Уравнения от първи ред, нерешени относно производната. Уравнения на Клеро и Лагранж

Информатика, 2021/2022

Уравнения от първи ред, нерешени относно производната

Да разгледаме произволно диференциално уравнение от първи ред

$$F(x, y, y') = 0.$$

Не винаги е възможно това уравнение да се реши относно производната, т.е. да се представи във вида

$$y' = f(x, y),$$

или пък ако това е възможно, то понякога дясната му страна $f(x, y)$ е много сложна функция. В такъв случай за решаването на изходното уравнение може да се приложи т.н. метод на въвеждане на параметър, известен още като метод на интегриране чрез предварително диференциране.

- Уравнения от вида

$$y = \varphi(y'). \tag{1}$$

Полагаме

$$y' = p, \quad p = p(x),$$

където p ще служи за параметър при намиране на решенията на (1). Уравнението (1) приема вида

$$y = \varphi(p). \tag{2}$$

Диференцираме това уравнение по отношение на x и получаваме

$$y' = \varphi'(p)\, p',$$

но тъй като сме положили $y' = p$, то

$$p = \varphi'(p)\, p'.$$

Като заместим p' с $\frac{dp}{dx}$ и разделим променливите, намираме

$$dx = \frac{\varphi'(p)}{p}\,dp.$$

Оттук

$$x = \int \frac{\varphi'(p)}{p}\,dp + C.$$

Тази връзка заедно с (2) задава параметричното решение на изходното уравнение (1):

$$\begin{cases} x = \int \frac{\varphi'(p)}{p}\,dp + C \\ y = \varphi(p). \end{cases}$$

- Уравнения от вида
$$x = \psi(y'). \tag{3}$$

Полагаме
$$y' = p, \quad p = p(y),$$
където p ще служи за параметър при намиране на решенията на (3). Уравнението (3) приема вида
$$x = \psi(p). \tag{4}$$

Диференцираме това уравнение по отношение на x и получаваме
$$1 = \psi'(p)\frac{dp}{dx}.$$
От $p = p(y)$, $y = y(x)$ и $y' = p$ следва, че
$$\frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}y' = \frac{dp}{dy}p, \tag{5}$$

откъдето

$$1 = \psi'(p)\,\frac{dp}{dy}\,p.$$

Тогава

$$dy = \psi'(p)p\,dp$$

и следователно

$$y = \int \psi'(p)p\,dp + C.$$

Тази връзка заедно с (4) задава параметричното решение на изходното уравнение (3):

$$\begin{cases} x = \psi(p) \\ y = \int \psi'(p)p\,dp + C. \end{cases}$$

- Уравнения от вида

$$y = \Phi(x, y'). \tag{6}$$

Полагаме

$$y' = p, \quad p = p(x),$$

където p ще служи за параметър при намиране на решенията на (6). Уравнението (6) приема вида

$$y = \Phi(x, p),$$

след което диференцираме по x.

- Уравнения от вида

$$x = \Psi(y, y'). \tag{7}$$

Полагаме

$$y' = p, \quad p = p(y),$$

където p ще служи за параметър при намиране на решенията на (7). Уравнението (7) приема вида

$$x = \Psi(y, p),$$

след което диференцираме по x, като не забравяме връзката (5).

Задача 1

Да се решат уравненията:

1) $y = \ln(1 + y'^2)$;

2) $y'^3 = x - y'$;

3) $y = x + y' - \ln y'$;

4) $y = 2xy' + y^2 y'^3$.

Решение. 1) Даденото уравнение е от вида (1). Затова полагаме $y' = p$, $p = p(x)$, и получаваме

$$y = \ln(1 + p^2). \tag{8}$$

Диференцираме двете страни на това уравнение по отношение на x и намираме

$$y' = \frac{2p}{1 + p^2}\,\frac{dp}{dx}.$$

Тогава

$$p = \frac{2p}{1+p^2}\,\frac{dp}{dx}.$$

Делим двете страни на това уравнение с $p \neq 0$. Имаме

$$1 = \frac{2}{1+p^2}\,\frac{dp}{dx},$$

откъдето

$$dx = \frac{2}{1+p^2}\,dp$$

и следователно

$$x = \int \frac{2}{1+p^2}\,dp + C = 2\operatorname{arctg} p + C.$$

Като вземем предвид (8), получаваме параметричното решение на даденото уравнение

$$\begin{cases} x = 2\operatorname{arctg} p + C \\ y = \ln(1+p^2), \end{cases}$$

където $p \neq 0$, C е произволно реално число. Остана да проверим дали не сме изпуснали някое решение при делението с p. Заместваме с $p = 0$ в (8) и намираме $y = 0$, което също е решение.

2) В това уравнение изразяваме x, за да получим уравнение от вида (3). Имаме

$$x = {y'}^3 + y'.$$

Полагаме $y' = p$, $p = p(y)$ и получаваме

$$x = p^3 + p. \tag{9}$$

Диференцираме двете страни на това уравнение по x

$$1 = (3p^2 + 1)\,\frac{dp}{dx}.$$

Тъй като $p = p(y)$, имаме равенствата (5). Тогава

$$1 = (3p^2 + 1)\,\frac{dp}{dy}\,p,$$

откъдето

$$dy = (3p^3 + p)\,dp.$$

Интегрираме и получаваме

$$y = \int (3p^3 + p)\,dp = \frac{3p^4}{4} + \frac{p^2}{2} + C.$$

От последното равенство и (9) намираме параметричното решение на даденото уравнение

$$\begin{cases} x = p^3 + p \\ y = \frac{3p^4}{4} + \frac{p^2}{2} + C. \end{cases}$$

3) Имаме уравнение от вида (6). Полагаме $y' = p$, $p = p(x)$, $p > 0$ и получаваме

$$y = x + p - \ln p, \tag{10}$$

откъдето след диференциране по x

$$y' = 1 + \frac{dp}{dx} - \frac{1}{p}\frac{dp}{dx}.$$

Заместваме y' с p и намираме

$$p - 1 = \frac{p-1}{p}\frac{dp}{dx}.$$

Делим двете страни на това уравнение с $p - 1 \neq 0$. Следователно

$$1 = \frac{1}{p}\frac{dp}{dx}.$$

Имаме

$$dx = \frac{dp}{p},$$

$$x = \ln p + C.$$

От последното равенство и (10) намираме параметричното решение на даденото уравнение

$$\begin{cases} x = \ln p + C \\ y = p + C. \end{cases}$$

Остана да проверим дали не сме изпуснали решение при делението с израза $p - 1$, за който предположихме, че е различен от 0. Ако $p - 1 = 0$, то $p = 1$ и като поставим $p = 1$ в (10), намираме $y = x + 1$, което очевидно също е решение на даденото уравнение.

4) Отг. $2p^2x = C - C^2p^2,\ py = C;\ 32x^3 = -27y^4;\ y = 0.$

Уравнения на Клеро

- Уравнения от вида

$$y = xy' + f(y'), \tag{11}$$

където f е два пъти непрекъснато диференцируема функция в интервала (α, β), а f'' не си мени знака в този интервал, се наричат уравнения на Клеро.

- Уравненията на Клеро са от вида (6) и се решават с метода на въвеждане на параметър. Полагаме

$$y' = p, \quad p = p(x).$$

Уравнението (11) приема вида

$$y = xp + f(p). \tag{12}$$

Диференцираме това уравнение спрямо x и получаваме

$$y' = p + xp' + f'(p)p',$$

където $p' = \frac{dp}{dx}$. Тъй като сме положили $y' = p$, то

$$p = p + xp' + f'(p)p',$$

следователно

$$p'(x + f'(p)) = 0.$$

(а) Ако $p' = 0$, то $p = C$. Заместваме в (12) и получаваме общото решение на уравнението на Клеро (11):

$$y = Cx + f(C).$$

(б) Ако $x + f'(p) = 0$, то като вземем предвид и израза (12), получаваме още едно решение на (11):

$$\begin{cases} x = -f'(p) \\ y = -f'(p)p + f(p). \end{cases}$$

За това решение може да се докаже, че е особено.

Уравнения на Лагранж

- Уравнения от вида
$$y = x\,\varphi(y') + \psi(y'), \tag{13}$$
където φ и ψ са непрекъснато диференцируеми функции в интервала (α, β), се наричат уравнения на Лагранж.

- Ако $\varphi(y') \equiv y'$, то уравнението (13) е уравнение от вида (11), т.е. уравнение на Клеро. Затова по-нататък ще смятаме, че $\varphi(y') \not\equiv y'$.

- Уравненията на Лагранж са от вида (6) и се решават с метода на въвеждане на параметър. Полагаме
$$y' = p, \quad p = p(x).$$
Уравнението (13) приема вида
$$y = x\,\varphi(p) + \psi(p). \tag{14}$$

Диференцираме това уравнение спрямо x и получаваме

$$y' = \varphi(p) + x\,\varphi'(p)\,p' + \psi'(p)p',$$

където $p' = \frac{dp}{dx}$. Тъй като сме положили $y' = p$, то имаме

$$p - \varphi(p) = \frac{dp}{dx}\,(x\,\varphi'(p) + \psi'(p)).$$

Тогава при $p - \varphi(p) \neq 0$ получаваме

$$\frac{dx}{dp} = \frac{\varphi'(p)}{p - \varphi(p)}\,x + \frac{\psi'(p)}{p - \varphi(p)},$$

което е линейно уравнение спрямо x. По формулата за общото решение на линейно уравнение намираме

$$x = e^{\int a(p)\,dp}\left(C + \int b(p)\,e^{-\int a(p)\,dp}\,dp\right), \quad C \in \mathbb{R},$$

където

$$a(p) = \frac{\varphi'(p)}{p - \varphi(p)}, \quad b(p) = \frac{\psi'(p)}{p - \varphi(p)}.$$

Последният израз за x и (14) дават параметричното решение на уравнението на Лагранж (13). Ако уравнението $p - \varphi(p) = 0$ има решения $p = p_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$, то като поставим тези стойности на p в (14), получаваме следните решения на уравнението на Лагранж

$$y = xp_i + \psi(p_i), \quad i = 1, 2, \ldots.$$

Задача 2

Да се решат уравненията:

1) $y = xy' - {y'}^2$;

2) $xy' - y = \ln y'$;

3) $y + xy' = 4\sqrt{y'}$;

4) $y = x{y'}^2 + {y'}^2$.

Отговори. Уравненията в 1) и 2) са уравнения на Клеро, а тези в 3) и 4) – уравнения на Лагранж.

1) $y = Cx - C^2$; $y = \frac{x^2}{4}$.

2) $y = Cx - \ln C,\ C > 0$; $y = 1 + \ln x$.

3) $x = \frac{1}{\sqrt{p}}(C + \ln p),\ y = -\sqrt{p}(C + \ln p) + 4\sqrt{p}$; $y = 0$.

4) $x = \frac{C}{(p-1)^2} - 1,\ y = \frac{Cp^2}{(p-1)^2},\ C \neq 0$; $y = 0$; $y = x + 1$.