

Числено интергриране.

Квадратурни формули на Нютон-Коутс

$$\int_6^7 \sqrt[7]{\sin[x+3]^2} dx$$

1. Съставяне на мрежа:

$$a = 6; b = 7$$

Вариант за съставяне:

1.1 Даден е $h \Rightarrow n = \frac{b-a}{h}$

1.2 Даден е $n \Rightarrow h = \frac{b-a}{n}$

1.3 Даден е броя на възлите $n+1 \Rightarrow n \Rightarrow h$

$$x_i = a + i * h, i = \overline{0, n}$$

Вградените възможности на Wolfram

$$\text{In[*]:= } \int_6^7 \sqrt[7]{\sin[x+3]^2} dx$$

Out[*]=

$$\frac{7}{9} \left(\text{Hypergeometric2F1}\left[\frac{1}{2}, \frac{9}{14}, \frac{23}{14}, \sin[9]^2\right] \sin[9]^{9/7} + \text{Hypergeometric2F1}\left[\frac{1}{2}, \frac{9}{14}, \frac{23}{14}, \sin[10]^2\right] (-\sin[10])^{9/7} \right)$$

$$\text{In[*]:= \% // N}$$

Out[*]=

$$0.637467$$

За по-сложна функция

$$\text{In[*]} := \int_6^7 \frac{\sqrt[7]{\sin[x+3]^2}}{\tanh[e^3]} dx$$

Out[*]=

$$\frac{7}{9} \coth[e^3] \left(\text{Hypergeometric2F1}\left[\frac{1}{2}, \frac{9}{14}, \frac{23}{14}, \sin[9]^2\right] \sin[9]^{9/7} + \text{Hypergeometric2F1}\left[\frac{1}{2}, \frac{9}{14}, \frac{23}{14}, \sin[10]^2\right] (-\sin[10])^{9/7} \right)$$

$$\text{In[*]} := \int_6^7 \frac{\sqrt[7]{\sin[x+3]^2}}{\tanh[e^3] * \frac{\sqrt{\cos[x^2]}}{2x}} dx$$

Out[*]=

$$\int_6^7 \frac{2x \coth[e^3] (\sin[3+x]^2)^{1/7}}{\sqrt{\cos[x^2]}} dx$$

$$\text{In[*]} := \int_6^7 \frac{\sqrt[7]{\sin[x+3]^2}}{\tanh[e^3] * \frac{\sqrt{\cos[x^2]}}{2x}} dx // N$$

NIntegrate: Numerical integration converging too slowly; suspect one of the following: singularity, value of the integration is 0, highly oscillatory integrand, or WorkingPrecision too small.

NIntegrate: NIntegrate failed to converge to prescribed accuracy after 9 recursive bisections in x near {x} = {6.011762995235177}. NIntegrate obtained 7.57483 - 7.12394 i and 0.5861823615401939` for the integral and error estimates.

Out[*]=

7.57483 - 7.12394 i

Съставяне на мрежата

```
In[*] := a = 7.; b = 8;
h = 0.1;
n = (b - a) / h;
```

```
In[*] := Table[a + i * h, {i, 0, n}]
```

Out[*]=

{7., 7.1, 7.2, 7.3, 7.4, 7.5, 7.6, 7.7, 7.8, 7.9, 8.}

Леви правоъгълници

```
In[*]:= f[x_] :=  $\sqrt[7]{\sin[x+3]^2}$ 
Itochno =  $\int_a^b f[x] \, dx$  // N (*за сравнение*)
I1 = h *  $\sum_{i=0}^{n-1} f[a + i * h]$ 
```

```
Out[*]=
0.618496
```

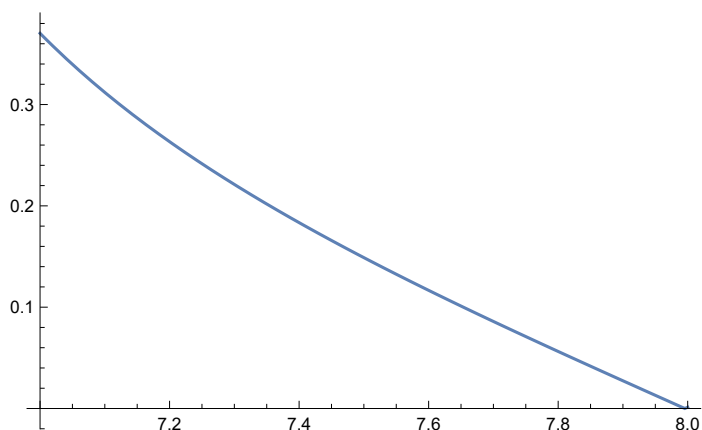
```
Out[*]=
0.941444
```

Оценка на грешката

Теоретична грешка

Намираме M_1

```
In[*]:= Plot[Abs[f'[x]], {x, a, b}]
Out[*]=
```



```
In[*]:= M1 = Abs[f'[a]]
Out[*]=
0.37032
```

```
In[*]:= R1 =  $\frac{(b-a)^2}{2n}$  * M1
Out[*]=
0.018516
```

Истинска грешка

```
In[*]:= Abs[I1 - Itochno]
Out[*]=
0.322949
```

Групираме всичко в една клетка

```

In[*]:= a = 7.; b = 8;
h = 0.1;
n =  $\frac{b-a}{h}$ ;
f[x_] :=  $\sqrt{\sin[x+3]^2}$ 
Itochno =  $\int_a^b f[x] dx$  // N; (*за сравнение*)
I1 = h *  $\sum_{i=0}^{n-1} f[a + i * h]$ ;
M1 = Abs[f'[a]];
R1 =  $\frac{(b-a)^2}{2 n}$  * M1;
Print["Мрежата е със стъпка ", h, " и брой подинтервали ", n]
Print["Приближената стойност по формулата на левите правоъгълници е ", I1]
Print["Точната стойност е ", Itochno]
Print["Теоретичната грешка по формулата на левите правоъгълници е ", R1]
Print["Истинската грешка по формулата на левите правоъгълници е ",
      Abs[I1 - Itochno]]

Мрежата е със стъпка 0.1 и брой подинтервали 10.

Приближената стойност по формулата на левите правоъгълници е 0.941444
Точната стойност е 0.618496
Теоретичната грешка по формулата на левите правоъгълници е 0.018516
Истинската грешка по формулата на левите правоъгълници е 0.322949

```

Извод: Имаме несъответствие между истинската и теоретичната грешка. Това се получава заради липса на гладкост на избраната подинтегрална функция.

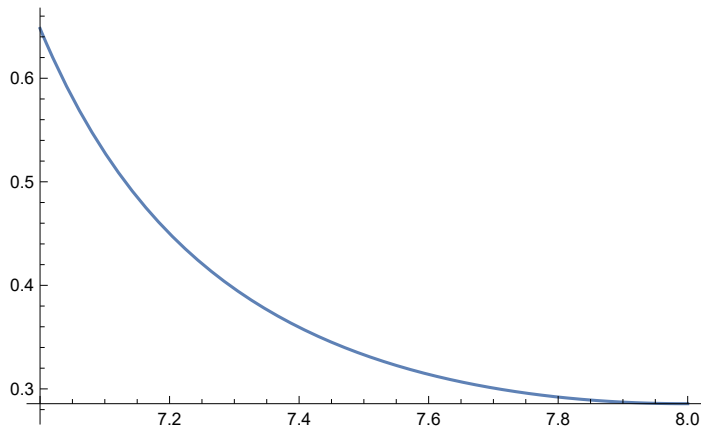
Използваме друга функция за примерите.

Трапеци

Намираме M_2

```
In[*]:= Plot[Abs[f''[x]], {x, a, b}]
```

```
Out[*]=
```



```
In[*]:= a = 7.; b = 8;
```

```
h = 0.1;
```

```
n = (b - a) / h;
```

```
f[x_] := (Pi Sin[x]) / (x^2 + 2)
```

```
Itochno = Integrate[f[x], {x, a, b}] // N; (*за сравнение*)
```

```
IT = h/2 * (f[a] + 2 Sum[f[a + i*h], {i, 1, n-1}] + f[b]);
```

```
M2 = Abs[f''[a]];
```

```
RT = ((b - a)^3) / (12 n^2) * M2;
```

```
Print["Мрежата е със стъпка ", h, " и брой подинтервали ", n]
```

```
Print["Приближената стойност по формулата на трапците е ", IT]
```

```
Print["Точната стойност е ", Itochno]
```

```
Print["Теоретичната грешка по формулата на трапците е ", RT]
```

```
Print["Истинската грешка по формулата на трапците е ", Abs[IT - Itochno]]
```

Мрежата е със стъпка 0.1 и брой подинтервали 10.

Приближената стойност по формулата на трапците е 0.0482622

Точната стойност е 0.0483069

Теоретичната грешка по формулата на трапците е 0.0000512122

Истинската грешка по формулата на трапците е 0.0000447328

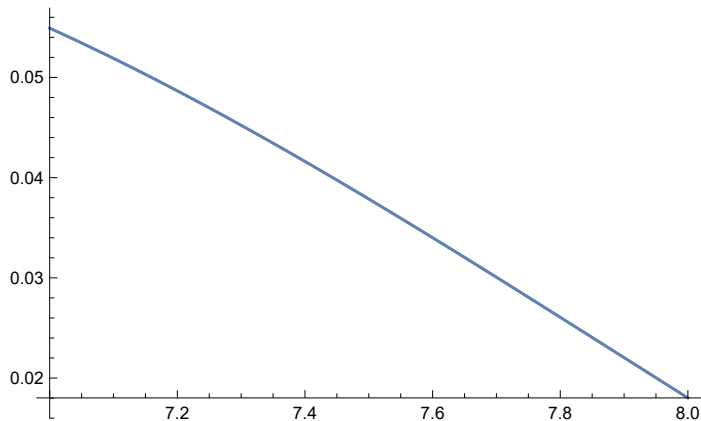
СИМПСЪН

Изискване за прилагане на формулата е броят на подинтервалите да е четно число

Намираме M_4

```
In[*]:= Plot[Abs[f''''[x]], {x, a, b}]
```

```
Out[*]=
```



```
In[*]:= a = 7.; b = 8;
h = 0.1;
n = (b - a) / h;
m = n / 2;
f[x_] := (Pi Sin[x]) / (x^2 + 2)
Itochno = Integrate[f[x], {x, a, b}] // N; (*за сравнение*)
IS = (h/3) * (f[a] + 4 Sum[f[a + (2 i - 1) * h], {i, 1, m}] + 2 Sum[f[a + (2 i) * h], {i, 1, m-1}] + f[b]);
M4 = Abs[f''''[a]];
RS = ((b - a)^5 / 180 n^4) * M4;
Print["Мрежата е със стъпка ", h, " и брой подинтервали ", n]
Print["Приближената стойност по формулата на Симпсън е ", IS]
Print["Точната стойност е ", Itochno]
Print["Теоретичната грешка по формулата на Симпсън е ", RS]
Print["Истинската грешка по формулата на Симпсън е ", Abs[IS - Itochno]]

Мрежата е със стъпка 0.1 и брой подинтервали 10.

Приближената стойност по формулата на Симпсън е 0.0483069
Точната стойност е 0.0483069
Теоретичната грешка по формулата на Симпсън е 3.05089 × 10-8
Истинската грешка по формулата на Симпсън е 2.07853 × 10-8
```

Пресмятане с предварително зададена грешка

Леви правоъгълници

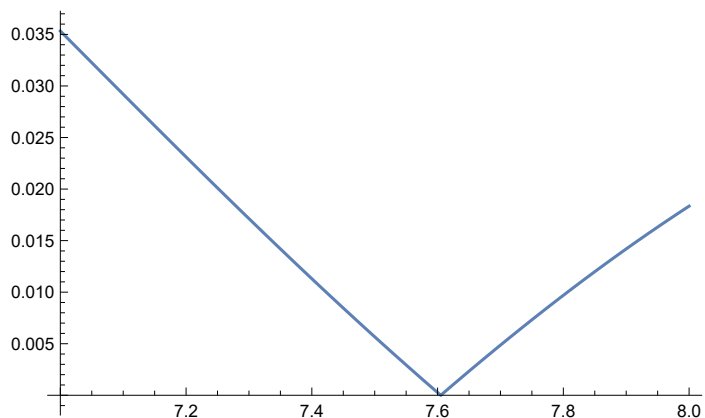
Определяме мрежата, n=?

```
In[*]:= f[x_] :=  $\frac{\pi \sin[x]}{x^2 + 2}$ 
```

```
In[*]:= (*Намираме  $M_4$ *)
```

```
In[*]:= Plot[Abs[f'[x]], {x, a, b}]
```

```
Out[*]=
```



```
In[*]:= M1 = Abs[f'[a]]
```

```
Out[*]=
```

```
0.0353308
```

```
In[*]:= eps = 10-8;
```

```
Clear[n]
```

```
Reduce [ $\frac{(b-a)^2}{2n} * M1 \leq \text{eps}, n]$ 
```

Reduce: Reduce was unable to solve the system with inexact coefficients. The answer was obtained by solving a corresponding exact system and numericizing the result.

```
Out[*]=
```

```
 $n < 0 \mid \mid n \geq 1.76654 \times 10^6$ 
```

```

In[*]:= a = 7.; b = 8;
n = 1.77 * 106;
h =  $\frac{b - a}{n}$ ;
f[x_] :=  $\frac{\pi \sin[x]}{x^2 + 2}$ 
Itochno =  $\int_a^b f[x] dx$  // N; (*за сравнение*)
I1 = h *  $\sum_{i=0}^{n-1} f[a + i * h]$ ;
M1 = Abs[f'[a]];
R1 =  $\frac{(b - a)^2}{2 n}$  * M1;
Print["Мрежата е със стъпка ", h, " и брой подинтервали ", n]
Print["Приближената стойност по формулата на левите правоъгълници е ", I1]
Print["Точната стойност e ", Itochno]
Print["Теоретичната грешка по формулата на левите правоъгълници e ", R1]
Print["Истинската грешка по формулата на левите правоъгълници e ",
Abs[I1 - Itochno]]

```

Part: Part specification KeyAbsent is not applicable.

Append: Nonatomic expression expected at position 1 in Append[KeyAbsent, Switch[Missing[KeyAbsent, Source], _List, None, _After, -1, _Before, 1]].

Part: The expression Switch[Missing[KeyAbsent, Source], _List, None, _After, -1, _Before, 1] cannot be used as a part specification.

Append: Append called with 3 arguments; 1 or 2 arguments are expected.

Part: The expression Switch[Missing[KeyAbsent, Source], _List, None, _After, -1, _Before, 1] cannot be used as a part specification.

Append: Append called with 4 arguments; 1 or 2 arguments are expected.

Part: The expression Switch[Missing[KeyAbsent, Source], _List, None, _After, -1, _Before, 1] cannot be used as a part specification.

General: Further output of Part::pkspec1 will be suppressed during this calculation.

Append: Append called with 5 arguments; 1 or 2 arguments are expected.

General: Further output of Append::argt will be suppressed during this calculation.

Part: Part specification KeyAbsent is not applicable.

Append: Nonatomic expression expected at position 1 in Append[KeyAbsent, Switch[Missing[KeyAbsent, Source], _List, None, _After, -1, _Before, 1]].

