Числено решаване на диференциални уравнения

Обикновени диференциални уравнения (ОДУ)

y = y(x) = ?

$F(x, y, y', y'' \dots y^{(k)}) = 0$

ОДУ от $k^{ти}$ ред

Частен случай => ОДУ от 1-ви ред

$F(x, y, y') = 0$

=> $y' = f(x, y)$ (Задача на Коши)

Частни диференциални уравнения (ЧДУ)

$y = y(x_1, x_2 \dots x_n)$

$F(x_1 \dots x_n, y, \frac{\partial y}{\partial x_1}, \frac{\partial y}{\partial x_2} \dots \frac{\partial y}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} \dots \frac{\partial^2 y}{\partial x_n^2}) = 0$

ЧДУ от $k^{ти}$ ред

$y' = f(x, y)$, x Э [a,b]

Аналитичен подход:

y = y(x, c) c - неопределена константа

Напр: y = y*(x) + c

$y(x_0) = y_0$

$y(x_0, c) = y_0$ => c^* спрямо y частно(x) = $y(x, c^*)$

Числен подход: (намиране частно решение!)

Начална задача на Коши:

$y' = f(x, y)$, x Э [a,b]

$y(a) = y_0$

Метод на Ойлер

Приемаме, че знаем y_i. Търсим y_{i+1} = ?

Развиваме в ред на Тейлър y(x) около точка x_i

$y(x) = y(x_i) + \frac{1}{1!}(x - x_i) * y'(x_i) + \frac{1}{2!}(x - x_i)^2 * y''(\zeta), \quad \zeta \ni (x, x_i)$

Заместваме: $x = x_{i+1}$

$y(x_{i+1}) = y(x_c) + (x_{i+1} - x_i) * y'(x_i) + \frac{1}{2}(x_{i+1} - x_i)^2 * y''(\zeta)$

$y_{i+1} = y_i + h * f_i + O(h^2), \quad i = \overline{0, n-1}$ Формула на Ойлер

Локална грешка - $O(h^2)$

Глобална грешка - $n * O(h^2) = \frac{b-a}{h} * O(h^2) = O(h)$

Задача:

$y' = x + \frac{1}{y}, \; x \ni [0,1]$

$y(0) = 2$

Решение: $n = 4$

$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{4} = 0.25$

i	x_i	y_i	f_i	$y_{точно}(x_i)$	$\varepsilon_i = \lvert y_i - y_{точно}(x_i)\rvert$
0	0	2	0,5		
1	0,25	2,125	0,7201		
2	0,5	2,305	0,9338		
3	0,75	2,5385			
4	1	$y_4 = ?$			

Теоретична грешка:

Локална: $h^2 = 0.25^2 = 0.0625$

Глобална: $h = 0.25$

=> Пишем междинните резултати с 4 знака след десетичната точка

При i = 0:

$y_0 = 2$

$f_0 = f(x_0, y_0) = x_0 + \frac{1}{y_0} = 0 + \frac{1}{2} = 0{,}5$

$y_1 = y_0 + h * f_0 = 2 + 0.25 * 0.5 = 2{,}125$

$f_1 = f(x_1, y_1) = x_1 + \frac{1}{y_1} = 0.25 + \frac{1}{2.125} = 0{,}7201$

$y_2 = y_1 + h * f_1 = 2.125 + 0.25 * 0.7201 = 2{,}305$

$f_2 = f(x_2, y_2) = x_2 + \frac{1}{y_2} = 0.5 + \frac{1}{2.305} = 0{,}9338$

$y_3 = y_2 + h * f_2 = 2.305 + 0.25 * 0.9338 = 2{,}5385$