Интерполационен полином на Лагранж. Оценка на грешката

Интерполационни условия:

$L_n(x_i; f) = y_i$, i = 0,n

$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}$

Грешка при интерполация с L_n

$R_n(x) = f(x) - L_n(x;f) = ?$

Съставяме помощна функция:

$F(t) = f(t) - L_n(t;f) - C(t-x_0)(t-x_1)\dots(t-x_n)$

при t = x_i, i = 0,n

$F(x_i) = f(x_i) - L_n(x_i;f) - C \dots 0(x_i - x_i) = y_i - y_i - 0 = 0$

=> $F(x_i) = 0$, i = 0,n

=> F има (n+1) на брой корени x_i, i = 0,n

C = ? : F(x) = 0

Търсим константата C, така че x да е корен на F(t)

При t = x

$F(x) = f(x) - L_n(x;f) - C(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n) = 0$

F(x) = **f(x) - L_n(x;f) (R_n(x))** - **C (=?)** $(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n) = 0$

=> $C = \frac{R_n(x)}{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)}$

=> получаваме, че F(t) има (n+2) на брой корена (x_0, x_1 .... x_n, x)

От математически анализ:

Теорема на Рол:

f - непрекъсната в [a,b] и f(a) = f(b),

то $\forall_\zeta$[a,b]: $f'(\zeta) = 0$

Прилагаме Т на Рол (n + 1) на брой пъти за подинтервалите $(x_0;x_1)$;$(x_1;x_2)$ ...., за които $F(x_i) = F(x_j) = 0$

=> $\forall_\zeta$ за съответния подинтервал, за която $F'(\zeta_i) = 0$,   i = 1,n+1

F' има (n + 1) на брой корена

=> за F' прилагаме Т на Рол **n пъти** => $\forall_{yi}$: $F''(y_i) = 0$,   i = 1,n

$F^{(n+1)}(\zeta) = 0$

$F^{(n+1)}(\zeta) = f^{(n+1)}\zeta - L_n^{n+1}(\zeta;f) - [C(t-x_0)\dots\dots(t-x_n)]^{n+1} \ |_{t=\zeta}$

$0 = f^{(n+1)}(\zeta) - C(n+1)!$

$C(n+1)! = f^{(n+1)}(\zeta)$

$\frac{R_n(x)}{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)}(n+1)! = f^{(n+1)}(\zeta)$

$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)$

$|R_n(x)| <= \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\ |(x - x_0)\ (x - x_1)\ ...\ (x - x_n)|$, където $M_{n+1} = \max|f^{(n+1)}(t)|$

Частен случай: n = 1 (линейна интерполация)

x	x_0	x_1
y = f(x)	y_0	y_1

$L_1(x) = y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$

Частен случай: n = 2 (квадратична интерполация)

x	x_0	x_1	x_2
y = f(x)	y_0	y_1	y_2

$L_2(x) = y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + y_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$

Частен случай: n = 3 (кубична интерполация)

x	x_0	x_1	x_2	x_3
y = f(x)	y_0	y_1	y_2	y_3

Формулата трябва да я напишем на контролното!

$L_3(x) = y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)} + y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} + y_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} + y_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}$