Метод на най-малките квадрати (МНМК)

Задача: (**a** и **b** са съответно предпоследната и последната цифра от факултетния номер)

1. Да се състави таблицата (x_k, g(x_k)), където

$x_k =$ -b + k(0.1), k = $\overline{0, 10}$,   g(x) = $e^{\frac{(a+1)\,x}{10}}$

Търси се апроксимацията в точката s = -b + (0.17)a + 0.01. За тази цел:

2. Да се построи полином на ленейна регресия по получената таблица.
3. Да се построи полином на квадратична регресия по получената таблица.
4. Да се построи полином на кубична регресия по получената таблица.
5. Да се пресметне апроксимацията, използвайки всеки един от построените полиноми (общо 3).
6. Да се оцени грешката за всяка от получените апроксимации.
7. Да се направи сравнение между трите резултата.

Генериране на данни

In[277]:=
```
a = 7.; b = 14;
n = 11;
h = (b - a)/n;
```

In[280]:=
```
xt = Table[2 + k * h, {k, 7, 14}]
```

Out[280]=
```
{6.45455, 7.09091, 7.72727, 8.36364, 9., 9.63636, 10.2727, 10.9091}
```

In[281]:=
```
f[x_] := (x + 14) * Log[Sqrt[x + 13]]
yt = f[xt]
```

Out[282]=
```
{30.3554, 31.6392, 32.9326, 34.2353, 35.547, 36.8675, 38.1966, 39.534}
```

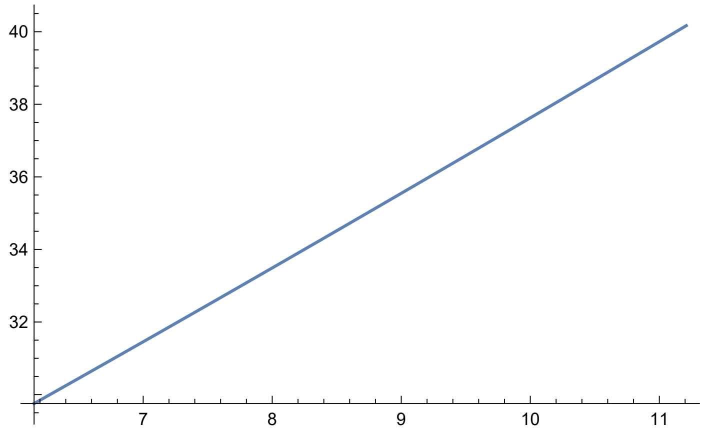
In[283]:=
```
P = Length[xt]
```

Out[283]=
```
8
```

Визуализация

In[284]:=
```
grf = Plot[f[x], {x, xt⟦1⟧ - 0.3, xt⟦P⟧ + 0.3}]
```

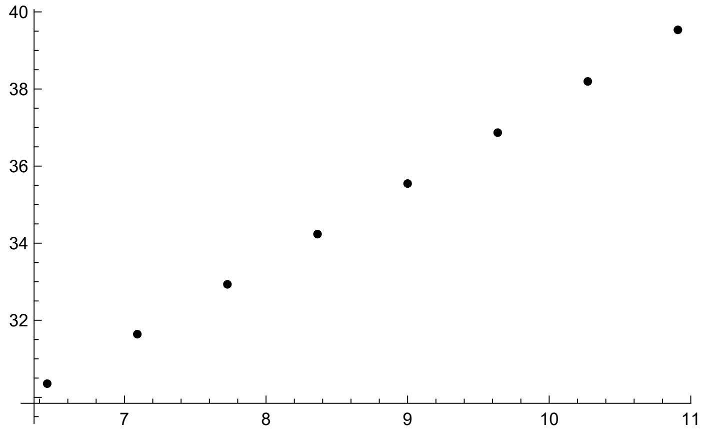
Out[284]=



In[285]:=
```
points = Table[{xt⟦i⟧, yt⟦i⟧}, {i, 1, P}];
```

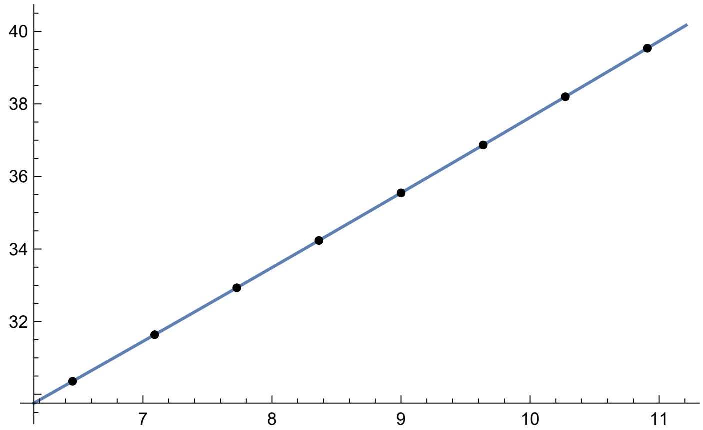
In[286]:=
```
grp = ListPlot[points, PlotStyle → Black]
```

Out[286]=



In[287]:=
```
Show[grf, grp]
```

Out[287]=



Квадратична регресия

Попълваме таблицата

In[288]:= xt^2

Out[288]= {41.6612, 50.281, 59.7107, 69.9504, 81., 92.8595, 105.529, 119.008}

In[289]:= yt * xt

Out[289]= {195.93, 224.351, 254.479, 286.331, 319.923, 355.269, 392.383, 431.279}

In[290]:= xt^3

Out[290]= {268.904, 356.538, 461.401, 585.04, 729., 894.828, 1084.07, 1298.27}

In[291]:= xt^4

Out[291]= {1735.65, 2528.18, 3565.37, 4893.06, 6561., 8622.89, 11136.4, 14163.}

In[292]:= $yt * xt^2$

Out[292]= {1264.64, 1590.85, 1966.43, 2394.77, 2879.31, 3423.5, 4030.84, 4704.87}

Намиране на сумите

In[293]:= $\sum_{i=1}^{P} xt[[i]]$

Out[293]= 69.4545

In[294]:= $\sum_{i=1}^{P} yt[[i]]$

Out[294]= 279.307

In[295]:= $\sum_{i=1}^{P} xt[[i]]^2$

Out[295]= 620.

In[296]:= $\sum_{i=1}^{P} yt[[i]] * xt[[i]]$

Out[296]= 2459.94

In[297]:= $\sum_{i=1}^{P} xt[[i]]^3$

Out[297]= 5678.05

In[298]:= $\sum_{i=1}^{P} xt[[i]]^4$

Out[298]= 53205.5

In[299]:= $\sum_{i=1}^{P} yt[\![i]\!] * xt[\![i]\!]^2$

Out[299]= 22 255.2

Решаваме системата

In[300]:= $A = \begin{pmatrix} P & \sum_{i=1}^{P} xt[\![i]\!] & \sum_{i=1}^{P} xt[\![i]\!]^2 \\ \sum_{i=1}^{P} xt[\![i]\!] & \sum_{i=1}^{P} xt[\![i]\!]^2 & \sum_{i=1}^{P} xt[\![i]\!]^3 \\ \sum_{i=1}^{P} xt[\![i]\!]^2 & \sum_{i=1}^{P} xt[\![i]\!]^3 & \sum_{i=1}^{P} xt[\![i]\!]^4 \end{pmatrix};$

$b = \left\{\sum_{i=1}^{P} yt[\![i]\!],\ \sum_{i=1}^{P} yt[\![i]\!] * xt[\![i]\!],\ \sum_{i=1}^{P} yt[\![i]\!] * xt[\![i]\!]^2\right\};$

In[301]:= `LinearSolve[A, b]`

Out[301]= {17.8298, 1.8694, 0.0110169}

Таен коз (възможност за самопроверка)

In[302]:= `Fit[points, {1, x, x^2}, x]`

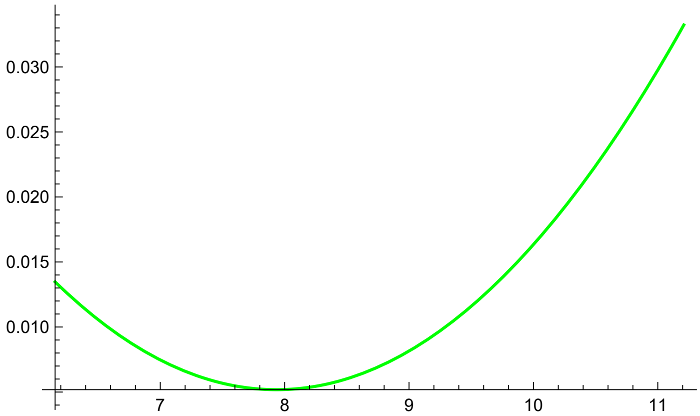
Out[302]= $17.8298 + 1.8694\, x + 0.0110169\, x^2$

Съставяме полинома

In[303]:= `P2[x_] := 0.169855 - 0.0415066 x + 0.0026155 x^2`

In[304]:= `grfP2 = Plot[P2[x], {x, xt[[1]] - 0.3, xt[[P]] + 0.3}, PlotStyle → Green]`

Out[304]=



In[305]:= `P2[-5.97]`

Out[305]= 0.510868

За сравнение истинската стойност

In[306]:= `f[-5.97]`

Out[306]= 7.83

Оценка на грешката

Теоретична грешка (средноквадратична)

In[307]:= $\sqrt{\sum_{i=1}^{p} (yt[[i]] - P2[xt[[i]]])^2}$

Out[307]= 99.0793

Истинска грешка

In[308]:= `Abs[f[-5.97] - P2[-5.97]]`

Out[308]= 7.31913

Леви правоъгълници

In[309]:= `Plot[Abs[f'[x]], {x, a, b}]`

Plot: Limiting value {279.307, 2459.94, 22255.2} in {x, 7., {279.307, 2459.94, 22255.2}} is not a machine-sized real number.

Out[309]= `Plot[Abs[f′[x]], {x, a, b}]`

In[310]:=
```
a = 7.; b = 14.;
```
$h = \frac{b - a}{n};$

```
n = 11;
```
$f[x\_] := (x + 14) * Log\left[\sqrt{x + 13}\right]$

$Itochno = \int_a^b f[x]\, dx;$

$I1 = h * \sum_{i=0}^{n-1} f[a + i * h];$

```
M1 = Abs[f'[a]];
```
$R1 = \frac{(b - a)^2}{2 n} * M1;$

```
Print["Мрежата е със стъпка ", h, " и брой подинтервали ", n]
Print["Приближената стойност по формулата на левите правоъгълници е ", I1]
Print["Точната стойност                                           е ", Itochno]
Print["Теоретичната грешка по формулата на левите правоъгълници  е ", R1]
Print["Истинската грешка по формулата на левите правоъгълници    е ",
 Abs[I1 - Itochno]]
```

```
Мрежата е със стъпка 0.636364 и брой подинтервали 11
Приближената стойност по формулата на левите правоъгълници е 266.336
Точната стойност                                            е 271.005
Теоретичната грешка по формулата на левите правоъгълници   е 4.50547
Истинската грешка по формулата на левите правоъгълници     е 4.66814
```