Линейни хомогенни диференциални уравнения от n-ти ред с постоянни коефициенти

Информатика, 2021/2022

- Уравнение от вида

$$y^{(n)} + a_1\, y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}\, y' + a_n\, y = 0, \tag{1}$$

където $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$, се нарича линейно хомогенно диференциално уравнение от n-ти ред с постоянни коефициенти.

- Ще покажем, че за това уравнение съществуват частни решения от вида $y = e^{\lambda x}$, където λ е константа. Наистина, като заместим в (1) получаваме

$$(e^{\lambda x})^{(n)} + a_1\, (e^{\lambda x})^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}\, (e^{\lambda x})' + a_n\, e^{\lambda x} \equiv 0.$$

От $(e^{\lambda x})^{(k)} = \lambda^k\, e^{\lambda x}$ следва, че горното равенство е еквивалентно на

$$e^{\lambda x}\left(\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n\right) \equiv 0.$$

Делим двете страни на $e^{\lambda x}$ и получаваме за λ уравнението

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0, \tag{2}$$

което се нарича характеристично уравнение за (1), а неговите корени – характеристични корени.

- Възможни са няколко случая за характеристичните корени.

I случай. Всички корени $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ са различни. Тогава функциите

$$y_i = e^{\lambda_i x}, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

са n на брой решения на (1). Ще докажем, че те са линейно независими. За целта пресмятаме детерминантата на Вронски

$$
\begin{aligned}
W[e^{\lambda_1 x}, \dots, e^{\lambda_n x}] &= \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & \dots & e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \dots & \lambda_n e^{\lambda_n x} \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 x} & \dots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n x} \end{vmatrix} \\
&= e^{\lambda_1 x} \dots e^{\lambda_n x} \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_n \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} \\
&= e^{(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)x} \prod_{1 \le i < j \le n} (\lambda_i - \lambda_j).
\end{aligned}
$$

Очевидно, щом $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$, то горната детерминанта е различна от 0.

Тогава, съгласно Теорема 3 от Лекция 7, функциите

$$e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \dots, e^{\lambda_n x}$$

са линейно независими и следователно образуват фундаментална система решения. Съгласно Теорема 7 от Лекция 7, общото решение на (1) е

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + C_n e^{\lambda_n x},$$

където $C_1, C_2, \dots, C_n$ са произволни константи.

Забележка. (i) Ако уравнението (1) има за решение комплекснозначната функция $y(x) = u(x) + i\, v(x)$, то функциите $u(x)$ и $v(x)$ също са решения на това уравнение.

(ii) Ако характеристичното уравнение (2) има комплексен корен $p + iq$, то за решението $y = e^{(p+iq)x}$ по формулата на Ойлер имаме

$$e^{(p+iq)x} = e^{px}(\cos qx + i \sin qx)$$

и като отделим реалната от имагинерната част получаваме, че реалните функции $e^{px} \cos qx$ и $e^{px} \sin qx$ също са решения на (1). Освен това непосредствено се проверява, че те са линейно независими (докажете го!).

Следователно, ако характеристичното уравнение (2) има комплексно спрегнати корени $p \pm iq$, то двойката комплекснозначни линейно независими функции

$$e^{(p+iq)x}, \ e^{(p-iq)x}$$

може да бъде заменена с двойката

$$e^{px} \cos qx, \ e^{px} \sin qx.$$

II случай. Характеристичното уравнение (2) има кратни корени. Нека λ е негов k-кратен корен. Означаваме

$$\chi(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n.$$

Тогава са изпълнени равенствата

$$\chi(\lambda) = \chi'(\lambda) = \cdots = \chi^{(k-1)}(\lambda) = 0, \ \chi^{(k)}(\lambda) \neq 0. \qquad (3)$$

Означаваме също така

$$L[y] = y^{(n)} + a_1\, y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}\, y' + a_n y.$$

Лесно се вижда, че

$$\left(e^{\lambda x}\right)^{(n)}_x + a_1 \left(e^{\lambda x}\right)^{(n-1)}_x + \cdots + a_{n-1} \left(e^{\lambda x}\right)'_x + a_n\, e^{\lambda x} \equiv \chi(\lambda) e^{\lambda x}.$$

Диференцираме двете страни на горното тъждество относно λ като вземаме предвид, че

$$\left((e^{\lambda x})^{(n)}_x\right)'_\lambda = \left((e^{\lambda x})'_\lambda\right)^{(n)}_x = \left(x e^{\lambda x}\right)^{(n)}_x . \qquad (4)$$

Получаваме

$$\left(xe^{\lambda x}\right)_x^{(n)} + a_1 \left(xe^{\lambda x}\right)_x^{(n-1)} + \dots + a_n \left(xe^{\lambda x}\right) \equiv \chi'(\lambda)e^{\lambda x} + \chi(\lambda)\, xe^{\lambda x}. \tag{5}$$

Ако λ е k-кратен характеристичен корен, то съгласно равенствата (3), дясната страна на полученото тъждество е равна на 0, т.е.

$$\left(xe^{\lambda x}\right)_x^{(n)} + a_1 \left(xe^{\lambda x}\right)_x^{(n-1)} + \dots + a_n \left(xe^{\lambda x}\right) \equiv 0$$

или

$$L[xe^{\lambda x}] \equiv 0.$$

Последното тъждество показва, че функцията $xe^{\lambda x}$ също е решение на уравнението (1).

Диференцираме още веднъж двете страни на тъждеството (5) относно λ и след прилагане на формулите (4) получаваме, че

$$\left(x^2e^{\lambda x}\right)_x^{(n)} + a_1\left(x^2e^{\lambda x}\right)_x^{(n-1)} + \cdots + a_n\left(x^2e^{\lambda x}\right) \equiv \chi''(\lambda)e^{\lambda x} + 2\chi'(\lambda)\,xe^{\lambda x} + \chi(\lambda)\,x^2e^{\lambda x}, \qquad (6)$$

откъдето, след отчитане на равенствата (3),

$$L[x^2e^{\lambda x}] \equiv 0.$$

Ясно е, че след $(k-1)$-то диференциране на основното тъждество (5) относно λ и след прилагане на формулите (4), ще получим тъждество, лявата страна на което е $L[x^{(k-1)}e^{\lambda x}]$, а в дясната му страна ще участват събираеми, всяко от които съдържа или полинома $\chi(\lambda)$, или неговата производна до $(k-1)$-ви ред.

Съгласно (3), за k-кратния характеристичен корен λ получаваме, че дясната страна е равна на 0, откъдето

$$L[x^{(k-1)}e^{\lambda x}] \equiv 0.$$

Следователно функциите от системата

$$\{e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \dots, x^{k-1}e^{\lambda x}\}$$

са решения на уравнението (1). При това, поради условието $\chi^{(k)}(\lambda) \neq 0$, функцията $x^k e^{\lambda x}$ не е решение на (1).

Задача 1

Да се решат уравненията:

1) $y'' + 6y' + 5y = 0;$

2) $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0;$

3) $y''' + 6y'' + 9y' = 0;$

4) $y'' + 4y = 0.$

Решение. 1) Характеристичното уравнение на даденото диференциално уравнение е

$$\lambda^2 + 6\lambda + 5 = 0$$

с корени $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -5$. Тъй като корените са реални и различни, конструираме фундаментална система решения от функциите

$$y_1 = e^{\lambda_1 x} = e^{-x}, \quad y_2 = e^{\lambda_2 x} = e^{-5x}.$$

Общото решение на даденото диференциално уравнение е

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-5x},$$

където C_1 и C_2 са произволни реални константи.

2) Характеристичното уравнение на даденото диференциално уравнение е

$$\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = 0$$

или

$$(\lambda + 1)^3 = 0$$

с корени $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$. Тъй като имаме случай на трикратен корен, конструираме фундаментална система решения от функциите

$$y_1 = e^{-x}, \quad y_2 = xe^{-x}, \quad y_3 = x^2 e^{-x}.$$

Общото решение на даденото диференциално уравнение е

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + C_3 x^2 e^{-x},$$

където C_1, C_2 и C_3 са произволни реални константи.

3) Характеристичното уравнение на даденото диференциално уравнение е

$$\lambda^3 + 6\lambda^2 + 9\lambda = 0$$

или

$$\lambda(\lambda^2 + 6\lambda + 9) = 0$$

с корени $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = \lambda_3 = -3$. Конструираме фундаментална система решения, в която на еднократния реален корен 0 съответства функцията $y_1 = e^{0.x} = 1$, а на двукратния реален корен -3 съответстват функциите $y_2 = e^{-3x}$ и $y_3 = xe^{-3x}$. Общото решение на даденото диференциално уравнение е

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + C_3y_3 = C_1 + C_2e^{-3x} + C_3xe^{-3x},$$

където C_1, C_2 и C_3 са произволни реални константи.

4) Характеристичното уравнение на даденото диференциално уравнение е

$$\lambda^2 + 4 = 0$$

с корени $\lambda_1 = 2i$, $\lambda_2 = -2i$. Конструираме фундаментална система решения, като използваме само единия от двата комплексно спрегнати корени – например $\lambda_1 = 2i$. По формулата на Ойлер имаме

$$e^{(2i)x} = e^{(2x)i} = \cos 2x + i \sin 2x.$$

Реалната част $y_1 = \cos 2x$ и имагинерната част $y_2 = \sin 2x$ образуват реална фундаментална система решения на даденото уравнение. Общото решение на даденото диференциално уравнение е

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x,$$

където C_1 и C_2 са произволни реални константи.