Линейни уравнения от първи ред. Уравнения на Бернули

Информатика, 2021/2022

Линейни уравнения от първи ред

- По какво си приличат следните диференциални уравнения?

$$y' = \frac{y}{x} + \operatorname{ctg} x$$
$$y' = (2\sin x)\, y + x^3$$
$$y' = 2x^2 y + \ln x$$

- Диференциални уравнения от вида

$$y' = a(x)\, y + b(x), \tag{1}$$

където $a(x)$ и $b(x)$ са непрекъснати функции в даден интервал Δ, се наричат линейни уравнения от първи ред.

- Първо разглеждаме случая $b(x) \equiv 0$ за всяко $x \in \Delta$. Тогава уравнението (1) става с разделящи се променливи

$$y' = a(x)\, y. \tag{2}$$

Последователно получаваме

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= a(x)\, y, \\ \frac{dy}{y} &= a(x)\, dx, \quad y \neq 0, \\ \ln|y| &= \int a(x)\, dx + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}, \\ y &= C\, e^{\int a(x)\, dx}, \quad C \neq 0. \end{aligned}$$

Очевидно $y = 0$ също е решение на (2), което може да се получи от последната формула за y, ако разрешим на C да приема и стойност 0. Тогава общото решение на (2) е

$$y = C\, e^{\int a(x)\, dx}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

- Сега ще потърсим и решението на уравнението (1) във вида

$$y = C(x)\, e^{\int a(x)\, dx}.$$

Функцията $C(x)$ определяме така, че за всяко $x \in \Delta$ да е изпълнено тъждеството

$$\left(C(x)\, e^{\int a(x)\, dx}\right)' \equiv a(x)\left(C(x)\, e^{\int a(x)\, dx}\right) + b(x)\,,$$

т.е.

$$C'(x)\, e^{\int a(x)\, dx} + C(x)\; e^{\int a(x)\, dx}\, a(x) \equiv a(x)\, C(x)\, e^{\int a(x)\, dx} + b(x)\,,$$

откъдето

$$C'(x) = b(x)\, e^{-\int a(x)\, dx}\,.$$

Сега интегрираме двете страни и получаваме

$$C(x) = C + \int b(x)\, e^{-\int a(x)\, dx}\, dx, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Следователно решението на линейното уравнение (1) е

$$y = e^{\int a(x)\,dx}\left(C + \int b(x)\,e^{-\int a(x)\,dx}\,dx\right), \quad C \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Задача 1

Да се решат уравненията:

1) $xy' + (x+1)y = 3x^2e^{-x}$;

2) $y = x(y' - x\cos x)$;

3) $(\sin^2 y + x\operatorname{ctg} y)y' = 1$.

Решение. 1) Изразяваме y' и намираме

$$y' = -\frac{x+1}{x}y + 3xe^{-x},$$

което е уравнение от вида (1) с $a(x) = -\frac{x+1}{x}$ и $b(x) = 3xe^{-x}$. Тогава по формулата (3) получаваме

$$
\begin{aligned}
y &= e^{\int\left(-\frac{x+1}{x}\right)dx}\left(C + \int 3xe^{-x}\, e^{\int \frac{x+1}{x}\,dx}\, dx\right) \\
&= e^{-x-\ln|x|}\left(C + \int 3xe^{-x}\, e^{x+\ln|x|}\, dx\right) \\
&= \frac{e^{-x}}{|x|}\left(C + \int 3x|x|\, dx\right) = \frac{e^{-x}}{x}\left(C + \int 3x^2\, dx\right) \\
&= \frac{e^{-x}}{x}\left(C + x^3\right).
\end{aligned}
$$

2) Отг. $y = x(C + \sin x)$.

3) Уравнението

$$y' = \frac{1}{\sin^2 y + x \operatorname{ctg} y},$$

записано по този начин, очевидно не е линейно уравнение, но то е еквивалентно на

$$\frac{dx}{dy} = (\operatorname{ctg} y)x + \sin^2 y,$$

което е линейно по отношение на x. Тогава използваме формулата (3), като разменяме местата на x и y. Получаваме

$$\begin{aligned} x &= e^{\int \operatorname{ctg} y\, dy} \left(C + \int (\sin^2 y)\, e^{-\int \operatorname{ctg} y\, dy}\, dy \right) \\ &= e^{\ln|\sin y|} \left(C + \int (\sin^2 y)\, e^{-\ln|\sin y|}\, dy \right) \\ &= \sin y \left(C + \int \sin y\, dy \right) = \sin y\, (C - \cos y). \end{aligned}$$

Уравнения на Бернули

- По какво си приличат следните диференциални уравнения?

$$y' = \frac{y}{x} + (\operatorname{ctg} x)\, y^2$$
$$y' = (2 \sin x)\, y + \tfrac{x^3}{y^4}$$
$$y' = 2x^2 y + (\ln x)\sqrt{y}$$

- Диференциални уравнения от вида

$$y' = a(x)\, y + b(x)\, y^m, \quad m \in \mathbb{R}, \tag{4}$$

където $a(x)$ и $b(x)$ са непрекъснати функции в даден интервал Δ, се наричат уравнения на Бернули.

- при $m = 0 \Rightarrow$ линейно уравнение;
- при $m = 1 \Rightarrow$ уравнение с разделящи се променливи;

- при $m \neq 0;\, 1$ първо разделяме двете страни на уравнението (4) с $y^m \neq 0$,

$$\frac{y'}{y^m} = a(x)y^{1-m} + b(x) \tag{5}$$

и полагаме

$$y^{1-m} = z, \quad z = z(x).$$

Диференцираме това равенство спрямо x, като не забравяме, че $y = y(x)$,

$$z' = (1-m)y^{1-m-1}y' \quad \Rightarrow \quad \frac{y'}{y^m} = \frac{z'}{1-m}$$

и заместваме в (5). Получаваме

$$\frac{z'}{1-m} = a(x)z + b(x),$$

откъдето

$$z' = (1-m)a(x)z + (1-m)b(x).$$

Последното уравнение е линейно по отношение на z и решенията му можем да опишем с намерената формула. Накрая остана да отбележим, че $y = 0$ също е решение на (4) при $m > 0$.

Задача 2

Да се решат уравненията:

1) $xy' + y = y^2 \ln x$;

2) $2y' - \frac{x}{y} = \frac{xy}{x^2-1}$;

3) $xy' - 2x^3\sqrt{y} = 4y$;

4) $y'x^3 \sin y = xy' - 2y$.

Решение. 1) Имаме

$$y' = -\frac{1}{x}y + \frac{\ln x}{x}y^2.$$

Това е уравнение от вида (4) с $m = 2$, $a(x) = -\frac{1}{x}$ и $b(x) = \frac{\ln x}{x}$. Разделяме двете страни на уравнението с $y^2 \neq 0$ и намираме

$$\frac{y'}{y^2} = -\frac{1}{x}.\frac{1}{y} + \frac{\ln x}{x}.$$

Въвеждаме нова неизвестна функция $z = z(x)$,

$$z = \frac{1}{y}, \quad z' = -\frac{1}{y^2}y'$$

и заместваме в последното уравнение. Получаваме

$$-z' = -\frac{1}{x}z + \frac{\ln x}{x},$$

откъдето

$$z' = \frac{1}{x}z - \frac{\ln x}{x}.$$

По формулата (3) намираме

$$
\begin{aligned}
z &= e^{\int \frac{dx}{x}}\left(C - \int \frac{\ln x}{x} e^{-\int \frac{dx}{x}}\, dx\right) \\
&= x\left(C - \int \frac{\ln x}{x^2}\, dx\right) \\
&= x\left(C + \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x}\right),
\end{aligned}
$$

след интегриране по части. Като заместим z с $\frac{1}{y}$ получаваме

$$
\frac{1}{y} = Cx + \ln x + 1.
$$

Очевидно $y = 0$ също е решение на даденото уравнение.

2) Отг. $y^2 = x^2 - 1 + C\sqrt{|x^2 - 1|}$.

3) Отг. $y = x^4(C + x)^2;\ \ y = 0$.

4) Упътване. Имаме

$$y' = -\frac{2y}{x^3 \sin y - x},$$

откъдето

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2y}\,x - \frac{\sin y}{2y}\,x^3.$$

Това е уравнение на Бернули спрямо x. Разделяме двете страни с $x^3 \neq 0$ и получаваме

$$\frac{x'}{x^3} = \frac{1}{2y}.\frac{1}{x^2} - \frac{\sin y}{2y}.$$

Въвеждаме нова неизвестна функция $z = z(y)$,

$$z = \frac{1}{x^2}, \quad z' = -\frac{2}{x^3}\,x'.$$

Заместваме и стигаме до линейно уравнение спрямо x, което отново решаваме с помощта на формула (3).
Отг. $x^2(C - \cos y) = y; \;\; y = 0$.

Пример от икономиката

Не малко модели в икономиката се описват с диференциални уравнения.

Пример. Един от първите опростени модели на цикъл на растеж, разглеждан от Haavelno (1956) изглежда по следния начин. Нека производствената функция е

$$Y = KN^{\alpha},$$

където Y е продукцията, $K > 0$ е капиталното вложение (фиксирано), а N е предлаганата работна сила.
Нарастването на заетостта се моделира като

$$\frac{\dot{N}}{N} = \alpha - \beta \frac{N}{Y}, \quad \alpha, \beta > 0.$$

Комбинирайки двете, получаваме нелинейно уравнение от първи ред

$$\dot{N} = \alpha N - \beta \frac{N^{2-\alpha}}{K},$$

което е уравнение на Бернули и се решава точно.