Метод на Гаус-Жордан

Дадена е система линейни алгебрични уравнения:

$x_1 + 2\,x_2 - x_4 = 0$

$-3.12\,x_1 + 5.76\,x_2 - 21\,x_3 = -0.9$

$89\,x_1 + 7.87\,x_3 = 90$

$-9.8\,x_2 + 34\,x_4 = -0.34$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -3.12 & 5.76 & -21 & 0 \\ 89 & 0 & 7.87 & 0 \\ 0 & -9.8 & 0 & 34 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.9 \\ 90 \\ -0.34 \end{pmatrix}$$

1. Да се реши по метода на Гаус-Жордан.
2. В процеса на решаване да се пресметне детерминантата на матрицата A.
3. По метода на Гаус-Жордан да се намери обратната матрица на A.

Въвеждаме разширената матрица:

In[386]:=
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ -3.12 & 5.76 & -21 & 0 & -0.9 \\ 89 & 0 & 7.87 & 0 & 90 \\ 0 & -9.8 & 0 & 34 & -0.34 \end{pmatrix}$$

Out[386]=
```
{{1, 2, 0, -1, 0}, {-3.12, 5.76, -21, 0, -0.9},
 {89, 0, 7.87, 0, 90}, {0, -9.8, 0, 34, -0.34}}
```

---

1. Постъпково прилагане на метода на Гаус-Жордан

Броят на стъпките е равен на броя на стълбовете на основната матрица

In[387]:=
```
Length[A]
```

Out[387]= 4

Първа стъпка - целта е в A да се получи първи стълб като на единичната матрица.

Първи етап - получаваме единица на мястото на главния елемент $a_{11} = 1$.

In[388]:=
$$A[\![1]\!] = \frac{A[\![1]\!]}{A[\![1,\ 1]\!]}$$

Out[388]=
```
{1, 2, 0, -1, 0}
```

Втори етап - получаваме на нули във всички останали елементи от стълба.

Променяме втория ред

```
In[389]:= A[[2]] = A[[2]] - A[[2, 1]] * A[[1]]
Out[389]= {0., 12., -21., -3.12, -0.9}
```

Променяме третия ред

```
In[390]:= A[[3]] = A[[3]] - A[[3, 1]] * A[[1]]
Out[390]= {0, -178, 7.87, 89, 90}
```

Променяме четвъртия ред

```
In[391]:= A[[4]] = A[[4]] - A[[4, 1]] * A[[1]]
Out[391]= {0, -9.8, 0, 34, -0.34}
```

```
In[392]:= A // MatrixForm
```

Out[392]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0. & 12. & -21. & -3.12 & -0.9 \\ 0 & -178 & 7.87 & 89 & 90 \\ 0 & -9.8 & 0 & 34 & -0.34 \end{pmatrix}$$

Втора стъпка - целта е в A да се получи втори стълб като на единичната матрица.

Първи етап - получаваме единица на мястото на главния елемент $a_{22} = 1$.

In[393]:= $A[[2]] = \dfrac{A[[2]]}{A[[2, 2]]}$

```
Out[393]= {0., 1., -1.75, -0.26, -0.075}
```

Втори етап - получаваме на нули във всички останали елементи от стълба.

Променяме първия ред

```
In[394]:= A[[1]] = A[[1]] - A[[1, 2]] * A[[2]]
Out[394]= {1., 0., 3.5, -0.48, 0.15}
```

Променяме третия ред

```
In[395]:= A[[3]] = A[[3]] - A[[3, 2]] * A[[2]]
Out[395]= {0., 0., -303.63, 42.72, 76.65}
```

Променяме четвъртия ред

```
In[396]:= A[[4]] = A[[4]] - A[[4, 2]] * A[[2]]
Out[396]= {0., 0., -17.15, 31.452, -1.075}
```

In[397]:= `A // MatrixForm`

Out[397]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1. & 0. & 3.5 & -0.48 & 0.15 \\ 0. & 1. & -1.75 & -0.26 & -0.075 \\ 0. & 0. & -303.63 & 42.72 & 76.65 \\ 0. & 0. & -17.15 & 31.452 & -1.075 \end{pmatrix}$$

Трета стъпка - целта е в A да се получи трети стълб като на единичната матрица.

Първи етап - получаваме единица на мястото на главния елемент $a_{33} = 1$.

Променяме третия ред

In[398]:= $A[[3]] = \frac{A[[3]]}{A[[3, 3]]}$

Out[398]= {0., 0., 1., -0.140698, -0.252445}

Втори етап - получаваме на нули във всички останали елементи от стълба.

Променяме първия ред

In[399]:= `A[[1]] = A[[1]] - A[[1, 3]] * A[[3]]`

Out[399]= {1., 0., 0., 0.0124415, 1.03356}

Променяме втория ред

In[400]:= `A[[2]] = A[[2]] - A[[2, 3]] * A[[3]]`

Out[400]= {0., 1., 0., -0.506221, -0.516779}

Променяме четвъртия ред

In[401]:= `A[[4]] = A[[4]] - A[[4, 3]] * A[[3]]`

Out[401]= {0., 0., 0., 29.039, -5.40444}

In[402]:= `A // MatrixForm`

Out[402]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1. & 0. & 0. & 0.0124415 & 1.03356 \\ 0. & 1. & 0. & -0.506221 & -0.516779 \\ 0. & 0. & 1. & -0.140698 & -0.252445 \\ 0. & 0. & 0. & 29.039 & -5.40444 \end{pmatrix}$$

Четвърта стъпка - целта е в A да се получи четвърти стълб като на единичната матрица.

Първи етап - получаваме единица на мястото на главния елемент $a_{44} = 1$.

Променяме четвъртия ред

In[403]:=
$$A[[4]] = \frac{A[[4]]}{A[[4, 4]]}$$

Out[403]= {0., 0., 0., 1., -0.186109}

Втори етап - получаваме на нули във всички останали елементи от стълба.

Променяме първия ред

In[404]:= `A[[1]] = A[[1]] - A[[1, 4]] * A[[4]]`

Out[404]= $\{1., 0., 0., 1.73472\times10^{-18}, 1.03587\}$

Променяме втория ред

In[405]:= `A[[2]] = A[[2]] - A[[2, 4]] * A[[4]]`

Out[405]= $\{0., 1., 0., -1.11022\times10^{-16}, -0.610992\}$

Променяме третия ред

In[406]:= `A[[3]] = A[[3]] - A[[3, 4]] * A[[4]]`

Out[406]= $\{0., 0., 1., -2.77556\times10^{-17}, -0.278631\}$

In[407]:= `A // MatrixForm`

Out[407]//MatrixForm=
$$\begin{pmatrix} 1. & 0. & 0. & 1.73472\times10^{-18} & 1.03587 \\ 0. & 1. & 0. & -1.11022\times10^{-16} & -0.610992 \\ 0. & 0. & 1. & -2.77556\times10^{-17} & -0.278631 \\ 0. & 0. & 0. & 1. & -0.186109 \end{pmatrix}$$

2. Съставяне на програмен код

Решаване на СЛАУ

In[408]:=
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ -3.12 & 5.76 & -21 & 0 & -0.9 \\ 89 & 0 & 7.87 & 0 & 90 \\ 0 & -9.8 & 0 & 34 & -0.34 \end{pmatrix};$$

In[409]:= `n = Length[A];`

In[410]:=
```
For[col = 1, col ≤ n, col++,
 (*Първи етап-получаваме единица на мястото на главния елемент*)
 A[[col]] = A[[col]] / A[[col, col]];
 (*Втори етап-получаваме на нули във всички останали елементи от стълба.*)
 For[row = 1, row ≤ n, row++,
  If[row ≠ col, A[[row]] = A[[row]] - A[[row, col]] * A[[col]]]
 ];
 Print[A // MatrixForm]
]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0. & 12. & -21. & -3.12 & -0.9 \\ 0 & -178 & 7.87 & 89 & 90 \\ 0 & -9.8 & 0 & 34 & -0.34 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1. & 0. & 3.5 & -0.48 & 0.15 \\ 0. & 1. & -1.75 & -0.26 & -0.075 \\ 0. & 0. & -303.63 & 42.72 & 76.65 \\ 0. & 0. & -17.15 & 31.452 & -1.075 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1. & 0. & 0. & 0.0124415 & 1.03356 \\ 0. & 1. & 0. & -0.506221 & -0.516779 \\ 0. & 0. & 1. & -0.140698 & -0.252445 \\ 0. & 0. & 0. & 29.039 & -5.40444 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1. & 0. & 0. & 1.73472\times10^{-18} & 1.03587 \\ 0. & 1. & 0. & -1.11022\times10^{-16} & -0.610992 \\ 0. & 0. & 1. & -2.77556\times10^{-17} & -0.278631 \\ 0. & 0. & 0. & 1. & -0.186109 \end{pmatrix}$$

3. Намиране на детерминантата

In[411]:=
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ -3.12 & 5.76 & -21 & 0 & -0.9 \\ 89 & 0 & 7.87 & 0 & 90 \\ 0 & -9.8 & 0 & 34 & -0.34 \end{pmatrix};$$

In[412]:=
```
n = Length[A];
```

In[413]:=
```
deter = 1;
```

In[414]:=
```
For[col = 1, col ≤ n, col++,
 deter = deter * A[[col, col]];
 (*Първи етап-получаваме единица на мястото на главния елемент*)
 A[[col]] = A[[col]] / A[[col, col]];
 (*Втори етап-получаваме на нули във всички останали елементи
   от стълба.*)
 For[row = 1, row ≤ n, row++,
  If[row ≠ col, A[[row]] = A[[row]] - A[[row, col]] * A[[col]]]
 ];
 Print[A // MatrixForm]
]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0. & 12. & -21. & -3.12 & -0.9 \\ 0 & -178 & 7.87 & 89 & 90 \\ 0 & -9.8 & 0 & 34 & -0.34 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1. & 0. & 3.5 & -0.48 & 0.15 \\ 0. & 1. & -1.75 & -0.26 & -0.075 \\ 0. & 0. & -303.63 & 42.72 & 76.65 \\ 0. & 0. & -17.15 & 31.452 & -1.075 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1. & 0. & 0. & 0.0124415 & 1.03356 \\ 0. & 1. & 0. & -0.506221 & -0.516779 \\ 0. & 0. & 1. & -0.140698 & -0.252445 \\ 0. & 0. & 0. & 29.039 & -5.40444 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1. & 0. & 0. & 1.73472\times10^{-18} & 1.03587 \\ 0. & 1. & 0. & -1.11022\times10^{-16} & -0.610992 \\ 0. & 0. & 1. & -2.77556\times10^{-17} & -0.278631 \\ 0. & 0. & 0. & 1. & -0.186109 \end{pmatrix}$$

In[415]:=
```
Print["Детерминантата на матрицата е ", deter]
```

Детерминантата на матрицата е -105 805.

4. Намиране на обратната матрица

In[416]:=

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3.12 & 5.76 & -21 & 0 & -0.9 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 89 & 0 & 7.87 & 0 & 90 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -9.8 & 0 & 34 & -0.34 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

In[417]:=
```
n = Length[A];
```

In[418]:=
```
deter = 1;
```

In[419]:=
```
For[ col = 1, col ≤ n, col++,
 deter = deter * A[[col, col]];
 (*Първи етап-получаваме единица на мястото на главния елемент*)
 A[[col]] = A[[col]] / A[[col, col]];
 (*Втори етап-получаваме на нули във всички останали елементи
   от стълба.*)
 For[row = 1, row ≤ n, row++,
  If[row ≠ col, A[[row]] = A[[row]] - A[[row, col]] * A[[col]]]
 ];
 Print[A // MatrixForm]
]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0. & 12. & -21. & -3.12 & -0.9 & 3.12 & 1. & 0. & 0. \\ 0 & -178 & 7.87 & 89 & 90 & -89 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -9.8 & 0 & 34 & -0.34 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1. & 0. & 3.5 & -0.48 & 0.15 & 0.48 & -0.166667 & 0. & 0. \\ 0. & 1. & -1.75 & -0.26 & -0.075 & 0.26 & 0.0833333 & 0. & 0. \\ 0. & 0. & -303.63 & 42.72 & 76.65 & -42.72 & 14.8333 & 1. & 0. \\ 0. & 0. & -17.15 & 31.452 & -1.075 & 2.548 & 0.816667 & 0. & 1. \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1. & 0. & 0. & 0.0124415 & 1.03356 & -0.0124415 & 0.00431995 & 0.0115272 & 0. \\ 0. & 1. & 0. & -0.506221 & -0.516779 & 0.506221 & -0.00215998 & -0.00576359 & 0. \\ 0. & 0. & 1. & -0.140698 & -0.252445 & 0.140698 & -0.0488533 & -0.00329348 & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 29.039 & -5.40444 & 4.96096 & -0.0211678 & -0.0564832 & 1. \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1. & 0. & 0. & 1.73472\times 10^{-18} & 1.03587 & -0.0145669 & 0.00432902 & 0.0115514 & -0.000428439 \\ 0. & 1. & 0. & -1.11022\times 10^{-16} & -0.610992 & 0.592702 & -0.00252898 & -0.00674823 & 0.0174324 \\ 0. & 0. & 1. & -2.77556\times 10^{-17} & -0.278631 & 0.164734 & -0.0489559 & -0.00356715 & 0.00484512 \\ 0. & 0. & 0. & 1. & -0.186109 & 0.170838 & -0.000728941 & -0.00194508 & 0.0344364 \end{pmatrix}$$