27.05.2022

ДЗ №2 (Lesson 3)

(1)

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(23-2n^2)(3n^2+17)^2}{4n^6+n-1} = \dfrac{-2\cdot 3^2}{4} = -\dfrac{9}{2}$

$\Rightarrow 6$

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(97-2n)^3}{2n(3n^2+15)+8n} = \dfrac{2}{6} = -\dfrac{4}{3}$

$\Rightarrow 6n^3$

степени совпадают (соб. коэф)

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^3+13n(n+18)}{(27-n)(2n+19)^2} = \dfrac{2}{-1\cdot 2^2} = -\dfrac{1}{2}$

n^4

г) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+1}-n\right) =$

$\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+1}-n\right)\cdot \dfrac{\sqrt{n^2+1}-n}{\sqrt{n^2+1}-n} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+1-n^2}{\sqrt{n^2+1}-n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}-n} = \dfrac{1}{\infty} = 0$

д) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-4)^n+5\cdot 7^n}{(-4)^{n-1}+7^{n+2}} = \dfrac{7^n\cdot\left(\left(-\frac{4}{7}\right)^n+5\right)}{7^n\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(\left(-\frac{4}{7}\right)^n+49\right)} = \dfrac{5}{49}$

(2) Представьте 1 в виде суммы трех обыкновенных дробей с разными знаменателями и числит. = 1.

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n\cdot(n+1)} + \frac{1}{n+1}$$

$$1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$$

(3) $$1 = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{42} + \frac{1}{7} + \frac{1}{12} + \frac{1}{4}$$

(4) Полоз. критерием Коши, докажите сходимость последовательн.

$$a_n = \frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \frac{\sin 3}{2^3} + \dots \frac{\sin n}{2^n} \Rightarrow$$

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \Big\{\underbrace{\frac{\sin 1}{2}}_{a_1}, \underbrace{\frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2}}_{a_2}, \dots, a_n \dots\Big\}$$

Какой член последов. можно взять в качестве предела с точность $\varepsilon = 10^{-7}$?

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon), \forall n > N(\varepsilon) \ \forall k \geq 1: |a_n - a_{n+k}| < \varepsilon$$

Найдем связь $N(\varepsilon)$

$$a_n = \overbrace{\frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \frac{\sin 3}{2^3} + \dots \frac{\sin n}{2^n}}^{n}$$

$$a_{n+k} = \overbrace{\frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \frac{\sin 3}{2^3} + \frac{\sin(n+k)}{2^{n+k}}}^{n+k}$$

св-во треугольника

$$|a_n - a_{n+k}| = \left|\frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}} + \frac{\sin(n+2)}{2^{n+2}} + \ldots \frac{|\sin(n+k|}{2^{n+k}}\right| \leqslant$$

$S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$

$$\leqslant \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \ldots + \frac{1}{2^{n+n}} =$$

$$= \frac{1}{2^n} \cdot \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{2^k}\right)}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n}\cdot\left(1-\frac{1}{2^k}\right) < \frac{1}{2^n} \boxed{< \frac{1}{2^{N(\varepsilon)}} = \varepsilon}$$

Мы нашли $\exists N(\varepsilon)$, при этой связи выполняется $|a_n - a_{n+k}| < \varepsilon$, то последов. ряд сходится

$\varepsilon = 10^{-7}$

$$N(\varepsilon) = -\log_2 \varepsilon$$

$$N(10^{-7}) = -\log_2 10^{-7} =$$

$= 7 \cdot \log_2 10 \approx 23{,}25$ те в качестве предела можно взять любой член 24