Модели на реални процеси

Информатика, 2021/2022

Математически модели

- Математическият модел е абстрактен модел, който използва езика на математиката, за да представи реално съществуващ обект или процес. Някои негови особености:
  - Моделът е опростено описание и обикновено представя само една страна от обекта или процеса, която подлежи на изучаване, и пропуска други аспекти, които са по-малко важни или незначителни;
  - Моделът никога не е напълно точно представяне на реалния феномен, затова има опасност понякога в модела да се пропуснат съществени връзки или да се представят неправилно;

- Основно предимство на математическите модели е, че се използва езикът на математиката и това дава предпоставка за прецизност в постановката;
- Моделите често водят и до количествени (числени) изводи, които не могат да бъдат получени, ако се използва естествения език;
- От друга страна, използването на математическия език може да е недостатък на модела, защото често реалните обекти, описани с човешкия език могат да имат нюанси, които не могат да се отразят с математическия език.

Диференциалните уравнения като математически модели

- Много от принципите или законите, които стоят в основата на поведението на природата, са взаимовръзки, включващи скоростта или темповете, при които нещата се случват. Когато се изразяват със средствата на математиката, тези взаимовръзки се превръщат в уравнения, а скоростта на изменение на величините се изразява с производни на функции.
- Уравнения, които съдържат производни на неизвестни функции, се наричат диференциални уравнения.

- Ето защо, за да разберам и да изследваме проблеми като движението на течности, потока на тока в електрическите вериги, разсейването на топлината в твърдите обекти, разпространението и откриването на сеизмични вълни, увеличаването и намаляването на броя на населението, е необходимо да изучаваме диференциалните уравнения.
- Диференциално уравнение, което описва някакъв физичен процес, представлява математически модел на процеса.

Задачи, които водят до съставяне на диференциални уравнения

- Материална точка се движи по права линия, като е известна скоростта й $v(t)$ във всеки момент от време t. Какъв е законът за движение на тази точка?

Означаваме с $s(t)$ пътя, изминат от материалната точка до момента от време t. От физичния смисъл на понятието производна е известно, че

$$s'(t) = v(t).$$

- Материално тяло е пуснато без начална скорост в съпротивителна среда. Силата на съпротивление е пропорционална на квадрата на скоростта на тялото. Какъв е законът на изменение на скоростта на тялото с течение на времето?

С $\vec{P}$ означаваме теглото на тялото, m – масата му, g – земното ускорение, $\vec{R}$ – силата на съпротивлението.

От динамиката е известно, че произведението от масата m и ускорението $\vec{a}(t)$ на движещата се точка е равно на сумата от действащите сили $\vec{P}$ и $\vec{R}$. Освен това, $\vec{a}(t) = v'(t)$. Тогава

$$mv'(t) = \vec{P} + \vec{R}.$$

Но $\vec{P} = mg$, $\vec{R} = -kv^2$ ($k = const$ от условието), т.е.

$$mv'(t) = mg - kv^2.$$

- Да разгледаме движението на дадена планета около Слънцето.

Можем да считаме, че Слънцето е неподвижно и поместено в центъра на координатната система. Ще означим с $\vec{x}$ ориентираното разстояние между планетата и Слънцето, като векторът е насочен от планетата към Слънцето.

Съгласно втория закон на Нютон, силата F, действаща на едно тяло, е равна на масата на тялото m по ускорението на тялото $\vec{a}$, т.е.

$$F = m\vec{a}.$$

От друга страна, силата, действаща на тялото се задава със закона на Нютон за всеобщото привличане

$$F = G\,\frac{mM}{||x||^3}\vec{x},$$

където M е масата на Слънцето, m е масата на планетата, G е универсалната гравитационна константа, а $||x||$ е разстоянието между двете небесни тела.

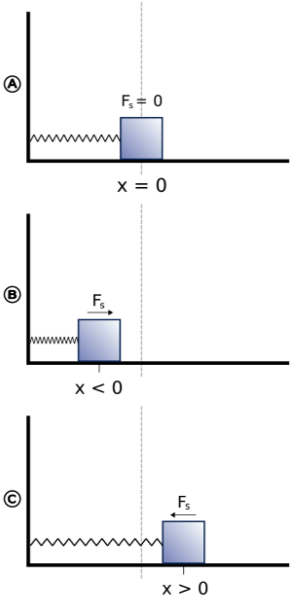
Като вземем предвид, че $\vec{a} = x''$, получаваме

$$mx'' = G\,\frac{mM}{||x||^3}\vec{x}.$$

- *Хармоничен осцилатор* в класическата механика се нарича всяка система, която при отместване от нейното равновесно положение изпитва сила $\vec{F}$, възвръщаща я към равновесното положение, като при това силата $\vec{F}$ е пропорционална на изместването $\vec{x}$:
$$\vec{F} = -k\vec{x},$$
където k е положителна константа.
- Пример за хармоничен осцилатор са трептенията на струните на музикалните инструменти, движението на махалото, движението на пружината, движението на въздушните молекули при преминаване на звукова вълна.

- Задачата за пружината за първи път е разгледана от Хук през 1676 г. и установената зависимост днес наричаме закон на Хук. Ако една пружина с коефициент на еластичност k е притисната или разтегната от някакво тяло, то се поражда еластична сила F_e, връщаща пружината в първоначалното й положение, за която имаме уравнението

$$F_e = -kx.$$


A
$F_s = 0$
$x = 0$
B
F_s
$x < 0$
C
F_s
$x > 0$

- Разглеждаме тяло с маса m, което е закачено на пружина с коефициент на еластичност k. Тялото се намира в среда със съпротивление, пропорционално на скоростта на движение с коефициент на пропорционалност b. Движението се извършва само по оста x. Какво е уравнението за движението на тяло, окачено на пружина?

И така, нека $x(t)$ е изместването на тялото от първоначалното положение в момента t, $v(t)$ е неговата скорост, $F_e = -kx$ е еластичната сила на пружината, а F_c е силата на съпротивлението на средата. Съгласно условието имаме

$$F_c = -bv.$$

За ускорението на тялото в момента t имаме $a(t) = v'(t)$. Съгласно втория закон на Нютон, произведението от масата m и ускорението a на движещото се тяло е равно на сумата от действащите сили F_e и F_c. Тогава

$$ma = mv' = F_e + F_c = -kx - bv.$$

Но $\vec{v}(t) = x'(t)$. Следователно

$$mx'' + bx' + kx = 0.$$

- Известно е, че скоростта на разпадане на радиоактивно вещество е пропорционална на наличното количество от това вещество. Какво е количеството вещество след време t, ако в момента t_0 то е R_0?

Означаваме наличното количество радиоактивно вещество в произволен момент t с $R(t)$. Тогава $R(t_0) = R_0$,

$$\frac{dR}{dt} = R' = -aR,$$

където a е коефициент на пропорционалност, характеризиращ радиоактивното вещество.

Радиовъглеродно датиране е физически метод за радиоизотопно датиране на биологически останки, предмети и материали с биологически произход чрез измерване на съдържанието на радиоактивния изотоп на въглерода – въглерод-14, в сравнение със съдържанието на стабилните му изотопи. Предложен е от Уилърд Либи през 1946 г., за което той е удостоен с Нобелова награда за химия в 1960 г.

Във всички живи организми съотношението между въглерод-14 и въглерод-12 е същото както в атмосферата, защото при жизнените процеси непрекъснато се обменя въглерод с околната среда. Когато обаче организмът умре, този обмен се прекратява и броят на ядрата въглерод-14, които са се съдържали в него, започва да намалява в съответствие със закона за радиоактивното разпадане. По броя на неразпадналите се ядра може да се определи възрастта на предмета или организма.

- В руините на древен град са намерени дървени предмети, в които концентрацията на въглерод-14 е четири пъти по-малка, отколкото в наскоро отрязано дърво. Известно е, че периодът на полуразпад на въглерод-14 е 5568 ± 30 години (т.е. половината от веществото се разпада за този период). Да се определи възрастта на предметите.
- Да предположим, че в даден момент разполагаме с 10 mg въглерод-14. Колко милиграма ще останат след 600 г.?

- Съгласно закона на Нютон за охлаждането, скоростта на охлаждане на едно материално тяло е пропорционална на разликата между температурата на тялото и температурата на околната среда, която приемаме за константа. Какво е уравнението на закона на Нютон?

Означаваме температурата на тялото в момента t с $T(t)$, с T_s – температурата на околната среда. Тогава

$$\frac{dT}{dt} = T' = k(T - T_s),$$

където k е коефициентът на пропорционалност.

- При разследване на убийство е установено, че температурата на намереното тяло е $28°$C. След 2 часа температурата на тялото спада до $24°$C. Колко време преди да бъде намерено тялото е извършено убийството, ако температурата на околната среда е $18°$C?
- От фурна с температура $175°$C е изваден сладкиш. След 15 min температурата на сладкиша е $65°$C. След колко време сладкишът ще бъде с температура $25°$C, за да може да бъде изяден с удоволствие?

- Уравнение на нормалното размножаване

Да предположим, че даден биологичен вид, чието количество в момента t ще означим с $P(t)$, се размножава със скорост, пропорционална на количеството в дадения момент. Такава ситуация се случва, когато необходимата хранителна среда е в относително голямо количество. Съответното диференциално уравнение е

$$P' = kP.$$

Този модел се нарича експоненциален модел. Лесно се вижда, че ако $k > 0$, то имаме увеличаване на популацията, а ако $k < 0$ – намаляване.

- Да разгледаме следния пример. Ако няма естествени врагове, популацията на мишките в даден район се разраства със скорост, която е пропорционална на броя мишки в момента. Ако с t означим времето, а с $p(t)$ броя на мишките в момента t, то можем да запишем този еволюционен закон по следния начин:
$$\frac{dp}{dt} = rp. \tag{1}$$
Да предположим, че времето се измерва в месеци и че константата r има стойност $0,5/$месец. Така величините в лявата и дясната страна на (2) ще се измерват в брой мишки/месец.

Сега да предположим, че няколко сови живеят в околността и на ден убиват по 15 мишки. За да отразим и тази информация в модела, трябва да добавим още една величина в дясната страна на уравнението (2). То добива вида

$$\frac{dp}{dt} = 0,5p - 450.$$

Обърнете внимание, че сме извадили 450, а не 15, защото времето се измерва в месеци и затова трябва да пресметнем колко мишки биват убивани за един месец.

- Обикновено нарастването на популацията на биологичните видове е ограничена от някои важни фактори, определени от заобикалящата ги среда. Когато броят на представителите на даден вид не е нито твърде голям, нито твърде малък, законът на тяхното размножаване може да бъде експоненциален. Но когато популацията нарастне прекалено много или е близко до изчезване, законът за размножаването вече става по-труден за проследяване, почти хаотичен. В тези случаи по-адекватен е т.н. логистичен модел

$$P' = kP\left(1 - \frac{P}{M}\right),$$

където M е възможната горна граница за броя на представителите на биологичния вид. Очевидно, ако P е малко в сравнение с M, то логистичният модел се редуцира до експоненциалния модел.

А ето и още две задачи от други области, които водят до съставяне на диференциално уравнение.

- Дадено лекарство се прилага интравенозно на пациент в болница. Разтвор, който съдържа 5 мг/см^3 от лекарството, се влива на пациент със скорост 100 см$^3/$ч. Лекарството се абсорбира от тъканите или напуска по друг начин кръвния поток със скорост, пропорционална на наличното количество, като константата на пропорционалност е равна на $0,4/$ч.

а) Ако приемем, че лекарството е винаги равномерно разпределено в кръвния поток, съставете и решете диференциалното уравнение за намиране на количеството от лекарството, което е налично в кръвта по всяко време.

б) Колко от лекарството се намира в кръвта след дълъг период от време?

- Басейн съдържа 1 000 000 литра вода и неизвестно количество от някакво вредно химично вещество. Вода, съдържаща 0,01 г от това вещество се влива в басейна със скорост 300 л/мин. В същия момент през друга тръба изтича същото количество вода, така че количеството вода в басейна се запазва едно и също през цялото време. Предполагаме, че химичното вещество е разпределено равномерно в целия басейн.

  а) Съставете и решете диференциалното уравнение за намиране количеството химичното вещество в басейна във всеки момент от време.

  б) Колко от веществото ще се намира в басейна след продължително време? Зависи ли това количество от количеството вещество, което се е намирало в басейна в началото?

Два примера на частни диференциални уравнения

Нека $u = u(x, y, z, t)$, където (x, y, z) са координатите на точката, а t – времето.

- Уравнение на топлопроводността:

$$k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = \frac{\partial u}{\partial t}.$$

- Вълново уравнение:

$$c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Основни понятия

- Диференциално уравнение се нарича уравнение, в което неизвестните величини са функции на една или няколко независими променливи, като в уравнението участват не само функциите, но и техните производни.
- Обикновено диференциално уравнение се нарича уравнение, в което участват неизвестни функции само на една независима променлива.
- Частно диференциално уравнение се нарича уравнение, в което участват неизвестни функции на повече от една независима променлива.
- Ред на диференциалното уравнение се нарича най-високият ред на явно участващите в него производни на неизвестната функция.

Задача 1

Кои от следните диференциални уравнения са обикновени и кои – частни? Какъв е редът на уравненията?

(a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2}{y^2 \cos y}$,

(b) $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{du}{dx} = u + x^2 y$,

(c) $(y-1)dx + x \cos y \, dy = 0$,

(d) $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$,

(e) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$,

(f) $x^2 y'' + xy' + n^2 y = 0$,

(g) $uu_x^{'} + u = u_{yy}^{''}$,

(h) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

- **Обикновено диференциално уравнение от n-ти ред** се нарича уравнение от вида

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0,$$

където y е неизвестната функция на независимата променлива x, F е функция на $n+2$ променливи.

В частност, уравнението

$$F(x, y, y') = 0$$

е уравнение от първи ред.

- Уравнението

$$y' = f(x, y) \tag{2}$$

се нарича уравнение от първи ред, решено относно производната.

Като използваме, че $y' = \dfrac{dy}{dx}$, записваме

$$dy - f(x, y)\, dx = 0$$

или в по-обща форма, наречена диференциална форма

$$M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0.$$

Понякога се разглеждат и диференциални уравнения в симетрична форма

$$\frac{dx}{P(x, y)} = \frac{dy}{Q(x, y)}.$$

Нека функцията $f(x,y)$ в (2) е дефинирана в множеството D от точки (x,y) в равнината $\mathbb{R}^2$. Ако в околност на някои точки (x,y) функцията $f(x,y)$ расте неограничено (т.е. $f(x,y)=\infty$), то заедно с това диференциално уравнение разглеждаме и

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{f(x,y)},$$

а неговите решения прибавяме към решенията на (2).

Пример. $y'=x^2-y^2$, $y'=\dfrac{y}{x+1}$.

За множеството D предполагаме, че е област, т.е. отворено и свързано множество (всяка точка $M(x, y) \in D$ влиза в D заедно с кръг с център M и достатъчно малък радиус и всеки две точки M и N от D можем да съединим с начупена линия, изцяло лежаща в D).

Дефиниционна област D на уравнението (2) се нарича тази област, в която $f(x, y)$ е дефинирана и непрекъсната, заедно с точките, в околност на които $f(x, y)$ расте неограничено.

- Функцията $y = \varphi(x)$ се нарича решение на (2) в интервал Δ, ако при заместване на y с $\varphi(x)$ в (1), то (1) се превръща в тъждество в целия интервал Δ, т.е.

1) за всяко $x \in \Delta : \ (x, \varphi(x)) \in D$;
2) $\varphi(x)$ е диференцируема в Δ;
3) за всяко $x \in \Delta : \ \varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$.

- Точките $(x, \varphi(x))$ описват крива линия в областта D. Тази крива се нарича интегрална крива.
- Процесът на намиране на решения на диференциалните уравнения се нарича интегриране.
- Дадено диференциално уравнение е решено в квадратури, ако зависимостта между търсената функция и независимата променлива е изразена с помощта на елементарни функции или интеграли от тях.

Примери. $y' = y - x^2, \quad y' = y^2 - x$.

Решението може да бъде записано в:

- явен вид: $y = \varphi(x)$;
- неявен вид: $\Phi(x, y) = 0$;
- параметричен вид: $x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ t \in (\alpha, \beta)$.

Задача 2

Покажете, че следните диференциални уравнения имат за решения дадените функции:

(a) $\dfrac{dy}{dx} = 3y, \quad y(x) = e^{3x}$;

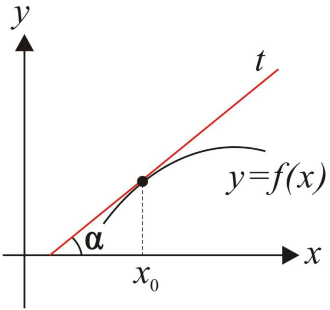
(b) $\dfrac{d^2u}{dx^2} + 16u = 0, \quad u(x) = \cos 4x$;

(c) $y'' + 2y' + y = 0, \quad y = xe^{-x}$;

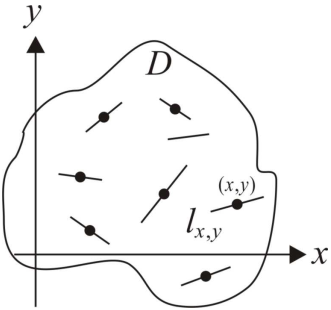
(d) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2y - 4x - 5}{2y - 2x}, \quad 2x^2 + y^2 - 2xy + 5x = 0$.

Геометрично тълкуване на решенията на уравнението $y'=f(x,y)$

Да припомним геометричния смисъл на понятието производна: ако $f(x)$ е функция, дефинирана в околност на точката x_0, то допирателната към графиката на $f(x)$ в точката $x = x_0$ сключва с положителната част на абсцисната ос ъгъл α, за който $\operatorname{tg} \alpha = f'(x_0)$.



През всяка точка (x, y) на дефиниционната област D на уравнението (2) построяваме права $l_{x,y}$ с ъглов коефициент $f(x, y)$. Когато (x, y) описва D, правата $l_{x,y}$ се мени. Полученото множество от прави се нарича поле от направления.



Пример. $y' = e^{-x} - 2y, \quad y' = -\frac{y}{x}, \quad y' = -\frac{x}{y}, \quad y' = 2\sqrt{y}.$

Нека $y = \varphi(x)$, $x \in (a, b)$, е решение на уравнението (2) (т.е. $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$ за всяко $x \in (a, b)$).

- В произволна точка (x_0, y_0) от графиката на $y = \varphi(x)$ построяваме допирателна t_0. Тогава ъгловият коефициент на допирателната t_0 е равен на $\varphi'(x_0) = f(x_0, \varphi(x_0)) = f(x_0, y_0) =$ ъгловия коефициент на правата l_{x_0,y_0}. От това следва, че двете прави t_0 и l_{x_0,y_0} съвпадат.
- Вярно е и обратното: ако графиката Γ на дадена непрекъснато диференцируема функция $y = \psi(x)$ във всяка своя точка се допира до съответната права от полето, то функцията $y = \psi(x)$ е решение на (2).

Основна задача в теорията на диференциалните уравнения

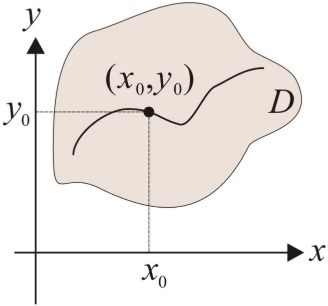
Една от най-важните задачи в теорията на диференциалните уравнения и тяхното приложение е т.н. задача на Коши, която за уравнението (2) се поставя така:

- Задача на Коши: Измежду всички решения на уравнението (2) да се намери такова решение, което удовлетворява допълнителното условие

$$y(x_0) = y_0. \tag{3}$$

- Условието (3) се нарича начално условие на задачата на Коши, а числата x_0, y_0 – начални данни.

Това означава, че търсим решение, което минава през точката $(x_0, y_0) \in D$.



Augustin-Louis Cauchy
(1789–1857)

Теорема 1 (Теорема на Пеано – за съществуване на решение на задачата на Коши)

Ако функцията $f(x, y)$ е непрекъсната в областта D, то за всяка точка $(x_0, y_0) \in D$ съществува поне едно решение $y = y(x)$ на задачата на Коши (2)(3)*, дефинирано в някаква малка околност на точката x_0.*

Теорема 2 (Теорема на Пикар – за единственост на решението на задачата на Коши)

Нека функцията $f(x, y)$ *е непрекъсната в областта* D*, съществува частната производна* $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *и тя също е непрекъсната функция в* D*. Тогава за всяко* $(x_0, y_0) \in D$ *задачата на Коши* (2)(3) *има единствено решение* $y = y(x)$*, дефинирано в някаква малка околност на точката* x_0*.*

Giuseppe Peano
(1858 – 1932)

Charles Émile Picard
(1856 – 1941)

- Решение, във всяка точка на което са удовлетворени условията на теоремата за съществуване и единственост, се нарича частно решение.
- Съвкупността от всички частни решения се нарича общо решение.
- Решение, във всяка точка на което се нарушава единствеността на решението на задачата на Коши, се нарича особено решение.
- Съществуват решения, които не са нито частни, нито особени.