

Числено решаване на обикновени диференциални уравнения

Дадени са следните задачи: (**a** и **b** са съответно предпоследната и последната цифра от факултетния номер)

а) $y' = y - (2 + a)\sin x$, $y(b) = a + b$, $x \in [b; b + 0.5]$

б) $y' = y - \ln(x^2 + 1) + \frac{2x}{x^2 + 1} + b$, $y(a) = a + b$, $x \in [a; a + 1]$

1. Да се намерят точните решения.

2. Да се решат по методите: Ойлер, модифициран Ойлер, Рунге-Кута (1, 1), Рунге-Кута (2/3, 2/3), Рунге-Кута с 4 междинни точки за а) при $h = 0.1$,

за б) при $n = 5$. Да се направи сравнение между точното решение и численото приближение.

Да се представи геометрична интерпретация на резултатите.

3. Колко би трябвало да са n и h за всеки един от посочените методи за всяка от задачите, за да се достигне точност за а) 10^{-4} , за б) 10^{-7} ?

Решение на а)

1. Да се намерят точните решения

Търсим общо решение:

```
In[279]:= Clear[x, y]
DSolve[y'[x] == y[x] - 8 Sin[x], y[x], x]
```

```
Out[280]= {{y[x] -> e^x C1 + 4 (Cos[x] + Sin[x])}}
```

Търсим частно решение:

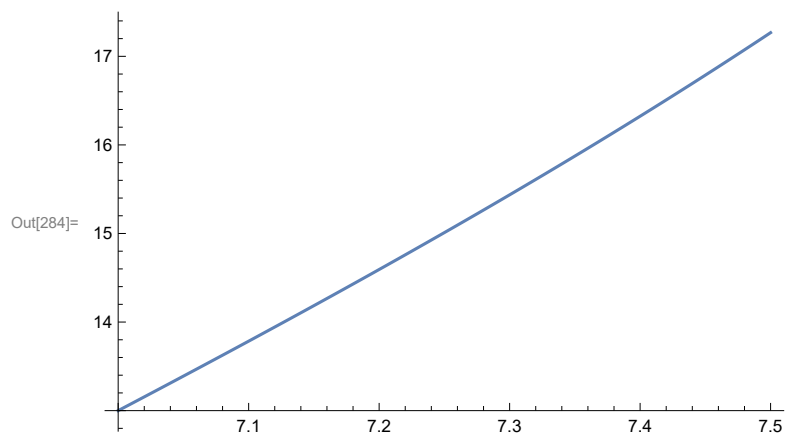
```
In[281]:= Clear[x, y]
DSolve[{y'[x] == y[x] - 8 Sin[x], y[7] == 13}, y[x], x]
```

```
Out[282]= {{y[x] -> (13 e^x - 4 e^x Cos[7] + 4 e^7 Cos[x] - 4 e^x Sin[7] + 4 e^7 Sin[x]) / e^7}}
```

Визуализация на точното решение

In[283]:=
$$yt[x_] := \frac{13 e^x - 4 e^x \cos[7] + 4 e^7 \cos[x] - 4 e^x \sin[7] + 4 e^7 \sin[x]}{e^7}$$

Plot[yt[x], {x, 7, 7.5}]



Извод: Не можем да намерим точно решение с аналитичен метод

2. Да се реши по методите: Ойлер, модифициран Ойлер, Рунге-Кута (1, 1), Рунге-Кута (2/3, 2/3), Рунге-Кута с 4 междинни точки при $h = 0.1$:

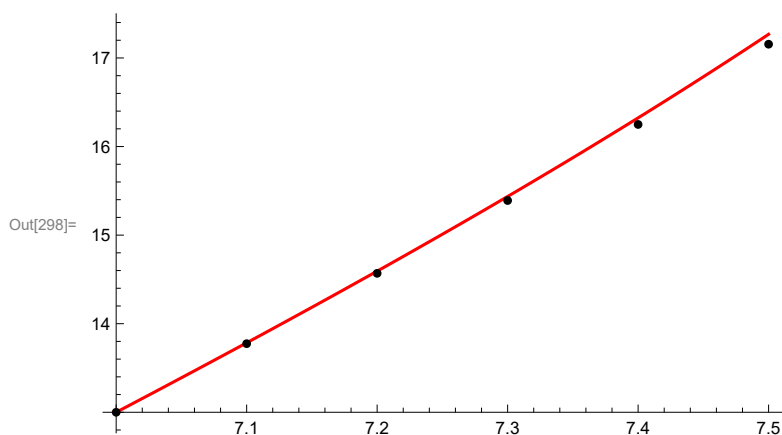
2.1. Ойлер

```
In[285]:= (*Въвеждаме условието на задачата*)
a = 7.; b = 7.5;
x = a;
y = 13.;
points = {{x, y}};
f[x_, y_] := y - 8 Sin[x]
(*Точно решение*)
yt[x_] := 
$$\frac{13 e^x - 4 e^x \cos[7] + 4 e^7 \cos[x] - 4 e^x \sin[7] + 4 e^7 \sin[x]}{e^7}$$

(*Съставяме мрежата*)
h = 0.1; n =  $\frac{b - a}{h}$ ;
Print["Мрежата е с n = ", n, " и стъпка h = ", h]
(*Изчисляваме теоретичната грешка*)
Print["Теоретичната локална грешка е ", h2]
Print["Теоретичната глобална грешка е ", h]
(*Намираме неизвестните стойности за yi*)
For[i = 0, i ≤ n, i++,
  Print["i = ", i, " xi = ", x, " yi = ", y, " fi = ",
    f[x, y], " yточно = ", yt[x], " Истинска грешка = ", Abs[y - yt[x]]];
  y = y + h * f[x, y];
  x = x + h;
  AppendTo[points, {x, y}]
]
(*Визуализация на резултатите*)
gryt = Plot[yt[x], {x, a, b}, PlotStyle → Red];
grp = ListPlot[points, PlotStyle → Black];
Show[gryt, grp]

Мрежата е с n = 5. и стъпка h = 0.1
Теоретичната локална грешка е 0.01
Теоретичната глобална грешка е 0.1

i = 0 xi = 7. yi = 13. fi = 7.74411 yточно = 13. Истинска грешка = 1.77636 × 10-15
i = 1 xi = 7.1 yi = 13.7744 fi = 7.94266 yточно = 13.7842 Истинска грешка = 0.00978072
i = 2 xi = 7.2 yi = 14.5687 fi = 8.21933 yточно = 14.5933 Истинска грешка = 0.0245819
i = 3 xi = 7.3 yi = 15.3906 fi = 8.58712 yточно = 15.4362 Истинска грешка = 0.0456081
i = 4 xi = 7.4 yi = 16.2493 fi = 9.05966 yточно = 16.3235 Истинска грешка = 0.0742258
i = 5 xi = 7.5 yi = 17.1553 fi = 9.65129 yточно = 17.2673 Истинска грешка = 0.111981
```



2.2. Модифициран метод на Ойлер

```

In[299]:= (*Въвеждаме условието на задачата*)
a = 7.; b = 7.5;
x = a;
y = 13.;
points = {{x, y}};
f[x_, y_] := y - 8 Sin[x]
(*Точно решение*)
yt[x_] := 
$$\frac{13 e^x - 4 e^x \cos[7] + 4 e^7 \cos[x] - 4 e^x \sin[7] + 4 e^7 \sin[x]}{e^7}$$

(*Съставяме мрежата*)
h = 0.1; n =  $\frac{b - a}{h}$ ;
Print["Мрежата е с n = ", n, " и стъпка h = ", h]
(*Изчисляваме теоретичната грешка*)
Print["Теоретичната локална грешка е ", h3]
Print["Теоретичната глобална грешка е ", h2]
(*Намираме неизвестните стойности за yi*)
For[i = 0, i ≤ n, i++,
  x12 = x +  $\frac{h}{2}$ ;
  y12 = y +  $\frac{h}{2}$  f[x, y];
  Print["i = ", i, " xi = ", x, " yi = ", y, " fi = ",
    f[x, y], " xi+1/2 = ", x12, " yi+1/2 = ", y12, " fi+1/2 = ",
    f[x12, y12], " yточно = ", yt[x], " Истинска грешка = ", Abs[y - yt[x]]];
  y = y + h * f[x12, y12];
  x = x + h;
  AppendTo[points, {x, y}]
]
(*Визуализация на резултатите*)
gryt = Plot[yt[x], {x, a, b}, PlotStyle → Red];
grp = ListPlot[points, PlotStyle → Black];
Show[gryt, grp]

```

Мрежата е с $n = 5$. и стъпка $h = 0.1$

Теоретичната локална грешка е 0.001

Теоретичната глобална грешка е 0.01

$i = 0$ $x_i = 7$. $y_i = 13$. $f_i = 7.74411$ $x_{i+1/2} = 7.05$ $y_{i+1/2} = 13.3872$ $f_{i+1/2} = 7.83645$ $y_{\text{точно}} = 13$. Истинска грешка = 1.77636×10^{-15}

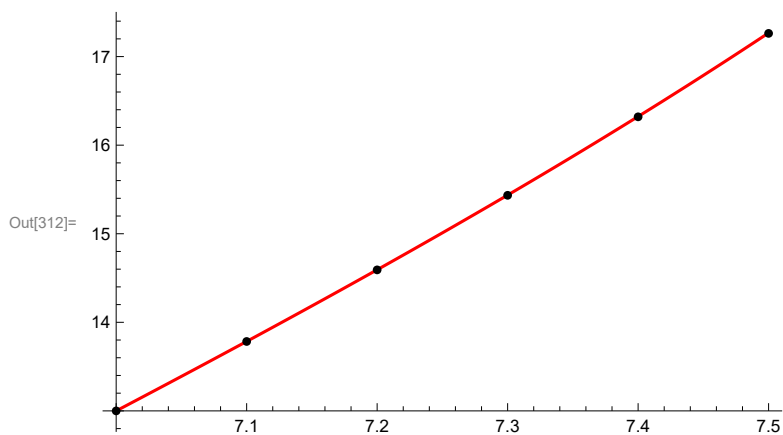
$i = 1$ $x_i = 7.1$ $y_i = 13.7836$ $f_i = 7.95189$ $x_{i+1/2} = 7.15$ $y_{i+1/2} = 14.1812$ $f_{i+1/2} = 8.08307$ $y_{\text{точно}} = 13.7842$ Истинска грешка = 0.000546865

$i = 2$ $x_i = 7.2$ $y_i = 14.592$ $f_i = 8.24261$ $x_{i+1/2} = 7.25$ $y_{i+1/2} = 15.0041$ $f_{i+1/2} = 8.41944$ $y_{\text{точно}} = 14.5933$ Истинска грешка = 0.0013068

$i = 3$ $x_i = 7.3$ $y_i = 15.4339$ $f_i = 8.6304$ $x_{i+1/2} = 7.35$ $y_{i+1/2} = 15.8654$ $f_{i+1/2} = 8.86008$ $y_{\text{точно}} = 15.4362$ Истинска грешка = 0.00232294

$i = 4$ $x_i = 7.4$ $y_i = 16.3199$ $f_i = 9.13024$ $x_{i+1/2} = 7.45$ $y_{i+1/2} = 16.7764$ $f_{i+1/2} = 9.42039$ $y_{\text{точно}} = 16.3235$ Истинска грешка = 0.00364414

$i = 5$ $x_i = 7.5$ $y_i = 17.2619$ $f_i = 9.75794$ $x_{i+1/2} = 7.55$ $y_{i+1/2} = 17.7498$ $f_{i+1/2} = 10.1166$ $y_{\text{точно}} = 17.2673$ Истинска грешка = 0.00532559



2.3. РК32 - Формула (1, 1)

```

In[313]:= (*Въвеждаме условието на задачата*)
a = 7.; b = 7.5;
x = a;
y = 13.;
points = {{x, y}};
f[x_, y_] := y - 8 Sin[x]
(*Точно решение*)
yt[x_] := 
$$\frac{13 e^x - 4 e^x \cos[7] + 4 e^7 \cos[x] - 4 e^x \sin[7] + 4 e^7 \sin[x]}{e^7}$$

(*Съставяме мрежата*)
h = 0.1; n =  $\frac{b - a}{h}$ ;
Print["Мрежата е с n = ", n, " и стъпка h = ", h]
(*Изчисляваме теоретичната грешка*)
Print["Теоретичната локална грешка е ", h3]
Print["Теоретичната глобална грешка е ", h2]
(*Намираме неизвестните стойности за yi*)
For[i = 0, i ≤ n, i++,
  k1 = h * f[x, y];
  k2 = h * f[x + h, y + k1];
  Print["i = ", i, " xi = ", x, " yi = ", y, " fi = ", f[x, y], " k1 = ", k1,
    " k2 = ", k2, " yточно = ", yt[x], " Истинска грешка = ", Abs[y - yt[x]]];
  y = y +  $\frac{1}{2}$  (k1 + k2);
  x = x + h;
  AppendTo[points, {x, y}]
]
(*Визуализация на резултатите*)
gryt = Plot[yt[x], {x, a, b}, PlotStyle → Red];
grp = ListPlot[points, PlotStyle → Black];
Show[gryt, grp]

```

Мрежата е с $n = 5$. и стъпка $h = 0.1$

Теоретичната локална грешка е 0.001

Теоретичната глобална грешка е 0.01

$i = 0$ $x_i = 7.$ $y_i = 13.$ $f_i = 7.74411$ $k_1 = 0.774411$

$k_2 = 0.794266$ $y_{\text{точно}} = 13.$ Истинска грешка = 1.77636×10^{-15}

$i = 1$ $x_i = 7.1$ $y_i = 13.7843$ $f_i = 7.95259$ $k_1 = 0.795259$

$k_2 = 0.823025$ $y_{\text{точно}} = 13.7842$ Истинска грешка = 0.000146835

$i = 2$ $x_i = 7.2$ $y_i = 14.5935$ $f_i = 8.24414$ $k_1 = 0.824414$

$k_2 = 0.86144$ $y_{\text{точно}} = 14.5933$ Истинска грешка = 0.000221854

$i = 3$ $x_i = 7.3$ $y_i = 15.4364$ $f_i = 8.63291$ $k_1 = 0.863291$

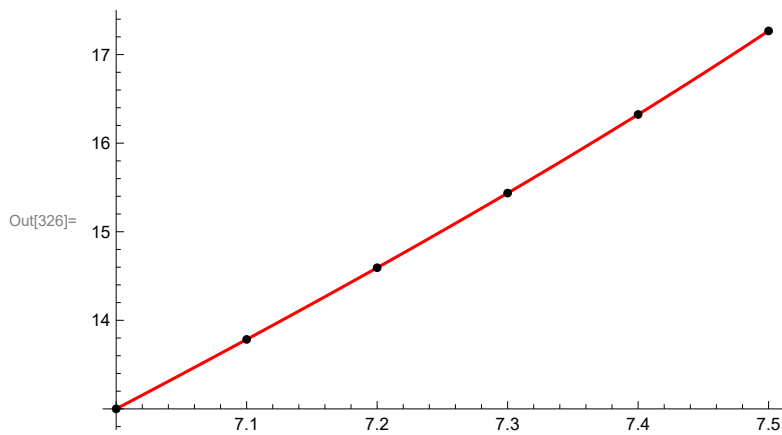
$k_2 = 0.911003$ $y_{\text{точно}} = 15.4362$ Истинска грешка = 0.000189126

$i = 4$ $x_i = 7.4$ $y_i = 16.3236$ $f_i = 9.13389$ $k_1 = 0.913389$

$k_2 = 0.973294$ $y_{\text{точно}} = 16.3235$ Истинска грешка = 7.18544×10^{-6}

$i = 5$ $x_i = 7.5$ $y_i = 17.2669$ $f_i = 9.7629$ $k_1 = 0.97629$

$k_2 = 1.04998$ $y_{\text{точно}} = 17.2673$ Истинска грешка = 0.000371565



2.4. РК32 - Формула (2/3, 2/3)

```

In[327]:= (*Въвеждаме условието на задачата*)
a = 7.; b = 7.5;
x = a;
y = 13.;
points = {{x, y}};
f[x_, y_] := y - 8 Sin[x]
(*Точно решение*)
yt[x_] := 
$$\frac{13 e^x - 4 e^x \cos[7] + 4 e^7 \cos[x] - 4 e^x \sin[7] + 4 e^7 \sin[x]}{e^7}$$

(*Съставяме мрежата*)
h = 0.1; n =  $\frac{b - a}{h}$ ;
Print["Мрежата е с n = ", n, " и стъпка h = ", h]
(*Изчисляваме теоретичната грешка*)
Print["Теоретичната локална грешка е ", h3]
Print["Теоретичната глобална грешка е ", h2]
(*Намираме неизвестните стойности за yi*)
For[i = 0, i ≤ n, i++,
  k1 = h * f[x, y];
  k2 = h * f[x +  $\frac{2}{3}$  * h, y +  $\frac{2}{3}$  * k1];
  Print["i = ", i, " xi = ", x, " yi = ", y, " fi = ", f[x, y], " k1 = ", k1,
    " k2 = ", k2, " yточно = ", yt[x], " Истинска грешка = ", Abs[y - yt[x]]];
  y = y +  $\frac{1}{4}$  * k1 +  $\frac{3}{4}$  * k2;
  x = x + h;
  AppendTo[points, {x, y}]
]
(*Визуализация на резултатите*)
gryt = Plot[yt[x], {x, a, b}, PlotStyle → Red];
grp = ListPlot[points, PlotStyle → Black];
Show[gryt, grp]

```


Мрежата е с $n = 5$. и стъпка $h = 0.1$

Теоретичната локална грешка е 0.001

Теоретичната глобална грешка е 0.01

$i = 0$ $x_i = 7.$ $y_i = 13.$ $f_i = 7.74411$ $k_1 = 0.774411$

$k_2 = 0.787027$ $y_{\text{точно}} = 13.$ Истинска грешка = 1.77636×10^{-15}

$i = 1$ $x_i = 7.1$ $y_i = 13.7839$ $f_i = 7.95212$ $k_1 = 0.795212$

$k_2 = 0.81304$ $y_{\text{точно}} = 13.7842$ Истинска грешка = 0.000318288

$i = 2$ $x_i = 7.2$ $y_i = 14.5925$ $f_i = 8.24311$ $k_1 = 0.824311$

$k_2 = 0.848254$ $y_{\text{точно}} = 14.5933$ Истинска грешка = 0.000802567

$i = 3$ $x_i = 7.3$ $y_i = 15.4347$ $f_i = 8.63123$ $k_1 = 0.863123$

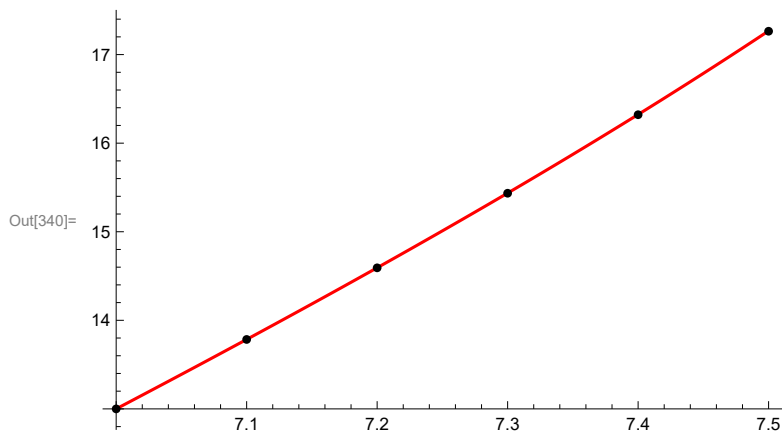
$k_2 = 0.894139$ $y_{\text{точно}} = 15.4362$ Истинска грешка = 0.00149356

$i = 4$ $x_i = 7.4$ $y_i = 16.3211$ $f_i = 9.13145$ $k_1 = 0.913145$

$k_2 = 0.952246$ $y_{\text{точно}} = 16.3235$ Истинска грешка = 0.00243761

$i = 5$ $x_i = 7.5$ $y_i = 17.2636$ $f_i = 9.75958$ $k_1 = 0.975958$

$k_2 = 1.02422$ $y_{\text{точно}} = 17.2673$ Истинска грешка = 0.00368738



2.5. РК54 - Формула с четири междинни точки

```

In[341]:= a = 7.; b = 7.5;
x = a;
y = 13.;
points = {{x, y}};
f[x_, y_] := y - 8 Sin[x]
(*Точно решение*)
yt[x_] := 
$$\frac{13 e^x - 4 e^x \cos[7] + 4 e^7 \cos[x] - 4 e^x \sin[7] + 4 e^7 \sin[x]}{e^7}$$

(*Съставяме мрежата*)
h = 0.1; n =  $\frac{b - a}{h}$ ;
Print["Мрежата е с n = ", n, " и стъпка h = ", h]
(*Изчисляваме теоретичната грешка*)
Print["Теоретичната локална грешка е ", h5]
Print["Теоретичната глобална грешка е ", h4]
(*Намираме неизвестните стойности за yi*)
For[i = 0, i ≤ n, i++,
  k1 = h * f[x, y];
  k2 = h * f[x +  $\frac{h}{2}$ , y +  $\frac{k1}{2}$ ];
  k3 = h * f[x +  $\frac{h}{2}$ , y +  $\frac{k2}{2}$ ];
  k4 = h * f[x + h, y + k3];
  Print["i = ", i, " xi = ", x, " yi = ", y, " fi = ",
    f[x, y], " k1 = ", k1, " k2 = ", k2, " k3 = ", k3, " k4 = ",
    k4, " yточно = ", yt[x], " Истинска грешка = ", Abs[y - yt[x]]];
  y = y +  $\frac{1}{6}$  (k1 + 2 k2 + 2 k3 + k4);
  x = x + h;
  AppendTo[points, {x, y}]
]
(*Визуализация на резултатите*)
gryt = Plot[yt[x], {x, a, b}, PlotStyle → Red];
grp = ListPlot[points, PlotStyle → Black];
Show[gryt, grp]

```

Мрежата е с $n = 5$. и стъпка $h = 0.1$

Теоретичната локална грешка е 0.00001

Теоретичната глобална грешка е 0.0001

$i = 0$ $x_i = 7.$ $y_i = 13.$ $f_i = 7.74411$ $k_1 = 0.774411$ $k_2 = 0.783645$

$k_3 = 0.784106$ $k_4 = 0.795235$ $y_{\text{точно}} = 13.$ Истинска грешка = 1.77636×10^{-15}

$i = 1$ $x_i = 7.1$ $y_i = 13.7842$ $f_i = 7.95244$ $k_1 = 0.795244$ $k_2 = 0.808364$

$k_3 = 0.80902$ $k_4 = 0.824387$ $y_{\text{точно}} = 13.7842$ Истинска грешка = 1.41331×10^{-7}

$i = 2$ $x_i = 7.2$ $y_i = 14.5933$ $f_i = 8.24392$ $k_1 = 0.824392$ $k_2 = 0.842081$

$k_3 = 0.842965$ $k_4 = 0.863273$ $y_{\text{точно}} = 14.5933$ Истинска грешка = 3.45098×10^{-7}

$i = 3$ $x_i = 7.3$ $y_i = 15.4362$ $f_i = 8.63272$ $k_1 = 0.863272$ $k_2 = 0.886252$

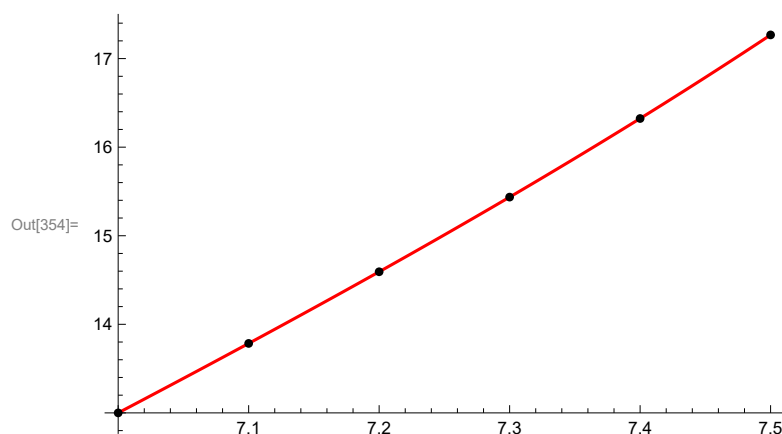
$k_3 = 0.887401$ $k_4 = 0.913395$ $y_{\text{точно}} = 15.4362$ Истинска грешка = 6.29757×10^{-7}

$i = 4$ $x_i = 7.4$ $y_i = 16.3235$ $f_i = 9.13388$ $k_1 = 0.913388$ $k_2 = 0.942422$

$k_3 = 0.943873$ $k_4 = 0.976342$ $y_{\text{точно}} = 16.3235$ Истинска грешка = 1.01656×10^{-6}

$i = 5$ $x_i = 7.5$ $y_i = 17.2673$ $f_i = 9.76327$ $k_1 = 0.976327$ $k_2 = 1.01222$

$k_3 = 1.01402$ $k_4 = 1.05379$ $y_{\text{точно}} = 17.2673$ Истинска грешка = 1.52989×10^{-6}



3. Колко би трябвало да са n и h за всеки един от посочените методи, за да се достигне точност 10^{-4}

2.1. Ойлер

In[355]:= **a = 7.; b = 7.5;**

Clear[n]

Reduce $\left[\frac{b-a}{n} \leq 10^{-4}\right]$

Reduce: Reduce was unable to solve the system with inexact coefficients. The answer was obtained by solving a corresponding exact system and numericizing the result.

Out[357]:= $n < 0 \mid \mid n \geq 5000.$

```
In[358]:= (*Въвеждаме условието на задачата*)
a = 7.; b = 7.5;
x = a;
y = 13.;
points = {{x, y}};
f[x_, y_] := y - 8 Sin[x]
(*Точно решение*)
yt[x_] := 
$$\frac{13 e^x - 4 e^x \cos[7] + 4 e^7 \cos[x] - 4 e^x \sin[7] + 4 e^7 \sin[x]}{e^7}$$

(*Съставяме мрежата*)
n = 5000; h =  $\frac{b - a}{n}$ ;
Print["Мрежата е с n = ", n, " и стъпка h = ", h]
(*Изчисляваме теоретичната грешка*)
Print["Теоретичната локална грешка е ", h2]
Print["Теоретичната глобална грешка е ", h]
Мрежата е с n = 5000 и стъпка h = 0.0001
Теоретичната локална грешка е  $1. \times 10^{-8}$ 
Теоретичната глобална грешка е 0.0001
```

2.2. Модифициран метод на Ойлер

```
In[368]:= a = 7.; b = 7.5;
Clear[n]
Reduce[ $\frac{b - a}{n} \leq 10^{-4}$ ]
... Reduce: Reduce was unable to solve the system with inexact coefficients. The answer was obtained by solving a
corresponding exact system and numericizing the result.
```

```
Out[370]= n < 0 || n ≥ 5000.
```

```
In[371]:= (*Въвеждаме условието на задачата*)
a = 7.; b = 7.5;
x = a;
y = 13.;
points = {{x, y}};
f[x_, y_] := y - 8 Sin[x]
(*Точно решение*)
yt[x_] := 
$$\frac{13 e^x - 4 e^x \cos[7] + 4 e^7 \cos[x] - 4 e^x \sin[7] + 4 e^7 \sin[x]}{e^7}$$

(*Съставяме мрежата*)
n = 5000; h =  $\frac{b - a}{n}$ ;
Print["Мрежата е с n = ", n, " и стъпка h = ", h]
(*Изчисляваме теоретичната грешка*)
Print["Теоретичната локална грешка е ", h3]
Print["Теоретичната глобална грешка е ", h2]
```

Мрежата е с $n = 5000$ и стъпка $h = 0.0001$


Теоретичната локална грешка е $1. \times 10^{-12}$

Теоретичната глобална грешка е $1. \times 10^{-8}$

2.3. РК32 - Формула (1, 1)

In[381]:= **Clear[n]**

Reduce $\left[\left(\frac{b-a}{n}\right)^2 \leq 10^{-4}, n\right]$

 **Reduce:** Reduce was unable to solve the system with inexact coefficients. The answer was obtained by solving a corresponding exact system and numericizing the result.

Out[382]= $n \leq -50. \mid \mid n \geq 50.$

In[383]:= **(*Въвеждаме условието на задачата*)**

a = 7.; b = 7.5;

x = a;

y = 13.;

points = {{x, y}};

f[x_, y_] := y - 8 Sin[x]

(*Точно решение*)

yt[x_] :=
$$\frac{13 e^x - 4 e^x \cos[7] + 4 e^7 \cos[x] - 4 e^x \sin[7] + 4 e^7 \sin[x]}{e^7}$$

(*Съставяме мрежата*)

n = 50; h = $\frac{b-a}{n}$;

Print["Мрежата е с n = ", n, " и стъпка h = ", h]

(*Изчисляваме теоретичната грешка*)

Print["Теоретичната локална грешка е ", h^3]

Print["Теоретичната глобална грешка е ", h^2]

Мрежата е с $n = 50$ и стъпка $h = 0.01$


Теоретичната локална грешка е $1. \times 10^{-6}$

Теоретичната глобална грешка е 0.0001

2.4. РК32 - Формула (2/3, 2/3)

In[393]:= **Clear[n]**

Reduce $\left[\left(\frac{b-a}{n}\right)^2 \leq 10^{-4}, n\right]$

 **Reduce:** Reduce was unable to solve the system with inexact coefficients. The answer was obtained by solving a corresponding exact system and numericizing the result.

Out[394]= $n \leq -50. \mid \mid n \geq 50.$


```
In[395]:= (*Въвеждаме условието на задачата*)
a = 7.; b = 7.5;
x = a;
y = 13.;
points = {{x, y}};
f[x_, y_] := y - 8 Sin[x]
(*Точно решение*)
yt[x_] := 
$$\frac{13 e^x - 4 e^x \cos[7] + 4 e^7 \cos[x] - 4 e^x \sin[7] + 4 e^7 \sin[x]}{e^7}$$

(*Съставяме мрежата*)
n = 50; h =  $\frac{b - a}{n}$ ;
Print["Мрежата е с n = ", n, " и стъпка h = ", h]
(*Изчисляваме теоретичната грешка*)
Print["Теоретичната локална грешка е ", h3]
Print["Теоретичната глобална грешка е ", h2]

Мрежата е с n = 50 и стъпка h = 0.01
Теоретичната локална грешка е  $1. \times 10^{-6}$ 
Теоретичната глобална грешка е 0.0001
```

2.5. РК54 - Формула с четири междинни точки

```
In[405]:= Clear[n]
Reduce[ $\left(\frac{b - a}{n}\right)^4 \leq 10^{-4}, n]$ 
```

 **Reduce:** Reduce was unable to solve the system with inexact coefficients. The answer was obtained by solving a corresponding exact system and numericizing the result.

```
Out[406]= n ≤ -5. || n ≥ 5.
```

```
In[407]:= a = 7.; b = 7.5;
x = a;
y = 13.;
points = {{x, y}};
f[x_, y_] := y - 8 Sin[x]
(*Точно решение*)
yt[x_] := 
$$\frac{13 e^x - 4 e^x \cos[7] + 4 e^7 \cos[x] - 4 e^x \sin[7] + 4 e^7 \sin[x]}{e^7}$$

(*Съставяме мрежата*)
n = 5; h =  $\frac{b - a}{n}$ ;
Print["Мрежата е с n = ", n, " и стъпка h = ", h]
(*Изчисляваме теоретичната грешка*)
Print["Теоретичната локална грешка е ", h5]
Print["Теоретичната глобална грешка е ", h4]
```

Мрежата е с $n = 5$ и стъпка $h = 0.1$

Теоретичната локална грешка е 0.00001

Теоретичната глобална грешка е 0.0001

Решение на б)

1. Да се намерят точните решения

Търсим общо решение:

In[417]:= `Clear[x, y]`

`DSolve[y'[x] == y[x] - Log[x^2 + 1] + $\frac{2x}{x^2 + 1}$ + 7, y[x], x]`

Out[418]= $\left\{ \left\{ y[x] \rightarrow -7 + e^x c_1 + \text{Log}[1 + x^2] \right\} \right\}$

Търсим частно решение:

In[419]:= `Clear[x, y]`

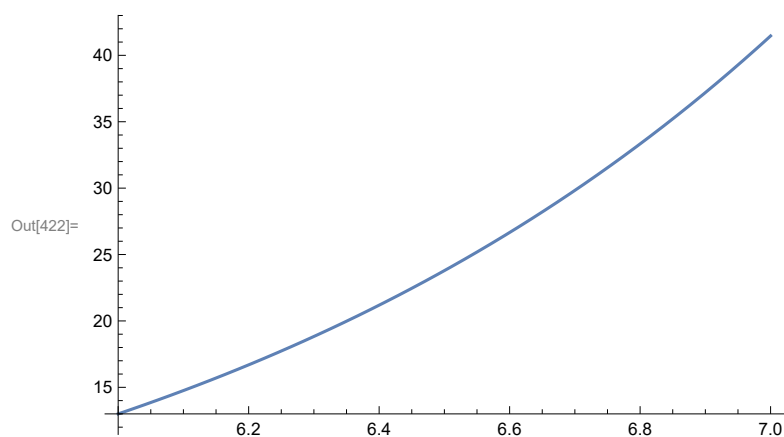
`DSolve[{y'[x] == y[x] - Log[x^2 + 1] + $\frac{2x}{x^2 + 1}$ + 7, y[6] == 13}, y[x], x]`

Out[420]= $\left\{ \left\{ y[x] \rightarrow \frac{-7 e^6 + 20 e^x - e^x \text{Log}[37] + e^6 \text{Log}[1 + x^2]}{e^6} \right\} \right\}$

Визуализация на точното решение

In[421]:= `yt[x_] := $\frac{-7 e^6 + 20 e^x - e^x \text{Log}[37] + e^6 \text{Log}[1 + x^2]}{e^6}$`

`Plot[yt[x], {x, 6, 7}]`



Извод: Не можем да намерим точно решение с аналитичен метод

2. Да се реши по методите: Ойлер, модифициран Ойлер, Рунге-Кута (1, 1), Рунге-Кута (2/3, 2/3), Рунге-Кута с 4 междинни точки при $n = 5$:

2.1. Ойлер

```
In[423]:= (*Въвеждаме условието на задачата*)
a = 6.; b = 7;
x = a;
y = 13.;
points = {{x, y}};

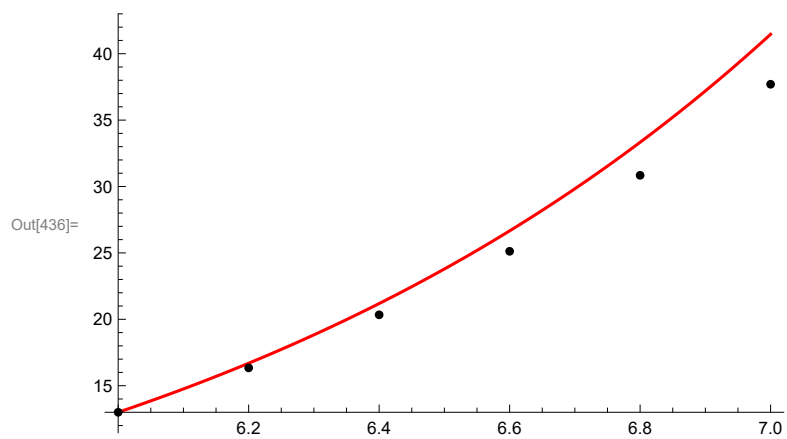
f[x_, y_] := y - Log[x^2 + 1] +  $\frac{2x}{x^2 + 1}$  + 7

(*Точно решение*)
yt[x_] :=  $\frac{-7e^6 + 20e^x - e^x \text{Log}[37] + e^6 \text{Log}[1 + x^2]}{e^6}$ 

(*Съставяме мрежата*)
n = 5; h =  $\frac{b - a}{n}$ ;
Print["Мрежата е с n = ", n, " и стъпка h = ", h]
(*Изчисляваме теоретичната грешка*)
Print["Теоретичната локална грешка е ", h^2]
Print["Теоретичната глобална грешка е ", h]
(*Намираме неизвестните стойности за y_i*)
For[i = 0, i ≤ n, i++,
  Print["i = ", i, " x_i = ", x, " y_i = ", y, " f_i = ",
    f[x, y], " y_точно = ", yt[x], " Истинска грешка = ", Abs[y - yt[x]]];
  y = y + h * f[x, y];
  x = x + h;
  AppendTo[points, {x, y}]
]
(*Визуализация на резултатите*)
gryt = Plot[yt[x], {x, a, b}, PlotStyle → Red];
grp = ListPlot[points, PlotStyle → Black];
Show[gryt, grp]

Мрежата е с n = 5 и стъпка h = 0.2
Теоретичната локална грешка е 0.04
Теоретичната глобална грешка е 0.2

i = 0 x_i = 6. y_i = 13. f_i = 16.7134 y_точно = 13. Истинска грешка = 0.
i = 1 x_i = 6.2 y_i = 16.3427 f_i = 19.9823 y_точно = 16.6925 Истинска грешка = 0.349769
i = 2 x_i = 6.4 y_i = 20.3391 f_i = 23.9075 y_точно = 21.1864 Истинска грешка = 0.847212
i = 3 x_i = 6.6 y_i = 25.1206 f_i = 28.62 y_точно = 26.6597 Истинска грешка = 1.53905
i = 4 x_i = 6.8 y_i = 30.8446 f_i = 34.2773 y_точно = 33.3298 Истинска грешка = 2.48517
i = 5 x_i = 7. y_i = 37.7001 f_i = 41.0681 y_точно = 41.4622 Истинска грешка = 3.76206
```

2.2. Модифициран метод на Ойлер

```

In[437]:= (*Въвеждаме условието на задачата*)
a = 6.; b = 7;
x = a;
y = 13.;
points = {{x, y}};

f[x_, y_] := y - Log[x^2 + 1] +  $\frac{2x}{x^2 + 1}$  + 7

(*Точно решение*)
yt[x_] :=  $\frac{-7e^6 + 20e^x - e^x \text{Log}[37] + e^6 \text{Log}[1 + x^2]}{e^6}$ 

(*Съставяме мрежата*)
n = 5; h =  $\frac{b - a}{n}$ ;
Print["Мрежата е с n = ", n, " и стъпка h = ", h]
(*Изчисляваме теоретичната грешка*)
Print["Теоретичната локална грешка е ", h^3]
Print["Теоретичната глобална грешка е ", h^2]
(*Намираме неизвестните стойности за y_i*)
For[i = 0, i ≤ n, i++,
  x12 = x +  $\frac{h}{2}$ ;
  y12 = y +  $\frac{h}{2}$  f[x, y];
  Print["i = ", i, " x_i = ", x, " y_i = ", y, " f_i = ",
    f[x, y], " x_{i+1/2} = ", x12, " y_{i+1/2} = ", y12, " f_{i+1/2} = ",
    f[x12, y12], " y_точно = ", yt[x], " Истинска грешка = ", Abs[y - yt[x]]];
  y = y + h * f[x12, y12];
  x = x + h;
  AppendTo[points, {x, y}]
]

(*Визуализация на резултатите*)
gryt = Plot[yt[x], {x, a, b}, PlotStyle → Red];
grp = ListPlot[points, PlotStyle → Black];
Show[gryt, grp]

```

Мрежата е с $n = 5$ и стъпка $h = 0.2$

Теоретичната локална грешка е 0.008

Теоретичната глобална грешка е 0.04

$i = 0$ $x_i = 6$, $y_i = 13$, $f_i = 16.7134$ $x_{i+1/2} = 6.1$

$y_{i+1/2} = 14.6713$ $f_{i+1/2} = 18.3475$ $y_{\text{точно}} = 13$. Истинска грешка = 0 .

$i = 1$ $x_i = 6.2$ $y_i = 16.6695$ $f_i = 20.3091$ $x_{i+1/2} = 6.3$ $y_{i+1/2} =$

18.7004 $f_{i+1/2} = 22.3041$ $y_{\text{точно}} = 16.6925$ Истинска грешка = 0.0229443

$i = 2$ $x_i = 6.4$ $y_i = 21.1303$ $f_i = 24.6987$ $x_{i+1/2} = 6.5$ $y_{i+1/2} =$

23.6002 $f_{i+1/2} = 27.1338$ $y_{\text{точно}} = 21.1864$ Истинска грешка = 0.0560289

$i = 3$ $x_i = 6.6$ $y_i = 26.5571$ $f_i = 30.0565$ $x_{i+1/2} = 6.7$ $y_{i+1/2} =$

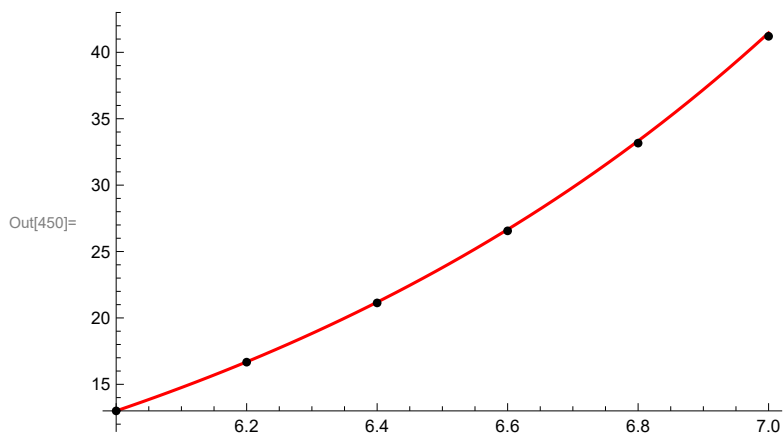
29.5627 $f_{i+1/2} = 33.0285$ $y_{\text{точно}} = 26.6597$ Истинска грешка = 0.102611

$i = 4$ $x_i = 6.8$ $y_i = 33.1628$ $f_i = 36.5954$ $x_{i+1/2} = 6.9$ $y_{i+1/2} =$

36.8223 $f_{i+1/2} = 40.2224$ $y_{\text{точно}} = 33.3298$ Истинска грешка = 0.167038

$i = 5$ $x_i = 7$, $y_i = 41.2073$ $f_i = 44.5752$ $x_{i+1/2} = 7.1$ $y_{i+1/2} =$

45.6648 $f_{i+1/2} = 49.0012$ $y_{\text{точно}} = 41.4622$ Истинска грешка = 0.254914



2.3. РК32 - Формула (1, 1)

```

In[451]:= (*Въвеждаме условието на задачата*)
a = 6.; b = 7;
x = a;
y = 13.;
points = {{x, y}};

f[x_, y_] := y - Log[x^2 + 1] +  $\frac{2x}{x^2 + 1}$  + 7

(*Точно решение*)
yt[x_] :=  $\frac{-7e^6 + 20e^x - e^x \text{Log}[37] + e^6 \text{Log}[1 + x^2]}{e^6}$ 

(*Съставяме мрежата*)
n = 5; h =  $\frac{b - a}{n}$ ;
Print["Мрежата е с n = ", n, " и стъпка h = ", h]
(*Изчисляваме теоретичната грешка*)
Print["Теоретичната локална грешка е ", h^3]
Print["Теоретичната глобална грешка е ", h^2]
(*Намираме неизвестните стойности за y_i*)
For[i = 0, i ≤ n, i++,
  k1 = h * f[x, y];
  k2 = h * f[x + h, y + k1];
  Print["i = ", i, " x_i = ", x, " y_i = ", y, " f_i = ", f[x, y], " k_1 = ", k1,
    " k_2 = ", k2, " y_точно = ", yt[x], " Истинска грешка = ", Abs[y - yt[x]]];
  y = y +  $\frac{1}{2}$  (k1 + k2);
  x = x + h;
  AppendTo[points, {x, y}]
]

(*Визуализация на резултатите*)
gryt = Plot[yt[x], {x, a, b}, PlotStyle → Red];
grp = ListPlot[points, PlotStyle → Black];
Show[gryt, grp]

```

Мрежата е с $n = 5$ и стъпка $h = 0.2$

Теоретичната локална грешка е 0.008

Теоретичната глобална грешка е 0.04

$i = 0$ $x_i = 6$, $y_i = 13$, $f_i = 16.7134$ $k_1 = 3.34268$ $k_2 = 3.99646$ $y_{\text{точно}} = 13$. Истинска грешка = 0 .

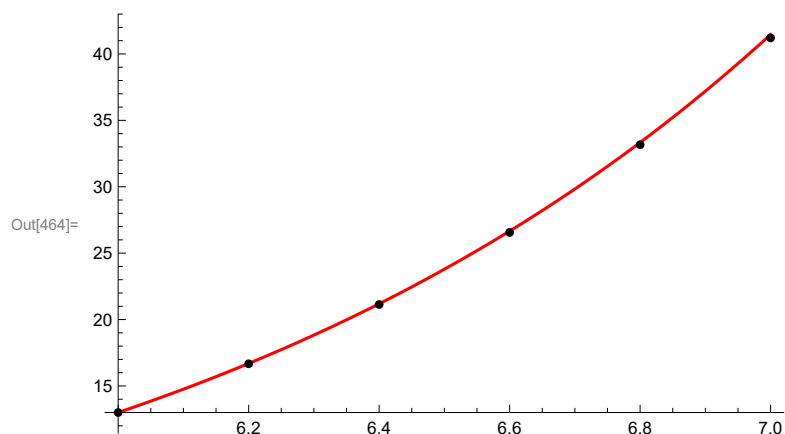
$i = 1$ $x_i = 6.2$ $y_i = 16.6696$ $f_i = 20.3092$ $k_1 = 4.06184$ $k_2 = 4.85995$ $y_{\text{точно}} = 16.6925$ Истинска грешка = 0.0228797

$i = 2$ $x_i = 6.4$ $y_i = 21.1305$ $f_i = 24.6988$ $k_1 = 4.93976$ $k_2 = 5.91392$ $y_{\text{точно}} = 21.1864$ Истинска грешка = 0.0558896

$i = 3$ $x_i = 6.6$ $y_i = 26.5573$ $f_i = 30.0567$ $k_1 = 6.01134$ $k_2 = 7.20026$ $y_{\text{точно}} = 26.6597$ Истинска грешка = 0.102385

$i = 4$ $x_i = 6.8$ $y_i = 33.1631$ $f_i = 36.5958$ $k_1 = 7.31915$ $k_2 = 8.77005$ $y_{\text{точно}} = 33.3298$ Истинска грешка = 0.166708

$i = 5$ $x_i = 7$, $y_i = 41.2077$ $f_i = 44.5757$ $k_1 = 8.91514$ $k_2 = 10.6856$ $y_{\text{точно}} = 41.4622$ Истинска грешка = 0.254462



2.4. РК32 - Формула (2/3, 2/3)

```

In[465]:= (*Въвеждаме условието на задачата*)
a = 6.; b = 7;
x = a;
y = 13.;
points = {{x, y}};

f[x_, y_] := y - Log[x^2 + 1] +  $\frac{2x}{x^2 + 1}$  + 7

(*Точно решение*)
yt[x_] :=  $\frac{-7e^6 + 20e^x - e^x \text{Log}[37] + e^6 \text{Log}[1 + x^2]}{e^6}$ 

(*Съставяме мрежата*)
n = 5; h =  $\frac{b - a}{n}$ ;
Print["Мрежата е с n = ", n, " и стъпка h = ", h]
(*Изчисляваме теоретичната грешка*)
Print["Теоретичната локална грешка е ", h^3]
Print["Теоретичната глобална грешка е ", h^2]
(*Намираме неизвестните стойности за y_i*)
For[i = 0, i ≤ n, i++,
  k1 = h * f[x, y];
  k2 = h * f[x +  $\frac{2}{3}$  * h, y +  $\frac{2}{3}$  * k1];
  Print["i = ", i, " x_i = ", x, " y_i = ", y, " f_i = ", f[x, y], " k_1 = ", k1,
    " k_2 = ", k2, " y_точно = ", yt[x], " Истинска грешка = ", Abs[y - yt[x]]];
  y = y +  $\frac{1}{4}$  * k1 +  $\frac{3}{4}$  * k2;
  x = x + h;
  AppendTo[points, {x, y}]
]

(*Визуализация на резултатите*)
gryt = Plot[yt[x], {x, a, b}, PlotStyle → Red];
grp = ListPlot[points, PlotStyle → Black];
Show[gryt, grp]

```

Мрежата е с $n = 5$ и стъпка $h = 0.2$

Теоретичната локална грешка е 0.008

Теоретичната глобална грешка е 0.04

$i = 0$ $x_i = 6$, $y_i = 13$, $f_i = 16.7134$ $k_1 = 3.34268$ $k_2 = 3.77848$ $y_{\text{точно}} = 13$. Истинска грешка = 0 .

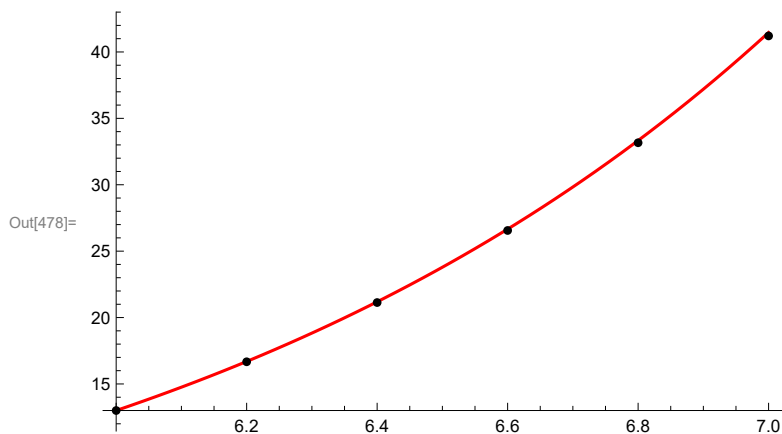
$i = 1$ $x_i = 6.2$ $y_i = 16.6695$ $f_i = 20.3091$ $k_1 = 4.06183$ $k_2 = 4.59385$ $y_{\text{точно}} = 16.6925$ Истинска грешка = 0.0229226

$i = 2$ $x_i = 6.4$ $y_i = 21.1304$ $f_i = 24.6987$ $k_1 = 4.93974$ $k_2 = 5.58913$ $y_{\text{точно}} = 21.1864$ Истинска грешка = 0.0559821

$i = 3$ $x_i = 6.6$ $y_i = 26.5572$ $f_i = 30.0565$ $k_1 = 6.01131$ $k_2 = 6.80387$ $y_{\text{точно}} = 26.6597$ Истинска грешка = 0.102535

$i = 4$ $x_i = 6.8$ $y_i = 33.1629$ $f_i = 36.5955$ $k_1 = 7.31911$ $k_2 = 8.28632$ $y_{\text{точно}} = 33.3298$ Истинска грешка = 0.166927

$i = 5$ $x_i = 7$, $y_i = 41.2074$ $f_i = 44.5754$ $k_1 = 8.91508$ $k_2 = 10.0953$ $y_{\text{точно}} = 41.4622$ Истинска грешка = 0.254763



2.5. РК54 - Формула с четири междинни точки

```

In[479]:= (*Въвеждаме условието на задачата*)
a = 6.; b = 7;
x = a;
y = 13.;
points = {{x, y}};

f[x_, y_] := y - Log[x^2 + 1] +  $\frac{2x}{x^2 + 1}$  + 7

(*Точно решение*)
yt[x_] :=  $\frac{-7e^6 + 20e^x - e^x \text{Log}[37] + e^6 \text{Log}[1 + x^2]}{e^6}$ 

(*Съставяме мрежата*)
n = 5; h =  $\frac{b - a}{n}$ ;
Print["Мрежата е с n = ", n, " и стъпка h = ", h]
(*Изчисляваме теоретичната грешка*)
Print["Теоретичната локална грешка е ", h^5]
Print["Теоретичната глобална грешка е ", h^4]
(*Намираме неизвестните стойности за y_i*)
For[i = 0, i ≤ n, i++,
  k1 = h * f[x, y];
  k2 = h * f[x +  $\frac{h}{2}$ , y +  $\frac{k1}{2}$ ];
  k3 = h * f[x +  $\frac{h}{2}$ , y +  $\frac{k2}{2}$ ];
  k4 = h * f[x + h, y + k3];
  Print["i = ", i, " x_i = ", x, " y_i = ", y, " f_i = ",
    f[x, y], " k_1 = ", k1, " k_2 = ", k2, " k_3 = ", k3, " k_4 = ",
    k4, " y_точно = ", yt[x], " Истинска грешка = ", Abs[y - yt[x]]];
  y = y +  $\frac{1}{6}$  (k1 + 2 k2 + 2 k3 + k4);
  x = x + h;
  AppendTo[points, {x, y}]
]

(*Визуализация на резултатите*)
gryt = Plot[yt[x], {x, a, b}, PlotStyle → Red];
grp = ListPlot[points, PlotStyle → Black];
Show[gryt, grp]

```


Мрежата е с $n = 5$ и стъпка $h = 0.2$

Теоретичната локална грешка е 0.00032

Теоретичната глобална грешка е 0.0016

$i = 0$ $x_i = 6.$ $y_i = 13.$ $f_i = 16.7134$ $k_1 = 3.34268$ $k_2 = 3.66951$ $k_3 = 3.70219$ $k_4 = 4.06836$ $y_{\text{точно}} = 13.$ Истинска грешка = $0.$

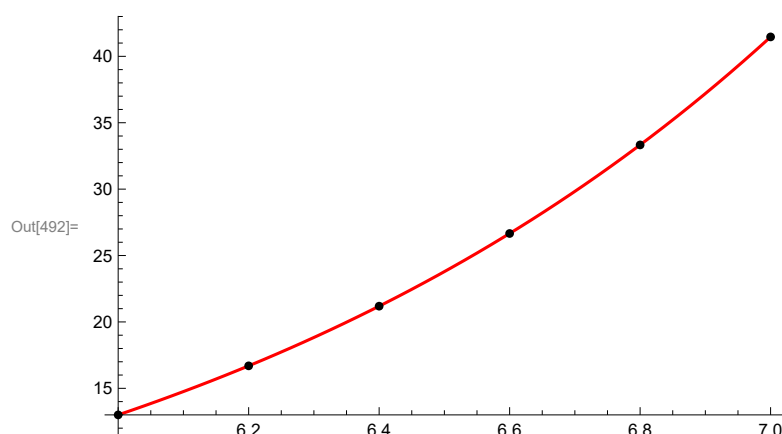
$i = 1$ $x_i = 6.2$ $y_i = 16.6924$ $f_i = 20.332$ $k_1 = 4.06641$ $k_2 = 4.46586$ $k_3 = 4.5058$ $k_4 = 4.95331$ $y_{\text{точно}} = 16.6925$ Истинска грешка = 0.0000450139

$i = 2$ $x_i = 6.4$ $y_i = 21.1862$ $f_i = 24.7546$ $k_1 = 4.95092$ $k_2 = 5.43906$ $k_3 = 5.48787$ $k_4 = 6.0347$ $y_{\text{точно}} = 21.1864$ Истинска грешка = 0.000110014

$i = 3$ $x_i = 6.6$ $y_i = 26.6595$ $f_i = 30.1589$ $k_1 = 6.03178$ $k_2 = 6.62823$ $k_3 = 6.68787$ $k_4 = 7.356$ $y_{\text{точно}} = 26.6597$ Истинска грешка = 0.000201639

$i = 4$ $x_i = 6.8$ $y_i = 33.3295$ $f_i = 36.7621$ $k_1 = 7.35243$ $k_2 = 8.08115$ $k_3 = 8.15402$ $k_4 = 8.9703$ $y_{\text{точно}} = 33.3298$ Истинска грешка = 0.000328491

$i = 5$ $x_i = 7.$ $y_i = 41.4617$ $f_i = 44.8296$ $k_1 = 8.96593$ $k_2 = 9.8562$ $k_3 = 9.94523$ $k_4 = 10.9424$ $y_{\text{точно}} = 41.4622$ Истинска грешка = 0.000501673



3. Колко би трябвало да са n и h за всеки един от посочените методи, за да се достигне точност 10^{-7}

2.1. Ойлер

In[493]:= **a = 6.; b = 7;**

Clear[n]

Reduce $\left[\frac{b-a}{n} \leq 10^{-7}\right]$

Reduce: Reduce was unable to solve the system with inexact coefficients. The answer was obtained by solving a corresponding exact system and numericizing the result.

Out[495]= $n < 0 \mid \mid n \geq 1. \times 10^7$

```

In[496]:= (*Въвеждаме условието на задачата*)
a = 6.; b = 7;
x = a;
y = 13.;
points = {{x, y}};

f[x_, y_] := y - Log[x^2 + 1] +  $\frac{2x}{x^2 + 1}$  + 7

(*Точно решение*)
yt[x_] :=  $\frac{-7 e^6 + 20 e^x - e^x \text{Log}[37] + e^6 \text{Log}[1 + x^2]}{e^6}$ 

(*Съставяме мрежата*)
n = 10^7; h =  $\frac{b - a}{n}$ ;
Print["Мрежата е с n = ", n, " и стъпка h = ", h]
(*Изчисляваме теоретичната грешка*)
Print["Теоретичната локална грешка е ", h^2]
Print["Теоретичната глобална грешка е ", h]
Мрежата е с n = 10000000 и стъпка h = 1.×10-7
Теоретичната локална грешка е 1.×10-14
Теоретичната глобална грешка е 1.×10-7


```

2.2. Модифициран метод на Ойлер

```

In[506]:= a = 6.; b = 7;
Clear[n]
Reduce[ $\frac{b - a}{n} \leq 10^{-7}$ ]

```

 **Reduce:** Reduce was unable to solve the system with inexact coefficients. The answer was obtained by solving a corresponding exact system and numericizing the result.

```

Out[508]= n < 0 | | n ≥ 1. × 107

```

```

In[509]:= (*Въвеждаме условието на задачата*)
a = 6.; b = 7;
x = a;
y = 13.;
points = {{x, y}};

f[x_, y_] := y - Log[x^2 + 1] +  $\frac{2x}{x^2 + 1}$  + 7

(*Точно решение*)
yt[x_] :=  $\frac{-7e^6 + 20e^x - e^x \text{Log}[37] + e^6 \text{Log}[1 + x^2]}{e^6}$ 

(*Съставяме мрежата*)
n = 10^7; h =  $\frac{b - a}{n}$ ;
Print["Мрежата е с n = ", n, " и стъпка h = ", h]
(*Изчисляваме теоретичната грешка*)
Print["Теоретичната локална грешка е ", h^3]
Print["Теоретичната глобална грешка е ", h^2]

Мрежата е с n = 10000000 и стъпка h = 1.×10-7
Теоретичната локална грешка е 1.×10-21
Теоретичната глобална грешка е 1.×10-14


```

2.3. РК32 - Формула (1, 1)

```

In[519]:= Clear[n]
Reduce[ $\left(\frac{b - a}{n}\right)^2 \leq 10^{-7}, n]$ 

```

 **Reduce:** Reduce was unable to solve the system with inexact coefficients. The answer was obtained by solving a corresponding exact system and numericizing the result.

```

Out[520]= n ≤ -3162.28 || n ≥ 3162.28

```

```

In[521]:= (*Въвеждаме условието на задачата*)
a = 6.; b = 7;
x = a;
y = 13.;
points = {{x, y}};

f[x_, y_] := y - Log[x^2 + 1] +  $\frac{2x}{x^2 + 1}$  + 7

(*Точно решение*)
yt[x_] :=  $\frac{-7 e^6 + 20 e^x - e^x \text{Log}[37] + e^6 \text{Log}[1 + x^2]}{e^6}$ 

(*Съставяме мрежата*)
n = 3163; h =  $\frac{b - a}{n}$ ;
Print["Мрежата е с n = ", n, " и стъпка h = ", h]
(*Изчисляваме теоретичната грешка*)
Print["Теоретичната локална грешка е ", h^3]
Print["Теоретичната глобална грешка е ", h^2]

Мрежата е с n = 3163 и стъпка h = 0.000316156
Теоретичната локална грешка е  $3.16011 \times 10^{-11}$ 
Теоретичната глобална грешка е  $9.99543 \times 10^{-8}$ 


```

2.4. РК32 - Формула (2/3, 2/3)

```

In[531]:= Clear[n]
Reduce[ $\left(\frac{b - a}{n}\right)^2 \leq 10^{-7}, n]$ 

```

 **Reduce:** Reduce was unable to solve the system with inexact coefficients. The answer was obtained by solving a corresponding exact system and numericizing the result.

```

Out[532]= n ≤ -3162.28 || n ≥ 3162.28

```

```
In[533]:= (*Въвеждаме условието на задачата*)
a = 6.; b = 7;
x = a;
y = 13.;
points = {{x, y}};

f[x_, y_] := y - Log[x^2 + 1] +  $\frac{2x}{x^2 + 1}$  + 7


(*Точно решение*)
yt[x_] :=  $\frac{-7e^6 + 20e^x - e^x \text{Log}[37] + e^6 \text{Log}[1 + x^2]}{e^6}$ 

(*Съставяме мрежата*)
n = 3163; h =  $\frac{b - a}{n}$ ;
Print["Мрежата е с n = ", n, " и стъпка h = ", h]
(*Изчисляваме теоретичната грешка*)
Print["Теоретичната локална грешка е ", h^3]
Print["Теоретичната глобална грешка е ", h^2]

Мрежата е с n = 3163 и стъпка h = 0.000316156
Теоретичната локална грешка е  $3.16011 \times 10^{-11}$ 
Теоретичната глобална грешка е  $9.99543 \times 10^{-8}$ 
```

2.5. РК54 - Формула с четири междинни точки

```
In[543]:= Clear[n]
Reduce[ $\left(\frac{b - a}{n}\right)^4 \leq 10^{-7}, n]$ 
```

 **Reduce:** Reduce was unable to solve the system with inexact coefficients. The answer was obtained by solving a corresponding exact system and numericizing the result.

```
Out[544]= n ≤ -56.2341 || n ≥ 56.2341
```

```

In[545]:= (*Въвеждаме условието на задачата*)
a = 6.; b = 7;
x = a;
y = 13.;
points = {{x, y}};

f[x_, y_] := y - Log[x^2 + 1] +  $\frac{2x}{x^2 + 1}$  + 7

(*Точно решение*)
yt[x_] :=  $\frac{-7 e^6 + 20 e^x - e^x \text{Log}[37] + e^6 \text{Log}[1 + x^2]}{e^6}$ 

(*Съставяме мрежата*)
n = 57; h =  $\frac{b - a}{n}$ ;
Print["Мрежата е с n = ", n, " и стъпка h = ", h]
(*Изчисляваме теоретичната грешка*)
Print["Теоретичната локална грешка е ", h^5]
Print["Теоретичната глобална грешка е ", h^4]

Мрежата е с n = 57 и стъпка h = 0.0175439
Теоретичната локална грешка е  $1.66198 \times 10^{-9}$ 
Теоретичната глобална грешка е  $9.47328 \times 10^{-8}$ 

```