

# Уравнения с разделящи се променливи

*Информатика, 2021/2022*

- Диференциални уравнения от вида

$$y' = f(x)g(y),$$

където  $f$  и  $g$  са дадени непрекъснати функции, се наричат уравнения с разделящи се променливи.

- Към уравнения с разделящи се променливи се свеждат и уравненията от вида

$$X(x) dx + Y(y) dy = 0,$$

а така също

$$X_1(x)Y_1(y) dx + X_2(x)Y_2(y) dy = 0.$$

**Теорема 1 (за съществуване и единственост)**

Нека  $D : a < x < b, c < y < d$  и да разгледаме уравнението

$$y' = f(x)g(y),$$

където  $f \in C(a, b)$ ,  $g \in C(c, d)$  и  $g(y) \neq 0$  за всяко  $y \in (c, d)$ .  
Тогава през всяка точка  $(x_0, y_0) \in D$  минава единствено решение на даденото уравнение.

**Забележка.** С  $C(a, b)$  ще означаваме множеството от всички непрекъснати функции в интервала  $(a, b)$ .

- Припомняме, че функцията  $F(x)$  се нарича примитивна функция на функцията  $f(x)$  в интервала  $(a, b)$ , ако  $F(x)$  е диференцируема в  $(a, b)$  и  $F'(x) = f(x)$  за всяко  $x \in (a, b)$ .
- Ако  $F(x)$  е примитивна функция на  $f(x)$  в интервала  $(a, b)$ , то всички примитивни функции на  $f(x)$  в този интервал имат вида  $F(x) + C$ .
- По дефиниция  $\int f(x) dx$  е множеството от всички примитивни функции на  $f(x)$ , т.е.

$$\int f(x) dx = F(x) + C, \text{ където } F'(x) = f(x).$$

- Често за удобство с  $\int f(x) dx$  ще означаваме една примитивна на  $f(x)$  (при решаването на неопределения интеграл няма да добавяме константа  $C$ ).

## Теорема 2 (Формула за общото решение)

Нека е дадено уравнението с разделящи се променливи

$$y' = f(x)g(y),$$

където  $f \in C(a, b)$ ,  $g \in C(c, d)$  и  $g(y) \neq 0$  за всяко  $y \in (c, d)$ .  
Тогава, ако  $F(x)$  е примитивна на  $f(x)$  в интервала  $(a, b)$  и  $G(y)$  е примитивна на  $\frac{1}{g(y)}$  в интервала  $(c, d)$ , то общото решение на уравнението е

$$G(y) = F(x) + C,$$

т.е.

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx + C.$$

## Задача 1

Да се решат уравненията:

$$1) y' = -\frac{1}{x^2};$$

$$2) xy \, dx + (x + 1) \, dy = 0;$$

$$3) (x^2 - 1)y' + 2xy^2 = 0, \quad y(0) = -1;$$

$$4) x^2 y' - \cos 2y = 1; \quad y(x) \rightarrow \frac{9\pi}{4} \text{ при } x \rightarrow \infty.$$

Решение.

1) Тъй като дясната страна е функция само на  $x$ , можем да решим уравнението чрез непосредствено интегриране. Имаме

$$y = \int \left( -\frac{1}{x^2} \right) dx = \frac{1}{x} + C,$$

където  $C \in \mathbb{R}$  е произволна константа.

2) Имаме

$$(x + 1) dy = -xy dx.$$

Разделяме двете страни с изрази  $(x + 1)y \neq 0$  и получаваме

$$\frac{dy}{y} = -\frac{x}{x + 1} dx.$$

Интегрираме двете страни на уравнението

$$\int \frac{dy}{y} = \int \left( -\frac{x}{x + 1} \right) dx + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R},$$

откъдето

$$\ln |y| = -x + \ln |x + 1| + C_1,$$

и след антилогаритмуване

$$|y| = e^{-x} |x + 1| e^{C_1}.$$

Означаваме  $C = \varepsilon e^{C_1}$ , където  $\varepsilon = \pm 1$ . Получаваме общото решение

$$y = Ce^{-x}(x + 1).$$

Остана да проверим дали  $x = -1$  и  $y = 0$  са решения на изходното уравнение. Първо записваме даденото уравнение във вида

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{x+1}{xy}.$$

От  $x = -1$  имаме  $\frac{dx}{dy} = 0$  и след заместване се вижда, че горното равенство е изпълнено за всяко  $y$ . Следователно  $x = -1$  е решение на уравнението.

Сега записваме даденото уравнение във вида

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{xy}{x+1}.$$

Поставяйки  $y = 0$  в него, виждаме, че се получава твърдение и следователно  $y = 0$  също е решение.



3) Първо ще намерим общото решение. В уравнението заместваме  $y'$  с  $\frac{dy}{dx}$  и получаваме

$$(x^2 - 1) dy = -2xy^2 dx,$$

откъдето, при  $y^2(x^2 - 1) \neq 0$ , следва

$$-\frac{dy}{y^2} = \frac{2x}{x^2 - 1} dx.$$

Интегрираме двете страни и получаваме

$$-\int \frac{dy}{y^2} = \int \frac{2x}{x^2 - 1} dx + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}.$$

Следователно

$$\frac{1}{y} = \ln |x^2 - 1| + C_1,$$

$$\frac{1}{y} = \ln (e^{C_1} |x^2 - 1|).$$

Полагаме  $\varepsilon e^{C_1} = C$ ,  $C \neq 0$ , и получаваме общото решение

$$y = \frac{1}{\ln C(x^2 - 1)}.$$

Сега ще намерим частното решение, за което  $y(0) = -1$ . В общото решение заместваем  $x = 0$ ,  $y = -1$  и намираме  $C = -1/e$ . Тогава търсеното частно решение е

$$y = \frac{1}{\ln\left(-\frac{1}{e}(x^2 - 1)\right)} = \frac{1}{\ln(1 - x^2) - 1}.$$

4) Отг.  $\operatorname{tg} y = -\frac{2}{x} + 1$ .

► Уравнения от вида  $y' = f(ax + by + c)$ , където  $f$  е дадена непрекъснатата функция, можем да сведем до уравнения с разделящи се променливи като въведем нова неизвестна функция  $z$  на променливата  $x$  по следния начин:

$$z = ax + by + c.$$

## Задача 2

Решете уравненията:

1)  $y' - y = 2x - 3$ ;

2)  $y' = \cos(y - x)$ .

Решение. 1) Имаме

$$y' = 2x + y - 3.$$

Полагаме  $z = 2x + y - 3$ ,  $z = z(x)$ . Оттук  $y = z - 2x + 3$ ,  
 $y' = z' - 2$ . Заместваме в даденото уравнение и получаваме

$$z' - 2 = 2x + z - 2x + 3 - 3,$$

$$z' = z + 2,$$

което е уравнение с разделящи се променливи.

Последователно имаме

$$\frac{dz}{z+2} = dx, \quad z+2 \neq 0,$$

$$\int \frac{dz}{z+2} = \int dx + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R},$$

$$\ln |z+2| = x + C_1,$$

$$|z+2| = e^x e^{C_1},$$

$$z+2 = Ce^x, \quad C \neq 0.$$

Като заместим  $z = y + 2x - 3$  в последното равенство, получаваме, че общото решение на даденото уравнение е  $y = 1 - 2x + Ce^x$ ,  $C \neq 0$ .

Накрая ще отбележим, че  $z = -2$  очевидно е решение на уравнението  $z' = z + 2$ , откъдето следва, че  $2x + y = 1$  е решение на даденото уравнение.

2) Отг.  $\operatorname{ctg} \frac{y-x}{2} = x + C; \quad y - x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$