Метод на хордите

Задача : Дадено е уравенението :

$x^2 + px - (q + 50)\cos x - 2(p + q) = 0,$

където **p** и **q** са съответно предпоследната и последната цифра от факултетния ни номер (в случая $p = 6$ а $q = 7$)

$x^2 + 6x - 57\cos x - 26 = 0$

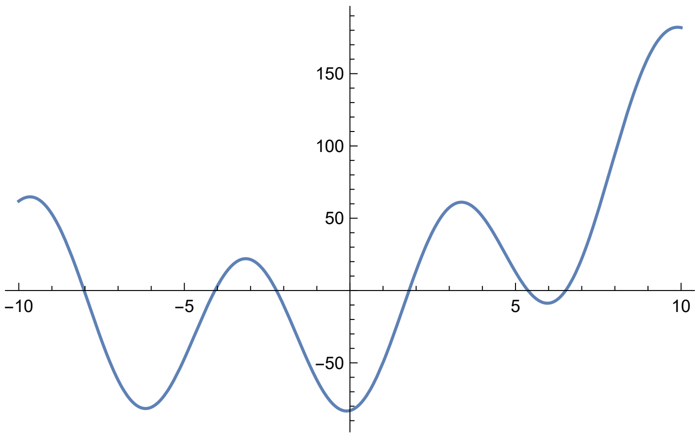
1. Да се намери общия брой на корените на уравнението.
2. Да се локализира най – големия реален корен в интервала [a, b].
3. Да се проверят условията за приложение на метода на хордите.
   – проверка на сходимост
   – избор на начално приближение и постоянна точка
   – итерациите
4. Да се изчисли корена по метода на хордите с точност 10^{-4}. Представете таблица с изчисленията.
5. Да се провери колко итерации биха били необходими, ако се използва метода на разполовяването в същия интервал [a, b] за същата точност.
6. Да се направи сравнение кой метод е по – ефективен за избрания интервал.

```
In[•]:= f[x_] := x^2 + 6 x - 57 Cos[x] - 26

In[•]:= f[x]

Out[•]= -26 + 6 x + x^2 - 57 Cos[x]
```

1. Да се намери общия брой на корените на уравнението

```
In[•]:= Plot[f[x], {x, -10, 10}]
```

Out[•]=

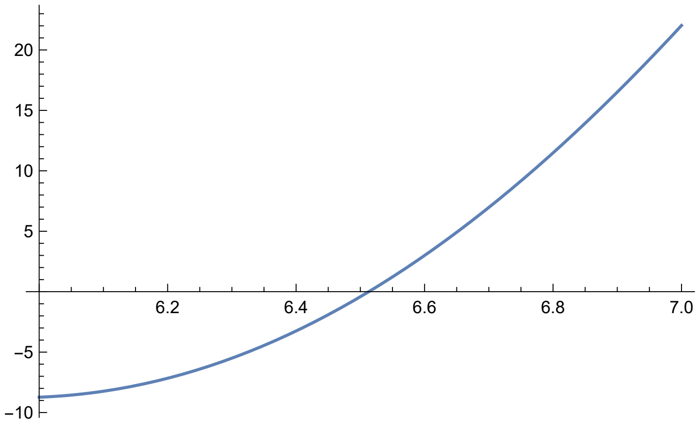


Брой корени: 6

2. Да се локализира най-големия реален корен в интервала [a, b]

In[ ]:=
```
Plot[f[x], {x, 6, 7}]
```

Out[ ]=



In[ ]:=
```
f[6.]
```

Out[ ]= -8.72971

In[ ]:=
```
f[7.]
```

Out[ ]= 22.0276

Извод:

(1) Функцията е непрекъсната, защото е сума от непрекъснати функции (полином и синус).

(2) f(5) = -8.729 ... < 0

f(7) = 22.027 ... > 0

=> Функцията има различни знаци в двата края на разглеждания интервал [6; 7].

От (1) и (2) следва, че функцията има поне един корен в разглеждания интервал [6; 7].

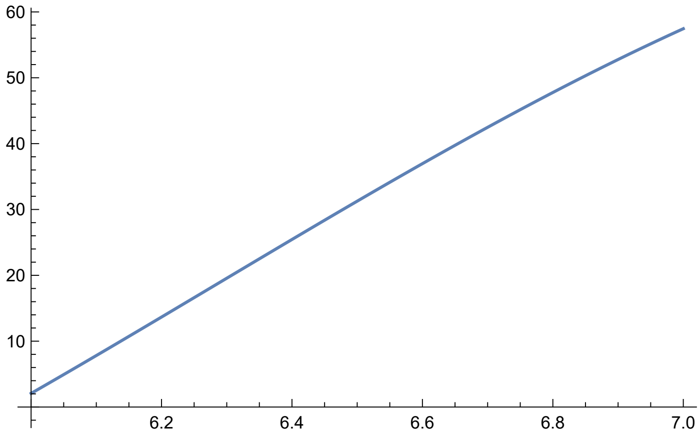
3. Да се проверят условията за приложение на метода на хордите

Проверка на сходимост

Графика на първата производна

In[◦]:=
```
Plot[f'[x], {x, 6, 7}]
```

Out[◦]=

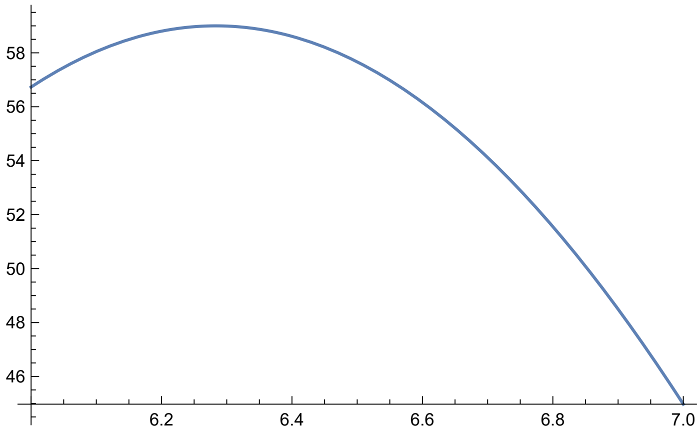


Извод: (1) Стойностите на първата производна в разглеждания интервал [5; 7] са между 2 и 60. Следователно първата f'(x) > 0 в целия разглеждан интервал [6; 7].

Графика на втората производна

In[◦]:=
```
Plot[f''[x], {x, 6, 7}]
```

Out[◦]=



Извод : (2) Стойностите на втората производна в разглеждания интервал [6; 7] са между 56 и 45. Следователно втората f'' (x) > 0 в целия разглеждан интервал [5; 7] .

Извод: От (1) и (2) следва, че първата и втората производна имат постоянни знаци в разглеждания интервал [-6; -5]. Следователно условията за сходимост на метода на хордите са изпълнени.

Избор на начално приближение и постоянна точка

Нужно е да е изпълнено условието f(x0).f’’(x) < 0

В нашия случай f’’(x) >0. Следователно е нужно f(x0) <0

In[∘]:=
```
p = 6.
```
Out[∘]=
```
6.
```

In[∘]:=
```
x0 = 7.
```
Out[∘]=
```
7.
```

Итериране

In[∘]:=
```
For[n = 0, n ≤ 10, n++,
 x1 = x0 - f[x0] / (f[x0] - f[p]) * (x0 - p);
 Print["n = ", n, " xn = ", x1];
 x0 = x1
]
```

$$x1 = x0 - \frac{f[x0]}{f[x0] - f[p]} * (x0 - p);$$

n = 0 x_n = 6.28383

n = 1 x_n = 6.84878

n = 2 x_n = 6.32779

n = 3 x_n = 6.75421

n = 4 x_n = 6.36413

n = 5 x_n = 6.69054

n = 6 x_n = 6.39399

n = 7 x_n = 6.64574

n = 8 x_n = 6.41833

n = 9 x_n = 6.61332

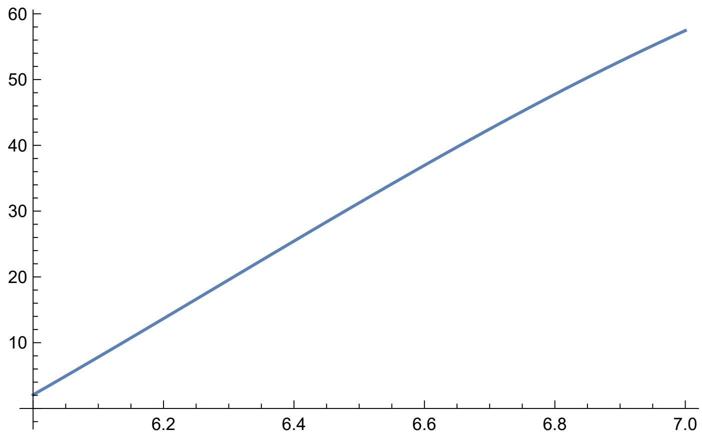
n = 10 x_n = 6.43801

4. Да се изчисли корена по метода на хордите с точност 10^{-4}

Изчисляване на постоянните величини

In[∘]:=
```
Plot[Abs[f'[x]], {x, 6, 7}]
```

Out[∘]=



От геометрично съображение минимума на абсолютната стойност на първата производна се достига в левия край на интервала, а максимума - в десния.

In[∘]:=
```
M1 = Abs[f'[6.]]
```

Out[∘]= 2.07332

In[∘]:=
```
m1 = Abs[f'[7.]]
```

Out[∘]= 57.4482

In[∘]:=
```
R = (M1 - m1)/m1
```

Out[∘]= -0.96391

In[∘]:=
```
f[x_] := x^2 + 6 x - 57 Cos[x] - 26
p = 6.; x0 = 7.;
M1 = Abs[f'[6.]];
m1 = Abs[f'[7.]];
R = (M1 - m1)/m1;
For[n = 0, n ≤ 10, n++,
 x1 = x0 - f[x0]/(f[x0] - f[p]) * (x0 - p);
 Print["n = ", n, " x_n = ", x1,
  " f(x_n) = ", f[x1], " ε_n = ", eps = R * Abs[x1 - x0]];
 x0 = x1
]
```

```
n = 0 xn = 6.28383 f(xn) = -5.81057 εn = -0.690327
n = 1 xn = 6.84878 f(xn) = 13.8752 εn = -0.544568
n = 2 xn = 6.32779 f(xn) = -4.93568 εn = -0.502192
n = 3 xn = 6.75421 f(xn) = 9.35173 εn = -0.411033
n = 4 xn = 6.36413 f(xn) = -4.12638 εn = -0.376
n = 5 xn = 6.69054 f(xn) = 6.57066 εn = -0.314625
n = 6 xn = 6.39399 f(xn) = -3.4034 εn = -0.285845
n = 7 xn = 6.64574 f(xn) = 4.74569 εn = -0.242665
n = 8 xn = 6.41833 f(xn) = -2.77539 εn = -0.219206
n = 9 xn = 6.61332 f(xn) = 3.49384 εn = -0.187951
n = 10 xn = 6.43801 f(xn) = -2.2421 εn = -0.168977
```

Цикъл със стоп-критерий при определена точност (в случая ε_n = 0.0001)

```
In[•]:= f[x_] := x^2 + 6 x - 57 Cos[x] - 26
x0 = -5.; p = -6;
M1 = Abs[f'[6.]];
m1 = Abs[f'[7.]];
R = (M1 - m1)/m1;
epszad = 0.0001;
eps = 1;
Print["n = ", 0, " xn = ", x0, " f(xn) = ", f[x0]];
For[n = 1, eps > epszad, n++,
 x1 = x0 - f[x0]/(f[x0] - f[p]) * (x0 - p);
 Print["n = ", n, " xn = ", x1,
  " f(xn) = ", f[x1], " εn = ", eps = R * Abs[x1 - x0]];
 x0 = x1
]
```

```
n = 0 xn = -5. f(xn) = -47.1687
n = 1 xn = -3.59454 f(xn) = 16.6058 εn = -1.35474
```

5. Да се провери колко итерации биха били необходими, ако се използва метода на разполовяването в същия интервал [a, b] за същата точност.

```
In[•]:= Log2[(7 - 6)/0.0001] - 1
Out[•]= 12.2877
```

6. Да се направи сравнение кой метод е по-ефективен за избрания интервал

Извод: По метода на разполовяването биха били необходими 13 итерации за достигане на исканата точност. А по метода на хордите беше необходима само 1 итерация. Следователно методът на хордите е по-ефективен за избрания интервал [6, 7].