

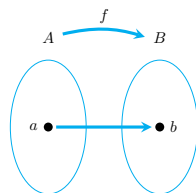
## 2.1 | Функции

В много случаи ние асоциираме на всеки елемент от едно множество определен елемент от второ множество (който може да е същият като първия). Концепцията за функция е изключително важна в математика и компютърни науки. Например в дискретната математика чрез функции се задават различни дискретни структури. Много от компютърните програми и подпрограми са предназначени за изчисляване на стойностите на функциите.

### 2.1.1 | Основни дефиниции

#### Дефиниция

Функция  $f: A \rightarrow B$  наричаме правилото, според което на всеки елемент  $a \in A$  се съпоставя точно един елемент  $b = f(a) \in B$ .



Множеството  $A$  се нарича дефиниционно множество или множество от допустими стойности, а множеството  $B$  - множество от стойности или кообласт.



От гледна точка на множествата една функция от  $A$  към  $B$  е подмножество на  $A \times B$ . Всички елементи от дефиниционната област на една функция се появяват като първа координата на наредената двойка на функцията, но не всички елементи на кообластта се появяват като втора координата.

#### Дефиниция

Рангът на функцията  $f: A \rightarrow B$  се дефинира чрез

$$\text{range}(f) = \{b \in B \mid \exists a \in A: (a, b) \in f\} \text{ или } \text{range}(f) = \{f(a) \mid a \in A\}.$$

С други думи рангът на една функция е подмножество на множеството на стойности на тази на функцията.

**Дефиниция**

Две функции са *еквивалентни*, тогава и само тогава, когато и трите им множества (*множество от допустими стойности, кообласт и ранг*) са съответно еквивалентни.

Нека да разгледаме някои примери с различен подход при дефинирането на функция като ще определим дефиниционното множество, множеството от стойности и рангът на така дефинираните функции.

**Пример 1:** Нека  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  се дефинира чрез  $f(n) = 3n$ .

За функция  $f$  дефиниционното множество и множеството от стойности и за двете е множеството на целите числа. Но рангът се състои само от целите числа, които се делят на 3.

**Пример 2:** Нека функцията  $g: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{a, b, c\}$  се дефинира чрез равенствата  $g(1) = c$ ,  $g(2) = a$ ,  $g(3) = a$ .

За функция  $g$  дефиниционното множество е  $\{1, 2, 3\}$ , множеството от стойности е  $\{a, b, c\}$  и рангът  $\{a, c\}$ .

**Пример 3:** Нека функцията  $h: \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \mathbb{N}$  се дефинира чрез таблицата

$x$	1	2	3	4
$h(x)$	3	6	9	12

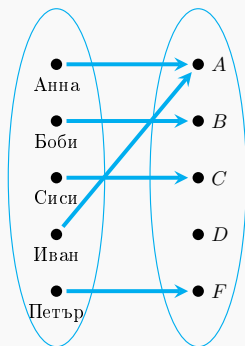
За функция  $h$  дефиниционното множество е крайното множество  $\{1, 2, 3, 4\}$ , а множеството от стойности е множеството на естествените числа.

Ще отбележим, че функциите  $f$  и  $h$  не са еквивалентни тъй като множествата им стойности (кообластите) не са еквивалентни.

**Пример 4:** Всеки студент по дискретна математика получава буквена оценка от множеството  $\{A, B, C, D, F\}$  като  $A$  за Анна,  $C$  за Сиси,  $B$  за Боби,  $A$  за Иван и  $F$  за Петър.

Графично това може да се представи както е показано в дясно.

За така дефинираната функция дефиниционното множество е множеството {Анна, Боби, Иван, Петър, Сиси}, множеството от стойности е  $\{A, B, C, D, F\}$  и рангът е множеството  $\{A, B, C, F\}$ .



В следващия пример ще разгледаме и друг подход за дефиниране на функцията, а именно - рекурсивно.

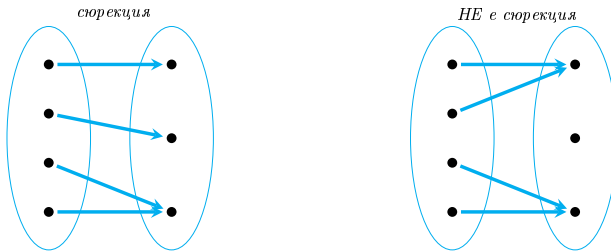
**Пример 5:** Разглеждаме функцията  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  дефинирана чрез  $f(0) = 0$  и  $f(n+1) = f(n) + 2n + 1$ . Намерете  $f(6)$ .

*Решение:* Според зададеното правило имаме  $f(6) = f(5) + 11$ , но ние не знаем стойността на  $f(5)$ . Тук трябва отново да приложим правилото  $f(5) = f(4) + 9$ . Така за да достигнем до  $f(6)$  трябва да пресметнем всички стойности от  $f(1)$ , т.е. ще работим отзад напред

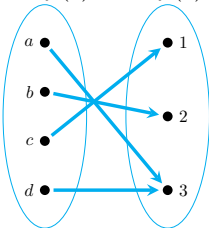
$$\begin{array}{ll} f(1) = f(0) + 1 = 0 + 1 = 1 & f(2) = f(1) + 3 = 1 + 3 = 4 \\ f(3) = f(2) + 5 = 4 + 5 = 9 & f(4) = f(3) + 7 = 9 + 7 = 16 \\ f(5) = f(4) + 9 = 16 + 9 = 25 & f(6) = f(5) + 11 = 25 + 11 = 36 \end{array}$$

### Дефиниция

Функцията  $f: A \rightarrow B$  се нарича *сюрекция*, ако за всяко  $b \in B$  съществува  $a \in A$ , така че  $f(a) = b$ , т.е. всеки елемент от  $B$  е изображение на един или повече елементи от  $A$ .



*Пример 1:* Нека функцията  $f: \{a, b, c, d\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$  се дефинира чрез  $f(a) = 3$ ,  $f(b) = 2$ ,  $f(c) = 1$  и  $f(d) = 3$ . Определете дали  $f$  е сюрекция.



На фигурата в ляво е показано графичното представяне на дадената функция. От това, че всичките три елемента от кообластта са изображения на елементи от дефиниционното множество, то  $f$  е сюрекция.

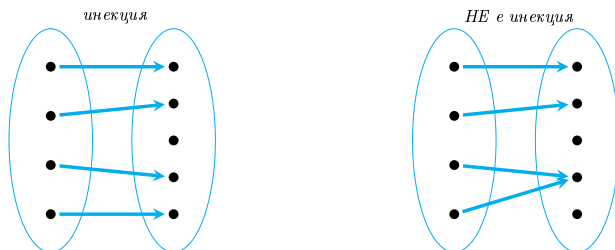
*Ще отбележим, че ако кообластта беше  $\{1, 2, 3, 4\}$ , то  $f$  нямаше да бъде сюрекция.*

*Пример 2:* Определете дали  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  дефинирана, чрез  $f(x) = x^2$  е сюрекция.

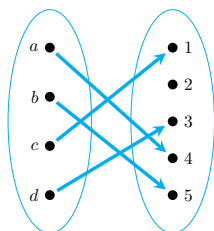
*Решение:* Функцията не е сюрекция, например: няма цяло число  $x$  такава, че  $x^2 = -1$ .

### Дефиниция

Функцията  $f: A \rightarrow B$  се нарича *инекция*, ако на всеки елемент  $a \in A$  се съпоставя най-много един елемент  $b \in B$ .



*Пример 1:* Нека функцията  $f: \{a, b, c, d\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}$  се дефинира чрез  $f(a) = 4$ ,  $f(b) = 5$ ,  $f(c) = 1$  и  $f(d) = 3$ . Определете дали  $f$  е инекция.



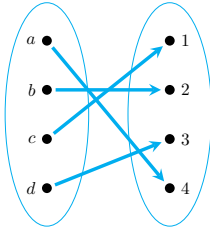
Функцията  $f$  е инекция, защото приема различни стойности за всеки от четирите елемента в дефиниционното множество. На фигурата в ляво е показано графичното представяне на дадената функция.

*Пример 2:* Определете дали  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  дефинирана, чрез  $f(x) = x^2$  е инекция.

*Решение:* Функцията не е инекция, например:  $f(-1) = f(1) = 1$ .

### Дефиниция

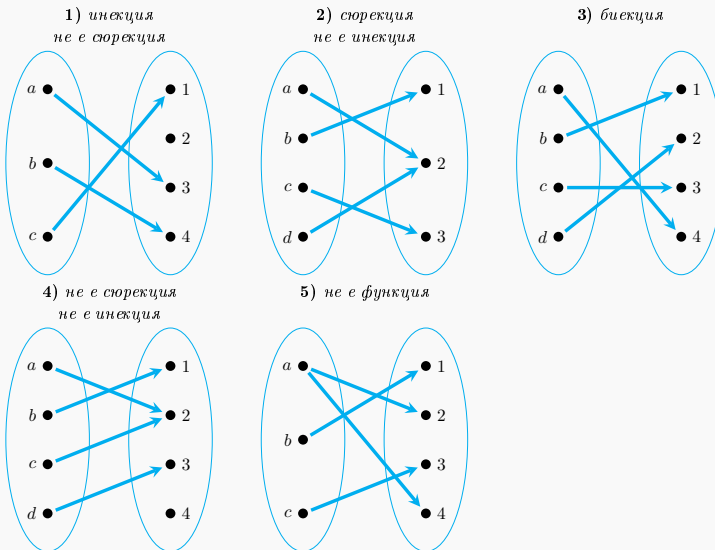
Функцията  $f: A \rightarrow B$  се нарича *биекция*, ако е едновременно сюрекция и инекция.



**Пример:** Нека функцията  $f: \{a, b, c, d\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$  се дефинира чрез равенствата  $f(a) = 4$ ,  $f(b) = 2$ ,  $f(c) = 1$  и  $f(d) = 3$ . Определете дали  $f$  е биекция.

**Решение:** Функцията е биекция, защото е едновременно сюрекция и инекция.

**Пример 1:** За дадените изпбражения определете дали са (само) инекция, (само) сюрекция, биекция или нито инекция, нито сюрекция.



Първите четири изображения са функции като първата е инекция, но не е сюрекция, втората е сюрекция но не е инекция, третата е едновременно инекция и сюрекция, т.е. е биекция и четвъртата не е инекция нито сюрекция. Петото изображение не е функция.

**Пример 2:** За дадените функции определете дали са (само) инекция, (само) сюрекция, биекция или нито инекция, нито сюрекция.

1.  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  се дефинира чрез  $f(n) = 3n$ ;
2.  $g: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{a, b, c\}$  се дефинира чрез равенствата  $g(1) = c$ ,  $g(2) = a$ ,  $g(3) = a$ ;

3.  $h: \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$  се дефинира чрез  $h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

За всяка от тях определете дали са (само) инекция, (само) сюрекция, биекция или нито инекция, нито сюрекция.

Решение:

функция	$f$	$g$	$h$
инекция	да	не	да
сюрекция	не	не	да
биекция	не	не	да

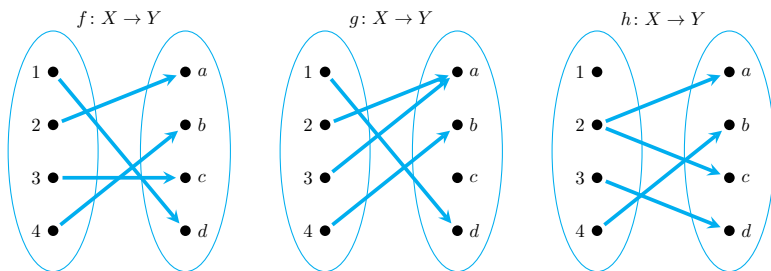
Инекция:  $g$  не е, защото  $g(2) = a$  и  $g(3) = a$ .

Сюрекция:  $f$  не е, защото има елементи в кообластта, които не са елементи на ранга на функцията.  $g$  не е, защото няма елемент  $x$  такъв, че  $g(x) = b$ , т.е.  $b$  е от кообластта, но не е в ранга на функцията.

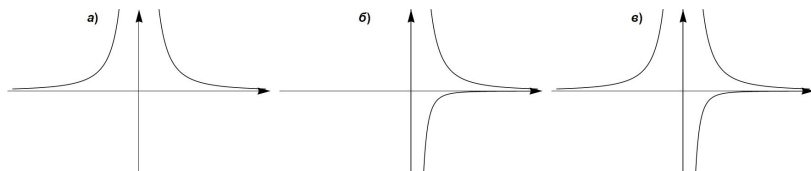
## Задачи за самоподготовка

**Задача 1.** Кои от следните изображения са функции?

а) Нека  $X = \{1, 2, 3, 4\}$  и  $Y = \{a, b, c, d\}$ .



б) Нека  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .



**Задача 2.** Дадена е функцията  $f: A \rightarrow B$ , където  $A = \{1, 2, 3\}$  и  $B = \{1, 2, 3, 4\}$ . Кои от следните изображения са функции?

- |  |  |
|--|--|
| <b>а)</b> $(2, 3)$ ;                             | <b>б)</b> $\{(2, 3)\}$ ;                 |
| <b>в)</b> $\{(1, 3), (3, 1), (2, 1)\}$ ;         | <b>г)</b> $\{(1, 3), (2, 1)\}$ ;         |
| <b>д)</b> $\{(1, 3), (2, 1), (1, 4), (3, 2)\}$ ; | <b>е)</b> $\{(1, 3), (3, 1), (2, 5)\}$ . |

**Задача 3.** Нека  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  се дефинира рекурентно чрез формулата  $f(n+1) = f(n) + 3$ . Определете стойността на  $f(5)$ , ако

- а)**  $f(0) = 0$ ;

**б)**  $f(0) = 2$ ;

**б)**  $f(0) = 1$ ;

**г)**  $f(0) = 100$ .

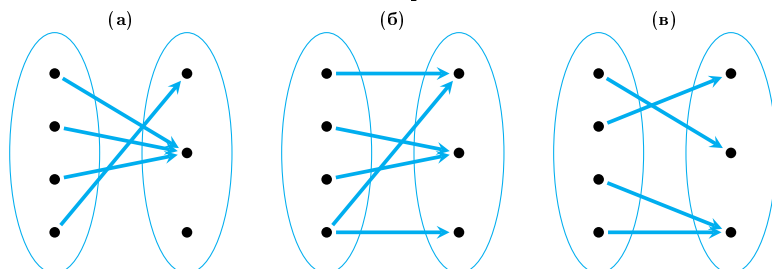
**Задача 4.** Нека е дадена функцията  $f: \{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . Определете дали тя е (само) инекция, (само) сюрекция, биекция или нито инекция, нито сюрекция, ако:

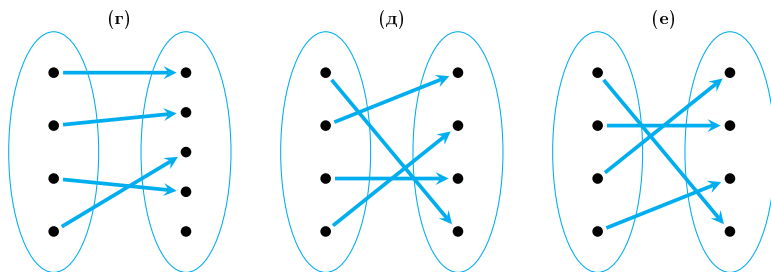
- $$\begin{aligned} \text{а)} \quad & f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}; \\ \text{б)} \quad & f(x) = 6 - x; \\ \text{в)} \quad & f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & \text{ако } x \text{ е четно} \\ \frac{x+1}{2}, & \text{ако } x \text{ е нечетно} \end{cases}; \end{aligned}$$

**Задача 5.** За следните функции проверете дали са (само) инекция, (само) сюрекция, биекция или нито инекция, нито сюрекция.

- a)**  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3;$                       **б)**  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^4;$   
**в)**  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}, f(x) = x^4;$                       **г)**  $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}, f(x) = |x|.$

**Задача 6.** Кои от следните изображения са биекции?





**Задача 7.** Определете вида на следните функции:

а)  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , дефинирана с  $g(x) = 2x + 1$ ;

б)  $h: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , дефинирана с  $h(x) = x^2 + 2$ .

**Задача 8.** В края на семестъра учителя поставил оценка на всеки от неговите ученици. Това функция ли е? Ако е да, кое ще е дефиниционното множество, множеството от стойности? Функцията инекция, сюрекция или биекция е?

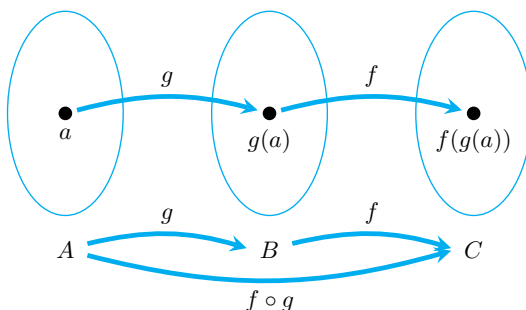
### 2.1.2 | Операции над функции

#### Дефиниция

Нека  $g: A \rightarrow B$ ,  $f: B \rightarrow C$ . Тогава *суперпозиция* на функциите  $f$  и  $g$  за всяко  $a \in A$ , наричаме

$$(f \circ g)(a) = f(g(a)),$$

т.е. образуваме съставни функции (или функция във функция).





*Пример:* Нека функциите  $f, g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  се дефинира чрез  $f(x) = 2x + 3$  и  $g(x) = 3x + 2$ . Определете  $f \circ g$  и  $g \circ f$ .

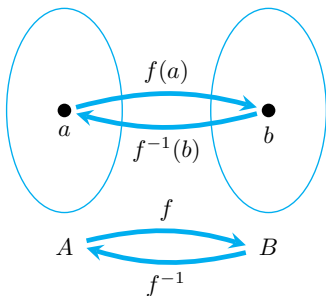
*Решение:*

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x + 2) = 2(3x + 2) + 3 = 6x + 7$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x + 3) = 3(2x + 3) + 2 = 6x + 11$$

### Дефиниция

Нека е дадена функция  $f: A \rightarrow B$ , за която  $b = f(a)$ . Тогава функцията  $f^{-1}: B \rightarrow A$  наричаме *обратна функция* на функцията  $f$  и е в сила  $f^{-1}(b) = a$ .



*Пример:* Нека функцията  $f: \{a, b, c, d\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$  се дефинира чрез равенствата  $f(a) = 4$ ,  $f(b) = 2$ ,  $f(c) = 1$  и  $f(d) = 3$ . Определете дали  $f$  е обратима.

*Решение:* Функцията е биекция и е обратима. В сила са следните равенства  $f^{-1}(4) = a$ ,  $f^{-1}(2) = b$ ,  $f^{-1}(1) = c$  и  $f^{-1}(3) = d$ .

## Задачи за самоподготовка

**Задача 1.** Нека  $x \in \mathbb{Z}$  е такова, че  $x > 1$  и  $y = f(x)$  е сумата от всички прости числа по-големи от 1, които са делители на  $x$ . Нека  $g(y) = 10y$ . Тогава изчислете:

- |                    |                        |                 |
|--------------------|------------------------|-----------------|
| а) $f(100)$ ;      | б) $f(f(30))$ ;        | в) $f(3 + 5)$ ; |
| г) $f(3) + f(5)$ ; | д) $f(3) \cdot f(5)$ ; | е) $f(3.5)$ ;   |
| ж) $g(f(100))$ ;   | з) $f(g(f(42)))$ .     |                 |

**Задача 2.** Нека функциите  $f, g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  се дефинира чрез  $f(x) = x^2 - 4$  и  $g(y) = 5y^2 + 10$ . Намерете :

- а)  $(g \circ f)(x)$ ;                      б)  $(g \circ f)(x - 1)$ .

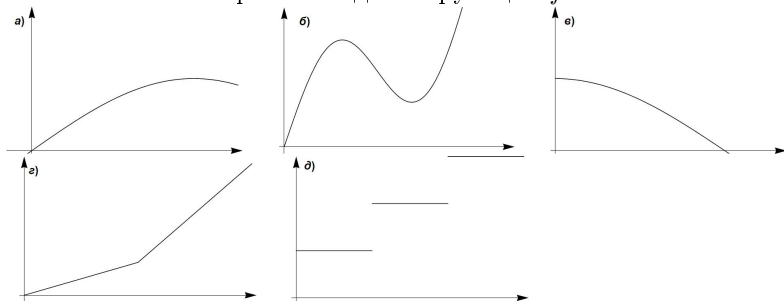
**Задача 3.** Нека  $f(x) = ax + b$  и  $g(x) = cx + d$ , където  $a, b, c$  и  $d$  са константи. Намерете необходимо и достатъчно условие за константите  $a, b, c$  и  $d$  така, че

$$f \circ g = g \circ f.$$

**Задача 4.** Нека функцията  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  се дефинира чрез  $f(x) = x + 1$ . Намерете:

- а)  $g^{-1}(1)$ ;                      б)  $g^{-1}(2)$ ;                      в)  $g^{-1}(3)$ ;                      г)  $g^{-1}(10)$ .

**Задача 5.** Имат ли обратни следните функции  $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ ?



**Задача 6.** Нека функцията  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  се дефинира чрез  $f(x) = 3x$  и  $A$  е множеството на нечетните естествени числа. Намерете:

- а)  $f(A)$ ;                      б)  $f^{-1}(A)$ ;                      в)  $f^{-1}(\{12\})$ ;                      г)  $f^{-1}(\{5\})$ .

**Задача 7.** Нека  $A = \{n \in \mathbb{N} \mid 0 \leq n \leq 999\}$ . Дефинираме функция  $f: A \rightarrow \mathbb{N}$  по следния начин  $f(abc) = a + b + c$ , където  $a, b$ , и  $c$  са цифрите на числото от  $A$ . Например  $f(253) = 2 + 5 + 3 = 10$ .

- а) Намерете  $f^{-1}(3)$  и  $f^{-1}(28)$ ;  
 б) Определете дали функцията е инекция. А сюрекция?

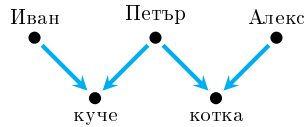
## 2.2 | Релации

### Дефиниция

Всяко множество  $R \subseteq A \times B$  наричаме бинарна релация, т.е. за  $a \in A$  и  $b \in B$  означението  $a R b$  означава  $(a, b) \in R$ .

*Пример:* Нека  $P = \{\text{Иван, Петър, Алекс}\}$  и  $A = \{\text{куче, котка}\}$ . Релацията *има*:  $P \times A$  определя кой човек какво животно има, т.е.

Иван има куче  
Петър има куче  
Петър има котка  
Алекс има котка

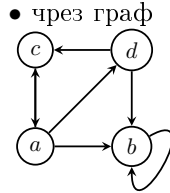


Има няколко начина, по които може да бъде зададена една релация. Нека  $R$  е бинарна релация над  $A$ , т.е.  $R \subseteq A \times A$ , където  $A = \{a, b, c, d\}$ .

- чрез наредени двойки  
 $R = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, b), (c, a), (d, b), (d, c)\}$

- чрез таблица/матрица

	$a$	$b$	$c$	$d$
$a$	0	1	1	1
$b$	0	1	0	0
$c$	1	0	0	0
$d$	0	1	1	0



### Дефиниция

Нека  $A$  е непразно множество и  $R \subseteq A \times A$  е релация.

- $R$  е *рефлексивна* релация, ако за всяко  $a \in A$  е в сила  $(a, a) \in R$ ;
- $R$  е *симетрична* релация, ако за всички  $a, b \in A$  от  $(a, b) \in R$  следва, че  $(b, a) \in R$ ;
- $R$  е *транзитивна* релация, ако за всички  $a, b, c \in A$  от  $(a, b) \in R$  и  $(b, c) \in R$  следва, че  $(a, c) \in R$ .

### Дефиниция

Нека  $A$  е непразно множество и  $R \subseteq A \times A$  е релация.

- $R$  е *антирефлексивна* релация, ако за всяко  $a \in A$  е в сила  $(a, a) \notin R$ ;

- $R$  е *антисиметрична* релация, ако за всички  $a, b \in A$  от  $(a, b) \in R$  следва, че или  $a = b$ , или  $(b, a) \notin R$ ;

### Дефиниция

Релация  $R$  се нарича *релация на еквивалентност*, ако тя е едновременно

- *рефлексивна*;
- *симетрична*;
- *транзитивна*.

### Дефиниция

Релация  $R$  се нарича *релация на наредба*, ако тя е едновременно

- *рефлексивна*;
- *антисиметрична*;
- *транзитивна*.

### Дефиниция

*Клас на еквивалентност* с представител елемент  $a$  се нарича множеството  $K(a)$  на всички елементи  $x$  на множеството  $A$ , които са в релация  $R$  с елемента  $a$ , т.е.

$$K(a) = \{x \in A \mid xRa\}.$$

**Пример:** Нека е дадено множеството  $A = \{2, 3, 6, 7, 11\}$ . Дефинираме релация  $R \subseteq A \times A$  чрез

$$R = \{(a, b) \mid a + b \text{ е нечетно число}\}.$$

Определете:

- а) кои наредени двойки са в релация?
- б) дали релацията е рефлексивна, симетрична и/или транзитивна.

*Решение:* а) Наредените двойки в релацията  $R$  са

$$R = \{\{2, 3\}, \{2, 7\}, \{2, 11\}, \{3, 2\}, \{3, 6\}, \{6, 3\}, \{6, 7\}, \{6, 11\}, \{7, 2\}, \{7, 6\}, \{11, 2\}, \{11, 6\}\}.$$

- б) Ще представим решението в табличен вид:

рефлексивност	не	$(3, 3) \notin R$
симетричност	да	ако $a + b$ е нечетно, то и $b + a$ е нечетно
транзитивност	не	$(2, 3) \in R$ , $(3, 6) \in R$ , но $(2, 6) \notin R$

## Задачи за самоподготовка

**Задача 1.** Нека  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ . Кои наредени двойки са в релация

$$R = \{(a, b) \mid a \text{ се дели на } b\}.$$

Представете ги таблично и графично.

**Задача 2.** Разглеждаме следните релации в множеството на целите числа:

$$R_1 = \{(a, b) \mid a \leq b\}$$

$$R_2 = \{(a, b) \mid a > b\}$$

$$R_3 = \{(a, b) \mid a = b \text{ или } a = -b\}$$

$$R_4 = \{(a, b) \mid a = b\}$$

$$R_5 = \{(a, b) \mid a = b + 1\}$$

$$R_6 = \{(a, b) \mid a + b \leq 3\}$$

а) Кои от тези релации съдържат двойките  $(1, 1)$ ,  $(1, 2)$ ,  $(2, 1)$ ,  $(2, -1)$ ,  $(2, 2)$ ?

б) Определете кои от тях са рефлексивни, симетрични, транзитивни.

**Задача 3.** Разглеждаме следните релации в множеството  $\{1, 2, 3, 4\}$ :

$$R_1 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 4)\}$$

$$R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1)\}$$

$$R_3 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 4)\}$$

$$R_4 = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$$

$$R_5 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 4)\}$$

$$R_6 = \{(3, 4)\}$$

Определете кои от тях са рефлексивни, симетрични, транзитивни.

**Задача 4.** Определете вида на релацията  $R$  зададена чрез:

	1	2	3	4	5	6
1	1	1	0	0	0	1
2	1	1	0	0	0	1
3	0	0	1	0	0	0
4	0	0	0	1	1	0
5	0	0	0	1	1	0
6	1	1	0	0	0	1

**Задача 5.** Проверете дали релацията  $/$  (дели) е релация на еквивалентност или наредба в  $\mathbb{N}$ .

**Задача 6.** Нека  $R$  е " $=$ " върху множеството на обикновените дроби, които са положителни. Проверете дали " $=$ " е релация на еквивалентност. Ако е определете класовете на еквивалентност.

**Задача 7.** Напишете в матрична форма релацията  $\subseteq$  върху обвивката  $\mathcal{P}(A)$  на множеството  $A = \{a, b, c\}$ . Проверете дали релацията  $\subseteq$  е релация на еквивалентност или наредба в множеството  $\mathcal{P}(A)$ .