

27.05.2022

A3 N°2 (Lesson 3)

①

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(23 - 2n^2)(3n^2 + 17)^2}{4n^6 + n - 1} = \frac{-2 \cdot 3^2}{4} = -\frac{9}{2}$$

$\Rightarrow 6$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(97 + 2n)^3}{2n(3n^2 + 15) + 8n} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 + 13n(n + 18)}{(27 - n)(2n + 19)^2} = \frac{2}{-1 \cdot 2^2} = -\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow 6n^3$ степеней совпадают (сов. коэф.)

n^4

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 1} - n) =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 1} - n) \cdot \frac{\sqrt{n^2 + 1} + n}{\sqrt{n^2 + 1} + n} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 1 - n^2}{\sqrt{n^2 + 1} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1} + n} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$g) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-4)^n + 5 \cdot 7^n}{(-4)^{n-1} + 7^{n+2}} = \frac{7^n \cdot \left(\left(-\frac{4}{7} \right)^n + 5 \right)}{7^n \cdot \left(-\frac{1}{4} \right) \cdot \left(\left(-\frac{4}{7} \right)^n + 49 \right)} = \frac{5}{49}$$

② Представьте 1 в виде суммы трех

обыкновенных дробей с разными

знаменателями и числит. = 1 $\frac{1}{n} = \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{n+1}$

$$1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{6}\right)$$

③ $1 = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{42} + \frac{1}{7} + \frac{1}{12} + \frac{1}{4}$

④ Показ. критерием Коши, докажите сходимость последовательн.

$$a_n = \frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \frac{\sin 3}{2^3} + \dots + \frac{\sin n}{2^n} \Rightarrow$$

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{ \underbrace{\frac{\sin 1}{2}}_{a_1}, \underbrace{\frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2}}_{a_2}, \dots, a_n, \dots \right\}$$

Какой член последов. можно взять в качестве предельн. с точность $\varepsilon = 10^{-7}$?

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon), \forall n > N(\varepsilon) \forall k \geq 1: |a_n - a_{n+k}| < \varepsilon$$

Найдем связь $N(\varepsilon)$

$$a_n = \frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \frac{\sin 3}{2^3} + \dots + \frac{\sin n}{2^n}$$

$$a_{n+k} = \frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \frac{\sin 3}{2^3} + \dots + \frac{\sin (n+k)}{2^{n+k}}$$

св-во треугольника

$$|a_n - a_{n+k}| = \left| \frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}} + \frac{\sin(n+2)}{2^{n+2}} + \dots + \frac{\sin(n+k)}{2^{n+k}} \right| <$$

$$\leq \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \dots + \frac{1}{2^{n+k}} =$$

$$= \frac{1}{2^n} \cdot \frac{\frac{1}{2} \cdot (1 - \frac{1}{2^k})}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n} \cdot (1 - \frac{1}{2^k}) < \frac{1}{2^n} < \boxed{\frac{1}{2^{N(\epsilon)}}} = \epsilon$$

По нашим $\exists N(\epsilon)$ при этой связи выполняется
 $|a_n - a_{n+k}| < \epsilon$, то ряд сходится

$$\epsilon = 10^{-7}$$

$$N(\epsilon) = -\log_2 \epsilon$$

$$N(10^{-7}) = -\log_2 10^{-7} =$$

$= 7 \cdot \log_2 10 \approx 23,25$ т.е. в качестве
 числа можно взять 24 любой член