Метод на Якоби (простата итерация) за решаване на СЛАУ

Задача 2: Дадена е системата линейни алгебрични уравнения (в случая p = 6, q = 7)

$10x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = p$

$-x_1 + 10x_2 - x_3 = q$

$-3x_1 + 18x_3 + x_4 = p + q$

$2x_1 - x_2 + 21x_4 = -10$

а) Запишете итерационния процес за метод на Якоби

б) Сходящ ли е итерационния процес и ако да, защо?

в) Изберете начално приближение за итерационния процес.

г) Изчислете приближеното решение с точност 10^{-3} по метода на Якоби. Представете резултатите в таблица. Ако сте направили повече от 5 итерации, запишете само първите 2 и последните 2 в таблицата.

д) С колко знака се представя крайния резултат и с колко знака е необходимо да извършваме междинните изчисления?

In[17]:=
$$A = \begin{pmatrix} 10 & -1 & 2 & -3 \\ -1 & 10 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 18 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 21 \end{pmatrix}; \; b = \{6, 7, 13, -10\};$$

In[18]:=
```
Print["За сравнение точното решение е ", N[LinearSolve[A, b]]]
```

```
За сравнение точното решение е {0.377652, 0.81891, 0.811451, -0.473162}
```

1. Конструиране на метода - получаване на матрицата **B** и вектора **c**

In[19]:=
```
n = Length[A];
```

In[20]:=
```
c = Table[0, n];
```

In[21]:=
```
B = Table[0, {i, n}, {j, n}];
```

In[22]:=
```
For[i = 1, i ≤ n, i++,
 B[[i]] = -A[[i]]/A[[i, i]];
 B[[i, i]] = 0;
 c[[i]] = b[[i]]/A[[i, i]]
]
```

2. Проверка за сходимост на итерационния процес

In[23]:=
```
Print["Итерационния процес е x^(k+1) = ",
 N[B // MatrixForm], ".x^(k) + ", N[c // MatrixForm]]
```

Итерационния процес е $x^{(k+1)}$ = $\begin{pmatrix} 0. & 0.1 & -0.2 & 0.3 \\ 0.1 & 0. & 0.1 & 0. \\ 0.166667 & 0. & 0. & -0.0555556 \\ -0.0952381 & 0.047619 & 0. & 0. \end{pmatrix}$ $.x^{(k)}$ + $\begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.7 \\ 0.722222 \\ -0.47619 \end{pmatrix}$

Извод: Итерационния процес е сходящ, защото елементите от главния диагонал на матрицата А са по-големи от всички останали елементи на матрицата А.

3. Избор на начално приближение

In[24]:=
```
x = {-7, 11.4, 16, -8.5};
```

4. Изчислете приближеното решение с точност 10^{-3} по метода на Якоби

Първа норма

In[25]:=
```
N[Max[Table[Sum[Abs[B[[i, j]]], {j, 1, n}], {i, n}]]]
```

$$N\left[Max\left[Table\left[\sum_{j=1}^{n} Abs[B[[i, j]]], \{i, n\}\right]\right]\right]$$

Out[25]= 0.6

Втора норма

In[26]:=
```
N[Max[Table[Sum[Abs[B[[i, j]]], {i, 1, n}], {j, n}]]]
```

$$N\left[Max\left[Table\left[\sum_{i=1}^{n} Abs[B[[i, j]]], \{j, n\}\right]\right]\right]$$

Out[26]= 0.361905

Трета норма

In[27]:=

$$N\left[\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} B[[i, j]]^2}\right]$$

Out[27]= 0.449669

Избираме най-малката възможна норма, която в случая е втора.

Извършваме итерациите

In[28]:=
```
N[10^-3]
```
Out[28]=
```
0.001
```

In[29]:=
$$normB = N\left[Max\left[Table\left[\sum_{i=1}^{n} Abs[B[[i, j]]], \{j, n\}\right]\right]\right];$$

In[30]:=
```
normx0 = Norm[x, 1];
normc = Norm[c, 1];
```

In[32]:=
$$\text{For}\left[k = 0,\ k \le 20,\ k{+}{+},\ \text{Print}\left["k = ", k, " x^{(k)} = ", N[x], " \varepsilon_k = ", eps = normB^k \left(normx0 + \frac{normc}{1 - normB}\right)\right];\ x = B.x + c\right]$$

k = 0 $x^{(k)}$ = {-7., 11.4, 16., -8.5} ε_k = 46.8154

k = 1 $x^{(k)}$ = {-4.01, 1.6, 0.0277778, 0.733333} ε_k = 16.9427

k = 2 $x^{(k)}$ = {0.974444, 0.301778, 0.0131481, -0.0180952} ε_k = 6.13165

k = 3 $x^{(k)}$ = {0.62212, 0.798759, 0.885635, -0.554624} ε_k = 2.21907

k = 4 $x^{(k)}$ = {0.336362, 0.850775, 0.856721, -0.497404} ε_k = 0.803094

k = 5 $x^{(k)}$ = {0.364512, 0.819308, 0.805916, -0.467712} ε_k = 0.290643

k = 6 $x^{(k)}$ = {0.380434, 0.817043, 0.808958, -0.471891} ε_k = 0.105185

k = 7 $x^{(k)}$ = {0.378345, 0.818939, 0.811844, -0.473515} ε_k = 0.038067

k = 8 $x^{(k)}$ = {0.37747, 0.819019, 0.811586, -0.473226} ε_k = 0.0137766

k = 9 $x^{(k)}$ = {0.377617, 0.818906, 0.811424, -0.473139} ε_k = 0.00498583

k = 10 $x^{(k)}$ = {0.377664, 0.818904, 0.811444, -0.473158} ε_k = 0.0018044

k = 11 $x^{(k)}$ = {0.377654, 0.818911, 0.811453, -0.473163} ε_k = 0.00065302

k = 12 $x^{(k)}$ = {0.377652, 0.818911, 0.811451, -0.473162} ε_k = 0.000236331

k = 13 $x^{(k)}$ = {0.377652, 0.81891, 0.811451, -0.473162} ε_k = 0.0000855293

k = 14 $x^{(k)}$ = {0.377652, 0.81891, 0.811451, -0.473162} ε_k = 0.0000309535

k = 15 $x^{(k)}$ = {0.377652, 0.81891, 0.811451, -0.473162} ε_k = 0.0000112022

k = 16 $x^{(k)}$ = {0.377652, 0.81891, 0.811451, -0.473162} ε_k = 4.05413×10^{-6}

k = 17 $x^{(k)}$ = {0.377652, 0.81891, 0.811451, -0.473162} ε_k = 1.46721×10^{-6}

k = 18 $x^{(k)}$ = {0.377652, 0.81891, 0.811451, -0.473162} ε_k = 5.3099×10^{-7}

k = 19 $x^{(k)}$ = {0.377652, 0.81891, 0.811451, -0.473162} ε_k = 1.92168×10^{-7}

k = 20 $x^{(k)}$ = {0.377652, 0.81891, 0.811451, -0.473162} ε_k = 6.95464×10^{-8}

Извод: За достигане на точност 10^{-3} при начално приближение $x^{(0)} = (-7,\ 11.4,\ 16,\ -8.5)^T$ са необходими 11 итерации.

Краен резултат:

k = 0 $x^{(k)}$ = {−7., 11.4, 16., −8.5} ε_k = 46.8154

k = 1 $x^{(k)}$ = {−4.01, 1.6, 0.0277778, 0.733333} ε_k = 16.9427

k = 10 $x^{(k)}$ = {0.377664, 0.818904, 0.811444, −0.473158} ε_k = 0.0018044

k = 11 $x^{(k)}$ = {0.377654, 0.818911, 0.811453, −0.473163} ε_k = 0.00065302