Метод на Гаус-Жордан

Дадена е следната задача A.x = b, където

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 5.6 & -3.45 \\ 2 & 7.56 & -2.34 & 2 \\ 0 & -0.89 & 0 & 3.14 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} -6 \\ 8.89 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

1. Да се реши по метода на Гаус-Жордан.
2. В процеса на решаване да се пресметне детерминантата на матрицата A.
3. По метода на Гаус-Жордан да се намери обратната матрица на A.

Въвеждаме разширената матрица:

In[248]:= $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & -6 \\ 3 & 5 & 5.6 & -3.45 & 8.89 \\ 2 & 7.56 & -2.34 & 2 & -4 \\ 0 & -0.89 & 0 & 3.14 & 5 \end{pmatrix}$

```
Out[248]= {{1, 2, 0, 2, -6}, {3, 5, 5.6, -3.45, 8.89},
  {2, 7.56, -2.34, 2, -4}, {0, -0.89, 0, 3.14, 5}}
```

---

1. Постъпково прилагане на метода на Гаус-Жордан

Броят на стъпките е равен на броя на стълбовете на основната матрица

```
In[249]:= Length[A]
Out[249]= 4
```

Първа стъпка - целта е в A да се получи първи стълб като на единичната матрица.

Първи етап - получаваме единица на мястото на главния елемент $a_{11} = 1$.

In[250]:= $A[[1]] = \dfrac{A[[1]]}{A[[1, 1]]}$

```
Out[250]= {1, 2, 0, 2, -6}
```

Втори етап - получаваме на нули във всички останали елементи от стълба.

Променяме втория ред

```
In[251]:= A[[2]] = A[[2]] - A[[2, 1]] * A[[1]]
Out[251]= {0, -1, 5.6, -9.45, 26.89}
```

Променяме третия ред

```
In[252]:= A[[3]] = A[[3]] - A[[3, 1]] * A[[1]]
Out[252]= {0, 3.56, -2.34, -2, 8}
```

Променяме четвъртия ред

```
In[253]:= A[[4]] = A[[4]] - A[[4, 1]] * A[[1]]
Out[253]= {0, -0.89, 0, 3.14, 5}
```

```
In[254]:= A // MatrixForm
```

Out[254]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & -1 & 5.6 & -9.45 & 26.89 \\ 0 & 3.56 & -2.34 & -2 & 8 \\ 0 & -0.89 & 0 & 3.14 & 5 \end{pmatrix}$$

Втора стъпка - целта е в A да се получи втори стълб като на единичната матрица.

Първи етап - получаваме единица на мястото на главния елемент $a_{22} = 1$.

In[255]:= $A[[2]] = \dfrac{A[[2]]}{A[[2, 2]]}$

```
Out[255]= {0, 1, -5.6, 9.45, -26.89}
```

Втори етап - получаваме на нули във всички останали елементи от стълба.

Променяме първия ред

```
In[256]:= A[[1]] = A[[1]] - A[[1, 2]] * A[[2]]
Out[256]= {1, 0, 11.2, -16.9, 47.78}
```

Променяме третия ред

```
In[257]:= A[[3]] = A[[3]] - A[[3, 2]] * A[[2]]
Out[257]= {0., 0., 17.596, -35.642, 103.728}
```

Променяме четвъртия ред

```
In[258]:= A[[4]] = A[[4]] - A[[4, 2]] * A[[2]]
Out[258]= {0., 0., -4.984, 11.5505, -18.9321}
```

```
In[259]:= A // MatrixForm
```

Out[259]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 11.2 & -16.9 & 47.78 \\ 0 & 1 & -5.6 & 9.45 & -26.89 \\ 0. & 0. & 17.596 & -35.642 & 103.728 \\ 0. & 0. & -4.984 & 11.5505 & -18.9321 \end{pmatrix}$$

Трета стъпка - целта е в A да се получи трети стълб като на единичната матрица.

Първи етап - получаваме единица на мястото на главния елемент $a_{33} = 1$.

Променяме третия ред

In[260]:=
```
A[[3]] = A[[3]] / A[[3, 3]]
```

Out[260]= {0., 0., 1., -2.02557, 5.895}

Втори етап - получаваме на нули във всички останали елементи от стълба.

Променяме първия ред

In[261]:=
```
A[[1]] = A[[1]] - A[[1, 3]] * A[[3]]
```

Out[261]= {1., 0., 0., 5.78643, -18.244}

Променяме втория ред

In[262]:=
```
A[[2]] = A[[2]] - A[[2, 3]] * A[[3]]
```

Out[262]= {0., 1., 0., -1.89321, 6.12199}

Променяме четвъртия ред

In[263]:=
```
A[[4]] = A[[4]] - A[[4, 3]] * A[[3]]
```

Out[263]= {0., 0., 0., 1.45504, 10.4486}

In[264]:=
```
A // MatrixForm
```

Out[264]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1. & 0. & 0. & 5.78643 & -18.244 \\ 0. & 1. & 0. & -1.89321 & 6.12199 \\ 0. & 0. & 1. & -2.02557 & 5.895 \\ 0. & 0. & 0. & 1.45504 & 10.4486 \end{pmatrix}$$

Четвърта стъпка - целта е в A да се получи четвърти стълб като на единичната матрица.

Първи етап - получаваме единица на мястото на главния елемент $a_{44} = 1$.

Променяме четвъртия ред

In[265]:=
```
A[[4]] = A[[4]] / A[[4, 4]]
```

Out[265]= {0., 0., 0., 1., 7.18096}

Втори етап - получаваме на нули във всички останали елементи от стълба.

Променяме първия ред

```
In[266]:= A[[1]] = A[[1]] - A[[1, 4]] * A[[4]]
Out[266]= {1., 0., 0., 0., -59.7961}
```

Променяме втория ред

```
In[267]:= A[[2]] = A[[2]] - A[[2, 4]] * A[[4]]
Out[267]= {0., 1., 0., 0., 19.7171}
```

Променяме третия ред

```
In[268]:= A[[3]] = A[[3]] - A[[3, 4]] * A[[4]]
Out[268]= {0., 0., 1., 0., 20.4406}
```

```
In[269]:= A // MatrixForm
```

Out[269]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1. & 0. & 0. & 0. & -59.7961 \\ 0. & 1. & 0. & 0. & 19.7171 \\ 0. & 0. & 1. & 0. & 20.4406 \\ 0. & 0. & 0. & 1. & 7.18096 \end{pmatrix}$$

2. Съставяне на програмен код

Решаване на СЛАУ

In[270]:= $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & -6 \\ 3 & 5 & 5.6 & -3.45 & 8.89 \\ 2 & 7.56 & -2.34 & 2 & -4 \\ 0 & -0.89 & 0 & 3.14 & 5 \end{pmatrix};$

```
In[271]:= n = Length[A];
```

```
In[272]:= For[ col = 1, col ≤ n, col++,
  (*Първи етап-получаваме единица на мястото на главния елемент*)
  A[[col]] = A[[col]] / A[[col, col]];
  (*Втори етап-получаваме на нули във всички останали елементи от стълба.*)
  For[row = 1, row ≤ n, row++,
   If[row ≠ col, A[[row]] = A[[row]] - A[[row, col]] * A[[col]]]
  ];
  Print[A // MatrixForm]
 ]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & -1 & 5.6 & -9.45 & 26.89 \\ 0 & 3.56 & -2.34 & -2 & 8 \\ 0 & -0.89 & 0 & 3.14 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 11.2 & -16.9 & 47.78 \\ 0 & 1 & -5.6 & 9.45 & -26.89 \\ 0. & 0. & 17.596 & -35.642 & 103.728 \\ 0. & 0. & -4.984 & 11.5505 & -18.9321 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1. & 0. & 0. & 5.78643 & -18.244 \\ 0. & 1. & 0. & -1.89321 & 6.12199 \\ 0. & 0. & 1. & -2.02557 & 5.895 \\ 0. & 0. & 0. & 1.45504 & 10.4486 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1. & 0. & 0. & 0. & -59.7961 \\ 0. & 1. & 0. & 0. & 19.7171 \\ 0. & 0. & 1. & 0. & 20.4406 \\ 0. & 0. & 0. & 1. & 7.18096 \end{pmatrix}$$

3. Намиране на детерминантата

In[273]:=
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & -6 \\ 3 & 5 & 5.6 & -3.45 & 8.89 \\ 2 & 7.56 & -2.34 & 2 & -4 \\ 0 & -0.89 & 0 & 3.14 & 5 \end{pmatrix};$$

In[274]:=
```
n = Length[A];
```

In[275]:=
```
deter = 1;
```

In[276]:=
```
For[col = 1, col ≤ n, col++,
 deter = deter * A⟦col, col⟧;
 (*Първи етап-получаваме единица на мястото на главния елемент*)
 A⟦col⟧ = A⟦col⟧ / A⟦col, col⟧;
 (*Втори етап-получаваме на нули във всички останали елементи
   от стълба.*)
 For[row = 1, row ≤ n, row++,
  If[row ≠ col, A⟦row⟧ = A⟦row⟧ - A⟦row, col⟧ * A⟦col⟧]
 ];
 Print[A // MatrixForm]
]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & -1 & 5.6 & -9.45 & 26.89 \\ 0 & 3.56 & -2.34 & -2 & 8 \\ 0 & -0.89 & 0 & 3.14 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 11.2 & -16.9 & 47.78 \\ 0 & 1 & -5.6 & 9.45 & -26.89 \\ 0. & 0. & 17.596 & -35.642 & 103.728 \\ 0. & 0. & -4.984 & 11.5505 & -18.9321 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1. & 0. & 0. & 5.78643 & -18.244 \\ 0. & 1. & 0. & -1.89321 & 6.12199 \\ 0. & 0. & 1. & -2.02557 & 5.895 \\ 0. & 0. & 0. & 1.45504 & 10.4486 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1. & 0. & 0. & 0. & -59.7961 \\ 0. & 1. & 0. & 0. & 19.7171 \\ 0. & 0. & 1. & 0. & 20.4406 \\ 0. & 0. & 0. & 1. & 7.18096 \end{pmatrix}$$

In[277]:=
```
Print["Детерминантата на матрицата е ", deter]
```

Детерминантата на матрицата е -25.6029

4. Намиране на обратната матрица

In[278]:=
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & -6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 5.6 & -3.45 & 8.89 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 7.56 & -2.34 & 2 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0.89 & 0 & 3.14 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

In[279]:=
```
n = Length[A];
```

In[280]:=
```
deter = 1;
```

In[281]:=
```
For[col = 1, col ≤ n, col++,
 deter = deter * A[[col, col]];
 (*Първи етап-получаваме единица на мястото на главния елемент*)
 A[[col]] = A[[col]] / A[[col, col]];
 (*Втори етап-получаваме на нули във всички останали елементи
   от стълба.*)
 For[row = 1, row ≤ n, row++,
  If[row ≠ col, A[[row]] = A[[row]] - A[[row, col]] * A[[col]]]
 ];
 Print[A // MatrixForm]
]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & -6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 5.6 & -9.45 & 26.89 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3.56 & -2.34 & -2 & 8 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0.89 & 0 & 3.14 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 11.2 & -16.9 & 47.78 & -5 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5.6 & 9.45 & -26.89 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0. & 0. & 17.596 & -35.642 & 103.728 & -12.68 & 3.56 & 1. & 0. \\ 0. & 0. & -4.984 & 11.5505 & -18.9321 & 2.67 & -0.89 & 0. & 1. \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1. & 0. & 0. & 5.78643 & -18.244 & 3.07093 & -0.26597 & -0.636508 & 0. \\ 0. & 1. & 0. & -1.89321 & 6.12199 & -1.03546 & 0.132985 & 0.318254 & 0. \\ 0. & 0. & 1. & -2.02557 & 5.895 & -0.720618 & 0.202319 & 0.0568311 & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 1.45504 & 10.4486 & -0.921562 & 0.118356 & 0.283246 & 1. \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1. & 0. & 0. & 0. & -59.7961 & 6.73581 & -0.736652 & -1.76293 & -3.97682 \\ 0. & 1. & 0. & 0. & 19.7171 & -2.23455 & 0.286983 & 0.686798 & 1.30114 \\ 0. & 0. & 1. & 0. & 20.4406 & -2.00353 & 0.367084 & 0.451141 & 1.39211 \\ 0. & 0. & 0. & 1. & 7.18096 & -0.633359 & 0.0813424 & 0.194666 & 0.687267 \end{pmatrix}$$