

Числено интегриране.

Квадратурни формули на Нютон-Коутс

Задача: (**a** и **b** са съответно предпоследната и последната цифра от факултетния номер)

Дадена е функцията $f(x) = \frac{b+2-x}{2x^2+a+1}$

1. Табулирайте функцията $f(x)$ в интервала $[a, a+b+1]$, като разделите интервала на $b+5$ равни части.

2. Пресметнете $\int_a^{a+b+1} f(x) dx$ по формулата на **левите правоъгълници**, използвайки точките получени в 1. Каква е грешката на полученото приближение?

3. Пресметнете $\int_a^{a+b+1} f(x) dx$ по формулата на **десните правоъгълници**, използвайки точките получени в 1. Каква е грешката на полученото приближение?

4. Пресметнете $\int_a^{a+b+1} f(x) dx$ по формулата на **средните правоъгълници**, използвайки точките получени в 1. Каква е грешката на полученото приближение?

5. Пресметнете $\int_a^{a+b+1} f(x) dx$ по формулата на **трапеците**, използвайки точките получени в 1. Каква е грешката на полученото приближение?

6. Може ли по построената в 1 таблица да се използва квадратурната формула на **Симпсън** за изчисляване на интеграла $\int_a^{a+b+1} f(x) dx$? Обосновайте отговора си. Ако може, го изчислете и пресметнете каква е грешката на полученото приближение?

7. Пресметнете $\int_a^{a+b+1} f(x) dx$ по формулата на **левите правоъгълници** с точност 0.00001.

8. Пресметнете $\int_a^{a+b+1} f(x) dx$ по формулата на **десните правоъгълници** с точност 0.00001.

9. Пресметнете $\int_a^{a+b+1} f(x) dx$ по формулата на **средните правоъгълници** с точност 0.00001.

10. Пресметнете $\int_a^{a+b+1} f(x) dx$ по формулата на **трапеците** с точност 0.00001.

11. Пресметнете $\int_a^{a+b+1} f(x) dx$ по формулата на **Симпсън** с точност 0.00001.

Съставяне на мрежата

```

In[1]:= f[x_] :=  $\frac{9 - x}{2x^2 + 7}$ 
a = 6.; b = 14.;
h =  $\frac{b - a}{n}$ ;
n = 12;
Print["Мрежата е с брой подинтервали n = ", n, " и стъпка h = ", h]
xt = Table[a + i * h, {i, 0, n}]

Мрежата е с брой подинтервали n = 12 и стъпка h = 0.666667

Out[6]= {6., 6.66667, 7.33333, 8., 8.66667, 9.33333,
10., 10.6667, 11.3333, 12., 12.6667, 13.3333, 14.}

In[7]:= f[xt]
Out[7]= {0.0379747, 0.0243337, 0.014549, 0.00740741, 0.00212014, -0.00183936, -0.00483092,
-0.00710564, -0.00884211, -0.0101695, -0.0111826, -0.0119522, -0.0125313}

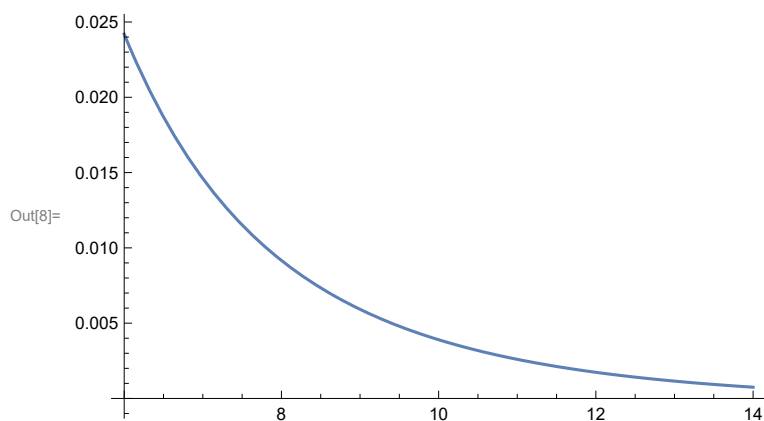
```

Леви правоъгълници

```

In[8]:= Plot[Abs[f'[x]], {x, a, b}]

```



```

In[9]:= a = 6.; b = 14.;
h =  $\frac{b - a}{n}$ ;
n = 12;
f[x_] :=  $\frac{9 - x}{2 x^2 + 7}$ 
Itochno =  $\int_a^b f[x] \, dx$ ;
I1 =  $h * \sum_{i=0}^{n-1} f[a + i * h]$ ;
M1 = Abs[f'[a]];
R1 =  $\frac{(b - a)^2}{2 n} * M1$ ;
Print["Мрежата е със стъпка ", h, " и брой подинтервали ", n]
Print["Приближената стойност по формулата на левите правоъгълници е ", I1]
Print["Точната стойност е ", Itochno]
Print["Теоретичната грешка по формулата на левите правоъгълници е ", R1]
Print["Истинската грешка по формулата на левите правоъгълници е ",
Abs[I1 - Itochno]]

Мрежата е със стъпка 0.666667 и брой подинтервали 12

Приближената стойност по формулата на левите правоъгълници е 0.0203084

Точната стойност е 0.00260677

Теоретичната грешка по формулата на левите правоъгълници е 0.0645196

Истинската грешка по формулата на левите правоъгълници е 0.0177016

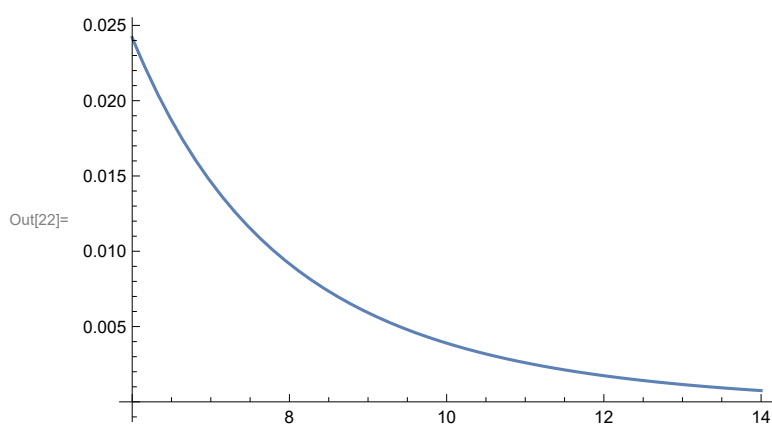
```

Десни правоъгълници

```

In[22]:= Plot[Abs[f'[x]], {x, a, b}]

```



```

In[23]:= a = 6.; b = 14.;
h =  $\frac{b - a}{n}$ ;
n = 12;
f[x_] :=  $\frac{9 - x}{2x^2 + 7}$ 
Itochno =  $\int_a^b f[x] \, dx$ ;
I2 =  $h * \sum_{i=0}^n f[a + i * h]$ ;
M2 = Abs[f'[a]];
R2 =  $\frac{(b - a)^2}{2n} * M2$ ;
Print["Мрежата е със стъпка ", h, " и брой подинтервали ", n]
Print["Приближената стойност по формулата на левите правоъгълници е ", I2]
Print["Точната стойност е ", Itochno]
Print["Теоретичната грешка по формулата на левите правоъгълници е ", R2]
Print["Истинската грешка по формулата на левите правоъгълници е ",
Abs[I2 - Itochno]]

Мрежата е със стъпка 0.666667 и брой подинтервали 12

Приближената стойност по формулата на левите правоъгълници е 0.0119542

Точната стойност е 0.00260677

Теоретичната грешка по формулата на левите правоъгълници е 0.0645196

Истинската грешка по формулата на левите правоъгълници е 0.0093474

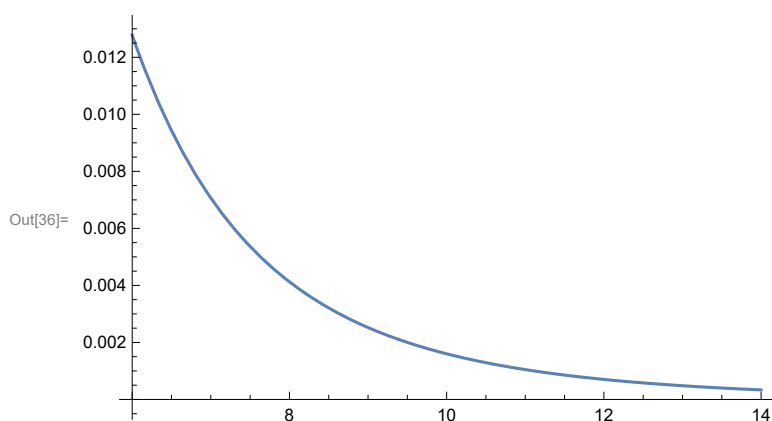
```

Средни правоъгълници

```

In[36]:= Plot[Abs[f''[x]], {x, a, b}]

```



```

In[37]:= a = 6.; b = 14.;
h =  $\frac{b - a}{n}$ ;
n = 12;
f[x_] :=  $\frac{9 - x}{2 x^2 + 7}$ 
Itochno =  $\int_a^b f[x] \, dx$ ;
I3 =  $h * \sum_{i=0}^{n-1} f\left[a + i * h + \frac{h}{2}\right]$ ;
M3 = Abs[f''[a]];
R3 =  $\frac{(b - a)^3}{24 n^2} * M3$ ;
Print["Мрежата е със стъпка ", h, " и брой подинтервали ", n]
Print["Приближената стойност по формулата на левите правоъгълници е ", I3]
Print["Точната стойност е ", Itochno]
Print["Теоретичната грешка по формулата на левите правоъгълници е ", R3]
Print["Истинската грешка по формулата на левите правоъгълници е ",
Abs[I3 - Itochno]]

Мрежата е със стъпка 0.666667 и брой подинтервали 12
Приближената стойност по формулата на левите правоъгълници е 0.00217443
Точната стойност е 0.00260677
Теоретичната грешка по формулата на левите правоъгълници е 0.00189302
Истинската грешка по формулата на левите правоъгълници е 0.000432339

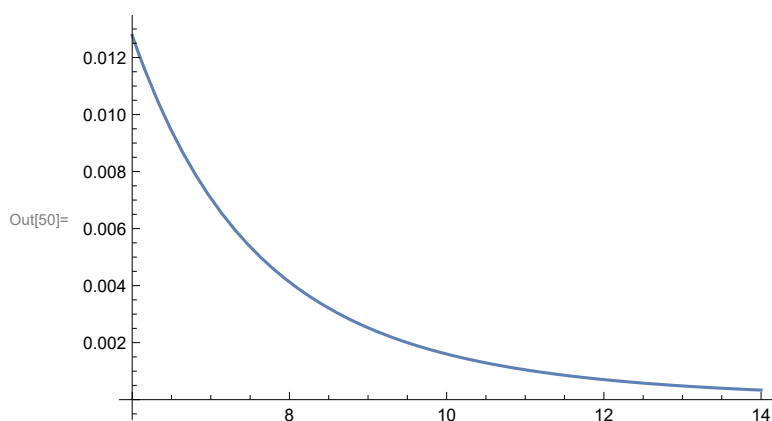
```

Трапеци

```

In[50]:= Plot[Abs[f''[x]], {x, a, b}]

```



```

In[51]:= a = 6.; b = 14.;
h =  $\frac{b - a}{n}$ ;
n = 12;
f[x_] :=  $\frac{9 - x}{2x^2 + 7}$ 
Itochno =  $\int_a^b f[x] \, dx$ ;
IT =  $\frac{h}{2} * \left( f[a] + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f[a + i * h] + f[b] \right)$ ;
M2 = Abs[f''[a]];
RT =  $\frac{(b - a)^3}{12 n^2} * M2$ ;
Print["Мрежата е със стъпка ", h, " и брой подинтервали ", n]
Print["Приближената стойност по формулата на трапците е ", IT]
Print["Точната стойност е ", Itochno]
Print["Теоретичната грешка по формулата на трапците е ", RT]
Print["Истинската грешка по формулата на трапците е ", Abs[IT - Itochno]]

Мрежата е със стъпка 0.666667 и брой подинтервали 12

Приближената стойност по формулата на трапците е 0.00347305

Точната стойност е 0.00260677

Теоретичната грешка по формулата на трапците е 0.00378604

Истинската грешка по формулата на трапците е 0.00086628

```

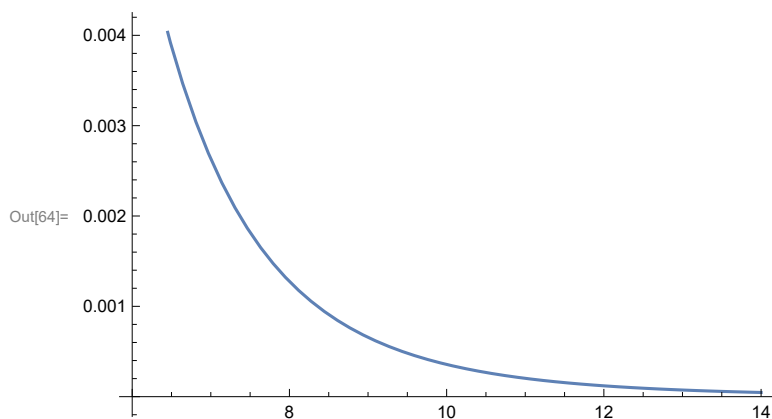
СИМПСЪН

Може да използваме формулата на Симпсън, тъй като броят на подинтервалите е **четно** число - в случая 12.

```

In[64]:= Plot[Abs[f''''[x]], {x, a, b}]

```



```

In[65]:= a = 6.; b = 14.;
h =  $\frac{b - a}{n}$ ;
n = 12;
f[x_] :=  $\frac{9 - x}{2 x^2 + 7}$ 
Itochno =  $\int_a^b f[x] \, dx$ ;
m = n / 2;
IS =  $\frac{h}{3} * \left( f[a] + 4 \sum_{i=1}^m f[a + (2 i - 1) * h] + 2 \sum_{i=1}^{m-1} f[a + (2 i) * h] + f[b] \right)$ ;
M4 = Abs[f''''[a]];
RS =  $\frac{(b - a)^5}{180 n^4} * M4$ ;
Print["Мрежата е със стъпка ", h, " и брой подинтервали ", n]
Print["Приближената стойност по формулата на Симпсън е ", IS]
Print["Точната стойност е ", Itochno]
Print["Теоретичната грешка по формулата на Симпсън е ", RS]
Print["Истинската грешка по формулата на Симпсън е ", Abs[IS - Itochno]]

Мрежата е със стъпка 0.666667 и брой подинтервали 12
Приближената стойност по формулата на Симпсън е 0.00261512
Точната стойност е 0.00260677
Теоретичната грешка по формулата на Симпсън е 0.0000509523
Истинската грешка по формулата на Симпсън е  $8.35074 \times 10^{-6}$ 

```


Пресмятане с предварително зададена точност

Леви правоъгълници

```

In[79]:= eps = 10-5;
Clear[n]
Reduce[ $\frac{(b - a)^2}{2 n} * M1 \leq \text{eps}, n]$ 

```

 **Reduce:** Reduce was unable to solve the system with inexact coefficients. The answer was obtained by solving a corresponding exact system and numericizing the result.

```

Out[81]= n < 0 || n ≥ 77423.5

```

```

In[82]:= a = 6.; b = 14.;
n = 77424;
h =  $\frac{b - a}{n}$ ;
f[x_] :=  $\frac{9 - x}{2x^2 + 7}$ 
Itochno =  $\int_a^b f[x] \, dx$ ;
I1 =  $h \sum_{i=0}^{n-1} f[a + i * h]$ ;
M1 = Abs[f'[a]];
R1 =  $\frac{(b - a)^2}{2n} * M1$ ;
Print["Мрежата е със стъпка ", h, " и брой подинтервали ", n]
Print["Приближената стойност по формулата на левите правоъгълници е ", I1]
Print["Точната стойност е ", Itochno]
Print["Теоретичната грешка по формулата на левите правоъгълници е ", R1]
Print["Истинската грешка по формулата на левите правоъгълници е ",
Abs[I1 - Itochno]]

Мрежата е със стъпка 0.000103327 и брой подинтервали 77424
Приближената стойност по формулата на левите правоъгълници е 0.00260938
Точната стойност е 0.00260677
Теоретичната грешка по формулата на левите правоъгълници е  $9.99993 \times 10^{-6}$ 
Истинската грешка по формулата на левите правоъгълници е  $2.60934 \times 10^{-6}$ 


```

Десни правоъгълници

```

In[95]:= eps = 10-5;
Clear[n]
Reduce[ $\frac{(b - a)^2}{2n} * M2 \leq \text{eps}, n]$ 

```

 **Reduce:** Reduce was unable to solve the system with inexact coefficients. The answer was obtained by solving a corresponding exact system and numericizing the result.

```

Out[97]= n < 0 || n ≥ 40889.3

```



```

In[98]:= a = 6.; b = 14.;
n = 40890;
h =  $\frac{b - a}{n}$ ;
f[x_] :=  $\frac{9 - x}{2x^2 + 7}$ 
Itochno =  $\int_a^b f[x] \, dx$ ;
I2 =  $h * \sum_{i=0}^n f[a + i * h]$ ;
M2 = Abs[f'[a]];
R2 =  $\frac{(b - a)^2}{2n} * M2$ ;
Print["Мрежата е със стъпка ", h, " и брой подинтервали ", n] // N
Print["Приближената стойност по формулата на левите правоъгълници е ", I2]
Print["Точната стойност е ", Itochno]
Print["Теоретичната грешка по формулата на левите правоъгълници е ", R2]
Print["Истинската грешка по формулата на левите правоъгълници е ",
Abs[I2 - Itochno]]

Мрежата е със стъпка 0.000195647 и брой подинтервали 40890

Приближената стойност по формулата на левите правоъгълници е 0.00260926

Точната стойност е 0.00260677

Теоретичната грешка по формулата на левите правоъгълници е 0.0000189346

Истинската грешка по формулата на левите правоъгълници е  $2.48903 \times 10^{-6}$ 

```

Средни правоъгълници

```

In[111]:= eps = 10-5;
Clear[n]
Reduce[ $\frac{(b - a)^3}{24n^2} * M3 \leq \text{eps}, n]$ 

```

Reduce: Reduce was unable to solve the system with inexact coefficients. The answer was obtained by solving a corresponding exact system and numericizing the result.

```

Out[113]= n ≤ -165.105 || n ≥ 165.105

```

```

In[114]:= a = 6.; b = 14.;
n = 166;
h =  $\frac{b - a}{n}$ ;
f[x_] :=  $\frac{9 - x}{2 x^2 + 7}$ 
Itochno =  $\int_a^b f[x] \, dx$ ;
I3 =  $h * \sum_{i=0}^{n-1} f\left[a + i * h + \frac{h}{2}\right]$ ;
M3 = Abs[f''[a]];
R3 =  $\frac{(b - a)^3}{24 n^2} * M3$ ;
Print["Мрежата е със стъпка ", h, " и брой подинтервали ", n]
Print["Приближената стойност по формулата на левите правоъгълници е ", I3]
Print["Точната стойност е ", Itochno]
Print["Теоретичната грешка по формулата на левите правоъгълници е ", R3]
Print["Истинската грешка по формулата на левите правоъгълници е ",
Abs[I3 - Itochno]]

Мрежата е със стъпка 0.0481928 и брой подинтервали 166
Приближената стойност по формулата на левите правоъгълници е 0.0026045
Точната стойност е 0.00260677
Теоретичната грешка по формулата на левите правоъгълници е  $9.8924 \times 10^{-6}$ 
Истинската грешка по формулата на левите правоъгълници е  $2.26901 \times 10^{-6}$ 

```

Трапеци

```

In[127]:= eps = 10-5;
Clear[n]
Reduce[ $\frac{(b - a)^3}{12 n^2} * M3 \leq \text{eps}, n]$ 

... Reduce: Reduce was unable to solve the system with inexact coefficients. The answer was obtained by solving a
corresponding exact system and numericizing the result.

Out[129]=  $n \leq -233.493 \mid \mid n \geq 233.493$ 

```

```

In[130]:= a = 6.; b = 14.;
n = 234;
h =  $\frac{b - a}{n}$ ;

f[x_] :=  $\frac{9 - x}{2 x^2 + 7}$ 

Itochno =  $\int_a^b f[x] \, dx$ ;

IT =  $\frac{h}{2} * \left( f[a] + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f[a + i * h] + f[b] \right)$ ;

M2 = Abs[f''[a]];
RT =  $\frac{(b - a)^3}{12 n^2} * M2$ ;

Print["Мрежата е със стъпка ", h, " и брой подинтервали ", n]
Print["Приближената стойност по формулата на трапците е ", IT]
Print["Точната стойност е ", Itochno]
Print["Теоретичната грешка по формулата на трапците е ", RT]
Print["Истинската грешка по формулата на трапците е ", Abs[IT - Itochno]]

Мрежата е със стъпка 0.034188 и брой подинтервали 234

Приближената стойност по формулата на трапците е 0.00260905

Точната стойност е 0.00260677

Теоретичната грешка по формулата на трапците е  $9.95672 \times 10^{-6}$ 

Истинската грешка по формулата на трапците е  $2.2838 \times 10^{-6}$ 

```

СИМПСЪН

```

In[143]:= eps = 10-5;
Clear[n]

Reduce[ $\frac{(b - a)^5}{180 n^4} * M4 \leq \text{eps}, n]$ 

... Reduce: Reduce was unable to solve the system with inexact coefficients. The answer was obtained by solving a
corresponding exact system and numericizing the result.

Out[145]= n ≤ -18.029 || n ≥ 18.029

```

```

In[146]:= a = 6.; b = 14.;
n = 19;
h =  $\frac{b - a}{n}$ ;

f[x_] :=  $\frac{9 - x}{2 x^2 + 7}$ 

Itochno =  $\int_a^b f[x] \, dx$ ;

m = n / 2;

IS =  $\frac{h}{3} * \left( f[a] + 4 \sum_{i=1}^m f[a + (2 i - 1) * h] + 2 \sum_{i=1}^{m-1} f[a + (2 i) * h] + f[b] \right)$ ;

M4 = Abs[f''''[a]];

RS =  $\frac{(b - a)^5}{180 n^4} * M4$ ;

Print["Мрежата е със стъпка ", h, " и брой подинтервали ", n]
Print["Приближената стойност по формулата на Симпсън е ", IS]
Print["Точната стойност е ", Itochno]
Print["Теоретичната грешка по формулата на Симпсън е ", RS]
Print["Истинската грешка по формулата на Симпсън е ", Abs[IS - Itochno]]

Мрежата е със стъпка 0.421053 и брой подинтервали 19

Приближената стойност по формулата на Симпсън е 0.00776531

Точната стойност е 0.00260677

Теоретичната грешка по формулата на Симпсън е  $8.10727 \times 10^{-6}$ 

Истинската грешка по формулата на Симпсън е 0.00515854

```