Метод на допирателните (Нютон)

Дадено е уравнението:

x^2 - 33sin(x + $\frac{\pi}{p+1}$) - (p + 2q)= 0, където **p** и **q** са съответно предпоследната и последната цифра от факултетния ни номер.

$x^2 - 33\sin(x + \frac{\pi}{7}) - 20 = 0$

1. Да се намери общия брой на корените на уравнението.
2. Да се локализира най-малкия реален корен в интервал [a, b].
3. Да се проверят условията за приложение на метода на допирателните (Нютон).
4. Да се определи началното приближение за итерационния процес по метода на допирателните (Нютон).
5. Да се изчисли корена по метода на допирателните с точност 0,0000000001. Представете таблица с изчисленията.
6. Да се провери колко итерации биха били необходими, ако се използва метода на разполовяването в същия интервал [a, b] за същата точност.
7. Да се направи сравнение кой метод е по-ефективен за избрания интервал.

In[∘]:=
```
f[x_] := x^2 - 33 Sin[x + π/7] - 20
```

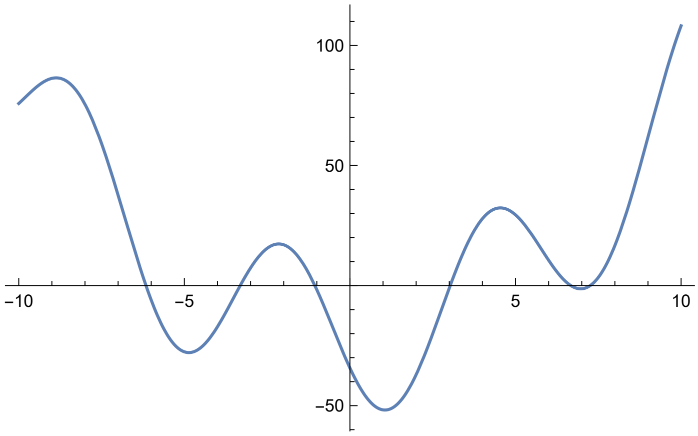
In[∘]:=
```
f[x]
```

Out[∘]= $-20 + x^2 - 33\,\mathrm{Sin}\left[\frac{\pi}{7} + x\right]$

1. Да се намери общия брой на корените на уравнението.

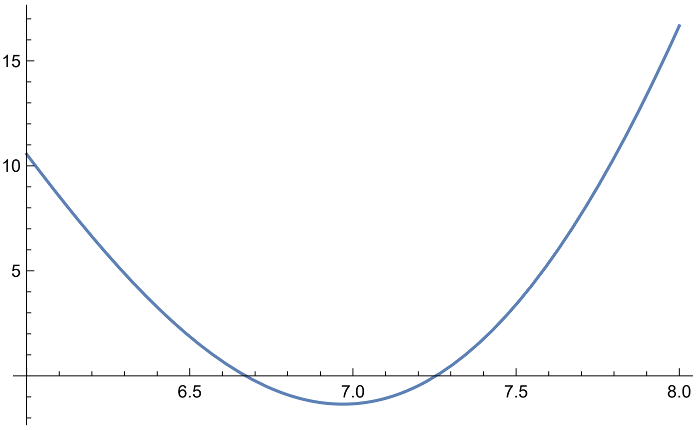
In[∘]:=
```
Plot[f[x], {x, -10, 10}]
```

Out[∘]=



```
In[]:= Plot[f[x], {x, 6, 8}]
```

Out[]=

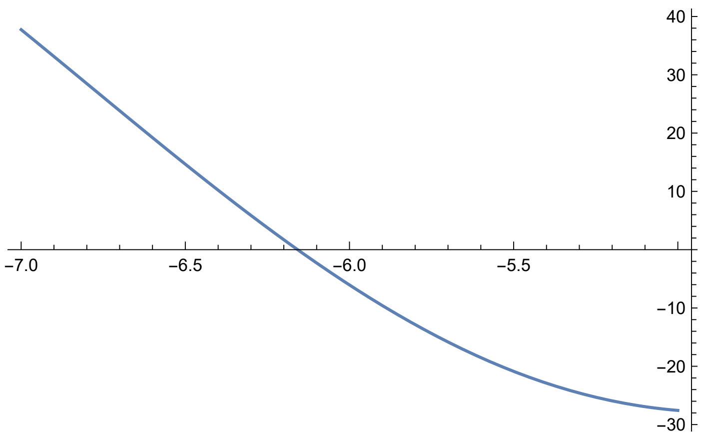


Брой корени: 6

2. Да се локализира най-малкия реален корен в интервал [a, b].

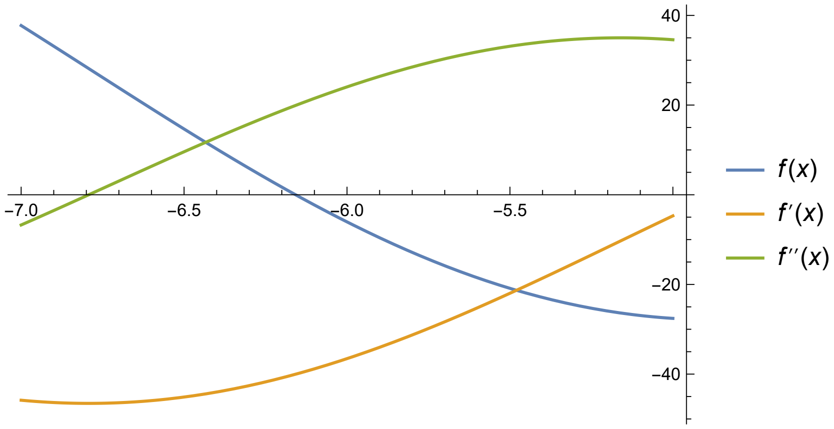
```
In[]:= Plot[f[x], {x, -7, -5}]
```

Out[]=

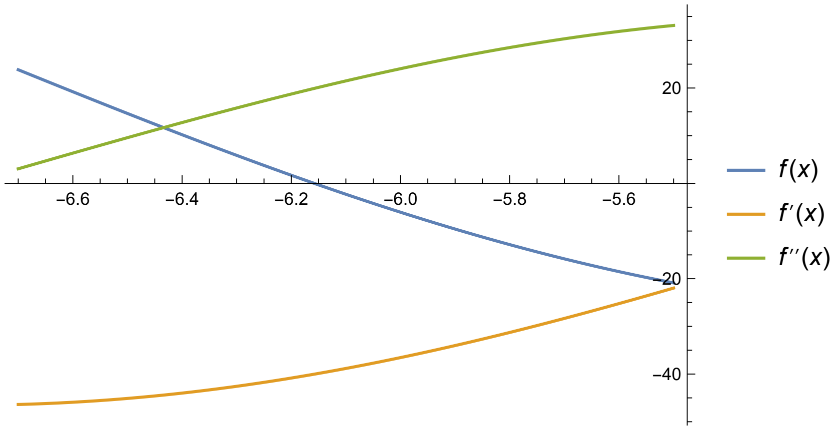



```
In[]:= Plot[{f[x], f'[x], f''[x]}, {x, -7, -5}, PlotLegends → "Expressions"]
```

Out[]=



In[∘]:=
```
Plot[{f[x], f'[x], f''[x]}, {x, -6.7, -5.5}, PlotLegends → "Expressions"]
```

Out[∘]=


In[∘]:=
```
f[-6.7]
```

Out[∘]= 23.8347

In[∘]:=
```
f[-5.5]
```

Out[∘]= -20.874

Извод:

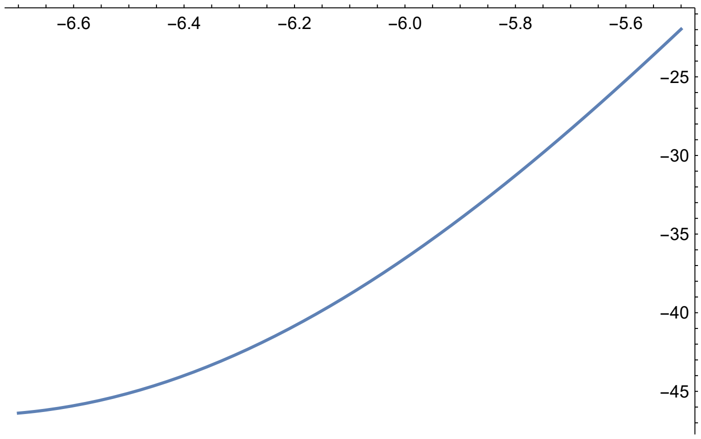
1. f(-6.7) = 23.834.. > 0
2. f(-5.5) = -20.874... < 0

Следователно в двата края на функцията има различни знаци и функцията е непрекъсната в избрания интервал [-6.7;-5.5]. Следва, че функцията има поне един корен в дадения интервал.

3. Проверка на условията за сходимост

Проверка на първата производна

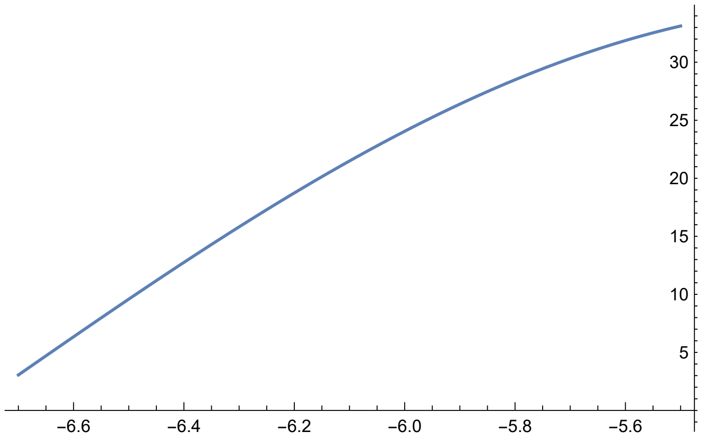
In[∘]:=
```
Plot[f'[x], {x, -6.7, -5.5}]
```

Out[∘]=


(1). Следва, че f’(x) има постоянен знак в дадения интервал.

Проверка на втората производна

In[•]:=
```
Plot[f''[x], {x, -6.7, -5.5}]
```

Out[•]=


(1). Следва, че f’’(x) има постоянен знак в дадения интервал.

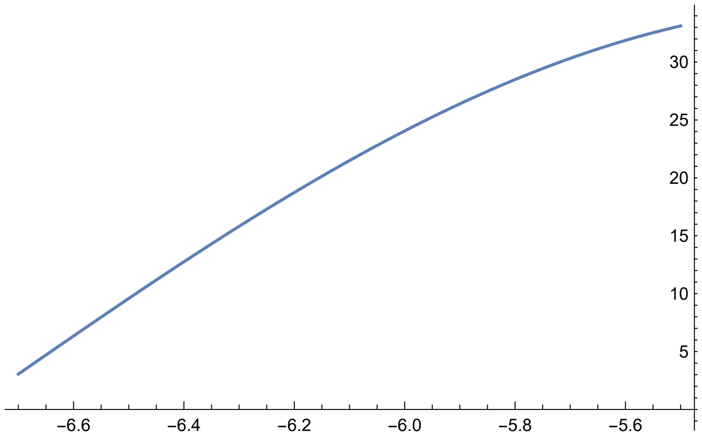
Извод: от (1) и (2) следва, че f'(x) и f''(x) са с постоянни знаци в разглеждания интервал [-6.7; -5.5] => Методът на допирателните е сходящ.

4. Избор на начално приближение

$f(x_0)$ * f’’ > 0
=> $f(x_0) < 0$
=> $x_0 = -5.5$

Пресмятане на постоянните величини:

In[•]:=
```
Plot[Abs[f''[x]], {x, -6.7, -5.5}]
```

Out[•]=


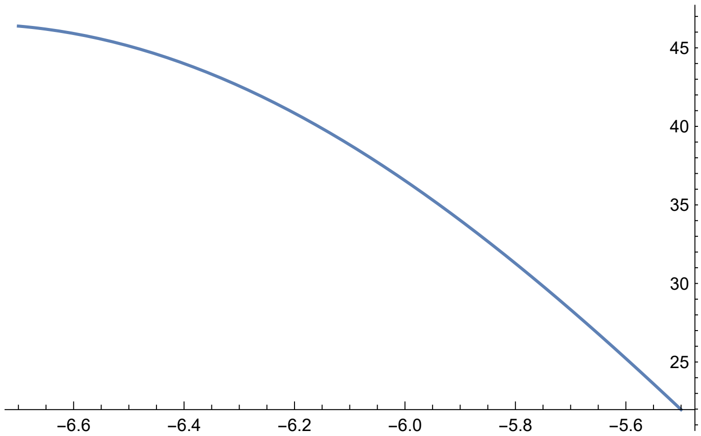
От геометрични съображения максимума се достига в десния край на интервала, а минимума - в левия.

In[•]:=
```
M2 = Abs[f''[-5.5]]
```

Out[•]= 33.124

In[•]:=
```
Plot[Abs[f'[x]], {x, -6.7, -5.5}]
```

Out[•]=



От геометрични съображения максимума се достига в левия край на интервала, а минимума - в десния.

In[•]:=
```
m1 = Abs[f'[-6.7]]
```

Out[•]= 46.3831

In[•]:= $p = \frac{M2}{2\,m1}$

Out[•]= 0.357069

5. Да се изчисли корена по метода на допирателните с точност 0, 0 000 000 001

In[•]:=
```
f[x_] := x^2 - 33 Sin[x + π/7] - 20
x0 = -5.5;
M2 = Abs[f''[-5.5]];
m1 = Abs[f'[-6.7]];
p = M2/(2 m1);
epszad = 0.0000000001;
eps = 1;
Print["n = ", 0, " x_n = ", x0, " f(x) = ", f[x0], " f'(x) = ", f'[x0]];
For[n = 1, eps > epszad, n++,
 x1 = x0 - f[x0]/f'[x0];
 Print["n = ", n, " x_n = ", x1, " f(x_n) = ",
  f[x1] " f'(x_n) = ", f'[x1], " ε_n = ", eps = p * (x1 - x0)^2];
 x0 = x1
]
```

n = 0 x_n = -5.5 f(x) = -20.874 f'(x) = -21.9681

n = 1 x_n = -6.45019 f(x_n) = 12.4285 f'(x_n) = -44.5988 ε_n = 0.322386

n = 2 x_n = -6.17152 f(x_n) = 0.545566 f'(x_n) = -40.2943 ε_n = 0.0277295

n = 3 x_n = -6.15798 f(x_n) = 0.00180275 f'(x_n) = -40.0272 ε_n = 0.0000654573

n = 4 x_n = -6.15794 f(x_n) = 2.02026×10^{-8} f'(x_n) = -40.0263 ε_n = 7.24292×10^{-10}

n = 5 x_n = -6.15794 f(x_n) = 1.42109×10^{-14} f'(x_n) = -40.0263 ε_n = 9.0965×10^{-20}

6. Да се провери колко итерации биха били необходими, ако се използва метода на разполовяването в същия интервал [a, b] за същата точност

In[∘]:= $\text{Log2}\left[\dfrac{-5.5+6.7}{0.0000000001}\right]-1$

Out[∘]= 32.4823

6. Да се направи сравнение кой метод е по-ефективен за избрания интервал

Извод: По метода на допирателните (Нютон) биха били необходими 5 итерации за достигане на исканата точност. А по метода на разполовяването са необходими 32 итерации. Следователно методът на допирателните е по-ефективен за избрания интервал [-6.7, -5.5].