

Методи на Рунге-Кута

Обща постановка

$$K_1 = h * f(x_i, y_i)$$

$$K_2 = h * f(x_i + \alpha_2 h, y_i + \beta_{21} * K_1)$$

$$K_3 = h * f(x_i + \alpha_3 h, y_i + \beta_{31} * K_1 + \beta_{32} * K_2)$$

.....

$$K_s = h * f(x_i + \alpha_s h, y_i + \beta_{s1} * K_1 + \beta_{s2} * K_2 + \beta_{s,s-1} * K_{s-1})$$

$$y_{i+1} = y_i + \rho_1 * K_1 + \rho_2 * K_2 + \dots + \rho_s * K_s + O(h^{s+1})$$

Локална грешка: $O(h^{s+1})$

Глобална грешка: $O(h^s)$

Частен случай: $S = 2$:

$$K_1 = h * f(x_i, y_i)$$

$$K_2 = h * f(x_i + \alpha * h, y_i + \beta * K_1)$$

$$y_{i+1} = y_i + \rho_1 * K_1 + \rho_2 * K_2 + O(h^3)$$

$\alpha = ?, \beta = ?, \rho_1 = ?, \rho_2 = ?$: Локална грешка $O(h^3)$

Ред на Тейлър около точката x_i :

$$y(x) = y(x_i) + \frac{1}{1!}(x - x_i) * y'(x_i) + \frac{1}{2!}(x - x_i)^2 * y''(x_i) + \frac{1}{3!}(x - x_i)^3 * y'''(x_i)$$

Заместваме: $x = x_{i+1}$

$$y_{i+1} = y_i + h * y'(x_i) + \frac{1}{2} h^2 * y''(x_i) + \frac{1}{6} h^3 * y'''(x_i)$$

$$\rho_1 + \rho_2 = 1$$

$$\alpha * \rho_2 = \frac{1}{2}$$

$$\beta * \rho_2 = \frac{1}{2}$$

Имаме 3 уравнения и 4 неизвестни => Системата има безброй много решения

Някои решения на системата относно $\rho_1, \rho_2, \alpha, \beta$

	α	β	ρ_1	ρ_2
Ф-ла (1, 1)	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
Ф-ла $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1
Ф-ла $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

$$K_1 = h * f(x_i, y_i)$$

$$K_2 = h * f(x_i + \frac{1}{2} h, y_i + \frac{1}{2} * K_1)$$

$$y_{i+1} = y_i + 0 * K_1 + 1 * K_2$$

$$y_{i+1} = y_i + h * f(x_i + \frac{1}{2} h, y_i + \frac{1}{2} h * f(x_i, y_i)) \Rightarrow \text{модифициран метод на Ойлер}$$