Метод на разполовяването

Задача: Дадено е уравенението:

$x^5 + 103 \sin x - 34 x^3 - 23 = 0$

1. Да се визуализира функцията и да се определят броя на корените.
2. Да се локализира един от корените.
3. Уточнете локализирания корен по **метода на разполовяването**.
4. Оценка на грешката.
5. Колко биха били броя на итерациите за достигане на точност 0.0001 по **метода на разполовяването**, използвайки интервала от локализацията на корена.

```
In[•]:= f[x_] := x^5 + 103 Sin[x] - 34 x^3 - 23
```

```
In[•]:= f[x]
Out[•]=
-23 - 34 x^3 + x^5 + 103 Sin[x]
```

1. Да се визуализира функцията и да се определят броя на корените.

2. Да се локализира един от корените.

3. Уточнете локализирания корен по **метода на разполовяването**.

Уточнение за цикли и условни преходи

```
In[12]:= For[i = 0, i < 4, i++, Print[i]]
0
1
2
3
```

```
In[5]:= i
Out[5]= 4
```

In[6]:=

```
If[i < 2, Print["малко"], Print["голямо"]]
```

голямо

In[7]:=

```
For[i = 0, i < 4, i++,
 Print[i];
 (*тяло на цикъла*)
 If[i < 2, Print["малко"], Print["голямо"]]
]
```

0

малко

1

малко

2

голямо

3

голямо

Съставяне на програмен код, реализиращ **метода на разполовяването.**

Основен код:

In[35]:=

```
f[x_] := x^5 + 103 Sin[x] - 34 x^3 - 23
a = -6.; b = -5.;
For[n = 0, n ≤ 3 , n++,
 Print["n = ", n, " a_n = ", a, " b_n = ", b,
  " m_n = ", m = (a + b)/2 , " f(m_n) = ", f[m], " ε_n = ", (b - a)/2];
 If[f[m] > 0, b = m, a = m]
]
```

$n = 0$ $a_n = -6.$ $b_n = -5.$ $m_n = -5.5$ $f(m_n) = 673.577$ $\varepsilon_n = 0.5$

$n = 1$ $a_n = -6.$ $b_n = -5.5$ $m_n = -5.75$ $f(m_n) = 207.58$ $\varepsilon_n = 0.25$

$n = 2$ $a_n = -6.$ $b_n = -5.75$ $m_n = -5.875$ $f(m_n) = -86.6728$ $\varepsilon_n = 0.125$

$n = 3$ $a_n = -5.875$ $b_n = -5.75$ $m_n = -5.8125$ $f(m_n) = 65.9004$ $\varepsilon_n = 0.0625$

In[34]:=

```
f[-5.5]
```

Out[34]=

673.577

Извод: На третата стъпка сме получили приближено решение -5.81 с точност 0.0625

Пускаме с повече итерации :

In[41]:=
```
f[x_] := x^5 + 103 Sin[x] - 34 x^3 - 23
a = -6.; b = -5.;
For[n = 0, n ≤ 27 , n++,
 Print["n = ", n, " a_n = ", a, " b_n = ", b,
  " m_n = ", m = (a + b)/2 , " f(m_n) = ", f[m], " ε_n = ", (b - a)/2];
 If[f[m] > 0, b = m, a = m]
]
```

$n = 0\ a_n = -6.\ b_n = -5.\ m_n = -5.5\ f(m_n) = 673.577\ \varepsilon_n = 0.5$

$n = 1\ a_n = -6.\ b_n = -5.5\ m_n = -5.75\ f(m_n) = 207.58\ \varepsilon_n = 0.25$

$n = 2\ a_n = -6.\ b_n = -5.75\ m_n = -5.875\ f(m_n) = -86.6728\ \varepsilon_n = 0.125$

$n = 3\ a_n = -5.875\ b_n = -5.75\ m_n = -5.8125\ f(m_n) = 65.9004\ \varepsilon_n = 0.0625$

$n = 4\ a_n = -5.875\ b_n = -5.8125\ m_n = -5.84375\ f(m_n) = -8.99803\ \varepsilon_n = 0.03125$

$n = 5\ a_n = -5.84375\ b_n = -5.8125\ m_n = -5.82813\ f(m_n) = 28.7949\ \varepsilon_n = 0.015625$

$n = 6\ a_n = -5.84375\ b_n = -5.82813\ m_n = -5.83594\ f(m_n) = 9.98477\ \varepsilon_n = 0.0078125$

$n = 7\ a_n = -5.84375\ b_n = -5.83594\ m_n = -5.83984\ f(m_n) = 0.515009\ \varepsilon_n = 0.00390625$

$n = 8\ a_n = -5.84375\ b_n = -5.83984\ m_n = -5.8418\ f(m_n) = -4.2361\ \varepsilon_n = 0.00195313$

$n = 9\ a_n = -5.8418\ b_n = -5.83984\ m_n = -5.84082\ f(m_n) = -1.85919\ \varepsilon_n = 0.000976563$

$n = 10\ a_n = -5.84082\ b_n = -5.83984\ m_n = -5.84033\ f(m_n) = -0.671752\ \varepsilon_n = 0.000488281$

$n = 11\ a_n = -5.84033\ b_n = -5.83984\ m_n = -5.84009\ f(m_n) = -0.0782872\ \varepsilon_n = 0.000244141$

$n = 12\ a_n = -5.84009\ b_n = -5.83984\ m_n = -5.83997\ f(m_n) = 0.218382\ \varepsilon_n = 0.00012207$

$n = 13\ a_n = -5.84009\ b_n = -5.83997\ m_n = -5.84003\ f(m_n) = 0.0700526\ \varepsilon_n = 0.0000610352$

$n = 14\ a_n = -5.84009\ b_n = -5.84003\ m_n = -5.84006\ f(m_n) = -0.00411599\ \varepsilon_n = 0.0000305176$

$n = 15\ a_n = -5.84006\ b_n = -5.84003\ m_n = -5.84004\ f(m_n) = 0.0329687\ \varepsilon_n = 0.0000152588$

$n = 16\ a_n = -5.84006\ b_n = -5.84004\ m_n = -5.84005\ f(m_n) = 0.0144264\ \varepsilon_n = 7.62939\times10^{-6}$

$n = 17\ a_n = -5.84006\ b_n = -5.84005\ m_n = -5.84005\ f(m_n) = 0.00515523\ \varepsilon_n = 3.8147\times10^{-6}$

$n = 18\ a_n = -5.84006\ b_n = -5.84005\ m_n = -5.84006\ f(m_n) = 0.000519628\ \varepsilon_n = 1.90735\times10^{-6}$

$n = 19\ a_n = -5.84006\ b_n = -5.84006\ m_n = -5.84006\ f(m_n) = -0.00179818\ \varepsilon_n = 9.53674\times10^{-7}$

$n = 20\ a_n = -5.84006\ b_n = -5.84006\ m_n = -5.84006\ f(m_n) = -0.000639275\ \varepsilon_n = 4.76837\times10^{-7}$

$n = 21\ a_n = -5.84006\ b_n = -5.84006\ m_n = -5.84006\ f(m_n) = -0.0000598237\ \varepsilon_n = 2.38419\times10^{-7}$

$n = 22\ a_n = -5.84006\ b_n = -5.84006\ m_n = -5.84006\ f(m_n) = 0.000229902\ \varepsilon_n = 1.19209\times10^{-7}$

$n = 23\ a_n = -5.84006\ b_n = -5.84006\ m_n = -5.84006\ f(m_n) = 0.0000850391\ \varepsilon_n = 5.96046\times10^{-8}$

$n = 24\ a_n = -5.84006\ b_n = -5.84006\ m_n = -5.84006\ f(m_n) = 0.0000126077\ \varepsilon_n = 2.98023\times10^{-8}$

$n = 25\ a_n = -5.84006\ b_n = -5.84006\ m_n = -5.84006\ f(m_n) = -0.000023608\ \varepsilon_n = 1.49012\times10^{-8}$

$n = 26\ a_n = -5.84006\ b_n = -5.84006\ m_n = -5.84006\ f(m_n) = -5.50016\times10^{-6}\ \varepsilon_n = 7.45058\times10^{-9}$

$n = 27\ a_n = -5.84006\ b_n = -5.84006\ m_n = -5.84006\ f(m_n) = 3.55377\times10^{-6}\ \varepsilon_n = 3.72529\times10^{-9}$

Пускаме с повече итерации и с повече значещи цифри в резултатите:

In[65]:=
```
f[x_] := x^5 + 103 Sin[x] - 34 x^3 - 23
a = -6.; b = -5.;
For[n = 0, n ≤ 27 , n++,
 Print["n = ", n, " a_n = ", SetPrecision[a, 15], " b_n = ", SetPrecision[b, 15],
  " m_n = ", SetPrecision[m = (a + b)/2, 15] , " f(m_n) = ", f[m], " ε_n = ", (b - a)/2];
 If[f[m] > 0, b = m, a = m]
]
```

n = 0 a_n = −6.00000000000000 b_n = −5.00000000000000
m_n = −5.50000000000000 f(m_n) = 673.577 ε_n = 0.5

n = 1 a_n = −6.00000000000000 b_n = −5.50000000000000
m_n = −5.75000000000000 f(m_n) = 207.58 ε_n = 0.25

n = 2 a_n = −6.00000000000000 b_n = −5.75000000000000
m_n = −5.87500000000000 f(m_n) = −86.6728 ε_n = 0.125

n = 3 a_n = −5.87500000000000 b_n = −5.75000000000000
m_n = −5.81250000000000 f(m_n) = 65.9004 ε_n = 0.0625

n = 4 a_n = −5.87500000000000 b_n = −5.81250000000000
m_n = −5.84375000000000 f(m_n) = −8.99803 ε_n = 0.03125

n = 5 a_n = −5.84375000000000 b_n = −5.81250000000000
m_n = −5.82812500000000 f(m_n) = 28.7949 ε_n = 0.015625

n = 6 a_n = −5.84375000000000 b_n = −5.82812500000000
m_n = −5.83593750000000 f(m_n) = 9.98477 ε_n = 0.0078125

n = 7 a_n = −5.84375000000000 b_n = −5.83593750000000
m_n = −5.83984375000000 f(m_n) = 0.515009 ε_n = 0.00390625

n = 8 a_n = −5.84375000000000 b_n = −5.83984375000000
m_n = −5.84179687500000 f(m_n) = −4.2361 ε_n = 0.00195313

n = 9 a_n = −5.84179687500000 b_n = −5.83984375000000
m_n = −5.84082031250000 f(m_n) = −1.85919 ε_n = 0.000976563

n = 10 a_n = −5.84082031250000 b_n = −5.83984375000000
m_n = −5.84033203125000 f(m_n) = −0.671752 ε_n = 0.000488281

n = 11 a_n = −5.84033203125000 b_n = −5.83984375000000
m_n = −5.84008789062500 f(m_n) = −0.0782872 ε_n = 0.000244141

n = 12 a_n = −5.84008789062500 b_n = −5.83984375000000
m_n = −5.83996582031250 f(m_n) = 0.218382 ε_n = 0.00012207

n = 13 a_n = −5.84008789062500 b_n = −5.83996582031250
m_n = −5.84002685546875 f(m_n) = 0.0700526 ε_n = 0.0000610352

n = 14 a_n = −5.84008789062500 b_n = −5.84002685546875
m_n = −5.84005737304688 f(m_n) = −0.00411599 ε_n = 0.0000305176

n = 15 a_n = −5.84005737304688 b_n = −5.84002685546875
m_n = −5.84004211425781 f(m_n) = 0.0329687 ε_n = 0.0000152588

n = 16 a_n = -5.84005737304688 b_n = -5.84004211425781
m_n = -5.84004974365234 f(m_n) = 0.0144264 ε_n = 7.62939×10^{-6}

n = 17 a_n = -5.84005737304688 b_n = -5.84004974365234
m_n = -5.84005355834961 f(m_n) = 0.00515523 ε_n = 3.8147×10^{-6}

n = 18 a_n = -5.84005737304688 b_n = -5.84005355834961
m_n = -5.84005546569824 f(m_n) = 0.000519628 ε_n = 1.90735×10^{-6}

n = 19 a_n = -5.84005737304688 b_n = -5.84005546569824
m_n = -5.84005641937256 f(m_n) = -0.00179818 ε_n = 9.53674×10^{-7}

n = 20 a_n = -5.84005641937256 b_n = -5.84005546569824
m_n = -5.84005594253540 f(m_n) = -0.000639275 ε_n = 4.76837×10^{-7}

n = 21 a_n = -5.84005594253540 b_n = -5.84005546569824
m_n = -5.84005570411682 f(m_n) = -0.0000598237 ε_n = 2.38419×10^{-7}

n = 22 a_n = -5.84005570411682 b_n = -5.84005546569824
m_n = -5.84005558490753 f(m_n) = 0.000229902 ε_n = 1.19209×10^{-7}

n = 23 a_n = -5.84005570411682 b_n = -5.84005558490753
m_n = -5.84005564451218 f(m_n) = 0.0000850391 ε_n = 5.96046×10^{-8}

n = 24 a_n = -5.84005570411682 b_n = -5.84005564451218
m_n = -5.84005567431450 f(m_n) = 0.0000126077 ε_n = 2.98023×10^{-8}

n = 25 a_n = -5.84005570411682 b_n = -5.84005567431450
m_n = -5.84005568921566 f(m_n) = -0.000023608 ε_n = 1.49012×10^{-8}

n = 26 a_n = -5.84005568921566 b_n = -5.84005567431450
m_n = -5.84005568176508 f(m_n) = -5.50016×10^{-6} ε_n = 7.45058×10^{-9}

n = 27 a_n = -5.84005568176508 b_n = -5.84005567431450
m_n = -5.84005567803979 f(m_n) = 3.55377×10^{-6} ε_n = 3.72529×10^{-9}

---

4. Оценка на грешката.

Цикъл при достигане на определена предварително зададена точност (със стоп-критерий):

In[68]:=
```
f[x_] := x^5 + 103 Sin[x] - 34 x^3 - 23
a = -6.; b = -5.;
epszad = 0.0001;
eps = Infinity; (*Стойност, по-голяма от зададената грешка*)
For[n = 0, eps > epszad , n++,
 Print["n = ", n, " aₙ = ", a, " bₙ = ", b, " mₙ = ",
  m = (a + b)/2 , " f(mₙ) = ", f[m], " εₙ = ", eps = (b - a)/2];
 If[f[m] > 0, b = m, a = m]
]
```

n = 0 a_n = -6. b_n = -5. m_n = -5.5 $f(m_n)$ = 673.577 ε_n = 0.5

n = 1 a_n = -6. b_n = -5.5 m_n = -5.75 $f(m_n)$ = 207.58 ε_n = 0.25

n = 2 a_n = -6. b_n = -5.75 m_n = -5.875 $f(m_n)$ = -86.6728 ε_n = 0.125

n = 3 a_n = -5.875 b_n = -5.75 m_n = -5.8125 $f(m_n)$ = 65.9004 ε_n = 0.0625

n = 4 a_n = -5.875 b_n = -5.8125 m_n = -5.84375 $f(m_n)$ = -8.99803 ε_n = 0.03125

n = 5 a_n = -5.84375 b_n = -5.8125 m_n = -5.82813 $f(m_n)$ = 28.7949 ε_n = 0.015625

n = 6 a_n = -5.84375 b_n = -5.82813 m_n = -5.83594 $f(m_n)$ = 9.98477 ε_n = 0.0078125

n = 7 a_n = -5.84375 b_n = -5.83594 m_n = -5.83984 $f(m_n)$ = 0.515009 ε_n = 0.00390625

n = 8 a_n = -5.84375 b_n = -5.83984 m_n = -5.8418 $f(m_n)$ = -4.2361 ε_n = 0.00195313

n = 9 a_n = -5.8418 b_n = -5.83984 m_n = -5.84082 $f(m_n)$ = -1.85919 ε_n = 0.000976563

n = 10 a_n = -5.84082 b_n = -5.83984 m_n = -5.84033 $f(m_n)$ = -0.671752 ε_n = 0.000488281

n = 11 a_n = -5.84033 b_n = -5.83984 m_n = -5.84009 $f(m_n)$ = -0.0782872 ε_n = 0.000244141

n = 12 a_n = -5.84009 b_n = -5.83984 m_n = -5.83997 $f(m_n)$ = 0.218382 ε_n = 0.00012207

n = 13 a_n = -5.84009 b_n = -5.83997 m_n = -5.84003 $f(m_n)$ = 0.0700526 ε_n = 0.0000610352

Колко биха били броя на итерациите за достигане на точност 0.0001 по метода на разполовяването, използвайки интервала от локализацията на корена .

In[73]:= $\mathbf{Log2}\left[\frac{-5-(-6)}{0.0001}\right] - 1$

Out[73]=

12.2877

Извод: Най-малкото цяло число, което е по-голямо от 12.28 е 13. Следователно са необходими минимум 13 итерации за достигане на исканата точност.