Метод за решаване на последователни приближения за решаване на СЛАУ

Дадена е системата Ax = c, където c = (a, b, a+b), съответно a – предпоследната цифра от факултетния номер, b – последната.

1. Да се избере итерационен метод за решаването й.
2. Да се провери условието за сходимост.
3. Да се построи итерационен процес.
4. Да се направят 3 итерации.
5. Покажете достигнатото решение и с каква точност е получено?
6. Какъв е минималния брой итерации, които за нужни за достигане на точност 10^{-4}, работейки по избрания метод при избор на начално приближение x(0) = c?

$$A = \begin{pmatrix} 16 & 2 & 0 \\ 2 & 16 + a & 0 \\ 1 & 0 & 9 + b \end{pmatrix}, b = (a,b, a+b)$$

In[435]:=
```
A = (16 2 0; 2 22 0; 1 0 16); b = {6, 7, 13};
```

$$A = \begin{pmatrix} 16 & 2 & 0 \\ 2 & 22 & 0 \\ 1 & 0 & 16 \end{pmatrix}; b = \{6, 7, 13\};$$

---

1. Да се избере итерационен метод за решаването й. (в случая избираме метода на последователните приближения)

In[436]:=
```
n = Length[A];
```

In[437]:=
```
IM = IdentityMatrix[n];
```

In[438]:=
```
B = IM - A;
```

In[439]:=
```
c = b;
```

In[440]:=
```
Print["Итерационният процес е x^(k+1) = ", B // MatrixForm, ". x^(k) + ", c // MatrixForm]
```

Итерационният процес е $x^{(k+1)} = \begin{pmatrix} -15 & -2 & 0 \\ -2 & -21 & 0 \\ -1 & 0 & -15 \end{pmatrix} . x^{(k)} + \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 13 \end{pmatrix}$

2. Проверка за сходимост ||B|| < 1

първа норма

In[441]:= $\text{Max}\left[\text{Table}\left[\sum_{j=1}^{n} \text{Abs}[B[[i, j]]], \{i, n\}\right]\right]$

Out[441]= 23

втора норма

In[442]:= $\text{Max}\left[\text{Table}\left[\sum_{i=1}^{n} \text{Abs}[B[[i, j]]], \{j, n\}\right]\right]$

Out[442]= 23

трета норма

In[443]:= $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} B[[i, j]]^2}$

Out[443]= 30

Извод: В случая имаме положително определена матрица и условието за сходимост не е изпълнено. Съответно модифицираме метода

3. Модификация на метода при положително определена матрица A

Проверка на приложимостта на модификацията

In[444]:= $A = \begin{pmatrix} 16 & 2 & 0 \\ 2 & 22 & 0 \\ 1 & 0 & 16 \end{pmatrix};$

In[445]:= `PositiveDefiniteMatrixQ[A]`

Out[445]= True

Определяне стойността на *ρ*

In[446]:= `N[Norm[A]]`

Out[446]= 22.6093

In[447]:= `ro = 200`

Out[447]= 200

Итерараме

In[448]:=
$$A = \begin{pmatrix} 16 & 2 & 0 \\ 2 & 22 & 0 \\ 1 & 0 & 16 \end{pmatrix}; \; b = \{6, 7, 13\};$$

```
n = Length[A];
IM = IdentityMatrix[n];
ro = 200;
```

$$B = IM - \frac{2}{ro} A;$$

$$c = \frac{2}{ro} b;$$

```
Print["Итерационният процес е x^(k+1) = ",
 N[B // MatrixForm], ". x^(k) + ", N[c // MatrixForm]]
Print[]
```

$$x = \left\{9, 12, \frac{1}{2}\right\}; \text{ (*изборът на начално приближение е произволен*)}$$

```
(*изчисляваме нормите според избора на норма,
който сме направили по време на проверка на условието на сходимост*)
```

$$normB = Max\left[Table\left[\sum_{j=1}^{n} Abs[B[[i, j]]], \{i, n\}\right]\right];$$

```
Print["Нормата на B е ", N[normB]]
normx0 = Max[Abs[x]];
normc = Max[Abs[c]];
For[k = 0, k ≤ 3, k++,
```

$$Print\left["k = ", N[k], "\ x^{(k)} = ", N[x], "\ \varepsilon_k = ", N\left[eps = normB^k \left(normx0 + \frac{normc}{1 - normB}\right)\right]\right];$$

```
 x = B.x + c
]
Print["За сравнение, точното решение е ", N[LinearSolve[A, b]]]
```

Итерационният процес е $x^{(k+1)} = \begin{pmatrix} 0.84 & -0.02 & 0. \\ -0.02 & 0.78 & 0. \\ -0.01 & 0. & 0.84 \end{pmatrix} . x^{(k)} + \begin{pmatrix} 0.06 \\ 0.07 \\ 0.13 \end{pmatrix}$

Нормата на B е 0.86

k = 0. $x^{(k)}$ = {9., 12., 0.5} ε_k = 12.9286

k = 1. $x^{(k)}$ = {7.38, 9.25, 0.46} ε_k = 11.1186

k = 2. $x^{(k)}$ = {6.0742, 7.1374, 0.4426} ε_k = 9.56197

k = 3. $x^{(k)}$ = {5.01958, 5.51569, 0.441042} ε_k = 8.2233

За сравнение, точното решение е {0.33908, 0.287356, 0.791307}

4. Какъв е минималния брой итерации, които за

нужни за достигане на точност 10^{-4}, работейки по избрания метод при избор на начално приближение $x(0) = c$?

In[462]:=
```
N[Log[10^-4/(normx0 + normc/(1-normB))]/Log[normB]]
```

Out[462]= 78.0371

Извод: Необходими са ни 79 итерации за достигане на исканата точност.

Итерираме

In[463]:=
```
A = {{16, 2, 0}, {2, 22, 0}, {1, 0, 16}}; b = {6, 7, 13};

n = Length[A];
IM = IdentityMatrix[n];
ro = 150;
B = IM - 2/ro A;
c = 2/ro b;
Print["Итерационният процес е x^(k+1) = ",
 N[B // MatrixForm], ". x^(k) + ", N[c // MatrixForm]]
Print[]
x = {9, 12, 1/2}; (*изборът на начално приближение е произволен*)
(*изчисляваме нормите според избора на норма,
който сме направили по време на проверка на условието на сходимост*)
normB = Max[Table[Sum[Abs[B[[i, j]]], {j, 1, n}], {i, n}]];
Print["Нормата на B е ", N[normB]]
normx0 = Max[Abs[x]];
normc = Max[Abs[c]];
For[k = 0, k ≤ 79, k++,
 Print["k = ", N[k], " x^(k) = ", N[x],
  " ε_k = ", N[eps = normB^k (normx0 + normc/(1 - normB))]];
 x = B.x + c
]
Print["За сравнение, точното решение е ", N[LinearSolve[A, b]]]
```

Итерационният процес е $x^{(k+1)} = \begin{pmatrix} 0.786667 & -0.0266667 & 0. \\ -0.0266667 & 0.706667 & 0. \\ -0.0133333 & 0. & 0.786667 \end{pmatrix} . x^{(k)} + \begin{pmatrix} 0.08 \\ 0.0933333 \\ 0.173333 \end{pmatrix}$

Нормата на B е 0.813333

k = 0. $x^{(k)}$ = {9., 12., 0.5} ε_k = 12.9286

k = 1. $x^{(k)}$ = {6.84, 8.33333, 0.446667} ε_k = 10.5152

k = 2. $x^{(k)}$ = {5.23858, 5.79982, 0.433511} ε_k = 8.55239

k = 3. $x^{(k)}$ = {4.04635, 4.05218, 0.444514} ε_k = 6.95595

k = 4. $x^{(k)}$ = {3.15507, 2.84897, 0.469067} ε_k = 5.6575

k = 5. $x^{(k)}$ = {2.48602, 2.02247, 0.500265} ε_k = 4.60144

k = 6. $x^{(k)}$ = {1.98173, 1.45625, 0.533728} ε_k = 3.7425

k = 7. $x^{(k)}$ = {1.60013, 1.06957, 0.566776} ε_k = 3.0439

k = 8. $x^{(k)}$ = {1.31025, 0.806494, 0.597862} ε_k = 2.47571

k = 9. $x^{(k)}$ = {1.08922, 0.628316, 0.626182} ε_k = 2.01357

k = 10. $x^{(k)}$ = {0.9201, 0.508297, 0.651407} ε_k = 1.63771

k = 11. $x^{(k)}$ = {0.790257, 0.427994, 0.673505} ε_k = 1.332

k = 12. $x^{(k)}$ = {0.690256, 0.374709, 0.692621} ε_k = 1.08336

k = 13. $x^{(k)}$ = {0.613009, 0.339721, 0.708992} ε_k = 0.881134

k = 14. $x^{(k)}$ = {0.553174, 0.317056, 0.7229} ε_k = 0.716656

k = 15. $x^{(k)}$ = {0.506709, 0.302635, 0.734639} ε_k = 0.58288

k = 16. $x^{(k)}$ = {0.470541, 0.293683, 0.744493} ε_k = 0.474076

k = 17. $x^{(k)}$ = {0.442327, 0.288322, 0.752727} ε_k = 0.385582

k = 18. $x^{(k)}$ = {0.420276, 0.285285, 0.759581} ε_k = 0.313606

k = 19. $x^{(k)}$ = {0.403009, 0.283728, 0.765267} ε_k = 0.255066

k = 20. $x^{(k)}$ = {0.389468, 0.283087, 0.76997} ε_k = 0.207454

k = 21. $x^{(k)}$ = {0.378832, 0.282996, 0.77385} ε_k = 0.168729

k = 22. $x^{(k)}$ = {0.370468, 0.283215, 0.777044} ε_k = 0.137233

k = 23. $x^{(k)}$ = {0.363883, 0.283593, 0.779669} ε_k = 0.111616

k = 24. $x^{(k)}$ = {0.358692, 0.284035, 0.781821} ε_k = 0.0907813

k = 25. $x^{(k)}$ = {0.354597, 0.284486, 0.783583} ε_k = 0.0738354

k = 26. $x^{(k)}$ = {0.351363, 0.284915, 0.785024} ε_k = 0.0600528

k = 27. $x^{(k)}$ = {0.348808, 0.285303, 0.786201} ε_k = 0.048843

k = 28. $x^{(k)}$ = {0.346787, 0.285646, 0.787161} ε_k = 0.0397256

k = 29. $x^{(k)}$ = {0.345189, 0.285942, 0.787942} ε_k = 0.0323102

k = 30. $x^{(k)}$ = {0.343923, 0.286194, 0.788579} ε_k = 0.0262789

k = 31. $x^{(k)}$ = {0.342921, 0.286406, 0.789096} ε_k = 0.0213735

k = 32. $x^{(k)}$ = {0.342127, 0.286582, 0.789517} ε_k = 0.0173838

k = 33. $x^{(k)}$ = {0.341498, 0.286728, 0.789858} ε_k = 0.0141388

k = 34. $x^{(k)}$ = {0.340999, 0.286848, 0.790135} ε_k = 0.0114996

k = 35. $x^{(k)}$ = {0.340603, 0.286946, 0.79036} ε_k = 0.00935299

k = 36. $x^{(k)}$ = {0.340289, 0.287026, 0.790542} ε_k = 0.0076071

k = 37. $x^{(k)}$ = {0.34004, 0.28709, 0.790689} ε_k = 0.00618711

k = 38. $x^{(k)}$ = {0.339843, 0.287143, 0.790808} ε_k = 0.00503218

k = 39. $x^{(k)}$ = {0.339686, 0.287185, 0.790904} ε_k = 0.00409284

k = 40. $x^{(k)}$ = {0.339561, 0.287219, 0.790982} ε_k = 0.00332884

k = 41. $x^{(k)}$ = {0.339462, 0.287247, 0.791045} ε_k = 0.00270746

k = 42. $x^{(k)}$ = {0.339384, 0.287269, 0.791096} ε_k = 0.00220207

k = 43. $x^{(k)}$ = {0.339321, 0.287286, 0.791137} ε_k = 0.00179101

k = 44. $x^{(k)}$ = {0.339272, 0.2873, 0.79117} ε_k = 0.00145669

k = 45. $x^{(k)}$ = {0.339233, 0.287312, 0.791197} ε_k = 0.00118478

k = 46. $x^{(k)}$ = {0.339201, 0.287321, 0.791219} ε_k = 0.000963618

k = 47. $x^{(k)}$ = {0.339176, 0.287328, 0.791236} ε_k = 0.000783743

k = 48. $x^{(k)}$ = {0.339157, 0.287334, 0.79125} ε_k = 0.000637444

k = 49. $x^{(k)}$ = {0.339141, 0.287338, 0.791261} ε_k = 0.000518454

k = 50. $x^{(k)}$ = {0.339129, 0.287342, 0.79127} ε_k = 0.000421676

k = 51. $x^{(k)}$ = {0.339119, 0.287345, 0.791278} ε_k = 0.000342963

k = 52. $x^{(k)}$ = {0.339111, 0.287347, 0.791283} ε_k = 0.000278944

k = 53. $x^{(k)}$ = {0.339105, 0.287349, 0.791288} ε_k = 0.000226874

k = 54. $x^{(k)}$ = {0.3391, 0.287351, 0.791292} ε_k = 0.000184524

k = 55. $x^{(k)}$ = {0.339096, 0.287352, 0.791295} ε_k = 0.00015008

k = 56. $x^{(k)}$ = {0.339093, 0.287353, 0.791297} ε_k = 0.000122065

k = 57. $x^{(k)}$ = {0.33909, 0.287353, 0.791299} ε_k = 0.0000992794

k = 58. $x^{(k)}$ = {0.339088, 0.287354, 0.791301} ε_k = 0.0000807472

k = 59. $x^{(k)}$ = {0.339087, 0.287354, 0.791302} ε_k = 0.0000656744

k = 60. $x^{(k)}$ = {0.339085, 0.287355, 0.791303} ε_k = 0.0000534152

k = 61. $x^{(k)}$ = {0.339084, 0.287355, 0.791304} ε_k = 0.0000434444

k = 62. $x^{(k)}$ = {0.339084, 0.287355, 0.791305} ε_k = 0.0000353347

k = 63. $x^{(k)}$ = {0.339083, 0.287356, 0.791305} ε_k = 0.0000287389

k = 64. $x^{(k)}$ = {0.339082, 0.287356, 0.791306} ε_k = 0.0000233743

k = 65. $x^{(k)}$ = {0.339082, 0.287356, 0.791306} ε_k = 0.0000190111

k = 66. $x^{(k)}$ = {0.339082, 0.287356, 0.791306} ε_k = 0.0000154624

k = 67. $x^{(k)}$ = {0.339081, 0.287356, 0.791307} ε_k = 0.0000125761

k = 68. $x^{(k)}$ = {0.339081, 0.287356, 0.791307} ε_k = 0.0000102285

k = 69. $x^{(k)}$ = {0.339081, 0.287356, 0.791307} ε_k = 8.31921×10^{-6}

k = 70. $x^{(k)}$ = {0.339081, 0.287356, 0.791307} ε_k = 6.76629×10^{-6}

k = 71. $x^{(k)}$ = {0.339081, 0.287356, 0.791307} ε_k = 5.50325×10^{-6}

k = 72. $x^{(k)}$ = {0.339081, 0.287356, 0.791307} ε_k = 4.47598×10^{-6}

k = 73. $x^{(k)}$ = {0.339081, 0.287356, 0.791307} ε_k = 3.64046×10^{-6}

k = 74. $x^{(k)}$ = {0.339081, 0.287356, 0.791307} ε_k = 2.96091×10^{-6}

k = 75. $x^{(k)}$ = {0.339081, 0.287356, 0.791307} ε_k = 2.4082×10^{-6}

k = 76. $x^{(k)}$ = {0.339081, 0.287356, 0.791307} ε_k = 1.95867×10^{-6}

k = 77. $x^{(k)}$ = {0.339081, 0.287356, 0.791307} ε_k = 1.59305×10^{-6}

k = 78. $x^{(k)}$ = {0.339081, 0.287356, 0.791307} ε_k = 1.29568×10^{-6}

k = 79. $x^{(k)}$ = {0.339081, 0.287356, 0.791307} ε_k = 1.05382×10^{-6}

За сравнение, точното решение е {0.33908, 0.287356, 0.791307}