точно}} = 14.3908$ Истинска грешка = 1.85461×10^{-9}

$i = 5$ $x_i = 6.1$ $y_i = 14.7558$ $f_i = 18.432$ $k_1 = 0.368641$ $k_2 = 0.372253$ $k_3 = 0.372289$ $k_4 = 0.375939$ $y_{\text{точно}} = 14.7558$ Истинска грешка = 2.36522×10^{-9}

$i = 6$ $x_i = 6.12$ $y_i = 15.1281$ $f_i = 18.7969$ $k_1 = 0.375939$ $k_2 = 0.379625$ $k_3 = 0.379662$ $k_4 = 0.383385$ $y_{\text{точно}} = 15.1281$ Истинска грешка = 2.89576×10^{-9}

$i = 7$ $x_i = 6.14$ $y_i = 15.5078$ $f_i = 19.1692$ $k_1 = 0.383385$ $k_2 = 0.387146$ $k_3 = 0.387183$ $k_4 = 0.390982$ $y_{\text{точно}} = 15.5078$ Истинска грешка = 3.44682×10^{-9}

$i = 8$ $x_i = 6.16$ $y_i = 15.8949$ $f_i = 19.5491$ $k_1 = 0.390982$ $k_2 = 0.394819$ $k_3 = 0.394857$ $k_4 = 0.398733$ $y_{\text{точно}} = 15.8949$ Истинска грешка = 4.019×10^{-9}

$i = 9$ $x_i = 6.18$ $y_i = 16.2898$ $f_i = 19.9367$ $k_1 = 0.398733$ $k_2 = 0.402648$ $k_3 = 0.402687$ $k_4 = 0.406642$ $y_{\text{точно}} = 16.2898$ Истинска грешка = 4.61295×10^{-9}

$i = 10$ $x_i = 6.2$ $y_i = 16.6925$ $f_i = 20.3321$ $k_1 = 0.406641$ $k_2 = 0.410635$ $k_3 = 0.410675$ $k_4 = 0.41471$ $y_{\text{точно}} = 16.6925$ Истинска грешка = 5.2293×10^{-9}

$i = 11$ $x_i = 6.22$ $y_i = 17.1031$ $f_i = 20.7355$ $k_1 = 0.41471$ $k_2 = 0.418785$ $k_3 = 0.418826$ $k_4 = 0.422942$ $y_{\text{точно}} = 17.1031$ Истинска грешка = 5.86872×10^{-9}

$i = 12$ $x_i = 6.24$ $y_i = 17.5219$ $f_i = 21.1471$ $k_1 = 0.422942$ $k_2 = 0.427099$ $k_3 = 0.427141$ $k_4 = 0.431341$ $y_{\text{точно}} = 17.5219$ Истинска грешка = 6.53188×10^{-9}

$i = 13$ $x_i = 6.26$ $y_i = 17.9491$ $f_i = 21.567$ $k_1 = 0.431341$ $k_2 = 0.435582$ $k_3 = 0.435625$ $k_4 = 0.43991$ $y_{\text{точно}} = 17.9491$ Истинска грешка = 7.2195×10^{-9}

$i = 14$ $x_i = 6.28$ $y_i = 18.3847$ $f_i = 21.9955$ $k_1 = 0.43991$ $k_2 = 0.444237$ $k_3 = 0.44428$ $k_4 = 0.448652$ $y_{\text{точно}} = 18.3847$ Истинска грешка = 7.93228×10^{-9}

$i = 15$ $x_i = 6.3$ $y_i = 18.8289$ $f_i = 22.4326$ $k_1 = 0.448652$ $k_2 = 0.453067$ $k_3 = 0.453112$ $k_4 = 0.457572$ $y_{\text{точно}} = 18.8289$ Истинска грешка = 8.67095×10^{-9}

$i = 16$ $x_i = 6.32$ $y_i = 19.282$ $f_i = 22.8786$ $k_1 = 0.457572$ $k_2 = 0.462076$ $k_3 = 0.462122$ $k_4 = 0.466672$ $y_{\text{точно}} = 19.282$ Истинска грешка = 9.43627×10^{-9}

$i = 17$ $x_i = 6.34$ $y_i = 19.7441$ $f_i = 23.3336$ $k_1 = 0.466672$ $k_2 = 0.471268$ $k_3 = 0.471314$ $k_4 = 0.475957$ $y_{\text{точно}} = 19.7441$ Истинска грешка = 1.0229×10^{-8}

$i = 18$ $x_i = 6.36$ $y_i = 20.2154$ $f_i = 23.7978$ $k_1 = 0.475957$ $k_2 = 0.480646$ $k_3 = 0.480693$ $k_4 = 0.48543$ $y_{\text{точно}} = 20.2154$ Истинска грешка = 1.105×10^{-8}

$i = 19$ $x_i = 6.38$ $y_i = 20.6961$ $f_i = 24.2715$ $k_1 = 0.485429$ $k_2 = 0.490213$ $k_3 = 0.490261$ $k_4 = 0.495094$ $y_{\text{точно}} = 20.6961$ Истинска грешка = 1.19×10^{-8}

$i = 20$ $x_i = 6.4$ $y_i = 21.1864$ $f_i = 24.7547$ $k_1 = 0.495094$ $k_2 = 0.499975$ $k_3 = 0.500024$ $k_4 = 0.504954$ $y_{\text{точно}} = 21.1864$ Истинска грешка = 1.27799×10^{-8}

$i = 21$ $x_i = 6.42$ $y_i = 21.6864$ $f_i = 25.2477$ $k_1 = 0.504954$ $k_2 = 0.509934$ $k_3 = 0.509984$ $k_4 = 0.515014$ $y_{\text{точно}} = 21.6864$ Истинска грешка = 1.36906×10^{-8}

$i = 22$ $x_i = 6.44$ $y_i = 22.1963$ $f_i = 25.7507$ $k_1 = 0.515014$ $k_2 = 0.520094$ $k_3 = 0.520145$ $k_4 = 0.525278$ $y_{\text{точно}} = 22.1963$ Истинска грешка = 1.46328×10^{-8}

$i = 23$ $x_i = 6.46$ $y_i = 22.7165$ $f_i = 26.2639$ $k_1 = 0.525277$ $k_2 = 0.530461$
 $k_3 = 0.530513$ $k_4 = 0.535749$ $y_{\text{точно}} = 22.7165$ Истинска грешка = 1.56076×10^{-8}

$i = 24$ $x_i = 6.48$ $y_i = 23.247$ $f_i = 26.7874$ $k_1 = 0.535749$ $k_2 = 0.541037$
 $k_3 = 0.54109$ $k_4 = 0.546432$ $y_{\text{точно}} = 23.247$ Истинска грешка = 1.66159×10^{-8}

$i = 25$ $x_i = 6.5$ $y_i = 23.788$ $f_i = 27.3216$ $k_1 = 0.546432$ $k_2 = 0.551828$
 $k_3 = 0.551882$ $k_4 = 0.557332$ $y_{\text{точно}} = 23.788$ Истинска грешка = 1.76585×10^{-8}

$i = 26$ $x_i = 6.52$ $y_i = 24.3399$ $f_i = 27.8666$ $k_1 = 0.557332$ $k_2 = 0.562836$
 $k_3 = 0.562891$ $k_4 = 0.568452$ $y_{\text{точно}} = 24.3399$ Истинска грешка = 1.87366×10^{-8}

$i = 27$ $x_i = 6.54$ $y_i = 24.9028$ $f_i = 28.4226$ $k_1 = 0.568452$ $k_2 = 0.574068$
 $k_3 = 0.574124$ $k_4 = 0.579798$ $y_{\text{точно}} = 24.9028$ Истинска грешка = 1.9851×10^{-8}

$i = 28$ $x_i = 6.56$ $y_i = 25.4769$ $f_i = 28.9899$ $k_1 = 0.579797$ $k_2 = 0.585527$
 $k_3 = 0.585584$ $k_4 = 0.591373$ $y_{\text{точно}} = 25.4769$ Истинска грешка = 2.10029×10^{-8}

$i = 29$ $x_i = 6.58$ $y_i = 26.0624$ $f_i = 29.5686$ $k_1 = 0.591372$ $k_2 = 0.597218$
 $k_3 = 0.597277$ $k_4 = 0.603182$ $y_{\text{точно}} = 26.0624$ Истинска грешка = 2.21932×10^{-8}

$i = 30$ $x_i = 6.6$ $y_i = 26.6597$ $f_i = 30.1591$ $k_1 = 0.603182$ $k_2 = 0.609146$
 $k_3 = 0.609205$ $k_4 = 0.61523$ $y_{\text{точно}} = 26.6597$ Истинска грешка = 2.34231×10^{-8}

$i = 31$ $x_i = 6.62$ $y_i = 27.2689$ $f_i = 30.7615$ $k_1 = 0.61523$ $k_2 = 0.621315$
 $k_3 = 0.621376$ $k_4 = 0.627523$ $y_{\text{точно}} = 27.2689$ Истинска грешка = 2.46937×10^{-8}

$i = 32$ $x_i = 6.64$ $y_i = 27.8902$ $f_i = 31.3761$ $k_1 = 0.627522$ $k_2 = 0.63373$
 $k_3 = 0.633792$ $k_4 = 0.640063$ $y_{\text{точно}} = 27.8902$ Истинска грешка = 2.60061×10^{-8}

$i = 33$ $x_i = 6.66$ $y_i = 28.524$ $f_i = 32.0031$ $k_1 = 0.640063$ $k_2 = 0.646397$
 $k_3 = 0.64646$ $k_4 = 0.652858$ $y_{\text{точно}} = 28.524$ Истинска грешка = 2.73615×10^{-8}

$i = 34$ $x_i = 6.68$ $y_i = 29.1704$ $f_i = 32.6429$ $k_1 = 0.652858$ $k_2 = 0.659319$
 $k_3 = 0.659384$ $k_4 = 0.665912$ $y_{\text{точно}} = 29.1704$ Истинска грешка = 2.8761×10^{-8}

$i = 35$ $x_i = 6.7$ $y_i = 29.8298$ $f_i = 33.2956$ $k_1 = 0.665911$ $k_2 = 0.672504$
 $k_3 = 0.67257$ $k_4 = 0.679229$ $y_{\text{точно}} = 29.8298$ Истинска грешка = 3.0206×10^{-8}

$i = 36$ $x_i = 6.72$ $y_i = 30.5024$ $f_i = 33.9614$ $k_1 = 0.679229$ $k_2 = 0.685955$
 $k_3 = 0.686022$ $k_4 = 0.692817$ $y_{\text{точно}} = 30.5024$ Истинска грешка = 3.16977×10^{-8}

$i = 37$ $x_i = 6.74$ $y_i = 31.1884$ $f_i = 34.6408$ $k_1 = 0.692816$ $k_2 = 0.699678$
 $k_3 = 0.699747$ $k_4 = 0.706679$ $y_{\text{точно}} = 31.1884$ Истинска грешка = 3.32374×10^{-8}

$i = 38$ $x_i = 6.76$ $y_i = 31.8881$ $f_i = 35.3339$ $k_1 = 0.706678$ $k_2 = 0.713679$
 $k_3 = 0.713749$ $k_4 = 0.720821$ $y_{\text{точно}} = 31.8881$ Истинска грешка = 3.48263×10^{-8}

$i = 39$ $x_i = 6.78$ $y_i = 32.6018$ $f_i = 36.041$ $k_1 = 0.720821$ $k_2 = 0.727963$
 $k_3 = 0.728034$ $k_4 = 0.73525$ $y_{\text{точно}} = 32.6018$ Истинска грешка = 3.6466×10^{-8}

$i = 40$ $x_i = 6.8$ $y_i = 33.3298$ $f_i = 36.7625$ $k_1 = 0.735249$ $k_2 = 0.742536$
 $k_3 = 0.742609$ $k_4 = 0.74997$ $y_{\text{точно}} = 33.3298$ Истинска грешка = 3.81577×10^{-8}

$i = 41$ $x_i = 6.82$ $y_i = 34.0724$ $f_i = 37.4985$ $k_1 = 0.74997$ $k_2 = 0.757404$
 $k_3 = 0.757478$ $k_4 = 0.764989$ $y_{\text{точно}} = 34.0724$ Истинска грешка = 3.99029×10^{-8}

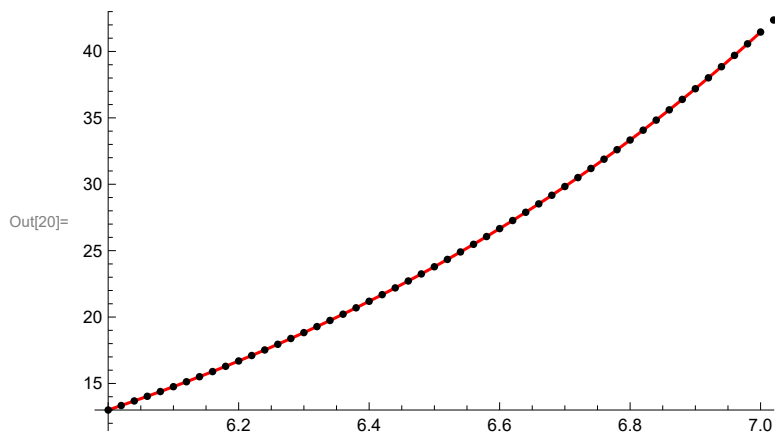
$i = 42$ $x_i = 6.84$ $y_i = 34.8299$ $f_i = 38.2494$ $k_1 = 0.764988$ $k_2 = 0.772573$
 $k_3 = 0.772649$ $k_4 = 0.780311$ $y_{\text{точно}} = 34.8299$ Истинска грешка = 4.17031×10^{-8}

$i = 43$ $x_i = 6.86$ $y_i = 35.6025$ $f_i = 39.0155$ $k_1 = 0.78031$ $k_2 = 0.788048$
 $k_3 = 0.788126$ $k_4 = 0.795943$ $y_{\text{точно}} = 35.6025$ Истинска грешка = 4.35598×10^{-8}

$i = 44$ $x_i = 6.88$ $y_i = 36.3906$ $f_i = 39.7971$ $k_1 = 0.795942$ $k_2 = 0.803837$
 $k_3 = 0.803916$ $k_4 = 0.811891$ $y_{\text{точно}} = 36.3906$ Истинска грешка = 4.54746×10^{-8}

$i = 45$ $x_i = 6.9$ $y_i = 37.1945$ $f_i = 40.5945$ $k_1 = 0.811891$ $k_2 = 0.819945$
 $k_3 = 0.820025$ $k_4 = 0.828162$ $y_{\text{точно}} = 37.1945$ Истинска грешка = 4.74489×10^{-8}

$i = 46$ $x_i = 6.92$ $y_i = 38.0145$ $f_i = 41.4081$ $k_1 = 0.828161$ $k_2 = 0.836379$
 $k_3 = 0.836461$ $k_4 = 0.844762$ $y_{\text{точно}} = 38.0145$ Истинска грешка = 4.94845×10^{-8}
 $i = 47$ $x_i = 6.94$ $y_i = 38.8509$ $f_i = 42.2381$ $k_1 = 0.844761$ $k_2 = 0.853145$
 $k_3 = 0.853229$ $k_4 = 0.861698$ $y_{\text{точно}} = 38.8509$ Истинска грешка = 5.1583×10^{-8}
 $i = 48$ $x_i = 6.96$ $y_i = 39.7041$ $f_i = 43.0849$ $k_1 = 0.861697$ $k_2 = 0.87025$
 $k_3 = 0.870336$ $k_4 = 0.878976$ $y_{\text{точно}} = 39.7041$ Истинска грешка = 5.37462×10^{-8}
 $i = 49$ $x_i = 6.98$ $y_i = 40.5744$ $f_i = 43.9488$ $k_1 = 0.878975$ $k_2 = 0.887701$
 $k_3 = 0.887788$ $k_4 = 0.896603$ $y_{\text{точно}} = 40.5744$ Истинска грешка = 5.59757×10^{-8}
 $i = 50$ $x_i = 7.$ $y_i = 41.4622$ $f_i = 44.8301$ $k_1 = 0.896603$ $k_2 = 0.905505$
 $k_3 = 0.905594$ $k_4 = 0.914588$ $y_{\text{точно}} = 41.4622$ Истинска грешка = 5.82734×10^{-8}



3. Колко би била точността при използване на модифицирания метод на Ойлер

2.2. Модифициран метод на Ойлер

```
In[21]:= (*Въвеждаме условието на задачата*)
a = 6.; b = 7;
x = a;
y = 13.;
points = {{x, y}};

f[x_, y_] := y - Log[x^2 + 1] +  $\frac{2x}{x^2 + 1}$  + 7

(*Точно решение*)
yt[x_] :=  $\frac{-7e^6 + 20e^x - e^x \text{Log}[37] + e^6 \text{Log}[1 + x^2]}{e^6}$ 

(*Съставяме мрежата*)
h = 0.02; n =  $\frac{b - a}{h}$ ;
Print["Мрежата е с n = ", n, " и стъпка h = ", h]
(*Изчисляваме теоретичната грешка*)
Print["Теоретичната локална грешка е ", h^3]
Print["Теоретичната глобална грешка е ", h^2]
(*Намираме неизвестните стойности за y_i*)
For[i = 0, i ≤ n, i++,
  x12 = x +  $\frac{h}{2}$ ;
  y12 = y +  $\frac{h}{2}$  f[x, y];
  Print["i = ", i, " x_i = ", x, " y_i = ", y, " f_i = ",
    f[x, y], " x_{i+1/2} = ", x12, " y_{i+1/2} = ", y12, " f_{i+1/2} = ",
    f[x12, y12], " y_точно = ", yt[x], " Истинска грешка = ", Abs[y - yt[x]]];
  y = y + h * f[x12, y12];
  x = x + h;
  AppendTo[points, {x, y}]
]

(*Визуализация на резултатите*)
gryt = Plot[yt[x], {x, a, b}, PlotStyle → Red];
grp = ListPlot[points, PlotStyle → Black];
Show[gryt, grp]

Мрежата е с n = 50. и стъпка h = 0.02
Теоретичната локална грешка е  $8 \times 10^{-6}$ 
Теоретичната глобална грешка е 0.0004
i = 0 x_i = 6. y_i = 13. f_i = 16.7134 x_{i+1/2} = 6.01
y_{i+1/2} = 13.1671 f_{i+1/2} = 16.8768 y_точно = 13. Истинска грешка = 0.
```

$i = 1$ $x_i = 6.02$ $y_i = 13.3375$ $f_i = 17.0434$ $x_{i+1/2} = 6.03$ $y_{i+1/2} = 13.508$ $f_{i+1/2} = 17.2101$ $y_{\text{точно}} = 13.3376$ Истинска грешка = 0.0000219159
 $i = 2$ $x_i = 6.04$ $y_i = 13.6817$ $f_i = 17.3802$ $x_{i+1/2} = 6.05$ $y_{i+1/2} = 13.8555$ $f_{i+1/2} = 17.5503$ $y_{\text{точно}} = 13.6818$ Истинска грешка = 0.0000447185
 $i = 3$ $x_i = 6.06$ $y_i = 14.0327$ $f_i = 17.7237$ $x_{i+1/2} = 6.07$ $y_{i+1/2} = 14.21$ $f_{i+1/2} = 17.8973$ $y_{\text{точно}} = 14.0328$ Истинска грешка = 0.0000684345
 $i = 4$ $x_i = 6.08$ $y_i = 14.3907$ $f_i = 18.0743$ $x_{i+1/2} = 6.09$ $y_{i+1/2} = 14.5714$ $f_{i+1/2} = 18.2513$ $y_{\text{точно}} = 14.3908$ Истинска грешка = 0.0000930916
 $i = 5$ $x_i = 6.1$ $y_i = 14.7557$ $f_i = 18.4319$ $x_{i+1/2} = 6.11$ $y_{i+1/2} = 14.94$ $f_{i+1/2} = 18.6125$ $y_{\text{точно}} = 14.7558$ Истинска грешка = 0.000118718
 $i = 6$ $x_i = 6.12$ $y_i = 15.128$ $f_i = 18.7968$ $x_{i+1/2} = 6.13$ $y_{i+1/2} = 15.3159$ $f_{i+1/2} = 18.9811$ $y_{\text{точно}} = 15.1281$ Истинска грешка = 0.000145343
 $i = 7$ $x_i = 6.14$ $y_i = 15.5076$ $f_i = 19.1691$ $x_{i+1/2} = 6.15$ $y_{i+1/2} = 15.6993$ $f_{i+1/2} = 19.3571$ $y_{\text{точно}} = 15.5078$ Истинска грешка = 0.000172997
 $i = 8$ $x_i = 6.16$ $y_i = 15.8947$ $f_i = 19.5489$ $x_{i+1/2} = 6.17$ $y_{i+1/2} = 16.0902$ $f_{i+1/2} = 19.7407$ $y_{\text{точно}} = 15.8949$ Истинска грешка = 0.000201709
 $i = 9$ $x_i = 6.18$ $y_i = 16.2895$ $f_i = 19.9364$ $x_{i+1/2} = 6.19$ $y_{i+1/2} = 16.4889$ $f_{i+1/2} = 20.1322$ $y_{\text{точно}} = 16.2898$ Истинска грешка = 0.000231512
 $i = 10$ $x_i = 6.2$ $y_i = 16.6922$ $f_i = 20.3318$ $x_{i+1/2} = 6.21$ $y_{i+1/2} = 16.8955$ $f_{i+1/2} = 20.5315$ $y_{\text{точно}} = 16.6925$ Истинска грешка = 0.000262438
 $i = 11$ $x_i = 6.22$ $y_i = 17.1028$ $f_i = 20.7352$ $x_{i+1/2} = 6.23$ $y_{i+1/2} = 17.3102$ $f_{i+1/2} = 20.9389$ $y_{\text{точно}} = 17.1031$ Истинска грешка = 0.000294521
 $i = 12$ $x_i = 6.24$ $y_i = 17.5216$ $f_i = 21.1468$ $x_{i+1/2} = 6.25$ $y_{i+1/2} = 17.7331$ $f_{i+1/2} = 21.3546$ $y_{\text{точно}} = 17.5219$ Истинска грешка = 0.000327793
 $i = 13$ $x_i = 6.26$ $y_i = 17.9487$ $f_i = 21.5667$ $x_{i+1/2} = 6.27$ $y_{i+1/2} = 18.1644$ $f_{i+1/2} = 21.7788$ $y_{\text{точно}} = 17.9491$ Истинска грешка = 0.00036229
 $i = 14$ $x_i = 6.28$ $y_i = 18.3843$ $f_i = 21.9951$ $x_{i+1/2} = 6.29$ $y_{i+1/2} = 18.6042$ $f_{i+1/2} = 22.2115$ $y_{\text{точно}} = 18.3847$ Истинска грешка = 0.000398049
 $i = 15$ $x_i = 6.3$ $y_i = 18.8285$ $f_i = 22.4322$ $x_{i+1/2} = 6.31$ $y_{i+1/2} = 19.0528$ $f_{i+1/2} = 22.6529$ $y_{\text{точно}} = 18.8289$ Истинска грешка = 0.000435105
 $i = 16$ $x_i = 6.32$ $y_i = 19.2816$ $f_i = 22.8781$ $x_{i+1/2} = 6.33$ $y_{i+1/2} = 19.5103$ $f_{i+1/2} = 23.1033$ $y_{\text{точно}} = 19.282$ Истинска грешка = 0.000473498
 $i = 17$ $x_i = 6.34$ $y_i = 19.7436$ $f_i = 23.3331$ $x_{i+1/2} = 6.35$ $y_{i+1/2} = 19.977$ $f_{i+1/2} = 23.5629$ $y_{\text{точно}} = 19.7441$ Истинска грешка = 0.000513265
 $i = 18$ $x_i = 6.36$ $y_i = 20.2149$ $f_i = 23.7973$ $x_{i+1/2} = 6.37$ $y_{i+1/2} = 20.4528$ $f_{i+1/2} = 24.0317$ $y_{\text{точно}} = 20.2154$ Истинска грешка = 0.000554446
 $i = 19$ $x_i = 6.38$ $y_i = 20.6955$ $f_i = 24.2709$ $x_{i+1/2} = 6.39$ $y_{i+1/2} = 20.9382$ $f_{i+1/2} = 24.5101$ $y_{\text{точно}} = 20.6961$ Истинска грешка = 0.000597083
 $i = 20$ $x_i = 6.4$ $y_i = 21.1857$ $f_i = 24.754$ $x_{i+1/2} = 6.41$ $y_{i+1/2} = 21.4333$ $f_{i+1/2} = 24.9981$ $y_{\text{точно}} = 21.1864$ Истинска грешка = 0.000641217
 $i = 21$ $x_i = 6.42$ $y_i = 21.6857$ $f_i = 25.247$ $x_{i+1/2} = 6.43$ $y_{i+1/2} = 21.9381$ $f_{i+1/2} = 25.496$ $y_{\text{точно}} = 21.6864$ Истинска грешка = 0.000686892
 $i = 22$ $x_i = 6.44$ $y_i = 22.1956$ $f_i = 25.75$ $x_{i+1/2} = 6.45$ $y_{i+1/2} = 22.4531$ $f_{i+1/2} = 26.004$ $y_{\text{точно}} = 22.1963$ Истинска грешка = 0.000734152
 $i = 23$ $x_i = 6.46$ $y_i = 22.7157$ $f_i = 26.2631$ $x_{i+1/2} = 6.47$ $y_{i+1/2} = 22.9783$ $f_{i+1/2} = 26.5223$ $y_{\text{точно}} = 22.7165$ Истинска грешка = 0.000783041

$i = 24$ $x_i = 6.48$ $y_i = 23.2461$ $f_i = 26.7866$ $x_{i+1/2} = 6.49$ $y_{i+1/2} = 23.514$ $f_{i+1/2} = 27.051$ $y_{\text{точно}} = 23.247$ Истинска грешка = 0.000833608
 $i = 25$ $x_i = 6.5$ $y_i = 23.7871$ $f_i = 27.3207$ $x_{i+1/2} = 6.51$ $y_{i+1/2} = 24.0603$ $f_{i+1/2} = 27.5905$ $y_{\text{точно}} = 23.788$ Истинска грешка = 0.000885898
 $i = 26$ $x_i = 6.52$ $y_i = 24.3389$ $f_i = 27.8656$ $x_{i+1/2} = 6.53$ $y_{i+1/2} = 24.6176$ $f_{i+1/2} = 28.1409$ $y_{\text{точно}} = 24.3399$ Истинска грешка = 0.000939962
 $i = 27$ $x_i = 6.54$ $y_i = 24.9018$ $f_i = 28.4216$ $x_{i+1/2} = 6.55$ $y_{i+1/2} = 25.186$ $f_{i+1/2} = 28.7024$ $y_{\text{точно}} = 24.9028$ Истинска грешка = 0.00099585
 $i = 28$ $x_i = 6.56$ $y_i = 25.4758$ $f_i = 28.9888$ $x_{i+1/2} = 6.57$ $y_{i+1/2} = 25.7657$ $f_{i+1/2} = 29.2753$ $y_{\text{точно}} = 25.4769$ Истинска грешка = 0.00105361
 $i = 29$ $x_i = 6.58$ $y_i = 26.0613$ $f_i = 29.5675$ $x_{i+1/2} = 6.59$ $y_{i+1/2} = 26.357$ $f_{i+1/2} = 29.8598$ $y_{\text{точно}} = 26.0624$ Истинска грешка = 0.00111331
 $i = 30$ $x_i = 6.6$ $y_i = 26.6585$ $f_i = 30.1579$ $x_{i+1/2} = 6.61$ $y_{i+1/2} = 26.9601$ $f_{i+1/2} = 30.4561$ $y_{\text{точно}} = 26.6597$ Истинска грешка = 0.00117498
 $i = 31$ $x_i = 6.62$ $y_i = 27.2676$ $f_i = 30.7603$ $x_{i+1/2} = 6.63$ $y_{i+1/2} = 27.5752$ $f_{i+1/2} = 31.0645$ $y_{\text{точно}} = 27.2689$ Истинска грешка = 0.00123869
 $i = 32$ $x_i = 6.64$ $y_i = 27.8889$ $f_i = 31.3748$ $x_{i+1/2} = 6.65$ $y_{i+1/2} = 28.2027$ $f_{i+1/2} = 31.6852$ $y_{\text{точно}} = 27.8902$ Истинска грешка = 0.0013045
 $i = 33$ $x_i = 6.66$ $y_i = 28.5226$ $f_i = 32.0018$ $x_{i+1/2} = 6.67$ $y_{i+1/2} = 28.8426$ $f_{i+1/2} = 32.3184$ $y_{\text{точно}} = 28.524$ Истинска грешка = 0.00137246
 $i = 34$ $x_i = 6.68$ $y_i = 29.169$ $f_i = 32.6414$ $x_{i+1/2} = 6.69$ $y_{i+1/2} = 29.4954$ $f_{i+1/2} = 32.9645$ $y_{\text{точно}} = 29.1704$ Истинска грешка = 0.00144264
 $i = 35$ $x_i = 6.7$ $y_i = 29.8283$ $f_i = 33.294$ $x_{i+1/2} = 6.71$ $y_{i+1/2} = 30.1612$ $f_{i+1/2} = 33.6237$ $y_{\text{точно}} = 29.8298$ Истинска грешка = 0.00151509
 $i = 36$ $x_i = 6.72$ $y_i = 30.5008$ $f_i = 33.9599$ $x_{i+1/2} = 6.73$ $y_{i+1/2} = 30.8404$ $f_{i+1/2} = 34.2961$ $y_{\text{точно}} = 30.5024$ Истинска грешка = 0.00158989
 $i = 37$ $x_i = 6.74$ $y_i = 31.1867$ $f_i = 34.6391$ $x_{i+1/2} = 6.75$ $y_{i+1/2} = 31.5331$ $f_{i+1/2} = 34.9822$ $y_{\text{точно}} = 31.1884$ Истинска грешка = 0.00166708
 $i = 38$ $x_i = 6.76$ $y_i = 31.8863$ $f_i = 35.3322$ $x_{i+1/2} = 6.77$ $y_{i+1/2} = 32.2397$ $f_{i+1/2} = 35.6822$ $y_{\text{точно}} = 31.8881$ Истинска грешка = 0.00174675
 $i = 39$ $x_i = 6.78$ $y_i = 32.6$ $f_i = 36.0392$ $x_{i+1/2} = 6.79$ $y_{i+1/2} = 32.9604$ $f_{i+1/2} = 36.3963$ $y_{\text{точно}} = 32.6018$ Истинска грешка = 0.00182896
 $i = 40$ $x_i = 6.8$ $y_i = 33.3279$ $f_i = 36.7606$ $x_{i+1/2} = 6.81$ $y_{i+1/2} = 33.6955$ $f_{i+1/2} = 37.1249$ $y_{\text{точно}} = 33.3298$ Истинска грешка = 0.00191378
 $i = 41$ $x_i = 6.82$ $y_i = 34.0704$ $f_i = 37.4965$ $x_{i+1/2} = 6.83$ $y_{i+1/2} = 34.4454$ $f_{i+1/2} = 37.8682$ $y_{\text{точно}} = 34.0724$ Истинска грешка = 0.00200128
 $i = 42$ $x_i = 6.84$ $y_i = 34.8278$ $f_i = 38.2473$ $x_{i+1/2} = 6.85$ $y_{i+1/2} = 35.2102$ $f_{i+1/2} = 38.6265$ $y_{\text{точно}} = 34.8299$ Истинска грешка = 0.00209153
 $i = 43$ $x_i = 6.86$ $y_i = 35.6003$ $f_i = 39.0133$ $x_{i+1/2} = 6.87$ $y_{i+1/2} = 35.9904$ $f_{i+1/2} = 39.4002$ $y_{\text{точно}} = 35.6025$ Истинска грешка = 0.00218461
 $i = 44$ $x_i = 6.88$ $y_i = 36.3883$ $f_i = 39.7948$ $x_{i+1/2} = 6.89$ $y_{i+1/2} = 36.7862$ $f_{i+1/2} = 40.1895$ $y_{\text{точно}} = 36.3906$ Истинска грешка = 0.00228061
 $i = 45$ $x_i = 6.9$ $y_i = 37.1921$ $f_i = 40.5921$ $x_{i+1/2} = 6.91$ $y_{i+1/2} = 37.598$ $f_{i+1/2} = 40.9948$ $y_{\text{точно}} = 37.1945$ Истинска грешка = 0.00237958
 $i = 46$ $x_i = 6.92$ $y_i = 38.012$ $f_i = 41.4056$ $x_{i+1/2} = 6.93$ $y_{i+1/2} = 38.426$ $f_{i+1/2} = 41.8164$ $y_{\text{точно}} = 38.0145$ Истинска грешка = 0.00248163

$i = 47$ $x_i = 6.94$ $y_i = 38.8483$ $f_i = 42.2355$ $x_{i+1/2} = 6.95$ $y_{i+1/2} = 39.2707$ $f_{i+1/2} = 42.6546$ $y_{\text{точно}} = 38.8509$ Истинска грешка = 0.00258684

$i = 48$ $x_i = 6.96$ $y_i = 39.7014$ $f_i = 43.0822$ $x_{i+1/2} = 6.97$ $y_{i+1/2} = 40.1322$ $f_{i+1/2} = 43.5098$ $y_{\text{точно}} = 39.7041$ Истинска грешка = 0.00269528

$i = 49$ $x_i = 6.98$ $y_i = 40.5716$ $f_i = 43.946$ $x_{i+1/2} = 6.99$ $y_{i+1/2} = 41.0111$ $f_{i+1/2} = 44.3822$ $y_{\text{точно}} = 40.5744$ Истинска грешка = 0.00280704

$i = 50$ $x_i = 7.$ $y_i = 41.4592$ $f_i = 44.8272$ $x_{i+1/2} = 7.01$ $y_{i+1/2} = 41.9075$ $f_{i+1/2} = 45.2723$ $y_{\text{точно}} = 41.4622$ Истинска грешка = 0.00292223

