МАТЕМАТИЧЕСКА ЛОГИКА

Съждително смятане

- ***Съждение*** е всяка мисъл (*разказно изречение*), която е вярна или невярна.
- ***Съждителна константа*** - вярно съждение (истина **T**) или невярно (лъжа **F**)

Пример: Кои от следните изречения са съждения?

- Пловдив е град в България. – съждение, което е истина
- Испания е река в България. – съждение, което е лъжа
- Кога ще ядем? – не е съждение
- 3 + 3 = 8 – съждение, което е лъжа
- $x + 6 \neq 9$ – не е съждение
- Прочетете този текст внимателно! – не е съждение

Операции върху съждения:

- **Конюнкция** на две съждения $P \wedge Q$ се нарича съждението „*P и Q*", което е вярно тогава и само когато са верни едновременно и двете съждения.
- **Дизюнкция** на две съждения $P \vee Q$ се нарича съждението „*P или Q*", което е вярно, тогава и само тогава когато поне едно от двете дадени съждения е вярно.
- **Импликация** на две съждения $P \rightarrow Q$ се нарича съждението „*Ако P то Q*", което е невярно съждение тогава и само тогава, когато съждението P е вярно и съждението Q е невярно. Ще наричаме P – хипотеза, а Q – заключение.
- **Логическо отрицание** на съждението P се нарича съждението, което се получава по правилото „*Не е вярно, че P*" и ще означаваме с $\neg P$ и ще казваме, че $\neg P$ е вярно, когато P е невярно и обратно. (възможни означения $\rceil P$, $\overline{P}$ или !P)
- **Двойна импликация на съжденията (Еквиваленция)** $P \leftrightarrow Q$ се нарича съждението „*P тогава и само тогава, когато Q*" и е вярна тогава и само тогава, когато двете съждения имат еднакви верностни стойности.

Таблица от верностни стойности

P	**Q**	**$P \vee Q$**	**$P \wedge Q$**	**$P \rightarrow Q$**	**$P \leftrightarrow Q$**	**$\neg P$**	**$\neg Q$**
T	T	T	T	T	T	F	F
T	F	T	F	F	F	F	T
F	T	T	F	T	F	T	F
F	F	F	F	T	T	T	T

Приоритет при изчисляване на логически изрази:

- Скоби ()
- Отрицание ¬
- Конюнкция ∧
- Дизюнкция ∨
- Импликация →
- Двойна импликация ↔

Задачи:

Задача 1. Нека P, Q и R са следните съждения:

P: ”4 е по-малко от 7.”

Q: ”13 е просто число.”

R:” Париж е столицата на Франция.”

Образувайте следните съждения:

1. $\neg R$ 2. $P \vee Q$ 3. $P \to (Q \wedge R)$
4. $\neg P \vee \neg Q$ 5. $\neg (P \wedge Q)$ 6. $(P \to Q) \vee (Q \to R)$

Задача 2. Нека P, Q и R са следните съждения:

P: „Ще си довърша задачите по Дискретна математика.“

Q: „Ще отида на плаж.“

R: „Днес е слънчево.“

S: „Утре ще вали.“

Напишете логически изрази, съответстващи на следните изречения. Използвайте логическите съюзи ¬, ∨ , ∧ , →, ↔.

1. Ще си довърша задачите по Дискретна математика и ще отида на плаж.
2. Ако днес е слънчево, то утре ще вали.
3. Ще отида на плаж тогава и само тогава, когато си довърша задачите по дискретна математика.
4. Утре няма да вали, но няма да отида на плаж и ще си довърша задачите по дискретна математика.

Задача 3. Конструирайте верностна таблица за всяко от следните твърдения:

1. $\neg (P \vee \neg Q) \to \neg P$ 2. $Q \leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$
3. $(P \wedge Q) \to R$ 4. $((P \to Q) \vee (Q \to R)) \wedge \neg R$
5. $((P \to Q) \wedge (Q \to R)) \to (P \to R)$

Тавтология и еквивалентност. Логическо следствие

- ***Тавтология***: Всяко съждение, което е винаги вярно, независимо от верностните стойности на съставляващите го съждения.
- ***Противоречие:*** Съждение, което е винаги невярно.
  Можем лесно да ги разпознаем, ако във верностната таблица получим само T(тавтология) или само F(противоречие).
- ***Еквивалентност***: Нека S_1 и S_2 са две съждения. Казваме, че те са ***еквивалентни***, когато двете колони във верностната таблица, в които те получават стойностите си са еднакви.
- ***Логически следствия:*** Нека S1 и S2 са съставни съждения. Казваме, че S2 следва от S1, т.е. S1 $\Rightarrow$ S2, ако за всяко разпределение на верностните стойности на съждителните променливи в S1 и S2, от верността на S1 следва верността на S2.

Задача 4. Проверете дали следните твърдения са тавтологии:

1. $P \vee \neg P$
2. $(P \wedge (P \to Q)) \to Q$
3. $\neg P \to (P \to Q)$
4. $(P \to Q) \leftrightarrow (Q \vee \neg P)$
5. $(P \wedge Q) \to (P \vee \neg R)$

Задача 5. Проверете дали следните съждения са еквиваленции:

1. $\neg (P \vee Q)$ и $\neg P \wedge \neg Q$ – закон на Де Морган
2. $P \wedge (Q \vee R)$ и $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ – дистрибутивен закон
3. $\neg (P \to Q)$ и $\neg P \wedge Q$ – закон за отрицание на импликацията
4. $\neg (P \leftrightarrow Q)$ и $P \leftrightarrow \neg Q$
5. $\neg P \to (Q \to R)$ и $Q \to (P \vee R)$

Задача 6. Проверете дали логическите следствия са верни:

1. $(P \vee Q) \wedge (P \to Q)$ и Q
2. $(P \wedge Q) \to R$ и $(P \to R) \wedge (Q \to R)$
3. $(P \to R) \vee (Q \to R)$ и $(P \wedge Q) \to R$
4. $\neg P \leftrightarrow Q$ и $P \leftrightarrow \neg Q$
5. $(P \wedge Q) \to (P \vee Q)$ и T

Предикатна логика

- ***Предикат:*** Твърдение, чиято истинност зависи от стойността на променливата като например: $H(x) =$ "x е човек"; $M(x, y) =$ "x е родител на y"; $Q(x) =$ "$x + 2 = x^2$".

Пример: Нека $P(x) =$ "$x + 3 > 7$". Тогава:

$P(-3) = F$

$P(5) = T$

$P(5) \wedge \neg P(0) = T$

$P(5) \wedge P(y)$ – не може да се определи

- ***Квантор за съществуване*** на P(x) е твърдението "Съществува елемент x, такъв че P(x)". Означение ∃x:P(x). Променливата x е квантова променлива, а съществуването на x се означава с ∃x.
- ***Универсален квантор*** на P(x) е твърдението „P(x) за всички стойности на x". Означение ∀x:P(x), което се чете: "За всяко x P(x)"

	Истина (T)	**Лъжа (F)**
$\forall x: P(x)$	*P(x)* е истина за всяка стойност на *x*	Има *x,* за което *P(x)* е лъжа
$\exists x: P(x)$	Има *x,* за което *P(x)* е истина	*P(x)* е лъжа за всяка стойност на *x*

Закон на ДеМорган за кванторите

Отрицание	**Еквивалентно твърдение**	**Истина (T) на отрицанието**	**Лъжа (F) на отрицанието**
$\neg\exists x P(x)$	$\forall x \neg P(x)$	*P(x)* е лъжа за всяка стойност на *x*	Има *x,* за което *P(x)* е истина
$\neg\forall x P(x)$	$\exists x \neg P(x)$	Има *x,* за което *P(x)* е лъжа	*P(x)* е истина за всяка стойност на *x*

Задачи:

Задача 1. Какво означават следните математически записи?

1. $\forall \boldsymbol{x}: \forall \boldsymbol{y}: \forall \boldsymbol{z}: (\boldsymbol{x}(\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}) = \boldsymbol{xy} + \boldsymbol{xz})$
2. $\exists \boldsymbol{z}: (\forall \boldsymbol{x}: \boldsymbol{x} + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}) \wedge (\forall \boldsymbol{x}: \exists \boldsymbol{y}: \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{z})$

Задача 2. Определете верността на твърденията:

а) $\forall \mathrm{x}: \mathrm{x}^2 + \mathrm{x} + 2 > 0$;

б) $\exists \mathrm{x}: \mathrm{x}^2 + \mathrm{x} + 2 = 0$;

в) $\forall \mathrm{x}: \mathrm{x}^2 + \mathrm{x} + 2 = 0$;

г) $\neg\exists \mathrm{x}: \mathrm{x}^2 + \mathrm{x} + 2 = 0$.

Задача 3. Какви са отрицанията на следните твърдения $\forall x\colon x^2 > x + 5$ и $\exists x\colon x^2 + x = 5$.

Задача 4. Верни ли са твърденията:

1. Всички прости числа са нечетни
2. Всяко число, което се дели на 6 се дели и на 2.
3. Съществува правоъгълник, на който диагоналите не са равни.

Изкажете отрицанията им.

Задача 5. Запишете твърденията: „*Някои студенти от този курс са посетили лекция по Дискретна математика*“ и „*Всеки студент от този клас е посетил лекция по Информатика или по Дискретна математика*“ на езика на предикатната логика.

Задача 6. Запишете на езика на предикатната логика отрицанията на следните твърдения: „*Има студенти отличници*“ и „*Всички студенти решават допълнителни задачи*“.

Задача 7. Запишете на езика на предикатната логика следните твърдения:

A:„*Лъвовете са свирепи*“

B: „*Някои лъвове не пият кафе* “

C: “*Някои свирепи създания не пият кафе*”

Допълнителни задачи:

Задача 1. Проверете дали следните твърдения са тавтологии:

1. $P \rightarrow (P \vee Q)$
2. $(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow ((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P))$
3. $(\neg P \wedge (P \vee Q)) \rightarrow Q$
4. $((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)) \rightarrow (P \rightarrow R)$
5. $(P \wedge (P \rightarrow Q)] \rightarrow Q$
6. $((P \vee Q) \wedge (P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R)] \rightarrow R$

Задача 2. Конструирайте верностна таблица за всяко от следните твърдения:

1. $(P \vee Q) \rightarrow (P \wedge Q)$
2. $\neg P \wedge (Q \rightarrow P)$. Какво можете да заключите за P и Q, ако твърдението е истина?

Задача 3. Проверете дали следните твърдения са логически еквиваленции, „*Няма да вали дъжд или сняг*“ и „*Няма да вали дъжд и няма да вали сняг*“:

Задача 4. Проверете дали следните твърдения са логически еквиваленции

1. $(P \vee Q) \rightarrow R$ и $(P \rightarrow R) \vee (Q \rightarrow P)$ 2. $\neg (P \rightarrow Q)$ и $P \wedge \neg Q$

Задача 5. Определете верността на всяко от следните твърдения в множеството на целите числа, ако $P(x): x^2 - 1 > 2x$.

а) $P(0)$

б) $P(2)$

в) $P(-2)$

г) $\exists x P(x)$

д) $\forall x P(x)$

е) $\neg\exists x P(x)$

ж) $\exists x \neg P(x)$

з) $\neg\exists x \neg P(x)$

Задача 6. Нека $C(x) =$ "x e комик" и $F(x) =$ "x е забавен" приложени за всички хора. Изразете следните твърдения на български език:

1. $\forall x(C(x) \rightarrow F(x))$
2. $\forall x(C(x) \wedge F(x))$
3. $\exists x(C(x) \rightarrow F(x))$
4. $\exists x(C(x) \wedge F(x))$

Задача 7. Запишете на езика на предикатната логика следните твърдения:

A:„*Всички синигери пеят добре*“

B: „*Големите птици не живеят в хралупи* “

C: “*Птиците, които не живеят хралупи, не пеят добре*”

D: „*Синигерите са малки*“

Упътване: Използвайте предикатите:

$P(x) =$ "x е синигер"

$Q(x) =$ "x е голям"

$R(x) =$ "x живее в хралупа"

$S(x) =$ "x пее добре"