Линейни хомогенни диференциални уравнения от n-ти ред

Информатика, 2021/2022

1. Линейни диференциални уравнения от n-ти ред
2. Линейна зависимост и независимост. Детерминанта на Вронски
3. Фундаментална система решения. Формула на общото решение

Линейни диференциални уравнения от n-ти ред

- Уравнение от вида

$$y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)\, y' + a_n(x)\, y = f(x), \qquad (1)$$

където $f(x),\ a_i(x) \in C(\alpha, \beta),\ i = 1, \dots, n,$ се нарича линейно диференциално уравнение от n-ти ред.

- Ако $f(x) \equiv 0$ за всяко $x \in (\alpha, \beta)$, то уравнението (1) се нарича хомогенно, в протививен случай – нехомогенно.

Примери.

1) $y'' - y = 0;$

2) $y''' + xy'' + y = \sin x;$

3) $y''' + 6y'' + 11y' + 6y = 336\, e^{5x}.$

▶ Задача на Коши за уравнението (1): Да се намери решение на уравнението (1), което удовлетворява допълнителните условия

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \\ \dots\dots\dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}, \end{cases} \tag{2}$$

където $x_0 \in (\alpha, \beta)$, $y_0, y_1, \dots y_{n-1} \in \mathbb{C}$ са произволни константи.

Теорема 1 (Теорема за съществуване и единственост)

Нека $f(x)$, $a_i(x) \in C(\alpha, \beta)$, $i = 1, \dots, n$. Тогава съществува единствено решение на уравнението (1), което удовлетворява условията (2), като при това то е дефинирано в целия интервал (α, β).

Линейна зависимост и независимост. Детерминанта на Вронски

- Функциите $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$, дефинирани в интервала (α, β), се наричат **линейно зависими в** (α, β), ако съществуват константи $C_1, C_2, \dots, C_n$, от които поне едната е различна от 0, такива че равенството

$$C_1\, y_1(x) + C_2\, y_2(x) + \cdots + C_n\, y_n(x) = 0$$

е изпълнено за всяко $x \in (\alpha, \beta)$.

Примери.

1) $y_1(x) = 2x,\ y_2(x) = x$ са линейно зависими в интервала $(-\infty, +\infty)$;

2) $y_1(x) = (x-1)^2,\ y_2(x) = x^2 + 1,\ y_3(x) = x$ са линейно зависими в интервала $(-\infty, +\infty)$.

- Функциите $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$, дефинирани в интервала (α, β), се наричат **линейно независими в (α, β)**, ако не са линейно зависими.

Примери.

1) $y_1(x) = 1,\; y_2(x) = \ln x$ са линейно независими във всеки подинтервал на интервала $(-\infty, +\infty)$;

2) $y_1(x) = 1,\; y_2(x) = x,\; y_3(x) = x^2, \ldots, y_n(x) = x^{n-1}$ са линейно независими във всеки подинтервал на интервала $(-\infty, +\infty)$.

3) $y_1(x) = e^x,\; y_2(x) = xe^x,\; y_3(x) = x^2e^x, \ldots, y_n(x) = x^{n-1}e^x$ са линейно независими във всеки подинтервал на интервала $(-\infty, +\infty)$.

- Нека е дадено множеството $y_1, y_2, \ldots, y_n$ от $n-1$ пъти непрекъснато-диференцируеми функции в интервала (α, β). Функцията

$$W(x) = W[y_1, y_2, \ldots, y_n](x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \ldots & y_n'' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

се нарича детерминанта на Вронски.

Теорема 2 (Необходимо условие за линейна зависимост)

Нека е дадено множеството $y_1, y_2, \ldots, y_n$ от $n-1$ пъти непрекъснато-диференцируеми функции в интервала (α, β). Ако те са линейно зависими в (α, β), то

$$W(x) = 0 \quad \text{за } \forall x \in (\alpha, \beta).$$

Доказателство. Тъй като функциите $y_1, y_2, \ldots, y_n$ са линейно зависими, то съществуват константи $C_1, C_2, \ldots, C_n$, поне една от тях различна от 0, за които

$$C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \cdots + C_n y_n(x) = 0$$

за всяко $x \in (\alpha, \beta)$. Като диференцираме това равенство по x $n-1$ пъти, последователно получаваме

$$\left|\begin{array}{l} C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+\cdots+C_ny_n(x)=0 \\ C_1y_1'(x)+C_2y_2'(x)+\cdots+C_ny_n'(x)=0 \\ \dotfill \\ C_1y_1^{(n-1)}(x)+C_2y_2^{(n-1)}(x)+\cdots+C_ny_n^{(n-1)}(x)=0 \end{array}\right.$$

за всяко $x \in (\alpha, \beta)$. Оттук следва, че за произволно фиксирано $x \in (\alpha, \beta)$ получената система относно $C_1, C_2, \ldots, C_n$ има ненулево решение. От линейната алгебра знаем, че в такъв случай за всяко $x \in (\alpha, \beta)$ детерминантата от коефициентите пред неизвестните е равна на 0. Но тази детерминанта е равна точно на $W(x)$, откъдето получаваме $W(x) = 0$ за всяко $x \in (\alpha, \beta)$. С това теоремата е доказана.

Теорема 3 (Достатъчно условие за линейна независимост)

Нека е дадено множеството $y_1, y_2, \ldots, y_n$ от $n-1$ пъти непрекъснато-диференцируеми функции в интервала (α, β). Ако

$$\exists x_0 \in (\alpha, \beta) : \quad W(x_0) \neq 0,$$

то функциите са линейно независими.

Доказателство. Ако допуснем, че $y_1, y_2, \ldots, y_n$ са линейно зависими, то от Теорема 2 следва, че $W(x) = 0$ за всяко $x \in (\alpha, \beta)$. Това очевидно противоречи на условието на Теорема 3, откъдето получаваме, че допускането не е вярно, т.е. $y_1, y_2, \ldots, y_n$ са линейно независими.

Теорема 4 (Достатъчно условие за линейна зависимост)

Нека е дадено множеството $y_1, y_2, \dots, y_n$ *от* $n-1$ *пъти непрекъснато-диференцируеми функции в* (α, β), *за които:*

1) $W[y_1, y_2, \dots, y_n](x) = 0$ *за* $\forall x \in (\alpha, \beta)$;

2) Съществува подмножество $y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_{n-1}}$ *от* $n-1$ *на брой функции, за които* $W[y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_{n-1}}](x) \neq 0$ *за* $\forall x \in (\alpha, \beta)$.

Тогава дадените функции са линейно зависими в (α, β).

Фундаментална система решения. Формула на общото решение

- Нека е дадено линейното хомогенно диференциално уравнение от n-ти ред

$$y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)\, y' + a_n(x)\, y = 0, \qquad (3)$$

където $a_i(x) \in C(\alpha, \beta)$, $i = 1, \ldots, n$.

Ще покажем, че множеството от всички решения на едно такова уравнение представлява n-мерно линейно пространство над полето $\mathbb{C}$, от което следва, че ако е даден един базис $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ на това пространство, то всяко друго решение има вида

$$C_1\, y_1(x) + C_2\, y_2(x) + \cdots + C_n\, y_n(x),$$

където $C_1, C_2, \ldots, C_n \in \mathbb{C}$ са константи.

Теорема 5

Множеството от решенията на линейното хомогенно диференциално уравнение (3) *е линейно пространство над полето* $\mathbb{C}$ *на комплексните числа.*

Доказателство. С V означаваме множеството от всички решения на (3). С непосредствено заместване се проверява, че ако y_1 и y_2 са елементи на V, то $y_1 + y_2$ и ky_1, където $k \in \mathbb{C}$, също са елементи на V. Следователно в множеството V от решенията на линейното хомогенно диференциално уравнение (3) са дефинирани операциите събиране на елементи на V и умножение на елемент на V с комплексно число и тези операции очевидно удовлетворяват следните аксиоми в определението за линейно пространство:

- Събирането е **асоциативно**: ако $y_1, y_2, y_3 \in V$, то $(y_1 + y_2) + y_3 = y_1 + (y_2 + y_3)$
- Събирането е **комутативно**: ако $y_1, y_2 \in V$, то $y_1 + y_2 = y_2 + y_1$
- Съществува **нулев елемент** $0 \in V$ (нулевата функция $y(x) = 0$ за всяко x), за който $0 + y = y$ за всяко $y \in V$
- За всяко $y \in V$ съществува **противоположен елемент** $(-y) \in V$, за който $y + (-y) = 0$
- За всяко $y_1, y_2 \in V$ и всяко число $\lambda \in \mathbb{C}$ е изпълнено: $\lambda(y_1 + y_2) = \lambda y_1 + \lambda y_2$
- За всяко $y \in V$ и всеки две числа $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ е изпълено: $(\lambda + \mu)y = \lambda y + \mu y$
- За всяко $y \in V$ и всеки две числа $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ е изпълено: $\lambda(\mu y) = (\lambda \mu)y$
- За всяко $y \in V$ е изпълнено: $1.y = y$.

- Множеството от решения $y_1, y_2, \dots, y_n$ на (3) се нарича **фундаментална система решения**, ако функциите $y_1, y_2, \dots, y_n$ са линейно независими в интервала (α, β).

Теорема 6

Нека $y_1, y_2, \dots, y_n$ са решения на (3) и са n пъти непрекъснато диференцируеми. Следните твърдения са еквивалентни:

1) $y_1, y_2, \dots, y_n$ образуват фундаментална система решения за (3);

2) $\exists x_0 \in (\alpha, \beta) : \quad W(x_0) \neq 0;$

3) $W(x) \neq 0$ за $\forall x \in (\alpha, \beta)$.

Идея за доказателство. Очевидно имаме $3) \Rightarrow 2)$. Следната формула, известна като формула на Лиувил-Остроградски-Гаус,

$$W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} a_1(t)dt} \quad \text{за всяко } x \in (\alpha, \beta)$$

показва, че имаме $2) \Rightarrow 3)$.
От Теорема 3 имаме $2) \Rightarrow 1)$. Може да се докаже и обратната връзка.

Теорема 7 (Формула за общото решение)

Нека функциите $y_1, y_2, \ldots, y_n$ образуват фундаментална система решения на (3). Тогава

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n, \tag{4}$$

където $C_1, C_2, \ldots, C_n$ са произволни константи, е общо решение на (3).

Доказателство. Трябва да докажем, че:
1) $C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n$ е решение на (3);
2) всяко друго решение $z(x)$ на (3) се получава от (4) при конкретни стойности на $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

Първият факт е очевиден, защото множеството от решенията на (3) е линейно пространство.

А за да докажем 2), е достатъчно да покажем, че функциите $y_1, y_2, \ldots, y_n, z$ са линейно зависими. Наистина, ако допуснем, че $y_1, y_2, \ldots, y_n, z$ са линейно зависими, то съществуват константи $C_1^0, C_2^0, \ldots, C_n^0, C_{n+1}^0$, поне една от тях различна от нула, такива че

$$C_1^0 y_1 + C_2^0 y_2 + \cdots + C_n^0 y_n + C_{n+1}^0 z \equiv 0$$

в интервала (α, β). Имаме $C_{n+1}^0 \neq 0$, защото в противен случай стигаме до противоречие с линейната независимост на $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Тогава

$$z = -\frac{C_1^0}{C_{n+1}^0} y_1 - \frac{C_2^0}{C_{n+1}^0} y_2 - \cdots - \frac{C_n^0}{C_{n+1}^0} y_n,$$

което трябваше да докажем.

И така, сега се връщаме към доказателството на факта, че $y_1, y_2, \ldots, y_n, z$ са линейно зависими, като за целта ще приложим Теорема 4.

Имаме

$$W[y_1, y_2, \dots, y_n, z](x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n & z \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' & z' \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} & z^{(n-1)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} & z^{(n)} \end{vmatrix}.$$

Сега умножаваме първия ред по $a_n(x)$ и го прибавяме към последния, втория – по $a_{n-1}(x)$ и го прибавяме към последния, и т.н., предпоследния ред умножаваме по $a_1(x)$ и отново го прибавяме към последния. Така получаваме детерминанта, равна на дадената, на която последният ред има за елементи

$$y_1^{(n)} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\, y_1^{(n-i)}, \dots, z^{(n)} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\, z^{(n-i)}.$$

Всяка от тези суми е тъждествено равна на 0 в интервала (α, β), защото $y_1, y_2, \ldots, y_n, z$ са решения на (3) и следователно, ако поставим всяко от тях в (3), получаваме тъждество.

От това следва, че горната детерминанта е равна на 0, т.е.

$$W[y_1, y_2, \ldots, y_n, z](x) = 0 \quad \text{за } \forall x \in (\alpha, \beta).$$

Тъй като $y_1, y_2, \ldots, y_n$ образуват фундаментална система решения, то те са линейно независими и съгласно Теорема 6

$$W[y_1, y_2, \ldots, y_n](x) \neq 0 \quad \text{за } \forall x \in (\alpha, \beta).$$

От последните две равенства и Теорема 4 заключаваме, че $y_1, y_2, \ldots, y_n, z$ са линейно зависими, с което теоремата е доказана.

Теорема 8

За всяко линейно хомогенно диференциално уравнение (3) *съществува фундаментална система решения.*

Доказателство. Нека $A = (a_{ij})$ е квадратна матрица от ред n, за която $\det A \neq 0$. За $x_0 \in (\alpha, \beta)$ разглеждаме следните n на брой задачи на Коши: Да се намери решение на уравнението (3), за което

$$\begin{cases} y(x_0) = a_{1i} \\ y'(x_0) = a_{2i} \\ \dots\dots\dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = a_{ni}, \end{cases}$$

където $i = 1, 2, \dots, n$. Съгласно Теорема 1, всяка от тези задачи на Коши има единствено решение $y_i(x)$, при това дефинирано в целия интервал (α, β).

Множеството

$$y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$$

е фундаментална система решения на (3). Наистина, имаме

$$W[y_1, y_2, \dots, y_n](x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & \dots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & \dots & y_n'(x_0) \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & \dots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \det A \neq 0,$$

и тогава, съгласно Теорема 3, $y_1, y_2, \dots, y_n$ са линейно независими. С това Теорема 8 е доказана.