Метод на Якоби (простата итерация) за решаване на СЛАУ

Задача 1: Дадена е системата линейни алгебрични уравнения (СЛАУ) A.x = b, където векторът от свободни членове b има вида $b = (p, q, p+q)^T$ (в случая p = 6, q = 7) и

$$A = \begin{pmatrix} 10+p & 1 & 2 \\ 5 & p+q+11 & 3 \\ p & q & 22+q \end{pmatrix}$$

По метода на Якоби (проста итерация):

1. Постройте итерационния процес и разпишете покоординатно.
2. Проверете условията на метода.
3. Направете 3 итерации
4. Какъв е минималния брой итерации за достигане на точност 10^{-5} при начално приближение $x^{(0)} = (-10, 0, 10)^T$?

In[1]:=
```
A = {{16, 1, 2}, {5, 24, 3}, {6, 7, 29}}; b = {6, 7, 13};
```

In[2]:=
```
Print["За сравнение, точното решение е ", N[LinearSolve[A, b]]]
```

```
За сравнение, точното решение е {0.321377, 0.182496, 0.337733}
```

1. Конструиране на метода - получаване на матрицата **B** и вектора **c**

In[3]:=
```
n = Length[A];
```

In[4]:=
```
c = Table[0, n];
```

In[5]:=
```
B = Table[0, {i, n}, {j, n}];
```

In[6]:=
```
For[i = 1, i ≤ n, i++,
  B[[i]] = -A[[i]]/A[[i, i]];
  B[[i, i]] = 0;
  c[[i]] = b[[i]]/A[[i, i]]
 ]
```

In[7]:=
```
Print["Итерационния процес е x^(k+1) = ",
 N[B // MatrixForm], ".x^(k) + ", N[c // MatrixForm]]
```

Итерационния процес е $x^{(k+1)} = \begin{pmatrix} 0. & -0.0625 & -0.125 \\ -0.208333 & 0. & -0.125 \\ -0.206897 & -0.241379 & 0. \end{pmatrix} . x^{(k)} + \begin{pmatrix} 0.375 \\ 0.291667 \\ 0.448276 \end{pmatrix}$

2. Проверка на условията за сходимост

Първа норма

In[8]:= $N\left[\mathrm{Max}\left[\mathrm{Table}\left[\sum_{j=1}^{n} \mathrm{Abs}[B[[i, j]]], \{i, n\}\right]\right]\right]$

Out[8]= 0.448276

Втора норма

In[9]:= $N\left[\mathrm{Max}\left[\mathrm{Table}\left[\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Abs}[B[[i, j]]], \{j, n\}\right]\right]\right]$

Out[9]= 0.41523

Трета норма

In[10]:= $N\left[\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} B[[i, j]]^2}\right]$

Out[10]= 0.423827

Избираме най-малката възможна норма, която в случая е втора.

3. Извършваме итерациите

In[11]:=
```
x = {5, 13, -9.8};
```

In[12]:=
```
For[k = 0, k ≤ 3, k++,
 Print["k = ", k , " x^(k) = ", N[x]];
 x = B.x + c
]
```

k = 0 $x^{(k)}$ = {5., 13., -9.8}

k = 1 $x^{(k)}$ = {0.7875, 0.475, -3.72414}

k = 2 $x^{(k)}$ = {0.81083, 0.593121, 0.17069}

k = 3 $x^{(k)}$ = {0.316594, 0.101408, 0.137351}

In[13]:=
```
Print["За сравнение, точното решение е ", N[LinearSolve[A, b]]]
```

За сравнение, точното решение е {0.321377, 0.182496, 0.337733}

4. Какъв е минималния брой итерации за достигане на точност 10^{-5} при начално приближение $x^{(0)} = (-10, 0, 10)^{7}$?

In[14]:=
```
x = {-10, 0, 10};
```

In[15]:=
```
N[10^-5]
```

Out[15]=
```
0.00001
```

Добавяме оценка на грешката

In[16]:=
```
normB = N[Max[Table[Sum[Abs[B[[i, j]]], {i, 1, n}], {j, n}]]];
```

$$\text{normB} = N\left[\text{Max}\left[\text{Table}\left[\sum_{i=1}^{n} \text{Abs}[B[\![i, j]\!]], \{j, n\}\right]\right]\right];$$

In[17]:=
```
normx0 = Norm[x, 1];
```

In[18]:=
```
normc = Norm[c, 1];
```

In[19]:=
```
For[k = 0, k ≤ 20, k++,
 Print["k = ", k , " x^(k) = ", N[x], " ε_k = ", eps = normB^k (normx0 + normc/(1 - normB))];
 x = B.x + c
]
```

k = 0 $x^{(k)}$ = {-10., 0., 10.} ε_k = 21.9066

k = 1 $x^{(k)}$ = {-0.875, 1.125, 2.51724} ε_k = 9.09629

k = 2 $x^{(k)}$ = {-0.00996767, 0.159303, 0.357759} ε_k = 3.77705

k = 3 $x^{(k)}$ = {0.320324, 0.249023, 0.411886} ε_k = 1.56834

k = 4 $x^{(k)}$ = {0.30795, 0.173447, 0.321893} ε_k = 0.651223

k = 5 $x^{(k)}$ = {0.323923, 0.187274, 0.342696} ε_k = 0.270407

k = 6 $x^{(k)}$ = {0.320458, 0.181346, 0.336053} ε_k = 0.112281

k = 7 $x^{(k)}$ = {0.321659, 0.182898, 0.338201} ε_k = 0.0466225

k = 8 $x^{(k)}$ = {0.321294, 0.182379, 0.337578} ε_k = 0.0193591

k = 9 $x^{(k)}$ = {0.321404, 0.182533, 0.337779} ε_k = 0.00803846

k = 10 $x^{(k)}$ = {0.321369, 0.182485, 0.337719} ε_k = 0.00333781

k = 11 $x^{(k)}$ = {0.32138, 0.1825, 0.337738} ε_k = 0.00138596

k = 12 $x^{(k)}$ = {0.321377, 0.182495, 0.337732} ε_k = 0.000575491

k = 13 $x^{(k)}$ = {0.321378, 0.182497, 0.337734} ε_k = 0.000238961

k = 14 $x^{(k)}$ = {0.321377, 0.182496, 0.337733} ε_k = 0.0000992239

k = 15 $x^{(k)}$ = {0.321377, 0.182496, 0.337733} ε_k = 0.0000412007

k = 16 $x^{(k)}$ = {0.321377, 0.182496, 0.337733} ε_k = 0.0000171078

k = 17 $x^{(k)}$ = {0.321377, 0.182496, 0.337733} ε_k = 7.10366×10^{-6}

k = 18 $x^{(k)}$ = {0.321377, 0.182496, 0.337733} ε_k = 2.94965×10^{-6}

k = 19 $x^{(k)}$ = {0.321377, 0.182496, 0.337733} ε_k = 1.22478×10^{-6}

k = 20 $x^{(k)}$ = {0.321377, 0.182496, 0.337733} ε_k = 5.08566×10^{-7}

Извод: За достигане на точност 10^{-5} при начално приближение $x^{(0)} = (-10, 0, 10)^T$ са необходими 17 итерации.