# Линейни нехомогенни диференциални уравнения от $n$-ти ред. Метод на Лагранж. Метод на неопределените коефициенти

*Информатика*, 2021/2022

# Линейни нехомогенни диференциални уравнения от $n$-ти ред

- Уравнение от вида

$$y^{(n)} + a_1\, y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}\, y' + a_n\, y = f(x), \tag{1}$$

където $f(x)$, $a_i(x)$ $(i = 1, \ldots, n)$ са непрекъснати функции в интервала $(\alpha, \beta)$, се нарича линейно нехомогенно диференциално уравнение от $n$-ти ред.

Да означим с $L[y]$ лявата страна на горното уравнение, т.е.

$$L[y] = y^{(n)} + a_1\, y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}\, y' + a_n\, y.$$

Тогава уравнението (1) може да се запише във вида

$$L[y] = f. \tag{2}$$

Нека $\eta(x)$ е едно частно решение на това уравнение, т.е.

$$L[\eta] = f. \tag{3}$$

В (2) извършваме смяната

$$y = \eta + z,$$

където $z(x)$ е нова неизвестна функция, и получаваме

$$L[\eta + z] = f,$$

т.е.

$$L[\eta] + L[z] = f.$$

Като вземем предвид (3), получаваме, че

$$L[z] = 0, \tag{4}$$

т.е. новата функция $z$ е решение на съответното на (1) хомогенно уравнение.

Като вземем предвид вида на общото решение на линейното хомогенно диференциално уравнение (4), стигаме до следната теорема.

### Теорема 1

*Общото решение на (1) се представя във вида*

$$y = \eta + \sum_{i=1}^{n} C_i y_i,$$

*където $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ е една фундаментална система от решения за уравнението $L[y] = 0$, а $C_1, C_2, \ldots, C_n$ са произволни константи.*

# Метод на Лагранж

Намирането на едно частно решение $\eta(x)$ на нехомогенното уравнение (1) може да стане с помощта на метода на вариране на произволните константи, известен още като метод на Лагранж. Той се състои в следното: търсим $\eta(x)$ във вида на общото решение на съответното на (1) хомогенно уравнение, като произволните константи $C_i$ заменяме с функции $C_i(x)$, т.е.

$$\eta(x) = C_1(x)y_1 + \cdots + C_n(x)y_n. \tag{5}$$

Върху $C_i(x)$ налагаме условия, така че за първите $n-1$ производни на $\eta(x)$ да се получат същите изрази, каквито бихме получили, ако $C_i(x)$ бяха константи.

Диференцираме израза (5) за $\eta(x)$. Получаваме

$$\eta' = (C_1y_1' + \cdots + C_ny_n') + (C_1'y_1 + \cdots + C_n'y_n).$$

Искаме в този израз да гледаме на $C_i(x)$ като на константи. Следователно, трябва да поставим условието

$$C_1' y_1 + \cdots + C_n' y_n = 0,$$

а изразът за $\eta'$ приема вида

$$\eta' = C_1 y_1' + \cdots + C_n y_n'.$$

Диференцираме последния израз и поставяме аналогично условие за $C_i(x)$. Тогава

$$\eta'' = C_1 y_1'' + \cdots + C_n y_n'',$$

при условие, че за $C_i(x)$ имаме

$$C_1' y_1' + \cdots + C_n' y_n' = 0.$$

Така, след $n-1$ диференцирания намираме

$$\begin{cases} \eta = C_1 y_1 + \cdots + C_n y_n \\ \eta' = C_1 y_1' + \cdots + C_n y_n' \\ \dotfill \\ \eta^{(n-1)} = C_1 y_1^{(n-1)} + \cdots + C_n y_n^{(n-1)} \end{cases} \tag{6}$$

и ограниченията

$$\begin{cases} C_1' y_1 + \cdots + C_n' y_n = 0 \\ C_1' y_1' + \cdots + C_n' y_n' = 0 \\ \dotfill \\ C_1' y_1^{(n-2)} + \cdots + C_n' y_n^{(n-2)} = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Диференцираме $\eta^{(n-1)}$ и намираме

$$\eta^{(n)} = (C_1 y_1^{(n)} + \cdots + C_n y_n^{(n)}) + (C_1' y_1^{(n-1)} + \cdots + C_n' y_n^{(n-1)}).$$

Тъй като искаме $\eta$ да е решение на (1), заместваме последния израз за $\eta^{(n)}$, а също и изразите (6) в (1). Получаваме

$$L[\eta] = C_1' y_1^{(n-1)} + \cdots + C_n' y_n^{(n-1)} = f(x).$$

Прибавяме тази връзка към (7) и окончателно получаваме, че $C_i'(x)$ трябва да удовлетворяват системата

$$\begin{cases} C_1' y_1 + \cdots + C_n' y_n = 0 \\ C_1' y_1' + \cdots + C_n' y_n' = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ C_1' y_1^{(n-2)} + \cdots + C_n' y_n^{(n-2)} = 0 \\ C_1' y_1^{(n-1)} + \cdots + C_n' y_n^{(n-1)} = f(x). \end{cases} \tag{8}$$

За всяко $x$ детерминантата от коефициентите пред неизвестните $C_1'(x), \dots, C_n'(x)$ е равна на детерминантата на Вронски $W[y_1, \dots, y_n](x)$, а тя е различна от нула, защото $y_1, \dots, y_n$ са линейно независими по условие. Следователно, горната система има единствено решение

$$C_i'(x) = \phi_i(x), \quad i = 1, \dots, n$$

и тогава

$$C_i(x) = \int \phi_i(x) dx, \quad i = 1, \dots, n,$$

т.е.

$$\eta(x) = y_1 \int \phi_1(x) dx + \dots + y_n \int \phi_n(x) dx.$$

**Задача 1**

*Да се решат уравненията:*

*1)* $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$;

*2)* $y'' + y = \frac{1}{\sin x}$.

Решение. 1) Първо трябва да решим съответното хомогенно уравнение

$$y'' - 2y' + y = 0. \tag{9}$$

Неговото характеристично уравнение е

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0,$$

с корени $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Тогава общото решение на хомогенното уравнение (9) е

$$y_{\text{хом}} = C_1 e^x + C_2 x e^x.$$

Сега търсим частно решение на даденото нехомогенно уравнение във вида

$$\eta(x) = C_1(x)e^x + C_2(x)xe^x, \tag{10}$$

където $C_1(x)$ и $C_2(x)$ са решения на системата

$$\left| \begin{array}{l} C_1'e^x + C_2'xe^x = 0 \\ C_1'(e^x)' + C_2'(xe^x)' = \frac{e^x}{x}. \end{array} \right.$$

Имаме

$$\left| \begin{array}{l} C_1'e^x + C_2'xe^x = 0 \\ C_1'e^x + C_2'(e^x + xe^x) = \frac{e^x}{x}, \end{array} \right.$$

и като извадим първото уравнение от второто и разделим на $e^x$, получаваме $C_2' = \frac{1}{x}$, откъдето $C_1' = -1$. След интегриране

$$C_1(x) = \int(-1)dx = -x, \quad C_2(x) = \int \frac{1}{x}dx = \ln|x|.$$

Следователно, като заместим в (10), получаваме

$$\eta(x) = -xe^x + (\ln|x|)xe^x.$$

Накрая, общото решение на нехомогенното уравнение се получава по формулата

$$y_{\text{нехом}} = y_{\text{хом}} + \eta = C_1e^x + C_2xe^x - xe^x + (\ln|x|)xe^x.$$

2) Характеристичното уравнение е

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

с корени $\lambda_{1,2} = \pm i$. От

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x$$

следва, че

$$y_{\text{хом}} = C_1\cos x + C_2\sin x.$$

Търсим частно решение $\eta(x)$ на даденото нехомогенно уравнение във вида

$$\eta(x) = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x,$$

където $C_1(x)$ и $C_2(x)$ са решения на системата

$$\left| \begin{array}{l} C_1' \cos x + C_2' \sin x = 0 \\ C_1' (\cos x)' + C_2' (\sin x)' = \frac{1}{\sin x}. \end{array} \right.$$

Имаме

$$\left| \begin{array}{l} C_1' \cos x + C_2' \sin x = 0 \\ -C_1' \sin x + C_2' \cos x = \frac{1}{\sin x}. \end{array} \right.$$

Умножаваме първото уравнение по $\sin x$, а второто – по $\cos x$ и ги събираме. Като вземем предвид, че

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1,$$

намираме $C_2' = \frac{\cos x}{\sin x}$. Сега умножаваме първото уравнение по $\cos x$, а второто – по $(-\sin x)$ и отново ги събираме. Тогава $C_1' = -1$. След интегриране получаваме

$$C_1(x) = -x, \quad C_2(x) = \ln|\sin x|,$$

откъдето

$$\eta(x) = -x\cos x + (\ln|\sin x|)\sin x$$

и

$$y_{\text{нехом}} = C_1\cos x + C_2\sin x - x\cos x + (\ln|\sin x|)\sin x.$$

# Метод на неопределените коефициенти

Ако линейното нехомогенно уравнение (1) е с постоянни коефициенти, т.е. $a_i \in \mathbb{R}$, то понякога е удобно да използваме и метода на неопределените коефициенти за намиране на частно решение.

- Нека е дадено уравнение от вида

$$L[y] = q(x)e^{\alpha x}, \tag{11}$$

където $q(x)$ е полином, $\alpha \in \mathbb{R}$. Тогава това уравнение допуска частно решение от вида

$$\eta(x) = x^k r(x) e^{\alpha x}, \tag{12}$$

където $k$ е кратността на $\alpha$ като характеристичен корен ($k = 0$, ако $\alpha$ не е характеристичен корен); $r(x)$ е полином от степен, равна на степента на $q(x)$.

- Нека е дадено уравнение от вида

$$L[y] = e^{\alpha x}(q_1(x)\cos\beta x + q_2(x)\sin\beta x), \tag{13}$$

където $q_1(x)$, $q_2(x)$ са полиноми, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тогава това уравнение допуска частно решение от вида

$$\eta(x) = x^k e^{\alpha x}(Q_1(x)\cos\beta x + Q_2(x)\sin\beta x), \tag{14}$$

където $k$ е кратността на $\alpha + i\beta$ като характеристичен корен ($k = 0$, ако $\alpha + i\beta$ не е характеристичен корен); $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$ са полиноми от степен $m = \max(\deg q_1(x), \deg q_2(x))$.

## Задача 2

*Да се решат уравненията:*

*1)* $y''' - 3y'' + 3y' - y = e^x$;

*2)* $y'' - 5y' + 6y = 6x^2 - 10x + 2$;

*3)* $y'' + y' - 2y = e^x(\cos x - 7\sin x)$;

*4)* $y'' - 4y' + 8y = e^{2x} + \sin 2x$.

Решение. 1) Характеристичното уравнение

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0$$

има за корени $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Тогава общото решение на съответното хомогенно уравнение е

$$y_{\text{хом}} = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 x^2 e^x.$$

Даденото нехомогенно уравнение е от вида (11), като $q(x) = 1$, $\alpha = 1$, затова частното решение ще търсим във вида (12). Тъй като полиномът $q(x)$ е степен 0, то полиномът $r(x)$ също трябва да бъде от степен 0, т.е. $r(x) = a$. Освен това, $\alpha = 1$ е трикратен характеристичен корен, откъдето $k = 3$. Тогава

$$\eta(x) = ax^3e^x.$$

Последователно намираме

$$\eta' = ae^x(x^3 + 3x^2), \quad \eta'' = ae^x(x^3 + 6x^2 + 6x),$$

$$\eta''' = ae^x(x^3 + 9x^2 + 18x + 6).$$

Заместваме с изразите за $\eta'''$, $\eta''$, $\eta'$ и $\eta$ в уравнението

$$\eta''' - 3\eta'' + 3\eta' - \eta = e^x$$

и получаваме

$$6ae^x = e^x,$$

откъдето следва, че

$$a = \frac{1}{6},$$

$$\eta(x) = \frac{1}{6}x^3e^x.$$

Накрая,

$$y_{\text{нехом}} = C_1e^x + C_2xe^x + C_3x^2e^x + \frac{1}{6}x^3e^x.$$

2) Характеристичното уравнение

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

има за корени $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$. Тогава общото решение на съответното хомогенно уравнение е

$$y_{\text{хом}} = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}.$$

Даденото нехомогенно уравнение е от вида (11), като $q(x) = 6x^2 - 10x + 2$, $\alpha = 0$, затова частното решение ще търсим във вида (12). Тъй като полиномът $q(x)$ е втора степен, то полиномът $r(x)$ също трябва да бъде от втора степен, т.е. $r(x) = ax^2 + bx + c$. Освен това, $\alpha = 0$ не е характеристичен корен, откъдето $k = 0$. Тогава

$$\eta(x) = x^0(ax^2 + bx + c)e^{0.x} = ax^2 + bx + c.$$

Последователно намираме

$$\eta' = 2ax + b, \quad \eta'' = 2a.$$

Заместваме с изразите за $\eta''$, $\eta'$ и $\eta$ в уравнението

$$\eta'' - 5\eta' + 6\eta = 6x^2 - 10x + 2$$

и получаваме

$$2a - 5(2ax + b) + 6(ax^2 + bx + c) = 6x^2 - 10x + 2.$$

Следователно

$$(6a-6)x^2+(6b-10a+10)x+(2a-5b+6c-2)=0$$

е изпълнено за всяко $x$. Това е възможно тогава и само тогава, когато всички коефициенти на полинома са равни на нула, т.е.

$$\left|\begin{array}{l} 6a-6=0 \\ 6b-10a+10=0 \\ 2a-5b+6c-2=0. \end{array}\right.$$

Решаваме тази система и намираме $a=1,\ b=0,\ c=0$. Тогава $\eta(x)=x^2$ и

$$y_{\text{нехом}}=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}+x^2.$$

3) Характеристичното уравнение

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

има за корени $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$. Тогава общото решение на съответното хомогенно уравнение е

$$y_{\text{хом}} = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}.$$

Даденото нехомогенно уравнение е от вида (13), като $q_1(x) = 1$, $q_2(x) = -7$, $\alpha = 1$, $\beta = 1$. Затова частното решение ще търсим във вида (14). Тъй като полиномите $q_1(x)$ и $q_2(x)$ са от нулева степен, то полиномите $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$ също трябва да бъдат от нулева степен, т.е. $Q_1(x) = a$, $Q_2(x) = b$. Освен това, $\alpha + i\beta = 1 + i$ не е характеристичен корен, откъдето $k = 0$. Тогава

$$\eta(x) = x^0 e^x (a\cos x + b\sin x) = e^x (a\cos x + b\sin x).$$

Последователно намираме

$$\eta' = e^x(a\cos x + b\sin x - a\sin x + b\cos x),$$

$$\eta'' = e^x(-2a\sin x + 2b\cos x).$$

Заместваме с изразите за $\eta''$, $\eta'$ и $\eta$ в уравнението

$$\eta'' + \eta' - 2\eta = e^x(\cos x - 7\sin x)$$

и получаваме

$$e^x(-2a\sin x + 2b\cos x) + e^x(a\cos x + b\sin x - a\sin x + b\cos x)$$
$$-2e^x(a\cos x + b\sin x) = e^x(\cos x - 7\sin x).$$

Следователно

$$(-3a - b + 7)\sin x + (-a + 3b - 1)\cos x = 0$$

е изпълнено за всяко $x$. Това е възможно тогава и само тогава, когато коефициентите пред функциите $\sin x$ и $\cos x$ са равни на нула, т.е.

$$\left| \begin{array}{l} -3a - b + 7 = 0 \\ -a + 3b - 1 = 0. \end{array} \right.$$

Решаваме тази система и намираме $a = 2$, $b = 1$. Тогава

$$\eta(x) = e^x(2\cos x + \sin x),$$

$$y_{\text{нехом}} = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + e^x(2\cos x + \sin x).$$

4) Характеристичното уравнение

$$\lambda^2 - 4\lambda + 8 = 0$$

има за корени $\lambda_{1,2} = 2 \pm 2i$. От

$$e^{(2+2i)x} = e^{2x}(\cos 2x + i\sin 2x) = e^{2x}\cos 2x + i\, e^{2x}\sin 2x$$

следва, че

$$y_{\text{хом}} = C_1 e^{2x} \cos 2x + C_2 e^{2x} \sin 2x.$$

Дясната част на даденото нехомогенно уравнение не е нито от вида в (11), нито от вида в (13), но представлява сума на две функции, от които първата е от вида в (11), а втората е от вида в (13). В този случай ще използваме следната

Лема. Ако $\eta_1$ е частно решение на уравнението $L[y] = f_1$, а $\eta_2$ е частно решение на уравнението $L[y] = f_2$, то $\eta = \eta_1 + \eta_2$ е частно решение на уравнението $L[y] = f_1 + f_2$.

Това означава, че трябва да разгледаме две уравнения:

$$y'' - 4y' + 8y = e^{2x},$$

$$y'' - 4y' + 8y = \sin 2x.$$

За първото търсим частно решение $\eta_1 = ae^{2x}$, а за второто – частно решение $\eta_2 = A\cos 2x + B\sin 2x$. Сумата $\eta_1 + \eta_2$ е частното решение на даденото нехомогенно уравнение. Така намираме

$$y_{\text{нехом}} = C_1 e^{2x}\cos 2x + C_2 e^{2x}\sin 2x + \eta_1 + \eta_2.$$