Метод за решаване на последователни приближения за решаване на СЛАУ

Дадена е системата Ax = c, където c = (a, b, a+b), съответно a – предпоследната цифра от факултетния номер, b – последната.
1. Да се избере итерационен метод за решаването й.
2. Да се провери условието за сходимост.
3. Да се построи итерационен процес.
4. Да се направят 3 итерации.
5. Покажете достигнатото решение и с каква точност е получено?
6. Какъв е минималния брой итерации, които за нужни за достигане на точност 10^{-4}, работейки по избрания метод при избор на начално приближение x(0) = c?

$$A = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{a+2} & -0.2 & 0.1 \\ -0.2 & 1 + \frac{1}{b+3} & 0.02 \\ 0.05 & -0.1 & 1 + \frac{1}{a+3} \end{pmatrix}, b = (a,b, a+b)$$

In[927]:=
```
A = {{7/8, -0.2, 0.1}, {-0.2, 11/10, 0.02}, {0.05, -0.1, 10/9}}; b = {6, 7, 13};
```

$$A = \begin{pmatrix} \frac{7}{8} & -0.2 & 0.1 \\ -0.2 & \frac{11}{10} & 0.02 \\ 0.05 & -0.1 & \frac{10}{9} \end{pmatrix}; b = \{6, 7, 13\};$$

---

1. Да се избере итерационен метод за решаването й. (в случая избираме метода на последователните приближения)

In[928]:=
```
n = Length[A];
```

In[929]:=
```
IM = IdentityMatrix[n];
```

In[930]:=
```
B = IM - A;
```

In[931]:=
```
c = b;
```

In[932]:=
```
Print["Итерационният процес е x^(k+1) = ",
 N[B // MatrixForm], ". x^(k) + ", N[c // MatrixForm]]
```

Итерационният процес е $x^{(k+1)} = \begin{pmatrix} 0.125 & 0.2 & -0.1 \\ 0.2 & -0.1 & -0.02 \\ -0.05 & 0.1 & -0.111111 \end{pmatrix} . x^{(k)} + \begin{pmatrix} 6. \\ 7. \\ 13. \end{pmatrix}$

2. Проверка за сходимост ||B|| < 1

първа норма

In[933]:= $\text{Max}\left[\text{Table}\left[\sum_{j=1}^{n}\text{Abs}[B[[i, j]]], \{i, n\}\right]\right]$

Out[933]= 0.425

втора норма

In[934]:= $\text{Max}\left[\text{Table}\left[\sum_{i=1}^{n}\text{Abs}[B[[i, j]]], \{j, n\}\right]\right]$

Out[934]= 0.4

трета норма

In[935]:= $\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}B[[i, j]]^2}$

Out[935]= 0.375327

Избираме най-малката възможна норма, която в случая е **трета**.
Нормата на матрицата B е по-малка от 1, следователно процесът ще е сходящ при всеки избор на начално приближение.

3. Да се построи итерационен процес и да се направят 3 итерации

In[936]:=
$$A = \begin{pmatrix} \frac{7}{8} & -0.2 & 0.1 \\ -0.2 & \frac{11}{10} & 0.02 \\ 0.05 & -0.1 & \frac{10}{9} \end{pmatrix}; \ b = \{6, 7, 13\};$$

```
n = Length[A];
IM = IdentityMatrix[n];
B = IM - A;
c = b;
Print["Итерационният процес е x^(k+1) = ",
 N[B // MatrixForm], ". x^(k) + ", N[c // MatrixForm]]
x = {5, -9.7, 16.3}; (*изборът на начално приближение е произволен*)
(*изчисляваме нормите според избора на норма,
който сме направили по време на проверка на условието на сходимост*)
normB = Sqrt[Sum[Sum[B[[i, j]]^2, {j, 1, n}], {i, 1, n}]];
Print["Нормата на B е ", normB];
normx0 = Norm[x];
normc = Norm[c];
For[k = 0, k ≤ 3, k++,
 Print["k = ", k, " x^(k) = ", x, " ε_k = ", eps = normB^k (normx0 + normc/(1 - normB))];
 x = B.x + c
]
Print["За сравнение, точното решение е ", N[LinearSolve[A, b]]]
```

$$\text{Итерационният процес е } x^{(k+1)} = \begin{pmatrix} 0.125 & 0.2 & -0.1 \\ 0.2 & -0.1 & -0.02 \\ -0.05 & 0.1 & -0.111111 \end{pmatrix} . \ x^{(k)} + \begin{pmatrix} 6. \\ 7. \\ 13. \end{pmatrix}$$

Нормата на B е 0.375327

k = 0 $x^{(k)}$ = {5, -9.7, 16.3} ε_k = 45.129

k = 1 $x^{(k)}$ = {3.055, 8.644, 9.96889} ε_k = 16.9381

k = 2 $x^{(k)}$ = {7.11379, 6.54722, 12.604} ε_k = 6.35735

k = 3 $x^{(k)}$ = {6.93827, 7.51596, 11.8986} ε_k = 2.38609

За сравнение, точното решение е {7.18331, 7.45065, 12.0473}

4. Какъв е минималния брой итерации, които за нужни за достигане на точност 10^{-4}, работейки по избрания метод при избор на начално приближение

x(0) = c?

In[948]:=
$$\frac{\text{Log}\left[\frac{10^{-4}}{\text{normx0}+\frac{\text{normc}}{1-\text{normB}}}\right]}{\text{Log}[\text{normB}]}$$

Out[948]= 13.2862

Извод: Необходими са 14 на брой итерации.

За сравнение и проверка пускаме итерациите:

In[949]:=
$$A = \begin{pmatrix} \frac{7}{8} & -0.2 & 0.1 \\ -0.2 & \frac{11}{10} & 0.02 \\ 0.05 & -0.1 & \frac{10}{9} \end{pmatrix}; \; b = \{6, 7, 13\};$$

```
n = Length[A];
IM = IdentityMatrix[n];
B = IM - A;
c = b;
Print["Итерационният процес е x^(k+1) = ",
 N[B // MatrixForm], ". x^(k) + ", N[c // MatrixForm]]
x = {5, -9.7, 16.3}; (*изборът на начално приближение е произволен*)
(*изчисляваме нормите според избора на норма,
който сме направили по време на проверка на условието на сходимост*)
normB = Max[Table[Sum[Abs[B[[i, j]]], {j, 1, n}], {i, n}]];
Print["Нормата на B e ", normB]
normx0 = Max[Abs[x]];
normc = Max[Abs[c]];
For[k = 0, k ≤ 14, k++,
 Print["k = ", k, " x^(k) = ", x, " ε_k = ", eps = normB^k (normx0 + normc/(1 - normB))];
 x = B.x + c
]
Print["За сравнение, точното решение е ", LinearSolve[A, b]]
```

Итерационният процес е $x^{(k+1)} = \begin{pmatrix} 0.125 & 0.2 & -0.1 \\ 0.2 & -0.1 & -0.02 \\ -0.05 & 0.1 & -0.111111 \end{pmatrix} . x^{(k)} + \begin{pmatrix} 6. \\ 7. \\ 13. \end{pmatrix}$

Нормата на B е 0.425

$k = 0$ $x^{(k)} = \{5, -9.7, 16.3\}$ $\varepsilon_k = 38.9087$

$k = 1$ $x^{(k)} = \{3.055, 8.644, 9.96889\}$ $\varepsilon_k = 16.5362$

$k = 2$ $x^{(k)} = \{7.11379, 6.54722, 12.604\}$ $\varepsilon_k = 7.02788$

$k = 3$ $x^{(k)} = \{6.93827, 7.51596, 11.8986\}$ $\varepsilon_k = 2.98685$

$k = 4$ $x^{(k)} = \{7.18062, 7.39809, 12.0826\}$ $\varepsilon_k = 1.26941$

$k = 5$ $x^{(k)} = \{7.16893, 7.45466, 12.0383\}$ $\varepsilon_k = 0.5395$

$k = 6$ $x^{(k)} = \{7.18322, 7.44755, 12.0494\}$ $\varepsilon_k = 0.229287$

$k = 7$ $x^{(k)} = \{7.18247, 7.4509, 12.0468\}$ $\varepsilon_k = 0.0974472$

$k = 8$ $x^{(k)} = \{7.18331, 7.45047, 12.0474\}$ $\varepsilon_k = 0.041415$

$k = 9$ $x^{(k)} = \{7.18326, 7.45067, 12.0473\}$ $\varepsilon_k = 0.0176014$

$k = 10$ $x^{(k)} = \{7.18331, 7.45064, 12.0473\}$ $\varepsilon_k = 0.00748059$

$k = 11$ $x^{(k)} = \{7.18331, 7.45065, 12.0473\}$ $\varepsilon_k = 0.00317925$

$k = 12$ $x^{(k)} = \{7.18331, 7.45065, 12.0473\}$ $\varepsilon_k = 0.00135118$

$k = 13$ $x^{(k)} = \{7.18331, 7.45065, 12.0473\}$ $\varepsilon_k = 0.000574252$

$k = 14$ $x^{(k)} = \{7.18331, 7.45065, 12.0473\}$ $\varepsilon_k = 0.000244057$

За сравнение, точното решение е {7.18331, 7.45065, 12.0473}