

Числено решаване на обикновени диференциални уравнения

Решение на втора задача

а) Да се намери точното решение

Търсим общо решение:

```
In[37]:= Clear[x, y]
DSolve[y'[x] == y[x] - 8 Sin[x], y[x], x]
```

```
Out[38]:= {{y[x] -> e^x c1 + 4 (Cos[x] + Sin[x])}}
```

Търсим частно решение:

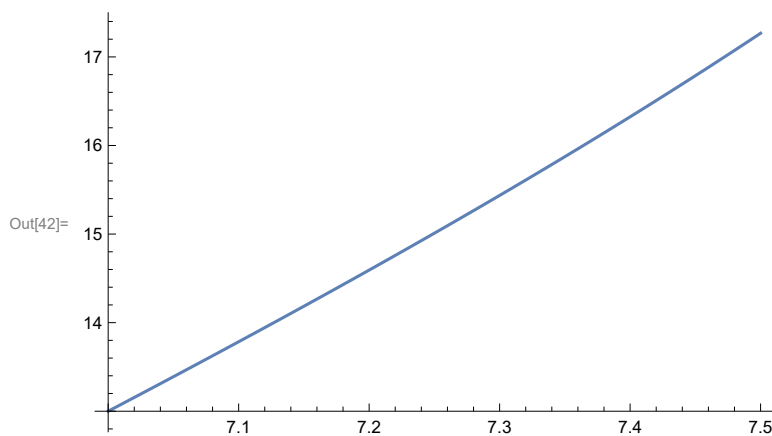
```
In[39]:= Clear[x, y]
DSolve[{y'[x] == y[x] - 8 Sin[x], y[7] == 13}, y[x], x]
```

```
Out[40]:= {{y[x] -> (13 e^x - 4 e^x Cos[7] + 4 e^7 Cos[x] - 4 e^x Sin[7] + 4 e^7 Sin[x]) / e^7}}
```

Визуализация на точното решение

```
In[41]:= yt[x_] := (13 e^x - 4 e^x Cos[7] + 4 e^7 Cos[x] - 4 e^x Sin[7] + 4 e^7 Sin[x]) / e^7
```

```
Plot[yt[x], {x, 7, 7.5}]
```



б) По метод на Рунге-Кута (1,1) да се реши приближено задачата със стъпка 0.025. Запишете резултатите в таблица.

2.3. РК32 - Формула (1, 1)

```

In[43]:= (*Въвеждаме условието на задачата*)
a = 7.; b = 7.5;
x = a;
y = 13.;
points = {{x, y}};
f[x_, y_] := y - 8 Sin[x]
(*Точно решение*)
yt[x_] := 
$$\frac{13 e^x - 4 e^x \cos[7] + 4 e^7 \cos[x] - 4 e^x \sin[7] + 4 e^7 \sin[x]}{e^7}$$

(*Съставяме мрежата*)
h = 0.025; n =  $\frac{b - a}{h}$ ;
Print["Мрежата е с n = ", n, " и стъпка h = ", h]
(*Изчисляваме теоретичната грешка*)
Print["Теоретичната локална грешка е ", h3]
Print["Теоретичната глобална грешка е ", h2]
(*Намираме неизвестните стойности за yi*)
For[i = 0, i ≤ n, i++,
  k1 = h * f[x, y];
  k2 = h * f[x + h, y + k1];
  Print["i = ", i, " xi = ", x, " yi = ", y, " fi = ", f[x, y], " k1 = ", k1,
    " k2 = ", k2, " yточно = ", yt[x], " Истинска грешка = ", Abs[y - yt[x]]];
  y = y +  $\frac{1}{2}$  (k1 + k2);
  x = x + h;
  AppendTo[points, {x, y}]
]
(*Визуализация на резултатите*)
gryt = Plot[yt[x], {x, a, b}, PlotStyle → Red];
grp = ListPlot[points, PlotStyle → Black];
Show[gryt, grp]

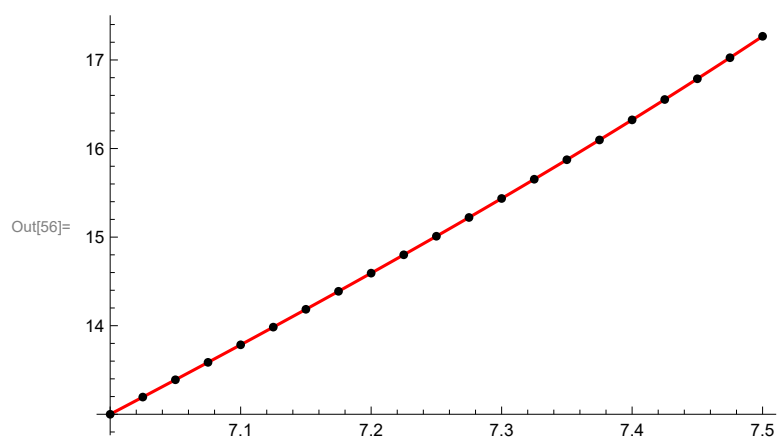
```

Мрежата е с $n = 20$, и стъпка $h = 0.025$

Теоретичната локална грешка е 0.000015625

Теоретичната глобална грешка е 0.000625

$i = 0$ $x_i = 7$ $y_i = 13$ $f_i = 7.74411$ $k_1 = 0.193603$
 $k_2 = 0.194715$ $y_{\text{точно}} = 13$ Истинска грешка = 1.77636×10^{-15}
 $i = 1$ $x_i = 7.025$ $y_i = 13.1942$ $f_i = 7.78914$ $k_1 = 0.194729$
 $k_2 = 0.195953$ $y_{\text{точно}} = 13.1942$ Истинска грешка = 2.366×10^{-6}
 $i = 2$ $x_i = 7.05$ $y_i = 13.3895$ $f_i = 7.83874$ $k_1 = 0.195969$
 $k_2 = 0.197311$ $y_{\text{точно}} = 13.3895$ Истинска грешка = 4.51419×10^{-6}
 $i = 3$ $x_i = 7.075$ $y_i = 13.5861$ $f_i = 7.8931$ $k_1 = 0.197328$
 $k_2 = 0.198793$ $y_{\text{точно}} = 13.5861$ Истинска грешка = 6.41306×10^{-6}
 $i = 4$ $x_i = 7.1$ $y_i = 13.7842$ $f_i = 7.95245$ $k_1 = 0.198811$
 $k_2 = 0.200405$ $y_{\text{точно}} = 13.7842$ Истинска грешка = 8.02983×10^{-6}
 $i = 5$ $x_i = 7.125$ $y_i = 13.9838$ $f_i = 8.01698$ $k_1 = 0.200425$
 $k_2 = 0.202152$ $y_{\text{точно}} = 13.9838$ Истинска грешка = 9.3305×10^{-6}
 $i = 6$ $x_i = 7.15$ $y_i = 14.1851$ $f_i = 8.08693$ $k_1 = 0.202173$
 $k_2 = 0.204039$ $y_{\text{точно}} = 14.1851$ Истинска грешка = 0.0000102797
 $i = 7$ $x_i = 7.175$ $y_i = 14.3882$ $f_i = 8.1625$ $k_1 = 0.204063$
 $k_2 = 0.206073$ $y_{\text{точно}} = 14.3882$ Истинска грешка = 0.0000108409
 $i = 8$ $x_i = 7.2$ $y_i = 14.5933$ $f_i = 8.24393$ $k_1 = 0.206098$
 $k_2 = 0.208259$ $y_{\text{точно}} = 14.5933$ Истинска грешка = 0.000010976
 $i = 9$ $x_i = 7.225$ $y_i = 14.8004$ $f_i = 8.33143$ $k_1 = 0.208286$
 $k_2 = 0.210602$ $y_{\text{точно}} = 14.8004$ Истинска грешка = 0.0000106456
 $i = 10$ $x_i = 7.25$ $y_i = 15.0099$ $f_i = 8.42524$ $k_1 = 0.210631$
 $k_2 = 0.213109$ $y_{\text{точно}} = 15.0099$ Истинска грешка = 9.80886×10^{-6}
 $i = 11$ $x_i = 7.275$ $y_i = 15.2218$ $f_i = 8.5256$ $k_1 = 0.21314$
 $k_2 = 0.215785$ $y_{\text{точно}} = 15.2218$ Истинска грешка = 8.42351×10^{-6}
 $i = 12$ $x_i = 7.3$ $y_i = 15.4362$ $f_i = 8.63273$ $k_1 = 0.215818$
 $k_2 = 0.218637$ $y_{\text{точно}} = 15.4362$ Истинска грешка = 6.44572×10^{-6}
 $i = 13$ $x_i = 7.325$ $y_i = 15.6535$ $f_i = 8.74688$ $k_1 = 0.218672$
 $k_2 = 0.22167$ $y_{\text{точно}} = 15.6534$ Истинска грешка = 3.83016×10^{-6}
 $i = 14$ $x_i = 7.35$ $y_i = 15.8736$ $f_i = 8.86829$ $k_1 = 0.221707$
 $k_2 = 0.22489$ $y_{\text{точно}} = 15.8736$ Истинска грешка = 5.29869×10^{-7}
 $i = 15$ $x_i = 7.375$ $y_i = 16.0969$ $f_i = 8.9972$ $k_1 = 0.22493$
 $k_2 = 0.228305$ $y_{\text{точно}} = 16.0969$ Истинска грешка = 3.5037×10^{-6}
 $i = 16$ $x_i = 7.4$ $y_i = 16.3235$ $f_i = 9.13387$ $k_1 = 0.228347$
 $k_2 = 0.231919$ $y_{\text{точно}} = 16.3235$ Истинска грешка = 8.32077×10^{-6}
 $i = 17$ $x_i = 7.425$ $y_i = 16.5537$ $f_i = 9.27855$ $k_1 = 0.231964$
 $k_2 = 0.23574$ $y_{\text{точно}} = 16.5537$ Истинска грешка = 0.0000139733
 $i = 18$ $x_i = 7.45$ $y_i = 16.7875$ $f_i = 9.4315$ $k_1 = 0.235787$
 $k_2 = 0.239774$ $y_{\text{точно}} = 16.7875$ Истинска грешка = 0.0000205149
 $i = 19$ $x_i = 7.475$ $y_i = 17.0253$ $f_i = 9.59297$ $k_1 = 0.239824$
 $k_2 = 0.244028$ $y_{\text{точно}} = 17.0253$ Истинска грешка = 0.0000280012
 $i = 20$ $x_i = 7.5$ $y_i = 17.2672$ $f_i = 9.76323$ $k_1 = 0.244081$
 $k_2 = 0.248508$ $y_{\text{точно}} = 17.2673$ Истинска грешка = 0.0000364895



в) Каква е теоретичната грешка на полученото приближено решение

Теоретична локална грешка: 0.000015625

Теоретична глобална грешка: 0.000625

г) Каква би била точността при използване на модифицирания метод на Ойлер?

2.2. Модифициран метод на Ойлер

```
In[57]:= (*Въвеждаме условието на задачата*)
a = 7.; b = 7.5;
x = a;
y = 13.;
points = {{x, y}};
f[x_, y_] := y - 8 Sin[x]
(*Точно решение*)
yt[x_] := 
$$\frac{13 e^x - 4 e^x \cos[7] + 4 e^7 \cos[x] - 4 e^x \sin[7] + 4 e^7 \sin[x]}{e^7}$$

(*Съставяме мрежата*)
h = 0.025; n =  $\frac{b - a}{h}$ ;
Print["Мрежата е с n = ", n, " и стъпка h = ", h]
(*Изчисляваме теоретичната грешка*)
Print["Теоретичната локална грешка е ", h3]
Print["Теоретичната глобална грешка е ", h2]
(*Намираме неизвестните стойности за yi*)
For[i = 0, i ≤ n, i++,
  x12 = x +  $\frac{h}{2}$ ;
  y12 = y +  $\frac{h}{2}$  f[x, y];
  Print["i = ", i, " xi = ", x, " yi = ", y, " fi = ",
    f[x, y], " xi+1/2 = ", x12, " yi+1/2 = ", y12, " fi+1/2 = ",
    f[x12, y12], " yточно = ", yt[x], " Истинска грешка = ", Abs[y - yt[x]]];
  y = y + h * f[x12, y12];
  x = x + h;
  AppendTo[points, {x, y}]
]
(*Визуализация на резултатите*)
gryt = Plot[yt[x], {x, a, b}, PlotStyle → Red];
grp = ListPlot[points, PlotStyle → Black];
Show[gryt, grp]
```

Мрежата е с $n = 20$, и стъпка $h = 0.025$

Теоретичната локална грешка е 0.000015625

Теоретичната глобална грешка е 0.000625

$i = 0$ $x_i = 7$, $y_i = 13$, $f_i = 7.74411$ $x_{i+1/2} = 7.0125$ $y_{i+1/2} = 13.0968$ $f_{i+1/2} = 7.76593$ $y_{\text{точно}} = 13$. Истинска грешка = 1.77636×10^{-15}
 $i = 1$ $x_i = 7.025$ $y_i = 13.1941$ $f_i = 7.78913$ $x_{i+1/2} = 7.0375$ $y_{i+1/2} = 13.2915$ $f_{i+1/2} = 7.8132$ $y_{\text{точно}} = 13.1942$ Истинска грешка = 8.04573×10^{-6}
 $i = 2$ $x_i = 7.05$ $y_i = 13.3895$ $f_i = 7.83872$ $x_{i+1/2} = 7.0625$ $y_{i+1/2} = 13.4875$ $f_{i+1/2} = 7.86513$ $y_{\text{точно}} = 13.3895$ Истинска грешка = 0.0000168608
 $i = 3$ $x_i = 7.075$ $y_i = 13.5861$ $f_i = 7.89307$ $x_{i+1/2} = 7.0875$ $y_{i+1/2} = 13.6848$ $f_{i+1/2} = 7.92193$ $y_{\text{точно}} = 13.5861$ Истинска грешка = 0.0000264839
 $i = 4$ $x_i = 7.1$ $y_i = 13.7842$ $f_i = 7.9524$ $x_{i+1/2} = 7.1125$ $y_{i+1/2} = 13.8836$ $f_{i+1/2} = 7.98381$ $y_{\text{точно}} = 13.7842$ Истинска грешка = 0.0000369553
 $i = 5$ $x_i = 7.125$ $y_i = 13.9837$ $f_i = 8.01692$ $x_{i+1/2} = 7.1375$ $y_{i+1/2} = 14.084$ $f_{i+1/2} = 8.05099$ $y_{\text{точно}} = 13.9838$ Истинска грешка = 0.0000483161
 $i = 6$ $x_i = 7.15$ $y_i = 14.185$ $f_i = 8.08686$ $x_{i+1/2} = 7.1625$ $y_{i+1/2} = 14.2861$ $f_{i+1/2} = 8.12369$ $y_{\text{точно}} = 14.1851$ Истинска грешка = 0.000060609
 $i = 7$ $x_i = 7.175$ $y_i = 14.3881$ $f_i = 8.16242$ $x_{i+1/2} = 7.1875$ $y_{i+1/2} = 14.4901$ $f_{i+1/2} = 8.20213$ $y_{\text{точно}} = 14.3882$ Истинска грешка = 0.000073878
 $i = 8$ $x_i = 7.2$ $y_i = 14.5932$ $f_i = 8.24383$ $x_{i+1/2} = 7.2125$ $y_{i+1/2} = 14.6962$ $f_{i+1/2} = 8.28654$ $y_{\text{точно}} = 14.5933$ Истинска грешка = 0.0000881685
 $i = 9$ $x_i = 7.225$ $y_i = 14.8003$ $f_i = 8.33132$ $x_{i+1/2} = 7.2375$ $y_{i+1/2} = 14.9045$ $f_{i+1/2} = 8.37713$ $y_{\text{точно}} = 14.8004$ Истинска грешка = 0.000103527
 $i = 10$ $x_i = 7.25$ $y_i = 15.0098$ $f_i = 8.42512$ $x_{i+1/2} = 7.2625$ $y_{i+1/2} = 15.1151$ $f_{i+1/2} = 8.47415$ $y_{\text{точно}} = 15.0099$ Истинска грешка = 0.000120003
 $i = 11$ $x_i = 7.275$ $y_i = 15.2216$ $f_i = 8.52545$ $x_{i+1/2} = 7.2875$ $y_{i+1/2} = 15.3282$ $f_{i+1/2} = 8.57783$ $y_{\text{точно}} = 15.2218$ Истинска грешка = 0.000137644
 $i = 12$ $x_i = 7.3$ $y_i = 15.4361$ $f_i = 8.63257$ $x_{i+1/2} = 7.3125$ $y_{i+1/2} = 15.544$ $f_{i+1/2} = 8.6884$ $y_{\text{точно}} = 15.4362$ Истинска грешка = 0.000156503
 $i = 13$ $x_i = 7.325$ $y_i = 15.6533$ $f_i = 8.7467$ $x_{i+1/2} = 7.3375$ $y_{i+1/2} = 15.7626$ $f_{i+1/2} = 8.80611$ $y_{\text{точно}} = 15.6534$ Истинска грешка = 0.000176633
 $i = 14$ $x_i = 7.35$ $y_i = 15.8734$ $f_i = 8.86809$ $x_{i+1/2} = 7.3625$ $y_{i+1/2} = 15.9843$ $f_{i+1/2} = 8.9312$ $y_{\text{точно}} = 15.8736$ Истинска грешка = 0.000198088
 $i = 15$ $x_i = 7.375$ $y_i = 16.0967$ $f_i = 8.99699$ $x_{i+1/2} = 7.3875$ $y_{i+1/2} = 16.2092$ $f_{i+1/2} = 9.06392$ $y_{\text{точно}} = 16.0969$ Истинска грешка = 0.000220925
 $i = 16$ $x_i = 7.4$ $y_i = 16.3233$ $f_i = 9.13364$ $x_{i+1/2} = 7.4125$ $y_{i+1/2} = 16.4375$ $f_{i+1/2} = 9.20452$ $y_{\text{точно}} = 16.3235$ Истинска грешка = 0.000245201
 $i = 17$ $x_i = 7.425$ $y_i = 16.5534$ $f_i = 9.2783$ $x_{i+1/2} = 7.4375$ $y_{i+1/2} = 16.6694$ $f_{i+1/2} = 9.35325$ $y_{\text{точно}} = 16.5537$ Истинска грешка = 0.000270976
 $i = 18$ $x_i = 7.45$ $y_i = 16.7872$ $f_i = 9.43122$ $x_{i+1/2} = 7.4625$ $y_{i+1/2} = 16.9051$ $f_{i+1/2} = 9.51038$ $y_{\text{точно}} = 16.7875$ Истинска грешка = 0.000298312
 $i = 19$ $x_i = 7.475$ $y_i = 17.025$ $f_i = 9.59267$ $x_{i+1/2} = 7.4875$ $y_{i+1/2} = 17.1449$ $f_{i+1/2} = 9.67616$ $y_{\text{точно}} = 17.0253$ Истинска грешка = 0.000327273
 $i = 20$ $x_i = 7.5$ $y_i = 17.2669$ $f_i = 9.76291$ $x_{i+1/2} = 7.5125$ $y_{i+1/2} = 17.3889$ $f_{i+1/2} = 9.85087$ $y_{\text{точно}} = 17.2673$ Истинска грешка = 0.000357923

